

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

Амурский государственный университет

Е.Л. Еремин, И.Е. Еремин, В.В. Еремина

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

(линеаризованные уравнения динамики)

Учебное пособие

**Благовещенск
2005**

УДК 658.5.011.56
ББК 32.965+22.18
Е70

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Амурского государственного
университета

Еремин Е.Л., Еремин И.Е., Еремина В.В. Моделирование систем (линеаризованные уравнения динамики). Благовещенск: Изд-во Амурского гос. ун-та, 2005. 109 с.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов специальностей 230102 (автоматизированные системы обработки информации и управления) и 230201 (информационные системы и технологии), изучающих общеобразовательную дисциплину "моделирование систем" ГОС ВПО. Пособие содержит методические материалы по теории систем, связанные с математическим и имитационным моделированием непрерывных линейных объектов и процессов.

Рецензенты:

Н.С. Костюков, профессор кафедры материаловедения и лазерных технологий АмГУ, доктор технических наук;

Е.Ф. Алутина, заведующая кафедрой информатики БГГУ, доцент, кандидат физико-математических наук.

© Амурский государственный университет, 2005
© Еремин Е.Л., Еремин И.Е., Еремина В.В.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	6
1.1. Линеаризация дифференциальных уравнений динамики	6
1.2. Преобразования Лапласа и передаточные функции	11
1.3. Временные отклики непрерывных систем	17
1.4. Описание непрерывных систем в частотной области	19
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ ...	21
2.1. Манипуляционный робот	21
2.2. Центробежный маятник	26
2.3. Ресивер	30
2.4. Гидравлический сервомотор	32
2.5. Длинный бьеф	36
2.6. Печь окисления серы	38
2.7. Двигатель постоянного тока	41
2.8. Асинхронный двухфазный двигатель	43
ГЛАВА 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ПАКЕТ MATLAB	45
3.1. Основы работы с пакетом MATLAB	46
3.1. Решатель обыкновенных дифференциальных уравнений	52
3.2. Инструмент LTI Viewer	56
ГЛАВА 4. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	61
4.1. Моделирование процесса упругой электронной поляризации диэлектриков	61
4.2. Моделирование длинноволнового спектра оптического показа- теля преломления воды	69
ПРИЛОЖЕНИЕ. Метод пространства состояний	78
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	108

*Математика – это единственный совершенный метод
водить самого себя за нос.
(А.Эйнштейн)*

ВВЕДЕНИЕ

В качестве эпиграфа мы привели замечательную шутку-афоризм великого физика с одной единственной целью – обратить внимание на чрезвычайно важную роль, которую в теории систем играет качество математического описания исследуемых объектов.

Если же о математическом моделировании говорить серьезно, то уместно заметить, что бурное развитие вычислительной техники и ее использование в различных областях науки и техники, в последние годы существенно активизировало распространение универсальных математического пакетов, в частности, – MatLab, предназначенного для научно-технических расчетов и вычислений (<http://www.mathworks.com>). Необходимым условием использования пакета MatLab, например, при исследовании динамической системы является наличие ее математической модели. Такими моделями для систем с сосредоточенными параметрами являются обыкновенные дифференциальные уравнения. Непрерывные системы с распределенными параметрами имеют своими моделями дифференциальные уравнения с частными производными. Математическими моделями дискретных систем служат разностные уравнения.

В общей теории систем и ряде ее приложений – например, в теории автоматического управления – широкое распространение нашли частотные методы анализа и синтеза систем. Частотные методы весьма удобны при исследовании вопросов устойчивости систем и качества их работы. Эти методы наиболее применимы к линейным системам, хотя с их помощью можно получить представление и о поведении некоторых нелинейных динамических систем. Математической базой частотных методов является спектральное представление сигналов, опирающееся непосредственно на теорию рядов Фурье, интеграла Фурье и функций комплексного переменного, позволяющее получить частотные характеристики систем.

Одним из важных математических разделов, используемых при исследо-

вании динамических систем, является операционное исчисление, методы которого существенно упрощают процедуры интегрирования многих типов дифференциальных, интегродифференциальных и разностных уравнений.

Математическую модель любой динамической системы можно записать как в классической, так и в современной форме. С математической точки зрения, эти формы полностью эквивалентны, применение их чаще всего связывают с соображениями удобства, наглядности или компактности. Классическими моделями обычно называют математические модели динамических систем, представленные в так называемых первой или второй формах записи. В первой форме модель представляется обыкновенным дифференциальным уравнением, записанным по определенным правилам, а во второй – с помощью передаточных функций. Современные модели – это те же классические, т.е. имеющие вид дифференциального уравнения или передаточной функции, но записанные с использованием матричной (векторной) алгебры и в соответствующем пространстве состояний.

В этой книге, состоящей из четырех глав, используются классические модели. В первой главе описывается способ построения линеаризованных моделей динамических систем на основе разложения нелинейных функций в ряд Тейлора, исходя из малости отклонений траекторий движения систем от некоторых стационарных точек. Рассматриваются также временные и частотные характеристики непрерывных линейных систем. Во второй главе приведены конкретные примеры построения линейных моделей для объектов различной природы и принципа действия. В третьей главе с использованием пакета MATLAB обсуждаются основы работы с решателем обыкновенных дифференциальных уравнений и инструментом LTI Viewer. В четвертой главе, с помощью вычислительного эксперимента в MATLAB, рассматриваются вопросы определения частотных характеристик на основе математического моделирования реальных физических процессов.

ГЛАВА 1.

УРАВНЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Динамические системы разнообразны по своему назначению, принципу действия и конструктивному исполнению. Поведение систем может описываться обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных, уравнениями в прямых или обратных разностях и т.д. Рассмотрим методику составления уравнений непрерывных динамических систем с сосредоточенными параметрами, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

1.1. Линеаризация дифференциальных уравнений динамики

Большинство динамических систем – это совокупность взаимодействующих между собой подсистем (фрагментов) и отдельных элементов, определенным образом соединенных друг с другом. Начальным этапом при составлении дифференциальных уравнений является разделение (декомпозиция) системы на отдельные элементы и составление их дифференциальных уравнений.

Математические модели элементов системы в виде дифференциальных уравнений и уравнений связей между ними описывают процессы в динамической системе, т.е. изменение во времени всех ее физических координат. Зная уравнения элементов и уравнения связей динамической системы, можно построить ее структурную схему.

Структурная схема динамической системы отражает геометрию системы и характеризует как состав ее элементов, так и связи между ними. На структурной схеме системы указывают пути и направления передачи информации (сигналов). Состояние системы, а также входящих в нее элементов описыва-

ется определенным числом независимых координат, часть которых доступна измерению: например, для электрических систем – это ток, напряжение, мощность; для механических систем – угол поворота, перемещение, скорость и т.д. Для описания взаимодействия системы с внешней средой, а также подсистемы с другими подсистемами на входе и выходе выбирают соответствующие векторные координаты (входные и выходные). Будем пока полагать, что координаты, или переменные динамической системы – скалярные функции времени, пусть входная величина $g(t)$, а выходная $z(t)$.

При составлении математического описания динамической системы основной задачей является получение дифференциальных уравнений ее отдельных элементов. На рис. 1 показан общий вид произвольного элемента динамической системы, на входе которого выделено два типа внешних воздействий, один из которых будем называть задающим воздействием $g(t)$, а другой – возмущающим $\varphi(t)$.

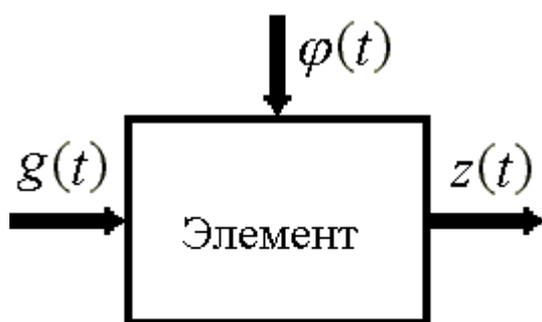


Рис. 1. Произвольный элемент динамической системы.

Составление уравнений отдельных элементов системы опирается на те физические законы, которые характеризуют их природу и поведение.

Для технических систем – это законы механики, электротехники, гидравлики, теплотехники и т.п. Уравнения динамики каждого элемента и всей системы в целом являются дифференциальными, при составлении которых стремятся, с одной стороны, наиболее точно, полно и подробно описать поведение, а с другой, учитывая сложность таких уравнений, – найти компромисс между усложнением дифференциальных уравнений и упрощением исследования свойств системы при решении этих уравнений.

Если в динамической системе возникает установившийся режим (стабилизация), то это ее состояние характеризуется зависимостью значений выходной величины от входной в виде так называемой статической характеристики.

Эти характеристики могут быть получены из дифференциальных уравнений при $t \rightarrow \infty$. Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение элемента системы (см. рис. 1), динамику которого опишем выражением

$$F\left(\frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \frac{dz(t)}{dt}, z(t), g(t)\right) = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right), \quad (1)$$

где $F(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ – некоторые функции переменных $g(t)$, $z(t)$ и $\varphi(t)$, а также производных от $z(t)$ и $\varphi(t)$. В этом случае статическая характеристика (здесь в неявном виде) будет описываться уравнением

$$F(0, 0, z_0, g_0) = \phi(0, \varphi_0), \quad (2)$$

где $z_0, g_0, \varphi_0 = const$. Если функции $F(\cdot), \phi(\cdot)$ нелинейные, в частном случае – линейные, то и элемент (1) соответственно – нелинейный или линейный. Из-за нелинейности большинства статических характеристик уравнения динамических систем являются нелинейными.

Упрощение анализа динамической системы чаще всего состоит в приближенной замене нелинейных дифференциальных уравнений на линейные уравнения, решения которых с достаточной степенью точности совпадают с решениями нелинейных уравнений. Такая линейризация нелинейного уравнения производится относительно некоторого установившегося состояния.

Если нелинейность элемента системы вызвана его статической характеристикой, пусть для примера $z = \psi(g)$, то линейризация характеристики сводится к ее замене на линейную функцию $z = ag + b$. Аналитически такая замена осуществляется за счет разложения в ряд Тейлора функции $z = \psi(g)$ в окрестности стационарной точки, соответствующей установившемуся состоянию при отбрасывании всех членов ряда, содержащих отклонения входной величины Δg в степени выше первой. Геометрически – это дает замену кривой $z = \psi(g)$ касательной, проведенной к кривой в стационарной точке (z_0, g_0) , как это показано на рис. 2, т.е. в точке установившегося режима.

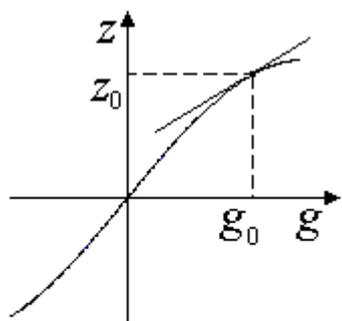


Рис. 2. Пример линейризации $z = \psi(g)$.

В других случаях линейризацию можно осуществить путем проведения секущей, мало отличающейся от функции $z = \psi(g)$ в заданном диапазоне изменения входной величины.

Такие нелинейные характеристики, т.е. линейризуемые в любой стационарной точке с требуемым диапазоном изменения входной величины в ее окрестности, называют несущественными нелинейностями; наряду с ними имеются нелинейные статические характеристики, которые такой линейризации не поддаются – существенные нелинейности. На рис. 3 изображены примеры некоторых существенных нелинейностей: а) – элемент с зоной нечувствительности; б) – релейный элемент с гистерезисом; в) – элемент с люфтом.

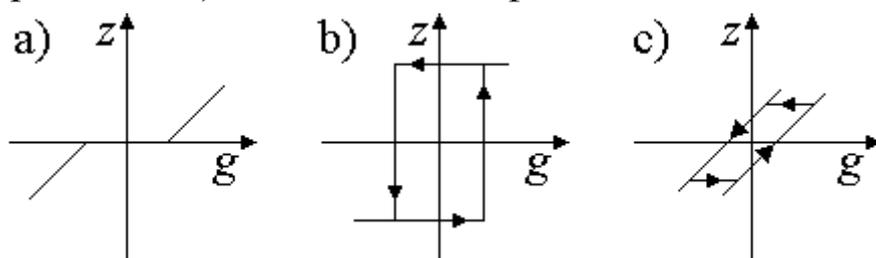


Рис. 3. Существенно нелинейные статические характеристики.

С помощью разложения в ряд Тейлора выполним линейризацию для уравнений (1) и (2). Введем в рассмотрение отклонения входной и выходной переменных от установившегося состояния:

$$\begin{aligned}\Delta g(t) &= g(t) - g_0, \quad \Delta z(t) = z(t) - z_0, \\ \frac{d\Delta z(t)}{dt} &= \frac{dz(t)}{dt} = z'(t), \quad \frac{d^2\Delta z(t)}{dt^2} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = z''(t).\end{aligned}\tag{3}$$

Разложим левую часть выражения (1) в ряд Тейлора относительно состояния $(0, 0, z_0, g_0)$:

$$\begin{aligned}F\left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}, \frac{dz(t)}{dt}, z(t), g(t)\right) &= F(0, 0, z_0, g_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) + \text{ВЧР},\end{aligned}\tag{4}$$

где аббревиатура ВЧР (высшие члены разложения) обозначает слагаемые, содержащие отклонения $\Delta z(t)$, $\Delta g(t)$ и производные от $\Delta z(t)$ в степени выше первой. Частные производные в правой части уравнения (4) являются постоянными величинами, значения которых зависят от вида функций $F(z''(t), z'(t), z(t), g(t))$ и координат стационарной точки (z_0, g_0) . Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), с учетом равенства (4), можно записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) + \\ + \text{ВЧР} = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0).\end{aligned}\tag{5}$$

Предполагая, что отклонения (3) малы по величине, а функция $F(z''(t), z'(t), z(t), g(t))$ в окрестности стационарной точки достаточно гладкая по всем аргументам, и отбрасывая в левой части уравнения (5) слагаемые ВЧР в силу их малости, получим уравнение вида

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) = \\ = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0).\end{aligned}\tag{6}$$

Таким образом, уравнение (6) – это линейная модель нелинейного уравнения (1), записанная в малых отклонениях относительно заданного установившегося состояния динамической системы.

Процедура линеаризации уравнения (1) может геометрически быть интерпретирована следующим образом. В пространстве переменных $z''(t)$, $z'(t)$, $z(t)$, $g(t)$ уравнение (1) задает некоторую поверхность. Переход от уравнения (1) к уравнению (6) означает приближенную замену поверхности на касательную плоскость, проведенную к поверхности в стационарной точке.

В стандартной (так называемой первой форме записи), принято выходную координату и все ее производные записывать в левой части уравнения (причем сама выходная переменная должна входить в уравнение с коэффициентом, равным единице), а все входные переменные располагать в правой части уравнения. В соответствии с этим правилом уравнение (6) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right)_0 \frac{d^2 \Delta z(t)}{dt^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right)_0 \frac{d \Delta z(t)}{dt} + \Delta z(t) = \\ & - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial g} \right)_0 \Delta g(t) + \frac{\phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если для постоянных коэффициентов и отклонений координат уравнения (7) ввести обозначения

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0}, \quad T_2 = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0}, \quad K = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial g} \right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0}, \quad x(t) = \Delta z(t), \\ u(t) &= \Delta g(t), \quad f(t) = \frac{\phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $f(t)$ – переобозначение внешнего возмущения $\varphi(t)$, которое математически описано, как правило, недостаточно полно, то уравнение (7) приобретает компактный вид:

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ku(t) + f(t). \quad (9)$$

Достоинством первой формы записи является удобная размерность коэффициентов в уравнении (9). Так, положительные коэффициенты при производных T_1 и T_2 , с учетом явного вида соотношений (8), имеют соответственно размерность $(\text{сек})^2$ и (сек) и называются постоянными времени. В свою очередь K – это коэффициент передачи, который является безразмерным только тогда, когда размерности входа $u(t)$ и выхода $x(t)$ совпадают. Если $K > 0$, то это означает, что при увеличении величины $u(t)$ происходит рост значений $x(t)$, если же $K < 0$, то с ростом $u(t)$ происходит уменьшение $x(t)$.

Для линейных динамических систем, описываемых уравнениями типа (9), справедлив принцип суперпозиции, согласно которому реакция системы на линейную комбинацию воздействий совпадает с той же линейной комбинацией реакций на каждое воздействие в отдельности. Например, для системы (9) это означает, что ее реакция $x(t)$ является суперпозицией решений $x_u(t)$ и $x_f(t)$ в виде алгебраической суммы откликов на входные воздействия $u(t)$ и $f(t)$.

В задачах анализа линейных систем, подверженных действию нескольких входных воздействий, благодаря принципу суперпозиции решений всегда существует возможность исследовать сложную многосвязную задачу как суммы независимых и более простых задач. Поэтому в дальнейшем, как правило, будем рассматривать линейные динамические системы с одним входом, в частности уравнение (9) в следующем виде:

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ku(t). \quad (10)$$

1.2. Преобразования Лапласа и передаточные функции

Под операционным исчислением понимается один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование и решение некоторых типов интегродифференциальных уравнений к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Операционное исчисление нашло широкое применение при исследовании динамических систем, т.к. его помощью осуществляется анализ переходных и установившихся процессов.

Рассмотрим основной способ применения операционного метода. Пусть имеется некоторая функция $f(t)$ действительной переменной t , причем такая, что для нее существует прямое преобразование Лапласа (L -преобразование)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (11)$$

где интеграл сходится. Используя L -преобразование, можно каждой функции-оригиналу $f(t)$ поставить в соответствие функцию-изображение $F(s)$, т.е. изображение по Лапласу относительно комплексной переменной $s = c + j\omega$. Например, – дифференцированию оригинала $f(t)$ по переменной t соответствует операция умножения изображения $F(s)$ на переменную s , а интегрированию оригинала $f(t)$ соответствует операция деления $F(s)$ на s , что позволяет дифференциальное уравнение относительно функции $f(t)$ заменить в пространстве изображений на алгебраическое уравнение, записанное относительно изображения $F(s)$, решив которое можно найти $F(s)$.

L -преобразованию (11) присущ ряд свойств.

Линейность:

$$L\left\{\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^n a_k F_k(s).$$

Смещение в комплексной области:

$$L\{f(t)e^{\pm\alpha t}\} = F(s \mp \alpha). \quad (12)$$

Изображение производных:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0), \dots, \quad (13)$$

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Изображение интеграла:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s). \quad (14)$$

Смещение* в действительной области:

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s). \quad (15)$$

Свертка функций в действительной области:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s). \quad (16)$$

Свертка функций в комплексной области:

$$L\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(q)F_2(s - q)dq. \quad (17)$$

Начальное и предельное значение оригинала:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t), \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (18)$$

* Если смещение τ рассматривается относительно переменной времени t , то его называют запаздыванием.

Ряд результатов прямого преобразования Лапласа дан в табл. 1.

Таблица 1

№	Оригинал	Изображение
1.	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2.	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
3.	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
4.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
6.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
7.	$\frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
8.	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
9.	$\frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$
10.	$[(a_0 - \alpha)t + 1]e^{-\alpha t}$	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)^2}$
11.	$\frac{1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$	$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$
12.	$\frac{a_0}{\alpha^2} + \left[\frac{\alpha - a_0}{\alpha} t - \frac{a_0}{\alpha^2} \right] e^{-\alpha t}$	$\frac{s + a_0}{s(s + \alpha)^2}$
13.	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Определение искомого решения $f(t)$ осуществляется с помощью обратного преобразования Лапласа (L^{-1} -преобразованием), устанавливающего связь между изображением $F(s)$ и соответствующим ему оригиналом $f(t)$:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0, \quad c = \operatorname{Re} s. \quad (19)$$

Формула обращения (19) устанавливает однозначное соответствие между изображением и оригиналом в точках непрерывности оригинала. Вычисление оригинала $f(t)$ по формуле (19) удобно производить с помощью вычетов, хотя можно и избежать непосредственного интегрирования – например, воспользовавшись набором стандартных соответствий типа изображение-оригинал, некоторые из которых представлены в табл. 2.

Таблица 2

№	$F(s)$	$f(t) (t > 0)$	
1.	$\frac{1}{s(s-a)}$	$Ae^{at} + B$	$A = \frac{1}{a}, B = -\frac{1}{a}$
2.	$\frac{s+d}{s(s-a)}$	$Ae^{at} + B$	$A = \left(1 + \frac{d}{a}\right), B = -\frac{d}{a}$
3.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{1}{a-b}, B = \frac{1}{b-a}$
4.	$\frac{s+d}{(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{a+d}{a-b}, B = \frac{b+d}{b-a}$
5.	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + C$	$A = \frac{1}{a(a-b)}, B = \frac{1}{b(b-a)}, C = \frac{1}{ab}$
6.	$\frac{s+d}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + C$	$A = \frac{a+d}{a(a-b)}, B = \frac{b+d}{b(b-a)}, C = \frac{d}{ab}$
7.	$\frac{s^2 + qs + d}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + C$	$A = \frac{a^2 + qa + d}{a(a-b)},$ $B = \frac{b^2 + qb + d}{b(b-a)},$ $C = \frac{d}{ab}$

Метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью операционного исчисления, представленный графически в виде последовательности основных этапов, показан на рис. 4.

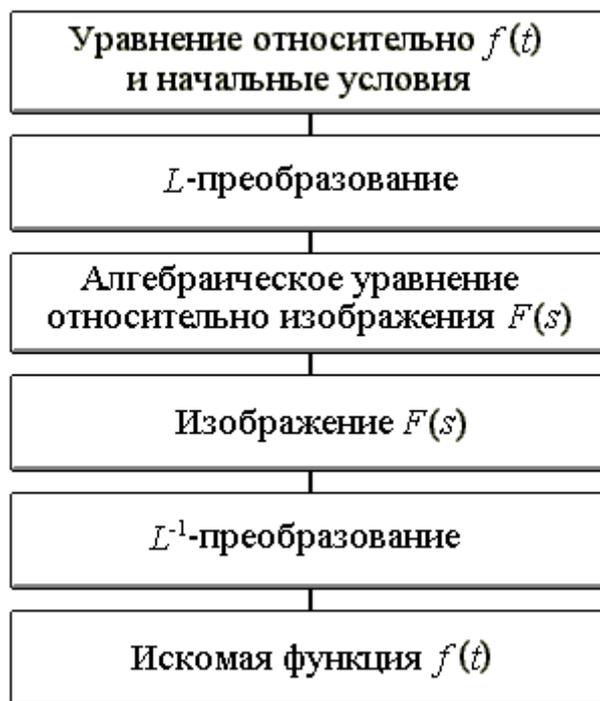


Рис. 4. Алгоритм решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Передаточной функцией $W(s)$ называется отношение изображения выхода $x(s)$ к изображению входа $u(s)$:

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} \quad (20)$$

при нулевых начальных условиях.

Применение L -преобразования, в частности к уравнению (10), позволяет записать соотношение

$$T_1 s^2 x(s) + T_2 s x(s) + x(s) = K u(s),$$

преобразование которого согласно определению $W(s)$ дает следующий результат:

$$x(s) = W(s)u(s),$$

$$W(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1}. \quad (21)$$

Если динамическая система подвержена действию нескольких входных сигналов – см. например, (9), то вторую форму записи такого уравнения можно представить в виде

$$x(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} u(s) + \frac{1}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} f(s). \quad (22)$$

Понятие передаточной функции динамической системы весьма удобно при анализе так называемых структурных схем – например, уравнению (22) соответствует схема, показанная на рис. 5.

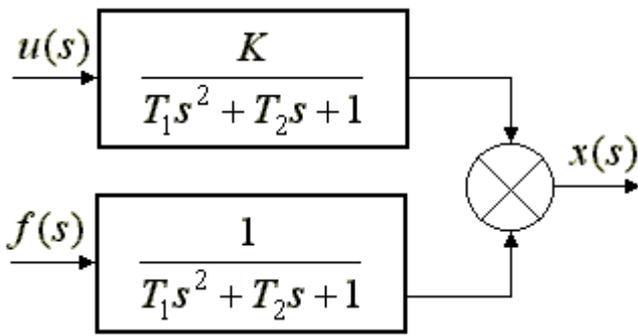


Рис. 5. Структурная схема динамической системы (22).

В тех случаях, когда существует возможность вычисления значений полюсов $W(s)$ или корней знаменателя передаточной функции, называемого характеристическим уравнением, можно с помощью данных табл. 2 найти явный вид искомой функции. Действительно, пусть в динамической системе, описываемой уравнением (21), входной сигнал – единичная функция, т.е. $u(t) = 1(t)$ (изображение которой имеет вид $u(s) = 1/s$: см. табл. 1.1). Тогда, поскольку для передаточной функции (21) из равенства $T_1s^2 + T_2s + 1 = 0$ следует, что

$$s_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1}}{2T_1}, \quad (23)$$

то, переписав сомножитель $W(s)u(s)$ эквивалентным образом, находим явный вид изображения выходного сигнала

$$x(s) = W(s)u(s) = \frac{K/T_1}{s(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Искомый оригинал, согласно данным табл. 2 (см. пятую строку), соответствующий изображению $x(s)$, будет описываться равенством

$$x(t) = \frac{K}{T_1} \left(\frac{1}{s_1(s_1-s_2)} e^{s_1t} + \frac{1}{s_2(s_2-s_1)} e^{s_2t} + \frac{1}{s_1s_2} \right), \quad (24)$$

где вещественные или комплексные числа s_1 и s_2 , вычисляются по формулам (23). Кроме того, учитывая значения

$$s_1 - s_2 = -\frac{T_2}{T_1}, \quad s_1s_2 = \frac{1}{T_1},$$

равенство (1.24) можно представить и следующим образом:

$$x(t) = K \left(-\frac{1}{T_2s_1} e^{s_1t} + \frac{1}{T_2s_2} e^{s_2t} + 1 \right). \quad (25)$$

При анализе динамических систем их обычно разбивают на отдельные динамические элементы, классификацию которых проводят по виду их уравнений в установившихся режимах, т.е. линейным статическим характеристикам (рис. 6), поскольку по-прежнему рассматриваются линеаризованные системы.

В элементах позиционного или статического типа в установившемся режиме линейной зависимостью $x(t) = Ku(t)$ связаны выходная и входная коор-

динаты.

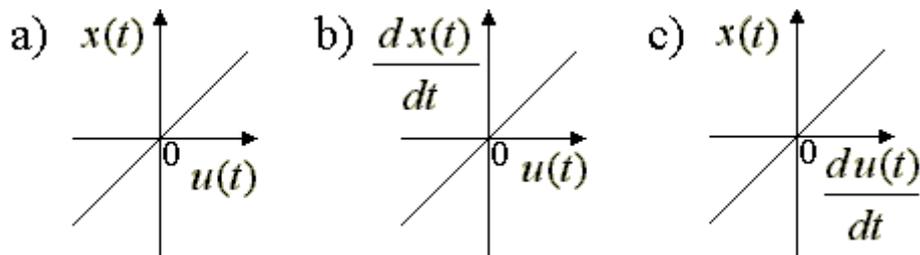


Рис. 6. Статические характеристики линейных элементов.

В элементах интегрирующего типа, при $t \rightarrow \infty$ выходная и входная переменные связаны линейным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ku(t), \text{ или } x(t) = K \int_0^t u(q) dq,$$

а элементах дифференцирующего типа аналогичная линейная связь имеет вид

$$x(t) = K \frac{du(t)}{dt}.$$

1.3. Временные отклики непрерывных систем

Динамические свойства элемента могут быть определены по его переходной функции и функции веса.

Переходная функция $h(t)$ или переходная характеристика представляет собой временной отклик или реакцию выхода элемента, при подаче на его вход единичного сигнала

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (26)$$

часто называемый единичной ступенью (скачком). Предполагается, что единица имеет размерность физической величины на входе элемента. Графические образы временных сигналов $1(t)$ и $h(t)$ показаны на рис. 7.

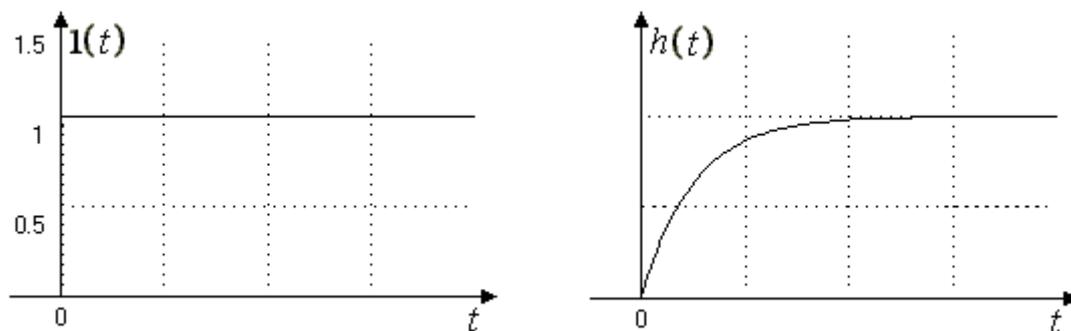


Рис.7. Единичная ступень $1(t)$ и переходной процесс $h(t)$.

Функция $1(t)$ – весьма распространенный вид входного воздействия в динамических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание момента нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот руля управления движущегося автомобиля и т.д.

Функция веса $\omega(t)$ или импульсная переходная характеристика является временной реакцией выхода элемента при подаче на его вход единичного импульсного сигнала

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (27)$$

Основное свойство дельта-функции $\delta(t)$ заключается в том, что она имеет единичную площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

Характеристика $\omega(t)$ в динамических системах является распространенным видом входного воздействия. К такому виду можно отнести, например, кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания генератора (отключаемый плавкими предохранителями) и т.п. Один из вариантов представления функций $\delta(t)$ и $\omega(t)$ показан рис. 8, где рассматривается динамический элемент при нулевых начальных условиях

$$\omega(0) = 0.$$

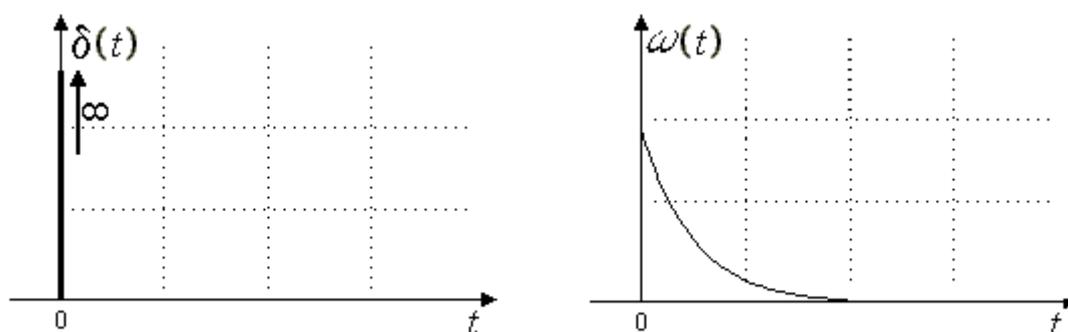


Рис. 8. Функция $\delta(t)$ и импульсная переходная функция $\omega(t)$.

Можно показать, что функции $h(t)$ и $\omega(t)$ взаимосвязаны

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt},$$

причем передаточная функция связана с функциями $h(t)$ и $\omega(t)$ прямым интегральным преобразованием Лапласа

$$W(s) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-st} dt = s \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt. \quad (28)$$

1.4. Описание непрерывных систем в частотной области

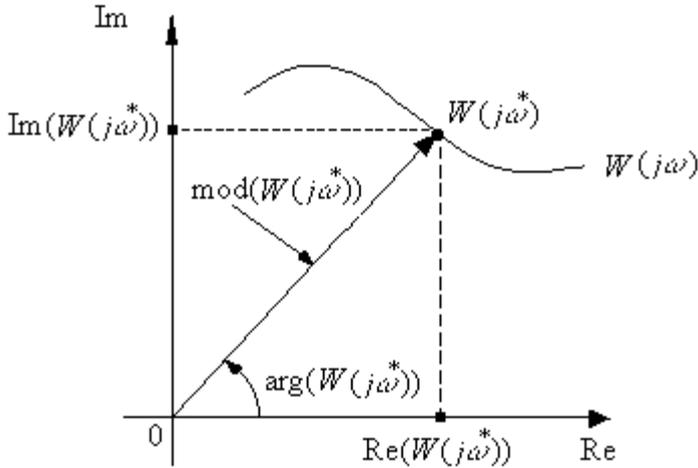


Рис. 9. Комплексная плоскость $W(j\omega)$.

Динамические свойства линейного элемента в частотной области определяются его частотной передаточной функцией $W(j\omega)$, получаемой из функции $W(s)$ путем замены s на $j\omega$, где $j^2 = -1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq \omega \leq +\infty$. Часто $W(j\omega)$ называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой, или комплексным коэффициентом усиления.

Поскольку в комплексной плоскости геометрический образ функции $W(j\omega)$ (рис. 9), может описываться как

в прямоугольных, так и в полярных координатах, то частотную передаточную функцию будем рассматривать в виде

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \operatorname{Re}(W(j\omega)) + j \operatorname{Im}(W(j\omega)) = \\ &= \operatorname{mod}(W(j\omega)) e^{j \arg(W(j\omega))}, \end{aligned} \quad (29)$$

где введены обозначения: $\operatorname{Re}(W(j\omega)) = U(\omega)$ – вещественная частотная характеристика; $\operatorname{Im}(W(j\omega)) = V(\omega)$ – мнимая частотная характеристика; $\operatorname{mod}(W(j\omega)) = A(\omega)$ – амплитудная частотная характеристика; $\arg(W(j\omega)) = \varphi(\omega)$ – фазовая частотная характеристика. В комплексной плоскости график векторной функции $W(j\omega)$ называют годографом (след траектории движения конца вектора).

Для пар характеристик $(U(\omega), V(\omega))$ и $(A(\omega), \varphi(\omega))$ в любой фиксированной точке $\omega = \omega^*$ (рис. 9) справедливы следующие формулы:

$$A(\omega^*) = \sqrt{U^2(\omega^*) + V^2(\omega^*)}, \quad \varphi(\omega^*) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega^*)}{U(\omega^*)}, \quad (30)$$

$$U(\omega^*) = A(\omega^*) \cos \varphi(\omega^*), \quad V(\omega^*) = A(\omega^*) \sin \varphi(\omega^*).$$

Поскольку передаточная функция $W(s)$ любой системы является дробно-рациональной функцией вида

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{r_0 s^m + r_1 s^{m-1} + \dots + r_{m-1} s + r_m}{q_0 s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_{n-1} s + q_n}, \quad (31)$$

то в частотной области для нее справедливы, во-первых, соотношения (в прямоугольных координатах):

$$W(j\omega) = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_Q(\omega) + V_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)},$$

$$V(\omega) = \frac{U_R(\omega)V_Q(\omega) - V_R(\omega)U_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)},$$

$$U_R(\omega) = \operatorname{Re}(R(j\omega)),$$

$$V_R(\omega) = \operatorname{Im}(R(j\omega)),$$

$$U_Q(\omega) = \operatorname{Re}(Q(j\omega)),$$

$$V_Q(\omega) = \operatorname{Im}(Q(j\omega));$$
(32)

во-вторых, выражения (в полярных координатах):

$$W(j\omega) = \frac{A_R(\omega)e^{j\varphi_R(\omega)}}{A_Q(\omega)e^{j\varphi_Q(\omega)}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

$$A(\omega) = \frac{A_R(\omega)}{A_Q(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_R(\omega) - \varphi_Q(\omega),$$

$$A_R(\omega) = \operatorname{mod}(R(j\omega)),$$

$$\varphi_R(\omega) = \operatorname{arg}(R(j\omega)),$$

$$A_Q(\omega) = \operatorname{mod}(Q(j\omega)),$$

$$\varphi_Q(\omega) = \operatorname{arg}(Q(j\omega)).$$
(33)

Формулы (30) – (33) оказываются весьма полезными при решении как теоретических, так и прикладных задач.

ГЛАВА 2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим дифференциальные уравнения и запишем передаточные функции некоторых динамических элементов различных систем, математические модели которых допускают линеаризацию.

2.1. Манипуляционный робот

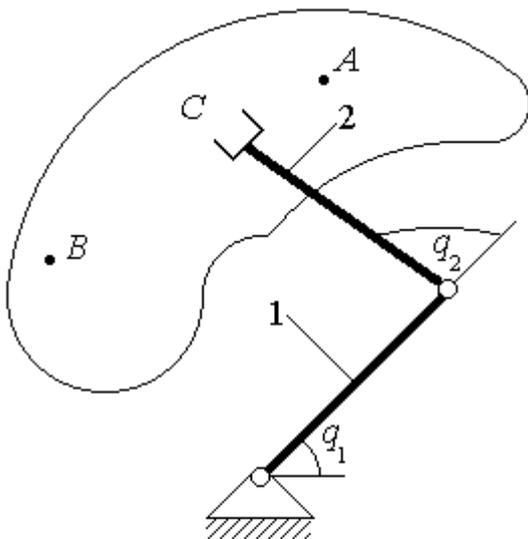


Рис.10. Схема двухзвенного манипуляционного робота.

Манипуляционный робот (манипулятор) – это устройство, воспроизводящее ряд функций, аналогичных функциям рук человека. Манипулятор состоит из звеньев, соединенных между собой определенным образом. Одно звено является основанием (база), относительно которого осуществляется отсчет перемещения и ориентация исполнительного органа манипулятора. Группа звеньев, соединяющих его с основанием, образует кинематическую цепь манипулятора. Два соседних звена составляют кинематическую пару, число степеней свободы которой определяется числом независимых движений одного звена пары относительно другого. В большинстве случаев звенья манипулятора образуют кинематические пары пятого класса

(число степеней свободы такого манипулятора равно числу звеньев), в которых относительно движение звеньев определяется одним параметром – углом поворота или перемещением. В первом случае имеет место пара вращательного типа, а во втором – поступательного.

На рис. 10 приведена схема простейшего двухзвенного манипулятора, перемещающего захватное устройство C в плоскости из точки A в точку B , при нулевых начальных и конечных скоростях. Кинематическая цепь манипулятора состоит из звеньев 1 и 2, образующих с основанием и между собой две кинематические пары вращательного типа. Положение захвата на плоскости и конфигурация механизма полностью определяются двумя независимыми углами $q_1 = q_1(t)$ и $q_2 = q_2(t)$, называемыми обобщенными координатами. Исполнительным органом манипулятора является двухзвенный механизм, движения звеньев которого взаимосвязаны, причем каждая степень свободы имеет автономную систему следящего электропривода. При позиционном управлении манипулятором обычно изменяют положение его исполнительного органа.

Движение манипулятора, изображенного на рис. 10, поскольку он является динамическим элементом с конечным числом степеней свободы и обладающим запасом кинетической энергии, может быть описано системой дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода. Если через $q'_1 = q'_1(t)$ и $q'_2 = q'_2(t)$ обозначить производные обобщенных координат манипулятора, то соответствующая система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

где E_K – кинетическая энергия манипулятора; Q_i – обобщенные силы.

В общем случае обобщенные силы:

$$Q_i = \frac{\partial E_{II}}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial q'_i} + f_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (35)$$

где E_{II} – потенциальная энергия манипулятора; R – функция рассеяния энергии; $f_i(t)$ – внешние силы, приложенные к манипулятору.

Кинетическая энергия E_K представляет собой квадратичную положительно определенную форму от обобщенных скоростей

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 m_{i,j} q'_i q'_j. \quad (36)$$

Потенциальная энергия E_{II} является некоторой функцией обобщенных координат системы. Функция рассеяния, или диссипативная функция R характеризует собой скорость рассеяния энергии в манипуляторе и зависит от обобщенных скоростей. Обобщенные диссипативные силы

$$Q_{R_i} = \frac{\partial R}{\partial q'_i} \quad (37)$$

можно определить по формуле

$$Q_{R_i} = -k_i f(q'_i) \frac{|q'_i|}{q'_i}, \quad (38)$$

где функция $f(x'_i) = 1$ – в случае сухого трения и $f(x'_i) = x'_i$ – в случае вязкого трения. Из формулы (38) следует, что диссипативная сила направлена противоположно вектору скорости x'_i и равна либо постоянной величине (в случае сухого трения), либо пропорциональна скорости x'_i (в случае вязкого трения). Диссипативная функция в соответствии с формулами (37) и (38) принимает вид

$$R = \sum_{i=1}^2 k_i \int_0^{q'_i} f_i(u) du. \quad (39)$$

Можно показать, что уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение двухзвенного манипулятора, являются нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, которые без учета моментов трения в шарнирах и веса груза имеют вид

$$\begin{cases} a_{11} \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + a_{12} \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} = M_1, \\ a_{21} \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + a_{22} \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} = M_2, \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 l_1^2 + J_1 + 4m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + a_{22}, \quad a_{22} = m_2 l_2^2 + J_2, \\ a_{12} &= 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + a_{22}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad J_1 = m_1 l_1^2 / 3, \quad J_2 = m_2 l_2^2 / 3, \\ M_1 &= 2m_2 l_1 l_2 (q'_2)^2 \sin q_2 + 4m_2 l_1 l_2 q'_1 q'_2 \sin q_2 + M_{ДВ1} i_1 + \\ &+ M_{P11} + M_{P21}, \quad M_2 = M_{ДВ2} i_2 + M_{P22} - 2m_2 l_1 l_2 (q'_2)^2 \sin q_2, \\ M_{P11} &= -P_1 l_1 \cos q_1, \quad M_{P21} = -P_2 (2l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)), \\ M_{P22} &= -P_2 l_2 \cos(q_1 + q_2), \end{aligned} \quad (41)$$

где нелинейные коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} и a_{22} являются функциями обобщенных координат $q_1(t)$, $q_2(t)$ и их производных. В уравнениях (40), (41) были приняты следующие обозначения: m_1 и m_2 – массы 1-го и 2-го звеньев; $2l_1$, $2l_2$ – длины звеньев; J_1 , J_2 – моменты инерции звеньев; $M_{ДВ1}$, $M_{ДВ2}$ – моменты, создаваемые двигателями; M_{P11} , M_{P21} – моменты, создаваемые в 1-м шарнире весом звеньев; M_{P22} – моменты, создаваемые в 2-м шарнире весом 2-го звена.

В практике проектирования систем управления манипуляторами достаточно широкое распространение получил метод, основанный на использовании так называемой выделенной следящей системы (механическая передача "плюс" электропривод), т.е. системы с одной степенью свободы, когда явле-

ние взаимодействия систем не учитывается. Рассмотрим еще одну математическую модель манипулятора, но более простую – в виде системы с одной степенью свободы, отражая некоторые специфические особенности работы манипуляторов при упругих механических передачах.

Обычно для передачи движения от исполнительного двигателя к нагрузке, по соответствующей степени подвижности, используется механическая передача, которая может обладать существенными особенностями: упругостями, люфтами, переменными сухими и вязкими трениями и т.п. Например, механическая передача является упругой, если соответствующая степень подвижности удалена от моторного блока, т.е. когда исполнительный двигатель не компоуется непосредственно на каждой степени свободы и передача движений осуществляется при помощи валиков, тросов или карданных передач. Каждый из этих элементов обладает существенными упругими деформациями. В силу этого механическую передачу нельзя рассматривать как некоторую статическую нагрузку, действующую на валу исполнительного двигателя, поскольку в ней протекают динамические процессы. Следовательно, механическая передача с действующими силами представляет собой отдельный элемент выделенной следящей системы.

Принципиальная схема механической передачи с упругой деформацией кинематической передачи, при наличии вязкого трения на валу нагрузки, показана на рис. 11, где используются следующие обозначения: J – момент инерции ротора кинематической передачи; $M_{ДВ}$ – момент, развиваемый двигателем; $M_{ДВ}$ – передаваемый нагрузке крутящий момент; J_H – момент инерции нагрузки и кинематической передачи; $q_{ДВ}$ – угол поворота вала двигателя; q_H – угол поворота вала нагрузки; γ – величина упругой деформации в кинематической передаче; ρ – коэффициент упругости кинематической передачи; χ – коэффициент, учитывающий потери на деформацию; i_P – передаточное число редуктора; $M_{ВН}$ – внешний нагрузочный момент; M_C – момент вязкого сопротивления движению вала нагрузки; $M_{СТ}$ – статический момент, определяемый весом перемещаемого груза и весом кинематических звеньев исполнительного органа ($M_{СТ}$ нелинейным образом зависит от углов поворота каждой степени свободы).

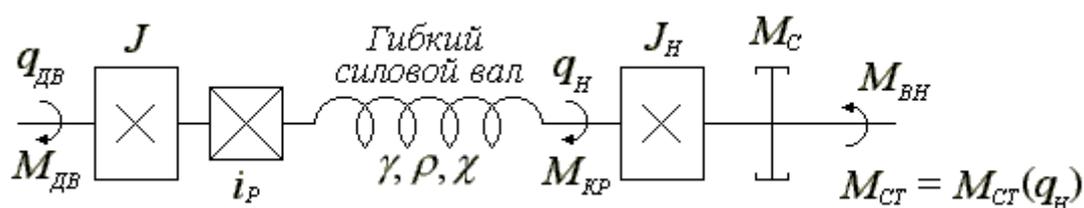


Рис. 11. Схема упругой механической передачи манипулятора.

В общем случае силы и моменты, передаваемые от одной сосредоточен-

ной массы к другой, являются нелинейными функциями упругой деформации. Если же рассматривается некоторый квазистационарный режим работы манипулятора, то изменение упругой деформации гибкого вала от крутящего момента можно описать линейным уравнением

$$\mu\chi \frac{d\gamma(t)}{dt} + \mu\chi\gamma(t) = M_{KP}(t), \quad (42)$$

где μ – коэффициент, характеризующий относительное уменьшение жесткости гибкого вала при кручении, а изменение упругой деформации $\gamma(t)$ описывается соотношением

$$\gamma(t) = \frac{q_{ДВ}(t)}{i_P} - q_H(t). \quad (43)$$

Поскольку уравнение равновесия моментов на валу нагрузки имеет вид

$$M_{KP} = M_{ДВ} + M_C + M_{ВН} + M_{СТ}, \quad (44)$$

$$M_{ДВ} = J_H \frac{d^2 q_H(t)}{dt^2}, \quad M_C = f_{ВТ} \frac{dq_H(t)}{dt},$$

где $f_{ВТ}$ – коэффициент вязкого трения на валу нагрузки, то с учетом соотношений (42) и (43) уравнение (44) можно представить в виде

$$J_H \frac{d^2 q_H(t)}{dt^2} + (f_{ВТ} + \mu\chi) \frac{dq_H(t)}{dt} + \mu\rho q_H(t) =$$

$$= \frac{\mu\chi}{i_P} \frac{dq_{ДВ}(t)}{dt} + \frac{\mu\rho}{i_P} q_{ДВ}(t) - M_{ВН} - M_{СТ}. \quad (45)$$

Допустим, что внешнее возмущение отсутствует $M_{ВН} = 0$, а статический момент описывается равенством $M_{СТ} = K_{СТ} q_H$, $K_{СТ} = \text{const}$, тогда уравнение манипулятора (45) можно записать в первой форме записи

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K \left(T_3 \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right), \quad (46)$$

используя, аналогично уравнению (10), следующие обозначения:

$$x(t) = q_H(t), \quad u(t) = q_{ДВ}(t),$$

$$T_1 = \frac{J_H}{K_{СТ} + \mu\rho}, \quad T_2 = \frac{f_{ВТ} + \mu\chi}{K_{СТ} + \mu\rho}, \quad T_3 = \frac{\chi}{\rho}, \quad K = \frac{\mu\rho}{i_P(K_{СТ} + \mu\rho)}.$$

Во второй форме записи (при нулевых начальных условиях) уравнение манипулятора (46) будет иметь вид

$$x(s) = \frac{K(T_3 s + 1)}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} u(s). \quad (47)$$

2.2. Центробежный маятник

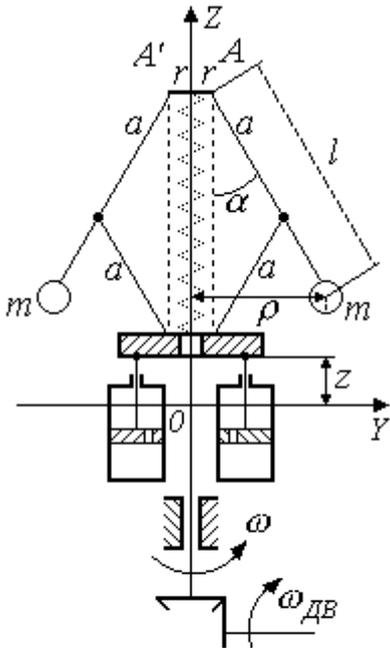


Рис. 12. Схема центробежного маятника.

Центробежный маятник применяется как чувствительный элемент (датчик) некоторых систем управления. Схема маятника изображена на рис. 12, где входной величиной является угловая скорость $\omega = \omega(t)$, а выходной – перемещение $z = z(t)$ платформы.

При увеличении скорости вращения шары под действием центробежной силы расходятся и перемещают платформу. На платформу воздействуют также сила упругости пружины, сила демпфирования и силы инерции. Введем обозначения: c – коэффициент жесткости пружины; k – коэффициент вязкого трения; m – масса шара; M – масса частей, участвующих в поступательном движении вдоль оси OZ ; ω – угловая скорость вала; f_0 – сила предварительного поджатия пружины. Для составления дифференциального уравнения центробежного маятника воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода (34). В качестве обобщенной координаты z_i выберем выходную координату – перемещение платформы z . Найдем выражение для кинетической энергии E_K , потенциальной E_K и диссипативной функции R центробежного маятника. Из рис. 12 видно, что расстояния ρ и z определяются по формулам

$$\rho = r + l \sin \alpha, \quad z = 2a(1 - \cos \alpha).$$

Кинетическая энергия системы описывается соотношением

$$E_K = E_{K_1} + E_{K_2} + E_{K_3},$$

где E_{K_1} и E_{K_2} – кинетические энергии шаров во вращательном движении вокруг соответственно оси OZ и точек A, A' ; E_{K_3} – кинетическая энергия масс в поступательном движении вдоль оси OZ .

Имеем:

$$E_{K_1} = \frac{2m\omega^2\rho^2}{2} = m\omega^2(r + l \sin \alpha)^2 = m\omega^2\left(r + \frac{1}{2a}\sqrt{z(4a - z)}\right)^2, \quad (48)$$

$$E_{K_2} = \frac{2ml^2(\alpha')^2}{2} = \frac{ml^2(z')^2}{z(4a - z)}, \quad (49)$$

$$E_{K_3} = \frac{M(z')^2}{2}. \quad (50)$$

Потенциальная энергия маятника определяется суммой

$$E_{II} = E_{II_1} + E_{II_2} + E_{II_3},$$

где E_{II_1} – потенциальная энергия масс, движущихся параллельно оси OZ ; E_{II_2} – потенциальная энергия шаров; E_{II_3} – потенциальная энергия пружины. В данном случае имеем:

$$E_{II_1} = Mgz,$$

$$E_{II_2} = 2mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{mglz}{a}, \quad (51)$$

$$E_{II_3} = f_0 z + \frac{cz^2}{2}.$$

Найдем обобщенную диссипативную силу Q_R . Благодаря наличию гидравлического демпфера сила сухого трения по сравнению с силой вязкого трения мала и ею можно пренебречь.

Согласно формуле (38) получаем

$$Q_R = \frac{\partial R}{\partial z'} = -kz'. \quad (52)$$

Вычислим значения отдельных слагаемых, входящих в уравнение Лагранжа (1.34):

$$\frac{\partial E_K}{\partial z'} = \frac{2ml^2 z'}{z(4a - z)} + Mz',$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial z} = \frac{m\omega^2 l(2a - z)}{a\sqrt{z(4a - z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a - z)} \right) - \frac{2ml^2 (z')^2 (2a - z)}{z^2 (4a - z)^2},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial z'} \right) = Mz'' - \frac{2ml^2 (z')^2 (4a - 2z)}{z^2 (4a - z)^2} + \frac{2ml^2 z''}{z(4a - z)},$$

$$\frac{\partial E_{II}}{\partial z} = Mg + \frac{mgl}{a} + f_0 + cz$$

и тогда, подставляя найденные выражения в уравнение (34), получим следующий результат:

$$\begin{aligned} & Mz'' - \frac{2ml^2 (z')^2 (4a - 2z)}{z^2 (4a - z)^2} + \frac{2ml^2 z''}{z(4a - z)} - \frac{m\omega^2 l(2a - z)}{a\sqrt{z(4a - z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a - z)} \right) + \\ & + \frac{2ml^2 (z')^2 (2a - z)}{z^2 (4a - z)^2} = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0 - cz - kz', \end{aligned}$$

ИЛИ

$$z'' \left(M + \frac{2ml^2}{z(4a-z)} \right) - \frac{2ml^2(2a-z)}{z^2(4a-z)^2} (z')^2 + kz' + cz - \frac{ml(2a-z)}{a\sqrt{z(4a-z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a-z)} \right) \omega^2 = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0. \quad (53)$$

Введем следующие обозначения:

$$f_1(z) = M + \frac{2ml^2}{z(4a-z)}, \quad f_2(z) = \frac{2ml^2(2a-z)}{z^2(4a-z)^2}, \quad (54)$$

$$f_3(z, \omega) = \frac{ml(2a-z)}{a\sqrt{z(4a-z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a-z)} \right) \omega^2,$$

при $r=0$

$$f_3(z, \omega) = \frac{ml^2(2a-z)}{2a^2} \omega^2. \quad (55)$$

С учетом принятых обозначений уравнение центробежного маятника запишется в виде

$$f_1(z) \frac{d^2 z}{dt^2} - f_2(z) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + k \frac{dz}{dt} + cz - f_3(z, \omega) = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0. \quad (56)$$

Уравнение (56) является нелинейным, ему в установившемся состоянии равновесия (z_0, ω_0) соответствует уравнение

$$cz_0 - f_3(z_0, \omega_0) = -f_0 - Mg - \frac{mgl}{a}. \quad (57)$$

Если относительно состояния равновесия (z_0, ω_0) ввести в рассмотрение малые колебания маятника вида

$$\Delta z = z - z_0, \quad \Delta \omega = \omega - \omega_0, \quad (58)$$

то в результате разложения в ряд Тейлора нелинейных функций (54) получим

$$f_1(z) = f_1(z_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)_0 \Delta z + F_1(\Delta z),$$

$$f_2(z) = f_2(z_0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)_0 \Delta z + F_2(\Delta z), \quad (59)$$

$$f_3(z, \omega) = f_3(z_0, \omega_0) + \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0 \Delta z + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + F_3(\Delta z, \Delta \omega),$$

где функции $F_1(\Delta z)$, $F_2(\Delta z)$, $F_3(\Delta z, \Delta \omega)$ имеют более высокий порядок малости по сравнению со значениями Δz и $\Delta \omega$. Учитывая соотношения (57) – (59),

уравнение (56) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f_1(z_0) \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} + k \frac{d \Delta z}{dt} + \left(c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0 \right) \Delta z = \\ = \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + F_4(\Delta z, \Delta z', \Delta z'', \Delta \omega), \end{aligned} \quad (60)$$

где функция

$$\begin{aligned} F_4(\Delta z, \Delta z', \Delta z'', \Delta \omega) = F_3(\Delta z, \Delta \omega) + F_2(\Delta z)(\Delta z')^2 + \\ + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)_0 \Delta z (\Delta z')^2 + f_2(z_0)(\Delta z')^2 - F_1(\Delta z) \Delta z'' - \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)_0 \Delta z \Delta z'' \end{aligned} \quad (61)$$

имеет более высокий порядок малости по сравнению с Δz , $\Delta z'$, $\Delta z''$ и $\Delta \omega$. Опуская из рассмотрения функцию (61), уравнение колебаний маятника (60) в отклонениях от состояния равновесия (z_0, ω_0) запишем в первой форме записи, вида:

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ku(t), \quad (62)$$

где, с учетом соотношений (54), введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x(t) = \Delta z, \quad u(t) = \Delta \omega, \quad T_1 = \frac{f_1(z_0)}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0} = \frac{M + \frac{2ml^2}{z_0(4a - z_0)}}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0}, \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0 = -\frac{ml\omega_0^2}{a} \left(\frac{4a^2 r}{\sqrt[3]{z_0(4a - z_0)}} + \frac{l}{2a} \right), \quad T_2 = \frac{k}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0}, \\ K = \frac{\left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega} \right)_0}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0} = \frac{\frac{2ml(2a - z_0)}{a\sqrt{z_0(4a - z_0)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z_0(4a - z_0)} \right) \omega_0}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0}. \end{aligned}$$

Во второй форме записи и при нулевых начальных условиях уравнение колебаний маятника (62) будет иметь вид

$$x(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} u(s). \quad (63)$$

2.3. Ресивер

Общий вид пневматического объекта типа ресивер показан на рис. 13. Рассмотрим принцип его действия. На входе и выходе ресивера установлены заслонки 1 и 2, соответственно с сечениями S_1 и S_2 . Газ от компрессора под давлением P_1 , большим критического, поступает через сечение S_1 в ресивер объема V , в котором устанавливается давление P . В этом случае истечение газа через сечение S_1 является сверхкритическим. Одновременно газ через сечение S_2 поступает к потребителю под давлением P_2 , которое меньше критического. При этом истечение через S_2 будет докритическим. В ресивере при $P_1^*, P_2^* = const, S_1^*, S_2^* = const$ имеет место установившийся режим $P = P^* = const$.

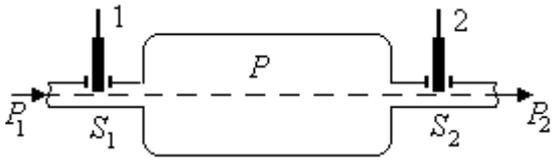


Рис. 13. Общий вид ресивера.

Газ от компрессора под давлением P_1 , большим критического, поступает через сечение S_1 в ресивер объема V , в котором устанавливается давление P . В этом случае истечение газа через сечение S_1 является сверхкритическим. Одновременно газ через сечение S_2 поступает к потребителю под давлением P_2 , которое меньше критического. При этом истечение через S_2 будет докритическим. В ресивере при $P_1^*, P_2^* = const, S_1^*, S_2^* = const$ имеет место установившийся режим $P = P^* = const$.

В соответствии с законами гидротермодинамики уравнение динамики ресивера (при постоянной температуре газа) имеет вид

$$\frac{V}{RQ_A} \frac{dP}{dt} = G_1 - G_2, \quad (64)$$

где R – постоянная Клайперона; Q_A – абсолютная температура газа; G_1 и G_2 – весовые расходы газа через сечения S_1 и S_2 .

При сверхкритическом истечении газа через сечение S_1 весовой расход определяется по формуле

$$G_1 = \mu S_1 \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 + 1} \left(\frac{2}{k_0 + 1} \right)^{\frac{2}{k_0 - 1}} \frac{P_1}{V_1}}, \quad (65)$$

здесь μ – коэффициент расхода через сечение S_1 ; k_0 – показатель адиабаты газа; V_1 – удельный (отнесенный к массе) объем газа в сечении S_1 . Учитывая соотношение $V_1 P_1 = RQ_A$, уравнение (65) можно представить в виде

$$G_1 = \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1, \quad K_1 = \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 + 1} \left(\frac{2}{k_0 + 1} \right)^{\frac{2}{k_0 - 1}}}. \quad (66)$$

Для докритического истечения газа через сечение S_2 весовой расход определяется выражением

$$G_2 = \mu S_2 \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 - 1} \left(\left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{2}{k_0}} - \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{k_0 + 1}{k_0}} \right) \frac{P}{V}}, \quad (67)$$

которое более компактно можно переписать следующим образом:

$$G_2 = \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2 \sqrt{P(P - P_2)}, \quad K_2 = \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 - 1} \frac{P}{P - P_2} \left(\left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{2}{k_0}} - \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{k_0+1}{k_0}} \right)}. \quad (68)$$

Коэффициент K_2 в уравнении (68), в отличие от K_1 из соотношения (66), зависит от P и в общем случае является переменным, однако при небольших вариациях P значение коэффициента K_2 можно считать квазистационарным, т.е. $K_2 \approx const$, что хорошо согласуется с практикой.

Подставляя выражения (66), (68) в уравнение (64), получаем

$$\frac{V}{RQ_A} \frac{dP}{dt} = \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1 - \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2 \sqrt{P(P - P_2)}. \quad (69)$$

Уравнение (69) нелинейное, но при $P_1, P_2 = const$ и неподвижном положении задвижек $S_1^*, S_2^* = const$ в ресивере возникает установившийся режим $P^* = const$, поэтому если ввести в рассмотрение малые отклонения

$$\Delta S_1 = S_1 - S_1^*, \quad \Delta S_2 = S_2 - S_2^*, \quad \Delta P = P - P^*, \quad (70)$$

то его можно линеаризовать и представить его в виде

$$\begin{aligned} \frac{V}{RQ_A} \frac{d\Delta P}{dt} = & \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1^* - \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2^* \sqrt{P^*(P^* - P_2)} + \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} \Delta S_1 - \\ & - \left(\frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} \sqrt{P^*(P^* - P_2)} \right) \Delta S_2 - \frac{\mu K_2}{2\sqrt{RQ_A}} S_2^* \left(\sqrt{\frac{P^* - P_2}{P^*}} + \sqrt{\frac{P^*}{P^* - P_2}} \right) \Delta P. \end{aligned} \quad (71)$$

Поскольку установившийся режим в ресивере описывается уравнением

$$\frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1^* = \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2^* \sqrt{P^*(P^* - P_2)}, \quad (72)$$

то, вычитая уравнение (72) из уравнения (71), можно получить следующее уравнение динамики ресивера в отклонениях:

$$\begin{aligned} \frac{VP^*}{RQ_A} \frac{d\frac{\Delta P}{P^*}}{dt} + \frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A} P^* (P^* - P_2)} \frac{\Delta P}{P^*} = \\ = \frac{\mu K_1 P_1 S_1^*}{\sqrt{RQ_A}} \frac{\Delta S_1}{S_1^*} - \left(\frac{\mu K_2 S_2^*}{\sqrt{RQ_A}} \sqrt{P^*(P^* - P_2)} \right) \frac{\Delta S_2}{S_2^*}. \end{aligned} \quad (73)$$

Введем следующие обозначения:

$$x = \frac{\Delta P}{P^*}, \quad u_1 = \frac{\Delta S_1}{S_1^*}, \quad u_2 = \frac{\Delta S_2}{S_2^*},$$

$$T_0 = \frac{\frac{VP^*}{RQ_A}}{\frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A P^* (P^* - P_2)}}}, K_1 = \frac{\frac{\mu K_1 P S_1^*}{\sqrt{RQ_A}}}{\frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A P^* (P^* - P_2)}}}, K_2 = -\frac{\frac{\mu K_2 S_2^*}{\sqrt{RQ_A}} \sqrt{P^* (P^* - P_2)}}{\frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A P^* (P^* - P_2)}}},$$

тогда уравнение (73), записанное в первой форме записи, можно представить в виде

$$T_0 \frac{dx}{dt} + x = K_1 u_1 + K_2 u_2. \quad (74)$$

Отметим, что уравнение (74) записано относительно двух входных воздействий, если же, например, со стороны компрессора положение заслонки 1 во времени не изменяется, т.е. $\Delta S_1 = 0$, $u_1 = 0$, то в этом случае получим

$$T_0 \frac{dx}{dt} + x = K_2 u_2. \quad (75)$$

Во второй форме записи уравнение (74) имеет вид

$$x(s) = \frac{K_1}{T_0 s + 1} u_1(s) + \frac{K_2}{T_0 s + 1} u_2(s). \quad (76)$$

2.4. Гидравлический сервомотор

Схема гидравлического сервомотора с поступательно движущимся поршнем показан на рис. 14а, где z_M , z_3 – перемещения поршней сервомотора и золотника; P_H , P_B – давления масла в полостях сервомотора (индексы H и B указывают соответственно на положения нижнее и верхнее); P_{II} , $P_A = const$ – давления масла от источника питания и на сливе, причем $P_A = 0$.

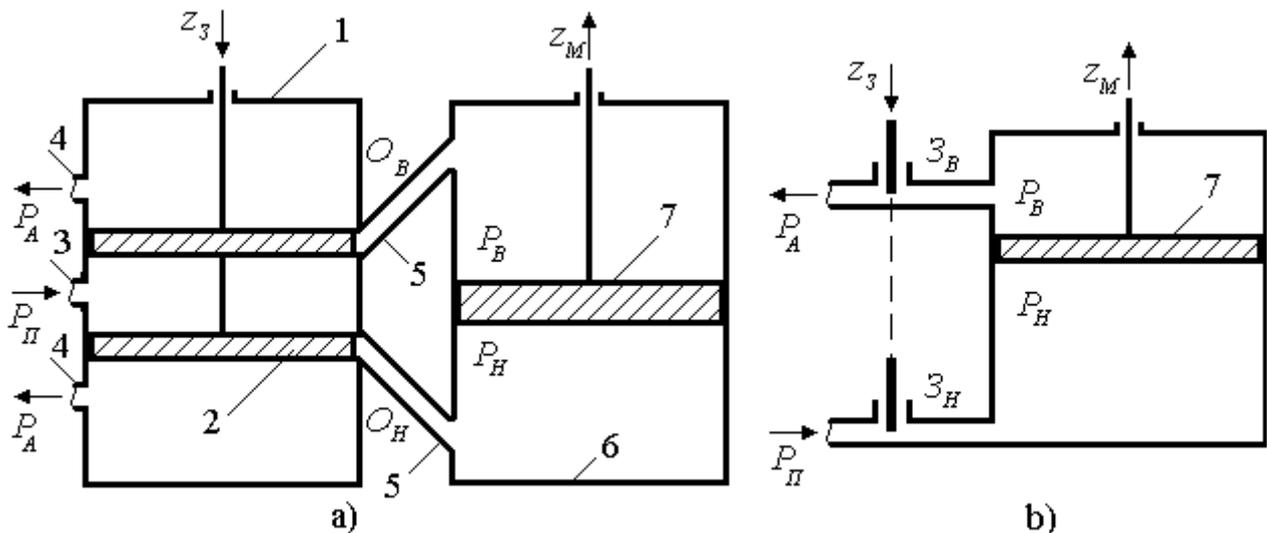


Рис. 14. Исходная и эквивалентная схемы гидравлического сервомотора.

Рассмотрим принцип действия сервомотора с золотниковым управлением. К цилиндрическому золотнику 1 (см. рис. 14а) по трубе 3 от источника питания подается масло под давлением. Подвижная часть золотника может перемещаться вверх и вниз. Золотник состоит из двойного поршня, выполненного так, что в среднем положении он закрывает одновременно оба окна O_B и O_H , соединяющих через каналы 5 золотник с цилиндром 6 сервомотора. При смещении поршня золотника вниз от своего нейтрального положения нижняя полость цилиндра сервомотора соединяется через золотник с напорной трубой 3, а верхняя – со сливной трубой 4. Благодаря наличию разности давлений, образующихся по обе стороны поршня 7, последний будет двигаться вверх. При перемещении поршня золотника вверх относительно нейтрального положения поршень получает обратное направление движения.

Составим уравнение динамики сервомотора при движении поршня 7 вверх (см. рис. 14б), где золотник заменен задвижками Z_B и Z_H , жестко связанными между собой.

Уравнения гидравлики, описывающие расход масла Q_H , протекающего через дросселируемое отверстие (задвижка Z_H) и Q_B , вытекающего через сливное отверстие (задвижка Z_B), имеют вид

$$Q_H = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H)}, \quad Q_B = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B}, \quad (77)$$

где μ – коэффициент расхода при полностью открытых отверстиях; b – ширина отверстия; z_3 – перемещение задвижки; γ – плотность масла. Из уравнений (77) следует, что при $Q_H^* = Q_B^*$, т.е. в установившемся режиме, между давлениями установится соотношение

$$P_{II} - P_H^* = P_B^*. \quad (78)$$

Запишем уравнения расхода масла в сервомоторе для нижней и верхней полостей

$$Q_H = Q_M + Q_{CH}, \quad Q_B = Q_M - Q_{CB}, \quad (79)$$

где Q_M – расход, затрачиваемый на перемещение поршня сервомотора; Q_{CH} , Q_{CB} – количества масла, расходуемые на сжатие (расширение). Тогда уравнения (77) можно записать следующим образом:

$$Q_M + Q_{CH} = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H)}, \quad (80)$$

$$Q_M - Q_{CB} = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B}.$$

Расход масла через гидравлический цилиндр Q_M определяется формулой

$$Q_M = Sz' = S \frac{dz_M}{dt}, \quad (81)$$

где S – площадь цилиндра; z' – скорость перемещения поршня.

Определим явный вид выражений, описывающих изменение расходов Q_{CH} и Q_{CB} . Для этого, во-первых, введем в рассмотрение коэффициент объемного сжатия

$$\beta = \frac{\Delta V / V}{\Delta P}, \quad (82)$$

здесь $\Delta V / V$ – относительное уменьшение объема масла при увеличении давления на величину ΔP ; во-вторых, рассмотрим количество сжатой жидкости

$$Q_C = \frac{\Delta V}{\Delta t}; \quad (83)$$

в-третьих, учитывая равенство (82) и вычисляя предел при $\Delta t \rightarrow 0$, запишем уравнение (83) в виде

$$Q_C = V\beta \frac{dP}{dt}. \quad (84)$$

Динамику изменения расходов Q_{CH} и Q_{CB} , опираясь на выражение (84), опишем следующим образом:

$$Q_{CH} = V_H \beta \frac{dP_H}{dt}, \quad Q_{CB} = V_B \beta \frac{dP_B}{dt},$$

что с учетом соотношения (81) позволяет представить уравнения (80) в виде

$$\begin{aligned} S \frac{dz_M}{dt} + V_H \beta \frac{dP_H}{dt} &= \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H)}, \\ S \frac{dz_M}{dt} - V_B \beta \frac{dP_B}{dt} &= \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B}. \end{aligned} \quad (85)$$

Уравнения (85) являются нелинейными, поэтому осуществим их линеаризацию, т.е. ограничимся только первыми членами разложения нелинейных функций в ряд Тейлора, рассматривая следующие отклонения переменных в установившемся режиме

$$\begin{aligned} \Delta P_H &= P_H - P_H^*, \quad \Delta P_B = P_B - P_B^*, \quad \Delta Q_H = Q_H - Q_H^*, \\ \Delta Q_B &= Q_B - Q_B^*, \quad \Delta z_3 = z_3 - z_3^*, \end{aligned}$$

который опишем в соответствии с уравнениями (77) в виде

$$Q_H^* = \mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H^*)}, \quad Q_B^* = \mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B^*}. \quad (86)$$

Исключив слагаемые Q_H^* и Q_B^* при линеаризации уравнений (85) соответственно в первом и втором уравнениях, получим следующие уравнения в

отклонениях:

$$S \frac{dz_M}{dt} + V_H \beta \frac{dP_H}{dt} =$$

$$= \left(\mu b \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H^*)} \right) \Delta z_3 - \left(\mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma (P_{II} - P_H^*)}} \right) \Delta P_H, \quad (87)$$

$$S \frac{dz_M}{dt} - V_B \beta \frac{dP_B}{dt} =$$

$$= \left(\mu b \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B^*} \right) \Delta z_3 + \left(\mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma P_B^*}} \right) \Delta P_B. \quad (88)$$

Если предположить, что поршень находится в среднем положении, т.е. $V_B = V_H = V$, то с учетом равенства (78) для уравнений (87) и (88), в результате суммирования их левых и правых частей, получим одно уравнение вида

$$2S \frac{d\Delta z_M}{dt} - V \beta \frac{d(\Delta P_H - \Delta P_B)}{dt} =$$

$$= \left(2\mu b \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \right) \Delta z_3 - \left(\mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma P_B^*}} \right) (\Delta P_H - \Delta P_B). \quad (89)$$

Уравнение расходов (89) можно дополнить уравнением движения поршня сервомотора

$$m \frac{d^2 \Delta z_M}{dt^2} = S(\Delta P_H - \Delta P_B), \quad (90)$$

где m – масса поршня, штока и других движущихся частей.

Объединение двух уравнений (89), (90) и исключение промежуточной переменной $(\Delta P_H - \Delta P_B)$ позволяет записать уравнение гидравлического сервомотора следующим образом:

$$\frac{mV\beta}{2S^2} \frac{d^3 \Delta z_M}{dt^3} + \left(\mu b z_3^* \frac{m}{S^2} \sqrt{\frac{g}{\gamma P_B^*}} \right) \frac{d^2 \Delta z_M}{dt^2} + \frac{d\Delta z_M}{dt} = \left(\frac{\mu b}{S} \sqrt{\frac{2gP_B^*}{\gamma}} \right) \Delta z_3, \quad (91)$$

которое с учетом обозначений

$$x = \Delta z_M, \quad u = \Delta z_3, \quad T = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{mV\beta}{2}}, \quad \zeta = \mu b z_3^* \frac{m}{S^2} \sqrt{\frac{g}{\gamma P_B^*}}, \quad K = \frac{\mu b}{S} \sqrt{\frac{2gP_B^*}{\gamma}},$$

где T – постоянная времени; ζ – коэффициент затухания, $0 \leq \zeta < 1$; K – коэффициент передачи гидравлического сервомотора, можно представить в первой форме записи

$$T^2 \frac{d^3 x}{dt^3} + 2\zeta T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = Ku. \quad (92)$$

Во второй форме записи уравнение (92) имеет вид

$$x(s) = \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} u(s). \quad (93)$$

2.5. Длинный бьеф

Ирригационные каналы имеют большое количество модификаций. Схема некоторого участка оросительной сети в виде длинного бьефа – типового ирригационного объекта показана на рис. 15.

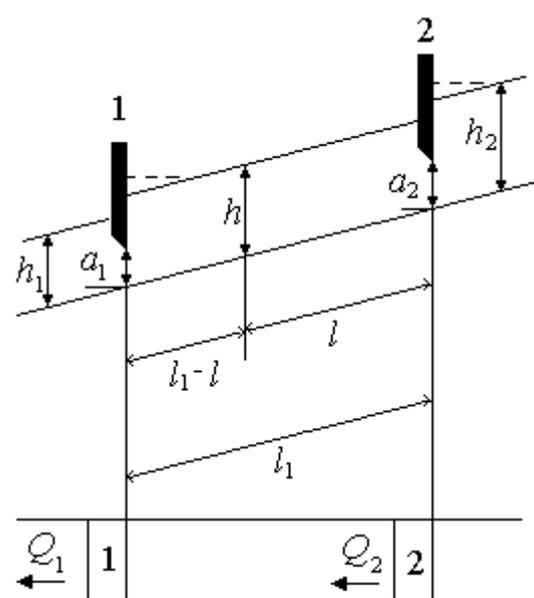


Рис. 15. Длинный бьеф ирригационной системы.

Для построения математической модели фрагмента или участка оросительной сети обычно используется уравнение Сен-Венана, описывающее неустановившееся движение воды в канале с помощью дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа

$$J \frac{\partial h_0}{\partial l} = \frac{1}{2g} \frac{\partial v_0^2}{\partial l} + \frac{1}{2g} \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{v_0^2}{C_0^2 R}, \quad (94)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial Q_0}{\partial l} = 0,$$

где R – гидравлический радиус; C_0 – коэффициент Шези; h_0 – глубина воды в канале; w_0 – живое сечение потока воды в канале; Q_0 – расход воды; v_0 – средняя скорость воды; J – уклон канала; l – пространственная координата.

Используя известные результаты, на основании теории волн малой амплитуды можно получить линейное приближение уравнений Сен-Венана, т.е. для выражений (94) можно записать следующие линеаризованные уравнения в отклонениях от некоторого установившегося режима

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial l} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial \Delta v}{\partial l} + 2J \frac{\Delta v}{v} + J \left(\frac{2B}{w} - \frac{\chi}{h} \right) \Delta h = 0, \quad (95)$$

$$B \frac{\partial \Delta h}{\partial t} + w \frac{\partial \Delta v}{\partial l} + vB \frac{\partial \Delta h}{\partial l} = 0,$$

где B – ширина потока поверху; χ – смоченный периметр русла канала.

Уравнения (95) описывают неустановившееся движение воды в канале без перегораживающих сооружений, но при их наличии необходимо учитывать граничные условия. Заметим, не вдаваясь в физическую сущность, что для верхнего и нижнего створов канала граничные условия можно определить по соответствующим формулам, обычно представленным в виде стандартных таблиц.

Кроме того, уравнения (95) можно свести к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям с сосредоточенным запаздыванием по управляющему воздействию – относительному открытию затвора, перегораживающего сооружения: $u = \Delta a/a$.

Известно, что закон относительного изменения глубины наполнения $x = \Delta h/h$ в любом створе канала (изображенного на рис. 15 и представляющего собой в частном случае бьеф значительной протяженности, где обычно пренебрегают влиянием всех отраженных волн, за исключением первой) можно записать в изображениях Лапласа следующим образом:

$$x(s) = \left(\frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} (u(s) + x_2(s)) - \frac{L_2 s + K_2}{T_2 s + 1} x_0 \right) \times \left(1 - \frac{L_3 s + K_3}{T_3 s + 1} e^{-\tau_2 s} \right) e^{-\tau_1 s} + x_0, \quad (96)$$

здесь $x_2 = \Delta h_2/h_2$; $u = \Delta a_2/a_2$ – относительное открытие затвора гидротехнического сооружения; x_0 – начальное значение x ; $T_i, L_i, i=1, 2, 3$ – постоянные времени объекта; K_i – коэффициенты передачи объекта; $\tau_1, \tau_2 = const$ – временные запаздывания. Структура модели (96) представлена на рис. 16.

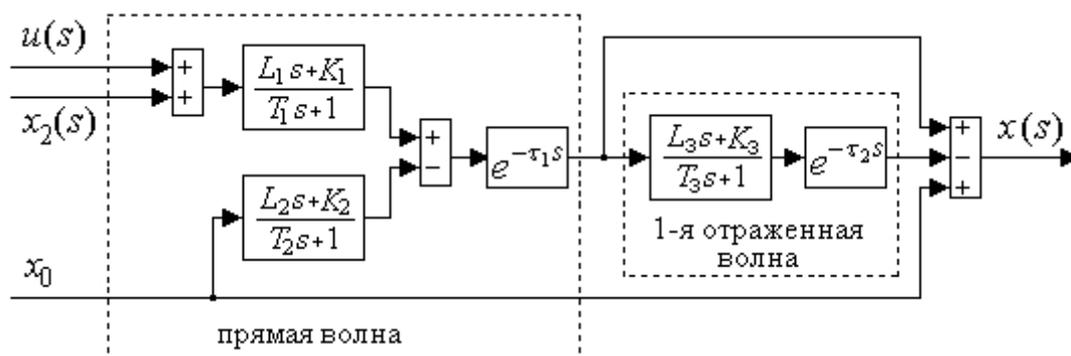


Рис. 16. Структурная схема модели длинного бьефа (96).

Уравнение (96) может иметь и более простой вид. В частности, если нижежащее сооружение отсутствует или находится на таком расстоянии $l_1 \gg l_1 - l$, что можно пренебречь и первой отраженной волной, то уравнение изменения глубины наполнения в створе наблюдения будет следующим:

$$x(s) = \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} (u(s) + x_2(s)) - \left(\frac{L_2 s + K_2}{T_2 s + 1} e^{-\tau_2 s} - 1 \right) x_0,$$

а при нулевых начальных условиях $x_0 = 0$ получит вид

$$x(s) = \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} u(s) + \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} x_2(s). \quad (97)$$

Если же уровень верхнего бьефа во времени является квазистационарным $\Delta h_2 \cong 0$, например, – случай, когда верхним бьефом служит водохранилище, то уравнение (97) станет еще более простым

$$x(s) = \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} u(s). \quad (98)$$

В первой форме записи соотношению (98) соответствует уравнение

$$T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = L_1 \frac{du(t - \tau_1)}{dt} + K_1 u(t - \tau_1). \quad (99)$$

2.6. Печь окисления серы

На рис. 17а представлена технологическая схема процесса получения сернистого ангидрида, основанного на окислении природной серы в форсуночных печах.

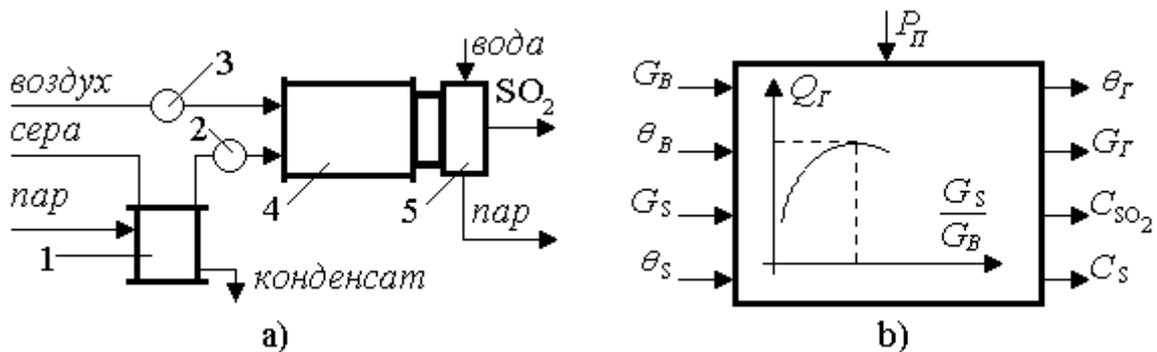


Рис. 17. Технологическая (а) и структурная (б) схемы процесса окисления серы.

Предварительно расплавленная сера из сборника 1 насосом 2 подается на форсунки, расположенные в торцевой части печи 4. Сюда же подводится основное количество воздуха, необходимого для окисления серы. С помощью вентилятора 3 дополнительный воздух из атмосферы вводится через патрубок в стенке цилиндрической печи. Образовавшийся сернистый ангидрид поступает в котел-утилизатор 5, где теплота газа используется для получения перегретого пара. Разрежение в печи создается воздуходувками, расположенными в конце технологической линии производства серной кислоты.

Если рассматривать печь в виде структурной схемы, представленной на рис. 17b, то в ней обычно выделяют:

выходные координаты: θ_G и G_G – температура и расход газа печи; C_{SO_2} – концентрация SO_2 в газе; C_S – концентрация серы в газе в результате проскока несгоревшей серы на выход печи;

входные воздействия: θ_B , G_B – температура и расход воздуха; θ_S , G_S – температура и расход серы;

возмущающее воздействие: P_{II} – разрежение в печи (возмущающее воздействие).

При построении математической модели в качестве выходной переменной примем температуру в зоне реакции и рассмотрим тепловой баланс печи сжигания серы.

Статические свойства печи сжигания серы. В установившемся режиме, соответствующем равенству приходящей, уходящей и рассеиваемой теплоты в печи, справедливо равенство

$$\sum_i Q_i = Q_S + Q_B + Q_P - Q_G - Q_{nom} = 0, \quad (100)$$

где Q_S , Q_B – теплота, вносимая соответственно серой и воздухом; Q_P – теплота реакции; Q_{nom} – потери теплоты в окружающую среду. Уравнение теплового баланса печи является одновременно и уравнением статики.

Теплота, приносимая с поступающей средой, определяется соотношением

$$\begin{aligned} Q_S &= q_1 + q_2 + q_3, \\ q_1 &= G_S c_{S_{тв}} \theta_{S1}, \quad q_2 = G_S c_{S_{ж}} \theta_{S2}, \quad q_3 = G_S c_{S_{пл}}, \\ \theta_{S1} &= \theta_{S_{пл}} - \theta_{SO_2}, \quad \theta_{S2} = \theta_{S_{тв}} - \theta_{S_{пл}}, \end{aligned}$$

или

$$Q_S = G_S (c_{S_{тв}} \theta_{S1} + c_{S_{ж}} \theta_{S2} + c_{S_{пл}}), \quad (101)$$

где q_1 – теплота нагревания твердой серы от θ_{SO_2} (начальная температура) до $\theta_{S_{пл}}$ (температура плавления); q_2 – теплота нагревания жидкой серы от $\theta_{S_{пл}}$ до $\theta_{S_{тв}}$ (температура максимальной вязкости); q_3 – теплота плавления серы; $c_{S_{тв}}$, $c_{S_{ж}}$ – удельная теплоемкость твердой и жидкой серы; $c_{S_{пл}}$ – удельная теплота плавления серы.

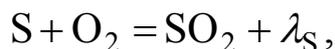
Теплота, приносимая воздухом, поступающим в печь, описывается уравнением

$$Q_B = G_B c_B \theta_B, \quad (102)$$

где c_B – теплоемкость воздуха.

Поскольку реакция окисления серы экзотермическая, то количество теп-

лоты, выделяемой за счет теплового эффекта реакции, определяется выражением



где λ_S – количество тепла, выделяемого при сжигании одной массовой единицы серы (теплота сгорания серы). Если пренебречь незначительным проскоком серы на выход печи, то количество теплоты, *выделяемой в ходе реакции окисления*, определяется соотношением

$$Q_P = G_S \lambda_S. \quad (103)$$

Теплота, уносимая из печи реакционным газом, определяется формулой

$$Q_\Gamma = G_\Gamma c_\Gamma \theta_\Gamma. \quad (104)$$

Будем полагать, что потери теплоты пропорциональны ее притоку

$$Q_{nom} = \beta_{nom} (Q_S + Q_B + Q_P), \quad (105)$$

где β_{nom} – коэффициент теплопотерь.

На основании (100) – (105) имеем

$$(1 - \beta_{nom}) [G_S (c_{Sme} \theta_{S1} + c_{Sж} \theta_{S2} + c_{Snl} + \lambda_S) + G_B c_B \theta_B] - G_\Gamma c_\Gamma \theta_\Gamma = 0. \quad (106)$$

Уравнение (106) определяет взаимосвязь основных параметров процесса в установившемся режиме, при $G_\Gamma = G_B$ его можно переписать в виде

$$\theta_\Gamma = \frac{(1 - \beta_{nom})}{c_\Gamma} \left[\frac{G_S}{G_B} (c_{Sme} \theta_{S1} + c_{Sж} \theta_{S2} + c_{Snl} + \lambda_S) + c_B \theta_B \right]. \quad (107)$$

Таким образом, статическая характеристика печи сжигания серы (107) по основному каналу имеет вид

$$\theta_\Gamma = f \left(\frac{G_S}{G_B} \right), \quad (108)$$

номинальный участок которой является относительно линейным.

Динамические свойства печи сжигания серы. Приращение температуры в зоне реакции прямо пропорционально приращениям входящей и уходящей теплоты и обратно пропорционально тепловой емкости реакционной зоны печи

$$\frac{d\Delta\theta_\Gamma}{dt} = \frac{1}{A_\Pi} (\Delta Q_S + \Delta Q_B + \Delta Q_P - \Delta Q_\Gamma - \Delta Q_{nom}), \quad (109)$$

где A_Π – тепловая емкость реакционной зоны печи.

Примем ряд следующих допущений: составы продуктов на входе в печь постоянны; температура уходящего реакционного газа равна температуре в зоне реакции; температура наружной стенки и теплоотдача от наружной стенки в окружающую среду постоянны ввиду низкой теплопроводности печи;

состав газа в печи равен составу реакционного газа, в соответствии с этим, согласно формулам (101) – (1.105), приращения ΔQ_i можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta Q_S &= (c_{S_{me}}\theta_{S1} + c_{S_{жс}}\theta_{S2} + c_{S_{nl}})\Delta G_S, \\ \Delta Q_B &= c_B\theta_B\Delta G_B = 0, \quad \Delta\theta_P = \lambda_S\Delta G_S, \\ \Delta Q_\Gamma &= c_\Gamma G_\Gamma\Delta\theta_\Gamma, \\ \Delta Q_{nom} &= \beta_{nom}(c_{S_{me}}\theta_{S1} + c_{S_{жс}}\theta_{S2} + c_{S_{nl}})\Delta G_S.\end{aligned}\tag{110}$$

В первой форме записи, с учетом соотношений (110), уравнение (109) можно записать следующим образом:

$$T\frac{dx}{dt} + x = Ku, \quad x = \Delta\theta_\Gamma, \quad u = \Delta G_S,\tag{111}$$

$$T = \frac{A_\Pi}{c_\Gamma G_\Gamma}, \quad K = \frac{(1 - \beta_{nom})}{c_\Gamma G_\Gamma}(c_{S_{me}}\theta_{S1} + c_{S_{жс}}\theta_{S2} + c_{S_{nl}} + \lambda_S).\tag{112}$$

Следует отметить, что исполнительный механизм по технологическим соображениям расположен на некотором удалении от форсунок, подающих серу в печь. В связи с этим в основном канале управления "расход серы – температура газа" возникает так называемое транспортное запаздывание τ , т.е. реальный процесс описывается уравнением

$$T\frac{dx}{dt} + x = Ku(t - \tau),\tag{113}$$

которому во второй форме записи соответствует уравнение

$$x(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s} u(s).\tag{114}$$

2.7. Двигатель постоянного тока

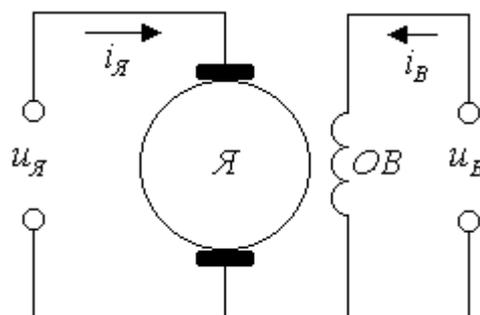


Рис. 18. Схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

На рис. 18 схематически показан двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. В соответствии со вторым законом Ньютона для вращательного движения уравнение моментов на валу двигателя:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_D - M_C,\tag{115}$$

где ω – угловая скорость вращения вала двигателя; J – момент инерции движущихся частей, приве-

денный к валу двигателя.

Пусть $M_D = M_D(\omega, u_{я})$, $M_C = M_C(\omega, t)$, т.е. вращающий момент M_D зависит от угловой скорости ω и напряжения $u_{я}$, приложенного к якорию, а момент сопротивления M_C зависит от угловой скорости ω и времени t . Эти зависимости обычно задаются аналитически или в виде графиков и определяются типом двигателя, характером нагрузки и т.д. Типичные механические характеристики электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, отражающие зависимость M_D от ω , приведены на рис. 19, где также показана и характеристика M_C . Поскольку вращающий момент M_D и момент сопротивления M_C являются нелинейными функциями скорости вращения ω , то и уравнение (115) – нелинейное. Для линеаризации уравнения (115) перейдем к уравнению в отклонениях, параметры которого – ω_0 и u_0 – определяются из графиков, приведенных на рис.19, при выполнении условия

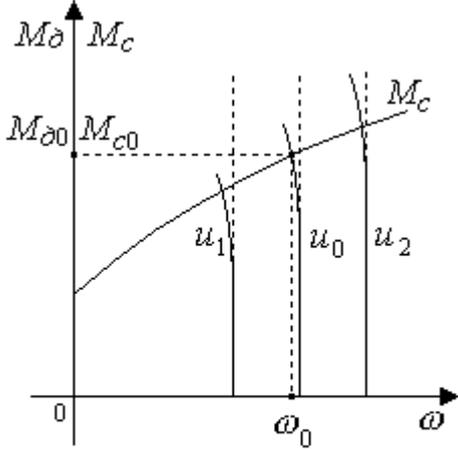


Рис. 1.19. Механические характеристики двигателя.

$M_{D0} = M_{C0}$.

$$M_{D0} = M_{C0}. \quad (116)$$

Разложим нелинейные функции $M_D = M_D(\omega, u_{я})$ и $M_C = M_C(\omega, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (ω_0, u_0) . Если в этих разложениях отбросить члены высшего порядка малости относительно приращений $\Delta\omega$ и Δt , то с учетом соотношения $\omega' = \Delta\omega'$ уравнение (115) в относительных единицах получит следующий линеаризованный вид:

$$J\omega_H \frac{d\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_H}\right)}{dt} + \omega_H \left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right) \frac{\Delta\omega}{\omega_H} = u_{я\max} \left(\frac{\partial M_D}{\partial u} \right)_0 \frac{\Delta u_{я}}{u_{я\max}} - \Delta M_C, \quad (117)$$

где $\Delta M_C = \Delta M_C(t)$ – приращение, учитывающее зависимость момента сопротивления от времени. Введем в рассмотрение обозначения:

$$T = \frac{J}{\left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right)}, \quad K = \frac{u_{я\max} \left(\frac{\partial M_D}{\partial u} \right)_0}{\omega_H \left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right)}, \quad (118)$$

$$f(t) = -\frac{\Delta M_C}{\omega_H \left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right)}, \quad x = \frac{\Delta\omega}{\omega_H}, \quad u = \frac{\Delta u_{я}}{u_{я\max}},$$

где ω_H – номинальное значение ω ; $u_{Я_{\max}}$ – максимальное значение $u_{Я}$. Пусть $f(t) = 0$, тогда уравнение (117) будет иметь следующий вид:

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku. \quad (119)$$

Если в качестве выходной величины двигателя рассматривать угол поворота \bar{x} , а не скорость x , то, учитывая равенство $x = \bar{x}'$, уравнение (119) можно представить в виде

$$T \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \frac{d\bar{x}}{dt} = Ku. \quad (120)$$

Во второй форме записи уравнениям (119) и (120) соответствуют уравнения

$$x(s) = \frac{K}{Ts + 1} u(s), \quad (121)$$

$$\bar{x}(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} u(s). \quad (122)$$

2.8. Асинхронный двухфазный двигатель

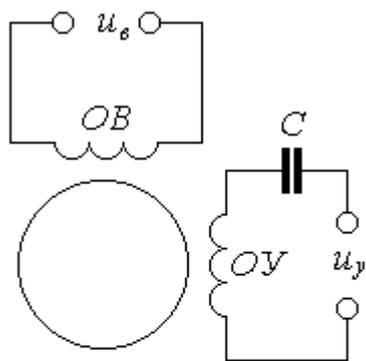


Рис. 20. Схема асинхронного двухфазного двигателя.

Асинхронный двухфазный двигатель представляет собой электрическую машину переменного тока. В пазах статора двигателя располагаются две обмотки таким образом, что их магнитные поля взаимно перпендикулярны. Одна обмотка подключается к источнику переменного тока с постоянным напряжением и называется обмоткой возбуждения, а другая обмотка подключается к источнику переменного тока с изменяющимся напряжением и называется обмоткой управления. Ротор двигателя представляет собой полый тонкостенный металлический стакан.

Схема асинхронного двухфазного двигателя показана на рис. 20. Емкость C служит для создания сдвига по фазе в 90° между напряжением в обмотке возбуждения $u_с$ и обмотке управления u_y , необходимого для создания вращающегося магнитного поля.

Уравнение моментов на валу асинхронного двухфазного двигателя имеет вид уравнения (115), где $M_D = M_D(u_y, \omega)$ – вращающий момент; M_C – момент сопротивления; J – момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу двигателя.

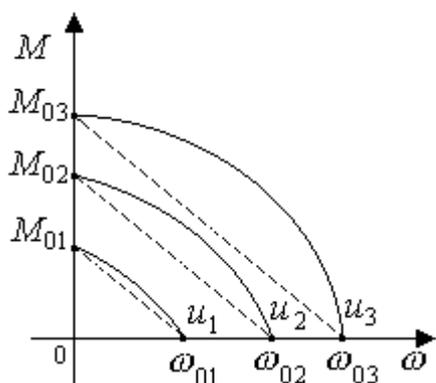


Рис. 21. Механические характеристики двигателя.

Механические характеристики асинхронного двухфазного двигателя, приведенные на рис. 21, являются нелинейными. Линеаризацию нелинейностей произведем путем их замены параллельными секущими¹. Уравнение секущих опишем следующим образом:

$$M_{Д} = M_{Д0} - k_1\omega, \quad (123)$$

где k_1 – коэффициент, зависящий от вида механической характеристики, – например, пусть

$$M_{Д0} = k_2u_y. \quad (124)$$

С учетом выражений (123) и (124) уравнение (115) получит вид

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku + f(t), \quad (125)$$

$$x = \omega, \quad u = u_y, \quad T = \frac{J}{k_1}, \quad K = \frac{k_2}{k_1}, \quad f(t) = \frac{M_C}{k_1}.$$

Уравнение (125) при $f(t) = 0$ и во второй форме записи будет полностью идентично выражению (121).

¹ Метод секущих (альтернатива разложению в ряд Тейлора) позволяет получить хорошее приближение секущей прямой к кривой не только в окрестности установившегося состояния, но и в некоторой области возможных режимов работы линеаризуемого элемента.

ГЛАВА 3.

ПАКЕТ MATLAB И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

MATLAB “Matrix Laboratory” (лаборатория матриц) – это одна из наиболее популярных разработок фирмы The MathWorks Inc. Пакет MATLAB – мощная и весьма удобная программная система, предоставляющая пользователю достаточно просто и быстро проводить сложные вычислительные эксперименты. В MATLAB базовую роль играют специализированные группы программ – toolboxes, представляющие собой соответствующие коллекции функций, позволяющие решать частные задачи.

Для работы с системой MATLAB необходимо предварительно изучить его язык программирования, который в отличие от обычных алгоритмических языков достаточно прост. Язык MATLAB является языком матриц и массивов высокого уровня с управлением потоками, функциями, структурами данных и вводом-выводом. Среда MATLAB – это совокупность инструментов (приспособлений), состоящая из средств, необходимых для управления переменными в рабочем пространстве, ввода и вывода данных, а также средств для создания, контроля и отладки программ MATLAB.

Управляемая графика MATLAB – графическая система, включающая как команды высокого уровня для визуализации данных, обработки изображений, анимации и создания иллюстраций, так и команды низкого уровня, позволяющие полностью редактировать внешний вид графики.

Пакет MATLAB обеспечивает решение вычислительных задач на естественном матричном языке в интерактивном режиме и опирается на возможности собственного программного обеспечения. Например, можно осуществить выполнение следующих операций: вычисление собственных векторов и собственных значений; арифметические действия над матрицами, включая их обращение; решение линейных уравнений; идентификацию по методу наименьших квадратов; декомпозицию по вырожденным значениям; быстрое Фурье-преобразование; расчет цифровых фильтров; статистические расчеты.

3.1. Основы работы с пакетом MATLAB

MATLAB ориентирован на выполнение научных и инженерных расчетов на ПЭВМ. Эти расчеты могут иметь отношение как к области вычислительной математики (численное интегрирование, дифференцирование, решение оптимизационных задач, выполнение различного рода аппроксимаций, обработка исходных данных), так и к линейной алгебре, аналитической геометрии, математической статистике и прочее.

Пакет MATLAB выполняет операции над векторами и матрицами. Одномерный массив называется вектором, а двумерный – матрицей. Массивы характеризуются в общем случае размерностью и размером.

Пакет MATLAB состоит из множества файлов, особое значение имеют файлы двух типов с расширением – .mat и .m. Первые являются бинарными файлами, представляющими запись сеанса (сессии) работы с пакетом, а вторые – текстовые файлы, содержащие внешние определения команд и функций пакета. Каждый m-файл является программой, реализующей вычисления некоторой функции, в частности, довольно сложными функциями – такими как расчет коэффициентов фильтра, решение определенного класса оптимизационных задач, построение графиков и т.п. Для примера на рис. 22 приведен набор m-файлов, включенных в подкаталог timefun (функции времени и дат). Просмотр m-файлов во всех подкаталогах каталога matlab позволяет детально оценить возможности конкретной версии пакета¹.

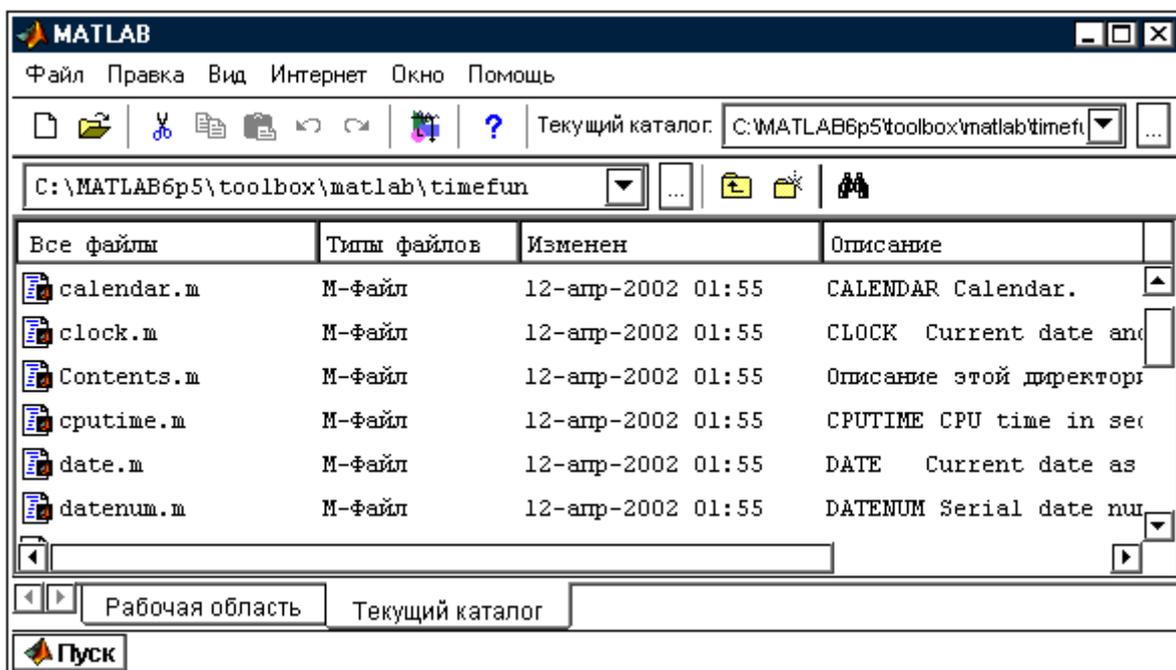


Рис. 22. Директория MATLAB/toolbox/matlab/timefun.

¹ Примеры выполнены в рамках версии MATLAB 6.5.0.

После запуска пакета MATLAB (с типовой установкой – "по умолчанию") появляется основное окно системы, представленное на рис. 23.

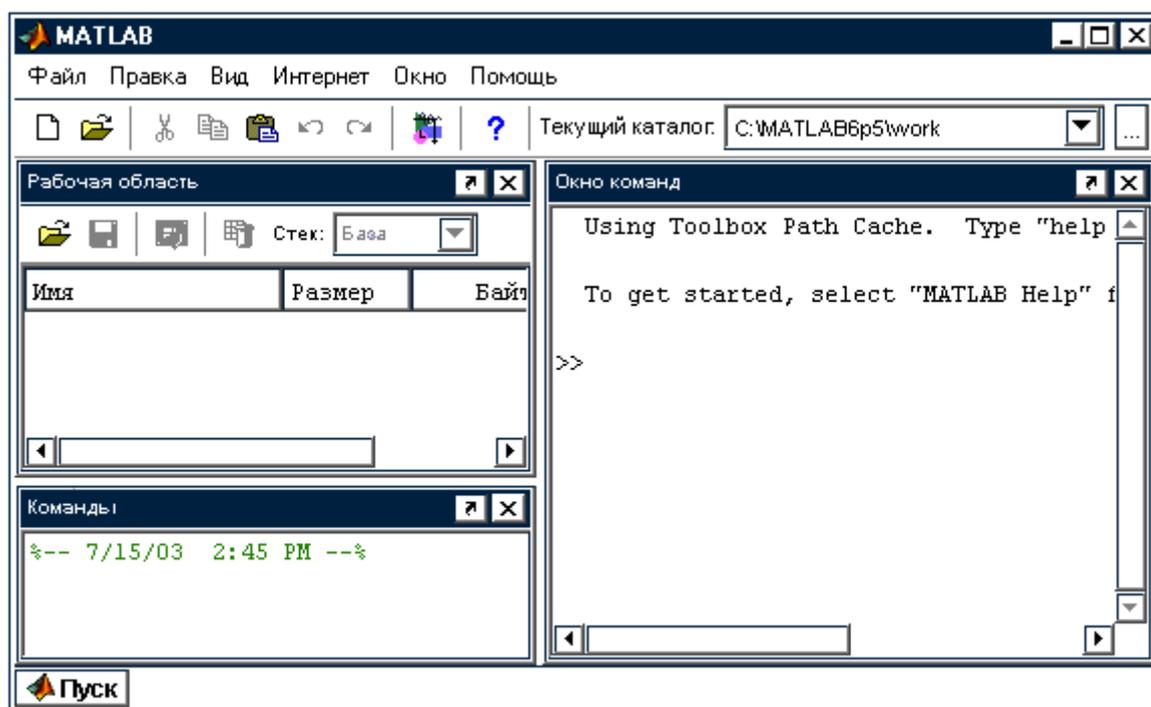


Рис. 23. Окно управления системы MATLAB.

Пакет MATLAB практически готов к выполнению вычислений в командном режиме, для работы в котором в интерактивном режиме используется простейший строчный редактор с общепринятыми командами системы Windows. Особое внимание следует обратить на применение клавиш \uparrow и \downarrow . Если выполнить ряд некоторых действий, то с помощью этих клавиш можно вернуть (в положение после маркера строки ввода – \gg) любую из ранее введенных строк для ее исправления или дублирования, поскольку клавиши перелистывают строки сверху вниз или снизу вверх.

Для очистки экрана и перемещения курсора в левый верхний угол окна управления в командном режиме применяются команды `clc` и `home`. Команда `echo`, позволяет включать или выключать отображение текстов `m`-файлов при каждом обращении к ним.

Система MATLAB в командном режиме позволяет выполнять достаточно сложные вычисления без подготовки программы, т.е. в интерактивном режиме прямых вычислений.

Сеанс работы с MATLAB принято называть рабочим, или сессией – это текущий документ, отражающий работу пользователя с системой. Входящие в сессию определения переменных и функций, расположенные в рабочей области памяти, можно сохранить на диске (команда `save`) или, наоборот, загрузить с диска (команда `load`), т.е. переместить в рабочую область ранее определенные данные.

Главное меню MATLAB (рис. 24) выглядит весьма простым и содержит всего четыре раздела:

Файл (работа с файлами);

Правка (редактирование сессии);

Окно (установка Windows-свойств окна); ? (справка).

Рассмотрим для примера первый раздел главного меню.

Раздел Файл – это самостоятельное меню, содержащее набор команд (исполняемых немедленно) и операций (требующих некоторой подготовки), список которых представлен на рис. 24. Операция Новый позволяет сформировать три типа документов (М-файл, Фигура, Модель) или вызвать окно быстрого старта GUIDE, последнее показано на рис. 25.

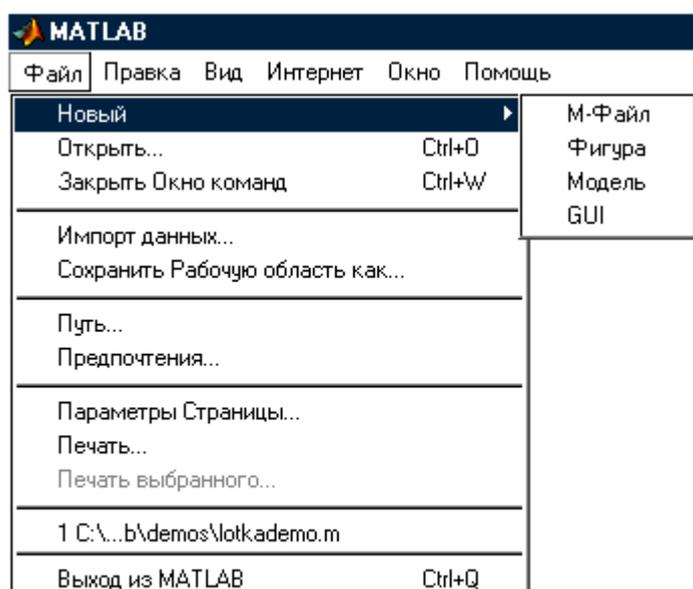


Рис. 24. Меню файловых операций.

Выполнение операций:

Открыть;

Закрыть Окно команд;

Импорт данных...;

Сохранить

Рабочую область как...;

Параметры страницы;

Печать;

Печать выбранного..., вызывают стандартные окна.

Команда Путь... вызывает одноименное диалоговое окно, представленное на рис. 26, позволяющее просматривать и изменять в MATLAB путь поиска файлов.

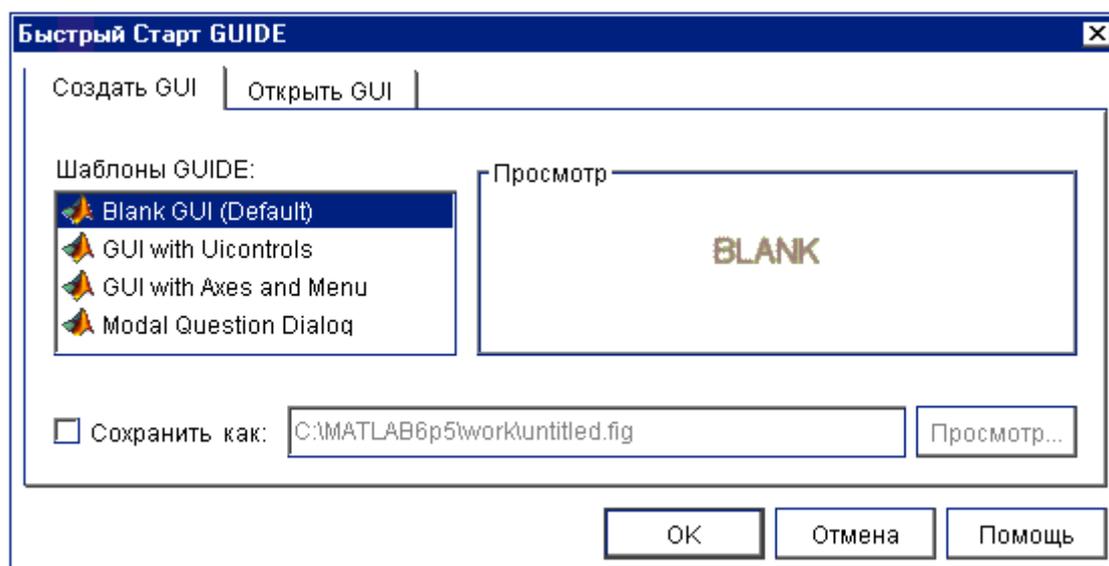


Рис. 25. Окно пользовательских графических интерфейсов (GUI).

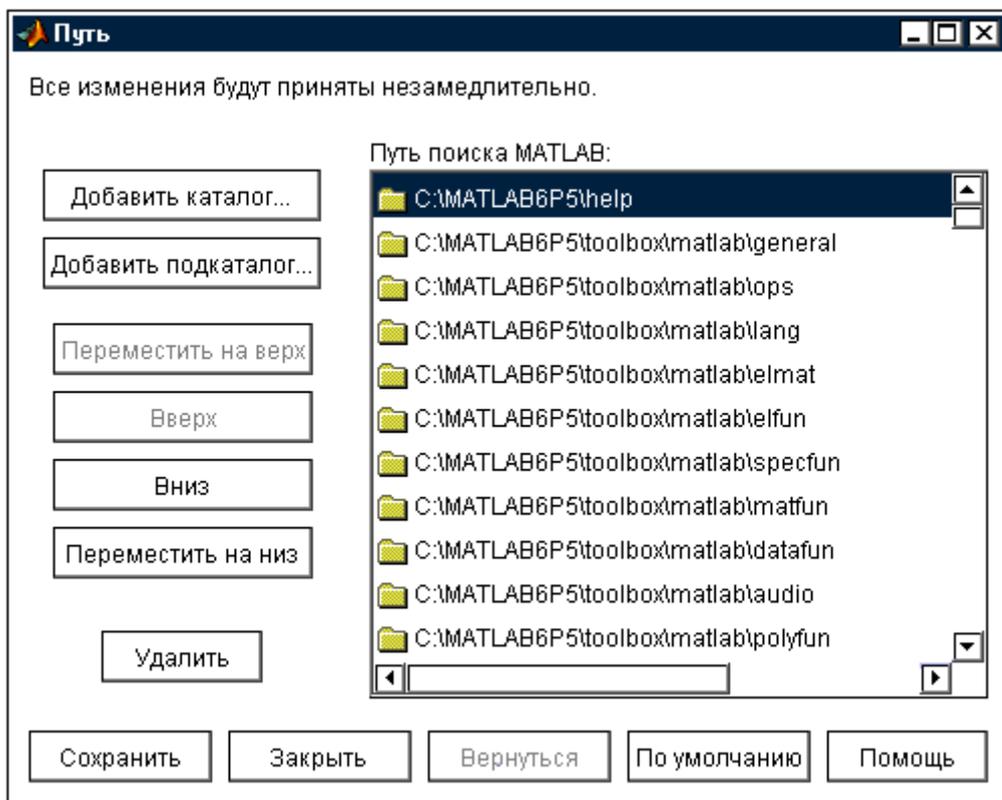


Рис. 26. Окно просмотра и установки пути поиска файлов MATLAB .

Команда Предпочтения... вызывает одноименное диалоговое окно, один из вариантов которого показан на рис. 27, позволяющее задать соответствующие свойства по ряду позиций MATLAB. В рассматриваемом случае, т.е. с помощью Окна команд Предпочтения, можно определить числовой формат отображения чисел, задать размер буфера и т.д.

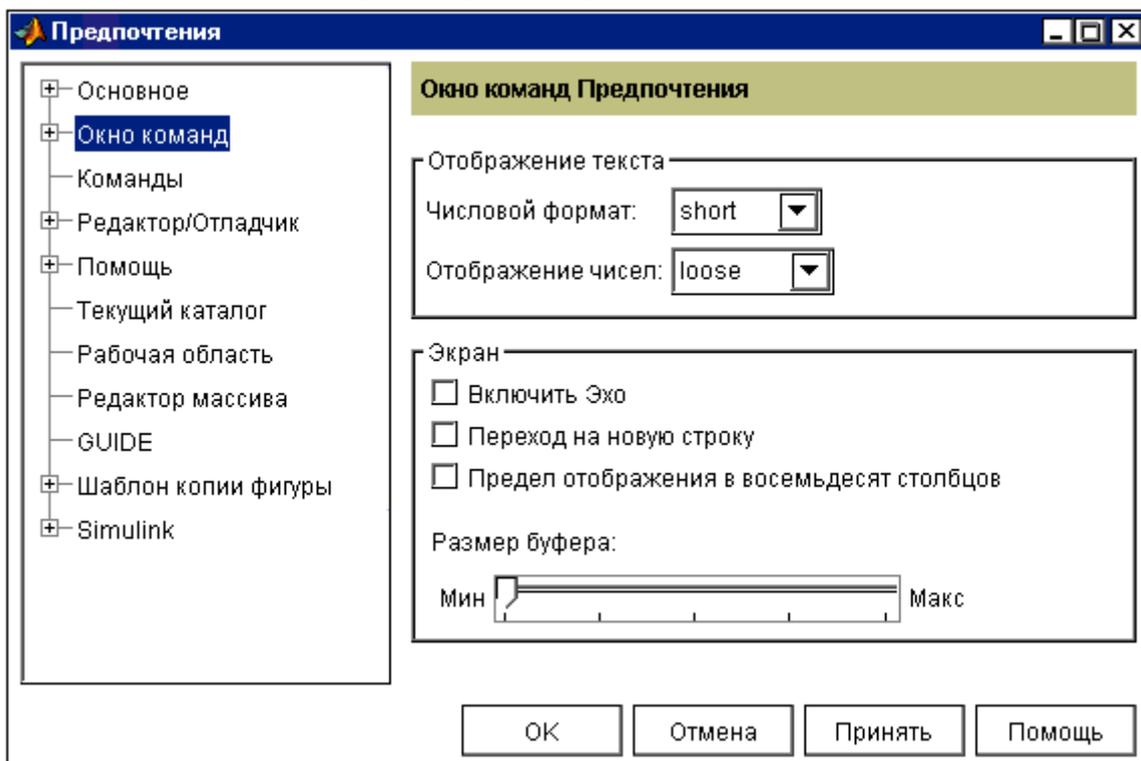


Рис. 27. Окно выбора и задания предпочтений системы MATLAB.

В пакете MATLAB для создания, редактирования и отладки m-файлов используется специальный многооконный редактор. Все m-файлы делятся на два класса: файлы-сценарии (Script-файлы), не имеющие входных параметров; файлы-функции (Function-файлы), имеющие входные параметры.

Таким образом, создаваемый в окне редактора файл без внешних данных (нет списка входных параметров), – это файл-сценарий, а файл в виде функции от входных параметров, список которых указывается в круглых скобках, – это уже файл-функция.

Например, если в окне редактора функцию, вычисляющую сумму модулей элементов векторов x и y , записать в виде

```
function zz=fun(x,y)
zz=abs(x)+abs(y);
```

а затем файл с этим текстом запомнить – пусть под именем `zz.m` (при этом окно редактора получит изображение, показанное на рис. 28), то функция `zz(x,y)` становится готовой к применению.

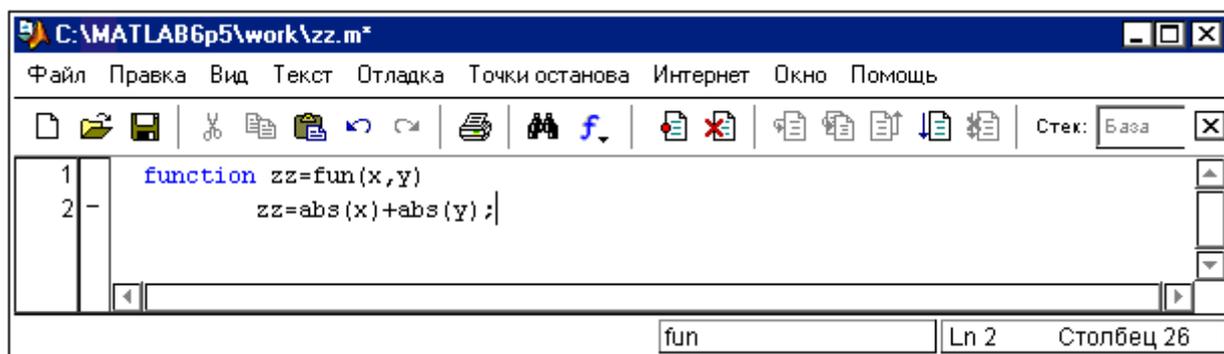


Рис. 28. Пример задания файла-функции.

Действительно, зададим в командной строке некоторые значения 2-х двумерных векторов x и y , тогда, вызывая функцию `zz(x,y)`, получим достаточно очевидный результат

```
» x=[1 2];
» y=[-1 2];
» zz(x,y)
ans =
     2     4
»
```

Заметим, что входящие в файл-функцию переменные, в данном случае – x и y , являются локальными переменными, изменение значений которых в теле функции не влияет на их значения за пределами функции.

Редактор/отладчик m-файлов имеет собственную панель инструментов, ее внешний вид дан на рис. 29, где также перечислено назначение кнопок, которые используются при отладке создаваемых программ.



Рис. 29. Панель инструментов редактора/отладчика m-файлов.

Основным приемом отладки m-файлов является установка в их тексте контрольных точек остановки. Для этого необходимо выполнить следующую последовательность действий: во-первых, создать m-файл; во-вторых, написать текст создаваемой программы; в-третьих, сохранить m-файл на диске под оригинальным именем; в-четвертых, установить требуемые контрольные точки. Рассмотрим процесс отладки – например, программной конструкции типа цикл, формирующий ряд натуральных чисел в диапазоне от 0 до 3. Выполняя последовательность указанных выше действий, можно получить результат, представленный на рис. 30, где в окне редактора контрольная точка установлена напротив выражения $i = i + 1$. При этом если в окне редактора/отладчика, например, дважды нажать кнопку Продолжить в разделе Отладка, то в командной строке MATLAB (см. основное окно на рис. 30) появятся записи о выполненной части программы.

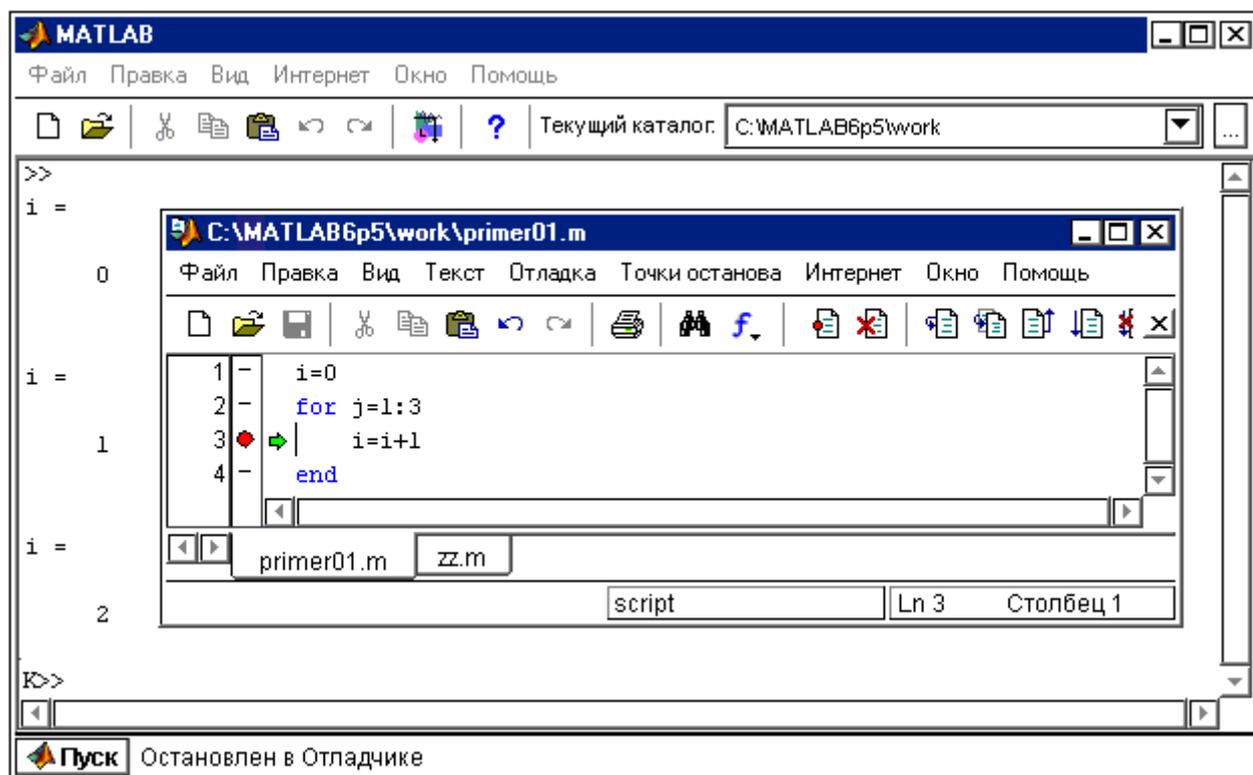


Рис. 30. Пример использования в программе контрольной точки.

Поскольку ввод значений переменной i еще не завершен (осталось значение $i = 3$), то в окне редактора в строке отладки присутствует изображение

стрелки (место в программе, где произошел останов), которое исчезает сразу после завершения отладки программы.

3.2. Решатель обыкновенных дифференциальных уравнений

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с известными начальными условиями – это решение задачи Коши. В пакете MATLAB имеется специальный решатель *ОДУ*, позволяющий выбрать метод решения, задать значение начальных условий и повысить эффективность используемых методов с помощью установления значений специальных опций.

Для решения систем ОДУ используются операции, функции и решающие устройства, перечень которых приведен в m-файле Contents (папка funfun, каталог matlab). Фрагмент этого файла представлен на рис. 31.

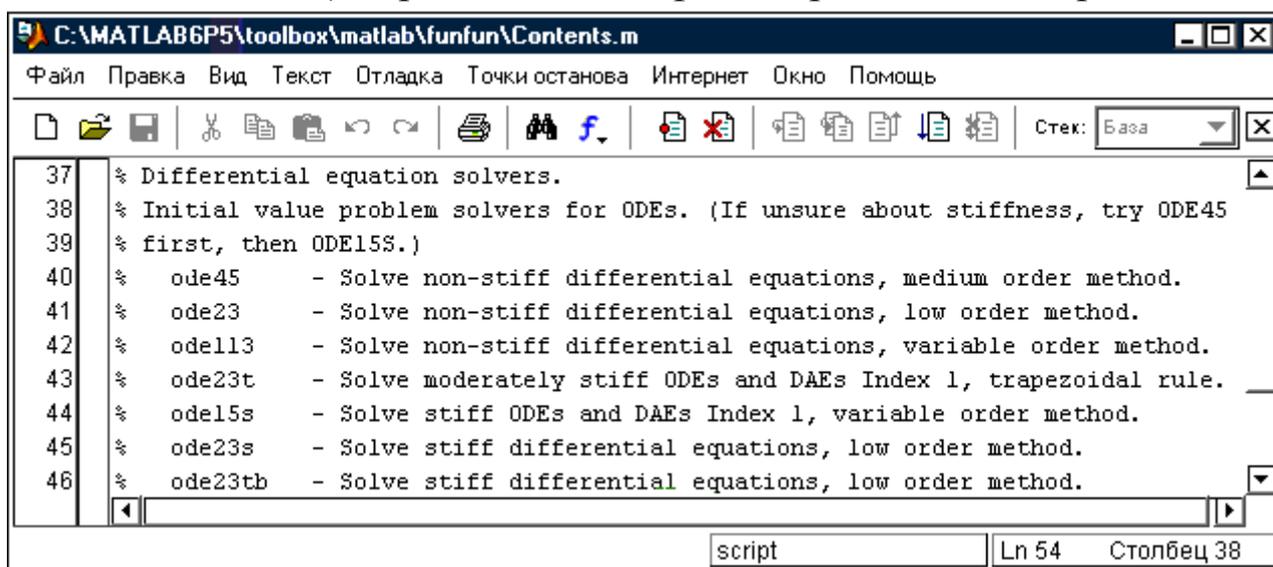


Рис. 31. Фрагмент m-файла Contents папки funfun каталога matlab.

Информация об операции – Решение ОДУ, содержащаяся в m-файле Contents (см. рис. 31), приведена в табл. 3.

Таблица 3

Функция	Назначение
ode113	Нежесткие ОДУ, метод переменных состояний.
ode15s	Жесткие ОДУ, метод переменных состояний.
ode23	Нежесткие ОДУ, метод низкого порядка.
ode23s	Жесткие ОДУ, метод Рунге - Кутты 3-го порядка.
ode23t	Умеренно жесткие ОДУ.
ode23tb	Жесткие ОДУ, метод Рунге - Кутты 3-го порядка.
ode45	Нежесткие ОДУ, метод Рунге - Кутты 4-го порядка.

Информация об операции – Формирование задачи Коши – приведена в табл. 4.

Таблица 4

Функция	Назначение
odefile	Задать правые части системы ОДУ.
odeget	Получить опции решателя.
odeset	Задать/изменить опции решателя.

Информацию об операции – Формирование выхода решателя – см. в табл. 5.

Таблица 5

Функция	Назначение
odeplot	Переходные процессы (функции времени).
odephas2	Двухмерная фазовая плоскость.
odephas3	Трехмерная фазовая плоскость.
odeprint	Графическое окно вывода.
odezero	Фиксация нулевого значения.

Решатель ОДУ использует различные численные методы (в MATLAB – функции), позволяющие решать уравнения в явной форме Коши $x' = F(t,x)$ и неявной, т.е. в виде $Mx' = F(t,x)$ или $M(t)x' = F(t,x)$.

Функция $[t, X] = \text{solver}('F', \text{tspan}, x0)$, где имя solver заменяется именем соответствующей функции (см. табл. 3); $\text{tspan} = [t0, tf]$, интегрирует ОДУ на интервале $[t0, tf]$ с начальными условиями $x0$. Функция вычисления правых частей определяется именем F. Каждая строка выходного массива X соответствует решению в моменты времени, определяемые вектором t.

Функция $[t, X] = \text{solver}('F', \text{tspan}, x0, \text{options})$ позволяет указать дополнительные опции, формируемые с помощью функции odeset. К часто используемым относятся опции относительной погрешности RelTol (по умолчанию $1e-3$) и вектора абсолютных погрешностей (по умолчанию все компоненты равны $1e-6$).

Функция $[t, X] = \text{solver}('F', \text{tspan}, x0, \text{options}, p1, p2, \dots)$ позволяет передать значения параметров $p1, p2, \dots$ при вычислении функции правых частей. Если опции используются по умолчанию, то на их месте следует указать пустой массив $[\]$.

Функция $[t, X, te, xe, ie] = \text{solver}('F', \text{tspan}, x0, \text{options})$ при условии, что опция Events установлена в состояние 'on', позволяет зафиксировать момент, когда какая-либо из указанных переменных принимает значение 0. При этом функция вычисления правых частей должна иметь вид $F(t, x, 'events')$.

Выход te – это вектор моментов времени, когда фиксировалось событие, вектор xe – перечень соответствующих переменных, а вектор ie – индексы событий, указывающие направление изменения решения в момент пересечения нуля: при (-1) – убывает; при $(+1)$ – возрастает; при (0) – только фиксируется.

Функции $[t, X, s] = \text{solver}(\dots)$ с тремя выходными аргументами позволяют получить статистические характеристики решателя. При этом вектор s имеет 6 компонент, которые отражают: количество успешных шагов; количество неудачных попыток; количество вызовов функции $F(t, x)$; количество вызовов функции Якоби dF/dx ; количество LU-разложений; количество решений вспомогательных систем линейных уравнений.

Последние три параметра применяются только к решателям жестких систем.

При обращении к решателю ОДУ без указания выходных параметров $\text{solver}(\dots)$ он вызывает функцию вывода odeplot для построения графиков решения. Иной способ организации вывода графиков состоит в установлении для опции OutputFcn значения – odeplot . Значения этой опции odephas2 и odephas3 позволяют вывести двумерные или трехмерные графики фазовых траекторий.

При интегрировании жестких систем с использованием функций ode15s и ode23s возникает потребность в надежном и эффективном вычислении якобиана системы уравнений, для этого предназначены специальные опции. В частности: если якобиан dF/dx постоянен, то опция JConstsnt должна устанавливаться в состояние 'on'; если матрица системы dF/dx является разреженной и требуется ее маска (состоящая из 0 и 1), то опция JPattern должна быть установлена в состояние 'on', а функция вычисления правых частей должна вызываться в форме $F([], [], 'jpattern')$; если необходимо вычислять якобиан, то должна быть установлена опция Jacobian .

Функции ode15s , ode23s , ode23t , ode23tb применимы для интегрирования ОДУ вида $Mx' = F(t, x)$ с постоянной матрицей M , которая обычно является невырожденной. Для вывода на экран матрицы M необходимо установить для опции MassConstant значение 'on' и вызвать функцию для вычисления правых частей в форме $F([], [], 'mass')$.

Из всех перечисленных выше функций только функция ode23s не может применяться для решения ОДУ вида $M(t)x' = F(t, x)$, где матрица $M(t)$ является нестационарной, невырожденной для любого t . Для вывода значений матрицы $M(t)$ необходимо установить для опции Mass значение 'on' и вызвать функцию вычисления правых частей в форме $F([], [], 'mass')$.

Рекомендации по выбору функций для интегрирования ОДУ приведены в табл. 6.

Функция	Применение
ode45	Наиболее употребительная.
ode23	При низких требованиях к точности или для решения умеренно жестких задач.
ode113	При высоких требованиях к точности или для решения задач со сложными правыми частями.
ode15s	Когда ode45 сходится медленно или для решения систем ОДУ в неявной форме Коши.
ode23s	При низких требованиях к точности и для решения систем ОДУ $Mx' = F(t,x)$.
ode23t	При решении умеренно жестких задач и когда необходимо решение для осциллятора без демпфирования.
ode23tb	При низких требованиях к точности и для систем ОДУ вида $M(t)x' = F(t,x)$.

Допускаются следующие формы вызова решателя:

`[t, X] = solver('F')`

`[t, X] = solver('F', tspan, x0)`

`[t, X] = solver('F', tspan, [], options)`

`[t, X] = solver('F', [], [], options)`

Опции интегрирования могут быть заданы как с помощью функции, так и в командной строке (при использовании сразу обоих способов задания приоритет имеет последний).

Для задания правых частей ОДУ можно использовать m-файл `odefile`, который является шаблоном. Он содержит необходимые заготовки для описания системы ОДУ в явной и неявной формах Коши.

Кроме задания правых частей ОДУ в файле `odefile`, можно задать начальные условия и интервал интегрирования. По умолчанию в решателях предполагается, что системы ОДУ заданы в явной форме Коши

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t).$$

Для задания опций решателя ОДУ применяется функция `odeset`, с помощью которой формируется массив записей `options`, где каждому свойству приписывается некоторое значение, а не присвоенному значению приписывается пустой массив `[]`. Извлечь значение опции можно с помощью функции `odeget`.

3.3. Инструмент LTI Viewer

Данный инструмент предназначен для анализа линейных стационарных систем и позволяет строить не только частотные характеристики исследуемой системы, но и получить отклики исследуемой системы на единичные ступенчатое и импульсное воздействия, найти нули и полюса системы и т.д. В результате выполнения команды `ltiview` откроется

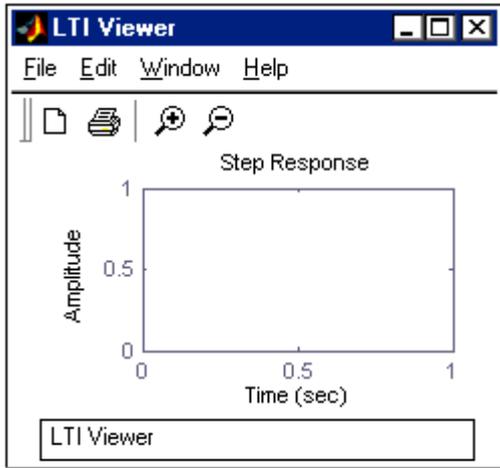


Рис. 32. Окно LTI Viewer.

окно, показанное на рис. 32.

Поскольку LTI Viewer работает только с LTI-объектами, в рабочем пространстве такой объект необходимо либо уже иметь, либо его требуется создать и загрузить.

В частности, для построения динамических характеристик гидравлического сервомотора, описываемого уравнениями вида (92) или (93), следует, в первую очередь, осуществить переход к математическому описанию в пространстве состояний¹. Можно показать, например, с помощью

способа прямого программирования, что описание манипулятора в виде (93) можно представить в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) + u(t), \\ y(t) &= k_3 x_1(t) + k_4 x_2(t), \end{aligned} \quad (126)$$

$$k_1 = \frac{1}{T_1}, \quad k_2 = \frac{T_2}{T_1}, \quad k_3 = \frac{K}{T_1}, \quad k_4 = \frac{K T_3}{T_1},$$

а также изобразить в виде структурной схемы (см. рис. 33). В стандартной форме записи уравнениям (126) соответствуют соотношения

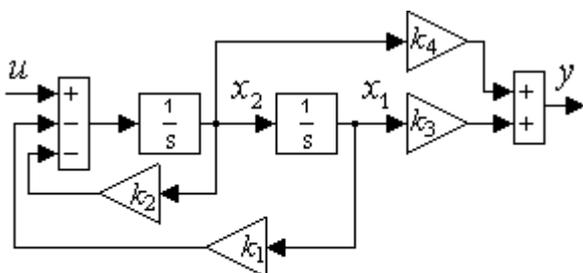


Рис. 33. Модель манипулятора (126) в пространстве состояний.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, \quad y = Cx, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= (k_3 \quad k_4), \quad D = 0. \end{aligned} \quad (127)$$

Теперь можно осуществить следующую последовательность действий:

¹ Пространство состояний – основная форма записи дифференциальных уравнений в MATLAB.

во-первых, в последней строке программы (пусть это будет файл с именем scr04.m) сформировать LTI-объект, - например, sys1:

```
% ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ СЕРВОМОТОР
```

```
K=25; KSI=0.95; T=0.18;
```

```
a=[0 1 0;0 0 1; 0 -1/T^2 -2*KSI/T]; b=[0;0;1]; c=[K/T^2 0 0]; d=[0];
```

```
sys1=ss(a,b,c,d);
```

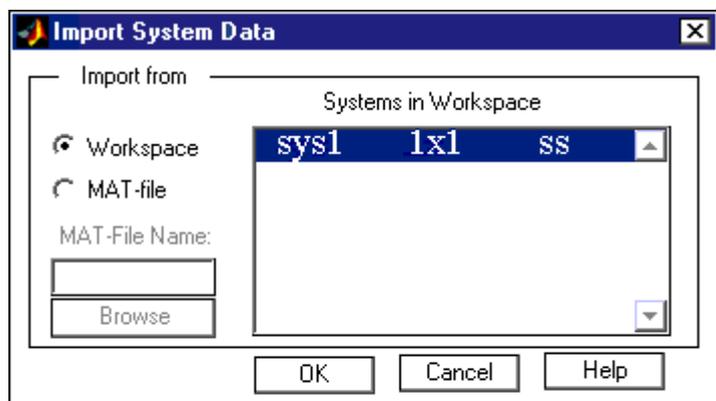


Рис. 34. Окно Import System Data.

вид, представленный на рис. 35.

во-вторых, запустить из командной строки файл scr04.m;

в-третьих, в меню окна LTI Viewer (раздел File) выбрать команду Import, что вызовет появление окна (рис. 34), где следует выбрать имя импортируемой системы и нажать кнопку ОК. В результате изображение экранной формы MATLAB совместно с окном LTI Viewer получит

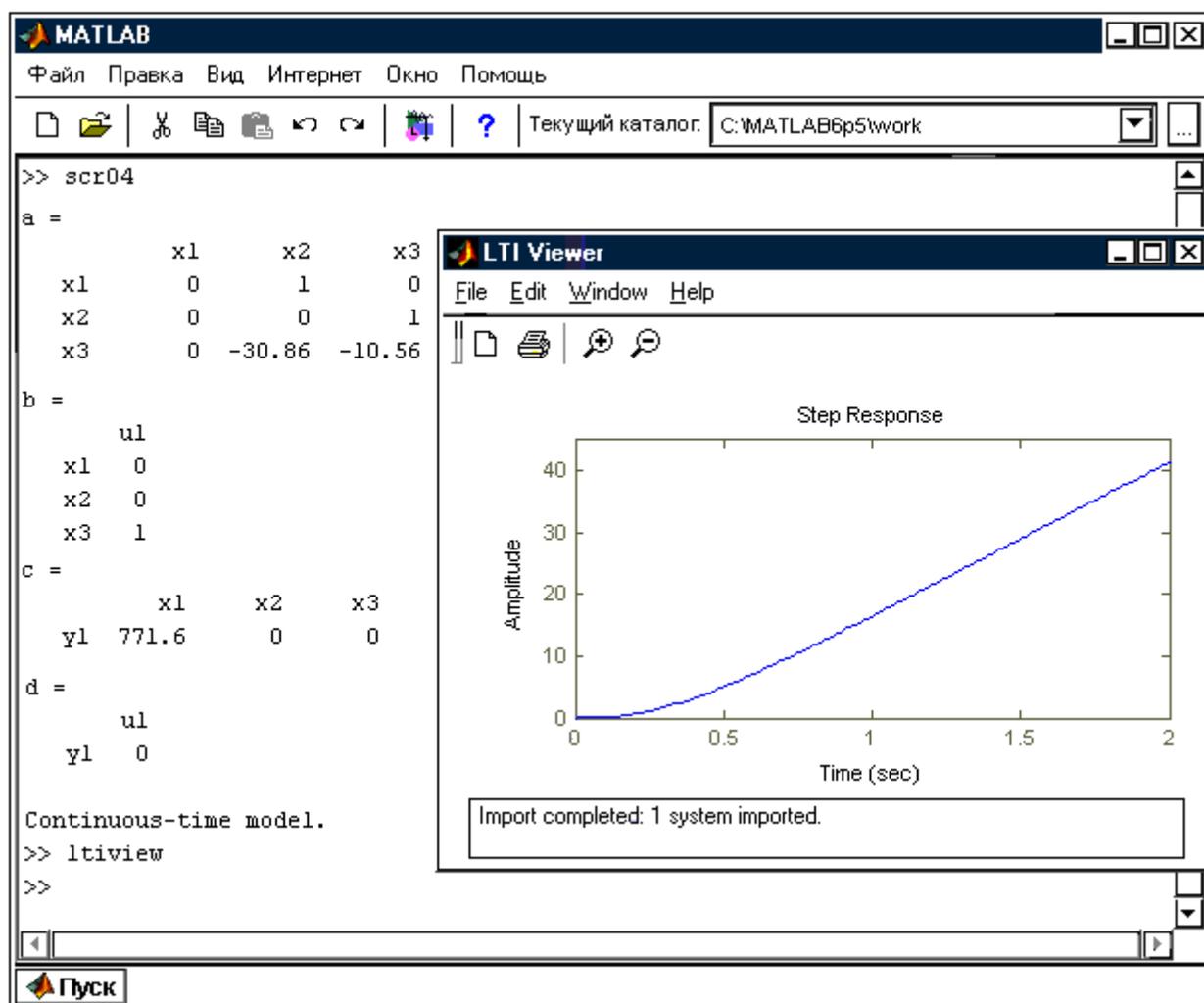


Рис. 35. Экранная форма MATLAB совместно с LTI Viewer.

Для получения других характеристик системы необходимо выполнить команду Edit\Plot Configuration... в окне LTI Viewer. В ходе выполнения этой команды откроется окно Plot Configuration, показанное на рис. 36.

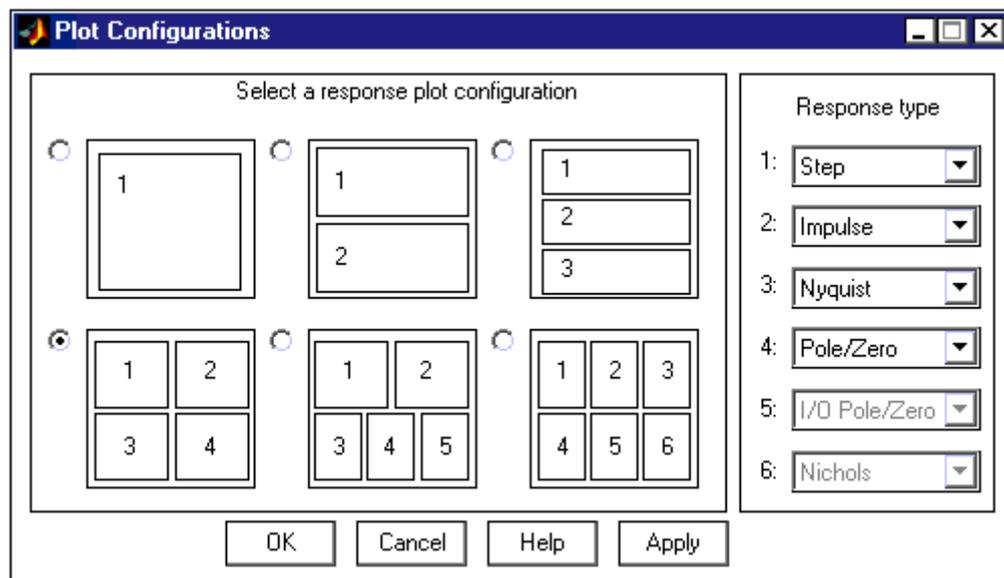


Рис. 36. Окно Plot Configuration.

Как видно из экранной формы, показанной на рис. 36, для примера было выбрано построение четырех графиков, а именно – step, impulse, nyquist, pole/zero, вызываемых нажатием кнопки ОК, что в результате приводит к появлению нового вида у окна LTI Viewer (рис. 37).

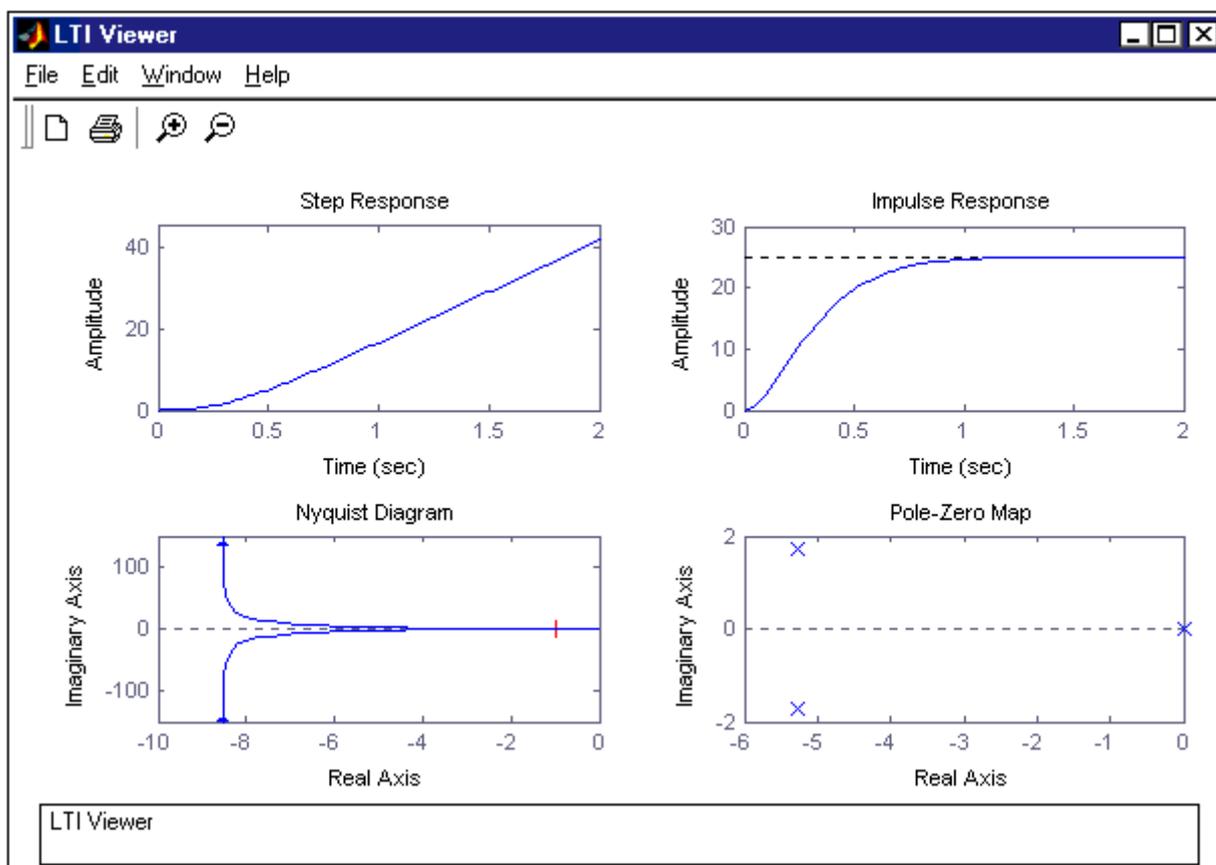


Рис. 37. Окно LTI Viewer с четырьмя графиками.

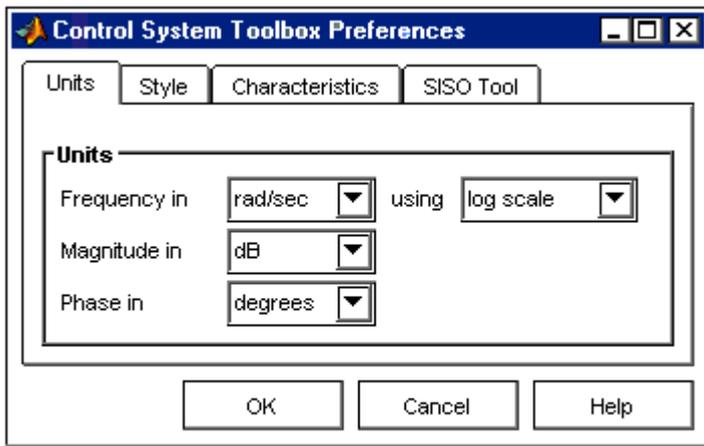


Рис. 38. Окно Control System Toolbox Preferences.

люютные единицы), фазы (градусы или радианы), а также установка вида шкалы частоты (логарифмический или линейный).

2. Установка стиля графиков (вкладка Style). Внешний вид вкладки Style показан на рис. 39. На данной вкладке можно выполнить настройку шрифтов

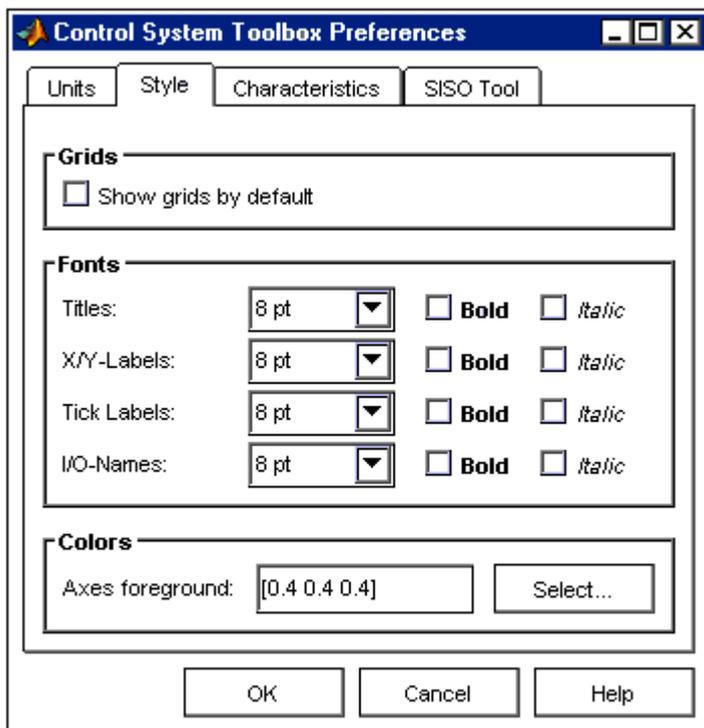


Рис. 39. Вкладка Style.

входит в 2% зону и больше ее не покидает (параметр Show setting time within). Параметры для вычисления времени переходного процесса можно изменить (см. Show rise time from). На вкладке имеется флажок Unwrap phase, установка которого позволяет избежать отображения разрывов в фазовой частотной характеристике, обычно связанных с областью определения функции arctg, вычисляющей сдвиг по фазе.

4. Установка параметров для анализа и синтеза линейных систем автома-

Для настройки параметров LTI Viewer используется программа File\Toolbox Preferences..., выполнение которой открывает окно, показанное на рис. 38 и позволяющее осуществить настройку параметров линейной стационарной модели.

1. Установка параметров измерения (вкладка Units на рис. 38) – это задание единиц измерения частоты (рад/с или Гц), уровня (dB или абсолютные единицы), фазы (градусы или радианы), а также установка вида шкалы частоты (логарифмический или линейный).

3. Установка параметров переходного процесса (вкладка Characteristics). Вид вкладки Characteristics показан на рис. 40. Данная вкладка позволяет задать параметры для вычисления времени нарастания и времени переходного процесса (установленные по умолчанию). Также по умолчанию LTI Viewer вычисляет время переходного процесса как время от нуля до момента, начиная с которого переходная функция

тического управления со скалярными входом/выходом (SISO – Single Input/Single Output).

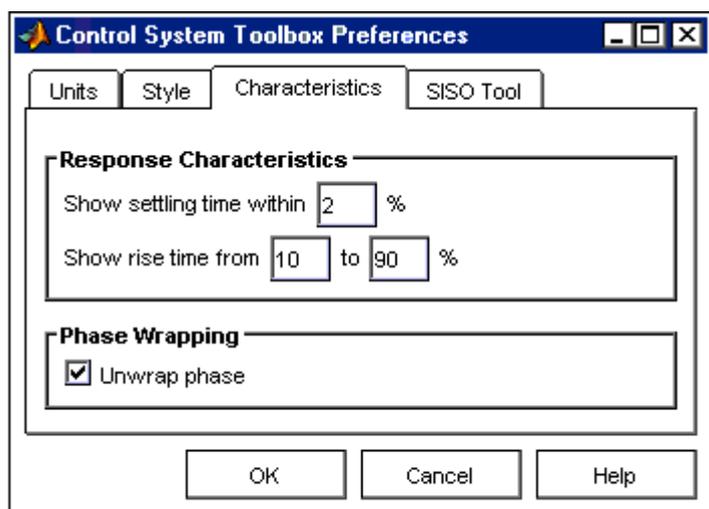


Рис. 40. Вкладка Characteristics.

Внешний вид вкладки SISO Tool показан на рис. 41. На данной вкладке показаны значения настроек SISO-инструмента, выставленные по умолчанию. Например, с помощью панели Compensator Format можно выбрать формат постоянной времени

$$dcgain * \frac{1 + Tz_1 s}{1 + Tp_1 s},$$

где Tz_1, Tz_2, \dots и Tp_1, Tp_2, \dots – это постоянные времени передаточной функции ЛТИ-системы.

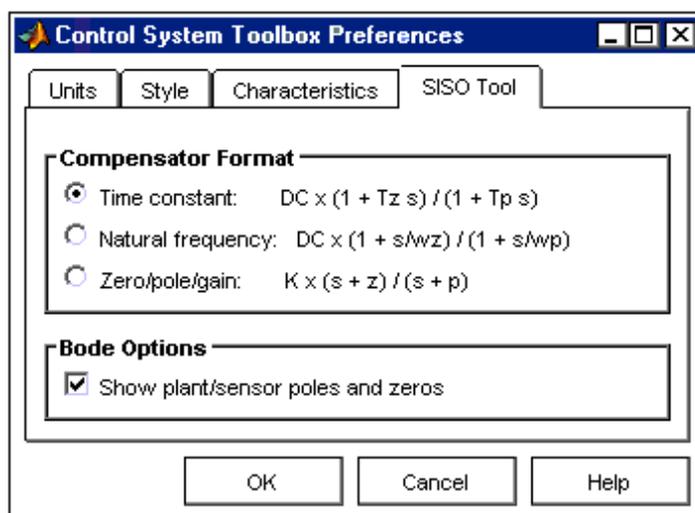


Рис. 41. Вкладка SISO Tool.

ГЛАВА 4.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В этой главе рассматривается новая, кибернетическая модель процесса поляризации конденсированных материалов, дающая хорошее совпадение теоретических и экспериментальных характеристик комплексной диэлектрической проницаемости в области электронной упругой поляризации, а также, в рамках использования этой модели, предлагается методика определения параметров поляризационных процессов, эффективность которой оценивается в рамках моделирования длинноволнового спектра показателя преломления на примере воды.

4.1. Моделирование процесса упругой электронной поляризации диэлектриков

Проблемы имитационного моделирования динамических систем, возникающие при решении ряда прикладных задач, в том числе характерных и для теоретической физики, по-прежнему остаются весьма актуальными. При этом качество результатов или эффективность вычислительных экспериментов существенно зависит от уровня адекватности теоретической модели реальному физическому процессу.

Предлагается, следуя идеологии работы А.Л. Фрадкова¹, для описания процесса поляризации воспользоваться, наряду с традиционными, кибернетической моделью, позволяющей описать свойства физической системы с помощью обратных связей.

¹ Фрадков А.Л. Исследование физических систем при помощи обратных связей // Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 213-229.

Модель Клаузиуса-Мосотти-Лорентц-Лоренца

Известно, что количественной мерой результата поляризации материала служит его поляризованность – P , которую можно описать выражением:

$$P = E \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i, \quad (128)$$

где E – напряженность электрического поля внутри диэлектрика; K – число разновидностей индуцированных диполей; n_i и α_i – соответственно концентрации и поляризуемости частиц.

Для вычисления диэлектрической проницаемости материала – ε , традиционно используются соотношения, связывающие ε с поляризуемостями частиц, составляющих диэлектрик.

Следует отметить ради полноты изложения, что при вычислении диэлектрической проницаемости газов обычно используется формула Борна:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i, \quad (129)$$

где ε_0 – электрическая постоянная ($8,85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м), при выводе которой предполагается, что E определяется напряженностью среднего макроскопического поля E_{cp} в материале:

$$E = E_{cp} = E_0 - E_1 = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}, \quad (130)$$

где E_0 – напряженность внешнего поля; E_1 – напряженность деполяризующего поля, обусловливаемого наведенными поверхностными зарядами. Действительно, если в выражении (130) осуществить замену $E_0 = \varepsilon E$, то в результате преобразований получим соотношение:

$$E_{cp} = \frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}, \quad (131)$$

из которого, с учетом выражения (128), будет следовать соотношение (129).

Итак, если формула (129) применяется для газов, то расчет диэлектрической проницаемости конденсированных материалов обычно осуществляется по формуле Клаузиуса-Мосотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i. \quad (132)$$

Здесь, согласно модели Лорентца, величина E определяется, в отличие от выражения (130), не только напряженностью среднего макроскопического поля, но и напряженностями внутренних полей

$$E = E_{cp} + E_2 + E_3, \quad (133)$$

где E_2 – напряженность поля, создаваемого поляризованными молекулами, окружающими сферу Лорентца, а E_3 – напряженность поля, образованного молекулами, находящимися внутри сферы.

Значения напряженностей E_2 и E_3 определяются следующим образом:

$$E_2 = \frac{P}{3\varepsilon_0}, \quad E_3 = 0. \quad (134)$$

Из выражения (133), с учетом (128), (131), (134), можно записать соотношение

$$E = \frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{P}{3\varepsilon_0} = \left(\frac{E}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{E}{3\varepsilon_0} \right) \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i, \quad (135)$$

из которого непосредственно вытекает формула Клаузиуса-Мосотти.

При исследовании частотных характеристик материала, его диэлектрическую проницаемость принято рассматривать как комплексную функцию $\varepsilon(j\omega)$, т.е. формулы (129) и (132) принимают вид, во-первых, модели Борна

$$\varepsilon(j\omega) = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i(j\omega), \quad (136)$$

и, во-вторых, модели Клаузиуса-Мосотти-Лорентц-Лоренца

$$\frac{\varepsilon(j\omega) - 1}{\varepsilon(j\omega) + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i(j\omega), \quad (137)$$

где $\alpha_k(j\omega)$ – так называемые комплексные поляризуемости частиц вида:

$$\alpha_k(j\omega) = \frac{q_k^2 / m_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + j2b_k \omega}. \quad (138)$$

При получении явного вида функций $\alpha_k(j\omega)$, обычно используется математическое описание процесса поляризации, в котором участвует отдельно взятая заряженная частица.

Если же ограничиться рассмотрением только одного вида поляризации – упругой электронной, то этот процесс можно описать следующей системой уравнений:

$$\frac{d^2 \mu_k(t)}{dt^2} + 2b_k \frac{d\mu_k(t)}{dt} + \omega_{0k}^2 \mu_k(t) = \frac{q_k^2}{m_k} E_0(t), k = \overline{1, K}, \quad (139)$$

где k – индекс разновидности иона; K – их число; $\mu_k(t)$ – индуцированный дипольный момент электронного облака отдельного иона; ω_{0k} и b_k – собственная частота и коэффициент затухания колебаний облака; q_k и m_k – его заряд и масса; $E_0(t)$ – напряженность внешнего переменного электрического поля с малой амплитудой.

Кибернетическая модель

Как уже отмечалось, напряженность поля в диэлектрике E определяется как напряженностями внешнего и деполяризующего полей (E_0 и E_1), так и напряженностями внутренних полей (E_2 и E_3). Однако в отличие от выражения (133), где использовалось описание поля с напряженностью E_{cp} , напряженность поля внутри диэлектрика E , подобно известным результатам¹, можно записать в виде:

$$E = E_0 - E_1 + E_2 + E_3 = E_0 - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \mu_i, \quad (140)$$

где $\mu_i = \alpha_i E$ – индуцированный дипольный момент частицы i -й разновидности.

Кроме того, при составлении математической модели процесса поляризации диэлектрика, следуя [8], будем учитывать как напряженность внешнего поля $E_0(t)$, так и напряженности других действующих полей. Относительно уравнения (139) это означает, что для его правой части справедлива замена $E_0(t) \rightarrow E(t)$, приводящая к математической модели вида:

$$\frac{d^2 \mu_k(t)}{dt^2} + 2b_k \frac{d\mu_k(t)}{dt} + \omega_{0k}^2 \mu_k(t) = \frac{q_k^2}{m_k} E(t), \quad (141)$$

где напряженность $E(t)$ согласно соотношению (140) описывается выражением

$$E(t) = E_0(t) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \mu_i(t). \quad (142)$$

Тогда с целью построения модели рассматриваемого процесса поляризации диэлектрика, в результате объединения набора соотношений типа (141), описывающих все виды поляризации и выражения (142), можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \mu_k(t)}{dt^2} + 2b_k \frac{d\mu_k(t)}{dt} + \omega_{0k}^2 \mu_k(t) = \\ & = \frac{q_k^2}{m_k} \left(E_0(t) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \mu_i(t) \right), \quad k = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (143)$$

С позиции технической кибернетики, уравнения (143) можно рассматривать как математическую модель некоторой замкнутой линейной системы управления с отрицательной обратной связью. При этом если уравнения (141), (142), записать в изображениях и преобразовать к виду

¹ Мотт Н., Герни Р. Электронные процессы в ионных кристаллах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1950.

$$E(s) = E_0(s) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \mu_i(s), \quad \mu_k(s) = \alpha_k(s) E(s), k = \overline{1, K},$$

$$\alpha_k(s) = \frac{q_k^2 / m_k}{s^2 + 2b_k s + \omega_{0k}^2},$$
(144)

где s – комплексная переменная; $\mu_k(s)$, $E(s)$ и $E_0(s)$ – изображения по Лапласу функций $\mu_k(t)$, $E(t)$ и $E_0(t)$; $\alpha_k(s)$ – передаточная функция, то структурную схему процесса поляризации диэлектрика можно представить в виде, показанном на рис. 1. Важно отметить, что как для системы (144), так и для структурной схемы (рис.1), можно записать уравнение "кибернетической связи" типа выход-вход между напряженностями внутреннего и внешнего полей, а именно:

$$E(s) = W(s)E_0(s), W(s) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i(s)},$$
(145)

где $W(s)$ – передаточная функция "связи".

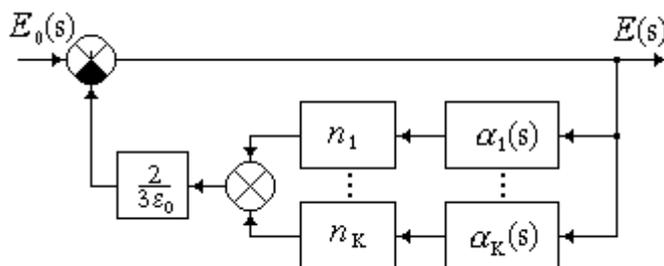


Рис. 1. Структурная схема процесса упругой электронной поляризации диэлектрика

Значение передаточной функции $W(s)$ состоит еще и в том, что с ее помощью, путем замены $s \rightarrow j\omega$, можно получить выражение вида:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i(j\omega)}.$$
(146)

Однако при исследовании свойств диэлектриков данное частотное соотношение и ему подобные не применяются, поскольку в физике общепринято использовать функцию $\varepsilon(j\omega)$ – комплексную диэлектрическую проницаемость материала, обратную функции $W(j\omega)$, – например, функциональные зависимости (126), (127).

Таким образом, на основании уравнения (136) будет иметь место новая функциональная зависимость

$$\varepsilon(j\omega) = 1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i(j\omega),$$
(147)

которую в дальнейшем будем называть кибернетической моделью процесса

поляризации, а для расчета ε будем использовать формулу:

$$\varepsilon = 1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K n_i \alpha_i. \quad (148)$$

Вариативность параметрического синтеза

Известно, что в диапазоне ближних инфракрасных, видимых и ультрафиолетовых частот внешнего поля диэлектрическая проницаемость материала определяется исключительно упругой электронной поляризацией ионов, поскольку на этих частотах другие ее виды не проявляются из-за своей инерционности. Кроме того, для расчета частотных характеристик $\varepsilon(j\omega)$ с использованием моделей вида (137), (147) в указанном частотном диапазоне и в соответствии с уравнением типа (139) требуется предварительно определить числовые значения таких параметров как заряд, масса, коэффициент затухания и частота собственных колебаний электронного облака каждого вида ионов, составляющих диэлектрик.

Первый вариант. С одной стороны, для системы уравнений (139), описывающей процесс упругой электронной поляризации, предлагается использовать следующие значения q_k и m_k :

$$q_k = e, m_k = m_e, \quad (149)$$

где e и m_e – заряд ($1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл) и масса ($0,9109534 \cdot 10^{-30}$ кг) электрона. При этом, значения частот собственных колебаний ω_{0k} определяются через коэффициент квазиупругой связи, обусловленной силой кулоновского взаимодействия электрона с единично заряженным ядром, в виде

$$\omega_{0k}^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r_k^3}, \quad (150)$$

где r_k – ионные радиусы, а величины коэффициентов затухания b_k рассчитываются по излучению элементарных электронных диполей следующим образом:

$$2b_k = \frac{\mu_0 e^2 \omega_{0k}^2}{6\pi m_e c}, \quad (151)$$

где μ_0 – магнитная постоянная ($12,5663706144 \cdot 10^{-7}$ Гн/м); c – скорость света в вакууме ($2,99792458 \cdot 10^8$ м/с).

Второй вариант. С другой стороны, поскольку электронные облака ионов обычно содержат более одного электрона, то это, видимо, необходимо учитывать в расчетах. Электронные поляризуемости ионов значительно возрастают с ростом их радиусов, поскольку наибольшее смещение под действием поля испытывают внешние (оптические) электроны вследствие уменьше-

ния притяжения между ними и ядром. Внутренние электроны находятся гораздо ближе к ядру, и, кроме того, на них действует более высокий эффективный заряд, поэтому их поляризация весьма незначительна по сравнению с поляризацией внешних электронов.

Поэтому для описания электронной поляризации иона k -й разновидности можно воспользоваться уравнением колебаний его оптической оболочки относительно экранизованного атомного остатка с эффективным зарядом $-Q_k e$. При этом заряд и масса электронного облака обуславливаются числом электронов Z_k , входящих в состав оптической оболочки:

$$q_k = Z_k e, m_k = Z_k m_e. \quad (152)$$

В рамках такого подхода параметры ω_{0k} и b_k следует вычислять по формулам:

$$\omega_{0k}^2 = \frac{Q_k e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_k^3}, \quad 2b_k = \frac{\mu_0 Z_k e^2 \omega_{0k}^2}{6\pi m_e c}. \quad (153)$$

Вычислительный эксперимент

С целью оценки эффективности каждой из рассматриваемых математических моделей, во-первых, был проведен вычислительный эксперимент, связанный с определением диэлектрической проницаемости конденсированных материалов, а именно – с расчетом вещественных частотных характеристик $\epsilon(j\omega) - \epsilon'$ по функциональным зависимостям (137), (147), преобразованных к виду:

$$\epsilon' = \frac{\left(1 + \frac{2}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{2b_i \omega n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}\right)^2} - \frac{2\left(\frac{1}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{2b_i \omega n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{2b_i \omega n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}\right)^2}, \quad (154)$$

$$\epsilon' = 1 + \frac{2}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) n_i q_i^2 / m_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2}, \quad (155)$$

а во-вторых, было выполнено сравнение полученных кривых с данными физического эксперимента, которые для кристалла $NaCl$ представле в табл. 7.

Таблица 7

Ион	k	Z_k	Q_k	n_k	r_k (Å)
Na^+	1	8	9	$2.2311 \cdot 10^{28}$	0,98
Cl^-	2	8	7	$2.2311 \cdot 10^{28}$	1,81

Результаты вычислительного эксперимента для различных вариантов параметрического синтеза коэффициентов ω_{0k} и b_k представлены: по уравнениям (138), (149), (150), (151) и (154) – на рис. 42a; по уравнениям (138), (149), (150), (151) и (155) – на рис. 42b; по уравнениям (138), (152), (153) и (154) – на рис. 42c; по уравнениям (138), (152), (153) и (155) – на рис. 42d, где экспериментальная кривая обозначена сплошной линией.

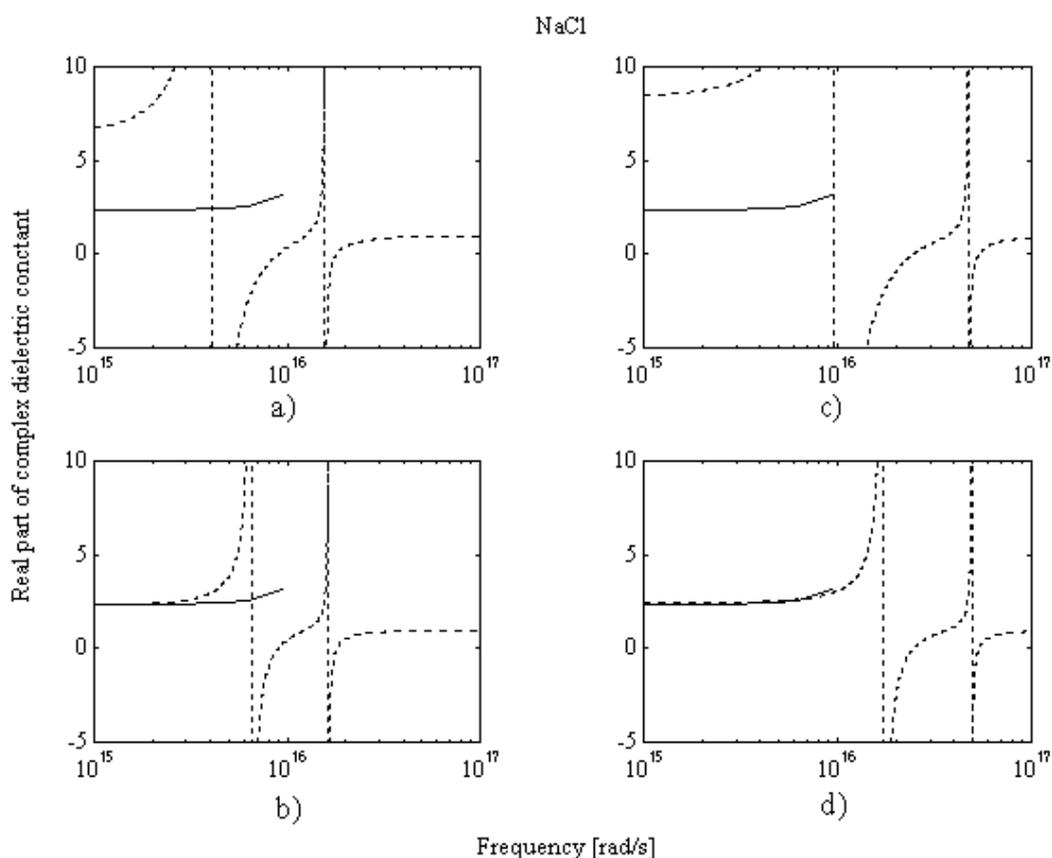


Рис. 42. Моделирование ϵ' для $NaCl$.

Результаты имитационного моделирования наглядно показывают существенное преимущество кибернетической модели по сравнению с моделью Клаузиуса-Мосотти. Действительно, по крайней мере в области электронной упругой поляризации диэлектриков кибернетическая модель дает практически минимальный уровень отклонений между результатами теоретических расчетов и экспериментальными данными.

4.2. Моделирование длинноволнового спектра оптического показателя преломления воды

Вода является самым распространенным природным диэлектриком, вызывающим неослабевающий интерес к всесторонним исследованиям его свойств. Именно это обстоятельство обуславливает наличие достаточно полного набора данных физических экспериментов, позволяющего достоверно оценить адекватность существующих и предлагаемых математических моделей, описывающих поляризационные процессы, происходящие в аналогичных материалах.

При построении математической модели процесса поляризации воды будем использовать результаты раздела 4.1. В диапазоне частот установления электронной поляризации ионов динамическая модель процесса поляризации воды, учитывая однотипность ионного состава H_2O , может быть описана уравнением:

$$\frac{d^2 \mu_e(t)}{dt^2} + 2\beta_e \frac{d\mu_e(t)}{dt} + \omega_{0e}^2 \mu_e(t) = \frac{8e^2}{m_e} \left(E_0(t) - \frac{2}{3\epsilon_0} \mu_e(t) N \right), \quad (156)$$

где $\mu_e(t)$ – индуцированный электронный дипольный момент ионов O^{2-} ; β_e и ω_{0e} – соответственно коэффициент затухания и частота собственных колебаний оптической оболочки иона; e и m_e – заряд и масса электрона; $E_0(t)$ – функция напряженности внешнего электрического поля; ϵ_0 – электрическая постоянная; N – концентрация ионов кислорода. Значения параметров электронной поляризации ионов (β_e и ω_{0e}) могут быть определены аналитически с помощью следующих формул:

$$\omega_{0e} = \sqrt{\frac{Z_{\text{эф}} e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_i^3}}; \quad \beta_e = \frac{\mu_0 8e^2 \omega_{0e}^2}{12\pi m_e c}, \quad (157)$$

где $Z_{\text{эф}}$ – эффективный заряд ядра, действующий на электроны оптической оболочки ионов, определяемый по методике Слейтора; r_i – радиус оптической оболочки; μ_0 – магнитная постоянная; c – скорость света в вакууме.

Непосредственно на основании выражения (156) комплексную диэлектрическую проницаемость воды – $\epsilon(j\omega)$ можно представить в виде:

$$\epsilon(j\omega) = 1 + \frac{2}{3\epsilon_0} \alpha_e(j\omega) N, \quad (158)$$

а через вещественную и мнимую частотные характеристики $\epsilon(j\omega)$ соответственно $\epsilon'(\omega)$ и $\epsilon''(\omega)$:

$$\varepsilon(j\omega) = \varepsilon'(\omega) + j\varepsilon''(\omega),$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \alpha'_e(\omega)N, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{2}{3\varepsilon_0} \alpha''_e(\omega)N, \quad (159)$$

где $\alpha'_e(\omega)$ и $\alpha''_e(\omega)$ – вещественная и мнимая частотные характеристики комплексной электронной поляризуемости иона.

В свою очередь зависимости $\alpha'_e(\omega)$ и $\alpha''_e(\omega)$ будут иметь вид

$$\alpha'_e(\omega) = 8e^2/m_e \frac{\omega_{0e}^2 - \omega^2}{(\omega_{0e}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_e\omega)^2},$$

$$\alpha''_e(\omega) = 8e^2/m_e \frac{2\beta_e\omega}{(\omega_{0e}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_e\omega)^2}. \quad (160)$$

Уравнение оптического показателя преломления

Изучение влияния структуры и химического состава вещества на поляризационные свойства можно проводить на основе анализа спектров его оптического показателя преломления – n , характеризующего, во сколько раз уменьшается скорость света в рассматриваемой среде по отношению к его скорости в вакууме. Известно, что электрическая составляющая светового потока гораздо существеннее магнитной, т.е. преломление света определяется преимущественно электрической поляризацией частиц, составляющих диэлектрик. Таким образом, для отображения зависимости $n(\omega)$ можно использовать уравнение следующего вида:

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon'(\omega) + \sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + (\varepsilon''(\omega))^2}}{2}}. \quad (161)$$

Необходимо отметить, что при исследовании оптических свойств материалов традиционно более распространены не частотные характеристики, а аналогичные им длинноволновые спектры, переход к которым осуществляется с помощью пересчета значений рассматриваемого диапазона круговых частот в эквивалентные длины волн по формуле: $\lambda = 2\pi c/\omega$.

Результаты моделирования длинноволнового спектра показателя преломления воды, полученного на основании уравнений (157), (159) – (161) в области установления процессов ее упругой электронной поляризации, соответствующей длинам волн от 1 нм до 1 мкм, представлены на рис. 43, где точками отмечены данные физического эксперимента, отраженные в табл. 8. При этом, кроме физических констант, в расчетах были использованы следующие значения: $Z_{эф} = 3,85$; $r_i = 1,32 \text{ \AA}$; $N = 3,3331 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

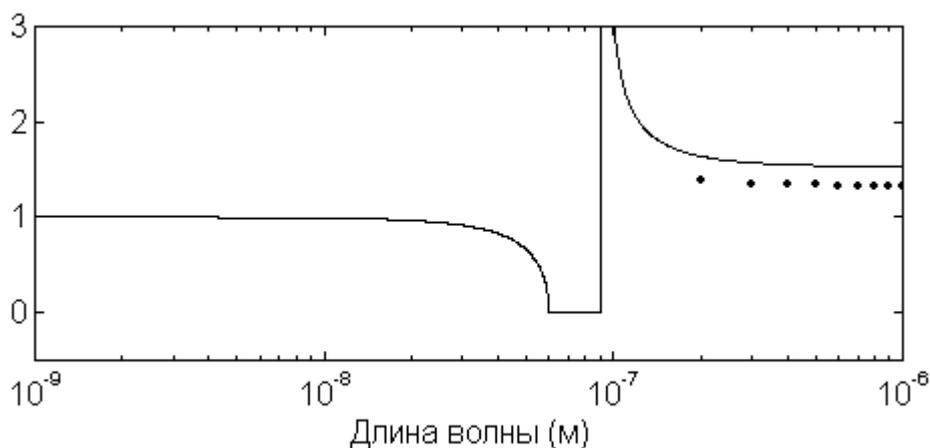


Рис. 43. Длинноволновый спектр оптического показателя преломления воды, рассчитанный на основании модели (161).

Таблица 8

λ (мкм)	n	λ (мкм)	n	λ (мкм)	n
0,200	1,396	0,500	1,335	0,800	1,329
0,300	1,349	0,600	1,332	0,900	1,328
0,400	1,339	0,700	1,331	1,000	1,327

Рассмотрение рассчитанного спектра показало, что в области фазового перехода, соответствующего явлению электронного резонанса оптической оболочки, его вид не адекватен реальным оптическим свойствам вещества. Устранение причины, вызывающей данное обстоятельство, требует использования абсолютной величины первого слагаемого в уравнении (161):

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{|\varepsilon'(\omega)| + \sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + (\varepsilon''(\omega))^2}}{2}}. \quad (162)$$

Результаты моделирования спектра показателя преломления воды приведены на рис. 44, на котором пунктирная линия соответствует расчетам $n(\omega)$ по модели (162).

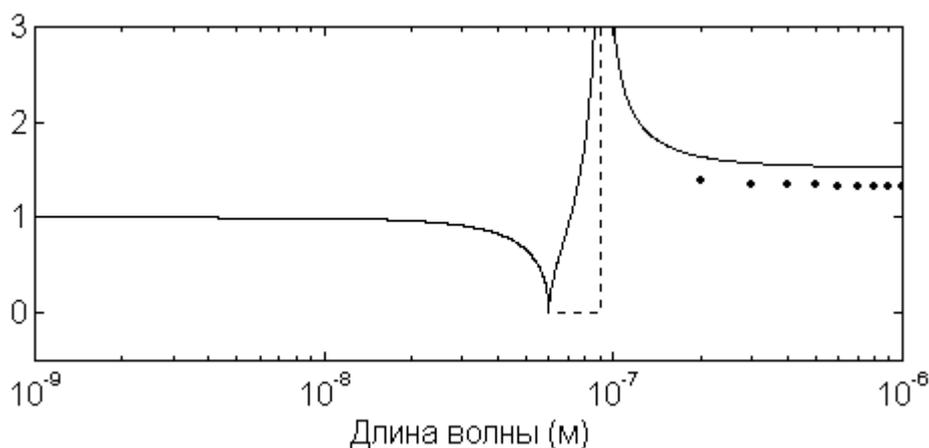


Рис. 44. Длинноволновый спектр оптического показателя преломления воды, рассчитанный на основании модели (162).

Оценка изменения вида моделируемой характеристики, достигнутого при введении модуля в уравнение оптического показателя преломления, показала, что внешний вид спектра становится качественно адекватным реальным свойствам вещества и соответствует физической картине взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем света, но остается недостаточно эффективным с количественной точки зрения.

Определение параметров β_e и ω_{0e} на базе ионных радиусов

Поскольку вода, подобно подавляющему большинству конденсированных неорганических соединений, может рассматриваться как совокупность ионов, составляющих ее молекулу, то для определения значений r_i обычно используются ионные радиусы. Необходимо отметить, что эти данные представляют собой условные величины, позволяющие при их суммировании получить достаточно точные межъядерные расстояния молекул различных химических соединений.

Особенность такого подхода к определению параметров поляризационных процессов, см. уравнения (157), заключается в существовании целого ряда таблиц ионных радиусов, содержащих различные значения r_i для иона кислорода, которые колеблются от 1,32 до 1,40 Å.

Наиболее известны классические таблицы по Гольдшмидту и по Полингу, а также современные данные по Бокию и Белову, по Шеннону и Прюитту. Результаты моделирования длинноволновых характеристик показателя преломления воды, полученного для различных значений радиуса иона O^2 , приведены на рис. 45, где 1 – кривая спектра для радиуса иона кислорода по Гольдшмидту (1,32 Å); 2 – спектр по Бокию и Белову (1,36 Å); 3 – спектр по Полингу и по Шеннону и Прюитту (1,40 Å).

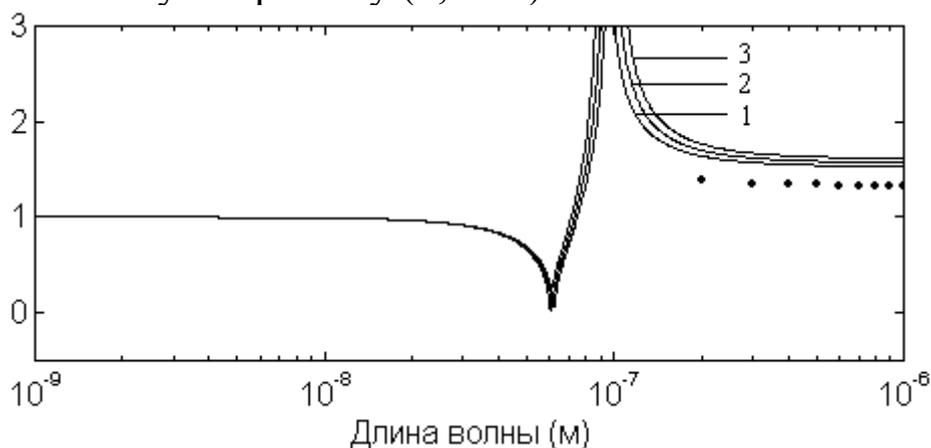


Рис. 45. Спектры оптического показателя преломления воды.

Оценка полученных графиков продемонстрировала, что использование всего набора таблиц ионных радиусов принципиально не улучшает порядок

величины отклонения моделируемых характеристик от их реальных аналогов.

Анализ рассчитанных кривых на фоне результатов экспериментальных измерений показателя преломления воды (рис. 46) позволил установить их следующее очевидное различие.

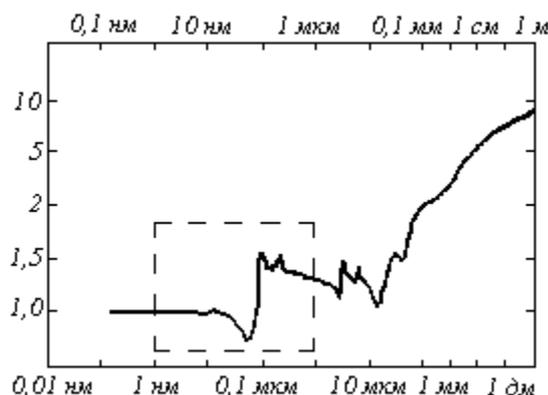


Рис. 46. Длинноволновая характеристика оптического показателя преломления воды в широкой области спектра¹.

Расчетный спектр включает только один резонанс, т.к. в случае использования величины ионного радиуса предполагается, что все электроны оптической оболочки движутся по одной орбите. Соответствующий же участок реального спектра (см. пунктир на рис. 46) содержит целый ряд всплесков, характерных для сложной конфигурации электронного облака. Таким образом, повышение эффективности моделирования может быть связано с учетом электронной конфигурации оптических оболочек ионов.

Учет электронной конфигурации ионов на базе модели Бора

Для определения радиусов электронных орбит, составляющих оптические оболочки ионов, можно взять модель строения атома по Бору. Согласно этой модели, используемой применительно к водородоподобным атомам, радиус орбиты электрона рассчитывается по формуле

$$r_k = \frac{k^2 \hbar^2}{m_e Z e^2}, \quad (163)$$

где k – главное квантовое число электронной оболочки; \hbar – постоянная Планка; Z – порядковый номер атома, эквивалентный его заряду.

В случае рассмотрения электронной конфигурации иона, с учетом эффекта экранизации его ядра внутренними электронными оболочками, для определения радиусов орбит предлагается использовать выражение вида

¹ Золотарев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В. Оптические постоянные природных и технических сред: Справочник. Л.: Химия, 1984.

$$r_l = \frac{k^2 \hbar^2}{m_e Z_{эф} l e^2}, \quad l = \overline{1, K}, \quad (164)$$

где l – индекс электронной орбиты оптической оболочки иона; K – число орбит, эквивалентное количеству пар электронов, составляющих рассматриваемую оболочку.

Величины $Z_{эф} l$ могут рассчитываться на основании методики, предложенной Слейтором, согласно которой:

вклад электронов, внешних по отношению к группе X (предполагается, что рассматриваемая орбиталь принадлежит некоторой группе X), равен 0;

вклад электронов из группы X равен 0,30, если это s^1 -электроны, и 0,35 – в остальных случаях;

если рассматриваемые электроны находятся на s^k - или p^k -орбиталях группы X , то вклад каждого из электронов, расположенных на внутренних орбиталях с главным квантовым числом $k-1$, равен 0,85, а вклады электронов, находящихся на орбиталях с главным квантовым числом $k-2, k-3, \dots$ равны 1,00;

если рассматриваются электроны, расположенные на d^k - или f^k -орбиталях группы X , то вклад каждого из электронов для групп, предшествующих рассматриваемой, равен 1,00.

Схема электронной конфигурации молекулы H_2O , построенная на базе модифицированной формулы Бора вида (164) и методики Слейтора для определения величины эффективного заряда, представлена на рис. 47.

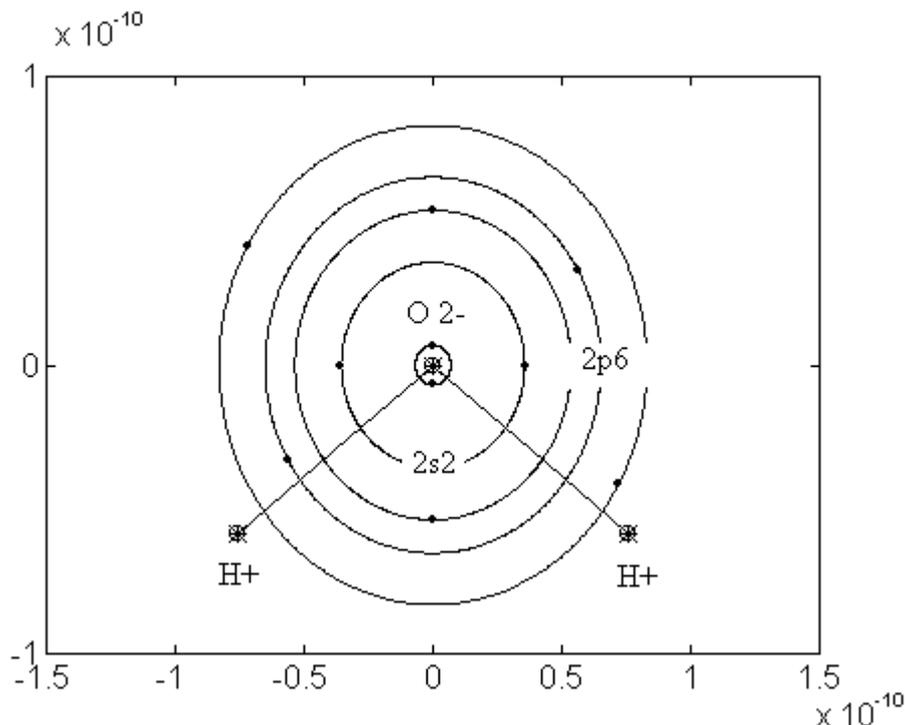


Рис. 47. Расчетная модель электронной конфигурации молекулы воды, полученная на базе модели Бора.

Таким образом, с учетом сложного строения оптической оболочки ионов кислорода, процесс упругой электронной поляризации воды может быть описан следующей системой уравнений:

$$\frac{d^2 \mu_l(t)}{dt^2} + 2\beta_l \frac{d\mu_l(t)}{dt} + \omega_{0l}^2 \mu_l(t) = \frac{2e^2}{m_e} \left(E_0(t) - \frac{2}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \mu_i(t) N \right), \quad (165)$$

$$l = \overline{1,4}.$$

На основании модели (165) частотные характеристики комплексных диэлектрической проницаемости и поляризуемостей электронных орбит будут следующими:

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{2}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \alpha'_i(\omega) N, \quad \epsilon''(\omega) = \frac{2}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \alpha''_i(\omega) N,$$

$$\alpha'_i(\omega) = 2e^2/m_e \frac{\omega_{0i}^2 - \omega^2}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_i \omega)^2}, \quad l = \overline{1,4}, \quad (166)$$

$$\alpha''_i(\omega) = 2e^2/m_e \frac{2\beta_i \omega}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_i \omega)^2}, \quad l = \overline{1,4}.$$

Результаты моделирования спектра показателя преломления воды, полученного на базе системы уравнений (165), приведены на рис. 48.

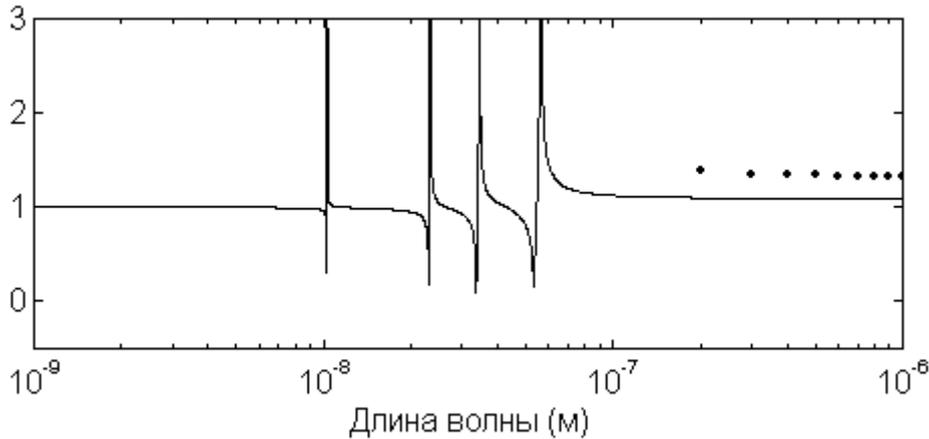


Рис. 48. Результаты моделирования длинноволнового спектра показателя преломления воды по уравнениям (165).

Анализ полученной характеристики на фоне результатов экспериментальных измерений показателя преломления воды (рис. 46) свидетельствует о качественном улучшении адекватности расчетного спектра. При этом был получен образ резонанса s -орбитали (для $\lambda=10$ нм), полностью эквивалентный данным физического эксперимента. Однако образы резонансов остальных трех орбит p -орбитали оказались в области длин волн, расположенных несколько левее истинных.

Кроме того, правая часть графика, соответствующая установившемуся режиму, показала, что значения показателя преломления воды, рассчитанные в соответствии с параметрами процессов электронной поляризации ионов, определяемых с помощью модели строения атома по Бору, ниже реальных.

Модификация методики расчета поляризационных параметров

Известно, что присоединение электронов к невозбужденному атому, происходящее при образовании иона, приводит к изменению электронной конфигурации его оптической оболочки, вызванному переходом электронов на более выгодные энергетические уровни.

Поэтому для расчета радиусов орбит p -орбитали предлагается использовать формулу:

$$r_l = \frac{(k+1)^2 \hbar^2}{m_e Z_{эф} l e^2}, \quad l = \overline{2,4}. \quad (167)$$

Результаты моделирования спектра показателя преломления воды, полученные с учетом перехода электронов p -орбитали на орбиты следующей электронной оболочки, приведены на рис. 49.

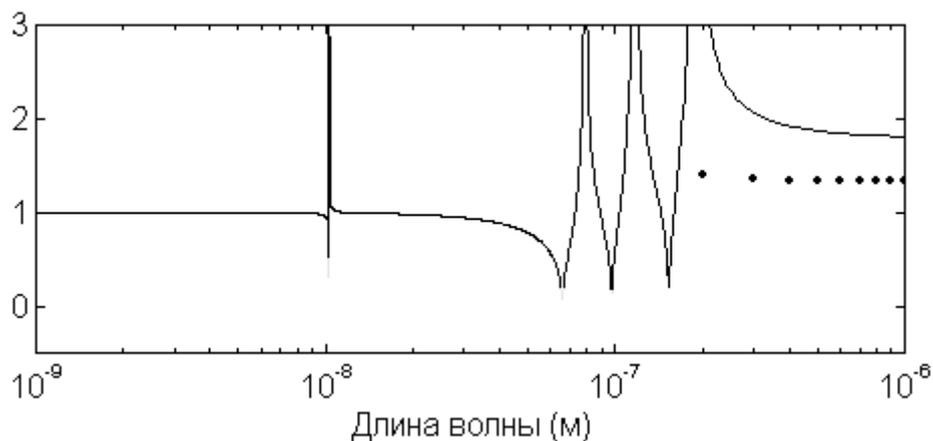


Рис. 49. Результаты моделирования длинноволнового спектра показателя преломления воды, полученные с учетом перехода электронов.

Анализ полученных изменений показал, что моделируемый спектр стал более адекватен его истинному аналогу. Однако его правая часть превысила экспериментальные данные.

Известно, что в разных химических соединениях один и тот же ион обладает различной величиной эффективного заряда, действующего на его молекулярных соседей. Учитывая данное обстоятельство, для расчета $Z_{эф}$, действующего на электронные орбиты иона, предлагается несколько модифицировать методику Слейтора, оставив ее без изменений применительно к электронам, эквивалентным невозбужденному состоянию атома. Нужно подоб-

рать такие значения для экранирующих вкладов оптических электронов, которые позволят добиться наибольшей эффективности моделирования рассматриваемого спектра. Решение поставленной задачи параметрического синтеза, выполненное в рамках проведения вычислительного эксперимента, дало следующий результат: наибольшая адекватность моделируемого спектра данным практических измерений (рис. 50) достигается при значениях экранирующих вкладов $2s$ -электронов и $3p$ -электронов, равных соответственно 0,80 и 0,15.

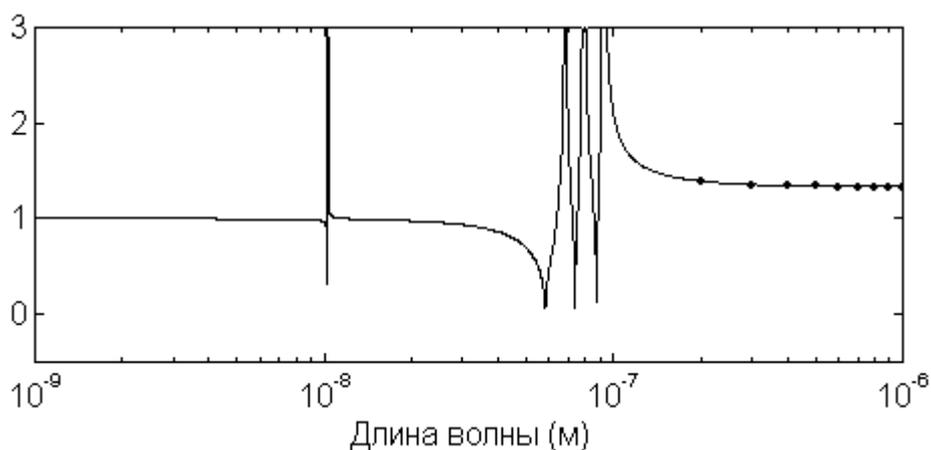


Рис. 8. Результаты моделирования длинноволнового спектра показателя преломления воды, полученные на базе параметрического синтеза.

Оценка эффективности предлагаемой методики показала, что в ее рамках моделируемый спектр стал полностью адекватен его истинному аналогу.

При этом возможность применения модифицированной формулы Борна для определения радиусов электронных орбит делает подход к решению задачи моделирования поляризационных характеристик материалов более системным, поскольку отпала необходимость в использовании таблиц ионных радиусов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

В современной теории систем активно развиваются и используются методы пространства состояний. Наиболее характерный пример такого применения – теория автоматического управления, где, наряду с простыми классическими методами, появляются новые абстрактные методы, позволяющие решать более сложные задачи исследования замкнутых многомерных систем управления.

Начало систематического использования методов пространства состояний обычно связывают с работами Л.С. Понтрягина – по математической теории оптимальных процессов, Р. Беллмана – по динамическому программированию и Р. Калмана – по общей теории фильтрации и управления.

К преимуществам методов пространства состояний общепринято отнести:

одинаковую формулировку различных задач и простоту их решения при наличии большого числа переменных;

возможность обнаружения и исследования таких свойств систем, которые при использовании классических подходов в терминах "вход-выход" остались бы недоступными;

возможность анализа и синтеза нестационарных и нелинейных динамических систем;

использование векторно-матричной формы представления для описания исследовательских задач, имеющей неоспоримое преимущество при их численном решении на ПЭВМ.

Основной недостаток методов пространства состояний заключается в том, что переменные состояния сохраняют ясный физический смысл только тогда, когда они наблюдаемы и могут быть измерены или когда переменные состояния совпадают с фазовыми

$$x_1(t)=x(t), x_2(t)=dx_1(t)/dt, \dots, x_n(t)=dx_{n-1}(t)/dt.$$

В противном случае, если выбор переменных состояния определяется иным образом, связь математической модели с физической реальностью теряется и, как следствие, исчезает возможность корректного сопоставления расчетных и экспериментальных данных.

Вход, состояние и выход

Динамика системы описывается ее математической моделью, аналитически отражающей зависимости между тремя множествами переменных: переменными входа $u(t) \in R^m$, выхода $y(t) \in R^l$ и состояния $x(t) \in R^n$, где R^i – i -мерное линейное вещественное пространство (рис. П.1.).

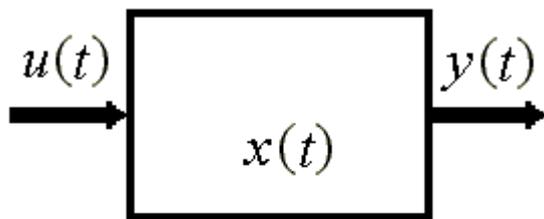


Рис. П.1. Переменные динамической системы.

Вход системы, выраженный множеством временных функций, представляет описание внешних переменных, действующих на систему. Выход системы, выраженный аналогично, – это описание наблюдаемых выходных переменных, непосредственно отражающих поведение системы.

Как уже отмечалось, любая система состоит из набора подсистем или элементов (звеньев), которые по характеру реакции на входное воздействие делятся на статические и динамические.

Отличительной особенностью статической системы является ее безынерционность, т.е. наличие мгновенной реакции на входное воздействие, никак не связанное с ее предыдущим положением. В любой момент времени t_0 значение выхода статической системы $y(t_0)$ однозначно определяется по значению входа $u(t_0)$, а сама связь (стационарная или нестационарная) статическая характеристика – описывается одним из уравнений:

$$y = F(u), \quad y = F(u, t).$$

Важнейшее свойство любой динамической системы – это зависимость ее реакции как от переменных, действующих на систему в данный момент, так и от переменных, действовавших на нее в прошлом. Отметим, что для определения в момент времени t_1 значения выхода $y(t_1)$ информации только о значении входа $u(t_1)$ недостаточно, поскольку требуются еще сведения о предыстории изменения $u(t)$ на некотором интервале $t \in [t_0, t_1]$ и начальном состоянии $x(t_0)$. Такую зависимость будем описывать следующим образом:

$$y(t_1) = S(x(t_0), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (\text{П.1})$$

где S – оператор преобразования одной функции в другую.

Таким образом, состояние динамической системы – это некий параметр, однозначно определяющий реакцию выхода системы относительно входа. Состояние системы должно удовлетворять так называемым аксиомам совместности. Укажем две наиболее важные.

Первая аксиома совместности. Для определения будущего поведения системы не играет роли то, каким образом она пришла в данное состояние, поскольку траектория движения системы определяется однозначно по начальному состоянию и динамике входа в рассматриваемом интервале времени. Выход $y(t)$, $\forall t \geq t_0$ определяется однозначно при заданных $x(t_0)$ и $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Вторая аксиома совместности. Если траекторию движения системы разбить на участки, то каждый из них можно рассматривать как новую траекторию с соответствующим начальным условием. При этом в зависимости от входного процесса и начального состояния динамика системы будет изменяться соответствующим образом.

Пусть $t_0 < t_1 < t_2$, тогда при любом $x(t_0)$ и $\forall t \in [t_0, t_1]$ выход $y(t_1)$ будет определяться уравнением (П.1). Если же вычислить значение $x(t_1)$, то выход $y(t_2)$ будет следующим:

$$y(t_2) = S(x(t_1), u(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Пространство состояний

Множество $X = \{x\}$ возможных значений состояния системы называется пространством состояний.

В случае $X = R^n$ состояние $x = x(t)$ есть n -мерный вещественный вектор – вектор состояния (в частном случае – это фазовый вектор), элементы которого будем обозначать через $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Вектор, составленный из указанных элементов, обычно записывают следующим образом:

$$x = x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

где T – символ транспонирования.

Если x – состояние системы, $\mu(\cdot)$ – некоторое взаимно однозначное отображение пространства X в себя ($\mu : X \rightarrow X$), то $\bar{x} = \mu(x)$ также можно считать состоянием данной системы. Тогда состояние x можно определить различным, но взаимно однозначным образом.

Например, если $X = R^n$, а T – невырожденная матрица ($\det T \neq 0$), то вектор $\bar{x} = Tx$ также можно применять для описания состояния системы, поскольку $x = T^{-1}\bar{x}$, где T^{-1} – обратная матрица.

Описание динамической системы в нормальной форме

Уравнения состояния так называемых конечномерных дифференциальных (непрерывных) систем можно представить в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (\text{П.2})$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (\text{П.3})$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ – вектор-функции от векторных аргументов.

Уравнение (П.2) называют уравнением состояния, описывающим изменение состояния системы во времени $t \in R$, в соответствии с начальным условием $x(t_0)$ и входным воздействием $u(t)$, а уравнение (П.3) – уравнением выхода, устанавливающим статическую связь между значениями выхода и текущими значениями состояния и входа.

Уравнения линейных систем в пространстве состояний

Метод пространства состояний в качестве базовой математической модели системы (П.2), (П.3), когда функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ линейны по x , u , предполагает использование уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (\text{П.4})$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (\text{П.5})$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^k$; матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ соответствующего размера¹. Системы (П.4), (П.5) называются непрерывными линейными системами, в которых матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ имеют следующую структуру:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{П.6})$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{pmatrix}, \quad m \leq n, \quad (\text{П.7})$$

¹ В теории автоматического управления матрицы, входящие в уравнения (П.4), (П.5), обычно называют: $A(t)$ – матрицей состояния системы, $B(t)$ – матрицей управления, $C(t)$ – матрицей выхода, $D(t)$ – матрицей обхода системы.

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1}(t) & c_{l2}(t) & \dots & c_{ln}(t) \end{pmatrix}, \quad l \leq n. \quad (\text{П.8})$$

В случае, когда матрица $D(t) \equiv 0$, систему (П.4), (П.5) называют собственной² (строго реализуемой), а при $D(t) \neq 0$ – несобственной.

Систему (П.4), (П.5) с матрицами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ называют нестационарной, если же элементы этих матриц от времени не зависят, то система – стационарная.

Структура стационарной линейной системы представлена на рис. П.2, для которой (например, при $n > m$), математическое описание будет следующим:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (\text{П.9})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad D \neq 0. \quad (\text{П.10})$$

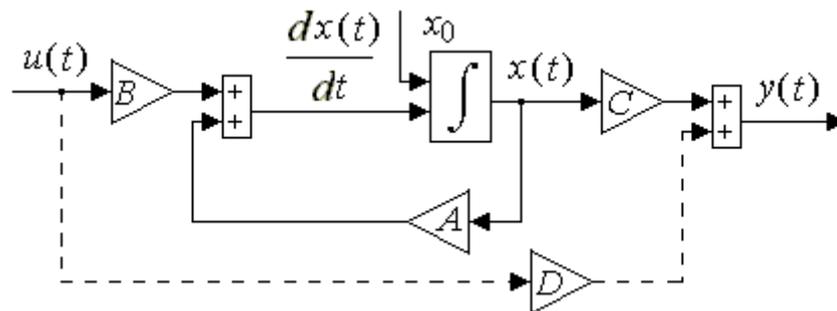


Рис. П.2. Структурная схема стационарной динамической системы.

Системы (П.4), (П.5) и (П.9), (П.10) часто называют нормальными системами, или системами в нормальной форме Коши. В тех случаях, когда в системе (П.9), (П.10) переменные состояний совпадают с фазовыми, оказывается, что матрица A имеет специфическую форму записи – форму Фробениуса, представляемую в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.11})$$

где $a_i = \text{const} > 0$. Для матрицы Фробениуса характерно следующее: элементы над главной диагональю равны единице, а элементы нижней строки являются коэффициентами однородного дифференциального уравнения n -го порядка

² Такой тип систем в прикладных задачах является наиболее распространенным.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0. \quad (\text{П.12})$$

Иногда матрицу Фробениуса называют матрицей сопровождения.

Наиболее распространенными приемами построения моделей динамических систем в переменных состояниях являются приемы, основанные на способах прямого, параллельного или последовательного программирования.

Поскольку исходное математическое описание системы в этих способах программирования – передаточная функция, выберем описание динамической системы, например, в следующем виде:

$$x(s) = W(s)u(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} u(s). \quad (\text{П.13})$$

Прямое программирование относится к наиболее общим подходам, позволяющим осуществить переход в пространство состояний без каких-либо предварительных условий.

Этапы прямого программирования предусматривают последовательное выполнение следующих типовых действий или процедур:

во-первых, числитель и знаменатель функции $W(s)$ вида (П.13) разделим на выражение $a_0 s^3$, соответствующее слагаемому с максимальной степенью s в знаменателе, в результате получим уравнение

$$x(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0} s^{-1} + \frac{b_1}{a_0} s^{-2} + \frac{b_2}{a_0} s^{-3}}{1 + \frac{a_1}{a_0} s^{-1} + \frac{a_2}{a_0} s^{-2} + \frac{a_3}{a_0} s^{-3}} u(s); \quad (\text{П.14})$$

во-вторых, введем обозначение

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} s^{-1} + \frac{a_2}{a_0} s^{-2} + \frac{a_3}{a_0} s^{-3}} u(s); \quad (\text{П.15})$$

в-третьих, перепишем уравнение (П.15) следующим образом:

$$E(s) = u(s) - \frac{a_1}{a_0} s^{-1} E(s) - \frac{a_2}{a_0} s^{-2} E(s) - \frac{a_3}{a_0} s^{-3} E(s); \quad (\text{П.16})$$

в-четвертых, учитывая соотношение (П.15), а также вводя обозначение выхода $y(s) = x(s)$, представим уравнение (П.14) в виде

$$y(s) = x(s) = \frac{b_0}{a_0} s^{-1} E(s) + \frac{b_1}{a_0} s^{-2} E(s) + \frac{b_2}{a_0} s^{-3} E(s); \quad (\text{П.17})$$

в-пятых, введем в рассмотрение переменные состояния, которые в изображениях зададим следующим образом:

$$x_1(s) = s^{-3}E(s), \quad (\text{П.18})$$

$$x_2(s) = s^{-2}E(s), \quad (\text{П.19})$$

$$x_3(s) = s^{-1}E(s); \quad (\text{П.20})$$

в-шестых, запишем совместно уравнения (П.15) – (П.18). Подстановка соотношений (П.19) в (П.18) и соответственно (П.20) в (П.19) позволяет записать уравнения

$$x_1(s) = s^{-1}x_2(s), \quad x_2(s) = s^{-1}x_3(s). \quad (\text{П.21})$$

Кроме того, подстановка $E(s)$ вида (П.16) в соотношение (П.17), с учетом обозначений (П.18) – (П.20), позволяет записать равенство

$$y(s) = \frac{b_0}{a_0}x_1(s) + \frac{b_1}{a_0}x_2 + \frac{b_2}{a_0}x_3(s). \quad (\text{П.22})$$

Аналогичные действия, выполненные для выражения (П.20), приводят к следующему уравнению

$$x_3(s) = s^{-1} \left(u(s) - \frac{a_1}{a_0}x_3(s) - \frac{a_2}{a_0}x_2(s) - \frac{a_3}{a_0}x_1(s) \right). \quad (\text{П.23})$$

Объединяя уравнения (П.20) – (П.23), окончательно получаем $sx_1(s) = x_2(s)$, $sx_2(s) = x_3(s)$,

$$sx_3(s) = -\frac{a_3}{a_0}x_1(s) - \frac{a_2}{a_0}x_2(s) - \frac{a_1}{a_0}x_3(s) + u(s), \quad (\text{П.24})$$

$$y(s) = \frac{b_0}{a_0}x_1(s) + \frac{b_1}{a_0}x_2(s) + \frac{b_2}{a_0}x_3(s),$$

где первые три уравнения – уравнения состояний системы, а последнее – уравнение ее выхода.

Уравнения (П.24), записанные в изображениях, можно переписать относительно оригиналов следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -\frac{a_3}{a_0}x_1(t) - \frac{a_2}{a_0}x_2(t) - \frac{a_1}{a_0}x_3(t) + u(t), \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0}x_1(t) + \frac{b_1}{a_0}x_2(t) + \frac{b_2}{a_0}x_3(t),$$

т.е. в виде, который полностью идентичен уравнениям нормальной системы (П.9), (П.10), полагая, что имеют место соотношения

$$x^T(t) = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{b_0}{a_0} & \frac{b_1}{a_0} & \frac{b_2}{a_0} \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$
(П.26)

Для наглядности приведем числовой пример. Пусть в исходной передаточной функции $W(s)$ вида (П.13) коэффициенты имеют значения:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 7, \quad b_2 = 12, \quad a_0 = 1; \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0,$$
(П.27)

тогда в системе (П.9), (П.10) матрицы и векторы будут следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (12 \quad 7 \quad 1), \quad D = 0.$$
(П.28)

Для динамической системы (П.25) – (П.27) или в нормальной форме системы (П.9), (П.10), (П.28) можно построить структурную схему в пространстве состояний, показанную на рис. П.3.

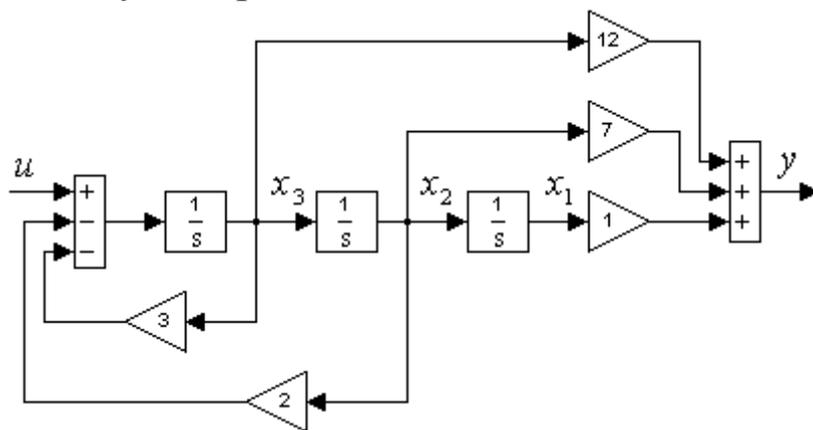


Рис. П.3. Структурная схема динамической системы (П.25) – (П.27).

Параллельное программирование. Для применения этого способа требуется, чтобы полюса передаточной функции $W(s)$ – корни знаменателя – были бы вещественными и рациональными, т.е. допускалось представление $W(s)$ в виде суммы дробно-рациональных функций. Данный способ программирова-

ния рассмотрим на числовом примере. Пусть аналогично системе (П.13), (П.27) исследуемая система описывается уравнением

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s). \quad (\text{П.29})$$

Параллельное программирование предусматривает выполнение определенной последовательности действий:

во-первых, учитывая явный вид $W(s)$, выражение (П.29) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s(s+1)(s+2)} u(s) = \\ &= \left(\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+2} \right) u(s), \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – неопределенные множители;

во-вторых, используя тождество

$$\alpha_1(s+1)(s+2) + \alpha_2s(s+2) + \alpha_3s(s+1) = s^2 + 7s + 12,$$

запишем систему линейных уравнений относительно его коэффициентов

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 7,$$

$$2\alpha_1 = 12,$$

решение которой будет иметь вид

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = -6, \quad \alpha_3 = 1; \quad (\text{П.31})$$

в-третьих, учитывая (П.31), а также переобозначение $y(s) = x(s)$, перепишем уравнение (П.30) следующим образом:

$$y(s) = \left(\frac{1}{s} \cdot 6 + \frac{1}{s+1} \cdot (-6) + \frac{1}{s+2} \cdot 1 \right) u(s); \quad (\text{П.32})$$

в-четвертых, в соответствии с выражением (П.32) введем в рассмотрение переменные состояния

$$x_1(s) = \frac{1}{s} u(s), \quad x_2 = \frac{1}{s+1} u(s), \quad x_3(s) = \frac{1}{s+2} u(s), \quad (\text{П.33})$$

уравнения которых в эквивалентном виде будут иметь вид

$$sx_1(s) = u(s),$$

$$sx_2(s) = -x_2(s) + u(s), \quad (\text{П.34})$$

$$sx_3(s) = -2x_3(s) + u(s),$$

а также, учитывая явный вид переменных состояния (П.33), перепишем уравнение (П.32) следующим образом:

$$y(s) = 6x_1(s) - 6x_2(s) + x_3(s). \quad (\text{П.35})$$

Уравнения состояния (П.34) и уравнение выхода (П.35) можно записать и в оригиналах, т.е. в виде системы уравнений

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = u(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + u(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -2x_3(t) + u(t),$$

$$y(t) = 6x_1(t) - 6x_2(t) + x_3(t),$$
(П.36)

которой в векторно-матричной форме (П.9), (П.10) соответствуют следующие матрицы и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (6 \quad -6 \quad 1), \quad D = 0. \quad (\text{П.37})$$

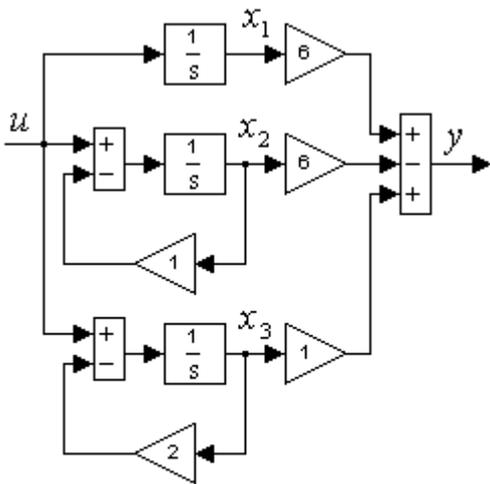


Рис. П.4. Структурная схема системы (П.36).

Структурная схема динамической системы (П.36) или (П.9), (П.10), (П.37) показана на рис. П.4.

Последовательное программирование. Для применения этого способа должно быть выполнено условие – $W(s)$ исследуемой системы должна быть представлена в виде произведения дробно-рациональных функций, иначе говоря, как полюса, так и нули $W(s)$ должны быть вещественны и рациональны.

Применение способа параллельного программирования, как и в предыдущем случае параллельного программирования, рассмотрим на

примере выражения (П.29).

Этапы осуществления последовательного программирования следующие:

во-первых, уравнение (П.29) перепишем в виде

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s+3)}{(s+1)} \cdot \frac{(s+4)}{(s+2)} u(s); \quad (\text{П.38})$$

во-вторых, введем в рассмотрение дополнительные переменные $u_1(s)$, $E_1(s)$ и переменную состояния $x_1(s)$, задавая уравнения

$$u_1(s) = \frac{1}{s} \frac{(s+3)}{(s+1)} u(s), \quad E_1(s) = \frac{1}{1+2s^{-1}} u_1(s), \quad x_1(s) = s^{-1} E_1(s), \quad (\text{П.39})$$

что позволяет первую переменную состояния $x_1(s)$ описать в виде

$$x_1(s) = \frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}} u_1(s) = \frac{1}{s+2} u_1(s)$$

или следующим образом:

$$sx_1(s) = -2x_1(s) + u_1(s); \quad (\text{П.40})$$

в-третьих, подобно предыдущему этапу, введем в рассмотрение переменные вида

$$u_2(s) = \frac{1}{s} u(s), \quad E_2(s) = \frac{1}{1+s^{-1}} u_2(s), \quad x_2(s) = s^{-1} E_2(s), \quad (\text{П.41})$$

что позволяет преобразовать выражение $u_1(s)$ из (2.39) и получить соотношение

$$u_1(s) = \frac{s+3}{s+1} u_2(s) = (1+3s^{-1}) E_2(s) = u_2(s) + 2x_2(s), \quad (\text{П.42})$$

а также записать следующее уравнение для второй переменной состояния:

$$sx_2(s) = -x_2(s) + u_2(s); \quad (\text{П.43})$$

в-четвертых, аналогично двум предыдущим этапам введем в рассмотрение переменные вида

$$E_3(s) = u(s), \quad x_3(s) = s^{-1} E_3(s), \quad (\text{П.44})$$

тогда выражение для $u_2(s)$ из (2.41) получит вид

$$u_2(s) = \frac{1}{s} E_3(s) = x_3(s), \quad (\text{П.45})$$

а третье уравнение состояния будет следующим:

$$sx_3(s) = u(s); \quad (\text{П.46})$$

в-пятых, в результате подстановки уравнений (П.45) в (П.43) и (П.45) в (П.42), а затем (П.42) в (П.40) получаем систему уравнений состояния в виде:

$$\begin{aligned} sx_1(s) &= -2x_1(s) + 2x_2(s) + x_3(s), \\ sx_2(s) &= -x_2(s) + x_3(s), \\ sx_3(s) &= u(s); \end{aligned} \quad (\text{П.47})$$

в-шестых, обозначая выход $y(s) = x(s)$ и выполняя подстановку выражения (П.39) в (П.38), получаем

$$y(s) = (1+4s^{-1}) E_1(s) = E_1(s) + 4x_1(s) = u_1(s) + 2x_1(s),$$

а также учитывая явный вид функций $u_1(s)$ и $u_2(s)$ согласно равенствами (П.42) и (П.45), окончательно уравнение выхода $y(s)$ запишем в виде

$$y(s) = 2x_1(s) + 2x_2(s) + x_3(s). \quad (\text{П.48})$$

В оригиналах система уравнений (2.47), (2.48) имеет вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + x_3(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = u(t),$$

$$y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t),$$
(\text{П.49})

которому в векторно-матричной форме записи (П.9), (П.10) соответствуют следующие матрица и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 2 \quad 1), \quad D = 0. \quad (\text{П.50})$$

Структурная схема динамической системы (П.49) или (П.9), (П.10), (П.50) показана на рис. П.5.

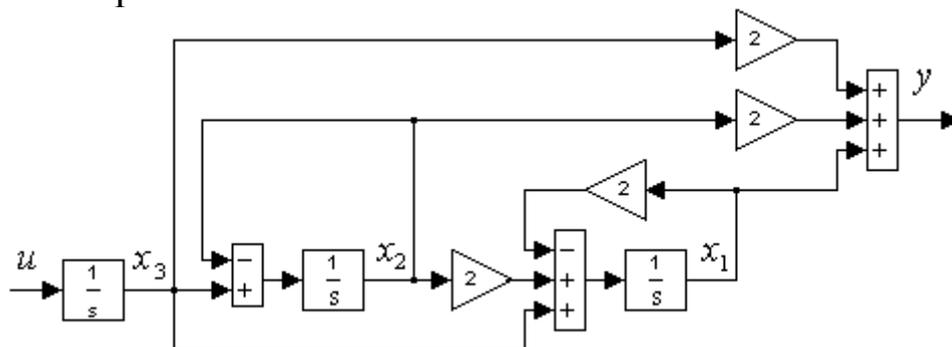


Рис. П.5. Структурная схема динамической системы (П.49).

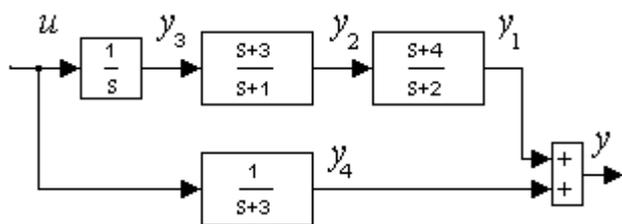


Рис. П.6. Структурная схема динамической системы (П.51).

Кроме приведенных выше способов программирования, построение модели систем в переменных состояния можно осуществлять и по другим методикам.

В частности, структура исследуемой системы может задана. Например, хорошо известно, что при последовательном соединении элементов их передаточные функции перемножаются, а при параллельном – суммируются. Поэтому для системы, описываемой уравнением

$$x(s) = \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{(s+3)}{(s+1)} \cdot \frac{(s+4)}{(s+2)} + \frac{1}{s+3} \right) u(s), \quad (\text{П.51})$$

которой соответствует структурная схема, изображенная на рис. П.6, можно вначале любым из способов выполнить построение моделей в пространстве состояний для каждого из четырех элементов, а затем, исключая промежуточные переменные, записать уравнение модели в переменных состояния для всей системы.

Программирование по структурной схеме. Выделим в уравнении (П.51) элементы, описываемые следующим образом:

$$y_1(s) = W_1(s)y_2(s) = \frac{s+4}{s+2}y_2(s),$$

$$y_2(s) = W_2(s)y_3(s) = \frac{s+3}{s+1}y_3(s), \quad (\text{П.52})$$

$$y_3(s) = W_3(s)u(s) = \frac{1}{s}u(s), \quad y_4(s) = W_4(s)u(s) = \frac{1}{s+3}u(s).$$

Для каждой $W(s)$ из (П.52), – например, с помощью прямого программирования – построим модели в пространстве состояний, структурные схемы которых показаны на рис. П.7.

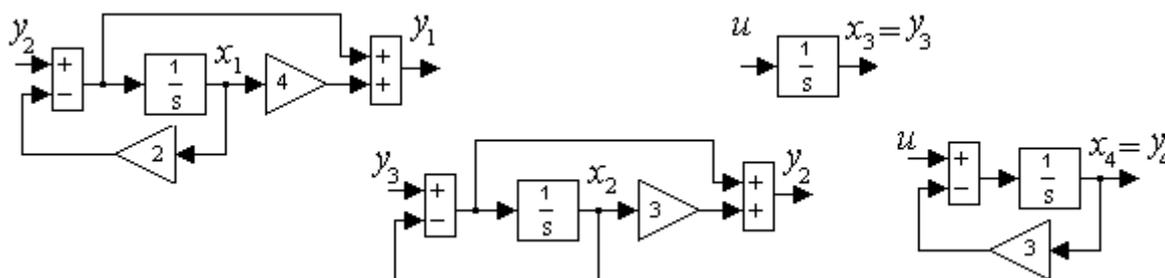


Рис. П.7. Модели элементов системы (П.52) в пространстве состояний.

Модели элементов динамической системы (П.51) в пространстве состояний, в соответствии с выражениями (П.52), имеют вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + y_2(t), \quad y_1(t) = 2x_1(t) + y_2(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + y_3(t), \quad y_2(t) = 2x_2(t) + y_3(t), \quad (\text{П.53})$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = u(t), \quad y_3(t) = x_3(t),$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = -3x_4(t) + u(t), \quad y_4(t) = x_4(t).$$

Структурная схема динамической системы (П.53), в соответствии с моделями вида (П.52) и структурами на рис. П.6 и рис. П.7, изображена на рис. П.8.

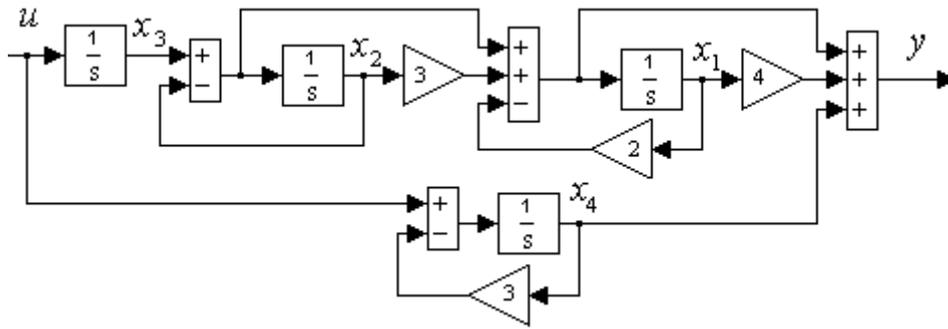


Рис. П.8. Модель системы (П.53), (П.54).

Исключая в уравнениях (П.53) промежуточные переменные y_1, y_2, y_3, y_4 , а также учитывая равенство $y = y_1 + y_4$, модель системы (П.51) в пространстве состояний можно записать в виде:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + x_3(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = u(t), \tag{П.54}$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = -3x_4(t) + u(t),$$

$$y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) + x_4(t).$$

Векторно-матричная форма представления уравнений (П.54) в виде (П.9), (П.10) имеет место при следующих матрице и векторах:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 2 \quad 1 \quad 1), \quad D = 0. \tag{П.55}$$

Примеры уравнений состояния систем

Рассмотрим несколько моделей линейных систем в пространстве состояний, опираясь на классические модели, которые были рассмотрены во второй главе.

Манипулятор. С помощью способа прямого программирования уравнение манипулятора вида (47) можно описать в пространстве состояний уравнениями

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) + u(t),$$

$$y(t) = k_3x_1(t) + k_4x_2(t), \quad (\text{П.56})$$

$$k_1 = \frac{1}{T_1}, \quad k_2 = \frac{T_2}{T_1}, \quad k_3 = \frac{K}{T_1}, \quad k_4 = \frac{K T_3}{T_1},$$

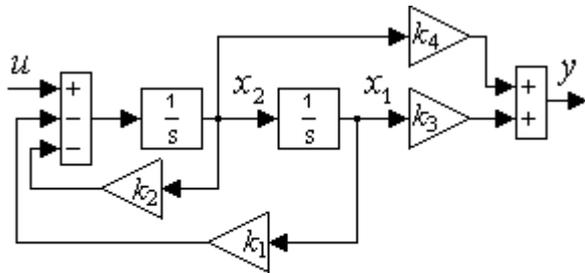


Рис. П.9. Модель манипулятора (П.56) в пространстве состояний.

а также представить в виде структурной схемы (см. рис. П.9). В форме (П.9), (П.10) этим уравнениям соответствуют

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.57})$$

$$C = (k_3 \quad k_4), \quad D = 0.$$

Ресивер. С помощью способа программирования по структурной схеме, учитывая, что уравнению ресивера вида (76) соответствует параллельное соединение двух звеньев с выходом

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s),$$

запишем уравнения переменных $y_1(s)$ и $y_2(s)$ следующим образом:

$$y_1(s) = W_1(s)u(s) = \frac{k_4}{s + k_3}u_1(s),$$

$$y_2(s) = W_2(s)u(s) = \frac{k_5}{s + k_3}u_2(s), \quad (\text{П.58})$$

$$k_3 = \frac{1}{T_0}, \quad k_4 = \frac{K_1}{T_0}, \quad k_5 = \frac{K_2}{T_0}.$$

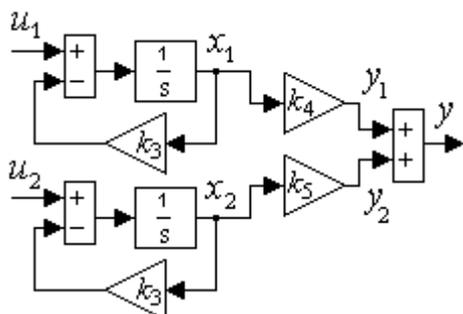


Рис. П.10. Модель ресивера (П.59) в пространстве состояний.

Уравнения (П.58) в переменных состояния можно переписать в виде

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -k_3x_1(t) + u_1(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -k_3x_2(t) + u_2(t), \quad (\text{П.59})$$

$$y(t) = k_4x_1(t) + k_5x_2(t).$$

Структурную модель системы (П.59) в пространстве состояний можно изобразить в виде схемы, показанной на рис. П.10. Если же систему уравнений (П.59) представить в векторно-матричном виде (П.9), (П.10), то соответствующие векторы и матрицы будут иметь вид

$$x^T = (x_1 \quad x_2), \quad u^T = (u_1 \quad u_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (k_4 \quad k_5), \quad D = 0. \quad (\text{П.60})$$

Гидравлический сервомотор. Используя способ прямого программирования, уравнение гидромотора вида (93) в переменных состояния можно описать следующим образом:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -k_2 x_2(t) - k_3 x_3(t) + u(t), \quad y(t) = k_1 x_1(t), \quad (\text{П.61})$$

$$k_1 = \frac{K}{T^2}, \quad k_2 = \frac{1}{T^2}, \quad k_3 = \frac{2\zeta}{T},$$

Структурная схема динамической системы (П.61) показана на рис. П.11.

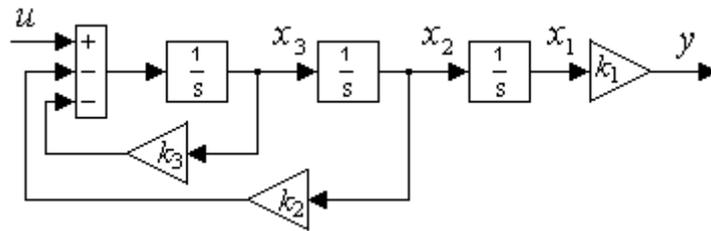


Рис. П.11. Модель гидромотора (П.61) в пространстве состояний.

Векторно-матричная форма записи системы (П.61) в виде уравнений (П.9), (П.10) имеет следующие матрицу и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (k_1 \quad 0 \quad 0), \quad D = 0. \quad (\text{П.62})$$

Длинный бьэф. С помощью способа прямого программирования уравнение длинного бьефа вида (98) можно описать в пространстве состояний уравнениями

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -k_2 x_2(t) + u(t - \tau),$$

$$y(t) = k_3 x_1(t) + k_4 u(t - \tau), \quad (\text{П.63})$$

$$k_2 = \frac{1}{T_1}, \quad k_3 = \left(\frac{K_1}{T_1} - \frac{L_1}{T_1^2} \right), \quad k_4 = \frac{L_1}{T_1}.$$

Поскольку дифференциальное уравнение (П.63) – первого порядка, то ее векторно-матричная форма записи вида (П.9), (П.10) также будет скалярной, т.е. матрицы и векторы – скалярные величины, принимающие следующие

значения:

$$A = -k_2, \quad B = 1, \quad C = k_3, \quad D = k_4. \quad (\text{П.64})$$

В выражении (П.64) в отличие, например, от соотношений (П.57), (П.60) или (П.62), матрица обхода системы $D \neq 0$, что объясняется равенством порядка числителя и знаменателя передаточной функции из (98).

Структурную модель системы (П.63) или (П.9), (П.10), (П.64) в пространстве состояний можно представить в виде схемы, приведенной на рис. П.12.

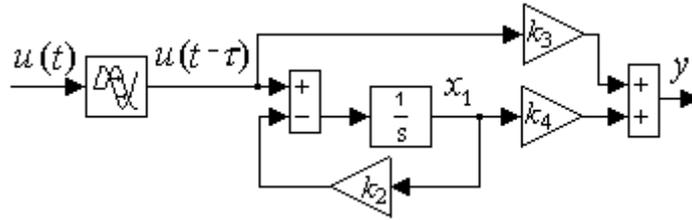


Рис. П.12. Модель длинного бьефа (П.63) в пространстве состояний.

Передаточные функции нормальных систем

Рассмотрим модель нормальной системы, записанную в пространстве состояний

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (\text{П.65})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (\text{П.66})$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^l$. Перепишем уравнения системы (П.65), (П.66) в изображениях с помощью векторно-матричной передаточной функции системы. С этой целью выполним преобразование Лапласа над уравнениями (П.65) и определим изображение вектора состояний $x(s)$ в виде

$$x(s) = (sE - A)^{-1} Bu(s) = \frac{(sE - A)^+}{\det(sE - A)} Bu(s), \quad (\text{П.67})$$

где $(sE - A)^{-1}$ – обратная матрица; $\det(sE - A)$ – детерминант матрицы; $(sE - A)^+$ – присоединенная¹ матрица к матрице $(sE - A)$; E – единичная матрица соответствующего размера, в данном случае $(n \times n)$. Если соотношение (п.66) записать в изображениях, куда затем подставить $x(s)$ из (п.67), то получим равенство

$$y(s) = \left(C(sE - A)^{-1} B + D \right) u(s) = W(s)u(s), \quad (\text{П.68})$$

где $W(s)$ – передаточная функция в виде матричного² множителя, связываю-

¹ По определению это транспонированная матрица алгебраических дополнений.

² В теории матриц комплексный аргумент передаточной функции принято обозначать через λ , но для удобства будем его обозначать, как и в скалярном случае, через s .

щего изображения по Лапласу выхода $y(s)$ и входа $u(s)$ при нулевом начальном состоянии $x(0)$.

В строго реализуемых системах функция $W(s)$ имеет более простой вид

$$W(s) = C(sE - A)^{-1} B. \quad (\text{П.69})$$

Размер матрицы $W(s)$ определяется размерностями выхода $y(s)$ и входа $u(s)$, в рассматриваемом случае ($l \times m$). При $l = m = 1$ функция $W(s)$ будет скалярной, но в общем случае $W(s)$ – это матричная функция с элементами $W_{ij}(s)$, т.к. выражение (П.68) можно представить соотношением

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ \dots \\ y_l(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{l1}(s) & \dots & W_{lm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ \dots \\ u_m(s) \end{pmatrix}.$$

Уравнения состояний при типовом соединении систем

В ряде прикладных задач возникает необходимость в получении математического описания системы в пространстве состояний, состоящей из элементов (подсистем), соединенных между собой типовым образом – параллельно, последовательно или с помощью обратной связи. Иногда требуется иметь единое уравнение в качестве математической модели некоторой объединенной системы, т.е. описание нескольких независимых систем.

Объединение независимых систем. Рассмотрим простой случай, когда некоторая объединенная система S состоит из независимых систем S_i , $i=1, 2$, описываемых уравнениями

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), \quad y_i(t) = C_i x_i(t), \quad (\text{П.70})$$

где матрицы A_i , B_i , C_i имеют соответственно размеры $(n_i \times n_i)$, $(n_i \times n_i)$, $(l_i \times m_i)$.

Введем в рассмотрение составные (обобщенные) векторы: для переменных состояния системы $x(t) = \text{col}\{x_1(t), x_2(t)\} \in R^{n_1+n_2}$, для переменных входа $u(t) = \text{col}\{u_1(t), u_2(t)\} \in R^{m_1+m_2}$, переменных выхода $y(t) = \text{col}\{y_1(t), y_2(t)\} \in R^{l_1+l_2}$. Графический образ объединения систем S_i в одну показан на рис. П.13, математическое описание которого представляет собой систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (\text{П.71})$$

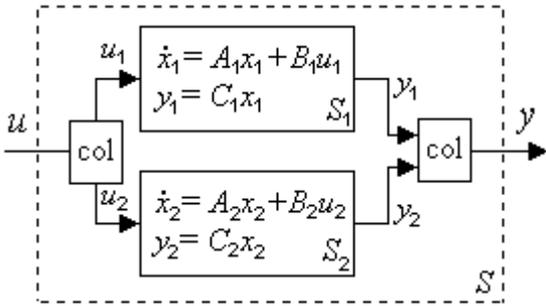


Рис. П.13. Модель объединения независимых систем (П.70).

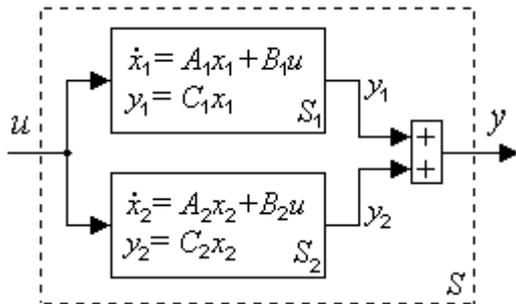


Рис. П.14. Модель параллельного соединения двух систем.

Математическое описание системы S , образованной параллельным соединением нескольких систем S_i , имеет по-прежнему вид (П.71), где матрицы A , B , C также блочные, вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad C_2).$$

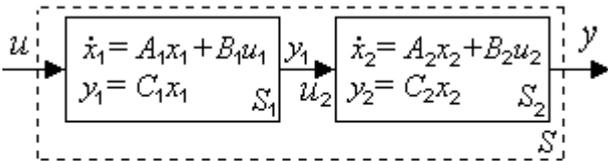


Рис. П.15. Последовательное соединение двух подсистем.

второй, $u_2(t) = y_1(t)$, поскольку их размерности совпадают. Описывая систему, представленную на рис. П.15 уравнениями (П.71), получаем следующие блочные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad C_2).$$

Соединение подсистем с обратной связью, (рис. П.16), где выход подсистемы S_2 вычитается (при положительной обратной связи прибавляется) из входа всей системы S и поступает на вход подсистемы S_1 .

где блочные матрицы A , B , C имеют следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Параллельное соединение систем (подсистем). Принципиальное отличие параллельного соединения двух подсистем от объединения двух независимых систем состоит в том, что при параллельном соединении вход $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$ поступает на обе подсистемы одновременно, а выход этого соединения образуется как сумма $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ (рис. П.14). Вектор состояния $x(t)$ остается по-прежнему составным $x(t) = \text{col}\{x_1(t), x_2(t)\} \in R^{n_1+n_2}$.

Последовательное соединение подсистем, (рис. П.15), где входом системы S является вход подсистемы S_1 , $u(t) = u_1(t)$, а выход системы S формируется выходом второй подсистемы S_2 , $y(t) = y_2(t)$. При этом выход первой подсистемы является входом

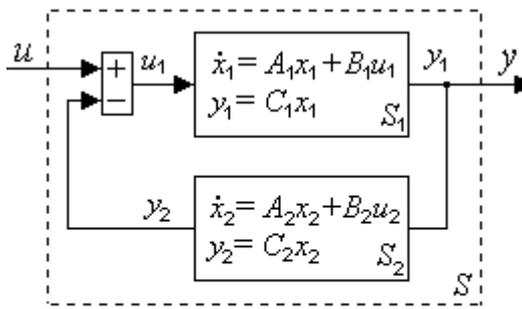


Рис. П.16. Соединение подсистем с обратной связью.

Другими словами, $u_1(t) = u(t) - y_2(t)$, $u_2(t) = y_1(t)$, что позволяет в математическом описании (П.71) для системы, показанной на рис. П.16, получить блочные матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad 0).$$

Дискретизация непрерывных моделей

Пусть исследуемая система линейна и не содержит нестационарных элементов, т.е. уравнения динамики имеют вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (\text{П.72})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (\text{П.73})$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^l$. Очевидно, что если функция $x(t)$ определена, то выход $y(t)$ вычисляется непосредственно из (П.73).

Рассмотрим решение задачи Коши, т.е. определим вектор состояния $x(t)$ при известном начальном значении $x(0)$ и заданном входном процессе $u(t)$.

Решение однородного уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad (\text{П.74})$$

для всех действительных t_0 , при выполнении равенства

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E, \quad (\text{П.75})$$

где $x(t) \in R^n$; $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ – переходная матрица состояния; $X(t)$ – фундаментальная матрица-функция, можно представить в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0). \quad (\text{П.76})$$

Для того, чтобы воспользоваться выражением (П.76), необходимо уметь вычислять матрицу $\Phi(t, t_0)$. Известно, что поскольку уравнение (П.74) стационарное, то матрица $\Phi(t, t_0)$ зависит от одного аргумента θ и совпадает с матричной экспонентой $\Phi(t, t_0) = e^{A\theta}$, $\theta = t - t_0$, которую можно определить в виде ряда

$$e^{A\theta} = E + A\theta + \frac{(A\theta)^2}{2} + \dots + \frac{(A\theta)^k}{k!} + \dots = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A\theta)^k}{k!}. \quad (\text{П.77})$$

Таким образом, решение уравнения (П.74) определяется формулой

$$x(t) = e^{At} x_0, \quad (\text{П.78})$$

где $x_0 = x(t_0=0)$. Выражение (П.78) имеет наиболее простой вид тогда, когда матрица $A = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, поскольку матрица e^{At} будет диагональной

$$e^{At} = \text{diag}\{e^{s_1 t} \quad e^{s_2 t} \quad \dots \quad e^{s_n t}\}.$$

Решение неоднородного уравнения (П.72) можно представить в виде

$$x(t) = x_{\text{общ}}(t) + x_{\text{част}}(t),$$

где $x_{\text{общ}}(t)$ – переходная составляющая или общее решение однородного уравнения (П.74) при заданных начальных условиях; $x_{\text{част}}(t)$ – вынужденная составляющая или частное решение уравнения (П.72) при нулевых начальных условиях.

Как известно, $x_{\text{общ}}(t)$ имеет вид

$$x_{\text{общ}}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \vartheta) B u(\vartheta) d\vartheta,$$

а $x_{\text{част}}(t)$ представляет собой выражение (П.76); следовательно, для $x(t)$ можно записать следующую формулу Коши

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \vartheta) B u(\vartheta) d\vartheta, \quad (\text{П.79})$$

а для стационарных систем в силу $\Phi(t, t_0) = e^{A\theta}$, $\theta = t - t_0$ выражение (П.79) представить в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\vartheta)} B u(\vartheta) d\vartheta, \quad (\text{П.80})$$

часто называемом переходным уравнением состояния.

Перечислим основные свойства переходной матрицы $\Phi(t, t_0)$.

1. $\forall t_0$ имеет место $\Phi(t_0, t_0) = E$.
2. $\forall t_0, t_1, t$ выполнено правило композиции $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$.
3. $\det \Phi(t, t_0) \neq 0 \quad \forall t_0, t$.
4. $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$, где $X(t)$ – любая фундаментальная матрица.
5. $(\Phi(t, t_0))^{-1} = \Phi(t_0, t) \quad \forall t_0, t$.

6. Справедливо уравнение

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

7. Матрица $\Phi^T(t, t_0)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\frac{d\Phi^T(t_0, t)}{dt} = -A^T(t)\Phi^T(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

8. Если $\det T \neq 0$, $\Phi^T(t, t_0) = T^{-1}\bar{\Phi}^T(t, t_0)T$, где $\bar{\Phi}(t, t_0)$ удовлетворяет (П.75),

в котором вместо матрицы A подставлена матрица $\bar{A}(t) = TA(t)T^{-1}$.

Постановка задачи дискретизации. Для динамической системы, непрерывная модель которой имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (П.81)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \in R,$$

требуется получить эквивалентную систему разностных уравнений или ее дискретную модель вида

$$x[k+1] = Px[k] + Qu[k], \quad (П.82)$$

$$y[k] = \bar{C}x[k] + \bar{D}u[k], \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь под эквивалентностью систем понимается совпадение их реакций на одно и то же входное воздействие при соответствующих начальных условиях. Более того, при $u[k] = u(t_k)$, где $t_k = kT_0$, $T_0 = \text{const}$ – шаг дискретизации (период квантования), выполнено $y[k] = y(t_k)$ – решения уравнений (П.81) и (П.82) совпадают при $t_k = kT_0$.

Формулы перехода к разностным уравнениям. Рассмотрим задачу определения матриц P, Q, \bar{C}, \bar{D} в (П.82) по известным матрицам A, B, C, D в (П.81), исходя из сформулированного выше требования эквивалентности систем по отношению к входному воздействию $u(t)$. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением кусочно-постоянного процесса вида

$$u(t) = u(t_k) \text{ при } t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t_k = kT_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

достаточно распространенного на практике, который формируется так называемым фиксатором или экстраполятором нулевого порядка. Известно, что решение этой задачи с использованием аппарата передаточных функций и z -преобразования (дискретного преобразования Лапласа) позволяет передаточную функцию дискретной модели $W_D(z)$ записать следующим образом:

$$W(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}, \quad (П.83)$$

где Z означает операцию z -преобразования переходной функции исходной непрерывной системы. Для решения аналогичной задачи формулой Коши (П.80) и проинтегрируем первое уравнение из (П.81) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$, полагая на нем $u(t) = u(t_k)$. При $x_0 = x(t_k)$ получим

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\nu)}Bu(\nu)d\nu = \\ &= e^{AT_0}x(t_k) + \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\nu)}d\nu \right) Bu(t_k). \end{aligned} \quad (П.84)$$

Если ввести новую переменную $\theta = t_{k+1} - \nu$, то, вычисляя интеграл в круглых скобках из соотношения (П.84), при $t_{k+1} - t_k = T_0$ получим

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\nu)} d\nu = \int_0^{T_0} e^{A\theta} d\theta = A^{-1}(e^{AT_0} - E),$$

предполагая, что матрица A невырожденная.

Следовательно, выражение (П.84) можно переписать в виде

$$x(t_{k+1}) = e^{AT_0} x(t_k) + A^{-1}(e^{AT_0} - E)Bu(t_k), \quad \det A \neq 0, \quad (\text{П.85})$$

а уравнение выхода, согласно второму уравнению в (П.81), представить следующим образом:

$$y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k). \quad (\text{П.86})$$

Сопоставляя первое уравнение из (П.82) с уравнением (П.85) и второе уравнение из (П.82) с уравнением (П.86), получим очевидные соотношения

$$P = e^{AT_0}, \quad Q = A^{-1}(P - E)B, \quad \bar{C} = C, \quad \bar{D} = D. \quad (\text{П.87})$$

Когда выполнен переход от (П.81) к (П.82), то с учетом соотношений (П.87) можно записать уравнения

$$x[k+1] = e^{AT_0} x[k] + A^{-1}(e^{AT_0} - E)Bu[k], \quad \det A \neq 0, \quad (\text{П.88})$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k], \quad k = 0, 1, \dots,$$

которые с помощью z -преобразования и преобразований, аналогичных соотношениям (П.67), (П.68), могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} y(z) &= W(z)u(z) = \\ &= \left(C(zE - e^{AT_0})^{-1} A^{-1}(e^{AT_0} - E)B + D \right) u(z) = \\ &= \left(C(zE - P)^{-1} Q + D \right) u(z), \quad \det A \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.89})$$

Заметим, что передаточные функции (П.83) и (П.89) идентичны.

Вычисление матричной функции e^{At}

Методы вычисления матричной экспоненты обычно подразделяют на точные и приближенные. Точные позволяют получить выражение для матричной экспоненты через скалярные аналитические функции, а приближенные – аппроксимировать ее с некоторой алгоритмической ошибкой, зависящей от способа аппроксимации и параметров алгоритма.

Точные методы. Рассмотрим аналитические выражения для матричной функции e^{At} в следующих частных случаях:

Матрица A диагональная с вещественными собственными значениями.

Пусть $A = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $\text{Im} s_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Непосредственным вычислением суммы ряда (П.77) получаем

$$e^{At} = \text{diag}\{e^{s_1 t} \quad e^{s_2 t} \quad \dots \quad e^{s_n t}\},$$

где $e^{s_i t}$ – скалярные экспоненты.

Матрица A блочно-диагональная с мнимыми собственными значениями.

Пусть A имеет собственные числа: $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, $j^2 = -1$, тогда ее можно представить в виде

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \alpha E + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

а матричную экспоненту описать выражением

$$e^{At} = e^{\alpha Et} e^{\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} t}.$$

Применяя формулу (П.77), можно показать, что это соотношение имеет вид

$$e^{At} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Матрица A имеет кратные вещественные собственные значения. Пусть $s_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, т.е. матрица A нильпотентная

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

вычисляя степени которой получаем, что

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^4 = \dots = 0.$$

Следовательно, ряд (П.77) точно выражается первыми тремя слагаемыми в виде

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В случае отличных от нуля кратных вещественных собственных значений $s_i = \alpha$, $i = 1, 2, 3$ аналогично предыдущему получаем

$$e^{At} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если матрица A имеет произвольный вид, то всегда существует невырожденное преобразование с матрицей T такое, что матрица $\bar{A} = TAT^{-1}$ – жорданова. Тогда по свойству 8 (см. выше основные свойства переходной матрицы) получаем

$$e^{At} = T^{-1}e^{\bar{A}t}T.$$

Аналитические формулы для матричной экспоненты могут быть получены также на основе преобразования Лапласа. Этот способ основан на том, что резольвента $R(s)$ постоянной матрицы A является изображением по Лапласу ее матричной экспоненты, т.е.

$$L(e^{At}) = (sE - A)^{-1},$$

причем элементы переходной матрицы можно найти с помощью таблиц обратного преобразования Лапласа.

Приближенные методы. Эти методы основаны на различных аппроксимациях ряда (П.77) выражениями, содержащими конечное число слагаемых. Достаточно очевидной является аппроксимация Тейлора порядка k , согласно которой ряд (П.77) приближенно заменяется конечной суммой

$$e^{A\theta} \approx E + A\theta + \frac{(A\theta)^2}{2} + \dots + \frac{(A\theta)^k}{k!} \equiv E + \sum_{i=1}^k \frac{(A\theta)^i}{i!}. \quad (\text{П.90})$$

В частности, при $k = 1$ получаем линейное приближение вида

$$e^{A\theta} \approx E + A\theta, \quad (\text{П.91})$$

которое будем называть аппроксимацией Эйлера.

Аппроксимация (П.90) не является лучшей и во многих отношениях уступает более общей аппроксимации Паде. При такой аппроксимации экспонента e^x представляется рациональной функцией

$$e^x \approx \frac{F_{\mu\nu}(x)}{G_{\mu\nu}(x)}, \quad (\text{П.92})$$

$$F_{\mu\nu}(x) = 1 + \frac{\mu}{(\mu+\nu)1!}x + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\nu+1)\mu!}x^\mu, \quad (\text{П.93})$$

$$G_{\mu\nu}(x) = 1 - \frac{\nu}{(\mu+\nu)1!}x + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots + (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\nu+1)\nu!}x^\nu. \quad (\text{П.94})$$

Соответственно, для матричного аргумента $x = A\theta$ запишем

$$e^{A\theta} \approx F_{\mu\nu}(A\theta)G_{\mu\nu}^{-1}(A\theta), \quad (\text{П.95})$$

где $F_{\mu\nu}(A\theta)$, $G_{\mu\nu}(A\theta)$ – матричные многочлены вида (П.93), (П.94). В дальнейшем (П.95) будем называть аппроксимацией Паде (μ, ν) .

Приведем некоторые частные случаи (П.95). Во-первых, аппроксимация Тейлора (П.90) – это частный случай (П.95) при $\nu = 0$. Следовательно, выражение (П.91) совпадает с аппроксимацией Паде $(1, 0)$. Аппроксимация Паде $(0, 1)$ имеет вид

$$e^{A\theta} \approx (E - A\theta)^{-1} \quad (\text{П.96})$$

и далее будет называться неявным методом Эйлера.

Аппроксимация Паде $(1, 1)$ соответствует методу Тастина и определяется формулой

$$e^{A\theta} \approx (E + 0.5A\theta)(E - 0.5A\theta)^{-1}. \quad (\text{П.97})$$

Формула Паде $(2, 2)$ приводит к выражению

$$e^{A\theta} \approx (12E + 6A\theta + (A\theta)^2)(12E - 6A\theta + (A\theta)^2)^{-1}. \quad (\text{П.98})$$

Основным преимуществом аппроксимаций Паде является их более высокая точность, а недостатком – необходимость обращения матрицы $G_{\mu\nu}(A\theta)$ и связанная с этим проблема ее вырожденности.

Вычисление матрицы Q

Как уже отмечалось, формула (П.87) для вычисления матрицы Q применима, если $\det A \neq 0$.

Трудностей, связанных с вычислением Q при вырожденной матрице A , можно избежать, если при формальной подстановке выражения $P = e^{AT_0}$, полученного из аппроксимаций Тейлора (П.90) или Паде (П.95), в соотношении (П.87) выполнить "сокращение" матрицы A . Тогда в выражение для Q матрица A^{-1} входить не будет. В частности, аппроксимация по методу Эйлера (П.87), (П.91) $P = E + AT_0$ приводит к формуле $Q = BT_0$, а аппроксимация Паде $(1, 1)$ (П.87), (П.97) – к формуле $Q = (E - 0.5AT_0)^{-1}BT_0$.

Иной способ заключается в расширении пространства состояний исходной системы (П.81). Входной процесс $u(t)$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$ рассматривается как решение некоторого однородного дифференциального уравнения. Тогда расширенная система тоже однородная и в вычислении по (П.87) нет необходимости. Искомые матрицы P и Q получаются как подматрицы расширенной "матричной" экспоненты. Покажем это на примере ступенчатого входного процесса $u(t) = u(t_k)$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$. Для указанного промежутка времени уравнение состояния (П.81) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_k) = x[k], \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ \frac{du(t)}{dt} &= 0, \quad u(t_k) = u[k]. \end{aligned} \quad (\text{П.99})$$

Введем в рассмотрение расширенный $(n + m)$ -мерный вектор состояния $\bar{x}(t) = \text{col}\{x(t), u(t)\}$ и $(n + m) \times (n + m)$ матрицу

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{n \times m} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (П.99) запишем в виде

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{A}\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_k) = \text{col}\{x[k], u[k]\}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (\text{П.100})$$

Соответствующая дискретная модель, аналог (П.82), принимает вид

$$\bar{x}[k + 1] = \bar{P}\bar{x}[k], \quad \bar{P} = e^{\bar{A}T_0}. \quad (\text{П.101})$$

Учитывая структуру матрицы \bar{A} и формулу (П.77), для матрицы \bar{P} непосредственно находим

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

С учетом этого из (П.101) получаем:

$$x[k + 1] = P'x[k] + Q'u[k]. \quad (\text{П.102})$$

Сравнивая (П.102) с (П.82), имеем очевидный факт – матрицы P и Q в (П.82) совпадают с матрицами P' и Q' . Другими словами, они могут быть получены как соответствующие подматрицы матрицы \bar{P} вида (П.101).

Вычисление передаточной функции дискретной модели

Уже отмечалось, что уравнение (П.89) описывает дискретную систему с помощью передаточной функции, вычисленной по разностному уравнению (П.82), исходя из преобразования уравнений состояния непрерывной системы (П.81). Однако можно получить и приближенное решение задачи, при котором искомая функция $W(z)$ определяется непосредственной заменой аргумента s в $W(s)$. Эти формулы основаны на "линейных" аппроксимациях Паде (μ, ν), в которых значения μ и ν не превышают единицы.

Для формулы аппроксимации Эйлера (П.91) в (П.89) следует подставить $P = E + AT_0$ и учесть $Q = BT_0$, тогда получаем

$$W(z) = C(zE - P)^{-1}Q = C((z - 1)E - AT_0)^{-1}BT_0 = C\left(\frac{z - 1}{T_0} - A\right)^{-1}B. \quad (\text{П.103})$$

Теперь при сравнении выражения (п.103) с формулой $W(s) = C(sE - A)^{-1}B$ становится вполне очевидным, что $W(z)$ можно получить приближенно из $W(s)$ с помощью следующей замены аргумента:

$$W(z) = W(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T_0}} \cdot \quad (\text{П.104})$$

Для формулы неявного метода Эйлера (П.96), аналогичным образом получаем

$$W(z) = \frac{1}{z} W(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{zT_0}} \cdot \quad (\text{П.105})$$

Для формулы с аппроксимацией Паде (1, 1) после некоторых преобразований получаем подстановку метода Тастина

$$W(z) = \frac{2}{z+1} W(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}} \cdot \quad (\text{П.106})$$

Точность приведенных методов зависит от соотношения между интервалом T_0 и наименьшей постоянной времени непрерывной системы $W(s)$.

Устойчивость дискретных моделей

Процедура построения дискретных моделей непрерывных систем всегда сопровождается требованием о сохранении свойства устойчивости: устойчивая непрерывная система должна приводить к устойчивой дискретной модели, а в случае неустойчивой исходной системы ее дискретная модель тоже должна получиться неустойчивой. Для точных методов перехода это требование выполнено, а для приближенных не всегда.

Точный подход. Как известно, асимптотическая устойчивость линейных непрерывных систем имеет место, если корни характеристического многочлена (собственные числа) матрицы A в (П.81) имеют отрицательные вещественные части, т.е.

$$\operatorname{Re} s_i < 0 \text{ при } \det(s_i E - A) = 0, i = 1, \dots, n.$$

При этом дискретная система (П.82) будет асимптотически устойчивой, если корни ее характеристического многочлена удовлетворяют условию

$$|z_i| < 1 \text{ при } \det(z_i E - P) = 0, i = 1, \dots, n.$$

Известно следующее утверждение: согласно точной формуле (П.87) $P = e^{AT_0}$, следовательно, во-первых, собственные числа z_i матрицы P определяются соотношением $z_i = e^{s_i T_0}$, $i = 1, \dots, n$, во-вторых, при всех $T_0 > 0$ выполнено $\{\operatorname{Re} s_i < 0 \Leftrightarrow |z_i| < 1\}$, в-третьих, свойства устойчивости систем (П.81) и

(П.82) эквивалентны.

Метод Эйлера. Согласно этому методу по (П.91) получаем равенство $P = E + AT_0$. Следовательно, $z_i = 1 + s_i T_0$, $i = 1, \dots, n$. Проверка условия устойчивости $|z_i| < 1$ приводит к неравенствам

$$(\alpha_i + 1)^2 + \beta_i^2 < 1, \quad \alpha_i = T_0 \operatorname{Re} s_i, \quad \beta_i = T_0 \operatorname{Im} s_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{П.107})$$

Условие (П.107) означает, что значения корней характеристического многочлена системы, умноженные на интервал квантования, должны находиться на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса с центром в точке $(-1, j0)$. Это эквивалентно неравенству

$$T_0 = 2 \min_i \frac{|\operatorname{Re} s_i|}{|s_i^2|}. \quad (\text{П.108})$$

Область применения явного метода Эйлера существенно ограничивается малыми (относительно модулей собственных чисел системы) значениями T_0 .

Неявный метод Эйлера. Согласно формуле (П.96) $P = (E - A\theta)^{-1}$ имеем

$$z_i = \frac{1}{1 - s_i T_0}, \quad i = 1, \dots, n,$$

следовательно, условие $|z_i| < 1$ приводит к неравенствам

$$(\alpha_i - 1)^2 + \beta_i^2 > 1, \quad \alpha_i = T_0 \operatorname{Re} s_i, \quad \beta_i = T_0 \operatorname{Im} s_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{П.109})$$

Условие (П.109) означает, что корни характеристического многочлена системы, умноженные на интервал квантования, должны находиться на комплексной плоскости вне окружности единичного радиуса с центром в точке $(1, j0)$. Из этого следует, что при такой аппроксимации для любой устойчивой непрерывной системы будет получена устойчивая дискретная модель при всех (а не только малых) $T_0 > 0$.

Следует отметить, что свойства устойчивости непрерывных и дискретных моделей не будут эквивалентными: устойчивые дискретные модели могут получиться и для неустойчивых исходных непрерывных систем. Точность аппроксимации по этому методу невелика.

Аппроксимация Паде при $\nu = \mu$. Можно показать, что для аппроксимаций Паде (ν, μ) при $\nu = \mu$, $T_0 > 0$ справедливо $\{\operatorname{Re} s_i < 0 \Leftrightarrow |z_i| < 1\}$. Таким образом, при их использовании устойчивость системы (П.81) эквивалентна устойчивости системы (П.82). В частности, это свойство выполнено для рассмотренных выше аппроксимаций (П.97) и (П.98).

Устойчивость методов численного интегрирования. Можно установить тесную связь между рассмотренными методами построения дискретных моделей непрерывных систем и методами численного решения задач Коши.

Пусть требуется проинтегрировать уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0. \quad (\text{П.110})$$

Известно, что его решение может быть получено в виде некоторого рекуррентного соотношения $x_{k+1} = \varphi(x_k, k)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ – номер шага (итерации), а значения x_k соответствуют значениям искомой функции $x(t)$ в дискретные моменты времени $t_k = kh$, где $h > 0$ – шаг интегрирования. Вид функции $\varphi(x_k, k)$ определяется по искомой функции $f(x, t)$ согласно выбранному методу численного интегрирования. Например, используя метод Эйлера, получаем известную формулу

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, t_k)h, \quad t_k = k \cdot h, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П.111})$$

Более подробно рассмотрим случай, когда функция $f(x, t)$ линейна по x и уравнение (П.110) может быть представлено в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax + \phi(t), \quad (\text{П.112})$$

где A – $n \times n$ -матрица. Формула метода Эйлера (П.111) приводит к разностному уравнению

$$x_{k+1} = (E + Ah)x_k + \phi(t_k)h. \quad (\text{П.113})$$

Обратим внимание на то, что уравнение (П.113) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (П.82), в котором матрицы P, Q получены на основе приближенной формулы (П.91) для матричной экспоненты.

Устойчивость полученной численной процедуры определяется аппроксимации: так, для A и $T_0 = h$ должно выполняться неравенство (П.107). Следовательно, если собственные числа системы велики по модулю (что соответствует малым по величине постоянным времени), то для получения устойчивого решения необходимо выбирать шаг интегрирования h достаточно малым. Это приводит к значительным затратам машинного времени, а также надо иметь в виду, что уменьшение величины h вызывает увеличение инструментальных ошибок, связанных с конечностью разрядной сетки ЦВМ.

Подобным свойством обладают все так называемые явные методы численного интегрирования, которые для линейных стационарных систем сводятся к аппроксимации Тейлора (П.90).

Отметим, что недостатки явных методов заметно проявляют себя при решении жестких систем, у которых собственные значения отличаются друг от друга по модулю на несколько порядков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
2. Математические основы теории автоматического регулирования. Т.1 / Под ред. *Б.К. Чемоданова*. М.: Высш. школа, 1977.
3. Математические основы теории автоматического регулирования. Т.2 / Под ред. *Б.К. Чемоданова*. М.: Высш. школа, 1977.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.1: Методы современной теории автоматического управления / Под ред. *Н.Д. Егунова*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
5. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. *Н.Д. Егунова*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
6. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.3: Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / Под ред. *Н.Д. Егунова*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
7. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975.
8. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А.А. Красовского*. М.: Наука, 1987.
9. *Гультяев А.К.* MATLAB-5.2. Имитационное моделирование в среде Windows: практическое пособие. М.: Наука. 2000.
10. *Дьяконов В., Круглов В.* Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2001.
11. *Еремин Е.Л.* Лабораторно-курсовой практикум по ТОАУ с применением MatLab for Windows. Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2001.
12. Основы математического моделирования. Построение и анализ моделей с примерами на языке MATLAB / Под ред. *А.Л. Фрадкова*. СПб.: Изд-во БГТУ,
13. *Потемкин В.Г., Рудаков П.И.* Система MATLAB-5 для студентов. 2-е изд., испр. и дополн. М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 1999.
14. *Еремин И.Е., Еремин Е.Л., Костюков Н.С.* Имитационное моделирование диэлектрической проницаемости конденсированных материалов: ультрафиолетовый и видимый спектры частот. Благовещенск: Изд-во АмурКНИИ АНЦ ДВО РАН, 2001.
15. *Баньшева В.В., Костюков Н.С.* Упругая дипольная поляризация // Дальневосточный вестник высшего образования. 2001. №1. С. 62 – 69.

16. *Костюков Н.С., Банышева В.В.* Поляризационные процессы в воде // *Электричество*. 2001. №11. С. 66-69
17. *Еремин И.Е., Костюков Н.С.* Построение модели процесса поляризации диэлектриков с помощью обратных связей // *Информатика и системы управления*. 2001. № 1. С. 45-53.
18. *Еремин И.Е., Костюков Н.С.* Построение кибернетической модели оптического показателя преломления // *Информатика и системы управления*. 2001. № 2. С. 42-49.
19. *Банышева В.В., Еремин И.Е., Костюков Н.С.* Моделирование длинноволнового спектра оптического показателя преломления воды // *Информатика и системы управления*. 2002. № 1(3). С. 14-23.
20. *Еремина В.В., Костюков Н.С., Тюрина С.Ю.* Моделирование оптического спектра воды в области упругих видов поляризации // *Информатика и системы управления*. 2003. № 2(6). С. 9-14.
21. *Костюков Н.С., Еремин И.Е.* Кибернетическая модель процесса упругой электронной поляризации диэлектрика // *Электричество*. 2004. № 1. С. 50-54.

Евгений Леонидович Еремин

*декан факультета математики и информатики,
профессор кафедры информационных и управляющих систем АмГУ,
доктор технических наук*

Илья Евгеньевич Еремин

*доцент кафедры информационных и управляющих систем АмГУ,
кандидат физико-математических наук*

Виктория Владимировна Еремина

*доцент кафедры информационных и управляющих систем АмГУ,
кандидат физико-математических наук*

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ (линеаризованные уравнения динамики)

Редактор О.К. Мамонтова