Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«Линейная алгебра»

По направлению 080100. 62- Экономика

Квалификация (степень) выпускника «Бакалавр»

профили: «Мировая Экономика»,

«Финансы и кредит»,

«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,

«Налоги и налогообложение»,

«Экономика и организация»

Благовещенск 2012

УМКД разработан доцентом Кафедры ОМ и И

Вохминцевой Галины Павловны

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от   «_____» ________________2012 г. № _____

Зав. кафедрой _______________________/ Г. В. Литовка /

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМСС ____
от «____» _________________ 2012 г. №______

Председатель УМСС _______________/ Ковшун Ю. А.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММ

1.1. Цели и задачи освоения дисциплины.

Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование − важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

Целью изучения дисциплины является получение фундаментального образования, способствующего развитию личности; формирование математического мышления и математической культуры. Основной целью курса «Линейной алгебры» является повышение качества специалиста.

Задачами преподавания математики как фундаментальной науки являются: развитие логического и алгоритмического мышления студента; выработка умения моделировать реальные экономические процессы; освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач; овладение численными методами решения и их реализацией на компьютере. Развитие навыков математического мышления; формирование понимания исторической роли математики в развитии науки, в практической деятельности людей, значение математики в современном мире; выработка математических методов для решения практических задач общего характера и специальных задач профессионального характера.

1. 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП)

Учебная дисциплина «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» включена в базовую часть математического и естественнонаучного цикла ООП.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, знания и умения сформированные в процессе обучения в средней образовательной школе.

Знания, умения и виды деятельности, сформированные в результате изучения дисциплины « «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» потребуются при изучении экономических дисциплин, а также при изучении других дисциплин вариативной части профессионального цикла и при разработке численных моделей на ЭВМ.

Место дисциплины в модульной структуре ООП.

Дисциплина «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» является составной частью модуля «Математический и естественнонаучный цикл».

1. 3. Компетенции обучающегося , формируемые в результате освоения дисциплины.

В результате освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие профессиональные компетенции:

- владение культурой мышления, способностью к обобщению достижения (ОК-1); анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-2);
- умение логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2);
- готовностью к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК - 3)
-использование основных законов естественных дисциплин в профессиональной деятельности, методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследований в профессиональной деятельности (ПК-1); способностью составлять отчеты по выполненным работам, участвовать во внедрении результатов исследований и практических разработок (ПК-19);

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

определения базовые понятий курса линейной алгебры и их прикладное значение; типовые операции над основными математическими объектами; основные свойства типовых математических операций и формулы теории линейной алгебры (ОК - 12).

уметь:

применять полученные знания по математике при изучении других дисциплин, выделять конкретное математическое содержание в прикладных задачах профессиональной деятельности.

владеть:

методами математического описания типовой математической модели; постановкой задач по выбору наилучших значений параметров математической модели процесса, методикой оценки параметров.

Государственный стандарт курса учебной дисциплины «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» специальность 080100.62 – экономика.

Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.

1. 4. Содержание дисциплины. Основные разделы.

Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: операции над векторами и матрицами; системы линейных алгебраических уравнений; определители и их свойства, собственные значения матриц; комплексные числа; прямые и плоскости в аффинном пространстве; модель Леонтьевна, модель равновесных цен, модель торговли. .

Темы, разделы дисциплины	Коды компетенции	Общее количество компетенций
1. Определители.	ОК-5, ОК-6, ОК-15	3
2. Векторная алгебра.	ОК-5, ОК-6, ОК-15	3
3. Прямая и плоскость.	ОК-5, ОК-6, ОК-15	3
4. Матрицы .	ОК-5, ОК-6, ОК-15	3
5. Системы линейных алгебраических уравнений.	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-31	4
6. Матрица линейного оператора.	ОК-5, ОК-6, ОК-15	3

1. 5. Структура и содержание дисциплины «Математика»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 180 часов.

N n/n	Раздел дисциплины	Трудоемкость в часах	Семестр	Номер недели	Виды учебной работы включая самостоятельную работу и трудоемкость (в часах)		
					Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	Элементы матричной алгебры	10	1	1	2	2	6
2	Определители и их свойства, вычисления.	12	1	2	2	4	6
3	Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера, метод Гаусса.	12	1	3	2	2	8
4	Обратная матрица. Решения линейных алгебраических уравнений методом матриц.	10	1	4	2	2	6
5	Ранг матрицы и его применение.	10	1	5	2	4	4
6	Собственные значения и собственные векторы матрицы.	8	1	6	2	2	4
7	Модель Леонтьевна в многоотраслевой экономике.	10	1	7	2	2	6
8	Модель равновесных цен, линейная модель торговли.	8	1	8	2	2	4
9	Типовые задачи и их решение.	16	1	9	2	4	10
10	Вектора. Операции над векторами.	16	1	10,11	4	2	10
11	Приложение векторов в экономических задачах.	14	1	12	2	2	10
12	Уравнения прямых на плоскости.. Угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых.	14	1	13	2	2	10

13	Кривые второго прядка	22	1	14	6	6	10
14 15	Уравнения прямых в пространстве R^3. Угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых	12	1	15	2	2	8
16	Уравнения плоскостей в пространстве R^3. Угол между плоскостями, условие параллельности и перпендикулярности плоскостей	6	1	16	2	2	2
17 18	Линейно зависимые и линейно не зависимые вектора. Линейное пространства. Базис, размерность. Компоненты вектора в базисе.	6	1	17,18	4	2	2

1. 6. **Содержание разделов и тем дисциплины.**

Раздел 1. Основы алгебры.

Тема 1. Матрицы.

Матрицы и операции над ними. Основные свойства операции над матрицами.

Тема 2. Определители.

Определители квадратных матриц: определения и основные свойства. Вычисление определителей..

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений: определение, примеры. Свойства систем уравнений: совместимость, несовместимость, определённость. Частные и общие решения. Эквивалентность систем; элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем. Однородные, неоднородные системы линейных уравнений. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем. Структура общего решения неоднородной системы.

Тема 4. Методы решения систем линейных уравнений.

Решение систем методом Гаусса, по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы.

Тема 5. Теорема о ранге матрицы и ее следствие.

Теорема Кронекера - Капелли. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений. Формула для общего решения неоднородной системы линейных уравнений. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Тема 6. Вектора. Разложение вектора по базису. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Приложения векторов.

Тема 7. Векторное пространство и линейные преобразования.

Векторное пространство: определение и примеры. Линейно зависимые системы векторов и их свойства. Базис линейного пространства. Размерность линейного пространства. Подпространства.

Тема 8. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Использование алгебры матриц. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Линейная модель торговли.

Тема 9. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Угол между прямыми. Уравнение плоскости. Кривые и поверхности второго порядка.

2. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА.

2. 1.Тематический план лекций.

Тема 1. **Матрицы. Основные определения. Действия над матрицами (2 часа)**

План:
1. Матрицы. Основные определения.
2. Действия над матрицами.
3. Умножение матриц. Свойства.
4. Определители. Вычисление определителей.

Задачи:
1. Определение матрицы размера m x n. Виды матриц.
2. Сложение и вычитание матриц. Умножение матриц на число, свойства.
3. Правило умножения матриц.
4. Равенство матриц. Транспонирование матриц.
5. Определитель, его определение, порядок.

Матрицы. Основные определения

Определение. Прямоугольная таблица чисел

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

расположенных в m строк и n столбцов, называется матрицей размера m×n.

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называются ее элементами.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов m = n, то матрица называется квадратной порядка n.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочную диагональ квадратной матрицы.

Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой, а из одного столбца – матрицей-столбцом.

Транспонированием матрицы называется замена ее столбцов (строк) на строки (столбцы) с сохранением их порядка.

Операции над матрицами.

Равенство матриц.

Матрицы A= (a_{ij}) и B= (b_{ij}) одного размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т.е. A=B, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

Суммой двух матриц A и B одного размера $m \times n$ называется матрица C= A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для i= 1,2,…,m; j=1,2,…,n.

Произведением матрицы A на число α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α, **т. е.**

$$\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij}).$$

Умножение матриц

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В этом случае матрицы называются согласованными.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ik} b_{kj}.$$

Определители. Вычисление определителей.

Определителем (детерминантом) n-го порядка, соответствующим данной квадратной матрице A, называется число, символическая запись которого имеет вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определителем 2-го порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}.$$

Определителем 3-го порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{21}.a_{12}.a_{33}.$$

Контрольные вопросы.

1. Определение матрицы размера $m \times n$.
2. Сложение и вычитание матриц, свойства.
3. Умножения матриц на число, свойства.
4. Умножение матриц.
5. Равенство матриц.
6. Транспонирование матриц.
7. Определитель, его определение, порядок.

Тема 2. Свойства определителей. Вычисление определителей высших порядков (2часа).

План: Определители. Свойства.

Минор и алгебраическое дополнение

Вычисление определителей высших порядков.

Задачи: Определитель, его определение, порядок.

Основные свойства определений.

Вычисление определителей высших порядков.

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами.

2. При перестановке элементов двух строк (столбцов) определитель изменит знак, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель равен нулю, если все элементы какой-либо строки (столбца)равны нулю.

4. Определитель с двумя одинаковыми (пропорциональными) строками (столбцами) равен нулю.

5. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

6. Если каждый элемент j столбца (строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из определителя A вычеркиванием элементов ***i*** строки и ***j*** столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их соответствующие алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

С помощью этой формулы вычисляются определители высших порядков.
Свойство 8 называют разложением определителя по элементам ***i***-й строки.

9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т.е. $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

Контрольные вопросы.

1. Определитель, его определение, порядок.
2. Вычисление определителей высших порядков.
3. Метод накопления нулей пи вычислении определителей.
4. Решение систем по формулам Крамера.
5. Условие единственности решения системы уравнений

Тема 3. Решение систем по формулам Крамера (2часа)

План: 1. Вывод формул Крамера.

2. Решения однородных уравнений.

Задачи: Научить решению систем уравнений по формулам Крамера.

Условие единственности решения системы уравнений

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений, когда число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $m = n$. Такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn} = b_n. \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который называется определителем системы.

Заменим в этом определителе j-й столбец на столбец свободных членов B**,** т.е. получим в результате замены другой определитель, который обозначим Δ_{x_j} :

$$\Delta_{x_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера. Пусть Δ определитель матрицы системы, а Δj определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца свободных членов B. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам

$x_j = \dfrac{\Delta_{x_j}}{\Delta}$, j = 1,2, **...** , n. Данные формулы называются *формулами Крамера..*

Контрольные вопросы.

1. Решение систем по формулам Крамера.
2. Условие единственности решения системы уравнений
3. Решение однородных уравнений.

Тема 3. Обратная матрица Решение систем матричным методом (2 часа).

План: .1. Обратная матрица

2. Вычисление обратная матрица

3. Решение систем матричным методом.

4. Решение матричных уравнений.

Задачи:

1. Обратная матрица (определение). Нахождение обратной матрицы.
2. Решение матричных уравнений..

Обратная матрица

Квадратная матрица называется неособенной (невырожденной), если ее определитель отличен от нуля (det A $\neq 0$).

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица А называется особенной (вырожденной).

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице А, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица. Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу.

Обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,

где - $\tilde{A}^T$ присоединенная транспонированная матрица, элементы кото рой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы А.

<u>*Замечание.*</u> Особенная матрица обратной матрицы не имеет.

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Пусть дана система из *n* уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn} = b_n. \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Эта матрица состоит из *n* строк и *n* столбцов и называется матрицей системы.

Введем в рассмотрение две матрицы; матрицу неизвестных X и матрицу свободных членов B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений в матричной форме примет вид $AX = B$. Пусть матрица системы A является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение системы уравнений. $X = A^{-1}B$, где A^{-1} обратная матрица.

Ключевые вопросы:

1. Обратная матрица (определение).
2. Нахождение обратной матрицы.
3. Матричная запись систем линейных уравнений.
4. Решения систем линейных уравнений методом матриц.

Тема 4. Ранг матрицы. Решения m уравнений с n неизвестными (2часа).

План:

1. Ранг матрицы. Вычисления ранга матрицы.
2. Элементарные преобразования.
3. Общий вид систем линейных и неоднородных уравнений.
4. Общий вид систем линейных и однородных уравнений.
5. Определение решения систем линейных уравнений.
6. Совместные и несовместные системы уравнений.

Задачи: Решения систем m уравнений с n неизвестными.

Ранг матрицы и его применение

Пусть дана матрица *A*, содержащая *m* строк и *n* столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ -------------- \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выберем в матрице *A* произвольно *k* строк и *k* столбцов ($k \le m, k \le n$) и выпишем элементы, которые находятся на их пересечениях. Эти элементы образуют квадратную матрицу *k*-го порядка матрицы *A*. Определитель этой матрицы называется минором *k*-го порядка матрицы *A*.

Определение. Рангом матрицы *A* называется наивысший порядок минора матрицы *A*, отличного от нуля.

Обозначается ранг матрицы A символами: $rangA$ или $r(A)$.

Итак, из определения следует, что если $r(A)=k$, то существует минор порядка k матрицы A, отличный от нуля, а все миноры порядка ($k+1$) равны нулю или не существуют.

Имеются несколько способов вычисления ранга матрицы.

Теорема 1. Если минор порядка k матрицы A отличен от нуля, а миноры порядка ($k+1$) окаймляющие рассматриваемый минор, равны нулю, то $r(A)=k$.

Заметим, что минор, который определяет $r(A)$, называется базисным минором матрицы A. Очевидно, что у матрицы может быть несколько базисных миноров. Строки и столбцы, которым принадлежат элементы базисного минора, называют базисными строками и базисными столбцами или линейно-независимыми строками и столбцами.

Теорема 2. Ранги эквивалентных матриц равны.

Определение. Матрицы A и B одинакового размера называются эквивалентными ($A \sim B$), если матрица B получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);

а) перемена мест двух параллельных рядов;

б) умножение элементов ряда на произвольное число $\lambda \neq 0$;

в) прибавление к одному ряду линейной комбинации других, параллельных ему рядов, умноженных на любые константы, отличные от нуля.

Элементарные преобразования меняют матрицу A, но не меняет ее ранга.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к ступенчатому виду, накапливая нули ниже главной диоганали. Тогда число ненулевых строк ровно рангу матрицы.

Ключевые вопросы:

1. Минор матрицы.
2. Ранг матрицы. Методы его нахождения.
3. Элементарные преобразования матриц
4. Эквивалентные матрицы.

5. Общий вид систем линейных и неоднородных уравнений.
6. Общий вид систем линейных и однородных уравнений.
7. Определение решения систем линейных уравнений.
8. Совместные и несовместные системы уравнений.
9. Методы решения систем линейных уравнений.
10. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
11. Теорема Кронекера-Капелли.
12. Условия единственности решения системы линейных уравнений.
13. Общее и частное решение линейных уравнений.

Тема 5. Собственные значения и собственные векторы. Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике (2часа.

План: 1. Собственные значения и собственные векторы.

2. Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике.

Задачи: Рассмотрения экономических задач с применением Модели Леонтьева.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Определение. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы A, соответствующий собственному значению λ, если имеет место равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

В конечномерном пространстве L_n это векторное равенство эквивалентно матричному равенству: $(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}, \ \vec{x} \neq 0$.

Число λ есть собственное число матрицы A тогда и только тогда, когда $\det(A-\lambda E) = 0$, т.е. λ есть корень многочлена $\det(A-\lambda E)$, называемого характеристическим многочленом матрицы A.

Уравнение $\det(A-\lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике.

Эффективное ведение хозяйства предполагает баланс между отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой, – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определенного вида таблицами, называемыми таблицами межотраслевого баланса.

Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в трудах американского экономиста В. Леонтьева в 1936 г. Эта модель основана на алгебре матриц.

Будем предполагать, что рассматривается n отраслей $O_1, O_2, \ldots, O_n$ хозяйства, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной и других отраслей, а другая часть предназначена для потребления вне сферы материального производства.

Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени $[T_0;T_1]$, в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем обозначения:

x_i– общий объем продукции i-й отрасли (ее валовый выпуск);

x_{ij}– объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j;

y_i–объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере (продукт конечного потребления). Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции.

Указанные величины сведем в табл.1.

Таблица 1

Производственное потребление					Конечное потребление $\vec{y}$	Валовой выпуск $\vec{x}$
	Q_1	Q_2	…	Q_n		
Q_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
Q_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
	. . .	. . .	. . .		…	…
Q_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n

Балансовый принцип связи различных отраслей хозяйства состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах.

В самой простой форме (гипотеза линейности) балансовые соотношения имеют вид:т $x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i$; $i=1,2,\ldots,n$.

Уравнения (2.1) называются соотношениями баланса.

Единицы измерения указанных величин могут быть натуральными (тонны, штуки, кубометры и т.д.) или стоимостными.

В зависимости от этого различают натуральный и стоимостный межотраслевой балансы. Для определенности будем иметь в виду стоимостный баланс.

В. Леонтьев на основании анализа экономики США в предвоенный период установил важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются практически неизменными и могут рассматриваться как постоянные числа.

Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.

При $x_j = 1$ (руб.) $a_{ij} = x_{ij}$. Таким образом, a_{ij} – есть стоимость i продукции, вложенной в 1 руб. продукции j-й отрасли.

В силу сказанного сделаем допущение: для выпуска любого объема x_j продукции j-й отрасли необходимо затратить продукцию i-й отрасли в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} –постоянный коэффициент. Иначе говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение называется гипотезой линейности существующей технологии. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых материальных затрат.

Таким образом, коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учесть только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

Итак, согласно гипотезе линейности имеем

$$x_{ij} = a_{ij}x_j; \quad i, j=1, 2, \ldots, n;$$

где x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью;

x_j – объем произведенной j-й отраслью продукции;

a_{ij} – коэффициенты прямых затрат (коэффициент материалоемкости).

Из уравнений (2.1) и (2.2) следует:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n . \end{array}\right\}$$

Введем в рассмотрение технологическую матрицу, или матрицу коэффициентов прямых затрат (коэффициентов материалоемкости) и векторы (матрицы) конечного выпуска и потребления

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система в матричной форме запишется:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}\,.$$

Уравнение называется уравнением линейного межотраслевого баланса.

Система или уравнение) называются экономико-математической моделью межотраслевого баланса или вместе с интерпретацией матрицы А и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – моделью Леонтьева или моделью «затраты - выпуск».

В уравнении приняты следующие обозначения:

$\vec{x}$ – вектор валового выпуска;

$\vec{y}$ – вектор конечного потребления;

А – матрица прямых затрат.

С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов.

1. Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (x_i), можно определить объемы конечной продукции (y_i) :

$$\vec{y} = (E-A)\,\vec{x}.$$

2. Задав величины конечной продукции всех отраслей (y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (x_i):

$$\vec{x} = (E-A)^{-1}\,\vec{y}.$$

3. По отдельным отраслям задаются уровни валовой продукции по другим уровни конечного продукта (в сумме число заданных величин равно n). Требуется определить значения остальных n переменных.

Заметим, что система (2.3) (уравнение (2.4)) имеет особенности, вытекающие из прикладного характера задачи: все элементы матрицы А и векторов $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ должны быть <u>неотрицательными.</u>

<u>Определение.</u> Матрица А≥0 (элементы матрицы А неотрицательны) называется продуктивной, если для <u>любого</u> вектора $\vec{y} \geq 0$ существует решение $\vec{x} \geq 0$ этого уравнения.

<u>Первый критерий продуктивности:</u> матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

<u>Второй критерий продуктивности:</u> матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Пусть А≥ 0 –продуктивная матрица.

<u>Определение</u>. Запасом продуктивности матрицы А называется число $\alpha>0$ такое, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1+\alpha$ продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$- непродуктивна.

Ключевые вопросы:

1. Собственные значения и собственные векторы.
2. Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике В чем заключается экономический смысл элементов матрицы прямых затрат?
3. Запишите уравнение линейного межотраслевого баланса.
4. Запишите решения уравнения линейного межотраслевого баланса.
5. Дайте понятие «продуктивность матрицы прямых затрат».
6. Сформулируйте критерии продуктивности матрицы прямых затрат
7. Дайте понятие нормы добавленной стоимости.103. Нахождения конечного продукта.
8. Нахождения валового продукта

Тема 6 . Модель равновесных цен. Линейная модель торговли (2часа)

План: 1. Модель равновесных цен

2. Линейная модель торговли

Задачи: Рассмотрения экономических задач. .

Модель равновесных цен.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$ матрица прямых затрат. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор валового выпуска; $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$ — вектор цен (p_i – цена единицы продукции i-й отрасли).

От реализации продукции i-я отрасль получит доход $x_i p_i$, который идет на закупку сырья $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \dots + a_{ni}p_b)$, а некоторая его часть составляет добавленную стоимость v_i (стоимость условно чистой продукции).

Имеем равенства $x_i p_i = x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i} + \dots + a_{ni}\,p_n) + v_i$ $\quad i=\overline{1, n}$. (2.7)

Разделив обе части уравнения (2.7) на x_i получим:

$$p_i = a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \dots + a_{ni}\,p_n + V_i, \qquad i=\overline{1, n}, \qquad (2.8)$$

где $V_i = \dfrac{v_i}{x_i}$ −норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции i-й отрасли)

Если ввести в рассмотрение вектор норм добавленной стоимости $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots V_n)$, то система (2.8) в матричной форме примет вид: $\vec{p} = A^T\vec{p} + \vec{V}$ или

$$\vec{p} = \left(E - A^T\right)^{-1} \cdot \vec{V}\ .$$

Уравнение называется моделью равновесных цен.

Линейная модель торговли

Пусть бюджеты n стран, которые обозначим $x_1, x_2, \dots, x_n$, расходуются на покупку товаров.

Обозначим: a_{ij} – доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, если весь бюджет идет на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

(сумма элементов любого столбца равна единице). Матрица А со свойством называется структурной матрицей торговли._Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i-й страны выражается равенством

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Условие бездефицитной торговли (сбалансированной) формируется следующим образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т. е. $p_i \geq x_i$ или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Однако в условиях (2.19) не может быть неравенства. В самом деле, сложим эти неравенства при i от 1 до n. Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j, получим $x_1(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2})+\ldots+x_n(a_{in}+a_{2n}+\ldots+a_{nn})\geq x_1+x_2+\ldots+x_n$ в силу свойств (2.17) $\Rightarrow\ x_1+x_2+\ldots+x_n \geq x_1+x_2+\ldots+x_n \Rightarrow$ возможен лишь знак равенства. Поэтому, условия (2.19) принимают вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases}$$

Введем вектор бюджетов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Тогда система (2.20) запишется $A\vec{x} = \vec{x}$ или $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$. Последнее уравнение означает, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы А, соответствующий, собственному значению λ=1, то есть вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению λ = 1.

Задача 2.5. Дана структурная матрица торговли трех стран

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна в=7000.

Решение. Легко видеть, что элементы матрицы А удовлетворяют условиям теоремы 2. Следовательно, существует собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Из уравнения получим $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$ или $\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & -0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

или $\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}3x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}6x_3 = 0. \end{cases}$

Определитель системы равен нулю, а $\begin{vmatrix} -0,8 & 0,1 \\ 0.4 & -0.5 \end{vmatrix} = 0.36 \neq 0$. Следовательно, ранг системы равен двум. Поэтому, отбросив третье уравнение, имеем:

$$\begin{cases} -0,8x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 = 0, \\ 0,4x_1 - 0,5x_2 + 0,3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k, \\ x_2 = 3k, \quad k \in R. \\ x_3 = 5/3k, \end{cases}$$

Учитывая, что сумма $x_1+x_2+x_3=7000$, определим величину k: $k+3k+5/3k=7000 \Rightarrow k=1235,3$. Поэтому $x_1=1235,3$; $x_2=3705,9$; $x_3=2058,8$. Таким образом, искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле соответственно равны: $x_1=1235,3$; $x_2=3705,9$; $x_3=2058,8$.

Ключевые вопросы:

1. Дайте понятие нормы добавленной стоимости.
2. Запишите уравнение модели равновесных цен.
3. Дайте понятие структурной матрицы торговли.
4. Сформулируйте условие бездефицитной торговли.

.

Тема 8. Векторы и основные линейные операции над ними (2 часа).

План:

1. Векторные величин.
2. Единичный вектор
3. Сложение векторов
4. Вычитание векторов
5. Умножение вектора на скаляр

Цель: Сформировать понятие векторной величины, действий над векторами.

Задачи:

1. Научить выполнять сложение, вычитание, умножение скалярной величины.
2. Научить выполнять операции с векторами, заданными в проекциях.

.

1. Векторные величины

В отличие от скалярной величины, которую можно задать одним числом и отложить на некоторой шкале (отсюда и название – «скалярная») – площадь, объём, температура - векторную величину, или просто вектор, можно задать с помощью числа и некоторого направления (скорость, сила).

Итак, мы можем сказать, что вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ - это величина, которая характеризуется числом, совпадающим с длиной отрезка $\boldsymbol{AB}$, и направлением, совпадающим с направлением луча $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ (рис. 1.)

При этом длину вектора обозначают $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$ или ещё $|\mathbf{a}|$. Длину вектора также называют модулем этого вектора. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют ***равными***, если совпадают их длины и направления.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют ***противоположными***, если их длины равны, а направления противоположны. Заметим, что при этом начало вектора можно поместить в любой точке пространстве. Такие векторы называют ***свободными***.

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым ($\mathbf{0}$). Направление нулевого вектора не определено.

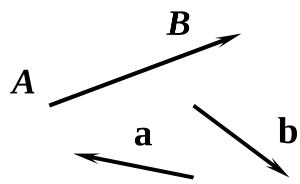


Рис. 1.

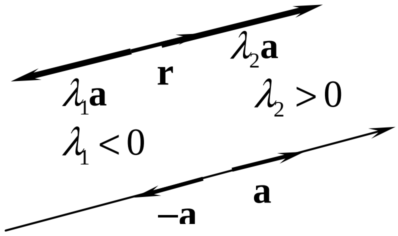


Рис. 2.

2. Умножение вектора на скаляр

Произведением вектора $\mathbf{a}$ ***на число*** λ называется такой вектор $\mathbf{c}$, что $|\mathbf{c}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, а направление его совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если λ>0, и ему противоположно, если λ<0; если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\lambda = 0$, то $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Ясно, что векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ (если $\lambda \neq 0$) можно поместить на одной прямой (рис. 2.. Вектор $(-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$, очевидно, является противоположным вектору $\mathbf{a}$.

Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными***.

3. Единичный вектор

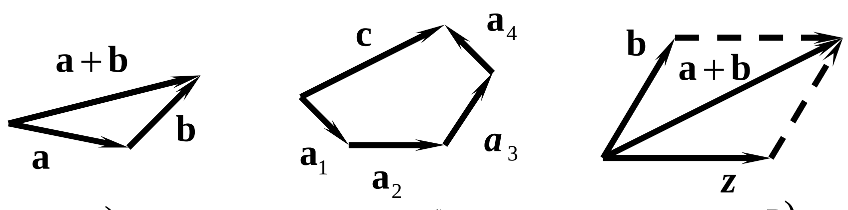
Вектор $\mathbf{a}^0$, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором***, или ***ортом***. Если задан некоторый вектор $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$), то всегда можно подобрать множитель λ, такой, чтобы после умножения на него длина вектора $\lambda\mathbf{a}$ была бы равна единице. Очевидно, что в качестве такого числа нужно взять $\lambda = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}$. Тогда $\mathbf{a}^0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, и при этом $\mathbf{a}^0$ называется единичным вектором, соответствующим вектору $\mathbf{a}$, или ортом вектора $\mathbf{a}$. Очевидно, что направление единичного вектора всегда совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$. Ясно также, что $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0$.

Точно так же единичный вектор $\mathbf{l}^0$, направление которого совпадает с направлением оси $\mathbf{l}$, называется ортом оси $\mathbf{l}$, или её единичным вектором.

4. Сложение векторов

Суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, расположенных так, что начало вектора $\mathbf{b}$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}$, называется вектор $\mathbf{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\mathbf{a}$, а конец – с концом вектора $\boldsymbol{b}$. (правило треугольника – рис. 3, а). При этом пишут: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Аналогично определяется сумма *n* векторов $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \mathbf{c}$.

А именно: суммой называют вектор $\vec{c}$, проведённый из начала первого в конец последнего вектора, при условии, что начало вектора $\overrightarrow{a_2}$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}_1$, начало вектора $\mathbf{a}_3$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}_2$ и т.д. (правило многоугольника – рис.3, б).



а) б) в)

Рис.3.

Если на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить параллелограмм, поместив их начало в общую точку, то сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ будет лежать на диагонали параллелограмма, выходящего из общего начала векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (правило параллелограмма – рис. 3, в).

Свойства:

1) 1) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ - поглощение нулевого вектора

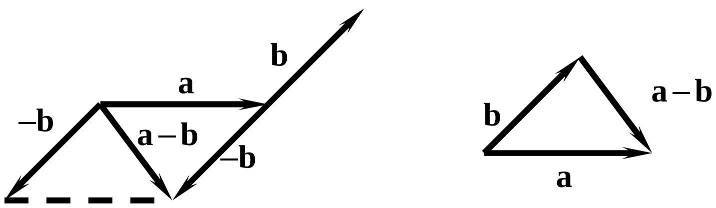
2) 2) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ - перестановочное, или коммутативное

3) 3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ - сочетательное, или ассоциативное.

Для всякого ненулевого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $-\vec{a}$, такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

5. Вычитание векторов

Вектор $\mathbf{c}$ называется разностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, если $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$. Отсюда следует, что $\mathbf{c}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ т.е. вычитание векторов сведено к сложению (рис. 2.1.4). Нетрудно заметить, что разность векторов лежит на второй диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, проведённой из конца вектора $-\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$.



а) б)

Рис. 4.

Ключевые вопросы:

1. Определение вектора, модуль вектора.
2. Правило сложения и вычитания векторов. Произведение вектора на число.
3. Определение единичного вектора.

Тема 9. Линейная зависимость и независимость векторов.Базисы на плоскости и в пространстве. Прямоугольная декартова система коорди

План: Линейная зависимость векторов. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$..

Цель: 1. Ознакомить с линейной зависимостью векторов.

2. С координатами единичного вектора.

Задачи: 1. Научить выполнять операции с векторами, заданными в проекциях.

1. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеется *n* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\boldsymbol{n}$ постоянных коэффициентов $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$. Выражение $\boldsymbol{c}_1\mathbf{a}_1 + \boldsymbol{c}_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_n\mathbf{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$

<u>Определение 1</u>**.** Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что линейная комбинация равна нулю:

<u>Определение 2</u>**.** Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если хотя бы один вектор из этой системы можно выразить в виде линейной комбинации остальных.

<u>Определение 3</u>**.** Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются ***линейно независимыми***, если линейная комбинация $\boldsymbol{c}_1\mathbf{a}_1 + \boldsymbol{c}_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ выполняется лишь при условии когда все $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2 = \ldots = \boldsymbol{c}_n$ =0.

<u>Определение 4</u>***.*** Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются ***линейно независимыми***, если ни один из этих векторов нельзя представить в виде линейной комбинации остальны

<u>Задача 1.</u> Доказать, что коллинеарные векторы линейно зависимы. Действительно, поместим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на одной прямой (рис. 5.), тогда можно найти такое λ, при котором $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ => $1 \cdot \mathbf{a} + (-\lambda) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$, а это и означает, что $\mathbf{a}$ и **b** линейно зависимы

<u>Задача 2.</u> Доказать, что любые три вектора **a**, **b** и **c**, лежащие в плоскости, линейно зависимы.

Действительно, поместим начало всех трёх векторов в общую точку (рис.6.). Очевидно, тогда можно подобрать единственную пару чисел λ_1 и λ_2, так что будет $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$, а что и означает, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы.

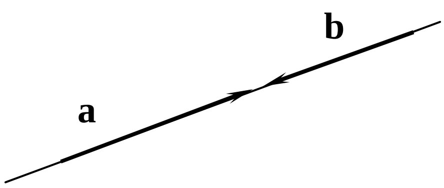


Рис. 5

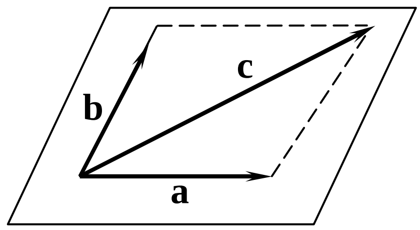


Рис. 6.

<u>Определение 5.</u> Три ненулевых вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Итак, мы показали, что компланарные векторы линейно зависимы.

<u>Задача 3.</u> Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Действительно, можно подобрать, причём единственным образом, такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, что будет $\mathbf{d} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c}$ (рис.7.).

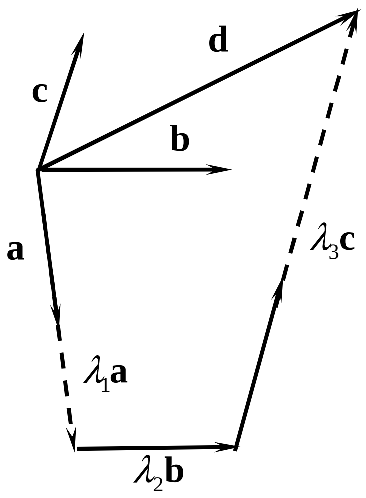


Рис. 7.

2. Базисы на плоскости и в пространстве

Определение 1. Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих данной плоскости, называется ***базисом на этой плоскости***. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ - базис на плоскости, то для любого вектора $\mathbf{a}$, лежащего в этой плоскости, можно найти единственным образом такие числа x_1 и x_2, что будет $\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Числа x_1 и x_2 называются координатами вектора $\mathbf{a}$ в данном базисе

<u>Определение 2.</u> Совокупность любых трёх линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве называется ***базисом в пространстве***. Если $\mathbf{a}$ - произвольный вектор, то всегда можно найти единственным образом числа x_1, x_2, x_3 такие, что будет иметь место представление: $\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении данного вектора по базису называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

3. Прямоугольная декартова система координат

Из всех возможных базисов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) в пространстве выберем такой, чтобы все векторы, входящие в этот базис, были попарно ортогональны (т.е. $(\mathbf{e}_i \hat{,} \mathbf{e}_j) = \dfrac{\pi}{2}$, $(i, j = 1,2,3))$, далее разделим каждый вектор базиса на его длину. Получим базис $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$ Такой базис называется ***ортонормированным.***

<u>Определение</u>***.*** Тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется ***правой***, если при наблюдении с конца вектора $\vec{c}$ кротчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ происходит против движения часовой стрелки.

Ограничимся выбором правой тройки базисных векторов $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$. Поместим далее начало векторов, входящих в выбранной базис, в общую точку 0 и из этой точки проведём оси *Ox, Oy, Oz*, направления которых совпадают с направлениями векторов $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$.

Получим так называемую пространственную ***прямоугольную правую декартову систему координат*** *Oxyz*. Причём принято орты обозначать так: $\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{k}$ (рис.8). Ось *Ox* называется ***осью абсцисс***, ось *Oy* – ***осью ординат***, ось *Oz* – ***осью аппликат***.

Если $\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{0}$, получим прямоугольную правую систему декартовых координат на плоскости – систему *Oxy*.

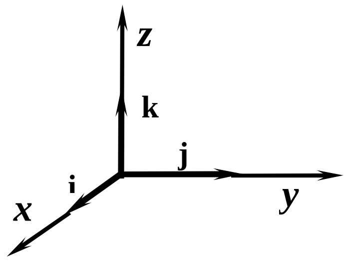


Рис. 8.

3 Проекция вектора на ось. Координаты вектора.Компоненты вектора.

1. Проекция вектора на ось.

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ лежит на некоторой оси l. Направление орта $\mathbf{l}^0$ соответствует направлению оси (Рис. 9.).

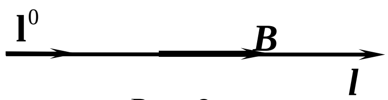


Рис. 9.

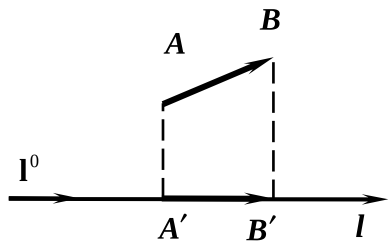


Рис. 10.

<u>Определение 1</u>**.** ***Проекцией вектора***, лежащего на оси, на эту ось называется число, по абсолютной величине равное длине вектора и взятое со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси и со знаком минус, если они противоположны.

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ не лежит на оси l. Из точек A и B опустим перпендикуляры на ось l. Получим соответственно две точки A'и B'.. Вектор $\overrightarrow{A'B'}$называется ***компонентой вектора*** $\overrightarrow{AB}$ по оси l.

<u>Определение 2.</u> ***Проекцией вектора, не лежащего на оси*** l, на эту ось называется проекция его компоненты по оси l на эту же ось. Проекция вектора на ось обычно обозначается так: $np_l\overrightarrow{AB}$. Очевидно, если вектор $\overrightarrow{AB}$ лежит на оси l, то можно написать: $\overrightarrow{AB} = (\mathbf{пр}_l\overrightarrow{AB})\cdot\mathbf{l}^0$

Как было отмечено, векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, лежащие на координатных осях Ox. Oy и Oz, являются компонентами вектора $\vec{a}$ по координатным осям. Обозначим через a_x, a_y и a_z - проекции вектора **a** на координатные оси. Ясно, что $\overrightarrow{OA_1} = a_x\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_y\mathbf{j}$,

$\overrightarrow{OA_3} = a_z\mathbf{k}$, т.к. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$, то $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$..

Такое представление вектора **a** называется разложением его на ***компоненты***, или ***составляющие*** по координатным осям. Нетрудно заметить, что вектор $\vec{a}$ лежит на диагонали параллелепипеда, следовательно, можно найти его длину, т.е. $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Проекции вектора **a** на координатные оси, т.е. числа a_x, a_y и a_z, являются координатами вектора $\vec{a}$ и записываются так: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ или $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

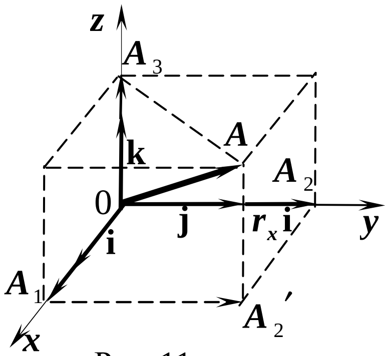


Рис. 11.

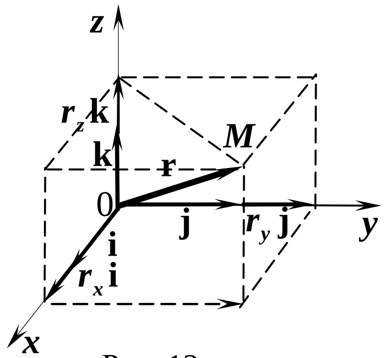


Рис. 12.

Рассмотрим теперь некоторую точку $\boldsymbol{M}$ в пространстве. Вектор $\mathbf{r}=\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ называется радиус-вектором точки $\boldsymbol{M}$ (рис 12.). Проекции $\boldsymbol{r}_x$, $\boldsymbol{r}_y$, $\boldsymbol{r}_z$ радиус-вектора точки $\boldsymbol{M}$ на координатные оси называются координатами точки $\boldsymbol{M}$ в данной системе координат, и при этом их обозначают просто

x, y, z т.е. точка $\boldsymbol{M}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ записывают так: $\boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

Теоремы о проекциях вектора.

Определение 1**. Углом между вектором $\mathbf{a}$ и осью $\boldsymbol{l}$** называется наименьший угол между направлением вектора $\mathbf{a}$ и положительным направлением оси $\boldsymbol{l}$, обозначается $(\widehat{\mathbf{a},\boldsymbol{l}})$.

Теорема 1. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью $\boldsymbol{np}_l\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| \cdot \mathbf{cos}\,\theta$.

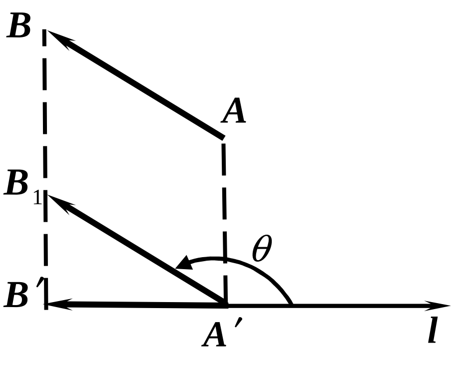


Рис.13.

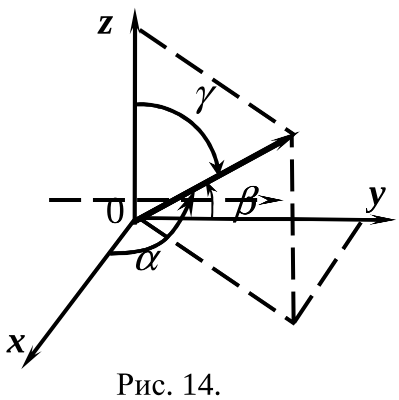


Рис. 14.

Направляющие косинусы вектора

Косинусы углов α, β и γ, которые вектор $\mathbf{a}$ образует с координатными осями *Ox, Oy* и *Oz*, называются направляющими косинусами вектора **a** (Рис.2.4.2). Если $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$ проекции вектора $\mathbf{a}$ на координатные оси, то ясно, что имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} a_x &= |\mathbf{a}|\cdot\cos\alpha \\ a_y &= |\mathbf{a}|\cdot\cos\beta \\ a_z &= |\mathbf{a}|\cdot\cos\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту же ось, т.е. $\boldsymbol{np}_l(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \boldsymbol{np}_l\mathbf{a} + \boldsymbol{np}_l\mathbf{b}$.

Теорема 3. При умножении вектора **а** на число λ его проекция на

также умножается на это число λ т. е. $\boldsymbol{np}_l(\lambda a) = \lambda\ \boldsymbol{np}_l\, a$.

Теорема 4. Для того два вектора были равны, необходимо и достаточно, чтобы их проекции на любую ось были равны.

Ключевые вопросы:

1. Линейная зависимость векторов.
2. Прямоугольный декартов базис.
3. Разложении вектора по ортам : $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$..
4. Направляющие косинуса вектора.

Тема 10. Пространство R^n. Скалярное произведение и его свойства (2часа).

План:

1. Арифметические операции в R^n пространстве.
2. Скалярное произведение и его свойства.

Цель:

Ознакомить понятием R^n пространством..

Задачи:

1. Научить выполнять операции с векторами, заданными в R^n пространстве.
2. Нахождения угла между двумя векторами
3. Механический смысл скалярного произведения

Пространство R^n

Определение 1. Арифметическим n-мерным вектором называется вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,...a_n)$, где $a_1,a_2,...a_n$ -координаты этого вектора.

Определение 2. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с одним и тем же числом кординат: $\vec{a}=(a_1,a_2,...a_n)$ $\vec{b}=(b_1,b_2,...b_n)$ равны если равны их соответствующие координаты

$$a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\quad \dots\quad a_n=b_n.$$

Определение 3. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с одним и тем же числом координат: $\vec{a}+\vec{b}=a_1+b_1,\quad a_2+b_2,\quad \dots\quad a_n+b_n.$

Определение 4. Произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ на число κ называется вектор $\kappa\vec{a} = (\kappa a_1, \kappa a_2, \dots \kappa a_n)$.

Скалярное произведение и его свойства

1. Определение скалярного произведения

Определение. Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \ .$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю.

Свойства скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{\alpha}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{\alpha}$, $\quad \text{пр}_{\vec{b}} \vec{\alpha} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, то скалярное произведения равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots b_n)$

то скалярное произведения равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots.. + a_nb_n$.

Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0\ , \quad \text{то} \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \quad \text{или} \quad a_1b_1 + a_2b_2 + \dots.. + a_nb_n = 0.$$

Угол между двумя векторами. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ненулевые векторы, то, принимая во внимание определение вектора найдем $\cos\varphi$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Механический смысл скалярного произведения

Если $\vec{F}$ - сила, действующая на перемещении $\vec{S}$, то работа A этой силы на указанном перемещении, как известно, равна $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{A}| \cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{A}$,

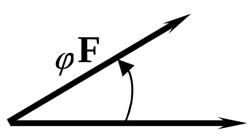


Рис. 15.

Ключевые вопросы:

1. Арифметические операции в R^n пространстве.
2. Скалярное произведение и его свойства.
3. Операции с векторами, заданными в R^n пространстве.
4. Нахождения угола между двумя векторами.
5. Механический смысл скалярного произведения.

Тема 11. Векторным произведением векторов. Смешанное произведения (2часа).

План: Векторным произведением векторов.
Смешанное произведения .
Механический смысл векторного произведения.
Геометрический смысл векторного произведения.

Цель: Научить использовать векторное и смешанное произведения к решению задач

Задачи:

1. Механический смысл скалярного произведения

2. Геометрический смысл векторного произведения.

3. Смешанное произведения .

4. Геометрический смысл смешанного произведения.

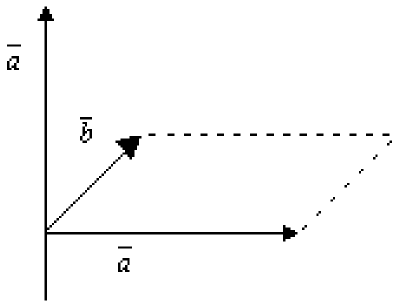
Векторным произведением векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *называют такой вектор* $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$, *что* **1)** $|\overline{c}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin(\overline{a},\overline{b})$

Модуль вектора $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах;

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$;

3) векторы $\overline{a}$, $\overline{c}$, $\overline{b}$ образуют правую - тройку, то есть вектор $\overline{c}$ направлен так, что, если смотреть с конца вектора $\overline{c}$, то кратчайший поворот от $\overline{a}$ *к* $\overline{b}$ совершается против часовой стрелки.

Векторное произведение обозначается $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ или $\overline{c}=[\overline{a},\overline{b}]$.



Свойства векторного произведения:

1. $\overline{a}\times\overline{b} = -[\overline{b}\times\overline{a}]$
2. $\lambda\overline{a}\times\overline{b} = \lambda[\overline{a}\times\overline{b}]$, где λ - скаляр;
3. $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}.$.

Векторное произведение в координатной форме.

Пусть известны координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то есть

$$\overline{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k};$$

$$\overline{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

$$\overline{a}\times\overline{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

правую часть последнего выражения можно записать с помощью определителя третьего порядка:

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Эта формула является удобной записью ***векторного произведения в координатах.***

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a}\times\overline{b} = 0$$

Из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна модулю векторного произведения:

$S = |\overline{a}\times\overline{b}|,$ в частности, площадь **треугольника** $S_\Delta = \dfrac{1}{2}|\overline{a}\times\overline{b}|.$

Одним из физических приложений векторного произведения является нахождение **момента силы,** возникающего при вращении твердого тела, закрепленного в некоторой точке А, под действием силы $\overline{F}$, приложенной в точке В: $\overline{M} = \overline{AB}\times\overline{F}$

Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением *трех векторов называется их векторно-скалярное произ-*

ведение, обозначают:

$$\overline{a}\,\overline{bc} = (\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c})$$

Найдем выражение смешанного произведения через координаты.

Пусть $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1);\quad \overline{b}=(x_2 y_2 z_2)\quad и\quad \overline{c}=(x_3 y_3 z_3).$

Векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ в координатах записывается в виде:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

тогда скалярное произведение $(\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c})$ в координатах имеет вид:

$$(\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c}) = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

Правую часть последнего выражения можно записать с помощью определителя третьего порядка. Итак, ***смешанное произведение в координатах*** имеет следующий вид:

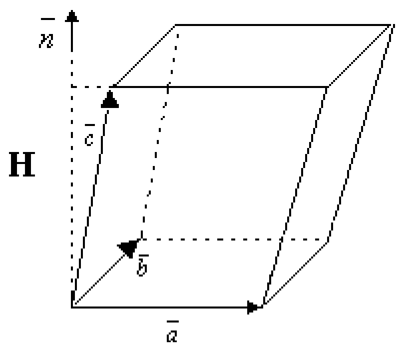
$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения векторов

1) $(\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c});$ ***2)*** $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a};$

3) Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - некомпланарные векторы.

Построим на этих векторах параллелепипед.



Смешанное произведение *трех векторов численно равно* ***объему параллелепипеда,*** *построенного на этих векторах.*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = V$$

Действительно, $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{n},\quad где\quad |\,\overline{n}\,| = |\,\overline{a} \times \overline{b}\,| = |\,\overline{a}\,| \cdot |\,\overline{b}\,| \cdot \sin(\overline{a}, \overline{b}),$ то есть $|\,\overline{n}\,| = S_{ABCD}$, где S_{ABCD} - площадь основания.

Скалярное произведение $(\overline{n}, \overline{c}) = |\,\overline{n}\,| \cdot |\,\overline{c}\,| \cdot \cos(\overline{n}, \overline{c}) = |\,\overline{n}\,| \cdot |\,\overline{c}\,| \cdot \cos a.$ Очевидно, что $|\,\overline{c}\,| \cdot \cos a = H$, где H высота параллелепипеда.

Итак, $(\overline{n}, \overline{c}) = |\,\overline{n}\,| \cdot H = S_{ABCD} \cdot H = V$

или, так как $\overline{n} = \overline{a} \times \overline{b},\quad то\quad (\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c}) = V.$

В частности, **объем пирамиды,** построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\overline{a}\overline{b}\overline{c}$$

4) Для того, чтобы три вектора были ***компланарны,*** необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

Вектора $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ - компланарные, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0.$

Ключевые вопросы:

1. Векторное произведение, его свойства.
2. Геометрический смысл векторного произведение.
3. Физический смысл векторного произведение.
4. Смешанное произведение векторов, его свойства.

Тема 12. Уравнение прямой на плоскости (2часа).

План:

1. Уравнение линии.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Общее уравнение прямой.
4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с угловым коэффициентом.
5. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
6. Расстояние от точки до прямой. Уравнение прямой проходящей через две точки.

Цель: Ознакомление с различными видами прямой и их взаимосвязью.

Задачи:

1. Научить записывать уравнение прямой, по различным данным.
2. Научить строить прямую.
3. Научить решать задачи используя уравнение прямой.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ $\{ By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ $\{ Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу

- A = C = 0, B ≠ 0 – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: 3х – у + С = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.

Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.

Итого: искомое уравнение: 3х – у – 1 = 0.

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С ≠ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \text{ где } \quad a=-\frac{C}{A}; \quad b=-\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4). Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1),$$
$$y-2=x-1,$$
$$x-y+1=0.$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 привести к виду:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B}=k;\quad -\frac{C}{B}=b;\quad т.е.\quad y=kx+b$, то полученное уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

$y - y_o = k(x - x_o)$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$..

Общее уравнение прямой: $3x + 2y - 6 = 0$, где вектор $\overline{N}$ (3, 2) перпендикулярен данной прямой.

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые* $Ax + By + C = 0$ *и* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *параллельны, когда пропорциональны коэффициенты* $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. *Если еще и* $C_1 = \lambda C$, *то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1).$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \qquad tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1; \quad \varphi = \pi/4.$$

Ключевые вопросы:

1. Общий вид уравнения линии на плоскости.
2. Записать уравнение прямой с коэффициентом, указать смысл параметров *k* и *b*
3. Записать общее уравнение прямой, как найти угловой коэффициент *k*.
4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом *k*.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через две точки.
6. Расстояние от точки до прямой.
7. Записать условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Теме13. Окружность. Эллипс. (2часа)

План:
1. Уравнение окружности.
2. Каноническое уравнение эллипса.

Цель:
1. Сформировать понятие о кривых второго порядка на плоскости.
2. Ознакомиться с каноническими уравнениями окружности, эллипса.

Задачи: Научить строить кривые второго порядка с центром симметрии в точке С (0;0) и в точке С $(x_0;y_0)$.

Окружность.

В окружности $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 – 8x + 5y – 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 – 4x + 2{,}5y – 2 = 0$$

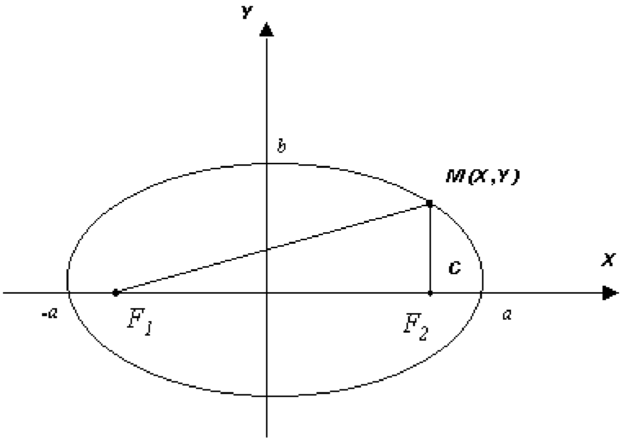
$$x^2 – 4x + 4 –4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

Эллипс.



2.15.1 ***Эллипсом*** называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных есть величина постоянная.

Пусть $M(x,y)$ - произвольная (текущая) точка кривой, F_1 и F_2 -заданные точки. По условию:

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = const.$$

Пусть

$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a;$

$|F_1F_2| = 2c,$ тогда $F_1(-c;0)$; $F_2(c,0)$

Так как $\overline{F_1M}(x+c,y)$ и $\overline{F_2M}(x-c,y)$, то

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$

Выполним преобразования:

$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$

$x + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$

$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$

$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$

Обозначим:

$a^2 - c^2 = b^2$ (a > b, почему ?), тогда $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

или
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, получили ***каноническое уравнение эллипса***

Параметры a и b называются **полуосями (большой и малой) эллипса,** начало координат - **центром кривой.** Точки F_1 (-c, 0) и F_2 (c, 0) называются **фокусами эллипса,** где $c^2 = a^2 - b^2$.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(0 \le \varepsilon < 1)$ или $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ называется **эксцентриситетам эллипса.**

В частности, при ε=0, (a=b), имеем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

или $\boldsymbol{x^2+y^2=a^2}$ - каноническое уравнение **окружности радиуса а** с центром в начале координат (фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром).

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$

1) Координаты нижней вершины: x = 0; y^2 = 16; y = -4
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; c = 3; $F_2(-3; 0)$.

<u>Пример.</u> Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$,
$F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Расстояние между фокусами:

2c = $\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}$ = $\sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2$ = ½

по условию 2a = 2, следовательно a = 1, b = $\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{1-1/2}=\sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1/2}=1$.

Ключевые вопросы:

1. Алгоритм составления уравнения линии по её геометрическим точкам.
2. Окружность: определение, вывод уравнения, построение, уравнение со смещённым центром.
3. Эллипс: определение, вывод канонического уравнения, полуоси, эксцентриситет. Эллипс со смещённым центром.

Тема 14. Гипербола. Парабола.(2часа)

План:

1. Каноническое уравнение эллипса.
2. Каноническое уравнение гиперболы, сопряжённой гиперболы.
3. График дробно – рациональной функции.
4. Каноническое уравнение параболы. График квадратного трёхчлена.

Цель:

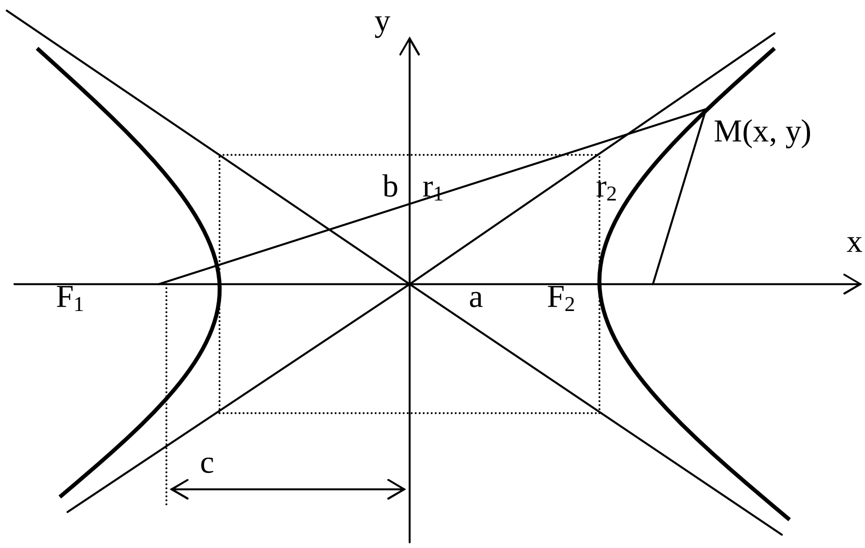
3. Сформировать понятие о кривых второго порядка на плоскости.
4. Ознакомиться с каноническими уравнениями гиперболы, параболы.

Задачи:

1. Научить строить кривые второго порядка с центром симметрии в точке С (0;0) и в точке С $(x_0;y_0)$.
2. Научиться строить части кривых, заданных иррациональным уравнением.

Гипербола.

<u>**Определение.**</u> **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.

Выберем на гиперболе произвольную точку M(x, y). Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

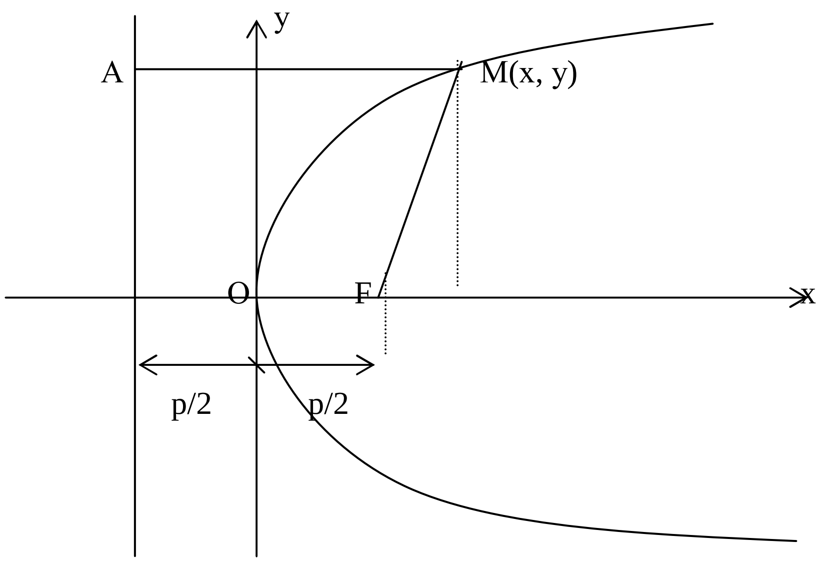
Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Если a = b, e = $\sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

Парабола.

<u>Определение.</u> Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2;

$$MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$$

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ - уравнение “мнимого” эллипса.

3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение гиперболы.

4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.

$y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямы

Ключевые вопросы:

1. Гипербола: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение, асимптоты, эксцентриситет.
2. Уравнение сопряжённой гиперболы.
3. Гипербола со смещённым центром.
4. Парабола: определение, вывод канонического уравнения, свойства.
5. Парабола со смещённой вершиной.

Тема 15.Уравнение плоскости в пространстве.

План:

1. Уравнение плоскости проходящей через точку.

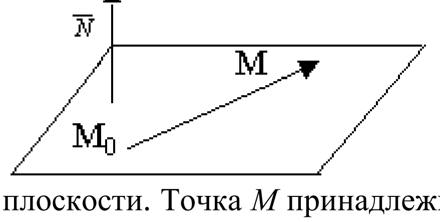
2. Общее уравнение плоскости.

3. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Цель: Сформировать понятие о плоскости в пространсеве..

Задачи: Научить строить плоскости в пространстве..

Постановка задачи. Даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overline{N}$ *(A,B, C)*. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_o, перпендикулярно вектору $\overline{N}$.



M(x, y, z) - текущая точка плоскости. Точка *M* принадлежит искомой плоскости тогда и только тогда, когда вектор $(\overline{M_0M}, \overline{N}) = 0$ то есть, когда скалярное произведение векторов

или в координатной форме

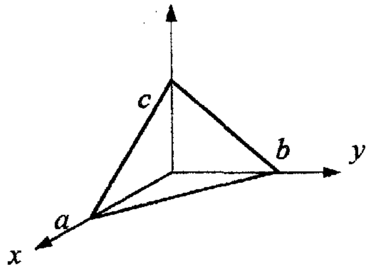
$A(x-y_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

Полученное уравнение является ***уравнением плоскости, проходящей через точку*** $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ ***перпендикулярно вектору*** $\overline{N}$ *(A,B,C).*

Вектор $\overline{N}$ *называется* ***нормальным вектором плоскости.*** Если в последнем уравнении приведем подобные члены, то получим ***общее уравнение плоскости:***

Ax+By+Cz+D=0.

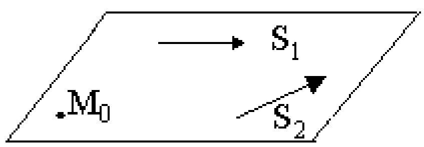
Уравнение плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$



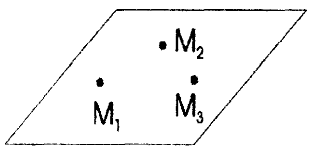
Используя условие компланарности трех векторов, можно записать ***уравнение***

Используя условие компланарности трех векторов, можно записать ***уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и параллельную векторам*** $\overline{S}_1(m_1, n_1, p_1)$ **и** $\overline{S}_2(m_2, n_2, p_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$



Уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Пример 25. Найти уравнение плоскости P_1, проходящей через три точки $M_1(1,0,4)$; $M_2(-2,1,3)$; $M_3(0,7,1)$ и уравнение плоскости P_2, проходящей через точку M_3, причем $\overline{M_1M_2} \perp P_2$

Решение

Уравнение плоскости P_1, проходящей через три точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-4 \\ -2-1 & 1-0 & 3-4 \\ 0-1 & 7-0 & 1-4 \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-4 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Вычисляя определитель, получим 4(x - 1) - 8y - 20(z - 4) == 0;

x-$2y$-$5z$+ 19=0 - уравнение плоскости P_1.

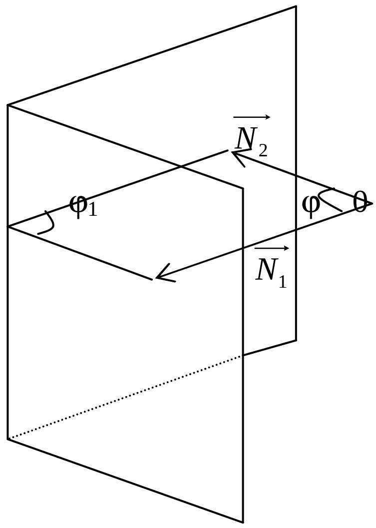
Так как вектор $\overline{M_1M_2}(-3,1,-1)$ и $\overline{M_1M_2} \perp P_2$, $M_3(0,7,1) \in P_2$, то, используя уравнение плоскости, проходящей через точку M_3 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$ найдем уравнение плоскости P_2

$-3(x-0)$ + 1(y-7) - 1(2-1) = O или $3x$-y +z+6=0.

<u>Пример.</u> Дано общее уравнение прямой 12x – 5y – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей:

Даны две пересекающие прямые $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$



Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, т.е.

$\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

$\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2). Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения: $\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}$ или $\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей:
плоскости перпендикулярны, если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;
плоскости параллельны, если: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Ключевые вопросы:

1. Уравнение плоскости проходящей через точку.
2. Общее уравнение плоскости
3. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскосте

Тема 16. Уравнение линии в пространстве (2часа).

План:

1. Уравнение прямой проходящей через точку.
2. Уравнение прямой проходящей через две точки.
3. Параметрические уравнение прямой в пространстве.
3. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Цель: Сформировать понятие прямой в пространстве..

Задачи: Научить анализировать взаимное расположения прямой и плоскости в пространстве.

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению: F(x, y, z) = 0.

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким- либо уравнением.

Пусть F(x, y, z) = 0 и Ф(x, y, z) = 0 – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L.

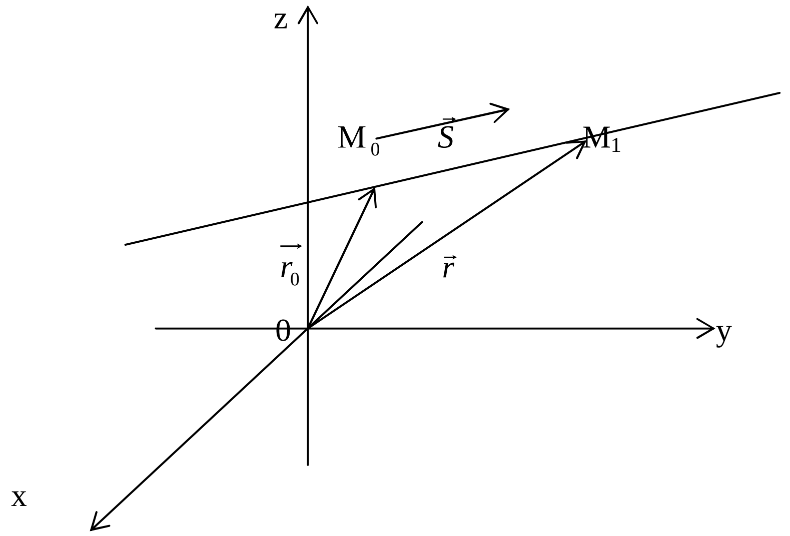
Тогда пару уравнений $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

называется уравнением линии в пространстве.

Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z).



Обозначим радиус- векторы этих точек как $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что

$\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}$t, где t – некоторый параметр. Итого, можно записать: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}$t.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой: $\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}$.

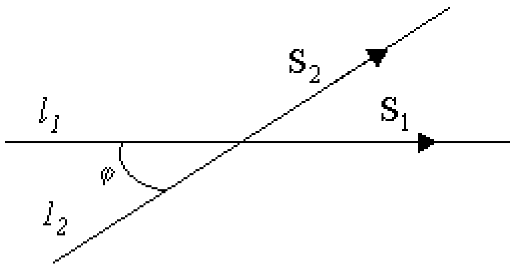
Кроме того, для точки M_1 можно записать: $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$.

Решая совместно эти уравнения, получим: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

Угол между двумя прямыми в пространстве

Углом между ***двумя прямыми*** *l_1 и l_2 называют любой из двух смежных углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным.*



Один из двух смежных углов между прямыми l_1 и l_2 равен углу между направляющими векторами $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1}, \overline{S_2}}{|\overline{S_1}| \cdot |\overline{S_2}|}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

В частности, если $l_1 \perp l_2$, то $\overline{S_1} \perp \overline{S_2}$, тогда $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$, если $l_1 \parallel l_2$, то $\overline{S_1} \parallel \overline{S_2}$, тогда: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Угол между прямой и плоскостью

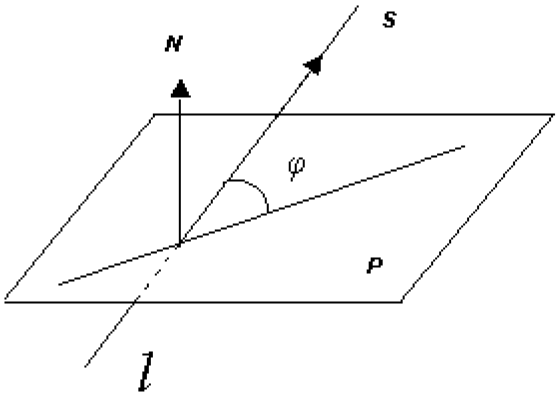
Углом φ между прямой и плоскостью *будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.*

Рассмотрим плоскость

$$p: Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\overline{N}$ *(A, B, C)* - нормальный вектор плоскости;

$\overline{S}$ *(m,* и, *p)* - направляющий вектор прямой *l*.



Пусть *a* - угол между векторами $\overline{N}$ и $\overline{S}$, тогда *a* = 90- *φ,* следовательно: *cosa*=cos(90 - *φ) =sina.*

Из определения скалярного произведения: $\cos a=\dfrac{(\overline{N},\overline{S})}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|}$

или $\sin\varphi=\dfrac{(\overline{N},\overline{S})}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|}$, $\quad \sin\varphi=\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+p^2}}$.

В частности, если *l||p*, то $\overline{S}\perp\overline{N}$ тогда *Am+Bn+Cp=0,*

если $l\perp p$, то $\overline{S}\parallel\overline{N}$, тогда $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

Пример 26. Найти угол между прямыми *l*: *y- 2x + 5* = 0 и l_2*:* 2y+x+3=0

Решение

$\overline{N_1}(1,-2)\perp l_1,$

$\overline{N_2}(2,1)\perp l_2,$ *тогда*

$$\cos(\widehat{\overline{N_1},\overline{N_2}})=\frac{(\overline{N_1},\overline{N_2})}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|}=\frac{1\cdot2-2\cdot1}{\sqrt{1+(-2)^2}\sqrt{2^2+1}}=\frac{0}{\sqrt5\sqrt5}=0$$

Следовательно, $\overline{N_1}\perp\overline{N_2}$, то есть прямые перпендикулярны.

Пример 27. Найти точку пересечения прямой

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{1}$$

с плоскостью p: x+2y+z - 4=0.

Решение

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5t + 1 \\ z = 5t \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости *P*, получим

2t+1+2(t-5)+t+3-4=0,   5t=10 или t=2, тогда x =5, y=-3, z=5.

Точка М (5, -3, 5) является точкой пересечения прямой *l* с плоскостью *P*.

Ключевые вопросы:

1. Уравнение прямой проходящей через точку.
2. Уравнение прямой проходящей через две точки.
3. Параметрические уравнение прямой в пространстве.
3. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Тема 17. Поверхности второго порядка (2часа).

План: 1. Эллиптический цилиндр.
2. Гиперболический цилиндр.
3. Параболический цилиндр.
4. Сфера.
5. Трехосный эллипсоид.
6. Однополостный гиперболоид.
7. Двуполостный гиперболоид.
8. Элептический параболоид.

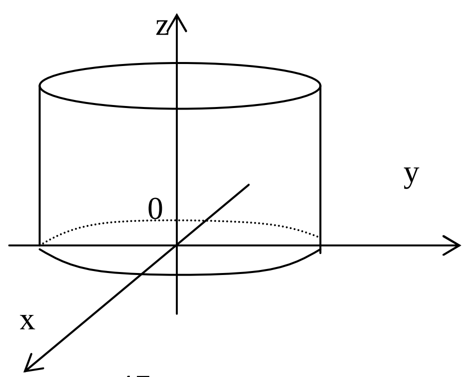
Цель: Сформировать понятие поверхности второго порядка.

Задачи: Научить строить поверхности второго порядка.

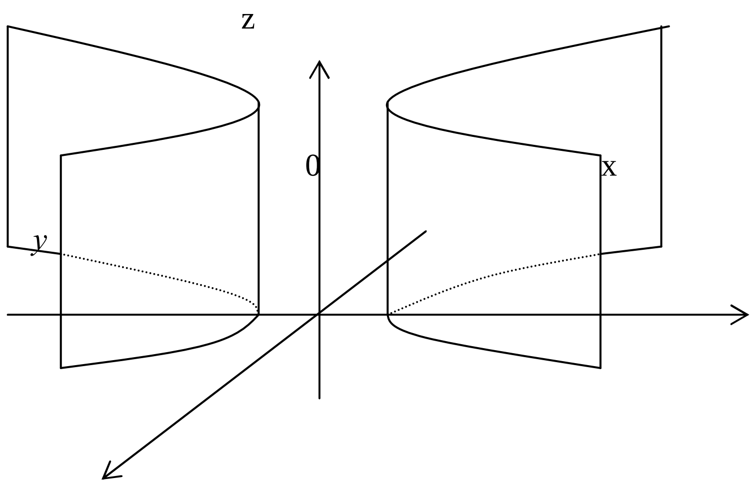
Простейшие поверхности второго порядка:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр.

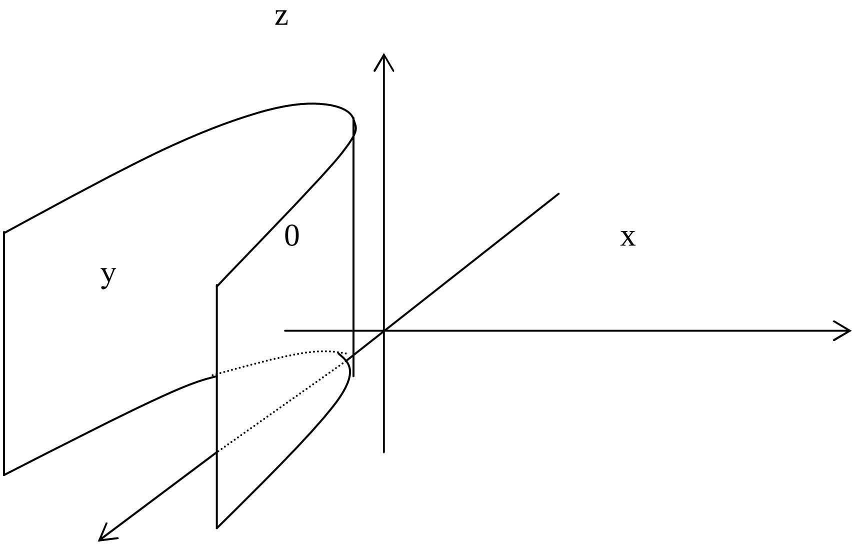
..



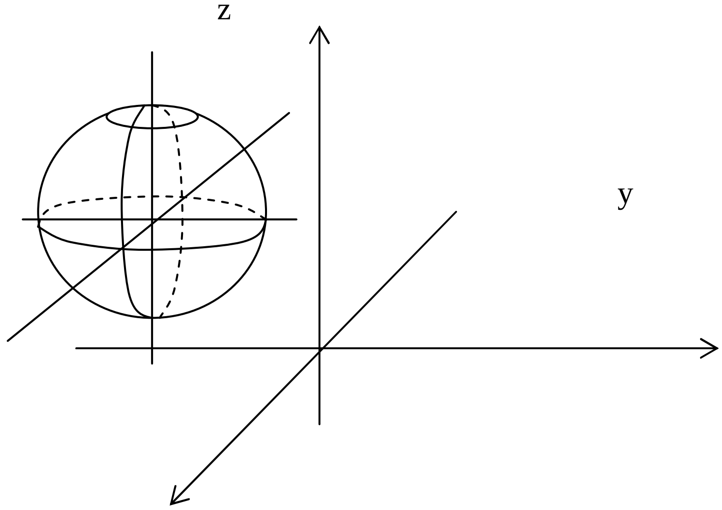
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ – гиперболический цилиндр.



x² = 2p(y-1) **–** параболический цилиндр.

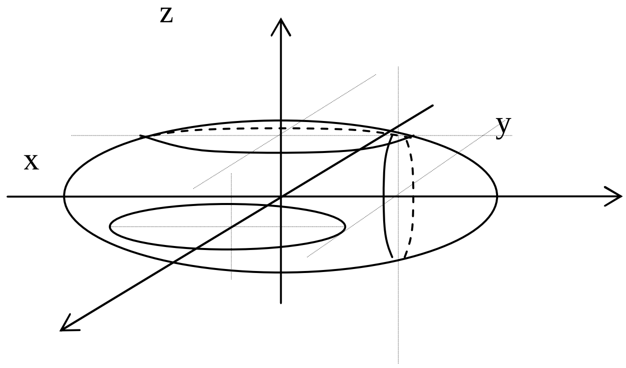


$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$ – сфера.

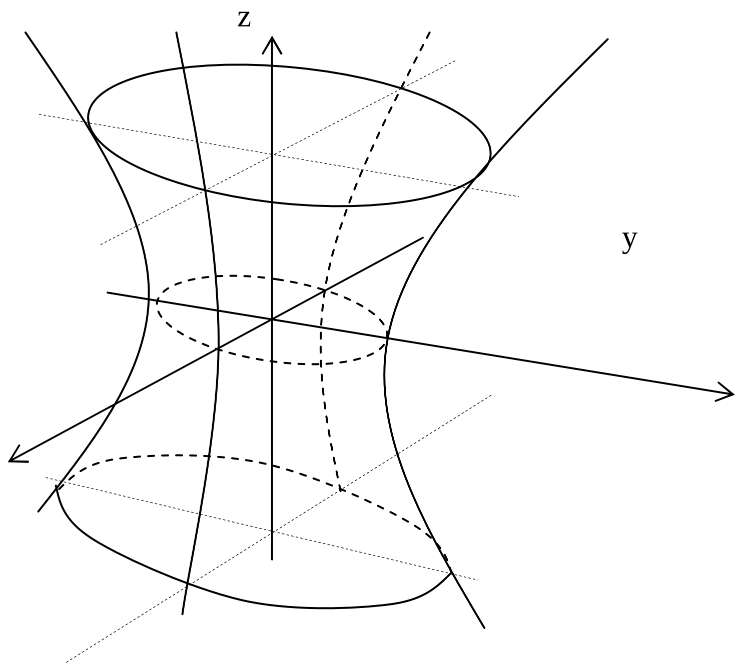


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ – трехосный эллипсоид.

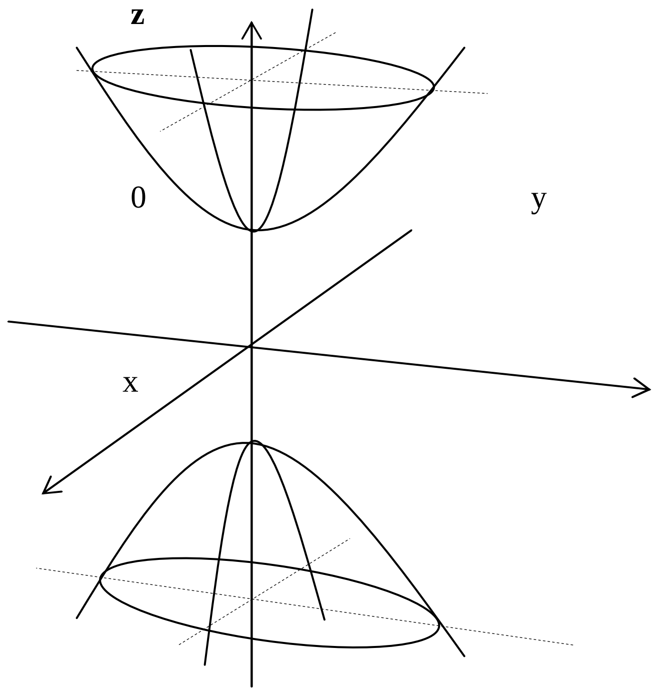
В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осям



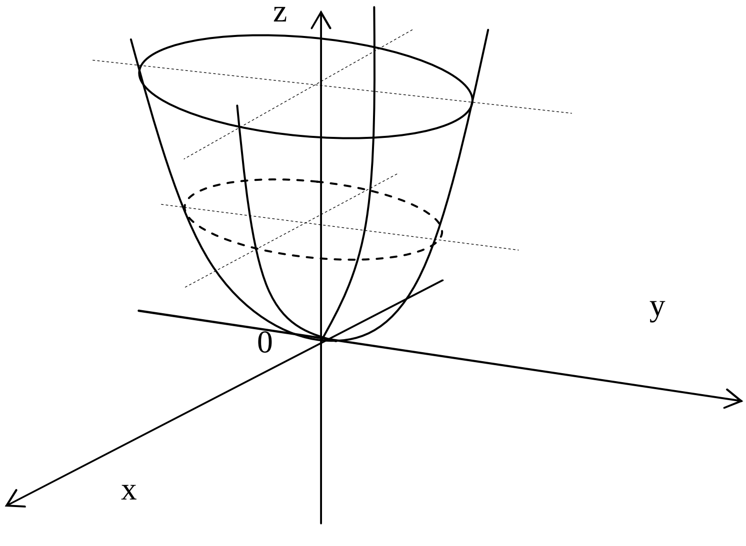
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ – **однополостный гиперболоид:**



Двуполостный гиперболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$

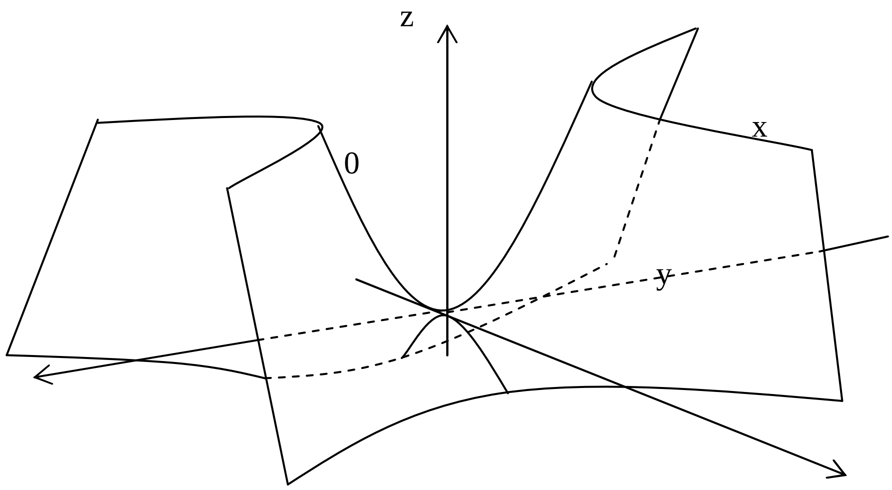


$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$ – **эллиптический параболоид.**

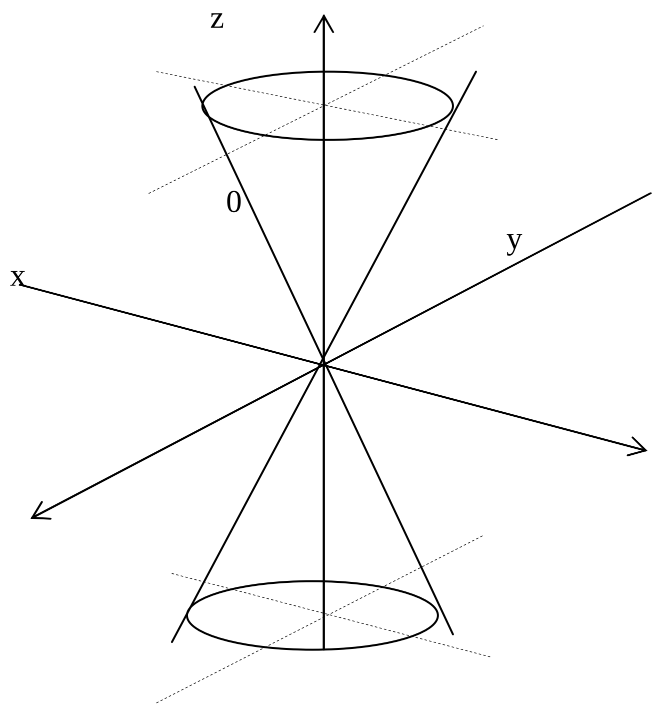


$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$ – **гиперболический параболоид**

.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ – **конус второго порядка.**



Ключевые вопросы:

1. Сфера, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, цилиндры (эллиптический, параболический гиперболический), параболоиды (эллиптический, гиперболический).

Тема 18. Евклидово пространство

План:

1. Скалярное произведение в n-мерного линейном пространстве.
2. Норма вектора.
3. Неравенствам Коши-Буняковского.

Цель:

Расширить понятия в n-мерного вектора в линейном пространстве.

Для ***n-мерного*** линейного пространства введем понятие длины вектора и угла между векторами. Это можно сделать, если определить операцию произведения над векторами.

В линейном пространстве L задано ***скалярное произведение,*** *если каждой паре векторов* $\overline{a},\overline{b} \in L$ *поставлено в соответствие* ***число*** $(\overline{a},\overline{b})$ *такое, что:*

1°. $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a});$

2°. $(\lambda,\overline{a},\overline{b}) = \lambda(\overline{a},\overline{b});$ λ - скаляр;

3°. $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{c}),$ $\overline{c} \in L$

Линейное пространство L называется ***евклидовым*** *пространствам, если в нем определено скалярное произведение и для любого вектора* $\overline{a} \in L$, *его скалярный квадрат будет положительным.*

4°. $(\overline{a},\overline{a}) \geq 0,$ при $(\overline{a},\overline{a}) = 0,$ то *ā=0*

Обозначают n-мерное евклидово пространство R^n.

Таким образом, линейное пространство будет **евклидовым,** если введенное там (как угодно) скалярное произведение векторов будет удовлетворять четырем условиям 1°, 2°, 3°, 4°.

Пусть векторы $\overline{a},\overline{b} \in R^n$ заданы своими координатами

ā=(x₁,x₂,…,xₙ) *и* $\vec{b}$ *=(y₁ , y₂ , …, yₙ).*

Скалярное произведение определяется как **сумма произведений соответствующих координат** перемножаемых векторов

$$(\overline{a},\overline{b}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \quad \text{или} \quad (\overline{a},\overline{b}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Нормой (длиной) вектора ' $\overline{a} \in R^n$

называется число, равное $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$ или

в *координатной форме* $|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Угол между векторами $\overline{a}, \overline{b} \in E^n$ определяется по формуле

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

Покажем, что это определение корректно, то есть выполняется условие $|\cos(\overline{a}, \overline{b})| \leq 1$

Пусть λ - любое действительное число, $\overline{a}, \overline{b} \in R^n$.

Согласно аксиоме 4°, имеем $(\overline{a} - \lambda\overline{b}, \overline{a} - \lambda\overline{b}) \geq 0,$ используя аксиомы 1°-3°, последнее неравенство можно записать в виде

$$(\overline{a}, \overline{a}) - 2\lambda(\overline{a}, \overline{b}) + \lambda^2(\overline{b}, \overline{b}) \geq 0$$

Это квадратное неравенство относительно λ справедливо, если его дискриминант неположительный, то есть,

$$4(\overline{a}, \overline{b})^2 - 4(\overline{b}, \overline{b})(\overline{a}, \overline{a}) \leq 0 \quad \text{или} \quad (\overline{a}, \overline{b})^2 \leq (\overline{a}, \overline{a})(\overline{b}, \overline{b})$$

Итак, доказали, что для любых $\overline{a}, \overline{b} \in E^n$ справедливо неравенство $(\overline{a}, \overline{b})^2 \leq |\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2$

оно называется ***неравенствам Коши-Буняковского.*** Из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$\frac{(\overline{a}, \overline{b})^2}{|\overline{a}|^2 |\overline{b}|^2} \leq 1 \quad \text{или} \quad -1 \leq \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} \leq 1$$

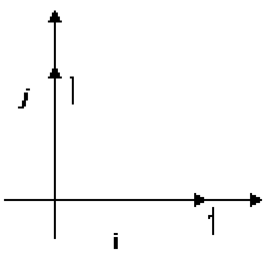
итак, действительно $-1 \leq \cos(\overline{a}, \overline{b}) \leq 1.$

Как уже отмечалось, в n-мерном линейном пространстве базисом является любая система из n линейно независимых векторов. Часто выбирают базис из взаимно перпендикулярных (ортогональных) единичных векторов.

Базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ в пространстве R^n называется **ортонормированным,** если имеет место:

$$(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \begin{cases} 1, & \vec{i} = \vec{j} \\ 0, & \vec{i} \neq \vec{j} \end{cases}.$$

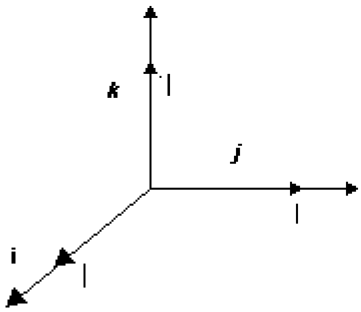
В частности, в пространстве R^2 ортонормированным базисом является система двух векторов, их обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$ *:*



$$\vec{i} \perp \vec{j}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

в пространстве R^3 ортонормированный базис обозначают **i, j, k:**



$$\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k},$$
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1;$$
$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0;$$
$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1.$$

Ключевые вопросы:

1. Скалярное произведение в n-мерного линейном пространстве.
2. Норма вектора.
3. Неравенствам Коши-Буняковского.

3. Методические указания

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы. Определения, выводы, формулы – заучивать наизусть.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при изучении конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать рациональный.. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

Лекции и практические занятия

Студенты повторяют «Адаптивный курс» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (1 ч. лекций и 1 ч. практических занятий в неделю.. После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на повседневную серьезную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию – остается в голове всего крепче.

Образовательные технологии и формы.

1) Методы обучения: проблемная лекция, лекция - визуальная, лекция - пресс-конференция, лекция- беседа, лекция - дискуссия, лекция -консультация.

2) На практических занятиях применяется: работа в группах, решение творческих задач, ведение рабочей тетради. .

Самостоятельная работа подразумевает работу студентов под руководством преподавателем: консультации при усвоении разделов математики, помощь в написании и защите рефератов, подготовка к тематическому тестированию, выступлению на конференциях, олимпиадах и других видов самостоятельной работы.

3) Используются на занятиях материально технические средства: аудитория с компьютером и проектором; интерактивной доской.

3.1. Методические указания к практическим занятиям.

ТЕМА 1. Элементы линейной алгебры.

Практические занятия 1, 2, 3 (6 часов).

Цель: Освоение действий с матрицами и их применением.

Задачи:
1. Изучение определителей, их свойств и вычисление.
2. Изучение действий с матрицами.
3. Овладения практическими навыками решения систем линейных уравнений.

Тематика практических занятий.

1. Вычисление определителей различных порядков. Решение систем по формулам Крамера. (2 часа)

2. Действия над матрицами. Обратная матрица. Решение систем обратной матрицей. (2 часа)
3. Системы однородных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. (2 часа)

Методы вычисления определителей. Решение систем линейных уравнений методом Крамерра.

1. Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; 3) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

3. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 3x+4 & 5 \end{vmatrix} \le 0$; 3) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 14$.

4. Вычислить определители;

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

5. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

1) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1, \\ -4x + 5y = -6, \\ 6x - 3y + 2z = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 0, \\ x - y + 3z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу:
Из Минска в Могилев необходимо перевезти оборудование трех типов: I типа –105 ед., II тип 120 ед., Ill типа –225 ед. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида

транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, приведено в таблице.

.

Таблица 4.2

Тип оборудования	Вид транспорта		
	T_1	T_2	T_3
I	3	2	1
II	4	2	2
III	3	5	4

Записать в математической форме условия перевозки оборудования из Минска в Могилев.

Установить, сколько единиц транспорта каждого вида потребуется для перевозки оборудования из Минска в Могилев.

Действия над матрицами. Решение матричных уравнений.

1. Даны матрицы: А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и В =$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) А+В; 2) 2А; 3) 3В; 4) 2А−3В.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **и** $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$**.** Вычислить: **1)** $A \cdot B$; **2)** $B \cdot A$.

3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислить: 1) A^2; 2) $A \cdot E$; 3) $(A-E)^T$.

4. Выполнить действия с матрицами.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.,

5. Решить задачи.

1) В магазин поступило три вида товаров: 5 холодильников, 10 телевизоров и 8 пылесосов: $X_1 = (5 \quad 10 \quad 8)$; $X_2 = (10 \quad 8 \quad 12)$– вектор поступления тех же товаров в следующем месяце. Найти поступление товаров за два месяца.

2) В два магазина поступило три вида товаров. Количество завозимого товара задано матрицей: $A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 \\ 12 & 15 & 4 \end{pmatrix}$. Вторичное поступление товаров в магазины описывается матрицей: $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 10 & 5 & 12 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазины.

3) Три месяца завоз товаров в магазин был постоянным и описывался матрицей: $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ и четыре месяца описывается матрицей: $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 6 & 10 & 3 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазин.

4) Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий. Количество изделий задано матрицей $A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 15 & 10 \end{pmatrix}$, цена их $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ден. ед. Определить стоимость выпускаемой продукции.

5) Фирма реализует четыре вида товаров в трех районах. Данные об уровне продаж по районам образуют матрицу:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (объемы продаж в тыс. шт.). $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ −соответствующие цены (тыс. руб./тыс. шт). Найти матрицу суммарных продаж в каждом районе.

6) Предприятие выпускает три вида продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, используя два вида сырья – S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей: $A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} S_1 & S_2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} П_1 \\ П_2 \\ П_3 \end{matrix} \end{array}$.

Определить: а) затраты сырья, необходимого для осуществления следующего выпуска товаров: $C = (150;\ 120;\ 80)$; б) стоимость всего затраченного сырья, если стоимость каждого вида сырья (в расчете на единицу) $P = (20\ ;\ 30)$.

6) Найти обратную матрицу: 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

7) Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

8) Решить системы уравнений матричным методом.

1) $\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+4y-z=7, \\ x-\ \ y+3z=4, \\ 3x+3y+2z=11. \end{cases}$

Метод Гаусса. Решение систем m линейных уравнений с n незвестными.

Задача 1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=-3, \\ x_1+x_2+x_3-2x_4=4, \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y-z+\ \ t=7, \\ x-\ \ y+3z+3t=4, \\ 2x+2y+2z+4t=11. \end{cases}$

Задача 2. Найти ранг матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. С помощью теоремы Кронекера - Капелли доказать совместность системы линейных уравнений и решить их:

1) $\begin{cases} x-\ \ y+2z+4t=1, \\ 4x+5y+z+2t=-6, \\ 5x+4y+3z+6t=-5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y+z+3t=0, \\ x+2y+3z+t=0, \\ 3x+3y+4z+4t=0, \\ x-\ \ y-2z+2t=0. \end{cases}$

Приложения матричной алгебры.

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.):

Отрасль	Потребление		Конечный продукт $\vec{y}$	Валовой продукт $\vec{x}$
	O_1	O_2		
O_1	2	18	80	100
O_2	5	15	150	170

Требуется:

1. составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;

2. вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 50 % и 10% соответственно;

3. вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в 2 раза, а отрасли O_2 – на 40%.

Задача 3. Дана матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Зная конечный продукт первой отрасли $y_1 = 80$ и валовой выпуск второй отрасли $x_2 = 100$, найти конечнный продукт второй и валовой выпуск первой отрасли.

Задача 4. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V} = (8 \quad 9)$– вектор норм добавленной стоимости.

Определить:

равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=2, b=3 соответственно.

Задача 5.Дана структурная матрица $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 15000.

Задача 6. Используя балансовые соотношения между элементами таблицы, завершите составление баланса .

Отрасли	O_1	O_2	$\sum$	Y	X
O_1 O_2	150 60	0 140		140	
$\sum$					
V					
X		300			

Контрольные вопросы и задания.

2. Определение матрицы размера $m \times n$.
3. Сложение и вычитание матриц, свойства.

4. Умножения матриц на число, свойства.
5. Умножение матриц.
6. Равенство матриц.
7. Транспонирование матриц.
8. Определитель, его определение, порядок.
9. Основные свойства определителей.
10. Обратная матрица (определение).
11. Нахождение обратной матрицы.
12. Решение матричных уравнений.
13. Минор матрицы. Алгебраическое дополнение.
14. Ранг матрицы.
15. Элементарные преобразования матриц.
16. Эквивалентные матрицы.
17. Общий вид систем линейных неоднородных уравнений.
18. Общий вид систем линейных однородных уравнений.
19. Определение решения систем неоднородных уравнений.
20. Совместные и несовместные системы уравнений.
21. Матричная запись систем линейных уравнений.
22. Методы решения систем линейных уравнений по формулам Крамера и обратной матрицей.
23. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
24. Теорема Кронекера – Капелли.
25. Условия единственности решения систем линейных уравнений.
26. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.

ТЕМА 2. Векторная алгебра.
практические занятия 4, 5, 6 (6 часов)

Цель:

1. Ознакомление с понятием скалярной и векторной величины.
2. Ознакомление с действиями над векторами.

Задачи:

1. Изучение и анализ геометрического сложения, вычитания, умножения на число векторов.
2. Ознакомление с многообразием действий над векторами, заданными в координатах.
3. Приобретение навыков вычисления скалярного, векторного, смешанного произведений.

Тематика практических занятий.

1. Действия над векторами (Сложение, вычитание, умножение на число). Модуль вектора. Разложение вектора по базису, переход от одного базиса к другому (2 часа).
2. Скалярное произведение: определение, свойства, скалярное произведение в декартовых координатах. Физический смысл скалярного произведения.
3. Векторное произведение: определение, свойства. Момент силы. Площадь параллелепипеда (2 часа).
4. Смешанное произведение трех векторов: определение, свойства. Объем параллелепипеда. Условие коллинеарности трех векторов. Контрольная работа (2 часа).

Задача 1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если известны координаты его начала A (4, -3, 5) и конца B(8, 6, -2).

Задача 2. Даны два вектора **a** =4**i** + 3**j** - 5**k** и **b** = 3**i** + 6**j** + 2**k.** Определить проекции на координатные оси следующих векторов; 1) **a + b**;
2) **a - b**; 3) 3**a +2b**; 4) 4**a -3b**.

Задача 3. Даны точки A(6,-1,2) и B(1,2,3).

Найти: 1. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; 2. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

3. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$;

4. Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overrightarrow{AB}$.

Задача 4. Дан вектор $\overrightarrow{AB}$ =6**i**+3**j**+2**k** и координаты точек B (2, 4, 5), C(1,3,7). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$.

Задача 5. Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора **a**=λ**i**+8**j**+2**k** и **b**=4**i**+4**j**+μ**k** коллинеарны.

Задача 6. Даны векторы **a** = 3**i** –4**j** - 2**k** и **b** = **3i** + 2**j** – **k.** Вычислить скалярное произведение.

Задача 7. При каком значении α вектора **a**=6**i**+3**j**+5**k** и **b**=-3**i**+α**j**+2**k** ортогональны.

Задача 8. Вычислить косинус угла, образованного векторами **a**=2**i**-4**j**+4**k** и **b**=-3**i**+2**j**+6**k** .

Задача 9. Дан треугольник ABC. где A(2, 2, 5); B(4, 3, 4); C(5, -1, 4). Найти: периметр его и угол A.

Задача 10. **.** Вычислить, какую работу производит сила **F**=3**i + 2j** - 4**k,** когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора **s** = 6**i** + 3**j** + 5**k.**

Задача 11. Вычислить, какую работу производит сила **F**=3**i + 2j** - 4**k,** когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A(5, 2, 3) в положения B(2, 3, 4).

Задача 12. Даны три силы M =4i + 2j - 5k , N =3i + 2j - 9k , **P** =5**i + 2j** - 9**k** приложенные к точке A(4, 2, 1). **.** Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положения B(1, 3,- 2).

Задача 13. Даны вершины треугольника A(-1, -2, 4); B(-4, -2, 0); C(3, -2, 1). Определить его внутренний угол при вершине B.
Найти $np_{\overline{BC}}\overrightarrow{AB}$ и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$

Задача 14. Даны векторы **a** = 3**i** – **j** - 2**k** и **b** = **i** + 2**j** – **k.** Найти координаты векторного произведения.

Задача 15. Найти площадь треугольника ABC, где A (-7, 4, 0); B (3,2, 8); C (-1,5,6).

Задача 16. Сила **F**=3**i** – **j** - 2**k** приложена к точке M(6, 2, 5). Определить момент этой силы относительно точки A(8, 4, 3).

Задача 17. Сила **F**=2**i** + 2**j** - 9**k** приложена к точке M(4, 2, -3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки A(2, 4, 0).

Задача 18. Даны три силы **M** =2**i + 2j** - 9**k** , **N** =2**i + 2j** - 9**k** , **P** =2**i + 2j** - 9**k** приложенные к точке C(-1, 4, -2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки A(2, 3, -1).

Задача 19. Векторы **a, b, c**, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ $|\vec{c}| = 3$, вычислить **abc**.

Задача 20. Установить**,** компланарны ли векторы **a, b, c**, если;

1) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$;
2) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;

Задача 21. Показать, что заданные четыре точки лежат в одной плоскости: A(1, 2, -1); B(0, 1, 5); C(-1,2, 1); D(2, 1, 3).

Задача 22. Найти объем пирамиды ABCD, где A(2, -1, 1); B(5, 5, 4); C(3,2,-1); D(4,1,3).

Задача 22. В базисе e_1, e_2, e_3 заданы векторы $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $a_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $a_3 = -3\,\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Показать, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ образуют базис. Вектор $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$, выразить в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$

Контрольные вопросы и задания.

1. Понятие n – мерного вектора. Действия с n – мерными векторами.
2. Скалярное произведение n – мерных векторов. Свойства скалярного произведения.
3. Длина вектора, Угол между векторами.
4. Линейная комбинация векторов.
5. Линейная зависимость векторов.
6. Базис и размерность линейного пространства.
7. Ортогональные системы векторов.
8. Декартова система координат.
9. Разложение вектора по единичным векторам: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
10. Скалярное произведение векторов и его свойства.
11. Векторное произведение, его свойства.
12. Смешанное произведение векторов, его свойства.
13. Условия параллельности и перпендикулярности векторов.

ТЕМА 3. Аналитическая геометрия на плоскости (6часов).

Практические занятия 7, 8, 9 (6 часов).

Цель:

1. Ознакомление с задачами аналитической геометрии на плоскости.
2. Освоение приемов и методов преобразования уравнений кривых второго порядка к каноническому виду.

Задачи:

1. Научить строить линии в декартовой системе координат

Тематика практических занятий.

1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнений (2 часа).
2. Кривые второго порядка (2 часа).

Уравнение прямой на плоскости.

1. Написать уравнение прямой:

1) с угловым коэффициентом $\kappa = \dfrac{4}{7}$ и отрезком b=-2 на оси оу;

2) проходящей через точку A(-3; 4) с угловым коэффициентом $\kappa = \dfrac{2}{3}$

3) проходящей через точку M(-2; -6) составляющей с осью 0x угол 45^0;

4) проходящей через точку A(-2; -4) параллельно прямой $3x + 5y - 6 = 0$;

5) проходящей через точку A(-1; 5) перпендикулярно прямой

$2x – y + 2 = 0$;

6) проходящей через две точки A(2; -3), B(5; 2).

2. Преобразовать уравнение $3x– 2y - 6 = 0$ к уравнению прямой в отрезках и построить.

3. Найти точку пересечения прямых $2x – 3y + 11 = 0$ и $x + 5y - 1 = 0$.

4. Построить прямые: $-2x + 3y + 6 = 0$; $x– 2y = 4$; $x + 2 = 0$; $y - 4 = 0$;

$y=2x$; $x=0$; $y=0$.

5. Найти расстояние от точки $M_0(2;-1)$ до прямой $3x-4y+5=0$.

6. Найти угол между прямыми $5x– y + 7 = 0$ и $3x + 2y= 0$.

7. Записать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек A(-1; 4), B(2; 5).

8. На оси абсцисс найти точку, равноудаленные от точек A(2;3) и B(5;6).

9. Лежат ли на одной прямой три данные точки: A(2; 0), B(6; 4), C(11; 9)?

10. Даны вершины треугольника: A(3; 5), B(-5; 3), C(5; -8). Определить уравнение медианы, проведенной из вершины C.

11. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются уравнениями: $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где x – расстояния в сотнях километров, y – транспортные расходы. С какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

Окружность.

1. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус R = 3;

2) окружность проходит через точку A(2; 6) и ее центр совпадает с точкой C(-1; 2);

3) точки A(3; 2) и B(-1; 6) являются концами одного из диаметров окружности;

2. Какие из приведенных ниже уравнений определяют окружности?

Найти центр C радиуса R каждой из них:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$;

3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; 4) $x^2+y^2-4y+3=0$.

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=+\sqrt{9-x^2}$; 2) $x=-\sqrt{4-y^2}$;

3) $y=2+\sqrt{16-x^2}$; 4) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$.

Эллипс.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2с = 8;

3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2с = 10;

2. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$ 2) $x^2+25y^2=25;$

3) $4x^2+9y^2=25;$ 4) $25x^2+9y^2=1.$

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0;$ 2) $y=+\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2};$

3) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2};$ 4) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}.$

Гипербола.

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее оси 2*a* = 10 и 2b = 8;

2) расстояние между фокусами 2с = 10 и ось 2b =8;

3) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2с = 20.

2. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол, записать уравнения асимптот.

1) $16x^2-9y^2=-144;$ 2) $x^2-4y^2=16;$

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9};$ 2) $x=-\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9};$

3) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0.$

4. Составить уравнение осей симметрии равносторонней гиперболы, изобразить ее на

чертеже $y=\frac{3x+4}{x-1}.$

Парабола.

1. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины А и изобразить эти линии на чертеже:

1) $y^2 = 4x - 8;$ 2) $y^2 = 4 - 6x;$ 3) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2;$

4) $y = 4x^2 - 8x + 7;$ 5) $x = 2y^2 - 12y + 14;$ 6) $y = +\sqrt{-x};$

7) $x = +\sqrt{5y};$ 8) $x = -5\sqrt{-y};$ 9) $y = 3 - 4\sqrt{x-1}.$

Контрольные вопросы и задания.

1. Понятие об уравнении линии на плоскости.
2. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
3. Общее уравнение прямой на плоскости.
4. Прямая, проходящая через точку, с заданным угловым коэффициентом.
5. Прямая, проходящая через две точки на плоскости.
6. Угол между прямыми на плоскости.
7. Уравнения кривых второго порядка на плоскости (окружность, эллипс, гипербола, парабола).

ТЕМА 4. Аналитическая геометрия в пространстве.
Практические занятия 7, 8, 9 (6 часов).

Цель:
1. Ознакомление с задачами аналитической геометрии в пространстве.
2. Построение плоскостей в пространстве
3 Ознакомление с различными поверхностями и их построением.

Задачи:
Научить строить плоскости в декартовой системе координат.
Научить строить поверхности в декартовой системе координат.

Тематика практических занятий.

1. Прямая в пространстве. Различные виды уравнений прямой в пространстве .
2. Уравнение плоскости в пространстве. Различные виды уравнений плоскости в пространстве.
3. Поверхности второго порядка.

Уравнение плоскости в пространстве.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1;-2;3\}$.

2. Точка $P(2;-1;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

3. Определить координаты нормального вектора каждой из следующих плоскостей и найти их модули.

1) $2x - y - 2z + 5 = 0;$ 2) $x + 5y - z = 0;$ 3) $3x - 2y - 7 = 0;$

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-1)$ параллельно плоскости $4x-2y+5z-3=0$.

5. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+\sqrt{2}y-z+3=0$;

6. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $3x-y+lz-9=0,\quad 2x+my+2z-3=0;$

2) $mx+3y-2z-1=0,\quad 2x-5y-lz=0.$

7. Определить, при каком значении m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $5x-y+6z-9=0,$ 2) $2x+my+2z-3=0.$

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;-4;2)$ и параллельной плоскости xOz.

Прямая в пространстве.

1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1;1;-3)$ параллельно вектору $\vec{a}=(1;-3;4)$.

2. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;-1;-1)$ и $M_2(3;3;-1)$

3. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки А (3;-1;2) и В(2;1;1).

4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

5. Определить, при каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

6. Построить поверхности:

1) $2x-5y+3z=15$; 2) $2x+3y=6$; 3) $x+z=2$;

4) $z-2=0$; 5) $x^2+z^2=4$; 6) $y^2-x=0$;

7) $y^2-4z-5=0$; 8) $z=x^2+y^2+1$; 9) $z=4-y^2$.

7. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z=x^2+y^2$, $x=2$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) $z=y^2$, $2x+y=4$, $x=0$, $z=0$;

3) $z=4-x^2$, $x+y=2$, $x\ge 0$, $y=0$, $z=0$.

Контрольные вопросы и задания.

1) Уравнение плоскости в пространстве.

2) Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

3)Уравнение прямой в пространстве.
4) Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.
5) Поверхности второго порядка в пространстве.

3. 2. Методические указания по самостоятельной работе студентов.

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Самостоятельная работа. Тест.	2
2	2	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
3	3	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
4	4	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
5	5	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
6	6	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
7	7	Устный опрос. Проверка рабочей тетради.	2

		Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	
8	8	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
9	9	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
10		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	2
11		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	2
12		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	2
13		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных,	2

		самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	
14		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	2
15		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	2
16		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	2
17		Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий	2
18		Подготовка к экзамену	2
Итого			36

3. 3. Контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, зачёт. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

3. 3. Контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, зачёт. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

3.4 Текущий контроль.

Промежуточный контроль знаний студентов осуществляется:

а) проведение самостоятельных и контрольных заданий в аудитории, б) проверка выполнения домашних работ; проведения диктантов;выполнение6м расчетно- графических и индивидуальных работ; д) отчеты по расчетно- графическим работам. при подготовке к работе, выполнении и сдаче каждого задания лабораторной работы, а так же во время контрольных точек при выполнении курсовой работы.

В качестве заключительного контроля знаний студентов в 1 семестре служит зачет. На зачете оцениваются знания студентов по выполненным лабораторным работам. Во 2 семестре заключительным контролем служит экзамен, в 3 семестре – курсовая работа. К экзамену допускаются студенты при выполнении и защите всех лабораторных работ

Домашнее задание 1.

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Предприятие выпускает продукцию трех видов – *А, Б и В*. Уровень выпуска лимитируется ограниченностью ресурсов. Все числовые данные приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Ресурсы	Запас ресурса	Нормы затрат на единицу продукции		
		А	*Б*	*В*

Сырье, кг	24	5	7	4
Материалы, кг	75	10	5	20
Оборудование, ед.	10	5	2	1

Записать в математической форме условия, которым должен удовлетворять план выпуска продукции, предполагая полное использование ресурсов. Найти план выпуска продукции.

3. Решить матричное уравнения $x \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему уравнений матричным методом $\begin{cases} 5x + 8y + 2z = 3, \\ 3x - 2y + z = 8, \\ 2x - y - 2z = -3. \end{cases}$

5. Найти ранг матриц $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. С помощью теоремы Кронекера - Капелли доказать совместность системы линейных уравнений и решить их:

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 11x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.):

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
	O_1	O_2	$\vec{y}$	$\vec{x}$
O_1	10	20	70	100
O_2	20	30	150	200

Требуется:

1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;

2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 40 % и 20% соответственно;

3) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в 1,5 раза, а отрасли

O_2 – на 60%.

4. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V} = (10; \quad 12)$– вектор норм добавленной стоимости.

Определить: равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=4, b=2 соответственно.

5. Дана структурная матрица $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 18000.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3t = 4, \\ x + 2y + z + 2t = 6, \\ 3x + y + 3z + 5t = 10. \end{cases}$

Домашнее задание 2.

Задача 1. Даны точки A(6,-1,2) и B(1,2,3).

Найти: 1. Координаты вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$; 2. Длину вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$;

3. Разложение вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на составляющие;

4. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$;

5. Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Задача 2. Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора **a**=λ**i**+8**j**+2**k** и **b**=4**i**+4**j**+μ**k** коллинеарны.

Задача 3. Даны векторы **a** = 3**i** –4**j** - 2**k** и **b** = **3i** + 2**j – k.** Вычислить скалярное произведение.

Задача 4. При каком значении α вектора **a**=6**i**+3**j**+5**k** и **b**=-3**i**+α**j**+2**k** ортогональны.

Задача 5. Даны три силы **M** =4**i + 2j** - 5**k** , **N** =3**i** + 2**j** - 9**k** , **P** =5**i** + 2**j** - 9**k** приложенные к точке А(4, 2, 1). **.** Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения А в положения В(1, 3,- 2).

Задача 6. Даны три силы **M** =2**i** + 2**j** - 9**k** , **N** =2**i** + 2**j** - 9**k** , **P** =2**i** + 2**j** - 9**k** приложенные к точке С(-1, 4, -2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки А(2, 3, -1).

Задача 7. Даны точки A(4, 2, -1); B(2, 1, 5); C(-1,3, 1); D(1, 1, 3).

Найти:

1) направляющие косинусы и орт вектора $\overline{AB}$;
2) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$;
3) проекцию вектора $\overline{AC}$ на вектор $\overline{AB}$;
4) работу равнодействующей сил $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ при прямолинейном перемещении ее точки приложения из положения A в положение D;
5) единичный вектор, перпендикулярный векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
6) Найти площадь треугольника ABC;
7) показать, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, и $\overline{AD}$ некомпланарны;
8) найти объем тетраэдра, построенного на этих векторах, и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

Домашнее задание 3.

1. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек M_1(-4; 3) и M_2(2; 5).

2. На оси абсцисс найти точку, отстоящую на расстояние d = 10 от точки A(2; 6)3. Даны вершины треугольника A(-1; 3), B(3; -2) и C(5; 3). Составить уравнения: а) стороны AB; б) медианы, проведенной из вершины B;

в) высоты, проведенной из точки A.

4. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x производит по прямой линии, составить ее уравнение, если при x = 3, y = 185, а при x = 5, y = 305. Определить объем производства при x=20.

5. Составить уравнение прямых, проходящих через точку A(-4; 1) параллельно осям координат.

6. Найти угол между прямой 3x + y – 6 = 0 и прямой, проходящей через точку A(-3; 1) и B(3; 3).

7. Дана прямая 2x + 5y – 1 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-1; 3): а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 2x – 3y + 4 = 0 и 3x + y – 5 = 0 перпендикулярно к прямой y = 2x.

9. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) центр окружности совпадает с точкой C(2; -3) и ее радиус R = 7;

2) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой C(6; -8).

10. Какие из приведенных ниже уравнений определяют окружности?

Найти центр C, радиус R каждой из них:

1) $x^2+y^2-2x+4y-4=0;$ 2) $x^2+y^2-6y=0.$

11. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=-\sqrt{25-x^2};$ 2) $x=-2+\sqrt{9-y^2}.$

12. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $9x^2+25y^2=225;$ 2) $16x^2+y^2=16.$

13. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2};$ 2) $x=+\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2};$

3) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0.$

14. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее оси $2a=10$ и $2b=8$;

2) расстояние между фокусами $2c=10$ и ось $2b=8$;

3) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c=20$.

15. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $x^2-4y^2=16;$ 2) $9x^2-64y^2=1.$

16. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями.

Изобразить эти линии на чертеже.

1) $y=+\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25};$ 2) $y=\frac{2x+6}{x+1};$

3) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0.$

17. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины A и изобразить линии на чертеже.

1) $x^2=6y+2;$ 2) $y=-x^2+2x-7;$ 3) $x=-\frac{1}{4}y^2+y;$

4) $y=-3\sqrt{-2x};$ 5) $y=-2\sqrt{x};$ 6) $x=-4+3\sqrt{y+5}.$

18. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точки F(2;2) и от оси Ox.

19. Построить области, ограниченные линиями:

1) $4y = 8x - x^2$; $4y = x + 6$; 2) $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$

Домашнее задание 4.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{5;0;-3\}$.

2. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, 2) $mx - 6y - 6z + 2 = 0$.

4. Определить, при каком значении m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $5x - y + mz - 9 = 0$, 2) $6x + 8y + z - 3 = 0$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z + 1 = 0$.

6. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3;1;-4)$ и $M_2(5;-2;1)$.

7. Составить каноническое уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;0;-3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2;-3;5\}$; 2) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

8. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки: A(0;0;1) и B (0;1;-2).

9. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3;-2;4)$ перпендикулярно плоскости $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

10. Найти острый угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

11. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5},\quad x-3y-z-14=0.$$

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

13. Построить поверхности:

1. $2x+4y+3z=12$; 2. $2x-y=3$; 3. $y+3z=6$;

4. $y^2-z^2+3x^2=0$; 5. $y^2+z^2=9$; 6. $y^2-x=0$.

14. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z=y^2$, $2x+y=4$, $x=0$, $z=0$;

2) $z=1-y^2$, $x+y=1$, $x\ge 0$, $y=0$, $z=0$;

Вариант контрольной работы

1. Даны вершины треугольника A(1; 2), B(3; 4), C(-5; 7):

а) написать уравнения сторон AC, BC;

б) написать уравнение прямой, проходящей через точку B, параллельно прямой AC;

в) уравнение медианы AM;

г) уравнение высоты ВД.

Сделать чертеж.

2. Определить угол между двумя прямыми $5x-y+7=0$ и $3x+2y=0$.

3. Построить линии: 1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

2) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; 3) $y=+2\sqrt{x}$; 4) $y=-3\sqrt{-2x}$;

5) $y^2=8x+4$; 6) $x^2=5y-10$.

Тестовые задания.

Тест по теме «Линейная алгебра.»

1. Векторы $\vec{a}=\{2;4;\alpha;4\}$ и $\vec{b}=\{\alpha;7;2;4\}$ ортогональны при α, равном:

1) 2 ; 2) 8; 3) -11; 4) 11.

2. Векторы $\vec{a}=\{2;\alpha;3;2\}$ и $\vec{b}=\{4;2;\beta;4\}$ коллинеарны при значениях параметров, равных: 1) $\alpha=\frac{2}{3};\ \beta=15$; 3) $\alpha=3;\ \beta=6$;

2) $\alpha=2;\ \beta=5$; 4) $\alpha=1;\ \beta=6$.

3. Детерминант матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ равен: 1) 4; 2) 12; 3) 0; 4) 3.

4. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,то наименьший элемент матрицы $A^T + 3B$ равен: 1) 4; 2) 2; 3) -1; 4) 0 .

5. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то наибольший элемент матрицы $A \cdot B$ равен:

1) 6 ; 2) 7; 3) 1; 4) 14 .

6. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ равен: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

7. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, то сумма элементов матрицы A^{-1} равна:

1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{5}{14}$; 3) 0; 4) 9 .

8. Если $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, то координаты собственного вектора, соответствующего меньшему собственному значению, равны:

1) (1;2); 2) (-1;2); 3) (-2;1); 4) (1:-2).

9. Число свободных неизвестных в системе $\begin{cases} 2x + \ \ y + 4z = 0, \\ -x + 2y - 2z = 0, \\ -5x + 5y - 10z = 0 \end{cases}$

равно: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

10. Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица $C = 2A + B$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

11. Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. Собственные значения собственных векторов линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, могут быть найдены по формуле

1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1+\lambda & 2 \\ 3 & 4+\lambda \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 3-\lambda & 4 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 3+\lambda & 4 \end{vmatrix} = 0$.

13. При умножении матрицы на число:

1) элементы одного из любых столбцов (строк) умножаются на это число.
2) все элементы матрицы умножаются на это число.

14. Матрица − это
1) прямоугольная таблица чисел, заключенная в вертикальные скобки − $\left|a_{ij}\right|$, содержащая m строк и n столбцов;
2) прямоугольная таблица чисел, заключенная в скобки вида, $\left\|a_{ij}\right\|$, либо $\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor$ содержащая некоторое число m строки и n столбцов;
3) прямоугольная таблица чисел, содержащая n строк и n столбцов, заключенных в вертикальные скобки − $\left|a_{ij}\right|$ и равная некоторому числу после вычисления.

15. Определитель − это
1) прямоугольная таблица чисел, заключенная в вертикальные скобки − $\left|a_{ij}\right|$, содержащая m строк и n столбцов;
2) прямоугольная таблица чисел, заключенная в скобки вида, $\left\|a_{ij}\right\|$, $\left(a_{ij}\right)$, либо $\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor$ содержащая некоторое число m строки и n столбцов;
3) квадратная таблица чисел, содержащая n строк и n столбцов, заключенных в вертикальные скобки − $\left|a_{ij}\right|$ и равная некоторому числу после вычисления.

16. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ вычисляется поформуле

1) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$; 2) $a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}$; 3) $a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$; 4) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

17. Минором М $_{ij}$ любого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется…
1) матрица (n-1) –го порядка, получаемая из элементов исходной матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находит-ся элемент a_{ij} ;
2) определитель (n-1) –го порядка, получаемая из элементов исходной матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} ;
3) определитель исходной матрицы, умноженный на элемент a_{ij} .

18. При замене всех строк определителя соответствующими по номеру столбцами, определитель…1) меняет знак; 2) принимает новое числовое значение; 3) не изменяет своего числового значения.

19. Если элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, либо равны друг другу, то определитель равен…
1) удвоенному значению определителя, получаемому при вычеркивании соответствующих столбцов (строк); 2) нулю;
3) сумме произведений элементов этих столбцов (строк) на их алгебраические дополнения.

20. Матрица называется квадратной, если …

1) все элементы столбцов (строк) не равны нулю;
2) число строк не равно числу столбцов;
3) число строк равно числу столбцов.

21. При умножении матрицы на число…
1) все элементы матрицы умножаются на это число;
2) элементы одного и любого столбца (строки) умножаются на это число.

22. При умножении двух матриц должно соблюдаться условие…
1) число строк первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы;
2) число столбцов первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы;
3) число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы;

23. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице А, если она удовлетворяет условию…
1) $A\cdot A^{-1}=1$; 2) $A\cdot A^{-1}=E$, где Е - единичная матрица; 3) $A\cdot A^{-1}=A$.

24. Решение матричного уравнения АХ=В имеет вид…
1) $X=A^{-1}\cdot B$; 2) $X=B\cdot A^{-1}$; 3) $X=A^{-1}\cdot B^{-1}$.

25. Рангом матрицы называется …
1) произведение числа строк m на число столбцов n;
2) число, равное наибольшему из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля; 3) сумме числа строк m и числа столбцов n.

Тест по теме « Аналитическая геометрия»

1. Даны точки $M_1(1;4;4)$ и $M_2(3;-7;5)$. Тогда модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равен
1) 126; 2) $\sqrt{126}$; 3) 14; 4) $\sqrt{!4}$.

2. Векторы $\vec{a}\,(6;2\kappa;-1)$ и $\vec{b}\,(-1;2;4)$ перпендикулярны, если κ равном…
1) 5; 2)2; 3) 10; 4)2,5.

3. Если $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-8\vec{j}+2\vec{k}$, тогда вектор $2\vec{a}+\vec{b}$ равен…
1) $10\vec{i}-12\vec{j}+10\vec{k}$; 2) $7\vec{i}-12\vec{j}+10\vec{k}$; 3) $10\vec{i}-14\vec{j}+10\vec{k}$; 4) $10\vec{i}-12\vec{j}+8\vec{k}$.

4. Даны точки А(8;-6) и В(-5; 4) . Тогда координаты середины отрезка АВ равны…
1) (1,5; -1) 2) (2;1) 3) (1;2) 4)(2;5).

5. Углов0й коэффициент k прямой 7х - 4у +5 3=0 равен…
1) 7; 2) -4; 3) $\frac{7}{4}$; 4) $\frac{4}{7}$.

6. Общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-1;8)$ $M_2(-2;5)$ имеет вид…
1) 3х – у + 11 = 0; 2) 3х + у -11 = 0;
3) 3х + у + 11 = 0; 4) 3х – у - 11 = 0.

7. Прямая 2у+4х=5 параллельна прямым….
1) -2у+3х=4, 2) у=$\frac{3}{2}$х+4, 3) у=-2х+8, 4) 4у+6х=1.

8. Прямая у=3х+5 перпендикулярна прямым …
1) 3у-4х+4=0, 8у+12х-11=0, 3) -3у-2х+5=0, 4) 3у+х+8=0.

9. Расстояние от точки $M_0(4;-5)$ до прямой 3х-4у + 5=0 равно:
1) $\frac{20}{5}$; 2) $\frac{27}{5}$; 3) $\frac{37}{5}$; 4) $\frac{37}{25}$.

10. Центр окружности $x^2+y^2+6x=0$ имеет координаты…
1) (-3; 0); 2) (3;0); 3) (1;2); 4)(2;6).

11. Если $C(-3;6)$ – центр окружности проходящей через точку $A(1;\ 2\ )$, то уравнения этой окружности запишется…

1) $(x-3)^2+(y-6)^2=32$; 2) $(x-3)^2+(y+6)^2=32$;

3) $(x+3)^2+(y-6)^2=32$; 4) $(x+3)^2+(y+6)^2=32$.

12. Сумма полуосей эллипса $4x^2+9y^2=25$ равна…

1) $\frac{20}{5}$; 2) $\frac{25}{6}$; 3) $\frac{37}{5}$; 4) $\frac{37}{25}$.

13. Мнимая полуось гиперболы $x^2-4x-2y^2+8y=8$ равна…

1) 4; 2) 6; 3) 2; 4) $\sqrt{2}$.

14. Уравнение асимптот гиперболы $9x^2-4y^2=36$ имеют вид…

1) $\pm\frac{3}{2}x$; 2) $\pm\frac{2}{3}x$; 3) $\pm\frac{9}{4}x$; 4) $\frac{3}{2}x$.

15. Расстояние от вершины до фокуса параболы $y^2=6x-6$ равно…

1) 4; 2) 2; 3) 1,5; 4) 6.

16. Расстояние от точки $M_0(1;-3\ )$ до центра гиперболы $-x^2+4x+y^2=0$ равно…

1) 4; 2) 6; 3) 10; 4) $\sqrt{10}$.

17. равнение y = $\sqrt{25-x^2}$ определяет…

1) (окружность, y>0); 2) (эллипс, y>0);

3) (парабола, y>0); 4) (гипербола, y>0).

18. Единичный вектор перпендикулярный плоскости 6x-7y +4z-10=0 имеет координаты…

1) (-6; -7;4); 2) (6; 7;4); 3) (6; -7;-4); 4) (6; -7;4).

19. Уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;4\ )$ перпендикулярно плоскости 3x +5y –z+7=0 имеет вид…

1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{1}$; 2) $\frac{x-2}{8}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-4}{1}$;

3) $\frac{x-2}{8}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-4}{-1}$; 4) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-4}{-1}$.

20. Плоскости 2x +m y +4 z - 5 = 0, nx - 8 y – 4z +2 = 0 параллельны при значениях *m* и *n* соответственно равны …

1) (8; -2) 2) (2;1) 3) (3;2) 4)(2;5).

21. При каком значении n плоскости 2x -5y +n z – 3 = 0, x + 3y + 4z + 5 = 0 перпендикулярные…

1) $-\frac{4}{13}$; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{4}{13}$; 4) $-\frac{13}{4}$.

22. При каких значениях *m* и *n* прямые $\frac{x-2}{8}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{1}$ и $\frac{x+3}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{6}$ параллельны… 1) (48; 18) 2) (3;8) 3) (3;6) 4)(2;5).

23. Плоскость 6x+4y - 5=0 параллельна оси… 1) 0x; 2) 0y; 3) 0z.

24. Уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{8}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{1}$ имеет вид…

1) -8x+3y+z-16=0; 2) 8x+3y+z+16=0;

3) 8x+3y+z-10=0; 4) 8x+3y+z-16=0.

3. 4. Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль знаний проводится в виде зачета. К зачету допускаются студенты, получившие положительные оценки по рефератам и предоставившие законченное изделие. Вопросы к экзамену выдаются на первом занятии по дисциплине и полностью соответствуют изучаемому материалу.

Оценка знаний студентов

Нормы оценки знаний предполагают учет индивидуальных особенностей студентов, дифференцированный подход к обучению, проверке знаний, умений.

В устных ответах студентов на экзамене и при защите курсовой работы учитываются: глубина знаний, полнота знаний и владение необходимыми умениями (в объеме полной программы); осознанность и самостоятельность применения знаний и способов учебной деятельности, логичность изложения материала, включая обобщения, выводы (в соответствии с заданным вопросом), соблюдение норм литературной речи.

Критерии оценки

Оценка знаний на экзамене и при защите курсовой работы производится по четырех балльной системе.

Оценка "пять" – материал усвоен в полном объеме; изложен логично; основные умения сформулированы и устойчивы; выводы и обобщения точны.

Оценка "четыре" – в усвоении материала незначительные пробелы, изложение недостаточно систематизированное; отдельные умения недостаточно устойчивы; в выводах и обобщениях допускаются некоторые неточности.

Оценка "три" – в усвоении материала имеются пробелы: материал излагается несистематизированно; отдельные умения недостаточно сформулированы; выводы и обобщения аргументированы слабо; в них допускаются ошибки.

Оценка "два" – основное содержание материала не усвоено, выводов и обобщений нет.

Экзаменационный билет

1. Найти по формулам Крамера x. $\begin{cases} x+2y+3z=1; \\ 2x-y+2z=1; \\ 3x+3y-4z=13. \end{cases}$

2. Дана матрица прямых материальных затрат $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Зная конечный продукт первой отрасли $y_1=80$ и второй $y_2=100$ вычислить объем валового выпуска этих отраслей.

3. Вычислить работу равнодействующей сил $\vec{F}(2;3;-4)$ и $\vec{E}(-3;5;8)$ при прямолинейном перемещении ее точки приложения из положения A(2; 4;5) в положение B(5; -6; 7).

4. Найти уравнения прямой проходящей через точку A(-2; -4) параллельно прямой

$3x + 5y - 6 = 0$;

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 5, -4)$, перпендикулярно данному вектору $\vec{n}(3,2,-1)$.

6. Построить линии: 1) $2x-3y+6=0$, 2) $2y^2 + 8x + 4y = 0$; 3) $x = -\sqrt{4 + y^2}$.

Вопросы к экзамену.

Элементы линейной алгебры.

1. Определение матрицы размера $m \times n$.
2. Сложение и вычитание матриц, свойства.
3. Умножение матрицы на число, свойства.
4. Умножение матриц.
5. Равенство матриц.
6. Транспонирование матриц.
7. Определитель, его определение, порядок определителя..
8. Основные свойства определителей.
9. Обратная матрица (определение).
10. Нахождение обратной матрицы.
11. Решение матричных уравнений.
12. Минор матрицы.
13. Ранг матрицы.
14. Элементарные преобразования матриц.
15. Эквивалентные матрицы.
16. Общий вид систем линейных неоднородных уравнений.
17. Общий вид систем линейных однородных уравнений.
18. Определение решения систем линейных уравнений.
19. Совместные и несовместные системы уравнений.
20. Матричная запись систем линейных уравнений.
21. Методы решения систем линейных уравнений по формулам Крамера и обратной матрицей.
22. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
23. Теорема Кронекера – Капелли.
24. Условия единственности решения систем линейных уравнений.
25. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.
26. Решение систем линейных уравнений, когда число уравнений и неизвестных не совпадают.
27. Модель Леонтьева.
28. Модель равновесных цен.
29. Линейная модель торговли.

Вектора

1. Понятие n - мерного вектора. Действия с n-мерными векторами.
2. Скалярное произведение n-мерных векторов. Свойства скалярного произведения.
3. Длина вектора. Угол между векторами.
4. Линейная комбинация векторов.
5. Линейная зависимость векторов.
6. Базис и размерность линейного пространства.

7. Ортогональные системы векторов.
8. Ортонормированная система векторов. Декартова система координат.
9. Разложение вектора по единичным векторам.
10. Векторное произведение, его свойства.
11. Смешанное произведение векторов, его свойства.

Аналитическая геометрия.

1. Понятие об уравнении линии.
2. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффециентом. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
3. Общее уравнение прямой на плоскости.
4. Прямая, проходящая через точку с угловым коэффициентом.
5. Прямая, проходящая и через две точки на плоскости.
6. Угол между прямыми на плоскости.
7. Уравнения кривых второго порядка на плоскости.
8. Уравнение плоскости в пространстве.
9. Уравнение прямой в пространстве.
10. Взаимное расположения прямой и плоскости в пространстве.

4. Интерактивные технологии, используемые в образовательном процессе.

Индивидуальные методы обучения применяются на практических занятиях при выполнении индивидуальных заданий, при подготовке рефератов, сообщений – темы 5,9. Активные формы работы используются на практических (семинарских) занятиях:
- деловые игры: тема 4 – разработка группой студентов решения экономических задач. Например: преподаватель консультирует процесс.

Коллективные формы работы на занятиях способствуют овладению культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, формируют у обучающегося готовность к кооперации с коллегами, бесконфликтной работе в коллективе, готовность к организации и выполнению проектов в профессиональной деятельности.

5. Оценочные средства аттестации по итогам освоения дисциплины.

Результативность работы студентов обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает:
− устный или письменный опрос студентов на практических занятиях;
− проверку выполнения текущих заданий;
− самостоятельные работы;
− контрольные работы;
− выполнение и защита типовых расчетов (РГР);
− проведение коллоквиумов;
− зачеты и экзамены.

Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с краткого (10-15 мин.) опроса студентов по теоретическому материалу и выяснения вопросов по текущим заданиям. На лекциях и практических занятиях проводятся мини - контрольные работы. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами. Данная программа предусматривает проведение в течение семестра двух рубежных контрольных работ и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнением индивидуального задания осуществляется в два этапа: проверка письменных отчётов; защита задания в устной или письменной форме.

Выполнение каждого индивидуального задания требует не менее 10 часов самостоятельной работы студентов. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждым обучающимся, своевременного выявления и устранения отставаний и ошибок.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины.
Рефераты студенты выполняют по усмотрению преподавателя.
Студенты заочной формы обучения текущий контроль усвоения материала осуществляют самостоятельно по контрольным вопросам и заданиям для упражнений

6.1 **Положение о рейтинговой системе оценки успеваемости студентов кафедры общей математики и информатики**

Рейтинговая система оценки успеваемости студентов по кафедре ОМиИ является одной из форм контроля текущей успеваемости обучаемых. Она предусматривает еженедельный мониторинг и оценку в баллах учебной активности и уровня знаний по дисциплине.

1. По этой системе в баллах оценивается уровень следующих видов учебной деятельности студентов:
   - активность на практических занятиях;
   - экспресс тестирования на лекциях;
   - расчетно-графическая работа;
   - контрольная (самостоятельная) работа;
   - коллоквиум;
   - лабораторная работа.

Указанные виды учебной деятельности имеют следующее содержание.

Активность на практических занятиях. Оценивается учебная активность и самостоятельность работы студентов.

Экспресс-тестирование на лекциях. Систематически проводится на лекциях с целью проверки усвоения текущего теоретического материала. Заключается в ответе на один теоретический вопрос или решение одной простейшей задачи. Проводится письменно, как правило, в течение 5-6 минут.

Контрольная (самостоятельная) аудиторная работа. Проводится письменно, с целью оперативного контроля степени усвоения изученного материала, например, базовых положений отдельных дидактических единиц.

Расчетно-графическая работа. РГР содержит задачи, решение которых требует применения типового арсенала вычислительных приемов, усвоенных при изучении соответствующих дидактических единиц. РГР зависит от содержания и вычислительной сложности дидактической единицы.

С целью выявления качества усвоения изученного материала вводится процедура **«Защита РГР».**

Коллоквиум. проводится письменно, с целью доэкзаменационной оценки уровня теоретических знаний и практических навыков.

Лабораторная работа. Проводится по темам, требующим применения вычислительных методов.

2. Рейтинговая оценка студента по дисциплине складывается из оценки за работу в семестре максимально **60 баллов** и экзаменационной оценки – максимально **40 балов**. Таким образом, максимально возможное количество баллов, которыми оценивается успеваемость за семестр по дисциплинам кафедры ОМиИ, равно **100**.

3. При пропуске рейтингового теста или контрольной работы в течении семестра по документально подтвержденной уважительной причине студент имеет право написать их в дни консультаций преподавателя группы. В случае пропуска теста по неуважительной причине или при неудовлетворительной оценке за тест (менее половины от максимально возможного балла), переписывание теста возможно только в течение последней недели семестра (не более двух встреч с преподавателем на все тесты и контрольные работы). Баллы, полученные студентом в таком случае, учитываются с коэффициентом **0,8.**
4. Студент, активно участвовавший в учебном процессе (доклады, рефераты, выступления на олимпиадах и конференциях) может быть поощрен лектором потока или заведующим кафедрой дополнительными баллами (как правило, не более 5 баллов за семестр).
5. Минимальное количество баллов за работу в семестре, необходимое для получения студентом допуска на экзамен, равно **30** баллов (половина баллов от максимального балла за работу в семестре).

Минимальное количество баллов за выполнение экзаменационной работы, необходимое для получения оценки:

«удовлетворительно» **– 15 баллов**;

«хорошо» – **20 баллов**;

«отлично» **– 30 баллов**.

6. В течении семестра студенты выполняют рейтинговые мероприятия (см. приложение).
7. Распределение модульных баллов:

Соответствие итогового рейтинга студента и традиционных оценок устанавливается по следующей шкале:

Баллы (%)	Оценка
0-50	Неудовлетворительно
51-75	Удовлетворительно
76-90	Хорошо
91-100	Отлично

8. Студент, набравший в семестре **менее 30 баллов**, сдает экзамен по дисциплине в два этапа: предварительный и основной.

8.1. **Предварительный этап экзамена**

Предварительный этап проходит в день сдачи экзамена своей группы. На нем студент выполняет практическое экзаменационное задание по материалу, изученному в семестре и вошедшему в тесты, контрольные и домашние работы по данной дисциплине. Это практическое задание оценивается в **20** баллов. Предварительный экзамен считается сданным при условии набора на нем **10 и более** баллов. Результат **сданного** предварительного экзамена

суммируется с семестровым рейтингом, а студент со своим новым рейтингом допускается к основному экзамену. При наборе студентом на предварительном этапе менее **10 баллов** экзамен считается **не сданным** и его результат **не добавляется** в итоговый рейтинг. В любом из указанных случаев после предварительного этапа экзамена в ведомость студенту выставляется оценка «**Неудовлетворительно**», а в графу «Суммарный балл» проставляется рейтинг с учетом результата предварительного экзамена.

8.2. **Основной этап экзамена**

Для студентов, успешно сдавших предварительный экзамен, основной экзамен проводиться в установленный на кафедре день пересдач.

Как исключение, студент, имевший семестровый рейтинг **в диапазоне от 20 до 30 баллов** и успешно сдавший предварительный этап экзамена (т.е. набравший на нем 10 баллов и более), с разрешения ответственного экзаменатора, назначенного на экзамен, может быть допущен к основному экзамену в день сдачи предварительного экзамена (т.е. со своей группой).

Студенты, имеющее семестровый рейтинг **в диапазоне от 10 до 20 баллов** и успешно преодолевшие предварительный этап (10 баллов и более), сдают основной экзамен только в день пересдач.

Студенты, набравшие в семестре **менее 10 баллов** и успешно прошедшие предварительный этап экзамена, допускается к сдаче основного экзамена **только по назначению заведующего кафедрой или заместителя по учебной работе**.

Замечание. Руководству кафедры сдаются экзаменационные работы:

- предварительного экзамена (10 и более баллов) – в день его сдачи студентом;
- основного экзамена (для прошедших предварительный экзамен) – в день основного экзамена.

9. Для дисциплин с зачетом:

9.1. Минимальное значение рейтинговой оценки, набранной студентом по результатам текущего контроля по всем видам занятий, при которой студент допускается к сдаче зачета, составляет **40 баллов**.

9.2. Если к моменту проведения зачета студент набирает 51 и более баллов, они могут быть выставлены ему в виде поощрения в ведомость и в зачетную книжку без процедуры принятия зачета. Выставление баллов производится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплине.

Формы контроля по разделам программы представлены в таблице.

6. Рейтинг – план дисциплины

Приложение (1 семестр)

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4	
	Вид работы	Линейная алгебра	Вектора	Аналитическая геометрия на плоскости	Аналиточеская геометрия в пространстве	$\sum$
1	Контрольная работа	5	5	5		15
2	Тест	5	5	5		15
3	Расчетно-графическая работа	5			5	10
4	Коллоквиум	5	5	5		15
5	Домашние задания	1	1	1	1	5

Всего 60

Оценка контрольных работа	Тест 25 заданий	Расчетно-графическая работа	Коллоквиум
«3» − 3 б	9 – 12 − 2 б	Сдача в срок − 2 б	«3» − 3 б
«4» − 4 б	13 – 16 − 3 б	Защита «3» − 1 б	«4» − 4 б
«5» - 5 б	17- 22 - 4 б	«4» - 2 б	«5» − 5 б
	23 – 25 - 5 б		

7. Учебно - методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература:

1. Андронов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. / А. М. Андронов, Е.А. Копытов, Л.Я. Гринглаз. - СПб. : Питер , 2004. - 461 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: Учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / В.Е. Гмурман. - М. : Высш. шк., 2003, 2005, 2006,2009 - 480 с.
3. Красс, М. С. Математика для экономистов [Текст]: учеб. пособие: рек. УМО / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.:Питер, 2005, 2006, 2008, 2009, 2010. - 464 с.

Дополнительная литература:

2. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. : рек. Мин. обр. РФ / Н. Ш. Кремер. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004, 2006 . - 574 с.

3. Бочаров, П.П. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. - М. : Физматлит, 2005. - 296 с.

1. Высшая математика в упражнениях и задачах. [Текст]: учебное пособ: В2ч/П.Е. Данко [и др.]. -7-е изд испр. −М.; Оникс: Мир и Образование, 2008.ч. 1−2008.−368с.

4. Кочетков, Е.С. Теория вероятностей в задачах и примерах [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская. - М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2005. - 480 с.

5. Соколов, Г.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО / Г. А. Соколов, Н. А. Чистякова. - М. : Физматлит, 2005. - 247 с.

6. Шведов, А.С. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : [учеб. пособие] / А. С. Шведов. - М. : ГУ ВШЭ, 2005. - 254 с.
7. Семенчин, Е.А. Теория вероятностей в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО / Е. А. Семенчин. - СПб. : Лань, 2007. - 352 с.
8. Большакова, Л.В. Теория вероятностей для экономистов [Текст] : учеб. пособие : рек. УМО / Л.В. Большакова. - М.: Финансы и статистика, 2009. - 208 с.
9. Боровков, А.А. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие : рек. УМО / А.А. Боровков. - М. :Либроком, 2009. - 652 с.
10. Балдин, К.В. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - М. : Дашков и К, 2010. - 473 с.
11. Хрущева, И.В. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие / И. В. Хрущева. - СПб. : Лань, 2009. - 300 с

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http:// iqlib.ru	Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам, отдельным темам и отраслям знаний.
2	Электронная библиотечная система «Университетская библиотека - online»	ЭБС по тематике охватывает всю область гуманитарных знаний и предназначена для использования в процессе обучения в высшей школе.

8. Материально – техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием

Содержание