

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»**

Кафедра общей математики и информатики

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
МАТЕМАТИКА**

Основной образовательной программы по направлению подготовки
100700.62 – Торговое дело

2012 г.

УМКД разработан старшим преподавателем кафедры ОМиИ Юрьевой Татьяной Александровной; старшим преподавателем кафедры ОМиИ Гришкиной Татьяной Евгеньевной

Рассмотрен на заседании кафедры ОМиИ

Протокол заседания кафедры от « 25 » января 2012 г. № 5

Заведующий кафедрой _____ Г. В. Литовка

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМС направления подготовки 100700.62 Торговое дело
от « 27 » января 2012 г. № 4

Председатель УМС направления подготовки 100700.62 Торговое дело
_____/_____

СОДЕРЖАНИЕ

I Рабочая программа	4
1. Цели и задачи освоения дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре ооп впо.....	4
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)	4
4. Структура и содержание дисциплины (модуля)	5
5. Содержание разделов и тем дисциплины.....	5
5.1. Лекции	5
5.2. Практические занятия	9
6. Самостоятельная работа	10
7. Матрица компетенций учебной дисциплины	11
8. Образовательные технологии и формы	11
9. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов	12
10. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)	19
11. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля).....	20
Рейтинг-план дисциплины	21
II Краткое изложение программного материала	23
1. Семестр I.....	23
2. Семестр II.....	37
III Методические указания и рекомендации	54
1. Методические рекомендации для преподавателей.....	54
2. Методические указания по изучению дисциплины	55
3. Краткие учебно-методические материалы к практическим занятиям.....	56
4. Методические указания по самостоятельной работе студентов.....	76
IV Контроль знаний	78
1. Текущий контроль знаний	78
2. Итоговый контроль знаний.....	84
V Интерактивные технологии и инновационные методы, используемые в образовательном процессе.....	93

І РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: получение фундаментального образования, соответствующего развитию личности; формирование у студентов практических навыков использования необходимого математического аппарата, позволяющего моделировать, решать и анализировать прикладные экономические задачи.

Задачи дисциплины:

- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- выработка умения моделировать реальные экономические процессы;
- освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Предлагаемая дисциплина относится к базовой части математического и естественно-научного цикла ООП.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы базовые знания курса «Математика» в объеме средней общеобразовательной школы.

Дисциплина занимает важное место в программе подготовки бакалавра, так как обеспечивает базовую математическую подготовку студентов, необходимую для решения и анализа профессиональных задач.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1) Знать: аналитическую геометрию и линейную алгебру, теорию вероятностей статистические методы обработки экспериментальных данных;

2) Уметь: производить расчеты математических величин, применять статистические методы обработки экспериментальных данных;

3) Владеть: методами математического анализа и моделирования, математическим аппаратом при решении профессиональных проблем.

В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие общеобразовательные компетенции:

– владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);

– способность применять основные законы социальных, гуманитарных, экономических и естественно-научных наук в профессиональной деятельности, а так же методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования; владение математическим аппаратом при решении профессиональных проблем (ПК-1).

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачетных единиц, 360 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические работы	Самостоятельная работа	
1	Введение в анализ с элементами аналитической геометрии	1	1-10	20	20	28	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
2	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	1	11-15	10	10	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа
3	Функции нескольких переменных	1	16-18	6	6	14	контрольная работа
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	1		36	36	72	экзамен
4	Линейная алгебра	2	1-5	10	10	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
5	Интегральное исчисление	2	6-9	8	8	16	контрольная работа, расчетно-графическая работа
6	Дифференциальные уравнения	2	10-12	6	6	6	контрольная работа
7	Теория вероятностей и элементы математической статистики	2	13-18	12	12	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	2		36	36	72	экзамен

5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Лекции

Темы дисциплины и их содержание

Раздел 1. Введение в математический анализ с элементами аналитической геометрии.

Тема 1. Числа. Переменные. Множества. Отображения. Действительные и комплексные числа. Переменные и постоянные величины. Конечные и бесконечные множества.

Тема 2. Функциональная зависимость.

Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания. Классификация функций, их графики. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции и их графики. Преобразование графиков функции.

Тема 3. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Угол между прямыми. Уравнение плоскости. Кривые и поверхности второго порядка.

Тема 4. Пределы и их свойства.

Понятия о числовых последовательностях. Предел последовательности. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их основные свойства. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела. Два замечательных предела. Раскрытие неопределённости различного вида.

Тема 5. Непрерывность функции.

Непрерывные функции. Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Свойства функции, непрерывных на отрезке.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Тема 1. Производная функции.

Понятие производной. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Непрерывность дифференцируемых функций.

Тема 2. Правила дифференцирования.

Основные правила и формулы дифференцирования функций. Производные высших порядков.

Тема 3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции, его свойства. Связь дифференциала и производной.

Тема 4. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталья.

Тема 5. Приложения производной к исследованию функций.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных. Применение производной к приближённому решению уравнений. Интерполирование функций. Логарифмическая производная, связь с банковским процентом. Эластичность функции, экономические приложения.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

Тема 1. Понятие о метрическом пространстве. Окрестность точки. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Понятие о функции многих переменных. Поверхности второго порядка. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Тема 2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.

Частные производные и полный дифференциал функции многих переменных. Производная сложной функции. Производная высших порядков. Перестановочность частных производных по разным переменным. Понятие условного экстремума. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Раздел 4. Линейная алгебра.

Тема 1. Матрицы.

Матрицы и операции над ними. Основные свойства операции над матрицами.

Тема 2. Определители.

Определители квадратных матриц: определения и основные свойства. Вычисление определителя.

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений: определение, примеры. Свойства систем уравнений: совместимость, несовместимость, определённая. Частные и общие решения. Эквивалентность систем; элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем. Однородные неоднородные системы линейных уравнений. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем. Структура общего решения неоднородной системы.

Тема 4. Методы решения систем линейных уравнений.

Решение систем методом Гаусса, по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы.

Тема 5. Векторное пространство и линейные преобразования.

Векторное пространство: определение и примеры. Линейно зависимые системы векторов и их свойства. Базис линейного пространства. Теорема о ранге и её следствия. Размерность линейного пространства. Подпространства. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений. Формула для общего решения неоднородной системы линейных уравнений. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Тема 6. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Использование алгебры матриц. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Линейная модель торговли.

Раздел 5. Интегральное исчисление.

Тема 1. Первообразная функция и неопределённый интеграл. Первообразная: определения, примеры. Теорема об общем виде всех первообразной данной функции. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов. Методы интегрирования по частям и заменой переменных. Методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Тема 2. Определённый интеграл.

Понятие об определённом интеграле. Свойства определённого интеграла. Теорема о существовании определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной. Интегрирование по частям. Несобственный интеграл. Приближённое вычисление определённых интегралов.

Раздел 6. Дифференциальные уравнения.

Тема 1. Основные понятия.

Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Тема 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Различные виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделяющимися переменными, однородные линейные уравнения.

Тема 3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Уравнения второго порядка, решаемые понижением порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Приложение к описанию линейных моделей в экономике.

Раздел 7. Теория вероятностей и элементы математической статистики.

Тема 1. Предмет теории вероятностей. Основные понятия.

Предмет теории вероятностей, первоначальные понятия и определения, основные формулы комбинаторики, классическое определение вероятностей.

Тема 2. Сложение и умножение вероятностей.

Теорема сложения вероятностей, условные вероятности, теорема умножения вероятностей, независимые события и их свойства. Вероятность появления хотя бы одного события.

Тема 3. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли.

Формула полной вероятности, формула Байеса, схема повторных испытаний Бернулли, формула Бернулли. Локальная и интегральная теорема Муавра – Лапласа, формула Пуассона.

Тема 4. Случайные величины.

Случайная величина. Примеры случайных величин. Виды случайных величин (конечные, дискретные, непрерывные). Закон и таблица распределения конечных и дискретных случайных величин. Функция распределения случайной величины и её свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и её свойства. Эффект нулевой вероятности. Математическое ожидание как среднее значение случайной величины. Определение математического ожидания для различных видов случайных величин. Определение суммы и произведения случайных величин. Свойства математического ожидания. Дисперсия случайной величины и её свойства. Среднее квадратичное отклонение.

Тема 5. Основные законы распределения случайных величин.

Биноминальное распределение и его характеристики. Распределение Пуассона и его характеристики. Теорема Пуассона. Нормальное распределение и его характеристики. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа. Показательное распределение и его характеристики. Равномерное распределение и его характеристики.

Тема 6. Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева. Теоремы Чебышева и Бернулли.

Тема 7. Выборочный метод

Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

Тема 8. Статистические оценки параметров распределения.

Точечные оценки. Интервальные оценки

Тема 9. Проверка статистических гипотез.

Постановка задачи проверки гипотез. Критерий оценки и его мощность. Критическая область и область принятия гипотезы. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения. Проверка гипотез в виде распределения. Критерий Пирсона.

Тема 10. Корреляционный и регрессионный анализ.

Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин. Линейная и нелинейная регрессия. Составление уравнений прямых регрессий, метод наименьших квадратов. Статистическая оценка коэффициента корреляции и её свойства. Построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии. Проверка статистической значимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдений.

№ п/п	Темы лекций
Семестр I .	
Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.	
1	Основные понятия теории множеств.
2	Функциональная зависимость.
3	Функции в экономике.
4	Уравнение прямой на плоскости.
5	Кривые второго порядка.
6	Аналитическая геометрия в пространстве.
7	Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.
8	Предел функции. Основные теоремы о пределах.
9	Бесконечно малые функции.
10	Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.
Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	
11	Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
12	Дифференциал функции.
13	Основные теоремы дифференциального исчисления.
14	Исследование функций с помощью производных.

15	Приложения производной в экономике.
Раздел 3. Функции нескольких переменных.	
16	Функции нескольких переменных. Основные понятия.
17	Экстремум функции нескольких переменных.
18	Приложения к решению экономических задач.
Семестр II.	
Раздел 4. Линейная алгебра.	
1	Матрицы.
2	Определители.
3	Системы линейных уравнений.
4	Методы решения систем линейных уравнений.
5	Применение элементов линейной алгебры в экономике.
Раздел 5. Интегральное исчисление.	
6	Первообразная функция и неопределённый интеграл.
7	Основные методы интегрирования.
8	Определённый интеграл.
9	Приложения определённого интеграла.
Раздел 6. Дифференциальные уравнения.	
10	Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка.
11	Дифференциальные уравнения высших порядков решаемые понижением порядка.
12	Линейные однородные, неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков.
Раздел 7. Теория вероятностей и элементы математической статистики.	
13	Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
14	Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания. Интегральная теорема Лапласа.
15	Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин.
16	Основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин.
17	Элементы математической статистики. Выборочный метод.
18	Статистические оценки параметров распределения.

5.2. Практические занятия

№ п/п	Темы практических занятий
Семестр I.	
Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.	
1	Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы.
2	Действия над комплексными числами.
3	Уравнение прямой на плоскости.
3	Кривые второго порядка: окружность, эллипс.
4	Кривые второго порядка: гипербола, парабола.
5	Уравнение плоскости в пространстве.
6	Уравнение прямой в пространстве.
7	Понятие функции.
8	Вычисление пределов функций.
9	Замечательные пределы.
10	Непрерывность функции. Точки разрыва.
Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	
11	Производная явно заданной функции.

12	Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически. Производная степенно-показательной функции.
13	Интервалы монотонности и экстремумы функции. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты.
14	Исследование функций с помощью производных.
15	Приложения производной в экономике.
Раздел 3. Функции нескольких переменных.	
16	Функции нескольких переменных. Частные производные.
17	Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум.
18	Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач.
Семестр II.	
Раздел 4. Линейная алгебра.	
1	Матрицы и действия над ними.
2	Вычисление определителей.
3	Системы линейных уравнений. Метод Крамера.
4	Системы линейных уравнений. Матричный метод. Метод Гаусса.
5	Применение элементов линейной алгебры в экономике.
Раздел 5. Интегральное исчисление.	
6	Непосредственное интегрирование. Замена переменной.
7	Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей.
8	Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
9	Приложения определённого интеграла.
Раздел 6. Дифференциальные уравнения.	
10	Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные.
11	Дифференциальные уравнения высших порядков решаемые понижением порядка.
12	Линейные однородные, неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков.
Раздел 7. Теория вероятностей и элементы математической статистики.	
13	Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
14	Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания.
15	Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин.
16	Основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин.
17	Проверка статистических гипотез.
18	Корреляционный и регрессионный анализ.

6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №1. Выполнение домашних заданий.	28
2	2	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №2. Выполнение домашних заданий.	20
3	3	Выполнение домашних заданий.	14
4	1,2,3	Подготовка к экзамену	10
5	4	Выполнение индивидуальной рас-	20

		чётно-графической работы №3. Выполнение домашних заданий.	
6	5	Выполнение индивидуальной рас- чётно-графической работы №4. Выполнение домашних заданий.	16
7	6	Выполнение домашних заданий.	6
8	7	Выполнение индивидуальной рас- чётно-графической работы №5. Выполнение домашних заданий.	20
9	4,5,6,7	Подготовка к экзамену	10
Итого			144

7. МАТРИЦА КОМПЕТЕНЦИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел дисцип- лины	Компетенции		ИТОГО
	ОК-1	ПК-1	
Раздел 1	+	+	2
Раздел 2	+	+	2
Раздел 3	+	+	2
Раздел 4	+	+	2
Раздел 5	+	+	2
Раздел 6	+	+	2
Раздел 7	+	+	2

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ФОРМЫ

Интегральную модель образовательного процесса по дисциплине формируют технологии методологического уровня: модульно-рейтинговое обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, элементы технологии развития критического мышления.

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов. «Введение в анализ с элементами аналитической геометрии» (2 часа).

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину. Тема: «Введение в анализ с элементами аналитической геометрии» (4 часа).

Лекция вдвоем. Учебный материал проблемного содержания дается студентам в диалоговом общении двух преподавателей между собой. Моделируются профессиональные дискуссии разными специалистами (теоретиком и практиком, сторонником и противником определенной концепции). Студенты вовлекаются в общение, высказывают собственную позицию.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и проводится их обсуждение. Тема: «Интегральное исчисление» (2 часа).

2. Неигровые имитационные методы обучения

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач. Тема: «Функции нескольких переменных» (2 часа).

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной мето-

дике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций. Тема «Линейная алгебра» (2 часа).

3. Игровые имитационные методы

Мозговой штурм – наиболее свободная форма дискуссии, позволяющей быстро включить в работу всех членов учебной группы. Используется там, где требуется генерация разнообразных идей, их отбор и критическая оценка. Этапы продуцирования идей и их анализа намеренно разделены: во время выдвижения идей запрещается их критика. Внешне одобряются и принимаются все высказанные идеи. Больше ценится количество выдвинутых идей, чем их качество. Идеи могут высказываться без обоснования. Тема: «Теория вероятностей» (2 часа).

9. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, выполнение и защита типовых расчётов (РГР), проведение коллоквиумов, экзаменов. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами. Контроль за выполнением индивидуального задания осуществляется в два этапа: проверка письменных отчётов; защита задания в устной или письменной форме.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины: экзамен (1, 2 семестр).

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.

1. Комплексные числа.
2. Действия с комплексными числами.
3. Понятие множества.
4. Операции над множествами.
5. Числовые множества.
6. Постоянные и переменные величины.
7. Функция как одно из понятий математики.
8. Область определения и множество значений функции.
9. Способы задания функции.
10. Классификация функций.
11. Понятие об обратной функции.
12. Основные элементарные функции и их графики.
13. Понятие об уравнении линии.
14. Уравнение прямой на плоскости.
15. Уравнение плоскости.
16. Уравнение прямой в пространстве.
17. Угол между прямыми.
18. Кривые второго порядка на плоскости.
19. Поверхности второго порядка.
20. Пределы: числовых последовательностей, переменных, функций.
21. Основные теоремы о пределах.
22. Виды и раскрытие неопределенностей при нахождении пределов.

23. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
24. Сравнение функций. Эквивалентные бесконечно малые.
25. Асимптоты графика функций одной переменной.
26. Понятие неопределенности функции в точке.
27. Свойства функций, непрерывных в точках.
28. Свойства функций, непрерывных на множестве.
29. Непрерывность сложной функции.
30. Односторонняя непрерывность.
31. Непрерывность обратной функции.
32. Точка разрыва функции и их классификации.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

1. Производная функции.
2. Дифференцируемость и дифференциал функции.
3. Геометрический смысл производной и дифференциала.
4. Физический смысл производной и дифференциала.
5. Приложение производной в экономике. Эластичность функции.
6. Правила вычисления производной и дифференциала.
7. Производная и дифференциал сложной функции.
8. Логарифмическое дифференцирование.
9. Производные и дифференциалы высших порядков.
10. Производная обратной функции.
11. Производная параметрически заданной функции.
12. Производная неявно заданной функции.
13. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций
14. Формула Тейлора.
15. Правило Лопиталю раскрытия неопределенностей.
16. Признаки монотонности функции.
17. Экстремум функции.
18. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве.
19. Направление выпуклости графика функции.
20. Точки перегиба графика функции.
21. Общая схема исследования функции.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

1. Функция нескольких переменных. Основные понятия.
2. Частные производные функции нескольких переменных.
3. Полное приращение функции нескольких переменных.
4. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
5. Дифференциал функции нескольких переменных.
6. Градиент функции нескольких переменных.
7. Частные производные высших порядков.
8. Экстремумы функции нескольких переменных.
9. Наименьшее и наибольшее значение функции нескольких переменных.
10. Системы функциональных уравнений и неравенств.
11. Особые точки множеств.
12. Условные экстремумы функций нескольких переменных.
13. Наименьшее и наибольшее значение функции на множестве решений системы уравнений и неравенств.
14. Приложение функций нескольких переменных к решению экономических задач.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Раздел 4. Линейная алгебра.

1. Определение матрицы.
2. Сложение и вычитание матриц, свойства.

3. Умножение матриц на число, свойства.
4. Умножение матриц.
5. Равенство матриц.
6. Транспонирование матриц.
7. Определитель, его определение, порядок.
8. Основные свойства определителей.
9. Обратная матрица (определение).
10. Нахождение обратной матрицы.
11. Решение матричных уравнений.
12. Минор матрицы.
13. Ранг матрицы.
14. Элементарные преобразование матриц.
15. Эквивалентные матрицы.
16. Общий вид систем линейных неоднородных уравнений.
17. Общий вид систем линейных однородных уравнений.
18. Определение решения систем линейных уравнений.
19. Совместные и несовместные системы уравнений.
20. Матричная запись систем линейных уравнений.
21. Методы решения систем линейных уравнений.
22. Методы Гаусса решения систем линейных уравнений.
23. Теорема Кронекера – Капелли.
24. Условия единственности решения систем линейных уравнений.
25. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.
26. Решение систем линейных уравнений, когда число уравнений и неизвестных не совпадают.
27. N-мерные векторы. Действия с n-мерными векторами.
28. Скалярное произведение n-мерных векторов. Свойства скалярного произведения.
29. Длина вектора. Угол между n-мерными векторами.
30. Линейные комбинации векторов.
31. Линейная зависимость векторов.
32. Базис и размерность линейного пространства.
33. Ортогональные системы векторов.
34. Ортонормированная система векторов. Декартова система координат.
35. Модель Леонтьева.
36. Матрица затрат.
37. Модель равновесных цен.
38. Линейная модель торговли.

Раздел 5. Интегральное исчисление.

1. Неопределенный интеграл, его определение геометрическая интерпретация.
2. Методы и правила интегрирования.
3. Определенный интеграл, определение и геометрическая интерпретация.
4. Методы интегрирования определенных интегралов.
5. Несобственные интегралы.
6. Приложения определенного интеграла.

Раздел 6 . Дифференциальные уравнения.

1. Понятие о дифференциальном уравнении и его решении.
2. Порядок дифференциального уравнения.
3. Классификация дифференциальных уравнений: линейные, нелинейные, однородные, неоднородные, с постоянными и функциональными коэффициентами, без и правой частью.
4. Методы решения дифференциальных уравнений.

Раздел 7 . Теория вероятностей и элементы математической статистики.

1. Случайные события и их классификация.
2. Элементы комбинаторики.
3. Различные подходы к введению вероятности. Практически невозможные и практически достоверные события. Практической уверенности.
4. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.
5. Теорема умножения вероятностей.
6. Теорема сложения вероятностей, совместимых событий.
7. Формула полной вероятности.
8. Теорема Байеса.
9. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления события.
10. Теоремы Лапласа.
11. Вероятность отклонения частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
12. Случайные величины. Закон распределения дискретных случайных величин.
13. Функция распределения и ее свойства.
14. Плотность распределения и ее свойства.
15. Функция случайной величины и ее распределение.
16. Математическое ожидание случайной величины, свойство математического ожидания.
17. Дисперсия случайной величины, свойства дисперсии.
18. Биноминальное распределение.
19. Распределение Пуассона.
20. Равномерное распределение.
21. Нормальное распределение.
22. Вероятность попадания нормального распределенной величины на заданный участок. Правило трех сигм.
23. Понятие о теореме Ляпунова.
24. Оценка отклонения распределения случайной величины от нормального.
25. Экцесс и асимметрия.
26. Показательное распределение.
27. Неравенство Чебышева.
28. Теорема Чебышева.
29. Теорема Бернулли.
30. Понятие выборки случайных величин.
31. Понятие о выборочном методе.
32. Понятие генеральной совокупности (генеральной выборки).
33. Понятие регрессии, регрессионные зависимости.
34. Регрессионная зависимость как “ослабленная” функциональная зависимость.
35. Виды регрессионной зависимости.
36. Метод наименьших квадратов как метод аналитического сглаживания и определения параметров регрессионной зависимости.
37. Множественная регрессия.
38. Корреляционная зависимость между случайными величинами.
39. Ковариация. Коэффициент корреляции.
40. Различия между регрессионной и корреляционной зависимостями.
41. Основные задачи математической статистики.
42. Статистическая функция распределения.
43. Статистический ряд. Гистограмма.
44. Числовые характеристики статистического распределения.
45. Выравнивание статистических рядов, метод наибольшего правдоподобия.
46. Свойства точечных оценок.

48. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.
 49. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.
 50. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
 51. Статистические гипотезы.
 52. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия.
 53. Критическая область. Критические точки и их нахождение.
 54. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.
 55. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны. Понятие о критериях согласия.

Примерные варианты контрольных работ

1. Комплексные числа.

Задание 1: Вычислить: а) $\frac{1+3i}{-2+i} \cdot (-2i) + 1$; б) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot (-4 - 3i)$;

в) $\left(\frac{i^{16} + 3}{i^6 + 3} \right)^5$; д) $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$

Задание 2: Найти модуль и аргумент комплексного числа:

а) $z = (-5+i)(-5-i)$; б) $z = \left(\frac{4+3i}{5} \right)^{10}$

Задание 3: Решить уравнение: а) $z^2 - 8iz - 15 = 0$; б) $z^3 + 8i = 0$.

Задание 4: Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень: $z=1+i$

2. Аналитическая геометрия.

1. Даны вершины треугольника: А(2, 3), В(6, 1), С(2, -2).

Найти:

- Длину стороны АВ.
- Уравнения сторон АВ, ВС, АС.
- Уравнение высоты из вершины А.
- Уравнение медианы из вершины В.
- Расстояние от точки С до прямой АВ.

2. Построить кривые:

- $y = \sqrt{4-x^2}$.
- $2x^2 + 3y = 9$.
- Построить плоскость $4x + 2y + 3z = 12$.

3. Введение в анализ. Приложение производной.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{2 - \arcsin 2x}{\cos(1-3x)}$$

2. Вычислите y''

$$y = \sqrt{1-x^2} + 4x$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3 + 4x, & x > 0 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 9x + 0,2x^2$, где x - объем выпускаемой продукции в условных единицах ($x > 0$) Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если $p=49$ ден. ед.

4. Функции нескольких переменных.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = yx^2 - e^{xy}.$$

2. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y - соответственно объёмы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функция издержек заводов имеет вид:

$$C = x^2 + y^2 - 10x - 40y + 5500.$$

3. Задана производственная функция: $Q = 10\sqrt{L}\sqrt{K} + 15\sqrt{K}$. Вычислить предельный продукт труда и предельный продукт капитала при $L=100$, $K=2500$.

5. Элементы линейной алгебры.

1. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Требуется найти: транспонированную матрицу A^T ; ранг матрицы A ; произведение матриц $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$; обратную матрицу A^{-1} .

2. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

- 1)методом обратной матрицы;
- 2)по формулам Крамера;
- 3)методом Гаусса.

6. Неопределённый интеграл.

1. $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$;

6. $\int \arcsin 2x dx$;

2. $\int \sqrt[5]{3x-2} dx$;

7. $\int \frac{xdx}{x+6}$;

3. $\int \frac{xdx}{1+x^2}$;

8. $\int \cos 3x \sin 7x dx$;

4. $\int x \cos 3x dx$;

9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$;

5. $\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$;

10. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

7. Определенный интеграл

Задание 1: Вычислить определенный интеграл:

1) $\int_1^2 (x^2+1) dx$; 2) $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$; 3) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; 4) $\int_1^e \ln x dx$; 5) $\int_{1/2}^1 x^2 \cdot (2x-1)^8 dx$

Задание 2: Вычислить несобственный интеграл:

$$1) \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$$

Задание 3: Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$1) y = x^2, y = 2 - x^2; \quad 2) y = x(3 - x), y = x - 3.$$

8. Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

$$1. \quad \frac{y'}{e^{2x-1}} = \operatorname{tg} y \quad y(0) = 0;$$

$$2. \quad y' \sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-y}};$$

$$3. \quad y' - \frac{y}{x-2} = x + 2;$$

$$4. \quad y''' + 2y'' + 5y' = 0;$$

$$5. \quad y'' + y' - 2y = 3e^x.$$

9. Теория вероятностей: случайные события.

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает все три вопроса, содержащиеся в билете; б) студент знает только два вопроса; в) студент знает только один вопрос своего экзаменационного билета.

2. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 стандартных. Сборщик наугад берёт 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.

3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производится 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что цель будет поражена?

4. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?

6. Вероятность того что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?

7. В партии деталей двух сходных форматов число крупных деталей вдвое больше числа мелких. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 10 деталей окажется 6 крупных?

8. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Случайным образом отбирается 500 механизмов. Установить величину наибольшего отклонения частоты изготовленных механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

10. Теория вероятностей: случайные величины.

1. Производится 4 выстрела по некоторой цели. Вероятность попадания в цель от выстрела к выстрелу не меняется и остаётся равной 0,4. Требуется для С. В. X – числа попаданий составить ряд распределения и построить многоугольник распределения.

2. Детали, выпускаемые цехом по размеру диаметра распределяются по нормальному закону с параметрами: $a=5$ см, и $\sigma=0,9$. найдите границы в которых следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95

3. СВ X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите плотность вероятности, $M(X)$, $D(X)$.

4. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0.02t}$, второго

$F_2(t) = 1 - e^{-0.05t}$. Найдите вероятность того, что за время $t=6ч$ хотя бы один элемент откажет.

5. Найти числовые характеристики СВ X , распределённой равномерно в промежутке $[6, 10]$.

6. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется меньше 2.

7. Вероятность вынуть из урны белый шар $1/3$. Вынули (с возвращением) 300 шаров. Оценить вероятность того, что отклонение частоты появления белых шаров от вероятности будет менее $1/15$.

11. Математическая статистика.

1. Предположим, что на некотором предприятии собраны данные о числе дней, пропущенных работником по болезни:

Число дней, пропущен. в данном мес.	0	1	2	3	4
Число работников	10	17	25	28	24

Постройте полигон распределения частот. Найдите среднее число пропущенных дней, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

2. Аудиторская фирма хочет проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайно отбираются 50 счетов. По 20 счетам из 50 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.

3. Компания занимающаяся консультированием в области инвестиций заявляет, что среднегодовой процент по акциям определённой отрасли промышленности составляет 11,5%. Инвестор, желая проверить истинность этого утверждения на основе случайной выборки 50 акций выявил, что среднегодовой процент по ним составил 10,8% с исправленным средним квадратическим отклонением $s=3,4\%$. На основе имеющейся информации определите, имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы опровергнуть заявление компании? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -2-е изд., перераб. и доп.. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 2003, 2004.- 472с.

3. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.

4. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М.: Высшее образование, 2009.-646 с.

б) дополнительная литература:

1. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.

2. Высшая математика для экономических специальностей : учеб.:рек.Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера Ч.2 :Учебник и практикум.-2005.-408 с.

3.Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

5. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

6. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2003.-2005.-560 с.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http://www.iqlib.ru	Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам отдельным темам и отраслям знаний
2	http://elibrary.ru	Научная электронная библиотека журналов

11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием.

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
1 семестр

		Раздел 1	Раздел 2	Раздел 3		
	Вид работы	Введение в анализ с элементами аналитической геометрии	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	Функции нескольких переменных	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	15	10	5		
2.	Тест				5	
3.	Расчётно-графическая работа	5	5			
4.	Коллоквиум	5				
5.	Домашние задания	4	4	2		
	Σ	29	19	7	5	60
	Экзамен					40

Расчётно-графическая работа:

Сдача в срок -2 балла

Защита: «3»-1балл

«4»-2балла

«5»-3 балла

Коллоквиум:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Контрольная работа:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Тест 25 заданий:

7-12 –1 балл

13-19 –3 балла

20-22 –4 балла

23-25 –5 баллов

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
2семестр

		Раздел 4	Раздел 5	Раздел 6	Раздел 7		
	Вид работы	Линейная алгебра	Интегральное исчисление	Дифференциальные уравнения	Теория вероятностей и элементы математической статистики	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	10	5	5	10		
2.	Тест					5	
3.	Расчётно-графическая работа	5	5		5		
4.	Коллоквиум	5					
5.	Домашние задания	2	1	1	1		
	Σ	22	11	6	16	5	60
	Экзамен						40

Расчётно-графическая работа:

Сдача в срок -2 балла

Защита: «3»-1 балл

«4»-2 балла

«5»-3 балла

Коллоквиум:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Контрольная работа:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Тест 25 заданий:

7-12 –1 балл

13-19 –3 балла

20-22 –4 балла

23-25 –5 баллов

II КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА

1. Семестр I

Лекция 1.

Тема: Введение в анализ. Основные понятия.

План

1. Числа. Переменные. Множества. Отображения.
2. Действительные и комплексные числа. Переменные и постоянные величины.
3. Конечные и бесконечные множества, операции над ними.

Цель : дать студентам представление о теоретических основах данной темы.

Задачи:

- сформировать представления, первичные знания по теме;
- формировать направленность, интерес;
- привить необходимую математическую культуру.

Ключевые вопросы

1. Под множеством понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множества называются элементами, или точками, этого множества.

2. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется действительной частью числа z ($a = Re z$), а b – мнимой частью ($b = Im z$).

3. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединение двух множеств A и B называется множеством C , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. $C = A \cup B$.

Например, если $A = \{a, b, d, e\}$; $B = \{a, e, f, c, k\}$, то $C = A \cup B = \{a, b, d, e, f, c, k\}$

Пересечением двух множеств A и B называется множество D , состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств A и B , т.е. $D = A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E , состоящее из всех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B , т.е. $E = A \setminus B$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2.

Тема: Введение в анализ. Функциональная зависимость.

План

1. Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания.
2. Классификация функций, их графики.
3. Понятие обратной функции.
4. Основные элементарные функции, их графики.
5. Сложная функция.
6. Преобразование графиков функции.

Цель: раскрыть понятие функции и функциональной зависимости.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Рассмотрим два множества X и Y , элементами которых могут быть любые объекты. Предложим, что каждому элементу x множества X по некоторому закону или способу поставлен в соответствие определенный элемент y множества Y , то говорят что на множестве X задана функция $y = f(x)$, (или отображение множества X во множество Y). Множество X называется областью определения функции f , а элементы $y = f(x)$ образуют множество значений функции – Y . x – независимая переменная (аргумент).

y – зависимая переменная, f – закон соответствия, знак функции.

2. Элементарные функции делятся на два класса:

1 класс алгебраических функций:

а) $y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n$, это многочлен (полином) n – степени или целая алгебраическая функция, где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ – вещественные числа, коэффициенты многочлена;

б) $y = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)/(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m)$, это дробно – рациональная функция, она представляет собой отношения двух многочленов;

в) Иррациональная функция, например, $y = \sqrt{x-1} + x^2$.

2 класс трансцендентных функций.

а) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, показательная функция,

б) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, логарифмическая функция,

в) все тригонометрические функции,

г) все обратные тригонометрические функции,

д) функции вида $y = x^L$, где L – иррациональное число.

3. Все функции, с которыми встречаемся в школьном курсе, элементарные. Перечислим их:

1. $y = x^n$, $y = x^{-n}$, $y = x^{m/n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Эти функции называются степенными.

2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Обратные тригонометрические функции $y = \operatorname{arcsin} x$, $y = \operatorname{arccos} x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

4. Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u , определенная на множестве U с областью значений – Y , а переменная $u = \varphi(x)$ функция от переменной x , определенной на множестве X с областью значения U . Тогда заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией (функцией от функций).

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 3.

Тема: Функции в экономике.

План

1. Функции спроса, потребления и предложения. Функции Торнквиста.
2. Производственная функция.
3. Функция прибыли.
4. Функция полезности.
5. Функция национального дохода.

Цель: рассмотреть наиболее часто используемые в экономике функции.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Рассмотрим какой-нибудь товар. При цене p за единицу товара обозначим D число единиц товара, которые покупатели на рынке желают купить. Функция $D=D(p)$ называется функцией спроса на товар. Она убывающая, т.к. при увеличении цены спрос на товар падает. Рассмотрим функцию $S=S(p)$ - число единиц товара, который предлагают производители для продажи. Эта функция называется функцией предложения товара. Она возрастающая, т.к. с увеличением цены на одну единицу товара предложение товара увеличивается.

2. Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Рассмотрим однофакторные про-

изводственные функции Q , зависящие от капитала K , либо от труда L , которые будем записывать: $Q=f(K)$ и $Q=f(L)$.

3. Прибыль одно из важнейших понятий в экономике, позволяющее оценить деятельность любого предприятия или фирмы. В наиболее общем виде прибыль можно определить как разницу между полным доходом (выручкой) от реализации продукции или услуг и полными издержками (затратами). Обозначим прибыль через букву Π , полный доход R и полные затраты C , тогда: $\Pi = R - C$.

4. Основным понятием теории потребления является функция полезности $U=U(x)$, где x - количество товара X . Данная функция – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности $U(x)$ для него количества x товара X .

5. Рассмотрим простую двухсекторную модель национального дохода, состоящую из двух секторов — производителей и потребителей. Деньги, получаемые потребителями, т.е. их доход Y , можно разделить на две части: приобретение товаров и услуг, называемое потреблением $C(y)$, и сбережение (инвестиция) $S(y)$. Следовательно, имеем равенство $Y = C(y) + S(y)$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 4.

Тема: Уравнения прямой на плоскости.

План

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой проходящей через 2 точки.
4. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Уравнение прямой проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
7. Основные задачи: угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Цель: рассмотреть различные виды уравнения прямой на плоскости, основные задачи по теме.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка $Ax + By + C = 0$, причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

2. Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \text{ и обозначить } -\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad \text{т.е. } y = kx + b, \text{ то полученное}$$

уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

3. Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

4. Выше записанное уравнение прямой можно упростить: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$. Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется угловым коэффициентом

прямой. $y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.

5. Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$.

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

6. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$.

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 5.

Тема: Кривые второго порядка.

План

1. Общее уравнение кривых второго порядка.
2. Окружность.
3. Эллипс.
4. Гипербола.
5. Парабола.

Цель: сформировать знания о кривых второго порядка, исследовать форму кривых по их уравнениям.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - уравнение эллипса.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ - уравнение "мнимого" эллипса.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - уравнение гиперболы.}$$

$$a^2x^2 - c^2y^2 = 0 \text{ - уравнение двух пересекающихся прямых.}$$

$$y^2 = 2px \text{ - уравнение параболы.}$$

$$y^2 - a^2 = 0 \text{ - уравнение двух параллельных прямых.}$$

$$y^2 + a^2 = 0 \text{ - уравнение двух "мнимых" параллельных прямых.}$$

$$y^2 = 0 \text{ - пара совпадающих прямых.}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \text{ - уравнение окружности.}$$

2. Окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости удовлетворяющих условию $M_0M=R$.

3. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

4. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

5. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 6.

Тема: Аналитическая геометрия в пространстве.

План

1. Уравнение плоскости.
2. Плоскость. Основные задачи: угол между двумя плоскостями, расстояние от точки до плоскости.
3. Уравнение прямой в пространстве.
4. Прямая в пространстве. Основные задачи.
5. Прямая и плоскость в пространстве.
6. Поверхности второго порядка.

Цель: сформировать знания о плоскости, прямой в пространстве, поверхностях второго порядка, рассмотреть основные задачи по теме.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $OXYZ$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y, z , которому удовлетворяют координаты каждой точки лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты точки не лежащие на этой поверхности.

Простейшей поверхностью является плоскость.

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$.

2. Угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

3. Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S} (m, n, p)$, параллельный данной прямой. Вектор \vec{S} называется направляющим вектором прямой. На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$. Обозначим радиус-векторы этих точек как \vec{r}_0 и \vec{r} , очевидно, что $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overline{M_0M}$. Т.к. векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{S} коллинеарны, то верно соотношение $\overline{M_0M} = \vec{S} t$, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S} t$.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – параметрическое уравнение прямой.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t , получаем канонические

уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

4. Угол между двумя прямыми в пространстве вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \pm \frac{|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|} = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

5. Угол между прямой и плоскостью в пространстве вычисляется по формуле:

$$\sin \varphi = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 7.

Тема: Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

План

1. Числовая последовательность.
2. Предел последовательности.
3. Геометрический смысл предела последовательности.

Цель: расширить представление о числовой последовательности, сформировать знания о пределе числовой последовательности.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n , то говорят, что задана последовательность: $x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}$. Общий элемент последовательности является функцией от n : $x_n = f(n)$.

2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$.

3. Определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a предел последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε -окрестности точки a найдётся натуральное число N , такое что все значения $\{x_n\}$ для которых $n > N$ попадут в ε -окрестности точки a .

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 8.

Тема: Предел функции. Основные теоремы о пределах.

План

1. Предел функции.
2. Односторонние пределы.
3. Основные теоремы о пределах.

Цель: сформировать знания о пределе функции, рассмотреть основные теоремы о пределах.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ слева, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ справа.

3. Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 9.

Тема: Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

План

1. Определение бесконечно большой и бесконечно малой функции.
2. Свойства бесконечно большой и бесконечно малой функции.
3. Эквивалентные бесконечно малые функции и их применение.

Цель: сформировать знания о бесконечно большой и бесконечно малой функциях, их свойствах.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Функция называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, где a – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

2. Свойства бесконечно малых функций:

- 1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$.
- 4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β .

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = const$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 10.

Тема: Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.

1. Основные понятия. Непрерывность функции в точке и в интервале.
2. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Точки разрыва функции и их классификация.

Цель: сформировать знания о непрерывности функции, точках разрыва.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , называется непрерывной в точке x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0 .

Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0 .

Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

3. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Точка x_0 называется точкой разрыва 2-го рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 11.

Тема: Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

План

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной.

3. Уравнения касательной и нормали.
4. Правила дифференцирования. Таблица производных.
5. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.
6. Производные высших порядков.

Цель: расширить представление о производной, рассмотреть правила дифференцирования.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2. Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\text{Уравнение нормали к кривой: } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

3. Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке x .

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0.$$

$$4. \text{ Пусть } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leq t \leq T$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} - \text{ производная функции, заданной параметрически.}$$

5. Пусть функция $f(x)$ - дифференцируема на некотором интервале.

Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции $f'(x)$, получим вторую производную функции

$$f(x). \quad y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ т.е. } y'' = (y')' \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 12.

Тема: Дифференциал функции.

План

1. Понятие дифференциала функции.
2. Основные теоремы о дифференциале.
3. Применение дифференциала к приближённым вычислениям.

Цель: сформировать знания о дифференциале, его свойствах и применении.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$. Можно также записать:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

2. Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv;$$

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv;$$

$$d(Cu) = Cdu;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

3. Формула, для вычисления приближенных значений функции:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 13.

Тема: Основные теоремы дифференциального исчисления.

План

1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
2. Правило Лопиталья.

Цель: сформулировать и доказать основные теоремы дифференциального исчисления, рассмотреть правило Лопиталья.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Теорема Роля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ϵ , $a < \epsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равная нулю, $f'(\epsilon) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ϵ $a < \epsilon < b$, такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\epsilon)$.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то существует по крайней мере одна точка ϵ , $a < \epsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\epsilon)}{g'(\epsilon)}.$$

2. Теорема (правило Лопиталья). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a , непрерывны в точке a , $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 14.

Тема: Приложения производной к исследованию функций.

1. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.
2. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.
3. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
4. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных.

Цель: сформировать знания о приложении производной к исследованию функций.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1 . Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

2. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b) , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

3. План нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:
 - 1) Найти критические точки функции.
 - 2) Найти значения функции в критических точках.
 - 3) Найти значения функции на концах отрезка.
 - 4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.
4. Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

- 1) Область существования функции.
Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.
- 2) Точки разрыва. (Если они имеются).
- 3) Интервалы возрастания и убывания.
- 4) Точки максимума и минимума.
- 5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
- 6) Области выпуклости и вогнутости.
- 7) Точки перегиба. (Если они имеются).
- 8) Асимптоты. (Если они имеются).
- 9) Построение графика.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 15.

Тема: Приложения производной в экономике.

План

1. Предельные величины.
2. Издержки производства.
3. Производительность труда.
4. Эластичность функции.

Цель: сформировать знания о приложении производной в экономике.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Предельные величины характеризуют процесс изменения экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

2. Пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой $C = C(Q)$. Функция средних издержек на единицу продукции определяется по формуле $\bar{C} = \frac{C}{Q}$.

Предельные издержки определяются по формуле $C_{пр} = C'$.

3. Производительность труда есть производная от объема произведенной продукции по времени $Z = Q'(t)$.

4. Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению независимой переменной $\frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и записывается

$$\varepsilon_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 16.**Тема: Функции нескольких переменных. Основные понятия.****План**

1. Понятие о метрическом пространстве. Окрестность точки. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.
2. Понятие о функции многих переменных.
3. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Цель: сформировать первоначальные знания о функции нескольких переменных.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек

$$(x, y), \text{ которые удовлетворяют условию } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$

2. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z , то переменная z называется функцией двух переменных $z = f(x, y)$.

Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z , то функция называется однозначной, а если более одного, то – многозначной.

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y) , при которых функция z существует.

3. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие: $MM_0 < r$, также верно и условие $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Записывают: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Тогда функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 17

Тема: Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум.

План

1. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных функции.
2. Производная высших порядков.
3. Экстремум функции нескольких переменных. Понятие условного экстремума.

Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Цель: сформировать знания об экстремуме функции нескольких переменных.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x . Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции по x .

Можно записать $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по x .

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x ; $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y)

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

2. Если функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D , то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части. Будем называть эти производные частными производными первого порядка.

Производные этих функций будут частными производными второго порядка.

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются смешанными производными.

3. Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка M_0 называется точкой максимума.

Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, то точка M_0 называется точкой минимума.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y , входящие в функцию $u = f(x, y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x, y) = 0$, которое называется уравнением связи.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 18.

Тема: Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач.

План

1. Эластичность функции нескольких переменных.
2. Полезность. Предельная полезность.
3. Производственная функция.
4. Кривые безразличия производства.

Цель: рассмотреть применение частных производных в экономических задачах.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Спрос на отдельный товар D при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров. Практически наибольший интерес представляет изучение влияния цены одного альтернативного товара p_A . Кроме того, спрос на товар зависит от цены данного товара p и доходов потребителя y , т.е. спрос-это функция трёх переменных $D = f(p, p_A, y)$.

Эластичность спроса от цены (собственной) : $\varepsilon_p = \frac{p}{D} \cdot D'_p$.

Эластичность спроса от цены альтернативного товара (перекрёстная эластичность):

$\varepsilon_A = \frac{p_A}{D} \cdot D'_{p_A}$. Эластичность спроса от дохода: $\varepsilon_y = \frac{y}{D} \cdot D'_y$.

2. Основным понятием теории потребления является функция полезности

$U = f(x, y)$. Эта функция выражает меру полезности набора (x, y) , где x - количество товара X , а y - количество товара Y . Чувствительность набора (x, y) к незначительному изменению x при фиксированном y называется предельной полезностью x и определяется как частная производная U'_x . Аналогично, предельная полезность y определяется как U'_y . Изменение по-

лезности приближённо определяется формулой $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y$, когда x и y изменяются

одновременно.

3. Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Ограничимся двумя ресурсами: капиталом K и трудом L , тогда производственная функция примет вид: $Q = f(K, L)$.

Предельным продуктом фактора производства называется добавочный продукт, полученный в результате добавления одной единицы данного фактора (ресурса) при неизменной величине остальных факторов производства. Иными словами, это частная производная от производственной функции по соответствующей переменной (ресурсу).

Функция $Q = f(K, L)$ имеет две частные производные: предельный продукт капитала Q'_K и предельную производительность труда Q'_L .

4. Линия, в каждой точке которой различные сочетания факторов производства (капитал L и труд L) дают одно и то же количество выпускаемой продукции Q , называется изоквантой, или кривой безразличия производства.

Величина углового коэффициента касательной к кривой безразличия, взятая с обратным знаком, определяет коэффициент заменяемости ресурсов $R = -\frac{dK}{dL}$.

Литература: [1], [2], [3].

2. Семестр II
Лекция 1
Тема: Матрицы
План лекции

1. Определение матрицы. Примеры.
2. Виды матриц. Равенство матриц. Транспонирование.
3. Сложение матриц. Свойства операции сложения.
4. Умножение матрицы на число. Свойства операции умножения матрицы на число.
5. Умножение матриц. Свойства операции умножения матриц.

Цель: сформировать первоначальные знания о матрицах, операциях над матрицами и основных свойствах операций над матрицами.

Задачи:

- актуализировать представления о матрицах как о аппарате представления данных в сфере торгового дела;
- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по выполнению действий над матрицами.

Ключевые вопросы

1. Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

расположенных в m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$.

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называются ее элементами.

2. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n . Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочную диагональ квадратной матрицы. Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю. Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой, а из одного столбца – матрицей-столбцом.

Транспонированием матрицы называется замена ее столбцов (строк) на строки (столбцы) с сохранением их порядка.

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т.е. $A=B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

3. Суммой двух матриц A и B одного размера $m \times n$ называется матрица $C = A+B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$.

4. Произведением матрицы A на число α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α , т.е. $\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})$.

5. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В этом случае матрицы называются согласованными.

Произведением матриц $A \cdot B$ называется такая матрица C , каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B : $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj}$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2
Тема: Определители
План лекции

1. Определение определителя второго порядка. Его вычисление.
2. Определение определителя третьего порядка. Правило «треугольников» вычисления определителей третьего порядка.
3. Определитель порядка n .
4. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя.
5. Свойства определителей.
6. Методы вычисления определителей.

Цель: Сформировать знания об определителях их основных свойствах и способах вычисления определителей.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по вычислению определителей;
- провести рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2}$, $j=(j_1, j_2)$ – перестановки из чисел 1, 2; t – число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1} a_{2j_2}$, суммирование ведется по всем перестановкам (j_1, j_2) .

2. Определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, $j=(j_1, j_2, j_3)$ – все возможные перестановки вторых индексов в произведении $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, суммирование ведется по всем перестановкам.

3. Определитель порядка n : $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$, суммирование ведется по всем перестановкам $j=(j_1, j_2, \dots, j_n)$ из чисел 1, 2, ..., n ; t – число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$.

4. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ порядка n называется определитель порядка $n-1$, который получается из Δ вычеркиванием i – строки и j – столбца. Число $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя.

5. К свойствам определителя относятся следующие: величина определителя не меняется при транспонировании; определитель меняет знак, если поменять местами две строки (два столбца); определитель, у которого две строки (два столбца) одинаковы, равен 0; общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя; определитель равен произведению элементов главной диагонали, если все элементы определителя, находящиеся ниже (выше) главной диагонали, равны 0; определитель не изменится, если элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное число, не равное нулю; определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения: $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ ($i = \overline{1, n}$), $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ ($j = \overline{1, n}$).

6. К методам вычисления определителя относят метод разложения по элементам строки (столбца), метод накопления нулей ниже главной диагонали и комбинированный.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 3

Тема: Системы линейных уравнений

План лекции

1. Определение системы линейных уравнений. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений.
2. Свойства систем уравнений: совместимость, несовместимость, определённая.
3. Эквивалентность систем; элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем.
4. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
5. Общее и частное решение системы линейных уравнений.
6. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем.
7. Структура общего решения неоднородной системы.

Цель: сформировать знания о видах и свойствах систем линейных уравнений, а также структурировать полученные знания о частном и общем решении систем.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по исследованию систем линейных уравнений;
- закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

В общем виде система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) x_1, x_2, \dots, x_n имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} и b_j – произвольные числа ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), которые называются соответственно коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений.

Решением системы уравнений называется набор n чисел $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n$, при подстановке которых каждое из уравнение системы обращается в тождество.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; и несовместной, если система не имеет решений. Совместная система уравнений имеет либо одно решение - и в таком случае называется определенной, либо больше одного решения и тогда она называется неопределенной.

Системы уравнений называются эквивалентными, если имеют одно и то же множество решений. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы A , отличного от нуля. Обозначается ранг матрицы A символами: $\text{rang}A$ или $r(A)$. Из определения следует, что если $r(A) = k$, то существует минор порядка k матрицы A , отличный от нуля, а все миноры порядка $(k+1)$ равны нулю или не существуют.

Чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = r(B)$, при этом: а) если $r(A) = r(B) = n$ – система имеет единственное решение, б) если $r(A) = r(B) < n$ система имеет множество решений, в которой r независимых уравнений, r базисных переменных и $n-r$ свободных переменных.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 4

Тема: Методы решения систем линейных уравнений

План лекции

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

3. Обратная матрица.

4. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Цель: расширить первоначальные представления студентов р методах решения систем линейных уравнений.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по решению систем линейных уравнений;
- закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Элементарными преобразованиями системы являются: умножение уравнения на число отличное от нуля; сложение уравнения умноженного на любое число, с другим уравнением; перестановка уравнений; отбрасывание уравнений вида $0 = 0$. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

2. Пусть Δ -определитель матрицы системы, а Δ_j -определитель, полученный из определителя Δ заменой j -го столбца свободных членов B . Тогда, если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad \text{Данные формулы называются формулами Крамера.}$$

3. Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E -единичная матрица.

$$\text{Обратная матрица } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{где } -\tilde{A}^T \text{ присоединенная транспонированная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы } A.$$

диненная транспонированная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A .

4. Система уравнений в матричной форме примет вид $AX = B$. Пусть матрица системы A является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1} . Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1} , получаем решение системы уравнений. $X = A^{-1}B$, где A^{-1} обратная матрица.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 5

Тема: Применение элементов линейной алгебры в экономике

План лекции

1. Собственные векторы и собственные значения матрицы.
2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
3. Линейная модель торговли.

Цель: дать первоначальные понятия о применении матричных моделей в экономике и развить умения использования методов линейной алгебры

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по использования методов линейной алгебры в экономических задачах;
- осуществить рефлекссию.

Ключевые вопросы

1. Ненулевой вектор \vec{x} называется собственным вектором матрицы A , соответствующий собственному значению λ , если имеет место равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

2. В. Леонтьев на основании анализа экономики США в предвоенный период установил важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ остаются практически неизменными и могут рассматриваться как постоянные числа, где x_i – общий объем продукции i -й отрасли (ее валовый выпуск); x_{ij} – объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью при производстве объема продукции x_j .

Уравнение $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$ называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса или вместе с интерпретацией матрицы A и векторов \vec{x} и \vec{y} (\vec{x} – вектор валового выпуска; \vec{y} – вектор конечного потребления; A – матрица прямых затрат.) – моделью Леонтьева или моделью «затраты - выпуск».

3. Пусть бюджеты n стран, которые обозначим x_1, x_2, \dots, x_n , расходуются на покупку товаров; a_{ij} – доля бюджета x_j , которую j -я страна тратит на закупку товаров у i -й страны.

Тогда, если весь бюджет идет на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство: $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, в этом случае, называется структурной матрицей торгов-

ли. Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i -й страны выражается равенством $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$.

Вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 6

Тема: Первообразная функция и неопределённый интеграл

План лекции

1. Первообразная функция
2. Определение неопределенного интеграла
3. Свойства неопределенного интеграла
4. Таблица основных элементарных функций

Цель: углубить представления студентов о первообразной функции и сформировать знания о неопределенном интеграле.

Задачи:

- актуализировать представления о первообразной функции;
- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по использованию таблицы и свойств неопределенного интеграла.

Ключевые вопросы

1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

2. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X , то множество функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом.

лом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$.

3. Неопределенный интеграл обладает следующими его свойствами:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \quad k = const \neq 0$;

5) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

6) $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$;

7) $\int f(u)du = F(u) + C$.

4. Таблица неопределенных интегралов, где $u = \varphi(x)$

1. $\int du = u + C$.

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$.

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \quad u \neq 0$.

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, a > 0$.

5. $\int e^u du = e^u + C$.

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

7. $\int \cos u du = \sin u + C$.

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$.

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$.

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$.

12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 7

Тема: Основные методы интегрирования

План лекции

1. Метод подстановки
2. Интегрирование по частям
3. Интегрирование простейших дробей
4. Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей

Цель: сформировать знания о методах интегрирования.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по вычислению интегралов различными методами;
- закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Метод подстановки или метод замены переменной основан на формуле

$\int f(x)dx = \left. \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

2. Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы $\int udv = uv - \int vdu$. Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым.

3. Рациональные дроби I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)^n}$, III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, где $A, a, p, q, M, N, (n \geq 2)$ – действительные числа, n – натуральное число, а x^2+px+q не имеет действительных корней, относятся к простейшим рациональным дробям.

Интегралы I и II берутся с помощью подстановки $x-a=t$, а III сводится к табличному подстановкой $z = \frac{1}{2}(x^2+px+q)' = x + \frac{p}{2}$.

4. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-\alpha} + \frac{B_1}{(x-\beta)^\ell} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{\ell-1}} + \dots + \frac{B_\ell}{x-\beta} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+g)^s} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+g)^{s-1}} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{x^2+px+g} + \frac{K_1x+\lambda_1}{(x^2+ux+v)^r} + \frac{K_2x+\lambda_2}{(x^2+ux+v)^{r-1}} + \dots + \frac{K_rx+\lambda_r}{x^2+ux+v} + \dots,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_\ell, M_1, N_1, \dots, M_s, N_s, K_1, \lambda_1, \dots, K_r, \lambda_r$ – некоторые вещественные числа, подлежащие определению, α, β, \dots – действительные корни многочлена $Q(x)$ кратностей k, ℓ, \dots соответственно; p, g, u, v, \dots – действительные числа; $x^2+px+g, x^2+ux+v, \dots$ имеет комплексные сопряженные корни; число $k+\ell+\dots+s+r+\dots$ равно степени многочлена $Q(x)$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 8

Тема: Определенный интеграл

План лекции

1. Определение определенного интеграла и его свойства
2. Условие интегрируемости функций
3. Формула Ньютона – Лейбница
4. Вычисление определенного интеграла по частям
5. Вычисление определенного интеграла методом подстановки
6. Несобственные интегралы

Цель: расширить представления студентов об определенном интеграле и методах его вычисления, дать первоначальное понятие о несобственных интегралах.

Задачи:

- актуализировать представления об определенном интеграле;
- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по вычислению определенных и несобственных интегралах.

Ключевые вопросы

1. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сама функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется интегрируемой подынтегральной функцией, a – верхний предел интегрирования, b – нижний предел интегрирования, а x – переменная.

ная интегрирования.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и функция $F(x)$ является ее некоторой первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывные и дифференцируемые (т.е. имеют непрерывные производные) функции на отрезке $[a,b]$, тогда $\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

5. Пусть выполняются следующие условия: функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$; $a=\varphi(\alpha)$,

$b=\varphi(\beta)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

6. Пусть функция $y = f(x)$ задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $a < b < \infty$. Если существует предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$, то он называется не-

собственным интегралом I рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a, \infty)$ и обозначается

символом: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \leq b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=a$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, ($\varepsilon > 0$).

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 9

Тема: Приложения определенного интеграла

План лекции

1. Геометрические приложения определённого интеграла

1.1 Вычисление площади фигуры

1.2. Вычисление длины дуги

1.3. Вычисление объема тела вращения

2. Физические приложения определённого интеграла

3. Экономические приложения определённого интеграла

Цель: расширить представления студентов о приложениях определенного интеграла в геометрических задачах и сформировать знания о его физических и экономических приложениях.

Задачи:

- актуализировать представления о геометрических приложениях определенном интеграле;
- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по вычислению определенных и несобственных интегралах.

Ключевые вопросы

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. В силу геометрического смысла определенного интеграла площадь криволинейной трапеции численно

равна интегралу от данной функции по данному отрезку, т.е. $S = \int_a^b f(x)dx$. Длина L дуги

кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$ вычисляется по формуле: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.

Объем тела вращения определяется формулой $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

2. Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v=v(t)$. Путь S , пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt .$$

3. Если запас товара на складе есть функция времени $f(t)$, то издержки хранения за время от a до b равны: $C = \int_a^b pf(t)dt$. По известной функции производительности труда

объем произведенной продукции $Q = \int_0^T f(t)dt$, где $f(t)$ - производительность труда в момент времени t , $[0, T]$ - рассматриваемый промежуток времени. Пусть известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x - порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время t_{cp} , затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до

x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем: $t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 10

Тема: Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка

План лекции

1. Определение дифференциального уравнения
2. Общее и частное решения дифференциального уравнения
3. Уравнения с разделяющимися переменными
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Цель: сформировать первоначальные представления о дифференциальных уравнениях, решении дифференциального уравнения, дать знания о видах и методах решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Задачи:

- актуализировать понятие о дифференциальных уравнениях как о способе моделирования различных процессов;
- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения дифференциальных уравнений первого порядка;
- закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнения вида: $F(x,y,y')= 0$, $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, $y' = f(x)$. Решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$ в некоторой области D называется функция $y = \varphi(x,c)$, обладающая

следующими свойствами: функция $\varphi(x, c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C , принадлежащих некоторому множеству; для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x, c_0)$ удовлетворяет начальному условию. Всякое решение $y = \varphi(x, c_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется частным решением.

2. Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx - \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

3. Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ или $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - однородные функции одной степени однородности или $f(x,y)$ - однородная функция нулевой степени однородности. Функция $P(x,y)$ называется однородной степени k , если $P(\lambda x, \lambda y)=\lambda^k \cdot P(x,y)$. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=\varphi(\frac{y}{x})$.

4. Уравнение вида $y'+P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции аргумента x , называется линейным уравнением первого порядка.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 11

Тема: Дифференциальные уравнения высших порядков, решаемые понижением порядка

План лекции

1. Уравнения, решаемые последовательным интегрированием
2. Уравнения, не содержащие явно функцию
3. Уравнения, не содержащие явно функцию
4. Примеры задач на составление и решение дифференциальных уравнений

Цель: сформировать знания о видах и методах решения дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения дифференциальных уравнений;
- закрепить полученную информацию посредством решения прикладных задач.

Ключевые вопросы

1. Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием обеих частей уравнения n раз. Общий интеграл уравнения содержит n произвольных постоянных.

2. Уравнение 2-го порядка $F(x, y', y'')=0$, не содержащее явно функцию y , преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$, $y''=p'$, где $p = p(x)$ -функция от x .

3. Уравнение 2-го порядка $F(y, y', y'')=0$, не содержащее явно аргумент x , преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, где $p = p(y)$.

4. Необходимым этапом решения любой прикладной задачи является построение математической модели изучаемого объекта или процесса. Обыкновенные дифференциальные уравнения составляют основу сравнительно простых, но весьма распространенных математических моделей, применяемых в самых разных областях науки. Наиболее распространенными задачами на составление и решение дифференциальных уравнений являются: а) на плоскости xOy найти кривую, проходящую через (x_0, y_0) , у которой угловой коэффициент касательной в любой точке кривой пропорционален абсциссе (ординате) точки касания; б) задача о радиоактивном распаде; в) задача о размножении популяции; г) задача о скорости химической реакции; д) задача о законе охлаждения тела и др.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 12

Тема: Линейные однородные, неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

План лекции

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков
2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков
3. Приложение дифференциальных уравнений к описанию линейных моделей в экономике.

Цель: сформировать знания о линейных однородных, неоднородных дифференциальных уравнениях высших порядков и углубить представления об использовании дифференциальных уравнений к описанию линейных моделей в экономике.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения дифференциальных уравнений;
- закрепить полученную информацию посредством решения прикладных задач.

Ключевые вопросы

1. Линейным однородным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$.

Общее решение линейного однородного уравнения n -го порядка (1) имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения.

Для нахождения общего решения уравнения составляют характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$.

В зависимости от корней характеристического уравнения возможны случаи: если все корни характеристического уравнения k_1, k_2, \dots, k_n – действительные и различные, то общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$; если среди корней характеристического уравнения k_1, k_2, \dots, k_n имеются кратные ($k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$), а остальные различные, то общее решение примет вид $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \dots + C_n e^{k_{m-n} x}$, где m – кратность корня; если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение примет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

2. Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно искомой функции и всех ее производных $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывная функция непрерывная. Общее решение такого уравнения $y = y^* + \bar{y}$, где y^* – общее решение соответствующего однородного уравнения, \bar{y} – какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Частное решения \bar{y} можно найти методом подбора. Если $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$, то $\bar{y} = e^{\alpha x}[M_S(x) \cos \beta x + N_S(x) \sin \beta x] x^r$, где $M_S(x)$ и $N_S(x)$ – многочлены степени $S = \max\{n, m\}$, а r – кратность корня $\alpha + \beta i$ характеристического уравнения.

3. Чистые инвестиции равны производной от капитала по времени, уровень производства на момент времени t пропорционален приросту выпуска оборудования за промежуток времени t ,

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 13

Тема: Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Теоремы сложения и умножения вероятностей

План лекции

1. Предмет теории вероятностей
2. Различные подходы к определению вероятности события
3. Основные формулы комбинаторики
4. Алгебра событий
5. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Цель: сформировать знания о предмете теории вероятностей, определении вероятно-

сти события и ее свойствах, основах комбинаторики и теоремах сложения и умножения вероятностей.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач с использованием различных подходов к определению вероятности;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

2. Классической вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (т.е. таких, при которых событие A обязательно произойдет) к общему числу несовместных единственно возможных и равновероятных исходов. Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A , к мере пространства элементарных исходов. Статистической вероятностью события A называется число, около которого колеблются частоты $W(A)$ появления этого события во многих сериях выборочных испытаний больших объемов, проводимых в одинаковых условиях.

3. К основным типам комбинаторных задач относятся отыскание числа перестановок, размещений, сочетаний, перестановок с повторениями, размещений с повторениями, сочетаний с повторениями.

4. Объединением (или суммой) нескольких случайных событий называется событие, состоящее в осуществлении, по крайней мере, одного из данных событий.

Совмещением (или произведением) двух событий A и B называется событие, состоящее в одновременном осуществлении обеих событий.

5. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий: $P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$.

Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события произошли: $P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 14

Тема: Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания. Интегральная теорема Лапласа

План лекции

1. Формулы полной вероятности и Байеса
2. Формула Бернулли
3. Локальная теорема Лапласа
4. Формула Пуассона
5. Интегральная теорема Лапласа

Цель: сформировать знания о применении формул полной вероятности и Байеса, различных вариантах решения задач на повторные независимые испытания.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;

- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятности каждого из событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A).$$

Условные вероятности гипотез определяются по формулам Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_n)P_{H_n}(A)}.$$

2. Вероятность появления события А m раз в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события постоянна и равна p, находится по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$
 Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к очень громоздким вычислениям. В таких случаях пользуются приближенными формулами, основанными на теоремах Лапласа и Пуассона.

3. Локальная теорема Лапласа: Вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно m раз приближенно равна $P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. Формула Пуассона: Если вероятность p наступления события постоянна и мала, а число испытаний n велико, то $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda = np$.

5. Интегральная теорема Лапласа: Если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна ($0 < p < 1$), а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что это событие наступит не менее a раз и не более b приближенно равна

$P(a \leq m \leq b) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, где $\alpha = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $\beta = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа.

Лапласа.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 15

Тема: Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин

План лекции

1. Определение случайной величины. Определение дискретной и непрерывной случайных величин
2. Закон распределения случайной величины. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.
3. Способы задания закона распределения непрерывной случайной величины.
4. Числовые характеристики случайных величин.

Цель: дать первоначальное понятие о случайных величинах, сформировать знания о законах распределения и способах их описания, научить вычислять и интерпретировать числовые характеристики случайных величин.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Случайная величина X – это некоторая функция элементарного собы-

тия $\omega: X = \varphi(\omega)$, где $\omega \in U$. Значение этой функции зависит от того, какое элементарное событие ω появилось в результате опыта. Случайные величины часто обозначают большими буквами, а их значения малыми. Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения могут быть пронумерованы числами натурального ряда. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

2. Законом распределения случайной величины называется любое правило, позволяющее находить вероятность возможных событий (значений), связанных со случайной величиной. Закон распределения дискретных случайных величин может быть задан в форме ряда, многоугольника и функции (интегрального закона) распределения.

3. Непрерывную случайную величину можно задать функцией распределения $F(x)$ действительной переменной x , определяемой формулой $F(x) = P(X < x)$ и функцией, которая называется плотностью распределения или дифференциальной функцией и определяется формулой $f(x) = F'(x)$.

4. Основные числовые характеристики и формулы приведены в таблице:

Характеристика	Обозначение	Случайная величина	
		Дискретная	Непрерывная
Математическое ожидание	$M(X)$	$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$	$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$
Дисперсия	$D(X)$	$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$	$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx$
		$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$	
Среднее квадратичное отклонение (стандарт)	σ_x	$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$	

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 16

Тема: Основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин

План лекции

1. Биномиальный закон распределения
2. Распределение Пуассона
3. Геометрическое распределение
4. Нормальный закон распределения
5. Равномерное распределение
6. Показательное распределение
7. Законы больших чисел

Цель: сформировать знания об основных законах распределения случайных величин, развивать умения анализировать случайные величины.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$ с вероятностями $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где $0 < p < 1, q=1-p, m=0, 1, \dots, n$.
2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона, если она

принимает значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots$ (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями $P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, $\lambda = n \cdot p$.

3. Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots$ (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями $P_n(m) = p \cdot q^{m-1}$, где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 1, 2, \dots$.

4. Распределение вероятностей называют нормальным, если оно описывается дифференциальной функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

5. Равномерным распределением называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , дифференциальная функция $f(x)$ которой сохраняет постоянное зна-

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

чение на сегменте $[a; b]$ и равно нулю вне этого сегмента, т. е.

6. Непрерывная случайная величина x распределена по показательному закону, если ее плотность вероятности имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$ где $\lambda > 0$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 17

Тема: Элементы математической статистики. Выборочный метод

План лекции

1. Предмет и задачи математической статистики
2. Генеральная и выборочная совокупность
3. Построение вариационного или сгруппированного статистического ряда
4. Полигон и гистограмма
5. Эмпирическая функция распределения
6. Числовые характеристики вариационных рядов

Цель: дать первоначальное понятие о предмете математической статистики, выборочном методе анализа данных, научить способам описания выборочных совокупностей и вычислению их числовых характеристик.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые слова

1. Математическая статистика – это направление математики, которое опирается на теорию вероятностей, позволяющую оценить надёжность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала.

2. Выборкой или выборочной совокупностью называется совокупность случайно отобранных объектов. Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

3. Вариационным рядом называется ряд значений исследуемого признака с указанием соответствующих весов (частот или относительных частот). Выделяют дискретные и вариационные ряды.

4. Гистограммой частот сгруппированной выборки называется кусочно-постоянная функция, постоянная на интервалах группировки и принимающая на каждом из них соответственно значения $\frac{n_i}{\Delta x_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Площадь ступенчатой фигуры под графиком гистограм-

мы равна объему выборки n . Полигоном частот называется ломаная с вершинами в точках $(x_i, \frac{n_i}{\Delta x_i})$, $i = 1, 2, \dots, k$, где k – число интервалов вариационного ряда.

5. Эмпирической функцией распределения случайной величины X называется функция $F_n(x) = \frac{n_x}{n}$, где n – объем выборки; n_x – число значений x_i из выборки, удовлетворяющих неравенству $x_i < x$.

6. Выборочная средняя вычисляется по формуле: $\bar{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}$. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле: $D_e(x) = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_e)^2 n_i}{n}$. Выборочные начальные моменты вычисляются

по формулам: $\bar{m}_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i)^k n_i}{n}$. Выборочные центральные моменты вычисляются по форму-

лам: $\mu_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_e)^k n_i}{n}$. Эксцесс: $E_x = \frac{\mu_4}{S^4} - 3$. Асимметрия: $a_x = \frac{\mu_3}{S^3}$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 18

Тема: Статистические оценки параметров распределения

План лекции

1. Точечные оценки параметров распределения и их свойства
2. Доверительный интервал
3. Интервальные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии

Цель: сформировать знания о методах точечного и интервального оценивания основных характеристик генеральной совокупности и умения нахождения доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Точечной оценкой параметра называется оценка, определяемая одним числом.

Оценка $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – должна приближаться к оцениваемому параметру Θ по мере увеличения объема выборки. Если оценка стремится по вероятности к оцениваемому параметру, то она называется состоятельной.

Оценка параметра $\tilde{\Theta}$ называется несмещенной, если она при любом объеме выборки имеет математическое ожидание, совпадающее с оцениваемым параметром, т.е. $M(\tilde{\Theta}) = \Theta$.

Несмещенная оценка $\tilde{\Theta}$ параметра Θ называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра Θ , вычисленных по выборкам одного и того же объема n .

2. Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2) , содержащий (покрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение γ – уровнем значимости, границы θ_1 и θ_2 являющимися случайными величинами – соответственно нижней и верхней границами доверительного интервала.

Величина $\alpha = 1 - \gamma$ указывает на то, что те значения параметра θ , для которых $|\theta - \tilde{\theta}| > \varepsilon$ нужно признать противоречащими опытными данным.

3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания a при неизвестном σ : $\left(\bar{x}_\varepsilon - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_\varepsilon + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ с надежностью γ покрывает неизвестный параметр a ; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания a при неизвестном σ для заданной доверительной вероятности γ вычисляется по формуле:

$$\bar{x}_\varepsilon - t_\gamma S / \sqrt{n} < a < \bar{x}_\varepsilon + t_\gamma S / \sqrt{n}, \text{ где } \bar{x}_\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_\varepsilon)^2}{n-1}.$$

Доверительный интервал для дисперсии записан в скобках:

$$P \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2; n-1} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2; n-1} \right) = \gamma$$

Литература: [1], [2], [3]

III МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Методические рекомендации для преподавателей

В качестве средств обучения могут быть использованы учебники, учебные пособия, электронные ресурсы, приведенные в рабочей программе.

В процессе обучения рекомендуем преподавателям использовать основные методы обучения, применяемые в высшей школе.

1. Информационно-рецептивный метод. Обучаемые усваивают знания в готовом виде, сообщенные преподавателем, почерпнутые из книжных источников или электронных ресурсов. Подобная деятельность необходима, так как она позволяет в сжатые сроки вооружать студента основными математическими определениями, теоремами, формулами и образцами способов деятельности.

2. Репродуктивный метод (метод организации воспроизведения способов деятельности). К этому методу относятся: решение типовых задач, ответы на теоретические вопросы.

3. Метод проблемного обучения. Преподаватель не просто излагает материал, а ставит проблему, формулирует познавательную задачу, показывает с помощью студентов логический путь решения проблемы. Здесь обучаемый становится соучастником поиска.

4. Эвристический (частично-поисковый) метод. После ознакомления обучаемых с материалом (определениями, математическими моделями, теоремами) перед ними ставится познавательная поисковая задача (лучше, если студенты сами ее выдвинут). Путем соответствующих заданий обучаемые подводятся к самостоятельным выводам. Таким образом, организуется активный учебный поиск, связанный с переходом к творческому, продуктивному мышлению.

5. Исследовательский метод. После постановки проблемы, формулирования задач, обучаемые самостоятельно работают над литературой, выдвигают гипотезу, ищут пути ее решения.

Рекомендуем использовать некоторые частно-дидактические методы обучения.

1. Мотивационное обеспечение учебной деятельности. Применение этого метода предполагает создание условий, при которых студентом осознается важность изучаемого материала для своей последующей деятельности. При этом полезны задачи прикладного содержания, соответствующие приобретаемой профессии.

2. Выделение базисного материала, концентрация учебного материала вокруг базисного. Применение этого метода облегчает процесс усвоения и запоминания, освобождает от необходимости изучать некоторые частные, второстепенные вопросы, способствует формированию обобщенных знаний.

3. Пропедевтика вводимых понятий, новых теорем, формул. Перед изучением материала ограничиваются наглядными соображениями, не строгими рассуждениями, интуитивными представлениями о понятиях. Использование догадок, интуиции в обучении развивает мышление, интерес, улучшает запоминание.

4. Выбор методически обоснованного, с учетом знаний студентов и их умения мыслить, уровня строгости изучаемого материала. При обучении студентов естественнонаучного направления следует иметь в виду, что излишняя формализация материала препятствует полноценному его усвоению, развитию интуиции и может привести к потере интереса к предмету.

5. Создание проблемных ситуаций, возможностей для студентов самим делать обобщения, выводы, открытия.

6. Составление и применение алгоритмов. Алгоритмы организуют познавательный процесс, являются средством достижения результата, формируют у студента четкий стиль мышления. Их применение способствует более прочному усвоению материала.

7. Математическое моделирование. Математическая модель есть приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Анализ математической модели позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений. При построении математических моделей необходимо выделять основные этапы:

- формализацию;
- решение задачи внутри построенной модели на языке той теории, в рамках которой находится модель;
- интерпретации полученного результата к исходной задаче.

В математических курсах модели различного вида встречаются очень часто: функциональном, графическом, знаковом и других выражениях. Особенно наглядны задачи практического содержания, в которых отчетливо выделяются все указанные три этапа математического моделирования.

8. Обучение с использованием информационных технологий. Размещение сотрудниками кафедры своих учебных материалов в сети Интернет позволяет студенту осваивать материал в соответствии с требованиями преподавателя в любое удобное для него время.

Любой способ учебной деятельности целесообразно представить как цепь управляемых ситуаций, направленных на стимулирование и развитие познавательной и практической активности студента.

Методика чтения лекций, организации практических занятий и самостоятельной работы должна содействовать развитию познавательной активности студентов, формированию необходимых компетенции. В практике необходимы лекции, предусматривающие как продуктивную, так и репродуктивную деятельность студента. При применении активных методов обучения доминирующими видами деятельности являются частично-поисковые, творческие, исследовательские. Важными моментами таких лекций являются:

- постановка проблемы;
- определение базовых знаний, необходимых для ее решения;
- создание атмосферы частично-поисковой деятельности;
- организация исследовательской деятельности;
- сравнение результатов исследования с точным результатом;
- корректировка определений, выводов, полученных студентами;
- самостоятельная работа студентов по специальным заданиям. Система задач и упражнений на практических и лабораторных занятиях должна давать целостное представление о функциях задач;
- обучающей (формирование у студентов системы математических знаний, умений, компетенции);
- развивающей (развитие математического мышления);
- воспитывающей (формирование познавательного интереса);
- контролирующей (проверка качества усвоения изучаемого материала). Задания для самостоятельной работы включают в себя задачи и упражнения:

1) тренировочного типа (в форме домашних заданий к практическим занятиям; самостоятельная работа над книгой или конспектом лекции по отбору и систематизации учебного материала);

2) реконструктивно-вариативного типа (при выполнении этих заданий студенты применяют правила, теоремы в различных ситуациях; реконструируют известный учебный материал или способы решения задач с целью их приложения к решению заданной задачи с измененными условиями).

2. Методические указания по изучению дисциплины

Успешное освоение дисциплины предполагает активное, творческое участие студента путем ежедневной планомерной работы. Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

На лекциях студенты получают самые необходимые данные, во многом дополняющие учебники (иногда даже их заменяющие с последними достижениями науки. Умение сосредоточенно слушать лекции, активно, творчески воспринимать излагаемые сведения является непременным условием их глубокого и прочного усвоения, а также развития умственных способностей.

Слушание и запись лекций - сложные виды вузовской работы. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента. Слушая лекции, надо отвлекаться при этом от посторонних мыслей и думать только о том, что излагает преподаватель. Краткие записи лекций, конспектирование их помогает усвоить материал.

Внимание человека неустойчиво. Требуется волевые усилия, чтобы оно было сосредоточенным. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное. Это должно быть сделано самим студентом. Не надо стремиться записать дословно всю лекцию. Такое "конспектирование" приносит больше вреда, чем пользы. Некоторые студенты просят иногда лектора "читать помедленнее". Но лекция не может превратиться в лекцию-диктовку. Это очень вредная тенденция, ибо в этом случае студент механически записывает большое количество услышанных сведений, не размышляя над ними.

Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях. Конспект лучше подразделять на пункты, параграфы, соблюдая красную строку. Принципиальные места, определения, формулы следует сопровождать замечаниями: «важно», «особо важно», «хорошо запомнить» и т.п. Целесообразно разработать собственную «маркографию» (значки, символы), сокращения слов. Не лишним будет и изучение основ стенографии. Работая над конспектом лекций, всегда используйте не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть знаниями. Конспект лекции рекомендуется просмотреть сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь к преподавателю за консультацией.

Регулярно отводите время для повторения теоретического и практического материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

При подготовке к практическим занятиям целесообразно пользоваться планом, представленным в пункте 5.2 данного учебно-методического комплекса. Тщательно проработайте лекционный материал и соответствующие учебные пособия по теме каждого практического занятия. Прорешайте типовые задачи домашнего задания.

Практические занятия по данной дисциплине способствуют развитию аналитических и вычислительных способностей и формированию соответствующих навыков; – привитию навыков составления и анализа математических моделей простых реальных задач и развитию математической интуиции; – выработке умений решать прикладные задачи, связанные с будущей специальностью студента, требующие отбора данных и предварительного вывода аналитических зависимостей. Поэтому основным требованием преподавателя к студентам является обязательное присутствие студентов на всех практических занятиях, а также выполнение всех заданий преподавателя, как текущих, так и контрольных.

3. Краткие учебно-методические материалы к практическим занятиям

1 семестр

Практическое занятие № 1 «Комплексные числа

Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы»

Основные вопросы

1. Понятие комплексного числа.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Типовые задания

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{3} + i$; б) $z = 2i$; в) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$; б) $z = e^{-i120^\circ}$; в) $z = 6e^{i210^\circ}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМИИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 2 «Действия над комплексными числами»

Основные вопросы

1. Сложение и вычитание.
2. Умножение и деление.
3. Возведение в степень.
4. Извлечение корня.

Типовые задания

1. Выполнить действие: $\frac{i-4}{1-i} + (2+2i)(-1-4i)$.
2. Возвести в степень: $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{10}$.
3. Найти корни: $\sqrt[3]{-1-i}$.
4. Решить уравнения: а) $x^4 + 16 = 0$; б) $x^3 - 27 = 0$; в) $z^3 + \frac{2\sqrt{2}}{1+i} = 0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМИИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 3 «Уравнение прямой на плоскости»

Основные вопросы

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой проходящей через 2 точки.
4. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Уравнение прямой проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
7. Основные задачи: угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Типовые задания

1. Даны вершины треугольника: А(2, 3), В(6, 1), С(2, -2). Найти:
 1. Длину стороны АВ.
 2. Уравнения сторон АВ, ВС, АС.
 3. Уравнение высоты из вершины А.
 4. Уравнение медианы из вершины В.

- Расстояние от точки C до прямой AB .
- Составить уравнение прямой проходящей через точку $M(-2; -5)$, параллельно прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

Литература

- Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
- Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
- Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
- Математика: практикум/ АмГУ, ФМИИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 4 «Кривые второго порядка»

Основные вопросы

- Окружность.
- Эллипс.
- Гипербола.
- Парабола.

Типовые задания

- Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки

$$M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right), N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

- Построить линии:

- $y = \sqrt{9 - x^2}$;
- $x - 4y^2 - 12 = 0$;
- $x^2 - y^2 + 2x + 2 = 0$;
- $36x^2 + 4y^2 + 144x - 40y + 100 = 0$;
- $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$;
- $2x + y - 4 = 0$.

Литература

- Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
- Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
- Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
- Математика: практикум/ АмГУ, ФМИИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 5 «Уравнение плоскости в пространстве»

Основные вопросы

- Уравнение плоскости.
- Плоскость. Основные задачи: угол между двумя плоскостями, расстояние от точки до плоскости.
- Построение плоскостей.

Типовые задания

- Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки B, C, D .
 $A(1, -6, -5), B(-1, 2, -3), C(4, -1, 0), D(2, 1, -2)$.
- Найти угол между плоскостями: $4x - 5y + 3z - 1 = 0, x - 4y - z + 9 = 0$.
10. Построить плоскости:
 - $y = 4$;
 - $x - 4y - 12 = 0$;
 - $x - y + 2z + 2 = 0$;
 - $x - 3y + 2z = 6$;
 - $2x + z - 3 = 0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМИИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 6 «Уравнение прямой в пространстве»

Основные вопросы

6. Уравнение прямой в пространстве.
7. Прямая в пространстве. Основные задачи.
8. Прямая и плоскость в пространстве.

Типовые задания

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(3,-2,-1)$ и $B(1,3,1)$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,4,-3)$ и параллельно вектору $\vec{s} = \{1;-2;6\}$.
3. Данные прямые параллельны или перпендикулярны?

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-8}, \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z-6}{4}.$$

4. При каком значении k данные прямые перпендикулярны?

$$\frac{x+4}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}, \quad \frac{x+7}{k} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{3}.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМИИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 7 «Понятие функции»

Основные вопросы

1. Область определения функции.
2. Чётность, нечётность функции.
3. Построение графиков функции.

Типовые задания

1. Найти область определения функций:

$$1) f(x) = \log_3(3x-2) + \lg(3-x); \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9} + \lg(x-3).$$

2. Выяснить четность(нечётность) функций:

$$1) y = \frac{\cos 3x}{x^2}; \quad 2) y = -\lg|2x| \cdot \lg x; \quad 3) y = 5^{x+1} - x^2.$$

3. Построить графики функций:

$$1) y = 3^{|x|}; \quad 2) y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3); \quad 3) y = \frac{2x+1}{4x+5};$$

4) $y=3\cos(2x-1)$; 5) $y=3x^2+9x+11$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 8 «Вычисление пределов функций»

Основные вопросы

7. Понятие предела.
8. Основные теоремы о пределах.
9. Раскрытие неопределённостей различных типов.
10. Использование эквивалентных бесконечно малых функций.

Типовые задания

1. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 5}{3x^4 - 5x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 1}{x^4 + 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{2x+1} \right)^{x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 7x + 1}{3x^2 + x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{x+4} \right)^{2x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 4 \cdot 5^x}{5^x + 3^x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \cdot (n-1)!}{n! + (n+1)!}.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 9 «Замечательные пределы»

Основные вопросы

1. Первый замечательный предел.
2. Второй замечательный предел.

Типовые задания

1. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{2x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)[\ln(x+3) - \ln(x)] .$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 10 «Непрерывность функции. Точки разрыва»

Основные вопросы

1. Непрерывность функции в точке.
2. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Точки разрыва функции и их классификация.

Типовые задания

1. Исследовать функции на непрерывность и сделать чертёж.

$$1) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1; \\ x, & x \geq 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{4x+2}{x-1} .$$

2. Найти точки разрыва функций и определить их тип:

$$1) y=5^{\frac{2x}{x-1}}; \quad 2) y = \frac{4x^2 - 25}{2x - 5} .$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп.- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 11 «Производная явно заданной функции»

Основные вопросы

1. Понятие производной.
2. Правила дифференцирования. Таблица производных.
3. Производная сложной функции.

Типовые задания

1. Вычислить производные:

$$1) y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}; \quad 2) y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}; \quad 3) y = \arcsin \sqrt{\sin x}; \quad 4) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5});$$

$$5) y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad 6) y = \operatorname{tg}(x) \cdot \sin^2(3x); \quad 7) y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}); \quad 8) y = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 3x;$$

9) $y = \arctg \frac{x+3}{x-3}$; 10) $y = 10^{3-\sin^3 2x}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 12 «Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически. Производная степенно-показательной функции»

Основные вопросы

1. Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически.
2. Логарифмическое дифференцирование.
3. Производная степенно-показательной функции.
4. Производные высших порядков.

Типовые задания

1. Найти производную функции:

1) $x^2 + y^2 - xy + 3 = 0$; 2) $y_x = ?$, если $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$; 3) $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

2. Вычислите y'' , если $y = \ln(x^2 + 1)$.

3. Найти производную n-го порядка:

$y = 2^x + 2^{-x}$, $y^{(n)} = ?$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 13 «Интервалы монотонности и экстремумы функции. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты»

Основные вопросы

1. Интервалы монотонности и экстремумы функции.
2. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба.
3. Асимптоты.

Типовые задания

1. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

2. Исследовать функцию на экстремум $y = 5x^3 - 15x^2 + 4$.

3. Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций:
 $y = x^4 + 3x^3$

4. Определить асимптоты кривой $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 14 «Исследование функций с помощью производных»

Основные вопросы

1. Область существования функции.
2. Точки разрыва. Интервалы возрастания и убывания.
3. Точки максимума и минимума.
4. Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
5. Области выпуклости и вогнутости.
6. Точки перегиба.
7. Асимптоты.
8. Построение графика.

Типовые задания

1. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$; 2) $y = \frac{x}{x^2 - 16}$; 3) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$; 4) $y = x \sin x$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 15 «Приложения производной в экономике»

Основные вопросы

1. Предельные величины.
2. Издержки производства.
3. Производительность труда.
4. Эластичность функции.

Типовые задания

1. Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой продукции q выражается формулой $C = 40q + 0,02q^3$, где A и B – известные величины. Определить средние и предельные издержки производства при объеме продукции 10.
2. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 9x + 0,2x^2$, где x - объем выпускаемой продукции в ус-

- ловных единицах ($x > 0$) Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если $p=49$ ден. ед.
3. Объем продукции Q , произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $Q = (-5/6)t^3 + (15/2)t^2 + 100t + 50$ (ед.), $t \in [1;8]$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.
 4. Опытным путем установлены функции спроса $q = (p + 8)/(p + 2)$ и предложения $s = p + 0,5$, где q и s - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p - цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравниваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 16 «Функции нескольких переменных. Частные производные»

Основные вопросы

1. Область определения функции нескольких переменных.
2. Частные производные первого порядка и полный дифференциал функции нескольких переменных функции.
3. Производные высших порядков.

Типовые задания

1. Найти частные производные I порядка:

$$1) z = x^3 + 5x^2y^2 - y^3; \quad 2) z = \cos(x + 4y) ; \quad 3) z = \operatorname{arccctg} \frac{y}{x} ; \quad 4) z = \ln(x + yx) ;$$

$$5) z = xe^{xy} ; \quad 6) U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

2. Найти полный дифференциал: $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

3. Найти частные производные II порядка:

$$1) z = \frac{x^2}{1 + 2y^2} ; \quad 2) z = \ln(x + e^{-xy}); \quad 3) z = \operatorname{arctg} xy .$$

4. Показать что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$ удовлетворяет условию $Z''_{xx} + Z''_{yy} = 0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 17 «Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум»

Основные вопросы

1. Экстремум функции нескольких переменных.
2. Понятие условного экстремума. Метод подстановки. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Типовые задания

1. Исследовать функцию $z = y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$ на экстремум.
2. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи: $2x + 3y - 5 = 0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп.- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 18 «Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач»

Основные вопросы

1. Эластичность функции нескольких переменных.
2. Полезность. Предельная полезность.
3. Производственная функция.
4. Кривые безразличия производства.

Типовые задания

1. Функция спроса имеет вид $D = f(p, p_A, y) = 15 - 4p + 3p_A + 0,02y$, где D -спрос на товар Q , p -цена товара Q , p_A -цена альтернативного товара, y -доход потребителей. Вычислить коэффициенты эластичности $\varepsilon_p, \varepsilon_A, \varepsilon_y$ и пояснить их экономический смысл при $p = 12, p_A = 18, y = 1000$.
2. Задана функция полезности $U = 4x^{1/4}y^{3/4}$, где x - количество товара X и y - количество товара Y . Требуется оценить изменение полезности, когда x уменьшается от 100 до 99, а y увеличивается от 200 до 201.
3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара x на товар y для функции полезности $U = \ln x + \ln y + \ln(x + y)$ в точке А (2;10).
4. Производственная функция задана формулой $Q = 100\sqrt{L} \cdot \sqrt{K} - 20L$. Вычислить предельную производительность труда и предельный продукт труда при $L = 100, 400, 2500, K = 100$ у. е.
5. Задана производственная функция $Q = KL^2 + 9$, где Q - количество произведённых товаров или услуг, K и L - ресурсы. Построить кривую безразличия при $Q_0 = 10$, вычислить коэффициент заменяемости ресурсов R_A , пояснить экономический смысл решения, если А (1,1).

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.

3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп.- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМИИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

2 семестр

Практическое занятие № 1 «Матрицы и действия над ними»

Основные вопросы

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Равенство матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Операция сложение матриц и ее свойства.
5. Операция умножения матрицы на действительное число и ее свойства.
6. Операция умножения матриц и ее свойства.

Типовые задания

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C = 2A - 3B$.

2. Найти $-A + 2B - \frac{1}{3}C$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$.

3. Найти $A + A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Матрицы A и B равны, $A = \begin{pmatrix} y+2 & -4 & 2 \\ 2x-3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & z+1 & 2 \\ 3 & 0 & -t \end{pmatrix}$. Найти x, y, z, t .

5. Дано матричное равенство $2A + B \cdot A^T \cdot B^T = \Theta + C$, где $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3a & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти a .

6. Дано произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$. Указать значения

x_2, x_3, y_1 .

7. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 2 «Вычисление определителей»

Основные вопросы

1. Понятие определителя второго порядка и его вычисление.
2. Понятие определителя третьего порядка и его вычисление.
3. Понятие определителя порядка n .
4. Свойства определителей.
5. Определение минора определителя порядка n , соответствующего какому-либо элементу этого определителя.
6. Понятие алгебраического дополнения элемента определителя.
7. Методы вычисления определителей.

Типовые задания

1. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}, \text{ б) } \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{3} \end{vmatrix}, \text{ г) } \begin{vmatrix} a + b & a - b \\ a - b & a + b \end{vmatrix}, \text{ д) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$4. \text{ Решить уравнение } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$5. \text{ Решить уравнение } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$6. \text{ Вычислить определитель } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \text{ тремя способами:}$$

- 1) по правилу «треугольников»;
- 2) путем разложения по элементам первой строки;
- 3) путем накопления нулей ниже главной диагонали.

7. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 3 «Системы линейных уравнений. Метод Крамера»

Основные вопросы

1. Общий вид системы линейных неоднородных уравнений.
2. Общий вид системы линейных однородных уравнений.
3. Определение решения системы линейных уравнений.
4. Определение совместной и несовместной системы линейных уравнений.

5. Понятие определенной и неопределенной системы линейных уравнений.
6. Определение ранга матрицы.
7. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Типовые задания

1. Пользуясь определением ранга матрицы, вычислить ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

2. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Крамера.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ 3x + y = 4; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 7, \\ 2x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases} \text{ в) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \end{cases} \text{ г) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

3. Исследовать и решить систему. Найти общее решение и одно из частных решений в случае совместности неопределенной системы.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

4. Затраты трех видов сырья на производство каждого из трех типов продукции заданы векторами $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$. Запасы каждого вида сырья заданы вектором \vec{S} . Определить план производства, обеспечивающий использование всего сырья. Составить математическую модель задачи и решить ее, используя матричный метод и формулы Крамера.

$$\text{а) } \vec{q}_1 = (1, 2, 2), \vec{q}_2 = (3, 2, 5), \vec{q}_3 = (2, 4, 1), \vec{S} = (80, 120, 90);$$

$$\text{б) } \vec{q}_1 = (2, 5, 1), \vec{q}_2 = (4, 3, 2), \vec{q}_3 = (3, 2, 5), \vec{S} = (168, 173, 191).$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 4 «Системы линейных уравнений. Матричный метод. Метод Гаусса»

Основные вопросы

1. Определение обратной матрицы.
2. Способы нахождения обратной матрицы.
3. Решение систем уравнений матричным методом.
4. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.

Типовые задания

1. Найти A^{-1} :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ г) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему матричным способом:

$$а) \begin{cases} 3x + 7y + 4z - 3 = 0, \\ x + 2y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + 5z - 10 = 0; \end{cases} б) \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \end{cases} в) \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

3. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Гаусса.

$$а) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases} б) \begin{cases} 3x + y - z = -6, \\ 4x - 3y - 4z = 4, \\ -2x + 2y + 3z = -2; \end{cases} в) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 5 «Применение элементов линейной алгебры в экономике»

Основные вопросы

1. Определение собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы.
2. Экономический смысл элементов матрицы прямых затрат.
3. Уравнение линейного межотраслевого баланса.
4. Понятие «продуктивность матрицы прямых затрат».
5. Понятие «запаса продуктивности».
6. Критерии продуктивности матрицы прямых затрат.
7. Нормы добавленной стоимости.
8. Структурной матрицы торговли.
9. Условие бездефицитной торговли.

Типовые задания

1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

$$1) A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}, \quad 2) B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Дана матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$. Зная конечный продукт

первой отрасли $y_1 = 80$ и валовой выпуск второй отрасли $x_2 = 100$, найти конечный продукт второй и валовой выпуск первой отрасли.

3. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства. $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V} = (8 \ 9)$ – вектор норм

добавленной стоимости. Определить: равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на $a=2, b=3$ соответственно.

4. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяю-

щие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 15000.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 6 «Непосредственное интегрирование. Замена переменной»

Основные вопросы

1. Первообразная
2. Неопределенный интеграл, его определение и свойства
3. Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла
4. Таблица интегралов основных элементарных функций
5. Метод подстановки

Типовые задания

$$\int (4 \sin x + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 5^x) dx. \int (\frac{3}{\sin^2 x} + e^x + 3x^3 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx. \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx.$$

$$\int (\frac{1}{1+x^2} + 2^{3x} + \frac{1}{2x} + e^x) dx. \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \int \frac{\arctg^5 x}{1+x^2} dx. \int \cos^5 x \sin 2x dx. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1}.$$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2}. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}. \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \int \frac{3x+4}{x^2+9} dx. \int \frac{e^x}{x^2} dx. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 3}}{\cos^2 x} dx. \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}. \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 10}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}. \int \cos^2 4x dx. \int \frac{\sin(\arctg x)}{1+x^2} dx. \int \sin^3 x dx$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 7 «Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей»

Основные вопросы

1. Интегрирование по частям.
2. Разложение правильной дроби на простейшие
3. Интегрирование рациональных функций.

Типовые задания

$$\int (x+2) \sin x dx. \int x^2 \ln x dx. \int \arcsin 2x dx. \int x^2 \ell^{4x} dx. \int \sin(\ln x) dx. \int e^{3x} \sin x dx.$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}. \int \frac{dx}{(x-1)^2 x}. \int \frac{x dx}{(x-3)(x^2+25)}. \int \frac{x^5 - 2x^3 + 4}{x^3 - 4x} dx. \int \frac{2x+3}{x^2+6x+13} dx$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 8 «Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций»

Основные вопросы

1. Интегрирование иррациональных функций.
2. Интегрирование тригонометрических функций.

Типовые задания

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}. \int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{x+1}}. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^3}. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx. \int \cos^3 x \sin^4 x dx. \int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^4 x} dx$$

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x} \cdot \int \frac{dx}{5+4\sin x} \int (2 + \operatorname{ctg} x)^3 dx \cdot \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} 2x} dx \int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos^4 x}} dx$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 9 «Приложения определённого интеграла»

Основные вопросы

1. Определенный интеграл, определение, геометрический смысл, свойства
2. Методы интегрирования определенного интеграла
3. Вычисление площади криволинейной трапеции.
4. Вычисление длины дуги.
5. Вычисление объем тела вращения.
6. Экономический смысл определенного интеграла.

Типовые задания

1. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1) $y = 2x - x^2$; $y = 0$;

2) $y = x^2$; $y = 1$;

3) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$;

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной данными кривыми.

1) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$.

2) $y = \sin 2x$; $y = 0$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Определить величину вклада через 2 года, если начальный капитал 10000 ден. ед., а проценты начисляются непрерывно по ставке 5 %.

4. Найти объем произведенной продукции за время $t=5$ час, если производительность труда задана функцией $f(t)=-t^2+10t$ (ед./час)

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 10 «Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные»

Основные вопросы

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Понятие общего и частного решений дифференциального уравнения.
3. Геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения
4. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
5. Определение и метод решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
6. Определение и метод решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.
7. Определение и метод решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Типовые задания

$$(3x-1)dy + y^2 dx = 0; \quad y' = \frac{\ell^y}{x}, \quad y(1) = 0; \quad xy' = 2\sqrt{y}, \quad y(1) = 0;$$

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y; \quad y' = \frac{y^2}{xy - x^2}; \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(1) = 0. \quad y' - \frac{y}{x} = 2x;$$

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}; \quad y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 11 «Дифференциальные уравнения высших порядков, решаемые понижением порядка»

Основные вопросы

1. Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.
2. Решение дифференциального уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$.
3. Решение дифференциального уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$.

Типовые задания

1. $y''' = 6x + 1$;
2. $y''' = 4\cos 2x$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$;
3. $xy'' = y'$;
4. $y'' + \frac{y}{x} = 0$;
5. $yy'' = (y')^2$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 12 «Линейные однородные, неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков»

Основные вопросы

1. Определение линейных однородных и неоднородных уравнений n -го порядка.
2. Теоремы о решениях линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.
3. Определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.
4. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
5. Вид общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения
6. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
7. Метод подбора частного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Типовые задания

$$y'' + 4y' = 0; \quad y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y^{IV} - y''' = 0; \quad y'' - 4y' + 13y = 0;$$

$$y'' + y' - 2y = 3xe^{-x}; \quad y'' + 4y' + 5y = x^2 - 1; \quad y'' - 4y' + 4y = \sin 3x.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 13 «Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей»

Основные вопросы

1. Классическое определение вероятности.
2. Определение перестановок из n элементов. Формула для вычисления числа перестановок из n .
3. Определение размещений из n элементов по m . Формула для вычисления числа размещений из n элементов по m .
4. Определение числа сочетаний из n элементов по m . Формула для вычисления числа сочетаний из n элементов по m .
5. Геометрическое определение вероятности.
6. Статистическое определение вероятности
7. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Типовые задания

1. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
2. Два студента условились встретиться в определенном месте между 8 и 9 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 10 минут. Чему равна вероятность встречи студентов, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и момент прихода независим.
3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень: попадет только один, попадут оба, ни один не попадет.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
3. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / сост. Г. П. Вохминцева, Г. Н. Торопчина, И. Н. Шевченко. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2009. - 152 с.

Практическое занятие № 14 «Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания»

Основные вопросы

1. Формула полной вероятности.
2. Формулы Байеса.
3. Формула Бернулли
4. Формула Пуассона
5. Локальная теорема Муавра - Лапласа.
6. Интегральная теорема Муавра - Лапласа

Типовые задачи

1. Одинаковые детали обрабатываются тремя рабочими на трёх станках. Вероятность брака у них равна 0,01; 0,02; 0,03. Обработанные детали откладываются в один ящик. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь будет бракованной, если производительности станков относятся как 2:3:5. Иначе говоря, каков общий процент бракованных деталей производится тремя рабочими?
2. Завод выпускает за три декады месяца соответственно 20 %, 30 %, 50 % задания, причём вероятности брака соответственно составляют 0,01, 0,012, 0,015. Найти вероятность того, что изделие выпущено в первой декаде, если в нём обнаружен дефект.
3. Два равносильных соперника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть:

- а) одну партию из двух или две из четырёх?
 б) не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти?
 Ничьи во внимание не принимаются.

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 100 попаданий из 320 выстрелов.

5. Торговая база получила 10 000 электрических лампочек. Вероятность повреждения электрической лампочки в пути равна 0,0001. Определить вероятность того, что в пути повреждено 4 электрических лампочки.

6. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 120 испытаниях событие наступит не менее 70 раз и не более 90 раз.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

3. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / сост. Г. П. Вохминцева, Г. Н. Торопчина, И. Н. Шевченко. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2009. - 152 с.

Практическое занятие № 15 «Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин»

Основные вопросы

1. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины
2. Закон распределения случайной величины. Функция распределения, плотность вероятности.
3. Математическое ожидание и его свойства
4. Дисперсия и ее свойства.

Типовые задания

1. Два стрелка сделали по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго — 0,7. Необходимо: а) составить закон распределения общего числа попаданий; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. Случайная величина X в интервале $(3, 5)$ задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание X .

3. Дана функция распределения случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 / 4 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$; построить графики $f(x)$ и $F(x)$; вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

Литература

1. Высшая математика для экономических специальностей : учеб.:рек.Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера Ч.2 :Учебник и практикум.-2005.-408 с.

2. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2005.-2003.-560 с.

3. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / сост. Г. П. Вохминцева, Г. Н. Торопчина, И. Н. Шевченко. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2009. - 152 с.

Практическое занятие № 16 «Основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин»

Основные вопросы

1. Биномиальное распределение, его числовые характеристики
2. Распределение Пуассона, его числовые характеристики
3. Геометрическое распределение, его числовые характеристики
4. Нормальное распределение, его числовые характеристики
5. Экспоненциальное распределение, его числовые характеристики
6. Равномерное распределение, его числовые характеристики

Типовые задания

1. Средний рост взрослых женщин некоторого национального округа равен 167,3 см; $\sigma = 5,8$ см. Каков общий процент женщин ростом: не превышающим 170 см, не меньшим, чем 165 см.

2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

3. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ ($t > 0$). Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 50$ ч. элемент откажет; элемент не откажет.

Литература

1. Высшая математика для экономических специальностей : учеб.:рек.Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера Ч.2 :Учебник и практикум.-2005.-408 с.

2. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2005.-2003.-560 с.

3. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / сост. Г. П. Вохминцева, Г. Н. Торопчина, И. Н. Шевченко. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2009. - 152 с.

Практическое занятие № 17 «Проверка статистических гипотез»

Основные вопросы

Постановка задачи проверки гипотез. Критерий оценки и его мощность. Критическая область и область принятия гипотезы. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения. Проверка гипотез о виде распределения.

Типовые задания

1. В банке в течение двух дней проводилось исследование времени обслуживания клиентов. Известно, что $m_x = 17,8$, $m_y = 17,6$, $n_1 = n_2 = 55$. Можно ли считать одинаковыми отклонения от среднего времени обслуживания клиентов банка в 1-й и во 2-й дни при $\alpha = 0,01$?

2. По заданной выборке 73, 72, 56, 64, 60, 71, 65, 69, 65, 76, 70, 63, 74, 73, 72, 67, 63, 67, 80, 68, при уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о среднем значении $H_0 : a = 65$ при альтернативной гипотезе $H_1 : a > 65$, если задано стандартное отклонение $\sigma = 8$.

Литература

1. Высшая математика для экономических специальностей : учеб.:рек.Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера Ч.2 :Учебник и практикум.-2005.-408 с.

2. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2005.-2003.-560 с.

3. Вохминцева, Г.П. Лабораторные работы по математической статистике [Текст] : учеб. пособие / Г. П. Вохминцева, Г. Н. Торопчина, И. Н. Шевченко ; АмГУ. ФМиИ. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2006. - 139 с.

Практическое занятие № 18 «Корреляционный и регрессионный анализ»

Основные вопросы

Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин. Линейная и нелинейная регрессия. Составление уравнений прямых регрессий. Статистическая оценка коэф-

фициента корреляции и ее свойства. Построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии. Проверка статистической значимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдений

Типовые задания

1. В результате анкетного обследования для выявления важнейших видов оборудования, используемого судоводителями во время вахты, получены два ряда ранговых оценок: «по важности» оборудования и «по частоте» его использования.

Важность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Частота	1	4	2	6	3	5	12	9	15	7	11	8	10	14	17	13	16	18	19

Взаимосвязаны ли эти ряды?

2. Зависимость между величинами выражается в виде экспериментально полученной таблицы. Определить уравнение регрессии. Сделать выводы.

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3
У	0,01	0,11	0,35	0,6	1,58	2,31

Литература

1. Высшая математика для экономических специальностей : учеб.:рек.Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера Ч.2 :Учебник и практикум.-2005.-408 с.

2. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2005.-2003.-560 с.

3. Вохминцева, Г.П. Лабораторные работы по математической статистике [Текст] : учеб. пособие / Г. П. Вохминцева, Г. Н. Торопчина, И. Н. Шевченко ; АмГУ. ФМиИ. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2006. - 139 с.

4. Методические указания по самостоятельной работе студентов

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;- развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

1. Виды и формы самостоятельных работ по дисциплине «математика».

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть: - для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение

графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.; для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствии с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ; для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Общая схема самостоятельной работы представлена в пункте 6 рабочей программы.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий, расчетно-графических работ и подготовку к экзамену (зачету).

Прежде чем приступить к выполнению РГР, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Оформление расчетно-графической работы осуществляется в соответствии со стандартом. Каждая РГР начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственным периодом в работе студента. Seriously подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены - долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все зачеты, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом, а финиш - отчисление из учебного заведения.

В дни подготовки к экзаменам избегай чрезмерной перегрузки умственной работой, чередуй труд и отдых.

IV КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

1. Текущий контроль знаний

При подготовке к контрольным мероприятиям по освоению модуля рекомендуется использовать примерные варианты контрольных работ, приведённые в рабочей программе (пункт 9). Примерные варианты расчетно-графических работ приведены ниже.

I семестр

РГР №1 «Аналитическая геометрия с элементами анализа».

Задание №1. Найти множества значений x , удовлетворяющих следующим условиям. Изобразить эти множества геометрически:

$$1) |x| \geq 3; \quad 2) |x-2| \leq 3; \quad 3) |x-4| = |x+4|.$$

Задание №2. Найти область определения функции и изобразить ее на чертеже. 1)

$$f(x) = \log_3(3x-4) + \lg(3-x); \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9} + \lg(x-2).$$

Задание №3. Построить графики функций и сформулировать их основные свойства.

$$1) 2^x; \quad 2) \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 3) \log_3 x; \quad 4) \log_{\frac{1}{3}} x; \quad 5) x^3.$$

Задание №4. С помощью преобразования графика подходящей элементарной функции построить график функции $f(x)$.

$$1) \frac{1}{|x|}; \quad 2) \frac{2x-4}{x+3}; \quad 3) 2x^2 + 3x + 4.$$

Задание №5. Построить линии. 1) $y = \sqrt{9-x^2}$; 2) $y = -3 - \frac{1}{3}\sqrt{8+2x-x^2}$;

$$3) y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}; \quad 4) x-4y^2-8=0.$$

Задание №6. Построить графики зависимостей величины спроса X от дохода J (функции Торнквиста) на:

а) товары первой необходимости $X = \frac{a_1 J}{J + c_1}$, где $J \geq 0$;

б) товары второй необходимости $X = \frac{a_2(J-b_2)}{J+c_2}$, где $J \geq b_2$;

в) товары роскоши $X = \frac{a_3 J(J-b_3)}{J+c_3}$, где $J \geq b_3$.

a_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3
2	2	3	4	2	2	6	2

Задание №7. Построить графики функций, описывающих зависимости:

а) спроса от цены товара $D = KP^a + C$;

б) предложения от цены товара $S = P^b + d$;

в) охарактеризовать эти графики.

K	a	c	b	d
2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{5}$	0,5

Задание №8. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются функциями

$y_1 = a_1x + b_1$; $y_2 = a_2x + b_2$, где x - расстояние в сотнях километров, y_1, y_2 - соответствующие транспортные расходы.

Необходимо: построить графики функций; произвести экономический анализ; рассчитать транспортные расходы при $x = x_0$.

a_1	b_1	a_2	b_2	x_0
40	120	35	140	600

Задание №9. Даны вершины треугольника ABC.

Найти: длину стороны BC; уравнение высоты из вершины A и ее длину; уравнение медианы из вершины A; записать уравнение прямой, проходящей через вершину A; построить чертеж.

A(-2;10); B(5;8); C(4;0).

Задание №10. Для функций спроса $D(p)$ и предложения $S(p)$ найти равновесную цену, если $D(p) = 3 \cdot 2^{-p}$ $S(p) = 2^p + 2$

Задание №11. Построить поверхности:

1) $2x - 3y - z = 0$; 2) $2x - 3y - z = 0$; 3) $y^2 - 4z - 5 = 0$;

4) $y^2 - 4z^2 + 8x^2 + 8 = 0$; 5) $y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$.

Задание №12. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2 + 1$, $x=3, y=3, x=0, y=0, z=0$.

2) $z=0, z=0, y=0, y=4, x = \sqrt{25 - y^2}$.

3) $z = y^2, 2x+y=6, x=0, z=0$.

Задание №13. Найти пределы числовых последовательностей с заданным общим членом:

а) $\frac{2n-3}{n^2+1}$; б) $\frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$; в) $\left(\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{3n^2}{3n-1}\right)$; г) $(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1})$.

Задание №14. Найти пределы функции:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$.

Задание №15. Первоначальный вклад, положенный в банк под $P\%$ годовых, составил a млн. рублей. Найти размер вклада через b лет при начислении процентов:

а) ежегодном; б) поквартальном; в) ежемесячном г) непрерывно
 $P=3; a=4; b=2$

Задание №16. Доказать непрерывность функции и построить её график:

а) $y = 2^{x-2}$; б) $y = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0, \\ 5-5x, & x > 0. \end{cases}$ в) $y = |4x - x^2|$.

Задание №17. Найти точки разрыва функций и определить их тип. Построить чертёж.

а) $y = \frac{x+3}{x-4}$; б) $y = 3^{\frac{1}{x-1}}$; в) $y = \frac{9x^2 - 16}{3x+4}$; г) $y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ -x-1, & x > 0. \end{cases}$

РГР №2 «Приложение производной функции одной переменной»

Задание 1. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой,

$f(x) = \frac{-x^3}{6} + x^2 - 2x - 3$; параллельно прямой $3x + 6y - 2 = 0$

Задание 2. Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой про-

дукции q выражается формулой $C = 40q + 0,02q^3$, где A и B – известные величины. Определить средние и предельные издержки производства при объеме продукции 10.

Задание 3. Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства q выражается формулой $\tilde{N} = 40 - 0,2q$. Требуется определить коэффициент эластичности при выпуске продукции 20 (ден. ед.). (Вычислять либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 0,1.)

Задание 4. Зависимость спроса q от цены p описывается формулой $q = 20e^{-0,02p^2}$. Найти, при каких значениях цены спрос будет эластичным.

Задание 5. Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{P+11}{P+4}$ и предложения $S = P+0,5$, где q и S – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, P – цена товара. Найти: 1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения;

3) изменение дохода при изменении цены на 5 %.

Задание 6. Объем продукции q , произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $q = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 90t + 50$ (ед.), $0 \leq t \leq 8$ где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через 1 час после начала смены и за 2 часов до её окончания.

Задание 7. Пусть функция дохода $R(q) = 24q - 2q^2$, а функция затрат $C(q) = q^2 - 3$. Каким должен быть налог t с единицы выпускаемой продукции, чтобы величина суммарного налога T со всей продукции была наибольшей?

Задание 8. Определить изменение ставки процента $r=r(t)$, если дана величина вклада в момент времени t : $K(t) = K_0(t+1)^{r_0}$, где t – число лет от открытия вклада, K_0 – величина вклада в начальный момент времени $t=0$, r_0 (%) – номинальная ставка за год. Найти сумму процента через t_1 и t_2 лет.

K_0	r_0	t_1	t_2
10000	15	2	5

Задание 9. Капитал в 1 миллионов ден. ед. может быть размещён в банке под 30 % годовых или инвестирован в производство, причём эффективность вложения в размере 100 %, а издержки задаются квадратичной зависимостью $c = ax^2$. Прибыль облагается налогом в p %. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, чем размещение в банке.

Задание 10. Найти пределы функции, используя правило Лопиталья.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1},$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{x^2 - x},$ $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x,$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right),$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} + 5}{6x^2 + 1},$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{4x} - 2}{\sin x},$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{1-x}},$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 6x)^{\frac{1}{x}}.$
---	--

Задание 11. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $9\sqrt{2}$. Каковы должны быть катеты, чтобы периметр был наибольшим?

Задание 12. Исследовать функции и построить их графики.

$y = x^3 + 3x + 2$	$y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$	$y = \ln(x^2 + x - 2)$
--------------------	--------------------------------	------------------------

Задание 13. Известно, что зависимость издержек и дохода от объёма производства определяется функциями: $C(q) = 18q - 8q^2 + q^3$ и $R(q) = 8q - q^2$ где q – объём производства, $C(q)$ - издержки, $R(q)$ - доход. Найти зависимость прибыли $\Pi(q)$ от объёма производства.

1. Построить графики функций прибыли производства.
2. Найти объёмы производства при которых:
 - а) прибыль равна нулю;
 - б) прибыль максимальна;
 - в) убытки максимальны
3. Найти значения максимальных убытков и прибыли.
4. Найти средние значения прибыли при объёме производства $q = 1,5$ ед.
5. Найти предельные значения прибыли при объёме производства $q = 2,5$ ед.

При необходимости результат округлить до 0,01

II семестр

РГР № 1 «Линейная алгебра»

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $D = (3A -$

4B)C.

2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$.

4. Найти такие значения параметров p и q , если они существуют, при которых ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & p & -1 \\ 0 & -5 & 6 & q \end{pmatrix}$ равен двум.

5. Относительно канонического базиса в R_3 дано четыре вектора $\vec{f}_1 = (1, -1, -1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$, $\vec{x} = (4, 0, -2)$. Доказать, что векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3 . Найти координаты вектора \vec{x} в новом базисе.

6. Доказать, что система
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. Найти частное решение, если $x_4 = -8, x_5 = -4$.

8. Линейный оператор A действует в $R^3 \rightarrow R^3$ по закону $A \vec{x} = (4x_1 - 5x_2 + 2x_3, 5x_1 - 7x_2 + 3x_3, 6x_1 - 9x_2 + 4x_3)$. Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\vec{x} = (1, 1, 1)$ является собственным для матрицы A . Найти собственное число λ_0 , соответствующее вектору \vec{x} . Найти другие собственные числа, отличные от λ_0 . Найти все собственные векторы матрицы A .

9. По данному базису $\vec{f}_1 = (1, -1, -1), \vec{f}_2 = (1, 1, -1), \vec{f}_3 = (1, 1, 1)$ построить ортонормированный базис V_3 . Координаты векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ указаны относительно канонического базиса.

10. Привести квадратичную форму $27x_1^2 + 3x_2^2 - 10x_1x_2$ к каноническому виду. Найти формулы преобразования.

РГР № 2 «Интегральное исчисление»

1) Вычислить неопределенные интегралы:

$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$	$\int \ell^{2x^2+3} x dx$	$\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$
$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 5}}{x} dx$	$\int x \sin x^2 dx$	$\int \frac{4x^5 dx}{\sqrt{x^6 + 7}}$
$\int \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx$	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$	$\int \frac{x^3}{4 + 5x^4} dx$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x}$	$\int \ell^{4x} \sin \ell^{4x} dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tg x}}$
$\int \frac{x^3}{x - 4} dx$	$\int \frac{x - 2}{x + 1} dx$	$\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 6}$
$\int \arcsin 2x dx$	$\int x \ln x dx$	$\int x \cos x dx$
$\int (x^2 + 3) \ell^{3x} dx$	$\int \arctg x dx$	$\int \frac{x}{\rho^{2x}} dx$

$\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1} dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-9} dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}} dx$
$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$	$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x} dx$	$\int \frac{dx}{(x^2+x)(x-2)}$
$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	$\int \sin^2(x + \frac{3}{4}\pi) dx$	$\int \cos 2x \cos 4x dx$
$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$	$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$	$\int \cos^4 x dx$

2) Вычислить определенные интегралы

$$1. \int_0^1 (2x+1)e^x dx; \quad 2. \int_1^e x^2 \ln x dx; \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx;$$

$$4. \int_1^2 \ln x dx; \quad 5. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}; \quad 6. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}; \quad 7. \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx; \quad 8. \int_0^1 (e^x + 4)^2 e^x dx$$

3) Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а. $y = x^2 - 2x + 2$; $y = 2 + 4x - x^2$.

б. $y = x^2$; $y = 2 - x$; $y = 0$.

4) Определить объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности $f(t) = 12e^{-0,4t}$, где t – время в часах.

5). Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$.

Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

6). Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, если законы спроса и предложения имеют вид: $p = 250 - x^2$, $p = 20 + \frac{1}{3}x$.

7). Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая, что функция

изменения затрат $t(x) = 600x^{-\frac{1}{2}}$.

8) Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^2+1}; \quad 2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{4+x}; \quad 3. \int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}; \quad 4. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$$

РГР № 3 «Теория вероятностей и элементы математической статистики»

1) Менеджер рассматривает кандидатуры 4 человек, подавших заявления о приеме на работу. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в

случайном порядке? Какова вероятность того, что они случайно будут приглашены на собеседование в зависимости от времени их прихода в офис?

2) Внутри круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

3) В большой рекламной фирме 21% работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40% работников фирмы – женщины, а 6,4% работников – женщины, получающие высокую заработную плату. Можем ли мы утверждать, что на фирме существует дискриминация Женщин в оплате труда.

4) В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик на удачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все изделия, детали окажутся окрашенными.

5) При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,6. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от другого. Найти вероятность того, что при 5 циклах объект будет обнаружен.

6) Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% продукции, второй – 45%, третий – 15%. В продукции первого завода спешат 80% часов, второго – 70%, а третьего – 90%. Какова вероятность того, что купленные часы спешат?

7) Завод точного машиностроения в среднем в год выпускает 5 % приборов, на которые поступают рекламации из-за низкого качества. Найти вероятность того, что на 2000 приборов поступит 30 рекламаций.

8) По данным длительной проверки качества выпускаемых кирпичей, количество пригодных составляет 93 %. Найти вероятность того, что отклонение частоты брака не будет превышать по абсолютному значению 0,01 среди 6000 кирпичей.

9) Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

10) Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

11) Детали, выпускаемые цехом по размерам диаметра распределяются по нормальному закону с параметрами: $a = 5$ см и $\sigma^2 = 0,81$ см. Найти границы, в которых следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95.

12) Для определения средней урожайности колхозного поля в 10000 га. предполагается взять на выборку по 1 кв. м. с каждого гектара площади и точно подсчитать урожайность с этих квадратных метров. Оценить вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от истинной средней урожайности на всем массиве не более чем на 0,1 центнера, если считать, что среднее квадратическое отклонение урожайности на каждом гектаре не превышает 3 ц.

2. Итоговый контроль знаний

Вопросы к экзамену приведены в рабочей программе (пункт 9). Примерные экзаменационные билеты и тестовые задания приведены ниже.

Тест 1

1. Произведение числа $z = 3 - 5i$ на сопряжённое равно...

- 1) 34 2) 0 3) $9 - 25i$ 4) 28

2. Число $z = 1 - i$ представлено в тригонометрической форме:

1) $2(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} i)$ 2) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} i)$ 3) $\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} i)$

4) $(\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} i)$

3. Действительная часть комплексного числа $(1+5i)^2$ равна...

- 1) 1 2) 10 3) -24 4) 0

4. Сумма корней квадратного уравнения $5x^2 + 2x + 2 = 0$ равна...

- 1) 0 2) -0,4 3) 5 4) $2+i$

5. Число $z = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ представлено в алгебраической форме:

- 1) $2i$ 2) $-2i$ 3) $1+2i$ 4) $1-2i$

6. Угловой коэффициент прямой $5x+8y=7$ равен...

- 1) 5 2) -5 3) $\frac{5}{8}$ 4) $-\frac{5}{8}$

7. Длина отрезка, отсекаемого прямой $2x+3y-6=0$ на оси Ox , равна...

- 1) 3 2) 5 3) 4 4) 2

8. Уравнение эллипса с полуосями $a=2, b=4$ и центром в точке $(2; 1)$ имеет вид:

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 2) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ 3) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ 4)

$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если ее действительная полуось $b=3$, а расстояние между фокусами $2c = 8$:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 2) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{9} = 1$ 3) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ 4) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

10. Радиус окружности $x^2 + y^2 + 4x = 0$ равен...

- 1) 0 2) 4 3) 2 4) 1

11. Уравнение плоскости проходящей через точку $A(3,1,-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(4,-5,1)$ имеет вид:

1) $4x - 5y + z - 5 = 0$ 2) $3x + 5y - 2z = 0$ 3) $4x - 5y + z - 2 = 0$

4) $12x - 5y - 2z - 5 = 0$

12. Уравнение прямой проходящей через точки $A(4;-2;3)$ и $B(5;-4;2)$ имеет вид:

1) $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{5}$ 2) $x-4 = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{2}$ 3) $x-4 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

4) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}$

13. Определить, при каком A прямая $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{A} = \frac{z-1}{7}$ параллельна плоскости $Ax + 5y + 3z - 6 = 0$:

- 1) 1 2) -3 3) -7 4) 2

14. Определить, при каких α и β параллельны прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z+1}{\alpha}$ и $\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{\beta} = \frac{z+5}{2}$:

- 1) $\alpha = 10, \beta = 1$ 2) $\alpha = 10, \beta = -1$ 3) $\alpha = -10, \beta = 1$ 4) $\alpha = 1, \beta = -10$

15. Уравнение $y = x^2$ описывает поверхность:

- 1) эллиптический цилиндр 2) конус 3) параболический цилиндр
 4) гиперболический параболоид

16. Область определения функции $y = \sqrt{x-x^2}$

- 1) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 2) $(0, 1)$ 3) $[1, +\infty)$ 4) $[0, 1]$

17. Предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$ равен...

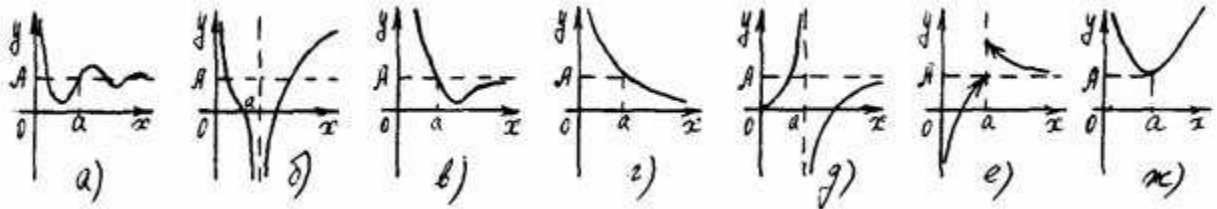
- 1) 0 2) ∞ 3) 6 4) $\frac{1}{6}$

18. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x+5}{x+8x^3}$ равен...

- 1) 0 2) $\frac{1}{8}$ 3) ∞ 4) 1

19. Среди графиков, приведенных на рис. указать ВСЕ, соответствующие формуле

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$



20. Укажите, в каком случае в точке c функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв:

- 1) $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = -5$; $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = -5$; $f(c) = 0$; 2) $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = -5$; $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = 5$; $f(c) = 5$;
 3) $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = -5$; $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = -\infty$; 4) $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = -5$; $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = -5$; $f(c) = -5$.

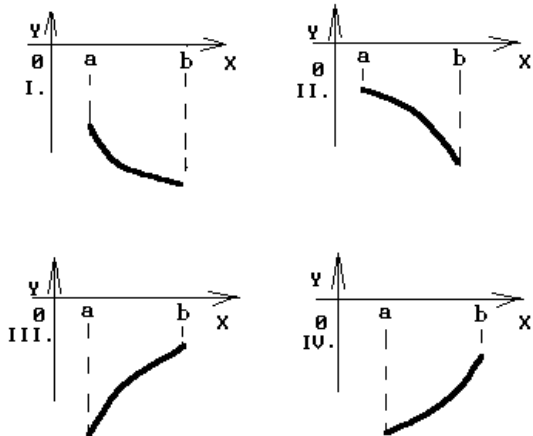
21. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 5 + 6t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t . Тогда скорость точки при $t = 1$ равна ...

- 1) 12 2) 17 3) 7 4) 20

22. Производная функции $y = \sin(\ln(3x-5))$ равна...

23. Точки перегиба функции $y = 30x^3 - x^5$ равны...

24. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y < 0$; $y' < 0$; $y'' > 0$?



25. Опытным путём установлена функция спроса $D = 15 - 0,1p$ эластичность спроса, при цене $p=10$ за единицу продукции, равна...

- 1) 14 2) $\frac{1}{10}$ 3) $-\frac{1}{14}$ 4) 15

Тест 2.

1. Укажите размеры матрицы A , если известно, что $(1 \ 2 \ 3)A = (1 \ -1 \ -2 \ 0)$
 1) $1*2$; 2) $3*4$; 3) $3*2$; 4) $1*4$.

2. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ и записать в ответ сумму всех её элементов:

- 1) -7; 2) -3; 3) 0; 4) 1.

3. В утверждении вставьте пропущенные слова, делающее его верным:
 система линейных уравнений имеет ... решение ... ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| 1) ровно одно | только тогда, когда |
| 2) хотя бы одно | тогда и только тогда, когда |
| 3) бесконечное множество решений | если |
| 4) нулевое решение | только тогда, когда |

4. Укажите верные свойства определителя:

- 1) если к строке определителя прибавить другую строку этого определителя, умноженную на два, то определитель увеличится в два раза;
- 2) определитель с двумя пропорциональными столбцами равен нулю;
- 3) если все элементы столбца определителя увеличить в два раза, то и определитель увеличится в два раза;
- 4) если матрицу определителя транспонировать, то получившийся определитель транспонированной матрицы будет равен нулю.

5. Решите неравенство $\begin{vmatrix} 6-x & 5-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} < 0$:

- 1) $x < 6$; 2) $x > 1$; 3) $x > 3$; 4) $x < 3$.

6. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -12 & 6 \end{vmatrix}$ равен:

- 1) 4; 2) 10; 3) 0; 4) 1.

7. Собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ равны:

- 1) 1; 4 2) 2; 5 3) 1; 2 4) -2; -3.

8. Интеграл $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ равен:

- 1) $-\operatorname{ctgx} + C$; 2) $\frac{1}{\sin^3 x} + C$; 3) $-\frac{1}{\sin x} + C$; 4) $\cos^2 x + C$.

9. Укажите верные свойства неопределённого интеграла:

- 1) $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$; 2) $\int dF(x) = f(x) + C$; 3) $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$;
4) $\int (u + v - w) dx = \int u dx - \int v dx + \int w dx$; где u, v, w – некоторые функции от x .

10. Интеграл $\int e^{(8-\frac{1}{3}x)} dx$ равен:

- 1) $e^{(8-\frac{1}{3}x)} + C$; 2) $\frac{1}{3} e^{(8-\frac{1}{3}x)} + C$; 3) $-3 e^{(8-\frac{1}{3}x)} + C$; 4) $-3e^x + C$.

11. Выберите среди перечисленных ниже вариантов ответа на поставленный вопрос правильный вариант. “Значение определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$ зависит от ...”:

- 1) ... подынтегральной функции;
2) ... длины частичных отрезков Δx_i ;
3) ... выбора точек c_i в каждом отрезке;
4) ... способа разбиения отрезка $[a; b]$.

12. Каков геометрический смысл определённого интеграла от функции $y=f(x)$ в интервале $[a, b]$ в системе декартовых координат:

- 1) алгебраическая площадь фигуры, ограниченной линией $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$;
2) длина линии $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$;
3) среднее значение функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$;
4) максимальное значение функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$.

13. Не производя вычислений, укажите интегралы, равные нулю:

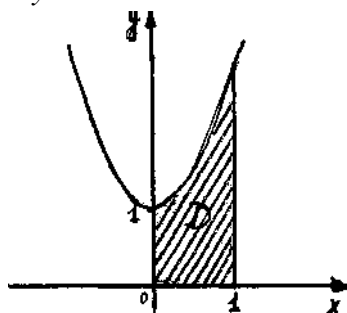
- 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$; 2) $\int_{-2}^2 x^4 e^{x^2} dx$; 3) $\int_{-1}^1 (x^3 + x) dx$; 4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx$.

14. Чему равен интеграл $\int_1^{\infty} 2^{5x} dx$:

- 1) $1/5$; 2) 0; 3) $\ln(2)-1$; 4) ∞ .

15. Площадь криволинейной трапеции D

$$y = 2x^2 + 1$$



равна:

1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 2.

16. Какие из уравнений не являются дифференциальными (у функция от x):

1) $y=x^2+x+C$; 2) $f'(x)=C$; 3) $y'+ye^x = \operatorname{tg} 2x$; 4) $dx=x$.

17. Какие из уравнений не являются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными:

1) $x(y+1)dx-(x^2+1)ydy=0$; 2) $y'+P(x)y=Q(x)$ 3) $y'+y+x=0$; 4) $dy/y=\operatorname{ctg} x dx$.

18. Общее решение уравнения $y''-5y'+4y=0$ имеет вид:

1) $x C_1 + C_2 e^{2x}$; 2) $C_1 e^{4x} + C_2 e^x$; 3) $C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$; 4) $(C_1 e^x + C_2 x) e^x$.

19. Общее решение уравнения $y''+4y=0$ имеет вид:

1) $C_1 e^{-2x}$; 2) $e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 3) $(C_1 e^x + C_2 x) e^x$; 4) $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

20. Частное решение уравнения $y''+2y'=4\sin x$ имеет вид:

1) $\bar{y} = A \sin x$; 2) $\bar{y} = e^x (A \sin x)$; 3) $\bar{y} = A \sin x + B \cos x$; 4) $\bar{y} = A e^x$.

Тест 3

1. Перестановками из n элементов называется:

- a) размещение из n элементов по n элементов;
- b) перестановки из n элементов по n элементов;
- c) любое подмножество из n элементов.

2. Формула для нахождения размещений:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

a)

b) $A_n^k = n!$

c)

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

3. Какое событие называется несовместимым:

- a) если оно не может не произойти в условиях данного опыта или явления;
- b) если при двух событиях наступление одного из них исключает возможность наступления другого;

c) два события, одно из которых обязательно должно произойти, причем наступление одного исключает возможность наступления другого.

4. В урне находится 12 пронумерованных шаров. Извлекают один шар. Возможны события: А- появление шара с нечетным номером, В – появление шара с четным номером; С – появление шара с номером больше чем 3; D – появление шара с номером меньше, чем 7. Какие из этих событий несовместны?

- a) А и В;
- b) А и С;
- c) А и D;
- d) В и С.

5. Суммой двух событий А и В называется:

- a) множество, которое состоит из элементов, общих для событий А и В;
- b) множество, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из событий А и В;

c) множество, которое содержит те элементы события А, которые не входят в В.

6. Чему равна вероятность случайного события:

- a) $p=0$;
- b) $p=1$;
- c) $0 < p < 1$.

7. Каждый из двух стрелков производит по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания соответственно равны: $p_1=0,6$; $p_2=0,75$. Чему равна вероятность $A \cdot \bar{B}$?

- a) 0,65;
- b) 0,3;
- c) 0,1;
- d) 0,15.

8. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Чему равна вероятность того, что задачу решил только первый студент (в общем виде)?

- a) $= p_1$;
- b) $= 1 - p_2 \cdot p_3$;
- c) $= p_1 \cdot q_2 \cdot q_3$;
- d) $= 1 - q_2 \cdot q_3$.

9. В коробке 5 синих, 4 красных, 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Найти вероятность того, что среди них 1 зеленый и 2 синих карандаша?

- a) $\frac{3}{44}$;
- b) $\frac{3}{11}$;
- c) $\frac{3}{22}$.

10. Формула полной вероятности имеет вид:

- a) $= \sum P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$;
- b) $= \sum P(A_i) \cdot P_B(A_i)$;
- c) $= \sum P(B) \cdot P_{A_i}(B)$;
- d) $= \sum P(B) \cdot P_{A_i}(B)$.

11. Пусть от первого предприятия в магазин поступило 20 изделий, от второго – 10 и от третьего – 70. Вероятности поступления бракованных изделий соответственно равны 0,02; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что бракованное изделие поступило с первого предприятия?

- a) 0,006;
- b) 0,042;
- c) 0,143.

12. Какая величина называется дискретной:

- a) если она может принимать определенные, фиксированные значения;
- b) если она может принимать значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга;
- c) если она может принимать любые неизвестные значения.

13. Математическое ожидание находится по формуле:

a) $M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$;

b) $M(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{p_i}$;

c) $M(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$;

d) $M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i^2$.

14. Дано следующее распределение случайной величины:

X	1	2	4	5
---	---	---	---	---

p	0,2	0,1	0,4	0,3
---	-----	-----	-----	-----

Найти ее дисперсию:

- a) 3,5;
- b) 14,5;
- c) 2,25;
- d) 1,5.

15. Дисперсия числа появлений события А в n независимых испытаниях равна:

- a) $D_x=np$;
- b) $D_x=npq$;
- c) $D_x=pq$;
- d) $D_x=\frac{np}{p}$.

16. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется:

- a) производная от ее функции распределения вероятностей;
- b) вероятность самого события;
- c) интеграл от ее функции распределения вероятностей.

17. Случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)=2x$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x)=0$. Найти ее дисперсию?

- a) $\frac{2}{3}$;
- b) $\frac{1}{2}$;
- c) $\frac{4}{9}$;
- d) $\frac{1}{18}$.

18. Смещенной называется статистическая оценка ...

- a) математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру;
- b) математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру;
- c) дисперсия которой не равна оцениваемому параметру;
- d) дисперсия которой равна оцениваемому параметру.

Экзаменационный билет N 1

Теоретическая часть

1. Понятие множества.
2. Парабола. Вывод канонического уравнения параболы.
3. Градиент функции.

Практическая часть

1. Заданы функции полного дохода $R = -2x^2 + 12x$ и полных издержек $C = -6x + 9$, где x – объём выпускаемой продукции. Определить x_1 и x_2 - границы прибыльности производства и точку x_0 , в которой прибыль достигает максимального значения.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$.
3. Найти y'_x , если $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.
4. Объём продукции y , произведённой бригадой рабочих, может быть записан уравнением $y = -\frac{6}{7}t^3 + \frac{17}{2}t^2 + 120t + 70$, $0 \leq t \leq 8$, где t - рабочее время в часах. Найти производительность труда через час после начала работы и за два часа до её окончания. Сделать анализ результатов.

5. Дана функция: $z = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$. Найти z''_{xy} .

Экзаменационный билет N 1

Теоретическая часть

1. Матрицы. Основные понятия. Разновидности матриц.
2. Интегрирование тригонометрических функций
3. Повторные независимые испытания.

Практическая часть

1. Отрасль состоит из 4 предприятий, матрица прямых затрат имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \text{ Требуется рассчитать вектор конечного продукта непро-}$$

изводственного потребления \vec{V} , если известен вектор валового выпуска продукции $\vec{X} = (170, 180, 150, 120)$.

2. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^2 + 1} dx, \quad \text{б) } \int_0^1 x \cdot e^x dx.$$

3. Решить дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } (1 + y^2)dx + xydy = 0, \quad \text{б) } 2y'' + 5y' + 2y = 0.$$

4. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$, до $x_2 = 121$ изделий, полагая функцию изменения затрат времени на изготовление изделий $t = 600x^{-\frac{1}{2}}$.

5. Инвестор предполагает, что в следующем периоде вероятность роста цены компании N будет составлять 0,4, а компании M- 0,3. Вероятность того, что цены поднимутся на те и другие акции, равна 0,2. Вычислите вероятность их роста или компании N или компания M, или обеих компаний вместе.

V ИНТЕРАКТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов. «Введение в анализ с элементами аналитической геометрии» (2 часа).

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину. Тема: «Введение в анализ с элементами аналитической геометрии» (4 часа).

Лекция вдвоем. Учебный материал проблемного содержания дается студентам в диалоговом общении двух преподавателей между собой. Моделируются профессиональные дискуссии разными специалистами (теоретиком и практиком, сторонником и противником определенной концепции). Студенты вовлекаются в общение, высказывают собственную позицию.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и проводится их обсуждение. Тема: «Интегральное исчисление» (2 часа).

2. Неигровые имитационные методы обучения

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач. Тема: «Функции нескольких переменных» (2 часа).

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной методике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций. Тема «Линейная алгебра» (2 часа).

3. Игровые имитационные методы

Мозговой штурм – наиболее свободная форма дискуссии, позволяющей быстро включить в работу всех членов учебной группы. Используется там, где требуется генерация разнообразных идей, их отбор и критическая оценка. Этапы продуцирования идей и их анализа намеренно разделены: во время выдвижения идей запрещается их критика. Тема: «Теория вероятностей» (2 часа).

Круглый стол — это метод активного обучения, одна из организационных форм познавательной деятельности учащихся, позволяющая закрепить полученные ранее знания, восполнить недостающую информацию, сформировать умения решать проблемы, укрепить позиции, научить культуре ведения дискуссии.

Дискуссия (от лат. *discussio* — исследование, рассмотрение) — это всестороннее обсуждение спорного вопроса в публичном собрании, в частной беседе, споре.

Деловая игра – форма воссоздания предметного и социального содержания профессиональной деятельности, моделирования систем отношений, разнообразных условий профессиональной деятельности, характерных для данного вида практики.

Метод анализа конкретной ситуации (ситуационный анализ, анализ конкретных ситуаций, *case-study*) – это педагогическая технология, основанная на моделировании ситуации или использования реальной ситуации в целях анализа данного случая, выявления проблем, поиска альтернативных решений и принятия оптимального решения проблем.

Мастер–класс – это главное средство передачи концептуальной новой идеи своей (авторской) педагогической системы. Преподаватель как профессионал на протяжении ряда лет вырабатывает индивидуальную (авторскую) методическую систему, включающую целеполагание, проектирование, использование последовательности ряда известных дидактических и воспитательных методик, занятий, мероприятий, собственные «ноу-хау», учитывает реальные условия работы с различными категориями учащихся и т.п.