Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие

Составители Г.П. Вохминцева,

Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко

Благовещенск

Издательство АмГУ

2012

ББК 22.143я73
Л59

Рецензенты:

Ланкин С.В., зав. кафедрой общей физики БГПУ, д-р физ.-мат. наук, профессор, заслуженный работник высшей школы;

Емельянов А.М., зав. каф. высшей математики ДальГАУ, д-р техн. наук

Вохминцева, Г.П., Торопчина, Г.Н., Шевченко, И.Н. (составители)

Л59 Линейная алгебра: Учебно-методическое пособие / составители Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2012. – 120 с.

Пособие предназначено для студентов первого курса экономических специальностей. В нем рассматриваются краткие теоретические сведения, решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, тесты.

ББК 22.143я73

ВВЕДЕНИЕ

Математика играет все возрастающую роль в естественно-научных и гуманитарных исследованиях. Являясь универсальным языком науки, математика позволяет не только осуществлять различные количественные расчеты, но и является средством предельно четкой формулировки понятий и проблем той или иной отрасли знаний. Математика стала элементом общечеловеческой культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного менеджера.

Целью курса является формирование у слушателей высокой математической культуры, в том числе:

овладение основными знаниями по математике, необходимыми в практической экономической деятельности;

развитие логического мышления и умения оперировать абстрактными объектами, привитие навыков корректного употребления математических понятий и символов для выражения различных количественных и качественных отношений;

выработка представления о роли и месте математики в мировой культуре;

ясное понимание математической составляющей в общей подготовке специалиста в области экономики.

Для реализации поставленной цели в ходе изучения курса «Математика» решается задача обеспечения широкого, общего и достаточного фундаментального математического образования студентов. Фундаментальность подготовки включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, разумную точность формулировок математических свойств исследуемых объектов, логическую строгость изложения предмета, опирающуюся на адекватный современный математический язык.

Учебная задача курса. В результате изучения курса «Математика» студенты должны:

знать и уметь использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач экономики;

иметь представление о математическом моделировании простейших экономических проблем и содержательно интерпретировать получаемые количественные результаты их решений;

овладеть навыками самостоятельной работы и постоянно пополнять свой уровень знаний в свете современных тенденций развития математического инструментария для решения задач.

Начиная с первого курса, вводится рейтинговая система оценки знаний. Рекомендуем внимательно изучить «Положение о рейтинговой системе оценки успеваемости студентов» и неукоснительно следовать требованиям этого положения.

- Главное условие успешности освоения математики как учебной дисЦиплины ─ систематические занятия математикой.
- При чтении лекций, конспектировании материала сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования.
- Для более полного понимания изучаемого материала следует задавать вопросы непосредственно на лекции и практических занятиях, чтобы не оставлять «белых пятен» в изучении, полезно быть активным на занятиях.
- Приходить на практические занятия подготовившись: повторить изученный теоретический материал, выучить формулы, решить самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем.
- Домашние задания, которые предлагаются после каждого практического занятия рекомендуется выполнять на основе рассмотренных на занятий самостоятельно и сразу же после него (в течение первых двух дней) , что позволит установить изучаемый материал.
- Не следует бояться решать задачи, принцип должен быть таким: либо мы «победим» задачу, либо она нас.
- Систематически посещать лекции, практические занятия и

консультации. Если по каким- либо причинам было пропущено занятие, то лучше всего не переписывать конспект или решение задачи с чужой тетради, а попробовать заполнить опорный конспект лекции или решить задачи самостоятельно, используя при этом учебник.

- При конспектировании наиболее важный материал следует выделять (подчеркнуть).
- Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.
- При подготовке к контрольной работе нужно просмотреть весь лекционный материал, задачи, решаемые на практических занятиях и при самоподготовке.
- При подготовке к зачету или экзамену следует не просто разобраться в лекционном материале, а попробовать, не подглядывая в конспекты или учебники, изложить письменно наиболее существенные понятия, утверждения, формулы по каждому разделу программы.
- На зачете или экзамене в процессе подготовке к ответу, прежде чем приступить к подробному изложению ответа на вопрос, следует составить (письменно или устно) план ответа.
- При ответе на теоретические вопрос на зачете или экзамене, постарайтесь раскрыть суть вопроса, сопровождая свой ответ различными примерами (допускается изложение теории на примерах и задачах, их решении; в этом случае преподаватель вправе задать уточняющие вопросы.

Критерии оценок

- ОТЛИЧНО – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы; четко и правильно даны определения; корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания; ответ самостоятельный и исчерпывающий, без наводящих вопросов.

• ХОРОШО – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения и понятия, ответ самостоятельный, но допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или выводы, которые исправляются по дополнительным вопросам экзаменатора.

• УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – усвоено основное содержание учебного материала, но изложение не всегда последовательно; определение понятий нечеткое; допущены ошибки при изложении, в использовании научных терминов, определений.

П О Л О Ж Е Н И Е

о рейтинговой системе оценки успеваемости студентов
кафедры общей математики и информатики

Рейтинговая система оценки успеваемости студентов по кафедре ОМиИ является одной из форм контроля текущей успеваемости обучаемых. Она предусматривает еженедельный мониторинг и оценку в баллах учебной активности и уровня знаний по дисциплине.

1. По этой системе в баллах оценивается уровень следующих видов учебной деятельности студентов:
   - активность на практических занятиях;
   - экспресс тестирования на лекциях;
   - расчетно-графическая работа;
   - контрольная (самостоятельная) работа;
   - коллоквиум;
   - лабораторная работа.

Указанные виды учебной деятельности имеют следующее содержание.

Активность на практических занятиях. Оценивается учебная активность и самостоятельность работы студентов.

Экспресс-тестирование на лекциях. Систематически проводится на лекциях с целью проверки усвоения текущего теоретического материала. Заключается в ответе на один теоретический вопрос или решение одной простейшей задачи. Проводится письменно, как правило, в течение 5-6 минут.

Контрольная (самостоятельная) аудиторная работа. Проводится письменно, с целью оперативного контроля степени усвоения изученного материала, например, базовых положений отдельных дидактических единиц.

Расчетно-графическая работа. РГР содержит задачи, решение которых требует применения типового арсенала вычислительных приемов, усвоенных при изучении соответствующих дидактических единиц. РГР зависит от содержания и вычислительной сложности дидактической единицы.

С целью выявления качества усвоения изученного материала вводится процедура **«Защита РГР».**

Коллоквиум. проводится письменно, с целью доэкзаменационной оценки уровня теоретических знаний и практических навыков.

Лабораторная работа. Проводится по темам, требующим применения вычислительных методов.

2. Рейтинговая оценка студента по дисциплине складывается из оценки за работу в семестре максимально **60 баллов** и экзаменационной оценки – максимально **40 балов**. Таким образом, максимально возможное количество баллов, которыми оценивается успеваемость за семестр по дисциплинам кафедры ОМиИ, равно **100**.
3. При пропуске рейтингового теста или контрольной работы в течении семестра <u>по документально подтвержденной уважительной причине</u> студент имеет право написать их в дни консультаций преподавателя группы. В случае пропуска теста <u>по неуважительной причине</u> или при неудовлетворительной оценке за тест (менее половины от максимально возможного балла), переписывание теста возможно только в течение <u>последней недели</u> семестра (не более двух встреч с преподавателем на все тесты и контрольные работы). Баллы, полученные студентом в таком случае, учитываются с коэффициентом **0,8.**

4. Студент, активно участвовавший в учебном процессе (доклады, рефераты, выступления на олимпиадах и конференциях) может быть поощрен лектором потока или заведующим кафедрой дополнительными баллами (как правило, не более 5 баллов за семестр).
5. Минимальное количество баллов за работу в семестре, необходимое для получения студентом допуска на экзамен, равно **30** баллов (половина баллов от максимального балла за работу в семестре).

Минимальное количество баллов за выполнение экзаменационной работы, необходимое для получения оценки:

«удовлетворительно» – **15 баллов**;

«хорошо» – **20 баллов**;

«отлично» – **30 баллов**.

6. В течении семестра студенты выполняют рейтинговые мероприятия (см. приложение).
7. Распределение модульных баллов:

Соответствие итогового рейтинга студента и традиционных оценок устанавливается по следующей шкале:

Баллы (%)	Оценка
0-50	Неудовлетворительно
51-75	Удовлетворительно
76-90	Хорошо
91-100	Отлично

8. Студент, набравший в семестре **менее 30 баллов**, сдает экзамен по дисциплине в два этапа: **предварительный** и **основной**.

8.1. **Предварительный этап экзамена**

Предварительный этап проходит в день сдачи экзамена своей группы. На нем студент выполняет практическое экзаменационное задание по материалу, изученному в семестре и вошедшему в тесты, контрольные и домашние работы по данной дисциплине. Это практическое задание оценивается в **20** баллов.

Предварительный экзамен считается сданным при условии набора на нем **10 и более** баллов. Результат **сданного** предварительного экзамена **суммируется** с семестровым рейтингом, а студент со своим новым рейтингом допускается к основному экзамену. При наборе студентом на предварительном этапе менее **10 баллов** экзамен считается **не сданным** и его результат **не добавляется** в итоговый рейтинг. В любом из указанных случаев после предварительного этапа экзамена в ведомость студенту выставляется оценка «**Неудовлетворительно**», а в графу «Суммарный балл» проставляется рейтинг с учетом результата предварительного экзамена.

8.2. **Основной этап экзамена**

Для студентов, успешно сдавших предварительный экзамен, основной экзамен проводиться в установленный на кафедре день пересдач.

Как исключение, студент, имевший семестровый рейтинг **в диапазоне от 20 до 30 баллов** и успешно сдавший предварительный этап экзамена (т.е. набравший на нем 10 баллов и более), с разрешения ответственного экзаменатора, назначенного на экзамен, может быть допущен к основному экзамену в день сдачи предварительного экзамена (т.е. со своей группой).

Студенты, имеющее семестровый рейтинг **в диапазоне от 10 до 20 баллов** и успешно преодолевшие предварительный этап (10 баллов и более), сдают основной экзамен только в день пересдач.

Студенты, набравшие в семестре **менее 10 баллов** и успешно прошедшие предварительный этап экзамена, допускается к сдаче основного экзамена **только по назначению заведующего кафедрой или заместителя по учебной работе**.

Замечание. Руководству кафедры сдаются экзаменационные работы:
- предварительного экзамена (10 и более баллов) – в день его сдачи студентом;
- основного экзамена (для прошедших предварительный экзамен) – в день основного экзамена.

9. Для дисциплин с зачетом:

9.1. Минимальное значение рейтинговой оценки, набранной студентом по результатам текущего контроля по всем видам занятий, при которой студент допускается к сдаче зачета, составляет **40 баллов**.

9.2. Если к моменту проведения зачета студент набирает 51 и более баллов, они могут быть выставлены ему в виде поощрения в ведомость и в зачетную книжку без процедуры принятия зачета. Выставление баллов производится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплине.

9.3. Устранение задолженности студента по отдельным контролируемым темам дисциплины может проходить в течение семестра в часы дополнительных занятий или консультаций, установленных в расписании.

9.4. Устранение задолженности по текущему контролю для допуска студента к зачету проводится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплине.

Приложение

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	
	Вид работы	Элементы матричной алгебры	Вектора	Аналитическая геометрия	Итог За семестр
1	Контрольная работа	5	5	5	15
2	Тест	5	5	5	15
3	Расчетно-графическая работа	5	5	5	15
4	Коллоквиум	6			6
5	Домашние задания	3	3	3	9

$\sum = 60$

Оценка контрольных

«3» − 3 б
«4» − 4 б
«5» − 5 б

Тест 25 заданий

9 – 12 – 2 б
13 – 19 − 3 б
20 − 22 – 4 б
23− 25 − 5 б

Расчетно- графическая работа

Сдача в срок − 2 б
Защита: «3» − 1 б
«4» − 2 б
«5» − 3 б

Коллоквиум

«3» − 3 б
«4» − 5 б
«5» − 6 б

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Основные определения.

Определение. Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

расположенных в m строк и n столбцов, называется матрицей размера m×n.

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называются ее элементами.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов m = n, то матрица называется квадратной порядка n.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы a_{1n}, $a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочную диагональ квадратной матрицы.

Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой, а из одного столбца – матрицей-столбцом.

Транспонированием матрицы называется замена ее столбцов (строк) на строки (столбцы) с сохранением их порядка.

1. 2. **Операции над матрицами**.

Равенство матриц.

Матрицы А= (a_{ij}) и В= (b_{ij}) одного размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т.е. А=В, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

Суммой двух матриц А и В одного размера m×n называется матрица С= А+В, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для i= 1,2,…,m; j=1,2,…,n.

Произведением матрицы А на число α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы А на число α, т. е. $\alpha A = A\alpha = \left(\alpha a_{ij}\right)$.

Умножение матриц

Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В этом случае матрицы называются согласованными.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ik}\, b_{kj}\,.$$

Задача 1.1. В два магазина поступило три вида товаров. Количество завезенного товара задано матрицей $A=\begin{pmatrix} 12 & 10 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Вторичное поступление товаров в магазины описывается матрицей $B=\begin{pmatrix} 15 & 8 & 7 \\ 14 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазины.

Решение. А+В = $\begin{pmatrix} 12 & 10 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 8 & 7 \\ 14 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 18 & 22 \\ 21 & 11 & 11 \end{pmatrix}$.

Задача 1.2. Предприятие выпускает три вида продукции П1, П2, П3, используя два вида сырья S1, S2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} П1 & П2 & П3 \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ S1 \\ S2 \end{array}.$$

Определить затраты сырья, необходимые для осуществления следующего выпуска товаров: $C=\begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$S = A\cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot100+ & 1\cdot120+ & 3\cdot140 \\ 2\cdot100+ & 0\cdot120+ & 3\cdot140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 620 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что кроме этих данных указаны еще и стоимости каждого вида сырья (в расчете на единицу сырья): $P=(10 \quad 20)$.

Тогда стоимость всего затраченного сырья будет равна:

$$P\cdot A\cdot C=(10 \quad 20)\cdot\begin{pmatrix} 940 \\ 620 \end{pmatrix}=21800 .$$

1.3. Определители и их свойства

Определителем (детерминантом) n-го порядка, соответствующим данной квадратной матрице A, называется число, символическая запись которого имеет вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определителем 2-го порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}\,.$$

Определителем 3-го порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{21}.a_{12}.a_{33}\,.$$

Запомнить формулу можно с помощью схемы

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}\,.$$

С в о й с т в а о п р е д е л и т е л е й.

1. Определитель не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами.

2. При перестановке элементов двух строк (столбцов) определитель изменит знак, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель равен нулю, если все элементы какой-либо строки (столбца)равны нулю.

4. Определитель с двумя одинаковыми (пропорциональными) строками (столбцами) равен нулю.

5. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

6. Если каждый элемент j столбца (строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из определителя А вычеркиванием элементов ***i*** строки и ***j*** столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их соответствующие алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

С помощью этой формулы вычисляются определители высших порядков. Свойство 8 называют разложением определителя по элементам ***i***-й строки.

9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т.е. $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

Задача 1.3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot3 + 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot2\cdot3 - 1\cdot4\cdot3 - 2\cdot1\cdot2 - 0\cdot1\cdot3 =$

$=24+1-12-4 = 9.$

Задача. 1.4. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. По свойству 8 разложить определитель можно по любой строке, но рациональнее разложение выполнить по элементам второй строки, в которой имеются два нуля.

$$\Delta = 0\cdot A_{21} + 3\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} + 2\cdot A_{24} = 3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$=3\cdot(3+14+48-126-2-8)+2\cdot(4+24+36-96-9-4) = -303.$

1.4. Обратная матрица

Квадратная матрица называется неособенной (невырожденной), если ее определитель отличен от нуля ($\det A \neq 0$).

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица А называется особенной (вырожденной).

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице А, если $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, где E единичная матрица. Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу.

Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}^T = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,

где - $\widetilde{A}^T$ присоединенная транспонированная матрица, элементы кото рой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы А.

Замечание. Особенная матрица обратной матрицы не имеет.

Задача 1.5. Найти матрицу обратную матрице A

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$, т.е. матрица A – неособенная.

Запишем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 20, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

Составим присоединенную матрицу $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -10 & 3 & -2 \\ 20 & -2 & -12 \\ 10 & -15 & 10 \end{pmatrix}$,

Найдем $\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} -10 & 20 & 10 \\ 3 & -2 & -15 \\ -2 & -12 & 10 \end{pmatrix}$,

тогда $A^{-1} = -\dfrac{1}{40}\begin{pmatrix} -10 & 20 & 10 \\ 3 & -2 & -15 \\ -2 & -12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{40} & \frac{1}{20} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

1.5. Системы линейных алгебраических уравнений.

Системы линейных алгебраических уравнений один из основных разделов алгебры. Нет такой отрасли науки и приложений, где бы они не использовались в том или ином виде. При решении экономических задач системы линейных уравнений наиболее употребительны как в аппарате исследования, так и при рассмотрении частных проблем.

В общем виде система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Здесь a_{ij} и b_j – произвольные числа ($i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1,2, \ldots, n$), которые называются соответственно коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений.

Решением системы уравнений называется набор n чисел $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ... , $x_n=a_n$, при подстановке которых каждое из уравнение системы обращается в тождество.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; и несовместной, если система не имеет решений. Совместная система уравнений имеет либо одно решение и в таком случае называется определенной, либо больше одного решения и тогда она называется неопределенной.

Системы уравнений называются эквивалентными, если имеют одно и то же множество решений.

1.6. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений, когда число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $m = n$. Такая система уравнений имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\,,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn} = b_n\,.
\end{aligned}
$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных:

$$
\Delta = \begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{array}\,,
$$

который называется определителем системы.

Заменим в этом определителе j-й столбец на столбец свободных членов B**,** т.е. получим в результате замены другой определитель, который обозначим Δ_{x_j} :

$$
\Delta_{x_j} = \begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn}
\end{array}\,.
$$

Теорема Крамера. Пусть Δ определитель матрицы системы, а Δj – определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца свободных членов B. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$
x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta}\,,\ j = 1,2,\dots,n.
$$

Данные формулы называются *формулами Крамера*

Задача1.6. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$3x+2y+z=5,$

$2x-y+z=6,$

$x+5y \quad =-3.$

Решение. Составим и вычислим определитель системы уравнений $\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера.

Вычислим определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$, полученные из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов матрицы A столбцом свободных членов:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ 6 & -1 & 1\\ -3 & 5 & 0\end{vmatrix}=-4,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=2,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & 5 & -3\end{vmatrix}=-2.$$

Откуда: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=2$; $\quad y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=-1$; $\quad z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=1.$

1. 7. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Пусть дана система из n уравнений с n неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$A=\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}$$

Эта матрица состоит из n строк и n столбцов и называется матрицей системы.

Введем в рассмотрение две матрицы; матрицу неизвестных X и матрицу свободных членов B:

$$X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}.$$

Тогда система уравнений в матричной форме примет вид $AX = B$. Пусть матрица системы A является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение системы уравнений. $X = A^{-1}B$, где A^{-1} обратная матрица.

Задача 1.7. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 2, \\ x+y+3z &= 6, \\ 2x+y+2z &= 5. \end{aligned}$$

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов при неизвестных,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов.

Система уравнений в матричной форме запишется $AX=B$, поэтому решением системы будет матрица - столбец $X = A^{-1}B$.

Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице A.

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) -1(-4) + 1(-1)=1.$$

Алгебраические дополнения всех элементов:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$; $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 6 + 2\cdot 5 \\ 4\cdot 2 + 2\cdot 6 + (-5)\cdot 5 \\ (-1)\cdot 2 + 0\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 2$; y= -5; z = 3.

1. 8. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса– метод последовательного исключения переменных –заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Элементарными преобразованиями системы являются;

1) умножение уравнения на число отличное от нуля;

2) сложение уравнения умноженого на любое число, с другим уравнением;

3) перестановка уравнений;

4) отбрасывание уравнений вида 0 = 0.

Элеметарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

<u>Задача 1.8.</u> Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Чтобы из системы исключить неизвестную x_1 достаточно в этой матрице получить (накопить) нули в первом столбце.

Для этого первую строку перепишем, а затем , умножив ее на −2 и −3, прибавим ко второй и третьей строкам, соответственно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

Получим нули во первом столбце. Вторую строку сложим с третьей строкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \qquad x_2 - 6x_3 = -8, \\ \qquad\quad -7x_3 = -7. \end{cases}$$

Отсюда найдем $x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1.$

1. 9. Ранг матрицы и его применение

Пусть дана матрица A, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ -------------- \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выберем в матрице A произвольно k строк и k столбцов ($k \le m, k \le n$) и выпишем элементы, которые находятся на их пересечениях. Эти элементы образуют квадратную матрицу k-го порядка матрицы A. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы A.

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы A, отличного от нуля.

Обозначается ранг матрицы A символами: $rangA$ или $r(A)$.

Итак, из определения следует, что если $r(A) = k$, то существует минор порядка k матрицы A, отличный от нуля, а все миноры порядка $(k+1)$ равны нулю или не существуют.

Имеются несколько способов вычисления ранга матрицы.

Теорема 1. Если минор порядка k матрицы A отличен от нуля, а миноры порядка $(k+1)$ окаймляющие рассматриваемый минор, равны нулю, то $r(A) = k$.

Заметим, что минор, который определяет $r(A)$, называется базисным минором матрицы A. Очевидно, что у матрицы может быть несколько базисных миноров. Строки и столбцы, которым принадлежат элементы базисного минора, называют базисными строками и базисными столбцами или линейно-независимыми строками и столбцами.

Теорема 2. Ранги эквивалентных матриц равны.

Определение. Матрицы A и B одинакового размера называются эквивалентными (A~B), если матрица B получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);

а) перемена мест двух параллельных рядов;

б) умножение элементов ряда на произвольное число $\lambda \neq 0$;

в) прибавление к одному ряду линейной комбинации других, параллельных ему рядов, умноженных на любые константы, отличные от нуля.

Элементарные преобразования меняют матрицу A, но не меняет ее ранга.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к ступенчатому виду, накапливая нули ниже главной диоганали. Тогда число ненулевых строк ровно рангу матрицы.

Задача 1.9 . Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним элементарные преобразования.

Поменяем первую строку с третьей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Первую строку умножим на -3 и прибавим ко второй.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первую строку умножим на -2 и прибавим к третьей получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку умножим на -1 и прибавим к третьей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Следовательно, $rangA = 2$.

1. 10. Система m линейных уравнений с n переменными.

2.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ------------ \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix},$$ A – матрица системы .

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} & b_2 \\ ------------ & \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$ В – расширенная матрица системы.

Имеет место теорема Кронекера – Капелли.

Чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = r(B)$, при этом: а) если $r(A) = r(B) = n$ − система имеет единственное решение, б) если $r(A) = r(B) < n$ система имеет множество решений, в которой r независимых уравнений, r базисных переменных и n-r свободных переменных.

Задача 1.10. Исследовать и решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Введем в рассмотрение матрицы A и В и найдем их ранги:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad rangA = 2,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad rangB = 2.$$

Так как $rangA = rangB = 2 < n = 5$, то система совместна и имеет множество решений. Для решения в системе оставляем число уравнений равное двум.

Первое и третье уравнения системы линейно независимы, т.к. коэффициенты при x_1 и x_2 составляют отличный от нуля минор 2-го порядка.

Решения исходной системы найдем, решая систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Считая неизвестные x_3, x_4, x_5 свободными, переносим их в правые части уравнений, x_1, x_2 базисными переменными, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 + x_4 - x_5 + 1, \\ x_1 + 5x_2 = 9x_3 + 8x_4 - x_5. \end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 & 1 \\ 9x_3 + 8x_4 - x_5 & 5 \end{vmatrix} = 5 + x_3 - 3x_4 - 4x_5,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 \\ 1 & 9x_3 + 8x_4 - x_5 \end{vmatrix} = -1 + 7x_3 + 7x_4.$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{4}x_3 - \dfrac{3}{4}x_4 - x_5, \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4}x_3 + \dfrac{7}{4}x_4. \end{cases}$$

Полученные формулы определяют общее решение исходной системы. При произвольных числовых значениях, x_3, x_4, x_5 получим частные решения исходной системы.

Так, при $x_3 = -1,\ x_4 = 0,\ x_5 = -2$, имеем вектор - решение

(-2, -2, -1, 0, -3)

при $x_3 = -2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$, имеем вектор - решение

(3, 3, 2, -1, 1).

1. 11. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Определение. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы *A*, соответствующий собственному значению λ, если имеет место равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

В конечномерном пространстве L_n это векторное равенство эквивалентно матричному равенству: $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0},\ \ \vec{x} \neq 0.$

Число λ есть собственное число матрицы *A* тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$, т.е. λ есть корень многочлена $\det(A - \lambda E)$, называемого характеристическим многочленом матрицы *A*.

Уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

Задача 1.11. Дана матрица A=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти ее собственные числа и собственные векторы.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } (5-\lambda)(3-\lambda)-8=0, \text{ т. е. } \lambda^2-8\lambda+7=0;$$

характеристические числа $\lambda_1=1, \quad \lambda_2=7.$ Находим собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу, из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)x_1+ \quad 2x_2=0, \\ \quad 4x_1+(3-\lambda_1)x_2=0. \end{cases}$$

Так как $\lambda_1=1,$ то x_1 и x_2 связаны зависимостью $2x_1+x_2=0.$

Полагая $x_1=\alpha$ (α–произвольное число), получаем $x_2=-2\alpha$ и собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1=1,$
есть вектор $\vec{b}_1=\alpha\vec{i}-2\alpha\bar{j}.$

Подставляя в составим систему уравнений значение $\lambda_2=7,$

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)x_1+2x_2=0, \\ 4x_1+(3-\lambda_2)x_2=0 \end{cases}$$

получаем соотношение $x_1-x_2=0,$ т.е. $x_1=x_2=\beta$. Собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит вектор $\vec{b}_1=\beta\vec{i}+\beta\vec{j}.$

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

2.1 Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике.

Эффективное ведение хозяйства предполагает баланс между отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой, – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определенного вида таблицами, называемыми таблицами межотраслевого баланса.

Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в трудах американского экономиста В. Леонтьева в 1936 г. Эта модель основана на алгебре матриц.

Будем предполагать, что рассматривается n отраслей $O_1, O_2, \ldots, O_n$ хозяйства, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной и других отраслей, а другая часть предназначена для потребления вне сферы материального производства.

Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени $[T_0;T_1]$, в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем обозначения:

x_i– общий объем продукции i-й отрасли (ее валовый выпуск);

x_{ij}– объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j;

y_i–объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере (продукт конечного потребления). Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции.

Указанные величины сведем в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Производственное потребление Q_1 Q_2 … Q_n	Конечное потребление $\vec{y}$	Валовой выпуск $\vec{x}$
Q_1 x_{11} x_{12} … x_{1n}	y_1	x_1
Q_2 x_{21} x_{22} … x_{2n}	y_2	x_2
. . . .	…	…
Q_n x_{n1} x_{n2} … x_{nn}	y_n	x_n

Балансовый принцип связи различных отраслей хозяйства состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах.

В самой простой форме (гипотеза линейности) балансовые соотношения имеют вид:т $x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i$; $i=1,2,\ldots,n$. (2.1)

Уравнения (2.1) называются соотношениями баланса.

Единицы измерения указанных величин могут быть натуральными (тонны, штуки, кубометры и т.д.) или стоимостными.

В зависимости от этого различают натуральный и стоимостный межотраслевой балансы. Для определенности будем иметь в виду стоимостный баланс.

В. Леонтьев на основании анализа экономики США в предвоенный период установил важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются практически неизменными и могут рассматриваться как постоянные числа.

Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.

При $x_j = 1$ (руб.) $a_{ij} = x_{ij}$. Таким образом, a_{ij} – есть стоимость i продукции, вложенной в 1 руб. продукции j-й отрасли.

В силу сказанного сделаем допущение: для выпуска любого объема x_j продукции j-й отрасли необходимо затратить продукцию i-й отрасли в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} –постоянный коэффициент. Иначе говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение называется гипотезой линейности существующей технологии. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых материальных затрат.

Таким образом, коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учесть только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

Итак, согласно гипотезе линейности имеем

$$x_{ij} = a_{ij}x_j; \quad i, j=1, 2, \dots, n; \tag{2.2}$$

где x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью;

x_j – объем произведенной j-й отраслью продукции;

a_{ij} – коэффициенты прямых затрат (коэффициент материалоемкости).

Из уравнений (2.1) и (2.2) следует:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение технологическую матрицу, или матрицу коэффициентов прямых затрат (коэффициентов материалоемкости) и векторы (матрицы) конечного выпуска и потребления

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.3) в матричной форме запишется:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Система (2.3) или уравнение (2.4) называются экономико-математической моделью межотраслевого баланса или вместе с интерпретацией матрицы A и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – моделью Леонтьева или моделью «затраты - выпуск».

В уравнении (2.4) приняты следующие обозначения:

$\vec{x}$ – вектор валового выпуска;

$\vec{y}$ – вектор конечного потребления;

A – матрица прямых затрат.

С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов.

1. Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (x_i), можно определить объемы конечной продукции (y_i) :

$$\vec{y} = (E-A)\vec{x}. \tag{2.5}$$

2. Задав величины конечной продукции всех отраслей (y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (x_i):

$$\vec{x} = (E-A)^{-1}\vec{y}. \tag{2.6}$$

3. По отдельным отраслям задаются уровни валовой продукции по другим уровни конечного продукта (в сумме число заданных величин равно n). Требуется определить значения остальных n переменных.

Заметим, что система (2.3) (уравнение (2.4)) имеет особенности, вытекающие из прикладного характера задачи: все элементы матрицы A и векторов $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ должны быть <u>неотрицательными.</u>

<u>Определение.</u> Матрица A≥0 (элементы матрицы A неотрицательны) называется продуктивной, если для <u>любого</u> вектора $\vec{y} \geq 0$ существует решение $\vec{x} \geq 0$ этого уравнения.

<u>Первый критерий продуктивности:</u> матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

<u>Второй критерий продуктивности:</u> матрица A с неотрицательными элемен-

тами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Пусть $A \ge 0$ –продуктивная матрица.

Определение. Запасом продуктивности матрицы A называется число $\alpha>0$ такое, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1+\alpha$ продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$- непродуктивна.

Задача 2.1 Исследовать на продуктивность матрицу $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Решение. Легко видеть, что второй критерий продуктивности не выполняется. Поэтому исследуем продуктивность матрицы A с помощью первого критерия.

Имеем $E-A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}$,

$|E-A| = \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}56 - 0{,}54 = 0{,}02 \Rightarrow$ матрица $(E-A)^{-1}$ существует.

Найдем $(E-A)^{-1} = \dfrac{1}{0{,}02}\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы $(E-A)^{-1}$ неотрицательны, следовательно, матрица A продуктивна.

Задача 2.2. Найти запас продуктивности матрицы $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Решение. В силу первого критерия продуктивности матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда существует и неотрицательная матрица $(E-\lambda A)^{-1}$.

Найдем матрицу $E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1-0{,}5\lambda & -0{,}3\lambda \\ -0{,}4\lambda & 1-0{,}5\lambda \end{pmatrix}$.

Определитель ее $\Delta = |E - \lambda A| = (1-0{,}5\lambda)(1-0{,}5\lambda)-0{,}12\lambda^2=$

$=1-\lambda + 0{,}25\lambda^2 - 0{,}12\lambda^2 = 1-\lambda + 0{,}13\lambda^2$. Обратной матрицей является матрица

$$(E-\lambda A)^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} 1-0{,}5\lambda & 0{,}3\lambda \\ 0{,}4\lambda & 1-0{,}5\lambda \end{pmatrix}.$$

Для продуктивности матрицы λA необходимо, чтобы все элементы матрицы $(E-\lambda A)^{-1}$ были неотрицательны, то есть $\Delta>0$, $1-0{,}5\lambda>0$, Из условия $\Delta = 0$, найдем $0{,}13\lambda^2 - \lambda + 1=0 \Rightarrow \lambda_1 = 6{,}5;\ \lambda_2 = 1{,}19$.

Решаем систему

$$\begin{cases} 0{,}13\lambda^2 - \lambda + 1 > 0, \\ 1 - 0{,}5\lambda > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 6{,}5;\ \lambda < 1{,}19 \\ \lambda < 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda < 1{,}19.$$

При $\lambda < 1{,}19$ матрица λA будет продуктивной, при $\lambda=1{,}19$ матрица λA непродуктивна. Запас продуктивности равен $1{,}19 - 1 = 0{,}19$, то есть запас продуктивности матрицы достаточен.

<u>Задача 2.3</u>. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл.ден.ед.:

Отрасли	Потребление O_1	Потребление O_2	Конечный Продукт $\vec{y}$	Валовой Продукт $\vec{x}$
O_1	3	8	89	100
O_2	5	7	88	100

Требуется:

1. Составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность.
2. Вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 100 % и 50% соответственно.
3. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в k=1 раз, а отрасли O_2 – на Р %=10%.
4. Найти векторы валового выпуска и потребления при уменьшении валового выпуска первой отрасли на 40% и увеличении конечного потребления второй отрасли на 2ед.

Решение.

1. Введем в рассмотрение матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 88 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу прямых затрат А, учитывая, что ее элементы $a_{ij}=x_{ij}/x_j$:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что сумма элементов столбцов (строк) матрицы А меньше единицы. Следовательно, в силу второго критерия продуктивности матрица *A* продуктивна.

2. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид $\vec{y}$ =(E−A) $\vec{x}$. При увеличении валового выпуска отраслей O_1 и O_2 на 100% и 50% соответственно получим новый вектор валового выпуска $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$. Вектор потребления $\vec{y}_1$, соответствующий вектору $\vec{x}_1$, находится из уравнения баланса

$$\vec{y}_1=(E\text{-}A)\,\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 129{,}5 \end{pmatrix}.$$

Изменения объемов конечного продукта O_1 на 182-89=93 ед., или 104,5%, O_2 на 129,5 − 88=41,5 ед., или на 47,2%.

3. Конечное потребление отрасли O_1 остается без изменения, а отрасли O_2

Станет равным 88·1,1 = 96,8; то есть новый вектор конечного потребления $\vec{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix}$. Новый вектор валового выпуска $\vec{x}_2$ находится из уравнения баланса

$$\vec{x}_2 = (E-A)^{-1}\vec{y}_2. \qquad E-A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}; \quad |E-A| = 0{,}8981.$$

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{0{,}8981}\begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100{,}38 \\ 109{,}88 \end{pmatrix}.$$

Валовый продукт отраслей необходимо увеличить: O_1 − на0,38% O_2 − на 9,88%.

4. Пусть $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 60 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 90 \end{pmatrix}$ −искомые векторы валового выпуска и потребления. Согласно уравнению баланса получим:

$$\begin{pmatrix} 60 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 90 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 60 = 0{,}03 \cdot 60 + 0{,}08 \cdot x_2 + y_1, \\ x_2 = 0{,}05 \cdot 60 + 0{,}07 x_2 + 90. \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем $x_2 = 100,\ \ y_1 = 50{,}2.$

Таким образом, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 50{,}2 \\ 90 \end{pmatrix}$.

2.2. Модель равновесных цен

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$ матрица прямых затрат.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор валового выпуска;

$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$ — вектор цен (p_i – цена единицы продукции i-й отрасли).

От реализации продукции i-я отрасль получит доход $x_i p_i$, который идет на закупку сырья $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_b)$, а некоторая его часть составляет добавленную стоимость v_i (стоимость условно чистой продукции).

Имеем равенства $x_i p_i = x_i(a_{1i}p_1+a_{2i}+\ldots+a_{ni}\,p_n)+\nu_i$ i=1, n . (2.7)

Разделив обе части уравнения (2.7) на x_i получим:

$$p_i=a_{1i}p_1+a_{2i}p_2+\ldots+a_{ni}\,p_n+V_i, \qquad i=1,\ n\ , \qquad (2.8)$$

где $V_i = \dfrac{\nu_i}{x_i}$ –норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции i-й отрасли)

Если ввести в рассмотрение вектор норм добавленной стоимости $\vec{V} = \left(V_1, V_2, \ldots V_n\right)$, то система (2.8) в матричной форме примет вид:

$$\vec{p} = A^T\vec{p} + \vec{V} \quad \text{или} \quad \vec{p} = \left(E - A^T\right)^{-1} \cdot \vec{V}\ .$$

Уравнение называется моделью равновесных цен.

Задача 2.3. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух отраслей (промышленности и сельского хозяйства).

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ — матрица прямых затрат; $\vec{V}$=(4; 10) – вектор норм добавленной стоимости.

Определить:

Равновесные цены.

Равновесные цены при увеличении нормы где $V_i=\nu_i/x_i$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции *i*-й отрасли).

Решение. 1. Из уравнения модели равновесных цен $\vec{p} = \left(E - A^T\right)^{-1} \cdot \vec{V}$,

Имеем: $E\text{-}A^T=\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, $\left|E - A^T\right| = \begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{vmatrix}$=0,48-0,15=0,33≠0,

следовательно, матрица $(E\text{-}A^T)^{-1}$=1/0,33$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}42 & 0{,}91 \\ 1{,}51 & 1{,}82 \end{pmatrix}$.

Тогда $\vec{p}=\begin{pmatrix}2{,}42 & 0{,}91\\ 1{,}51 & 1{,}82\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9{,}68+9{,}1\\ 6{,}04+18{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18{,}78\\ 24{,}24\end{pmatrix}$.

2.3. Линейная модель торговли

Пусть бюджеты n стран, которые обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров.

Обозначим: a_{ij} – доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны.

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Тогда, если весь бюджет идет на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1,\ j=1,2,\ldots,n \qquad (2.17)$$

(сумма элементов любого столбца равна единице). Матрица А со свойством (2.17) называется <u>структурной матрицей торговли.</u> Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i-й страны выражается равенством

$$p_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n. \qquad (2.18)$$

Условие бездефицитной торговли (сбалансированной) формируется следующим образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т. е. $p_i \geq x_i$ или

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \geq x_i,\ i=1,2,\ldots,n \qquad (2.19)$$

Однако в условиях (2.19) не может быть неравенства. В самом деле, сложим эти неравенства при i от 1 до n. Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j, получим

$x_1(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2})+\ldots+x_n(a_{in}+a_{2n}+\ldots+a_{nn})\geq x_1+x_2+\ldots+x_n$ в силу свойств (2.17) $\Rightarrow$ $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq x_1+x_2+\ldots+x_n \Rightarrow$ возможен лишь знак равенства. Поэтому, условия (2.19) принимают вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases} \tag{2.20}$$

Введем вектор бюджетов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Тогда система (2.20) запишется $A\vec{x} = \vec{x}$ или $(A-E)\vec{x} = \vec{0}$. Последнее уравнение означает, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы А, соответствующий, собственному значению λ=1, то есть вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению λ = 1.

Задача 2.5. Дана структурная матрица торговли трех стран

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна в=7000.

Решение. Легко видеть, что элементы матрицы А удовлетворяют условиям теоремы 2. Следовательно, существует собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Из уравнения (2.17) получим $(A-E)\vec{x}=\vec{0}$ или $\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & -0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

или $\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}3x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}6x_3 = 0. \end{cases}$

Определитель системы равен нулю, а $\begin{vmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 \\ 0.4 & -0.5 \end{vmatrix} = 0.36 \neq 0$. Следовательно, ранг системы равен двум. Поэтому, отбросив третье уравнение, имеем:

$$\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k, \\ x_2 = 3k, \quad k \in R. \\ x_3 = 5/3k, \end{cases}$$

Учитывая, что сумма $x_1+x_2+x_3=7000$, определим величину k: $k+3k+5/3k=7000 \Rightarrow k=1235{,}3$. Поэтому $x_1=1235{,}3$; $x_2=3705{,}9$; $x_3=2058{,}8$. Таким образом, искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле соответственно равны: $x_1=1235{,}3$; $x_2=3705{,}9$; $x_3=2058{,}8$.

2.4. Типовые задачи и их решение

Задача 2.6. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели заданы векторами:

$\vec{\mathbf{g}}$ –вектор ассортимента (количество изделий);

$\vec{\mathbf{s}}$ – вектор расхода сырья (кг/изд.);

$\vec{\mathbf{t}}$ – вектор затрат рабочего времени (ч/изд.);

$\vec{\mathbf{p}}$ – ценовой вектор (ед/изд.).

Требуется определить ежесуточные показатели предприятия:

S – расход сырья;

T – затраты рабочего времени;

P – стоимость выпускаемой продукции, если $\vec{g}$ =(20; 40; 30; 30),

$\vec{s}$ =(4; 3; 5; 4), $\vec{t}$ =(5; 4; 6; 5), $\vec{p}$ =(40; 36; 60; 50).

Решение. Искомые величины S, T и P равны скалярным произведением вектора ассортимента $\vec{g}$ на векторы $\vec{s}$, $\vec{t}$ и $\vec{p}$ соответственно:

S = $\vec{g}\cdot\vec{s}$ =20 · 4+40 · 3+30 · 5+30 · 4=470(кг),

T = $\vec{g}\cdot\vec{t}$ =20 · 5+40 · 4+30 · 6+30 · 5=590(ч),

P= $\vec{g}\cdot\vec{p}$ =20 · 40+40 · 36+30 · 60+30 · 50=5540(ден. ед).

Задача 2.7.

Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы - столбцы матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Найти затраты сырья, если задан вектор-план выпуска продукции

$\vec{\mathbf{g}}$=(50; 60; 40; 45).

Решение.

Пусть $\vec{s}$ =(x_1, x_2, x_3, x_4) – вектор затрат сырья, то есть координаты этого вектора равены величинам затрат по каждому виду сырья.

Тогда $\vec{s}^{\,T} = \vec{g}\cdot A=$

$$=(50;\ 60;\ 40;\ 45)\bullet\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 50\cdot1+60\cdot2+40\cdot6+45\cdot4 \\ 50\cdot2+60\cdot3+40\cdot2+45\cdot5 \\ 50\cdot4+60\cdot5+40\cdot3+45\cdot5 \\ 50\cdot5+60\cdot6+40\cdot2+45\cdot7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 590 \\ 585 \\ 845 \\ 1005 \end{pmatrix}.$$

$\vec{s}$ =(590, 585, 845, 1005).

Задача 2.8.

Затраты четырех видов сырья на выпуск четырех видов продукции характеризуются матрицей A, приведенной в предыдущей задаче.

$C=\begin{pmatrix} 4\,5\,3\,6 \\ 2\,4\,3\,5 \end{pmatrix}$ – матрица себестоимости сырья и его доставки (соответственно первая и вторая строки).

Найти: 1. Общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозки.

2. Общие затраты на сырье и его транспортировку при заданном векторе-плане $\vec{g}$ =(50; 60; 40; 45).

Решение.

Общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку равны A C^T:

$$A\,C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 47 \\ 74 & 61 \\ 55 & 39 \\ 98 & 75 \end{pmatrix}$$

Общие затраты на сырье и его транспортировку определяются произведением вектора $\vec{g}$ на матрицу A C^T:

$$\vec{g} \cdot A\,C^T = (50\;\; 60\;\; 40\;\; 45)\,.\begin{pmatrix} 56 & 47 \\ 74 & 61 \\ 55 & 39 \\ 98 & 75 \end{pmatrix} = (13850\;\; 10945).$$

Задача 2.9.

В матрицах А и В представлены:

А – данные о дневной производительности пяти предприятий, выпускающих четыре вида продукции;

В – матрица затрат сырья на единицу изделия;

$\vec{p}$ - вектор стоимости сырья;

$\vec{T}$ – вектор количества рабочих дней в году.

Требуется определить:

1. Годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий.

2. Годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья.

3. Годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска изделий указанных видов и при определенном количестве рабочих дней, если

$$A=\begin{pmatrix} 3\,4\,2\,6\,7 \\ 4\,2\,3\,6\,7 \\ 7\,3\,0\,1\,4 \\ 6\,2\,2\,4\,3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2\,3\,4\,4 \\ 3\,5\,4\,6 \\ 4\,6\,5\,5 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}$ =(35; 40; 45); $\vec{T}$ =(200, 160, 170, 150, 140).

Решение.

1. Годовая производительность каждого предприятия по каждому виду изделий равна произведению j-го столбца матрицы А на количество рабочих дней в году для этого предприятия:

$$A_{\text{год}}=\begin{pmatrix} 600 & 640 & 340 & 900 & 980 \\ 800 & 320 & 510 & 900 & 980 \\ 1400 & 480 & 0 & 150 & 560 \\ 1200 & 320 & 340 & 600 & 420 \end{pmatrix}.$$

2. Дневной расход каждого предприятия по каждому виду сырья равен В А:

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 & 34 & 21 & 50 & 63 \\ 93 & 46 & 33 & 76 & 90 \\ 101 & 53 & 36 & 85 & 105 \end{pmatrix}$$

где i-я строка соответствует виду сырья, j-й столбец – номер предприятия. Годовая потребность каждого предприятия в каждом виде сырья найдется умножением матрицы ВА на соответствующее количество рабочих дней в году для каждого предприятия:

$$BA_{\text{год}}=\begin{pmatrix} 14000 & 544 & 3570 & 7500 & 8820 \\ 18600 & 7360 & 5610 & 11400 & 12600 \\ 20200 & 8480 & 6120 & 12750 & 14700 \end{pmatrix}.$$

3. Годовая сумма кредитования каждого предприятия для закупки сырья получается умножением вектора стоимости сырья $\vec{\mathbf{P}}$ на годовую потребность каждого предприятия в сырье, т. е.

$$\vec{P} = \vec{p}\ \text{ВА}_{\text{год}}=(35;\ 40;\ 45).\begin{pmatrix} 14000 & 544 & 3570 & 7500 & 8820 \\ 18600 & 7360 & 5610 & 11400 & 12600 \\ 20200 & 8480 & 6120 & 12750 & 14700 \end{pmatrix} =$$

$$= (2143000;\ \ 69504;\ \ 64475;\ \ 1292250;\ \ 1474200).$$

Следовательно, суммы кредитования предприятий для закупки сырья равны соответствующим координатам вектора $\vec{P}$.

Задачи для самостоятельной работы

Методы вычисления определителей. Решение систем линейных уравнений методом Крамерра.

1. Вычислить определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix};\quad 4)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;\quad 2)\ \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Решить неравенства:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;\quad 2)\ \begin{vmatrix} x & 3 \\ 3x+4 & 5 \end{vmatrix} \le 0;\quad 3)\ \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 14.$$

4. Вычислить определители;

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & 8 \end{vmatrix};$$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

5. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

1) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1, \\ -4x + 5y = -6, \\ 6x - 3y + 2z = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 0, \\ x - y + 3z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу:

Из Минска в Могилев необходимо перевезти оборудование трех типов: I типа –105 ед., II тип 120 ед., Ill типа –225 ед. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, приведено в таблице.

.

Таблица 4.2

Тип оборудования	**Вид транспорта**		
	T_1	T_2	T_3
I	3	2	1
II	4	2	2
III	3	5	4

Записать в математической форме условия перевозки оборудования из Минска в Могилев.

Установить, сколько единиц транспорта каждого вида потребуется для перевозки оборудования из Минска в Могилев.

Действия над матрицами. Решение матричных уравнений.

1. Даны матрицы: А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и В =$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) А+В; 2) 2А; 3) 3В; 4) 2А−3В.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **и** $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Вычислить: **1)** $A \cdot B$; **2)** $B \cdot A$.

3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычислить: 1) A^2; 2) $A \cdot E$; 3) $(A - E)^T$.

4. Выполнить действия с матрицами.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.,

5. Решить задачи.

1) В магазин поступило три вида товаров: 5 холодильников, 10 телевизоров и 8 пылесосов: $X_1 = (5 \quad 10 \quad 8)$; $X_2 = (10 \quad 8 \quad 12)$– вектор поступления тех же товаров в следующем месяце. Найти поступление товаров за два месяца.

2) В два магазина поступило три вида товаров. Количество завозимого товара задано матрицей: $A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 \\ 12 & 15 & 4 \end{pmatrix}$. Вторичное поступление товаров в

магазины описывается матрицей: $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 10 & 5 & 12 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазины.

3) Три месяца завоз товаров в магазин был постоянным и описывался матрицей: $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ и четыре месяца описывается матрицей: $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 6 & 10 & 3 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазин.

4) Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий. Количество изделий задано матрицей $A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 15 & 10 \end{pmatrix}$, цена их $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ден. ед. Определить стоимость выпускаемой продукции.

5) Фирма реализует четыре вида товаров в трех районах. Данные об уровне продаж по районам образуют матрицу:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (объемы продаж в тыс. шт.). $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ – соответствующие цены (тыс. руб./тыс. шт).

Найти матрицу суммарных продаж в каждом районе.

6) Предприятие выпускает три вида продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, используя два вида сырья – S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ П_1 \\ П_2 \\ П_3 \end{array}.$$

Определить: а) затраты сырья, необходимого для осуществления следующего выпуска товаров: $C = (150;\ 120;\ 80)$; б) стоимость всего затраченного сырья, если стоимость каждого вида сырья (в расчете на единицу) $P = (20\ ;\ 30)$.

6) Найти обратную матрицу:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

7) Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 0\end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 0\end{pmatrix}$.

8) Решить системы уравнений матричным методом.

1) $\begin{cases}2x+3y+2z=9,\\ x+2y-3z=14,\\ 3x+4y+z=16.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+4y-z=7,\\ x-\ \ y+3z=4,\\ 3x+3y+2z=11.\end{cases}$

Метод Гаусса. Решение систем m линейных уравнений с n незвестными.

Задача 1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

1) $$\begin{aligned} x_1+2x_2-\ x_3+\ \ x_4&=\ \ 1,\\ 2x_1+3x_2-2x_3-\ x_4&=-3,\\ x_1+\ x_2+\ \ x_3-\ 2x_4&=\ \ 4,\\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4&=\ \ 0.\end{aligned}$$

2) $\begin{cases}x+3y-z+\ \ t=7,\\ x-\ y+3z+3t=4,\\ 2x+2y+2z+4t=11.\end{cases}$

Задача 2. Найти ранг матриц:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Задача 3. С помощью теоремы Кронекера - Капелли доказать совместность системы линейных уравнений и решить их:

1) $\begin{cases} x - y + 2z + 4t = 1, \\ 4x + 5y + z + 2t = -6, \\ 5x + 4y + 3z + 6t = -5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y + z + 3t = 0, \\ x + 2y + 3z + t = 0, \\ 3x + 3y + 4z + 4t = 0, \\ x - y - 2z + 2t = 0. \end{cases}$

Приложения матричной алгебры.

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.):

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
	O_1	O_2	$\vec{y}$	$\vec{x}$
O_1	2	18	80	100
O_2	5	15	150	170

Требуется:

1. составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;
2. вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 50 % и 10% соответственно;
3. вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в 2 раза, а отрасли O_2 – на 40%.

Задача 3. Дана матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Зная конечный продукт первой отрасли $y_1 = 80$ и валовой выпуск второй отрасли $x_2 = 100$, найти конечнный продукт второй и валовой выпуск первой отрасли.

Задача 4. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$– вектор норм добавленной стоимости.

Определить:

равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=2, b=3 соответственно.

Задача 5.Дана структурная матрица $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 15000.

Задача 6. Используя балансовые соотношения между элементами таблицы, завершите составление баланса в каждом из следующих случаев:

1.

Отрасли	O_1	O_2	$\sum$	Y	X
O_1	150	0		140	
O_2	60	140			
$\sum$					
V					
X		300			

2)

Отрасли	O_1	O_2	$\sum$	Y	X
O_1 O_2	– 20	40 20	60		 200
$\sum$					
V	45				
X					

Домашнее задание.

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Предприятие выпускает продукцию трех видов – *А, Б и В*. Уровень выпуска лимитируется ограниченностью ресурсов. Все числовые данные приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Ресурсы	Запас ресурса	Нормы затрат на единицу продукции		
		А	*Б*	*В*
Сырье, кг	24	5	7	4
Материалы, кг	75	10	5	20
Оборудование, ед.	10	5	2	1

Записать в математической форме условия, которым должен удовлетворять план выпуска продукции, предполагая полное использование ресурсов. Найти план выпуска продукции.

3. Решить матричное уравнения $x \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему уравнений матричным методом $\begin{cases} 5x+8y+2z=3, \\ 3x-2y+z=8, \\ 2x-y-2z=-3. \end{cases}$

5. Найти ранг матриц $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. С помощью теоремы Кронекера - Капелли доказать совместность системы линейных уравнений и решить их:

$$5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$6x_1 - 4x_2 + 11x_3 - x_4 = 0.$$

7. Приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.):

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
	O_1	O_2	$\vec{y}$	$\vec{x}$
O_1	10	20	70	100
O_2	20	30	150	200

Требуется:

1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;

2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 40 % и 20% соответственно;

3) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в 1,5 раза, а отрасли O_2 – на 60%.

4. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства.

Пусть $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V}=(10; \quad 12)$– вектор норм добавленной стоимости.

Определить: равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=4, b=2 соответственно.

5. Дана структурная матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 18000.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3t = 4, \\ x + 2y + z + 2t = 6, \\ 3x + y + 3z + 5t = 10. \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1. Определение матрицы. Виды матриц.
2. Сложение и вычитание матриц, свойства.
3. Умножение матрицы на число, свойства.
4. Умножение матриц, свойства.
5. Равенство матриц.
6. Транспонирование матриц.
7. Определители 2-го порядка, их вычисление.
8. Определители 3-го порядка, их вычисление.
9. Свойства определителей.
10. Понятие определителя n-го порядка.
11. Что называется минором определителя n-го порядка, соответствующим какому-либо элементу определителя?
12. Что называется алгебраическим дополнением?
13. Вычисление определителей, связанные с алгебраическими дополнениями и элементами этого определителя.
14. Перечислите методы вычисления определителей. Укажите, на каком теоретическом материале основаны эти методы.

15. Правило Крамера (вывод).
16. Обратная матрица (определение).
17. Нахождение обратной матрицы.
18. Решение матричных уравнений.
19. Решение систем уравнений матричным методом.
20. Минор матрицы.
21. Ранг матрицы. Методы его нахождения.
22. Элементарные преобразования матриц.
23. Эквивалентные матрицы.
24. Общий вид системы неоднородных линейных уравнений.
25. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений? Приведите примеры.
26. Общий вид системы однородных линейных уравнений.
27. Определение решения систем линейных уравнений.
28. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы уравнений.
29. Матричная запись систем линейных уравнений.
30. Методы решения систем линейных уравнений.
31. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
32. Теорема Кронекера - Капелли.
33. Условие единственности решения систем линейных уравнений.
34. При каких условиях система линейных уравнений имеет множество решений и как их найти?
35. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.
36. Решение систем однородных линейных уравнений.
37. При каких условиях однородная линейная система имеет отличные от нуля решения.
38. Что называется собственными значениями и собственными векторами квадратной матрицы. Алгоритм их нахождения.Вывод.

39. В чем заключается экономический смысл элементов матрицы прямых затрат?
40. Запишите уравнение линейного межотраслевого баланса.
41. Запишите решения уравнения линейного межотраслевого баланса.
42. Дайте понятие «продуктивность матрицы прямых затрат».
43. Дайте понятие «запаса продуктивности».
44. Сформулируйте критерии продуктивности матрицы прямых затрат.
58. Дайте понятие нормы добавленной стоимости.
59. Запишите уравнение модели равновесных цен.
6о. Дайте понятие структурной матрицы торговли.
61. Сформулируйте условие бездефицитной торговли.

Тест 1

1. Векторы $\vec{a} = \{2; 4; \alpha; 4\}$ и $\vec{b} = \{\alpha; 7; 2; 4\}$ ортогональны при α, равном:

1) 2 ; 2) 8; 3) -11; 4) 11.

2. Векторы $\vec{a} = \{2; \alpha; 3; 2\}$ и $\vec{b} = \{4; 2; \beta; 4\}$ коллинеарны при значениях параметров, равных: 1) $\alpha = \frac{2}{3}; \ \beta = 15$; 3) $\alpha = 3; \ \beta = 6$;

2) $\alpha = 2; \ \beta = 5$; 4) $\alpha = 1; \ \beta = 6$.

3. Детерминант матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ равен: 1) 4; 2) 12; 3) 0; 4) 3.

4. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то наименьший элемент матрицы $A^T + 3B$ равен: 1) 4; 2) 2; 3) -1; 4) 0 .

5. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то наибольший элемент матрицы $A \cdot B$ равен:

1) 6 ; 2) 7; 3) 1; 4) 14 .

6. Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & -3 & -2\\ 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$ равен: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

7. Если $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, то сумма элементов матрицы A^{-1} равна:

1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{5}{14}$; 3) 0; 4) 9 .

8. Если $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$, то координаты собственного вектора, соответствующего меньшему собственному значению, равны:

1) (1;2); 2) (-1;2); 3) (-2;1); 4) (1:-2).

9. Число свободных неизвестных в системе $\begin{cases}2x+\ \ y+4z=0,\\ -x+2y-2z=0,\\ -5x+5y-10z=0\end{cases}$

равно: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

10. Если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, то матрица $C=2A+B$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 8 & -8\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & -8\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

11. Если $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид

1) $\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0\\ 8\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix}$.

12. Собственные значения собственных векторов линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, могут быть найдены по формуле

1) $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix}1+\lambda & 2\\ 3 & 4+\lambda\end{vmatrix}=0$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 3-\lambda & 4 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 3+\lambda & 4 \end{vmatrix} = 0$.

13. При умножении матрицы на число:

1) элементы одного из любых столбцов (строк) умножаются на это число.

2) все элементы матрицы умножаются на это число.

14. Матрица − это

1) прямоугольная таблица чисел, заключенная в вертикальные скобки − $|a_{ij}|$, содержащая m строк и n столбцов;

2) прямоугольная таблица чисел, заключенная в скобки вида, $\|a_{ij}\|$, либо $\lfloor a_{ij} \rfloor$ содержащая некоторое число m строки и n столбцов;

3) прямоугольная таблица чисел, содержащая n строк и n столбцов, заключенных в вертикальные скобки − $|a_{ij}|$ и равная некоторому числу после вычисления.

15. Определитель − это

1) прямоугольная таблица чисел, заключенная в вертикальные скобки − $|a_{ij}|$, содержащая m строк и n столбцов;

2) прямоугольная таблица чисел, заключенная в скобки вида, $\|a_{ij}\|$, (a_{ij}), либо $\lfloor a_{ij} \rfloor$ содержащая некоторое число m строки и n столбцов;

3) квадратная таблица чисел, содержащая n строк и n столбцов, заключенных в вертикальные скобки − $|a_{ij}|$ и равная некоторому числу после вычисления.

16. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ вычисляется поформуле

1) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$; 2) $a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}$; 3) $a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$; 4) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

17. Минором M_{ij} любого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется…

1) матрица (n-1) –го порядка, получаемая из элементов исходной матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} ;

2) определитель (n-1) –го порядка, получаемая из элементов исходной матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} ;

3) определитель исходной матрицы, умноженный на элемент a_{ij} .

18. При замене всех строк определителя соответствующими по номеру столбцами, определитель…1) меняет знак; 2) принимает новое числовое значение; 3) не изменяет своего числового значения.

19. Если элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, либо равны друг другу, то определитель равен…

1) удвоенному значению определителя, получаемому при вычеркивании соответствующих столбцов (строк); 2) нулю;

3) сумме произведений элементов этих столбцов (строк) на их алгебраические дополнения.

20. Матрица называется квадратной, если …

1) все элементы столбцов (строк) не равны нулю;

2) число строк не равно числу столбцов;

3) число строк равно числу столбцов.

21. При умножении матрицы на число…

1) все элементы матрицы умножаются на это число;

2) элементы одного и любого столбца (строки) умножаются на это число.

22. При умножении двух матриц должно соблюдаться условие…

1) число строк первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы;

2) число столбцов первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы;

3) число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы;

23. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице А, если она удовлетворяет условию…

1) $A\cdot A^{-1}=1$; 2) $A\cdot A^{-1}=E$, где Е - единичная матрица; 3) $A\cdot A^{-1}=A$.

24. Решение матричного уравнения АХ=В имеет вид…

1) $X = A^{-1}\cdot B$; 2) $X = B\cdot A^{-1}$; 3) $X = A^{-1}\cdot B^{-1}$.

25. Рангом матрицы называется …

1) произведение числа строк m на число столбцов n;

2) число, равное наибольшему из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля; 3) сумме числа строк m и числа столбцов n

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Векторная алгебра имеет широкое применение в различных разделах физики, математики, механики и т.п.. В курсе средней школы вектор определяется как некоторое преобразование пространства. Однако для прикладных целей удобнее использовать другое, традиционное определение вектора и действий над векторами, на которых мы и остановимся дальше. Это не означает, однако, что сведения, полученные в средней школе, не верны. Просто мы будем изучать векторную алгебру, исходя из несколько иных, более удобных для практических целей позиций.

3. 1. Векторы и основные линейные операции над ними

1. Векторные величины

В отличие от скалярной величины, которую можно задать одним числом и отложить на некоторой шкале (отсюда и название – «скалярная») – площадь, объём, температура - векторную величину, или просто вектор, можно задать с помощью числа и некоторого направления (скорость, сила).

Итак, мы можем сказать, что вектор $\overrightarrow{AB}$ - это величина, которая характеризуется числом, совпадающим с длиной отрезка AB, и направлением, совпадающим с направлением луча $[A, B)$ (рис. 1.)

При этом длину вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ или ещё $|\mathbf{a}|$. Длину вектора также называют модулем этого вектора. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют ***равными***, если совпадают их длины и направления.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют ***противоположными***, если их длины равны, а направления противоположны. Заметим, что при этом начало вектора можно поместить в любой точке пространстве. Такие векторы называют ***свободными***.

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым ($\mathbf{0}$). Направление нулевого вектора не определено.

2. Умножение вектора на скаляр

Определение 1.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ ***на число*** λ называется такой вектор $\mathbf{c}$, что $|\mathbf{c}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, а направление его совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\lambda>0$, и ему противоположно, если $\lambda<0$; если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\lambda = 0$, то $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Ясно, что векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ (если $\lambda \neq 0$) можно поместить на одной прямой (рис. 2.. Вектор $(-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$, очевидно, является противоположным вектору $\mathbf{a}$.

Определение 2.

Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными***.

3. Единичный вектор

Определение 3. Вектор $\mathbf{a}^0$, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором***, или ***ортом***. Если задан некоторый вектор $\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$, то всегда можно подобрать множитель λ, такой, чтобы после умножения на него длина вектора $\lambda\mathbf{a}$ была бы равна единице. Очевидно, что в качестве такого числа нужно взять $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$. Тогда $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, и при этом $\mathbf{a}^0$ называется единичным вектором, соответствующим вектору $\mathbf{a}$, или ортом вектора $\mathbf{a}$. Очевидно, что направление единичного вектора всегда совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$. Ясно также, что $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0$.

Точно так же единичный вектор $\mathbf{l}^0$, направление которого совпадает с направлением оси $\mathbf{l}$, называется ортом оси $\mathbf{l}$, или её единичным вектором.

4. Сложение векторов

Определение 4.

Суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, расположенных так, что начало вектора $\mathbf{b}$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}$, называется вектор $\mathbf{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\mathbf{a}$, а конец – с концом вектора $\boldsymbol{b}$. (правило треугольника – рис. 3, а). При этом пишут: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Аналогично определяется сумма n векторов $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \mathbf{c}$.

А именно: суммой называют вектор $\vec{\boldsymbol{c}}$, проведённый из начала первого в конец последнего вектора, при условии, что начало вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2}$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}_1$, начало вектора $\mathbf{a}_3$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}_2$ и т.д. (правило многоугольника – рис.3, б).

Замечание.

Если на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить параллелограмм, поместив их начало в общую точку, то сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ будет лежать на диагонали параллелограмма, выходящего из общего начала векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (правило параллелограмма – рис. 3, в).

Свойства:

1) 1) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ - поглощение нулевого вектора

2) 2) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ - перестановочное, или коммутативное

3) 3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ - сочетательное, или ассоциативное.

Для всякого ненулевого вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ существует противоположный вектор - $-\vec{\boldsymbol{a}}$, такой, что $\vec{\boldsymbol{a}}+(-\vec{\boldsymbol{a}})=\vec{0}$.

5. Вычитание векторов

Определение 5. Вектор $\mathbf{c}$ называется разностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, если $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$. Отсюда следует, что $\mathbf{c}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ т.е. вычитание векторов сведено к сложению (рис. 2.1.4). Нетрудно заметить, что разность векторов лежит на второй диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, проведённой из конца вектора - $-\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$.

3.2. Линейная зависимость и независимость векторов.

Базисы на плоскости и в пространстве. Прямоугольная декартова система координат

1. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеется n векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ и $\boldsymbol{n}$ постоянных коэффициентов $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2,...,\boldsymbol{c}_n$. Выражение $\boldsymbol{c}_1\mathbf{a}_1+\boldsymbol{c}_2\mathbf{a}_2+\ldots+\boldsymbol{c}_n\mathbf{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$.

Определение 1. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2,...,\boldsymbol{c}_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что линейная комбинация равна нулю:

Определение 1*. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если хотя бы один вектор из этой системы можно выразить в виде линейной комбинации остальных.

Определение 2. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ называются ***линейно независимыми***, если линейная комбинация $\boldsymbol{c}_1\mathbf{a}_1+\boldsymbol{c}_2\mathbf{a}_2+\ldots+\boldsymbol{c}_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ выполняется лишь при условии когда все $\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{c}_2=\ldots=\boldsymbol{c}_n$ =0.

Определение 2*. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ называются ***линейно независимыми***, если ни один из этих векторов нельзя представить в виде линейной комбинации остальны

Задача 1. Доказать, что коллинеарные векторы линейно зависимы. Действительно, поместим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на одной прямой (рис. 5.), тогда можно найти такое λ, при котором $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$ => $1\cdot\mathbf{a}+(-\lambda)\cdot\mathbf{b}=\mathbf{0}$, а это и означает, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы

Задача 2. Доказать, что любые три вектора **a**, **b** и **c**, лежащие в плоскости, линейно зависимы.

Действительно, поместим начало всех трёх векторов в общую точку (рис.6.). Очевидно, тогда можно подобрать единственную пару чисел λ_1 и λ_2, так что будет $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$, а что и означает, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы.

Определение 3. Три ненулевых вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Итак, мы показали, что компланарные векторы линейно зависимы.

Задача 3. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы. Действительно, можно подобрать, причём единственным образом, такие числа λ_1, λ_2, λ_3, что будет $\mathbf{d} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c}$ (рис.7.).

2. Базисы на плоскости и в пространстве

Определение 1. Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих данной плоскости, называется ***базисом на этой плоскости***. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ - базис на плоскости, то для любого вектора $\mathbf{a}$, лежащего в этой плоскости, можно найти единственным образом такие числа $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, что будет $\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Числа x_1 и x_2 называются координатами вектора $\mathbf{a}$ в данном базисе

<u>Определение 2.</u> Совокупность любых трёх линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве называется ***базисом в пространстве***. Если $\mathbf{a}$ - произвольный вектор, то всегда можно найти единственным образом числа x_1, x_2, x_3 такие, что будет иметь место представление: $\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении данного вектора по базису называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

3. Прямоугольная декартова система координат

Из всех возможных базисов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) в пространстве выберем такой, чтобы все векторы, входящие в этот базис, были попарно ортогональны (т.е. $(\mathbf{e}_i \hat{,} \mathbf{e}_j) = \frac{\pi}{2}$, $(i, j = 1,2,3)$), далее разделим каждый вектор базиса на его длину. Получим базис $\mathbf{e}_1^{\ 0}$, $\mathbf{e}_2^{\ 0}$, $\mathbf{e}_3^{\ 0}$ Такой базис называется ***ортонормированным.***

<u>Определение</u>**.** Тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется ***правой***, если при наблюдении с конца вектора $\vec{c}$ кротчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ происходит против движения часовой стрелки.

Ограничимся выбором правой тройки базисных векторов $\mathbf{e}_1^{\ 0}$, $\mathbf{e}_2^{\ 0}$, $\mathbf{e}_3^{\ 0}$. Поместим далее начало векторов, входящих в выбранной базис, в общую точку 0 и из этой точки проведём оси *Ox, Oy, Oz,* направления которых совпадают с направлениями векторов $\mathbf{e}_1^{\ 0}$, $\mathbf{e}_2^{\ 0}$, $\mathbf{e}_3^{\ 0}$.

Получим так называемую пространственную ***прямоугольную правую декартову систему координат*** *Oxyz*. Причём принято орты обозначать так: $\mathbf{e}_1^{\ 0} = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2^{\ 0} = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3^{\ 0} = \mathbf{k}$ (рис.8). Ось *Ox* называется ***осью абсцисс***, ось *Oy* – ***осью ординат***, ось *Oz* – ***осью аппликат***.

Если $\mathbf{e}_3^{\ 0} = \mathbf{0}$, получим прямоугольную правую систему декартовых координат на плоскости – систему *Oxy*.

3. 3. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Компоненты вектора.

1. Проекция вектора на ось.

Пусть вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ лежит на некоторой оси $\boldsymbol{l}$. Направление орта $\mathbf{l}^0$ соответствует направлению оси (Рис. 9.).

<u>Определение 1</u>. ***Проекцией вектора***, лежащего на оси, на эту ось называется число, по абсолютной величине равное длине вектора и взятое со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси и со знаком минус, если они противоположны.

Пусть вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ не лежит на оси $\boldsymbol{l}$. Из точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ опустим перпендикуляры на ось $\boldsymbol{l}$. Получим соответственно две точки $\boldsymbol{A}'$ и $\boldsymbol{B}'$. (Рис. 2.3.2). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$ называется ***компонентой вектора*** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ по оси $\boldsymbol{l}$.

<u>Определение 2.</u> ***Проекцией вектора, не лежащего на оси*** $\boldsymbol{l}$, на эту ось называется проекция его компоненты по оси $\boldsymbol{l}$ на эту же ось. Проекция вектора на ось обычно обозначается так: $np_l\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. Очевидно, если вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ лежит на оси $\boldsymbol{l}$, то можно написать: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\mathbf{пр}_l\overrightarrow{\boldsymbol{AB}})\cdot\mathbf{l}^0$

<u>Замечание.</u> Отметим, что проекция вектора $\mathbf{a}$ на ось $\boldsymbol{l}$ является также координатой вектора $\mathbf{a}$ по этой оси $\mathbf{l}$.

4. Компоненты вектора по координатным осям и координаты точки.

Поместим начало вектора **a** в начало декартовой системы координат *Oxyz* (его конец – точка $\boldsymbol{A}$).

Спроектируем точку $\boldsymbol{A}$ на координатные оси. Получим соответственно три точки $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ (рис. 11.).

Как было отмечено, векторы $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}_1}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}_2}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}_3}$, лежащие на координатных осях *Ox*. *Oy* и *Oz* , являются компонентами вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ по координатным осям. Обозначим через $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ и $\boldsymbol{a}_z$ - проекции вектора **a** на координатные оси. Ясно, что $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}_1} = \boldsymbol{a}_x \mathbf{i}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}_2} = \boldsymbol{a}_y \mathbf{j}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}_3} = \boldsymbol{a}_z \mathbf{k}$, т.к.

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}_1} + \overrightarrow{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2'} + \overrightarrow{\boldsymbol{A}_2'\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}_1} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}_2} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}_3}$, то $\mathbf{a} = \boldsymbol{a}_x \mathbf{i} + \boldsymbol{a}_y \mathbf{j} + \boldsymbol{a}_z \mathbf{k}$ ..

Такое представление вектора **a** называется разложением его на ***компоненты***, или ***составляющие*** по координатным осям. Нетрудно заметить, что вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$ лежит на диагонали параллелепипеда, следовательно, можно найти его длину, т.е. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}_x^{\,2} + \boldsymbol{a}_y^{\,2} + \boldsymbol{a}_z^{\,2}}$.

Проекции вектора **a** на координатные оси, т.е. числа $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ и $\boldsymbol{a}_z$, являются координатами вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ и записываются так: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y, \boldsymbol{a}_z)$ или $\mathbf{a} = \{\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y, \boldsymbol{a}_z\}$.

Рассмотрим теперь некоторую точку $\boldsymbol{M}$ в пространстве. Вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ называется радиус-вектором точки $\boldsymbol{M}$ (рис 12.). Проекции $\boldsymbol{r}_x$, $\boldsymbol{r}_y$, $\boldsymbol{r}_z$ радиус-вектора точки $\boldsymbol{M}$ на координатные оси называются координатами точки $\boldsymbol{M}$ в данной системе координат, и при этом их обозначают просто

x, y, z т.е. точка $\boldsymbol{M}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ записывают так: $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

3.4. Теоремы о проекциях вектора.

<u>Определение 1</u>. **Углом между вектором a и осью** $\boldsymbol{l}$ называется наименьший угол между направлением вектора **a** и положительным направлением оси $\boldsymbol{l}$, обозначается $(\widehat{\mathbf{a}, \boldsymbol{l}})$.

<u>*Теорема 1.*</u> Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью $\boldsymbol{np}_l \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\theta$.

Направляющие косинусы вектора.

Косинусы углов α, β и γ, которые вектор **a** образует с координатными осями *Ox, Oy* и *Oz*, называются направляющими косинусами вектора **a** (Рис.2.4.2). Если $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$ проекции вектора **a** на координатные оси, то ясно, что имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} a_x &= |\mathbf{a}|\cdot\cos\alpha \\ a_y &= |\mathbf{a}|\cdot\cos\beta \\ a_z &= |\mathbf{a}|\cdot\cos\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту же ось, т.е. $\boldsymbol{np}_l(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \boldsymbol{np}_l\mathbf{a} + \boldsymbol{np}_l\mathbf{b}$.

Теорема 3. При умножении вектора **a** на число λ его проекция на также умножается на это число λ т. е. $\boldsymbol{np}_l(\lambda a) = \lambda\ \boldsymbol{np}_l a$.

Теорема 4. Для того два вектора были равны, необходимо и достаточно, чтобы их проекции на любую ось были равны.

3.5. Арифметические векторы и действия над ними.

Пространство R^n

Определение 1. **Арифметическим *n*-мерным вектором называется вектор** $\vec{a} = (a_1, a_2, ...a_n)$**, где** $a_1, a_2, ...a_n$ **-координаты этого вектора.**

Определение 2. **Два вектора** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **с одним и тем же числом координат:** $\vec{a} = (a_1, a_2, ...a_n)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, ...b_n)$ **равны если равны их соответствующие координаты**

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots \quad a_n = b_n.$$

Определение 3. **Суммой двух векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **с одним и тем же числом координат:** $\vec{a} + \vec{b} = a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad \dots \quad a_n + b_n.$

Определение 4. **Произведением вектора** $\vec{a} = (a_1, a_2, ...a_n)$ **на число *к*** называется вектор $к\vec{a} = (кa_1, кa_2, ...кa_n)$.

3. 6. Скалярное произведение и его свойства Скал

1. Определение скалярного произведения

<u>*Определение.*</u> Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi\ .$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю.

Свойства скалярного произведения

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{\alpha}}\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{\alpha},\quad \text{пр}_{\vec{b}}\vec{\alpha}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1),\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то скалярное произведения равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, $\vec{a}=(a_1,a_2,...a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,...b_n)$

то скалярное произведения равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+.....+a_nb_n$.

Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\ ,\quad \text{то}\quad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

или

$$a_1b_1+a_2b_2+.....+a_nb_n=0.$$

Угол между двумя векторами.

Если $\vec{a}$ и $\vec{\mathrm{b}}$ - ненулевые векторы, то, принимая во внимание определение вектора найдем $cos\varphi$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\mathrm{b}}$

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Механический смысл скалярного произведения

Если $\vec{F}$ - сила, действующая на перемещении $\vec{S}$, то работа A этой силы на указанном перемещении, как известно, равна $\mathrm{A} = |\vec{\mathrm{F}}|\cdot|\vec{A}|\cos\varphi = \vec{F}\cdot\vec{A}$,

φ

3.7. Векторное произведение векторов

1. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство E^3;

(i, j, k) - ортонормированный базис в этом пространстве.

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *называют такой вектор* $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$, *что*

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a},\bar{b})$

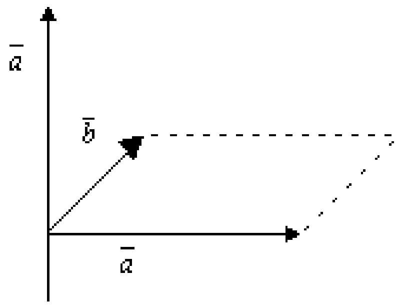
Модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах;

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы

$\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{c}$, $\bar{b}$ образуют правую - тройку, то есть вектор $\bar{c}$ направлен так, что, если смотреть с конца вектора $\bar{c}$, то кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ совершается против часовой стрелки.

Векторное произведение обозначается $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ или $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.



Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -[\bar{b} \times \bar{a}]$

2. $\lambda \bar{a} \times \bar{b} = \lambda[\bar{a} \times \bar{b}]$, где λ - скаляр;

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}.$.

2. Векторное произведение в координатной форме.

Пусть известны координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть

$$\bar{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k};$$
$$\bar{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

правую часть последнего выражения можно записать с помощью определителя третьего порядка:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Эта формула является удобной записью ***векторного произведения в координатах.***

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

$$\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\times\overline{b}=0$$

Из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, равна модулю векторного произведения: $S=|\,\overline{a}\times\overline{b}\,|$,

в частности, площадь **треугольника** $S_\Delta=\dfrac{1}{2}|\,\overline{a}\times\overline{b}\,|$.

Одним из физических приложений векторного произведения является нахождение **момента силы,** возникающего при вращении твердого тела, закрепленного в некоторой точке A, под действием силы $\overline{F}$, приложенной в точке B: $\overline{M}=\overline{AB}\times\overline{F}$

3.8. Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением *трех векторов называется их векторно-скалярное произведение, обозначают:*

$$\overline{a}\,\overline{bc}=(\overline{a}\times\overline{b},\overline{c})$$

Найдем выражение смешанного произведения через координаты.

Пусть $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$; $\overline{b}=(x_2y_2z_2)$ *и* $\overline{c}=(x_3y_3z_3)$.

Векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ в координатах записывается в виде:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

тогда скалярное произведение $(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})$ в координатах имеет вид:

$$(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

Правую часть последнего выражения можно записать с помощью определителя третьего порядка. Итак, ***смешанное произведение в координатах*** имеет следующий вид:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

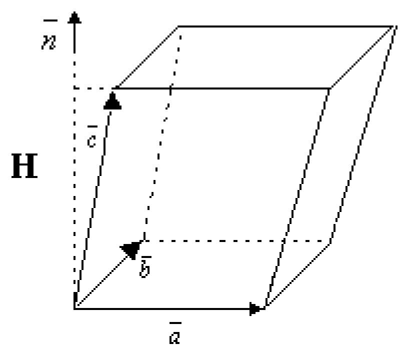
Свойства смешанного произведения векторов

1) $(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c});$

2) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\overline{cab}=\overline{bca};$

3) Пусть $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ - некомпланарные векторы.

Построим на этих векторах параллелепипед.



Смешанное произведение *трех векторов численно равно* ***объему параллелепипеда,*** *построенного на этих векторах.*

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=V$$

Действительно, $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{n}$, *где* $|\overline{n}|=|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin(\overline{a},\overline{b})$,

то есть $|\overline{n}|=S_{ABCD}$, где S_{ABCD} - площадь основания.

Скалярное произведение $(\overline{n},\overline{c})=|\overline{n}|\cdot|\overline{c}|\cdot\cos(\overline{n},\overline{c})=|\overline{n}|\cdot|\overline{c}|\cdot\cos a.$ Очевидно, что $|\overline{c}|\cdot\cos a=H$, где H высота параллелепипеда.

Итак, $(\overline{n},\overline{c})=|\overline{n}|\cdot H=S_{ABCD}\cdot H=V$

или, так как $\overline{n}=\overline{a}\times\overline{b}$, *то* $(\overline{a}\times\overline{b},\overline{c})=V$.

В частности, **объем пирамиды,** построенной на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ равен

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\overline{a}\overline{b}\overline{c}$$

4) Для того, чтобы три вектора были ***компланарны,*** необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

Вектора $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ - компланарные, то $\overline{a},\overline{b},\overline{c}=0.$

3.9. Евклидово пространство

Для ***n-мерного*** линейного пространства введем понятие длины вектора и угла между векторами. Это можно сделать, если определить операцию произведения над векторами.

В линейном пространстве L задано ***скалярное произведение,*** *если каждой паре векторов* $\overline{a},\overline{b}\ \in L$ *поставлено в соответствие* ***число*** $(\overline{a},\overline{b})$ *такое, что:*

1°. $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$;

2°. $(\lambda,\overline{a},\overline{b})=\lambda(\overline{a},\overline{b})$; λ - скаляр;

3°. $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c}),\qquad \overline{c}\in L$

Линейное пространство L называется ***евклидовым*** *пространствам, если в нем определено скалярное произведение и для любого вектора* $\overline{a}\in L$*, его скалярный квадрат будет положительным.*

4°. $(\overline{a},\overline{a})\geq 0,$ при $(\overline{a},\overline{a})=0,$ то *ā=0*

Обозначают n-мерное евклидово пространство R^n.

Таким образом, *линейное пространство будет* ***евклидовым,*** *если введенное там (как угодно) скалярное произведение векторов будет удовлетворять четырем условиям 1°, 2°, 3°, 4°.*

Пусть векторы $\overline{a},\overline{b}\in R^n$ заданы своими координатами

$\bar{a}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *и* $\vec{b}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Скалярное произведение определяется как **сумма произведений соответствующих координат** перемножаемых векторов

$$(\overline{a},\overline{b})=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \quad \text{или} \quad (\overline{a},\overline{b})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Нормой (длиной) вектора $\overline{a}\in R^n$

называется число, равное $|\overline{a}|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$ или

в *координатной форме* $|\overline{a}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$

Угол между векторами $\overline{a},\overline{b}\in E^n$ определяется по формуле

$$\cos(\overline{a},\overline{b})=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

Покажем, что это определение корректно, то есть выполняется условие $|\cos(\overline{a},\overline{b})|\leq 1$

Пусть λ - любое действительное число, $\overline{a},\overline{b} \in R^n$.

Согласно аксиоме 4°, имеем $(\overline{a} - \lambda\overline{b}, \overline{a} - \lambda\overline{b}) \geq 0,$ используя аксиомы 1°-3°, последнее неравенство можно записать в виде

$(\overline{a},\overline{a}) - 2\lambda(\overline{a},\overline{b}) + \lambda^2(\overline{b},\overline{b}) \geq 0$

Это квадратное неравенство относительно λ справедливо, если его дискриминант неположительный, то есть,

$$4(\overline{a},\overline{b})^2 - 4(\overline{b},\overline{b})(\overline{a},\overline{a}) \leq 0 \text{ или } (\overline{a},\overline{b})^2 \leq (\overline{a},\overline{a})(\overline{b},\overline{b})$$

Итак, доказали, что для любых $\overline{a},\overline{b} \in E^n$ справедливо неравенство

$(\overline{a},\overline{b})^2 \leq |\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2$

оно называется ***неравенствам Коши-Буняковского.*** Из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$\frac{(\overline{a},\overline{b})^2}{|\overline{a}|^2|\overline{b}|^2} \leq 1 \quad \text{или} \quad -1 \leq \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} \leq 1$$

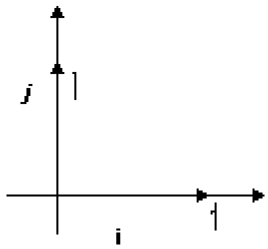
итак, действительно $\quad -1 \leq \cos(\overline{a},\overline{b}) \leq 1.$

Как уже отмечалось, в n-мерном линейном пространстве базисом является любая система из n линейно независимых векторов. Часто выбирают базис из взаимно перпендикулярных (ортогональных) единичных векторов.

Базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ в пространстве R^n называется **ортонормированным,** если имеет место:

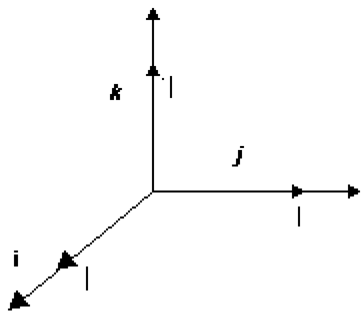
$$(\overline{e_i},\overline{e_j}) = \begin{cases} 1, & \vec{i} = \vec{j} \\ 0, & \vec{i} \neq \vec{j} \end{cases}.$$

В частности, в пространстве R^2 ортонормированным базисом является система двух векторов, их обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$ ***:***



$$\vec{i} \perp \vec{j}$$
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

в пространстве R^3 ортонормированный базис обозначают **i, j, k:**



$$\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k},$$
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1;$$
$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0;$$
$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1.$$

Решение типовых заданий.

Задача 1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ и его длину, если известны координаты его начала $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{y}_A, \boldsymbol{z}_A)$ и конца $\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{y}_B, \boldsymbol{z}_B)$.

Решение.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j + (z_B - z_A)k$$

Итак, чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вектова вычесть соответственно координаты начала.

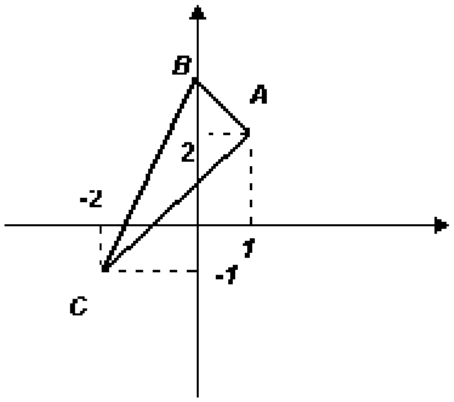
Мы получили ранее, что если $\mathbf{a} = (\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y, \boldsymbol{a}_z)$, то $|\mathbf{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}_x^{\ 2} + \boldsymbol{a}_y^{\ 2} + \boldsymbol{a}_z^{\ 2}}$. Следовательно,

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \sqrt{(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)^2 + (\boldsymbol{y}_B - \boldsymbol{y}_A)^2 + (\boldsymbol{z}_B - \boldsymbol{z}_A)^2}\,.$$

Заметим, что по этой формуле удобно вычислять расстояние между двумя точками, если известны их координаты.

Задача 2. Дан треугольник ABC. где A(1, 2); B(0, 3); C(-2, -1). Найти периметр его и угол A.

Решение. Обозначим векторы $\overline{AC} = \overline{a};\ \overline{AB} = \overline{b}$.



Обозначим векторы $\overline{AC} = \overline{a};\ \overline{AB} = \overline{b}$. Используя скалярное произведение,

найдем $\cos(\overline{a},\overline{b}) = \dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}$. Координаты вектора $\bar{a}$ находим, вычитая из координат его конца - точки C, соответствующие координаты начала его точки A.

$$\overline{a} = \overline{AC} = (x_c - x_A, y_C - y_A) = (-2-1,-1-2) = (-3,-3).$$

Аналогично, $\overline{b} = \overline{AB} = (0-1, 3-2) = (-1,1)$

Найдем $\cos(\overline{a},\overline{b}) = \dfrac{-3(-1)+(-3)\cdot 1}{\sqrt{9+9}\cdot\sqrt{1+1}} = \dfrac{0}{\sqrt{18\cdot 2}} = 0$

Таким образом, $\cos\angle A = 0, \quad \angle A = 90^0.$

Чтобы найти периметр ΔABC, надо найти длины всех его сторон:

$$|\overline{a}| = |\overline{AC}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$
$$|\overline{b}| = |\overline{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-3)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Итак, периметр ΔABC равен

$$P = |\overline{AC}| + |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

Задача 3. Даны точки A(1,-1,2) и B(3,2,3).

Найти: 1. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; 2. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$; 3. Разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ на составляющие; 4.Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$; 5. Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overrightarrow{AB}$.

Решение

1. Принимая во внимание предыдущий пример, получим: $x_B - x_A = 2$, $y_B - y_A = 3$, $z_B - z_A = 1$. Итак $\overrightarrow{AB}(2,3,1)$.

2. Напомним, что $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$, значит $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{14}$.

3. Так как $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, то $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4. Напомним, что $a_x = |\mathbf{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\mathbf{a}|\cos\beta$, $a_z = |\mathbf{a}|\cos\gamma$, где α, β, γ - углы, которые вектор $\overrightarrow{AB}$ составляет с координатными осями *Ox, Oy*, *Oz.*

Как известно, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\mathbf{a}$. В нашем случае $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

5. Единичный вектор $\overrightarrow{a^0}$, соответствующий вектору $\vec{a}$, равен $\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Таким образом $\vec{a}^0(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}})$ или $\overrightarrow{a^0} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$. Нетрудно отметить, что координаты единичного вектора совпадают с его направляющими косинусами.

Задача 4. Дан вектор $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и координаты точек $\boldsymbol{B}(1,2,-1)$, $\boldsymbol{C}(2,2,5)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. (рис. 1.)

Решение. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC}(1,0,6)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

Итак $\overrightarrow{AC}(2,1,8)$.

Задача 5. Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$ коллинеарны.

Решение. Напомним, что два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой, а тогда, как было отмечено выше, они линейно зависимы. Следовательно, существует некая константа c такая, что имеет место соотношение $\mathbf{a} = \boldsymbol{c}\mathbf{b}$.

Откуда следует, что $\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \boldsymbol{c}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mu\mathbf{k})$. Значит

$$(\lambda - \boldsymbol{c})\mathbf{i} + (2 - \boldsymbol{c})\mathbf{j} + (3 - \boldsymbol{c}\mu)\mathbf{k} = 0.$$

Так как векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ линейно независимы, ибо они представляют собою базис, то должны обращаться в ноль коэффициенты этой линейной комбинации, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \boldsymbol{c} &= 0 \\ 2 - \boldsymbol{c} &= 0 \\ 3 - \boldsymbol{c}\mu &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения имеем $\boldsymbol{c} = 2$; подставляя его в первое и третье уравнения, получим значения интересующих нас констант: $\lambda = 2$, $\mu = \dfrac{3}{2}$.

Задача 6. Даны три точки $\boldsymbol{A}(2,3,5)$, $\boldsymbol{B}(1,2,2)$, $\boldsymbol{B}(3,5,4)$.

Найти $\boldsymbol{np}_{\overline{BC}}\overrightarrow{AB}$ и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. а) $\overrightarrow{AB} = (2;3;2)$; $\quad \overrightarrow{BC} = (-1;-2;1)$

$$\boldsymbol{np}_{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} == \frac{2\cdot(-1) + 3(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{6}{\sqrt{6}}$$

б) $\mathbf{cos}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{11}}$; $\mathbf{cos}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{11}}$; $\mathbf{cos}\,\gamma = \frac{2}{17}$.

Задача 7. При каком значении α вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

и $\vec{b} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 2\vec{k}$ ортогональны.

Решение. Принимая во внимание условие ортогональности двух векторов

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$ получим $1 \cdot 2 + 2 \cdot \alpha + 1 \cdot 2 = 0$. Следовательно $\alpha = -2$.

Задача 8. Предприятия участвует в строительстве автомобильных стоянок и могут получить кредит в трех коммерческих банках. Каждый из них предоставил кредиты в размерах 20, 40, 40 млрд. руб. под годовую процентную ставку 40, 25 и 30%.

Задача 9. Найти площадь треугольника АВС, где А (-2, 1, 0);
В (3,4, 8); С (-1,3,6).

Решение

Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, равна

$S_\Delta = \frac{1}{2} |\, \overline{AB} \times \overline{AC}\, |$.

Найдем координаты векторов:

$\overline{AC}$=(-1+2; 3-1; 6-0)=(1,2,6)

$\overline{AB}$ =(3-(-2); 4-1; 8-0)=(5, 3, 8)

их векторное произведение равно:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 22j + 7k.$$

Итак, $S_\Delta = \frac{1}{2} |\, \overline{AB} \times \overline{AC}\, |$ или $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 484 + 49} = \frac{\sqrt{537}}{2}(ед.^2)$

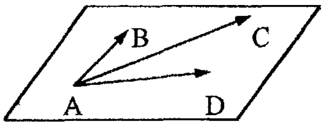
Задача 10. Показать, что заданные четыре точки лежат в одной плоскости: A(2, 0, 1); B(-3, 1, 0); C(0,1, 3); D(-4, 3, 7).

Решение.

Заданные точки лежат в одной плоскости, если три вектора также лежат в этой плоскости, то есть, если эти векторы компланарны.

Векторы компланарны, если их смешанное произведение равно нулю.

Найдем координаты векторов:



$\overline{AB} = (-3-2;1-0;0-1) = (-5,1,-1);$

$\overline{AC} = (-2,1,2);$

$\overline{AD} = (-6,3,6),$

тогда смешанное произведение равно

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 = 0,$$

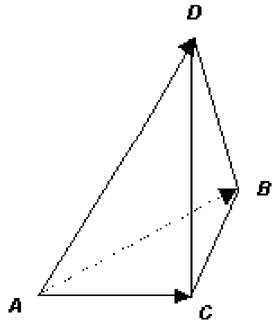
то есть заданные точки лежат в одной плоскости.

Задача 11. Найти объем пирамиды ABCD, где A(2, 0, 1); B(3, -1, 4); C(0,-5,1); D(0,0,4).

Решение. Объем пирамиды равен $V_{пир} = \frac{1}{6}|\overline{abc}|$

Найдем координаты векторов

$$\bar{a} = \overline{AB} = (1,-1,3);$$
$$\bar{b} = \overline{AC} = (-2,-5,0);$$
$$\bar{c} = \overline{AD} = (-2,0,3)$$



тогда смешанное произведение:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 30 - 6 = -51$$

Следовательно, объем пирамиды

$$V_{пир} = \frac{1}{6} \,|\, \overline{abc} \,|= \frac{1}{6} \,|-51|= \frac{51}{6} 8{,}5(ед^2)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Определение векторной величины.
2. Модуль вектора.
3. Противоположные вектора.
4. Умножение вектора на скаляр.
5. Единичный вектор.
6. Сложение векторов.
7. Вычитание векторов.
8. Линейная зависимость и независимость векторов.
9. Базис и размерность линейного пространства.
10. Ортонормированная система векторов. Декартова система координат.
11. Проекция вектора на ось. Координаты вектора.
12. Базисы на плоскости и в пространстве.

14. Направляющие косинусы вектора.

15. Арифметические векторы и действия над ними.

16. Скалярное произведение n-мерных векторов. Свойства скалярного произведения.

17. Угол между векторами.

18. Векторное произведение, его свойства.

19. Смешанное произведение векторов, его свойства.

20. Евклидово пространство.

21. Неравенство Коши −Буняковского

3.10. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если известны координаты его начала A (4, -3, 5) и конца B(8, 6, -2).

Задача 2. Даны два вектора **a** =4**i** + 3**j** - 5**k** и **b** = 3**i** + 6**j** + 2**k.** Определить проекции на координатные оси следующих векторов; 1) **a + b**;
2) **a - b**; 3) 3**a +2b**; 4) 4**a -3b**.

Задача 3. Даны точки A(6,-1,2) и B(1,2,3).

Найти: 1. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; 2. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

3. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$;

4. Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overrightarrow{AB}$.

Задача 4. Дан вектор $\overrightarrow{AB}$ =6**i**+3**j**+2**k** и координаты точек B (2, 4, 5), C(1,3,7). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$.

Задача 5. Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора **a**=λ**i**+8**j**+2**k** и **b**=4**i**+4**j**+μ**k** коллинеарны.

Задача 6. Даны векторы **a** = 3**i** –4**j** - 2**k** и **b** = **3i** + 2**j** – **k.** Вычислить скалярное произведение.

Задача 7. При каком значении α вектора **a**=6**i**+3**j**+5**k** и **b**=-3**i**+α**j**+2**k** ортогональны.

Задача 8. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$.

Задача 9. Дан треугольник АВС. где А(2, 2, 5); В(4, 3, 4); С(5, -1, 4). Найти: периметр его и угол А.

Задача 10. . Вычислить, какую работу производит сила $\mathbf{F}=3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\mathbf{s} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

Задача 11. Вычислить, какую работу производит сила $\mathbf{F}=3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения А(5, 2, 3) в положения В(2, 3, 4).

Задача 12. Даны три силы $\mathbf{M} =4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{N} =3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, $\mathbf{P} =5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ приложенные к точке А(4, 2, 1). . Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения А в положения В(1, 3,- 2).

Задача 13. Даны вершины треугольника А(-1, -2, 4); В(-4, -2, 0); С(3, -2, 1). Определить его внутренний угол при вершине В.

Найти $\boldsymbol{np}_{\overline{BC}}\overrightarrow{AB}$ и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$

Задача 14. Даны векторы $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найти координаты векторного произведения.

Задача 15. Найти площадь треугольника АВС, где А (-7, 4, 0); В (3,2, 8); С (-1,5,6).

Задача 16. Сила $\mathbf{F}=3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ приложена к точке М(6, 2, 5). Определить момент этой силы относительно точки А(8, 4, 3).

Задача 17. Сила $\mathbf{F}=2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ приложена к точке М(4, 2, -3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки А(2, 4, 0).

Задача 18. Даны три силы $\mathbf{M} =2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, $\mathbf{N} =2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, $\mathbf{P} =2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ приложенные к точке С(-1, 4, -2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки А(2, 3, -1).

Задача 19. Векторы **a, b, c**, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ $|\vec{c}| = 3$, вычислить **abc**.

Задача 20. Установить**,** компланарны ли векторы **a, b, c**, если;

1) **a** = 6**i** + 3**j** - **k** и **b** = **i** – **j** + 3**k** и **c** = **i** + 9**j** - 11**k**;

2) **a** = 3**i** - 2**j** + **k** и **b** = 2**i** + **j** + 2**k** и **c** =3**i** - **j** - 2**k**;

Задача 21. Показать, что заданные четыре точки лежат в одной плоскости: A(1, 2, -1); B(0, 1, 5); C(-1,2, 1); D(2, 1, 3).

Задача 22. Найти объем пирамиды ABCD, где A(2, -1, 1); B(5, 5, 4); C(3,2,-1); D(4,1,3).

Задача 22. В базисе e_1, e_2, e_3 заданы векторы $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ и

$a_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ и a_3 =-3 **i** + 5**j** - 6**k**. Показать, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ образуют базис. Вектор **b** = $4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$, выразить в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$

Домашнее задание

Задача 1. Даны точки A(6,-1,2) и B(1,2,3).

Найти: 1. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; 2. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

3. Разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ на составляющие;

4. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$;

5. Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overrightarrow{AB}$.

Задача 2. Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора **a**=λ**i**+8**j**+2**k** и **b**=4**i**+4**j**+μ**k** коллинеарны.

Задача 3. Даны векторы **a** = 3**i** –4**j** - 2**k** и **b** = **3i** + 2**j** – **k.** Вычислить скалярное произведение.

Задача 4. При каком значении α вектора **a**=6**i**+3**j**+5**k** и **b**=-3**i**+α**j**+2**k** ортогональны.

Задача 5. Даны три силы **M** =4**i + **2**j** - 5**k**, **N** =3**i** + 2**j** - 9**k**,

$\mathbf{P} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ приложенные к точке A(4, 2, 1). . Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положения B(1, 3,- 2).

<u>Задача 6.</u> Даны три силы $\mathbf{M} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, $\mathbf{P} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ приложенные к точке C(-1, 4, -2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки A(2, 3, -1).

<u>Задача 7.</u> Даны точки A(4, 2, -1); B(2, 1, 5); C(-1,3, 1); D(1, 1, 3).

Найти:

1) направляющие косинусы и орт вектора $\overline{AB}$;
2) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$;
3) проекцию вектора $\overline{AC}$ на вектор $\overline{AB}$;
4) работу равнодействующей сил $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ при прямолинейном перемещении ее точки приложения из положения A в положение D;
5) единичный вектор, перпендикулярный векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
6) Найти площадь треугольника ABC;
7) показать, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, и $\overline{AD}$ некомпланарны;
8) найти объем тетраэдра, построенного на этих векторах, и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1. Справочный материал

Прямоугольные координаты на плоскости

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xoy, то точку M на этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x; y)$. Расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ определяется как

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Если отрезок, концами которого служат точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, разделен точкой $C(x_c,y_c)$ в отношении λ, то координаты точки С определяются по формулам $$x_c=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y_c=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Если $\lambda=1$ то

$x_c=\dfrac{x_1+x_2}{2};\ y_c=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ координаты середины отрезка АВ.

Уравнение линии

Уравнение $F(x;y)=0$ называется общим уравнением линии L на плоскости, если ему удовлетворяют координаты $(x;y)$ любой точки, лежащей на этой линии, а координаты точек, не лежащих на линии L, не удовлетворяют данному уравнению.

Уравнение прямой на плоскости

Уравнение первой степени $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$, является общим уравнением прямой на плоскости.

При различных значениях коэффициентов А, В и С возможны следующие частные случаи:

$C=0, A\neq 0, B\neq 0$ $\{Ax+By=0\}$ – прямая проходит через начало координат;

$A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$ $\{By+C=0\}$ – прямая параллельна оси Ox;

$B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0$ $\{Ax+C=0\}$ – прямая параллельна оси Oy;

$B=C=0,\quad A\neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy;

$A=C=0,\quad B\neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox.

В зависимости от способа задания используются следующие формы записи уравнения прямой:

1) $y = \kappa x + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k где

$\kappa = -\dfrac{A}{B} = tg\varphi$ (φ – угол между осью Ox и прямой)

2) $y - y_0 = \kappa(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0; y_0)$, с угловым коэффициентом k;

3) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

4) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b отрезки, отсекаемые прямой на осях координат ox и oy соответственно.

Угол между двумя прямыми на плоскости

Если заданы две прямые $y = \kappa_1 x + b_1$, $y = \kappa_2 x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $tg\alpha = \left|\dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1\kappa_2}\right|$.

Две прямые тогда и только тогда параллельны, когда $\kappa_1 = \kappa_2$ и перпендикулярны, если $\kappa_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно к прямой $y = kx + b$, описывается уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1).$$

Расстояние от точки до прямой

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние от этой точки до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Кривые второго порядка

<u>Окружностью</u> называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если R – радиус окружности, а точка $C(x_0, y_0)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

<u>Эллипсом</u> называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек, называемых **фокусами,** есть величина постоянная, бóльшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса (координатные оси совпадают с осями эллипса):

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – полуоси эллипса: $b^2 = a^2 - c^2$;

$F_1 = (-c;\ 0)$; $F_2 = (c;\ 0)$ – фокусы эллипса, если $a > b$.

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ (для эллипса $\varepsilon < 1$).

$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса с центром в точке $C(x_0, y_0)$, а оси эллипса параллельны осям координат.

y

M(x;y)

r_2 r_1

F_1 O F_2 x

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, меньше расстояния между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы (оси координат совпадают с осями гиперболы, а центр симметрии – в начале координат):

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a, b соответственно действительная и мнимая полуоси гиперболы; $F_1(-c;\,0), F_2(c;\,0)$ – фокусы гиперболы, c > a.

Эксцентриситет гиперболы находится по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $\varepsilon>1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

y

M(x, y)

b r_1 r_2

x

F_1 O a F_2

c

По определению гиперболы $|r_1 - r_2| = 2a$, F_1, F_2 – фокусы гиперболы причем $F_1F_2 = 2c$.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси Oy длиной $2b$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$

– каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0;y_0)$, а оси гиперболы параллельны осям координат.

Графиком обратной пропорциональной зависимости $y=\dfrac{к}{x}$ является равносторонняя гипербола с асимптотами, совпадающими с координатными осями.

Дробно-линейная функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0, bc-ad\neq 0\right)$ есть равносторонняя гипербола с асимптотами $y=\dfrac{a}{c}$, $x=-\dfrac{d}{c}$, параллельными осям координат, и центром в точке $\left(-\dfrac{d}{c};\ \dfrac{a}{c}\right)$.

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус. Расстояние от фокуса до директрисы принято обозначать p, называемым параметром параболы. Если параметр равен p, а вершина расположена в начале координат, то каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$ (если она симметрична оси Ox) или $x^2=2py$ (если она симметрична оси Oy).

y

A M(x, y)

O F x

p/2 p/2

Уравнения парабол с вершиной в точке $M_0(x_0;y_0)$**,** осьсиметрии которой параллельна оси Ox или Oy соответственно:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0),$$
$$(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

Графиком квадратного трехчлена $y=Ax^2+Bx+C$ является парабола с осью симметрии, параллельной оси Oy, и вершиной в точке $\left(-\frac{B}{2A},-\frac{D}{4A}\right)$, где $D=B^2-4AC$ – дискриминант, ветви параболы направлены вверх или вниз, в зависимости от знака A.

Общее уравнение кривой второго порядка.

Уравнение второй степени вида $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

(не содержащее члена xy с произведением координат) называется пятичленным уравнением кривой второго порядка и определяет либо окружность (при A=C), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$).При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружность) − в точку или мнимый эллипса (окружность), для гиперболы − в пару пересекающих прямых, для параболы − в пару параллельных прямы.

4.2. Вопросы для самоконтроля

1. Понятие об уравнении линии.
2. Общее уравнение прямой на плоскости.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0;y_0)$ с угловым коэффициентом k.
6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

7. Угол между прямыми на плоскости; условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

8. Расстояние между двумя точками.

9. Деление отрезка в данном отношении.

10. Алгоритм составления уравнения линии по ее геометрическим свойствам.

11. Окружность: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение.

12. Эллипс: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение. Эллипс со смещенным центром.

13. Гипербола: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение, асимптоты, эксцентриситет и его смысл. Сопряженная гипербола. Гипербола со смещенным центром.

14. Парабола: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение. Парабола со смещенной вершиной.

4.3. Решение типовых заданий

Задача 1. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2;-2)$ равно ее расстоянию от прямой $x+1=0$.

Решение. Расстояние от любой точки линии $M(x,y)$ до точки $A(2;-2)$ равно $d=\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$.

Расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой $x+1=0$ равно:

$$d=\frac{|1\cdot x+0\cdot y+1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x+1|.$$

По условию: $\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}=|x+1|$.

После соответствующих преобразований получим уравнение:

$$(y+2)^2=6\cdot(x-\frac{1}{2}).$$

Искомая линия – парабола, симметричная относительно прямой, параллельной оси Ox, с вершиной в точке $(\frac{1}{2}; \quad -2)$.

Задача 2. Определить координаты центра S и радиус r окружности, заданной уравнением $9x^2 + 9y^2 + 36x - 18y + 20 = 0$.

Решение. Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого разделим все членыуравнения на 9 и сгруппируем отдельно члены, содержащие x и y.

Получаем выражение $(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + \frac{20}{9} = 0.$

Дополним выражения, стоящие в каждой из скобок, до полного квадрата:

$$x^2 + 4x = (x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2) - 4 = (x+2)^2 - 4;$$
$$y^2 - 2y = (y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2) - 1 = (y-1)^2 - 1.$$

Данное уравнение принимает вид $(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + \frac{20}{9} = 0,$

или $(x+2)^2 + (y-1)^2 - \frac{25}{9} = 0,$ откуда $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$.

Таким образом, данная линия – окружность с центром в точке $C(-2; 1)$,

радиуса $r = \frac{5}{3}.$

Уравнение прямой на плоскости.

1. Написать уравнение прямой:

1) с угловым коэффициентом $\kappa = \frac{4}{7}$ и отрезком *b=-2* на оси оу;

2) проходящей через точку А(-3; 4) с угловым коэффициентом $\kappa = \frac{2}{3}$

3) проходящей через точку М(-2; -6) составляющей с осью 0х угол 45^0;

4) проходящей через точку А(-2; -4) параллельно прямой 3х + 5у - 6 = 0;

5) проходящей через точку A(-1; 5) перпендикулярно прямой

$2x - y + 2 = 0$;

6) проходящей через две точки A(2; -3), B(5; 2).

2. Преобразовать уравнение $3x - 2y - 6 = 0$ к уравнению прямой в отрезках и построить.

3. Найти точку пересечения прямых $2x - 3y + 11 = 0$ и $x + 5y - 1 = 0$.

4. Построить прямые: $-2x + 3y + 6 = 0$; $x - 2y = 4$; $x + 2 = 0$; $y - 4 = 0$;

$y=2x$; $x=0$; $y=0$.

5. Найти расстояние от точки $M_0(2;-1)$ до прямой $3x - 4y + 5 = 0$.

6. Найти угол между прямыми $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$.

7. Записать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек A(-1; 4), B(2; 5).

8. На оси абсцисс найти точку, равноудаленные от точек A(2;3) и B(5;6).

9. Лежат ли на одной прямой три данные точки: A(2; 0), B(6; 4), C(11; 9)?

10. Даны вершины треугольника: A(3; 5), B(-5; 3), C(5; -8). Определить уравнение медианы, проведенной из вершины C.

11. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются уравнениями: $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где x – расстояния в сотнях километров, y – транспортные расходы. С какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

Окружность.

1. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус R = 3;

2) окружность проходит через точку A(2; 6) и ее центр совпадает с точкой C(-1; 2);

3) точки A(3; 2) и B(-1; 6) являются концами одного из диаметров окружности;

2. Какие из приведенных ниже уравнений определяют окружности?

Найти центр C радиуса R каждой из них:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25;$ 2) $(x-5)^2+(y+2)^2=0;$

3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0;$ 4) $x^2+y^2-4y+3=0.$

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=+\sqrt{9-x^2};$ 2) $x=-\sqrt{4-y^2};$

3) $y=2+\sqrt{16-x^2};$ 4) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}.$

Эллипс.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c = 8;

3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c = 10;

2. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1;$ 2) $x^2+25y^2=25;$

3) $4x^2+9y^2=25;$ 4) $25x^2+9y^2=1.$

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Изобразить эти линии на чертеже.

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0;$ 2) $y=+\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2};$

3) $x=-\dfrac{2}{3}\sqrt{9-y^2};$ 4) $y=-7+\dfrac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}.$

Гипербола.

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;

2) расстояние между фокусами 2c = 10 и ось 2b =8;

3) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c = 20.

2. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол, записать уравнения асимптот.

1) $16x^2 - 9y^2 = -144$; 2) $x^2 - 4y^2 = 16$;

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9};$ 2) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$;

3) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$

4. Составить уравнение осей симметрии равносторонней гиперболы, изобразить ее на чертеже $y = \frac{3x+4}{x-1}$.

Парабола.

1. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины A и изобразить эти линии на чертеже:

1) $y^2 = 4x - 8;$ 2) $y^2 = 4 - 6x$; 3) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2;$

4) $y = 4x^2 - 8x + 7;$ 5) $x = 2y^2 - 12y + 14;$ 6) $y = +\sqrt{-x};$

7) $x = +\sqrt{5y};$ 8) $x = -5\sqrt{-y};$ 9) $y = 3 - 4\sqrt{x-1}.$

2.5. Домашнее задание

1. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-4; 3)$ и $M_2(2; 5)$.

2. На оси абсцисс найти точку, отстоящую на расстояние d = 10 от точки A(2; 6)3. Даны вершины треугольника A(-1; 3), B(3; -2) и C(5; 3). Составить уравнения: а) стороны AB; б) медианы, проведенной из вершины B;

в) высоты, проведенной из точки A.

4. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x производит по прямой линии, составить ее уравнение, если при x = 3, y = 185, а при x = 5, y = 305. Определить объем производства при x=20.

5. Составить уравнение прямых, проходящих через точку A(-4; 1) параллельно осям координат.

6. Найти угол между прямой 3x + y – 6 = 0 и прямой, проходящей через точку A(-3; 1) и B(3; 3).

7. Дана прямая 2x + 5y – 1 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-1; 3): а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 2x – 3y + 4 = 0 и 3x + y – 5 = 0 перпендикулярно к прямой y = 2x.

9. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) центр окружности совпадает с точкой C(2; -3) и ее радиус R = 7;

2) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой C(6; -8).

10. Какие из приведенных ниже уравнений определяют окружности?

Найти центр C, радиус R каждой из них:

1) $x^2+y^2-2x+4y-4=0;$ 2) $x^2+y^2-6y=0.$

11. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=-\sqrt{25-x^2};$ 2) $x=-2+\sqrt{9-y^2}.$

12. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $9x^2+25y^2=225;$ 2) $16x^2+y^2=16.$

13. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;   2) $x=+\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$;

3) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0.$

14. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;

2) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b =8$;

3) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$.

15. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $x^2-4y^2=16$;   2) $9x^2-64y^2=1.$

16. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=+\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$;   2) $y=\frac{2x+6}{x+1}$;

3) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0.$

17. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины A и изобразить линии на чертеже.

1) $x^2=6y+2$;   2) $y=-x^2+2x-7$;   3) $x=-\frac{1}{4}y^2+y$;

4) $y=-3\sqrt{-2x}$;   5) $y=-2\sqrt{x}$;   6) $x=-4+3\sqrt{y+5}.$

18. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точки F(2;2) и от оси Ox.

19. Построить области, ограниченные линиями:

1) $4y=8x-x^2;\ 4y=x+6$;   2) $y=4-x^2;\ y=x^2-2x$.

4.6. Контроль знаний

Вариант контрольной работы

1. Даны вершины треугольника А(1; 2), В(3; 4), С(-5; 7):

а) написать уравнения сторон АС, ВС;

б) написать уравнение прямой, проходящей через точку В, параллельно прямой АС;

в) уравнение медианы АМ;

г) уравнение высоты ВД.

Сделать чертеж.

2. Определить угол между двумя прямыми $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$.

3. Построить линии:

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0;$

3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0;$

4) $y = +2\sqrt{x};$ 5) $y = -3\sqrt{-2x};$

6) $y^2 = 8x + 4;$ 7) $x^2 = 5y - 10.$

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Справочный материал

Уравнение плоскости в пространстве.

Уравнение плоскости, перпендикулярной данному вектору $\vec{n} = (A,B,C)$ и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\ .$$

Уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, где a, b, c отрезки отсекаемые плоскостью на осях координат.

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0.$

Угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \quad \text{или} \quad \cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей:

плоскости перпендикулярны, если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;

плоскости параллельны, если: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно данному вектору $\vec{s} = (m, n, p)$.

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где $\vec{s} = (m, n, p)$ – ненулевой вектор, причем m, n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел равняться нулю могут. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол между прямыми в пространстве

$$\cos\varphi=\pm\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\left|\overrightarrow{a_2}\right|}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

в пространстве.

Две прямые параллельны, если направляющие векторы этих прямых коллинеарные, т.е. их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

Две прямые перпендикулярны, если направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. скалярное произведение направляющих векторов равен нулю:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Угол между прямой и плоскостью: $\sin\varphi=\pm\frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|\vec{n}||\vec{a}|}$.

В координатной форме:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Условия параллельности прямой и плоскости:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Условия перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Простейшие поверхности второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ – эллиптический цилиндр.

z

y

0

x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ – гиперболический цилиндр.

z

0 x

y

$x^2 = 2p(y\text{-}1)$ – параболический цилиндр.

z

0 x

y

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ – сфера.

z

0

y

x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ – трехосный эллипсоид.

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осям

z

y

x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ – **однополостный гиперболоид:**

z

y

Двуполостный гиперболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

z

0 y

x

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$$ – **эллиптический параболоид.**

z

y

0

x

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$ – **гиперболический параболоид.**

z

x

0

y

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$ – **конус второго порядка.**

z

0

y

x

5.2. Вопросы для самоконтроля

1. Плоскость в пространстве: основные виды уравнений (общее, неполные, в отрезках).

2. Построение плоскостей.

3. Угол между плоскостями.

4. Условия коллинеарности и ортогональности плоскостей.

5. Уравнение прямой в пространстве: основные виды уравнений (общее, канонические, параметрические, по двум точкам).

6. Угол между прямыми, условия коллинеарности и ортогональности прямых.

7. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.

8. Поверхности второго порядка: сфера, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, цилиндры (эллиптический, параболический гиперболический), параболоиды (эллиптический, гиперболический).

5.3. Решение типовых заданий

<u>Задача 1.</u>Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,5,-4)$, перпендикулярно данному вектору $\vec{n}(3,2,-1)$.

<u>Решение</u>. Уравнение плоскости перпендикулярной данному вектору $\vec{n}=(A,B,C)$ и проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$; подставляя в него координаты точки M_0 и координаты вектора $\vec{n}$, получим 3(x – 2)+2(y – 2) – (z + 4) = 0.

Следовательно, искомое уравнение 3x + 2y – z – 14 = 0.

<u>Задача 2.</u> Найти уравнение плоскости, проходящей через ось 0z и через точку $M_0(1,-2,1)$.

Решение. В общем уравнении плоскости Ax + By + Cz + D = 0, проходящей через ось 0z, должно быть C = D = 0. Точка M_0, по условию, лежит на этой плоскости, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости 1A - 2B = 0, откуда A = 2B. Подставляя значение A в уравнение плоскости и сокращая на B, получим искомое уравнение

2x + y = 0.

Задача 3. Плоскость проходит через точку $M_0(2,-2,-4)$ и отсекает отрезки на оси абсцисс *a* = -3, на оси аппликат c = 2. Составить уравнение плоскости.

Решение. Воспользуемся уравнением в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

По условию *a* = -3, c = 2, поэтому $\frac{x}{-3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2}=1.$ Точка $M_0(2,-2,-4)$ принадлежит плоскости, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости: $\frac{2}{-3}+\frac{-2}{b}+\frac{-4}{2}=1,$ откуда b = $-\frac{6}{11}$.

Искомое уравнение $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-\frac{6}{11}}+\frac{z}{2}=1.$

Задача 4. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-2,2)$ параллельно оси 0y.

Решение. Вектор $\vec{a}(0,1,0)$ расположен на оси 0y, по условию параллелен прямой. Поэтому его можно считать направляющим вектором этой прямой.

Канонические уравнения прямой в пространстве имеет вид:

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. Подставляя в него координаты точки M_0 и вектора $\vec{a}$, получим канонические уравнения $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}$ прямой.

Переходя к параметрическим уравнениям $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}=t$, получим x – 1 = 0, z – 2 = 0 и y = −2 + t.

Следовательно, искомые параметрические уравнения имеют вид x = 1, y=−2 + t, z =2.

Задача 5. Написать канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость 4x – y + 2z -3 = 0.

Решение. Вектор $\vec{n}(4,-1,2)$ перпендикулярный данной плоскости, параллелен искомой прямой, и его можно считать направляющим вектором этой прямой. По формуле канонические уравнения прямой имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Откуда $\frac{x}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$.

5.4. Задания для самостоятельной работы

Уравнение плоскости в пространстве.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=\{1;-2;3\}$.

2. Точка $P(2;-1;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

3. Определить координаты нормального вектора каждой из следующих плоскостей и найти их модули.

1) $2x-y-2z+5=0$; 2) $x+5y-z=0$; 3) $3x-2y-7=0$;

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-1)$ параллельно плоскости $4x-2y+5z-3=0$.

5. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+\sqrt{2}y-z+3=0;$

6. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $3x-y+lz-9=0, \quad 2x+my+2z-3=0;$

2) $mx+3y-2z-1=0, \quad 2x-5y-lz=0.$

7. Определить, при каком значении m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $5x-y+6z-9=0,$ 2) $2x+my+2z-3=0.$

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;-4;2)$ и параллельной плоскости xOz.

Прямая в пространстве.

1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1;1;-3)$ параллельно вектору $\vec{a}=(1;-3;4)$.

2. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;-1;-1)$ и $M_2(3;3;-1)$

3. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки А (3;-1;2) и В(2;1;1).

4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

5. Определить, при каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

6. Построить поверхности:

1) $2x-5y+3z=15$; 2) $2x+3y=6$; 3) $x+z=2$;

4) $z - 2 = 0$; 5) $x^2 + z^2 = 4$; 6) $y^2 - x = 0$;

7) $y^2 - 4z - 5 = 0$; 8) $z = x^2 + y^2 + 1$; 9) $z = 4 - y^2$.

7. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2$, $x = 2$, $y = 2$, $x = 0, y = 0$, $z = 0$;

2) $z = y^2$, $2x + y = 4$, $x = 0$, $z = 0$;

3) $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$, $y = 0, z = 0$.

5.5. Домашнее задание

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{5;0;-3\}$.

2. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, 2) $mx - 6y - 6z + 2 = 0$.

4. Определить, при каком значении m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $5x - y + mz - 9 = 0$, 2) $6x + 8y + z - 3 = 0$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z + 1 = 0$.

6. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3;1;-4)$ и $M_2(5;-2;1)$.

7. Составить каноническое уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;0;-3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2;-3;5\}$;

2) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

8. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки: A(0;0;1) и B (0;1;-2).

9. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3;-2;4)$ перпендикулярно плоскости $5x+3y-7z+1=0$.

10. Найти острый угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

11. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}, \quad x-3y-z-14=0.$$

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

13. Построить поверхности:

1. $2x+4y+3z=12$; 2. $2x-y=3$; 3. $y+3z=6$;
4. $y^2-z^2+3x^2=0$; 5. $y^2+z^2=9$; 6. $y^2-x=0$.

14. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z=y^2$, $2x+y=4$, $x=0$, $z=0$;
2) $z=1-y^2$, $x+y=1$, $x\geq 0$, $y=0$, $z=0$;

Тест по теме « Аналитическая геометрия»

1. Даны точки $M_1(1;4;4)$ и $M_2(3;-7;5)$. Тогда модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равен

1) 126; 2) $\sqrt{126}$; 3) 14; 4) $\sqrt{!4}$.

2. Векторы $\vec{a}\,(6;2к;-1)$ и $\vec{b}\,(-1;2;4)$ перпендикулярны, если *к* равном…

1) 5; 2)2; 3) 10; 4)2,5.

3. Если $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-8\vec{j}+2\vec{k}$, тогда вектор $2\vec{a}+\vec{b}$ равен…

1) $10\vec{i}-12\vec{j}+10\vec{k}$; 2) $7\vec{i}-12\vec{j}+10\vec{k}$; 3) $10\vec{i}-14\vec{j}+10\vec{k}$; 4) $10\vec{i}-12\vec{j}+8\vec{k}$.

4. Даны точки А(8;-6) и В(-5; 4) . Тогда координаты середины отрезка АВ равны…

1) (1,5; -1) 2) (2;1) 3) (1;2) 4)(2;5).

5. Углов0й коэффициент k прямой 7х - 4у +5 3=0 равен…

1) 7; 2) -4; 3) $\frac{7}{4}$; 4) $\frac{4}{7}$.

6. Общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-1;8)$ $M_2(-2;5)$ имеет вид…

1) 3х – у + 11 = 0; 2) 3х + у -11 = 0;

3) 3х + у + 11 = 0; 4) 3х – у - 11 = 0.

7. Прямая 2у+4х=5 параллельна прямым….

1) -2у+3х=4, 2) у=$\frac{3}{2}$х+4, 3) у=-2х+8, 4) 4у+6х=1.

8. Прямая у=3х+5 перпендикулярна прямым …

1) 3у-4х+4=0, 8у+12х-11=0, 3) -3у-2х+5=0, 4) 3у+х+8=0.

9. Расстояние от точки $M_0(4;-5)$ до прямой 3х-4у + 5=0 равно:

1) $\frac{20}{5}$; 2) $\frac{27}{5}$; 3) $\frac{37}{5}$; 4) $\frac{37}{25}$.

10. Центр окружности $x^2+y^2+6x=0$ имеет координаты…

1) (-3; 0); 2) (3;0); 3) (1;2); 4)(2;6).

11. Если $C(-3;6)$ – центр окружности проходящей через точку $A(1;\ 2)$, то уравнения этой окружности запишется…

1) $(x-3)^2+(y-6)^2=32$; 2) $(x-3)^2+(y+6)^2=32$;

3) $(x+3)^2+(y-6)^2=32$; 4) $(x+3)^2+(y+6)^2=32$.

12. Сумма полуосей эллипса $4x^2+9y^2=25$ равна…

1) $\frac{20}{5}$; 2) $\frac{25}{6}$; 3) $\frac{37}{5}$; 4) $\frac{37}{25}$.

13. Мнимая полуось гиперболы $x^2 - 4x - 2y^2 + 8y = 8$ равна…

1) 4; 2) 6; 3) 2; 4) $\sqrt{2}$.

14. Уравнение асимптот гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$ имеют вид…

1) $\pm\frac{3}{2}x$; 2) $\pm\frac{2}{3}x$; 3) $\pm\frac{9}{4}x$; 4) $\frac{3}{2}x$.

15. Расстояние от вершины до фокуса параболы $y^2 = 6x - 6$ равно…

1) 4; 2) 2; 3) 1,5; 4) 6.

16. Расстояние от точки $M_0(1;-3)$ до центра гиперболы $-x^2 + 4x + y^2 = 0$ равно…

1) 4; 2) 6; 3) 10; 4) $\sqrt{10}$.

17. равнение y $= \sqrt{25 - x^2}$ определяет…

1) (окружность, y>0); 2) (эллипс, y>0);

3) (парабола, y>0); 4) (гипербола, y>0).

18. Единичный вектор перпендикулярный плоскости 6x-7y +4z-10=0 имеет координаты…

1) (-6; -7;4); 2) (6; 7;4); 3) (6; -7;-4); 4) (6; -7;4).

19. Уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;4)$ перпендикулярно плоскости 3x +5y –z+7=0 имеет вид…

1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{1}$; 2) $\frac{x-2}{8} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{1}$;

3) $\frac{x-2}{8} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{-1}$; 4) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-4}{-1}$.

20. Плоскости 2x +m y +4 z - 5 = 0, nx - 8 y – 4z +2 = 0 параллельны при значениях *m* и *n* соответственно равны …

1) (8; -2) 2) (2;1) 3) (3;2) 4)(2;5).

21. При каком значении n плоскости 2x -5y +n z – 3 = 0, x + 3y + 4z + 5 = 0 перпендикулярные…

1) $-\frac{4}{13}$; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{4}{13}$; 4) $-\frac{13}{4}$.

22. При каких значениях m и n прямые $\frac{x-2}{8}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{1}$ и

$\frac{x+3}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{6}$ параллельны…

1) (48; 18) 2) (3;8) 3) (3;6) 4)(2;5).

23. Уравнение $y^2 = 3x - 12$ …

1) Эллипсоид; 2) Цилиндр; 3) Плоскость;

4) Конус; 5) Параболоид.

24. Плоскость 6x+4y - 5=0 параллельна оси…

1) 0x; 2) 0y; 3) 0z.

25. Уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ перпенди

кулярно прямой $\frac{x-2}{8}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{1}$ имеет вид…

1) -8x+3y+z-16=0; 2) 8x+3y+z+16=0;

3) 8x+3y+z-10=0; 4) 8x+3y+z-16=0.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1998, 2002, 2003, 2004, 2000. - 472 с.
2. Красс, М. С.. Математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. - 464 с.
3. Курс высшей математики [Текст]: учебник В.С. Шипачев. –4-е изд. Испр. М. :УНИКС, 2009. –600 с.

Дополнительная литература:

1. Задачник по высшей математики [Текст]: : учебное пособие: доп. Мин. Обр. РФ/ В.С. Шипачев. –9-е изд. ,стер. – М. Высш. шк., 2009 . –304с.

2. Математика для технических вузов [Текст]: специальные курсы: учебное пособие/ А. Д. Мышкис –.3 –е изд, стер. – СПБ. Лань., 2009 . –633с.

СОДЕРЖАНИЕ

Галина Павловна Вохминцева,

доцент кафедры «Общая математика и информатика» АмГУ;

Галина Никитовна Торопчина,

доцент кафедры «Общая математика и информатика» АмГУ;

Инна Николаевна Шевченко,

доцент кафедры «Общая математика и информатика» АмГУ

Линейная алгебра: Учебно-методическое пособие

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 6,98. Заказ 331.