Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«Теории вероятностей и математической статистики»

По направлению 080100. 62- Экономика

Квалификация (степень) выпускника «Бакалавр»

профили: «Мировая Экономика»,

«Финансы и кредит»,

«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,

«Налоги и налогообложение»,

«Экономика и организация»

Благовещенск 2012

УМКД разработан доцентом Кафедры ОМ и И

Вохминцевой Галины Павловны

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от «_____» ________________2012 г. № _____

Зав. кафедрой _______________________/ Г. В. Литовка /

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМСС ____
от «____» _________________ 2012 г. №______

Председатель УМСС _______________/ Ковшун Ю. А.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Математика играет все возрастающую роль в естественно- научных и гуманитарных исследованиях являсь универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование − важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

1.1 Цель и задачи освоения дисциплины:

Цель освоения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» – фундаментальная подготовка в области теории вероятностей и математической статистики, широко используемых в математических методах исследования экономики.

Задача **–** обучение студентов методом организации выборочных наблюдений и анализа статистической информации, выявления закономерностей экономических явлений; привитие студентам навыков проведения комплексных вероятностно-статичтических исследований, содержательной экономической интерпретации результатов анализа, решения экономических и управленческих задач вероятностно-статистическими методами.

1. 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП)

Учебная дисциплина «Теория вероятностей математическая статистика»___ включена в базовую часть математического и естественнонаучного цикла ООП.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, знания и умения сформированные в процессе обучения в средней образовательной школе.

Знания, умения и виды деятельности, сформированные в результате изучения дисциплины «Теория вероятностей и математической статистики» потребуются при изучении экономических дисциплин, а также при изучении дисциплин: Макроэкономика, Микроэкономика, Статистика, Эконометрика. при разработке численных моделей на ЭВМ.

Место дисциплины в модульной структуре ООП.

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» является составной частью модуля «Математический и естественнонаучный цикл».

1. 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.

Выпускник должен обладать следующими общекультурными компетенциями (ОК):

владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);

способен анализировать социально-значимые проблемы и процессы, происходящие в обществе, и прогнозировать возможное их развитие в будущем (ОК-4);

способен логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-6);

способен находить организационно-управленческие решения и готов нести за них ответственность (ОК-8);

способен к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства (ОК-9);

владеет основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, имеет навыки работы с компьютером как средством управления информацией, способен работать с информацией в глобальных компьютерных сетях

(ОК-13).

Выпускник должен обладать следующими профессиональными компетенциями (ПК):

способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов, (ПК-2);

способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

аналитическая, научно-исследовательская деятельность

способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6);

способен анализировать и интерпретировать данные отечественной и зарубежной статистики о социально-экономических процессах и явлениях, выявлять тенденции изменения социально-экономических показателей (ПК-8);

способен использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-10);

способен использовать для решения коммуникативных задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-12);

способен критически оценить предлагаемые варианты управленческих решений и разработать и обосновать предложения по их совершенствованию с учетом критериев социально-экономической эффективности, рисков и возможных социально-экономических последствий (ПК-13);

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основы теории вероятностей и математической статистики, необходимые для решения экономических задач; классическую предельную теорию вероятностей, которая обосновывает методы статистической оценки значений характеристик случайных величин и векторов и статистической проверки гипотез.

Уметь: пользоваться основными правилами и приемами вычисления вероятностей, числовых характеристик случайных величин, оценивать по выборке неизвестные параметры распределений случайных величин, проверять стандартные гипотезы о виде распределения и о параметрах распределений;

Владеть: навыками практического решения вероятностных задач, постановки задач проведения статистического эксперимента; методами статистической обработки экспериментальных данных и обоснования выводов по результатам этой обработки.

1.4. Матрица компетенций учебной дисциплины.

1. Понятие случайного события. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Методы вычисления вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли.	ОК-5, ОК-6, ОК-15
2. Дискретные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-31
3. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.	ОК-5, ОК-6, ОК-15
4. Стандартные распределения: Биномиальное, Пуассона, показательное, равномерное, нормальное.	ОК-5, ОК-6, ОК-15
5. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.	ОК-5, ОК-6, ОК-15
6. Условное математическое ожидание. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, свойства некоррелированности и независимости.	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-31
7. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции.	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ОК-17, ПК-31
8. Статистический критерий, уровень значимости, критическая область гипотезы. Проверяемая гипотеза и альтернативная гипотеза. Оценка параметров в вероятностных моделях. Точечное и интервальное оценивание. Понятие о методе наибольшего правдоподобия и о методе наименьших квадратов.	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ОК-17, ПК-31
9. Понятие о статистиках χ^2, Стьюдента, Фишера. Использование таблиц квантилей данных случайных величин в задачах математической статистики.	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-31

1.5. Структура и содержание дисциплины

« Теория вероятностей математическая статистика»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 144асов. (4 зач. ед.)

Структура преподавания дисциплины

Вид учебной работы	Всего часов 144/ зачетных единиц 4	Семестр
		3
Аудиторные занятия (всего)	54	
Лекции	18	+
Практические занятия (ПЗ)	18	+
Лабораторные занятия (ЛЗ)	18	+
Самостоятельная работа (всего)	90	

В том числе:		
Контрольные работы	6	+
Подготовка к экзамену	34	+
Выполнение домашних заданий	20	+
Выполнение индивидуальных работ	18	+
Работа с учебным материалом	18	+
Вид текущего контроля успеваемости		отчет по индивдальным работам
Вид промежуточной аттестации		экзамен
Общая трудоемкость в часах Зачетные единицы	144 4	

1. 6. Содержание разделов и тем дисциплины.

Раздел 1. Случайные события и их вероятности.

Предмет теории вероятностей и ее значение для экономической науки.

Понятие случайного события. Достоверное и невозможное события. Совместные и несовместные события. Полная группа событий. Противоположные события. Пространство элементарных событий. Классическое определение вероятности. Ограниченность классического определения вероятности.

Комбинаторика - перестановки, размещения, сочетания.

Относительная частота. Эмпирический закон устойчивости частот. Статистическая вероятность. Геометрическая вероятность.

Вероятностное пространство. Понятие об аксиоматическом построении теории вероятностей.

Раздел 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Сумма и произведение событий. Теоремы сложения вероятностей. Полная группа событий. Противоположные события.

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий. Вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий.

Следствия из теорем сложения и умножения. Теорема сложения вероятностей совместных событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Раздел 3. Схема независимых испытаний

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Локальная теорема Муавра- Лапласа. Интегральная теорема Лапласа и их применение. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности. Формула Пуассона.

Общая теорема о повторении опытов (производящая функция).

Наивероятнейшее число.

Раздел 4. Случайные величины и их числовые характеристики

Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины.

Закон распределения дискретной величины (ДСВ).

Числовые характеристики дискретной случайной величины. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение ДСВ и их свойства. Начальные и центральные теоретические моменты.

Раздел 5. Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины.

Определение функции распределения (интегральной функции), ее свойства и график.

Определение функции плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальной функции), ее свойства и график.

Числовые характеристики НСВ, их свойства.

Мода и медиана случайной величины. Асимметрия и эксцесс.

Раздел 6. Основные законы распределения

Биномиальный закон распределения. Закон распределения Пуассона. Геометрическое распределение. Гипергеометрическое распределение.

Равномерный закон распределения. Показательный (экспоненциальный) закон распределения. Распределение Коши. Нормальный закон распределения.

Распределения некоторых случайных величин, представляющих функции нормальных величин. Распределение «хи-квадрат». Распределение Стьюдента. Распределение Фишера.

Раздел 7. Закон больших чисел и предельные теоремы.

Лемма, неравенство и теорема Чебышева. Значение теоремы Чебышева для практики. Теорема Бернулли о сходимости частот. Теорема Пуассона.

Понятие о предельных распределениях. Центральная предельная теорема Ляпунова.

Раздел 8. Основы математической теории выборочного метода

Задачи математической статистики. Общие сведения о выборочном методе. Способы отбора.

Раздел 9. Вариационные ряды и их характеристики

Понятие о вариационных рядах. Графическое изображение вариационных рядов. Форма статистических распределений.

Эмпирическая функция распределения.

Средние величины. Мода и медиана. Показатели вариации. Моменты вариационного ряда. Эмпирические асимметрия и эксцесс.

Раздел 10. Методы расчета сводных характеристик выборки.

Условные варианты. Обычные и условные эмпирические моменты. Отыскание центральных моментов по условным. Метод произведений и сумм для вычисления выборочных средней и дисперсии. Сведение первоначальных вариант к равноотстоящим.

Раздел 11. Статические оценки параметров распределения.

Понятие об оценке параметров. Основные свойства оценок.

Методы нахождения оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Другие методы оценивания.

Оценка параметров генеральной совокупности по собственно-случайной выборке.

Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность (надежность), доверительный интервал. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения.

Раздел 12. Проверка статистических гипотез.

Понятие статистической гипотезы. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Проверка гипотезы о равенстве средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки). Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.

Проверка гипотезы о законе распределения. χ^2 – критерий Пирсона. Критерий Колмогорова. Пример проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона.

Раздел 13. Основы корреляционного и регрессионного анализа.

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Определение формы связи. Понятие регрессии.

Линейная парная регрессия. Метод наименьших квадратов. Корреляционная таблица. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным.

Выборочный коэффициент корреляции. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции.

Проверка качества уравнения регрессии. Классическая регрессионная модель. Предпосылки метода наименьших квадратов. Проверка гипотез относительно коэффициентов линейного уравнения регрессии. Проверка значимости уравнения регрессии.

1. 7. Структура учебной дисциплины (модуля)

№ п/п	Раздел учебной дисциплины	Курс	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, в т.ч. СРС и трудоёмкость (в часах)				Формы текущего контроля	Форма промежуточной аттестации - зачет
					Лекции	Практ. зан.	Лабор. зан.	СРС		
1	Случайные события и их вероятности	2	2	1	2	4		6		
2	Теоремы сложения и умножения вероятностей	2	2	2	2	4		6		К.Р. 1
3	Схема независимых испытаний	2	2	3	2	4		8	РГ 1	
4	Случайные величины	2	2	4	2	2		8		

	и их числовые характеристики									
5	Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины	2	2	5	2	2		8		
6	Основные законы распределения	2	2	6-7	2	4		8		К.Р. 2
7	Закон больших чисел и предельные теоремы	2	2	8	2	2		6	РГ 2	
8	Основы математической теории выборочного метода	2	2	11	2		2	4		
9	Вариационные ряды и их характеристики	2	2	12-13	2		2	6		
10	Методы расчета сводных характеристик выборки	2	2	14			2	4		
11	Статические оценки параметров распределения	2	2	15			2	6		
12	Проверка статистических гипотез	2	2	16			4	4		
13	Основы корреляционного анализа	2	2	17-18			2	2	РГ 3	экзамен
					18	22	14	90		

1. 8. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин				
		1-3	4-8	10-12	13-14	15
1.	Макроэкономика		+	+	+	+
2.	Микроэкономика		+		+	+
3.	Статистика	+	+	+	+	+
4.	Эконометрика	+	+	+	+	+

1. 9. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Тема	Лекц	Практ. зан.	Лабор. зан.	СРС	Всего
1	Случайные события и их вероятности	2	4		6	12
2	Теоремы сложения и умножения вероятностей	2	4		4	10
3	Схема независимых испытаний	2	2		4	8
4	Случайные величины и их числовые характеристики	1	4		4	10
5	Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины	1	2		6	10
6	Основные законы распределения	1	2		6	9

7	Закон больших чисел и предельные теоремы	1	2		4	7
8	Основы математической теории выборочного метода	2		2	2	8
9	Статистические оценки параметров распределения	2		2	6	10
10	Основные свойства статистических характеристик параметров распределения: смещенность, состоятельность, эффективность.	2		2	4	6
11	Интервальное оценивание неизвестных параметров.	2		2	6	10
12	Проверка статистических гипотез			4	4	8
13	Основы корреляционного и регрессионного анализа			2	8	10

1. 10. Практические занятия

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий	Трудоемкость (час.)
1	1	Элементы комбинаторики	2
2	3	Схема независимых испытаний	4
3	5	Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины	6
4	6	Основные законы распределения	4
5	7	Закон больших чисел и предельные теоремы	2

1. 11 Лабораторные занятия

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика лабораторных занятий	Трудоемкость (час.)
1	1	Метод наименьших квадратов	4
2	2	Случайные величины и их числовые характеристики Методы расчета сводных характеристик выборки	2
3	3	Статические оценки параметров распределения Интервальные оценки параметров распределения	2
4	5	Проверка гипотез о параметрах распределения	2
5	6	Критерий согласья Пирсона	2
6	7	Основы корреляционного и регрессионного анализа	2

2. Краткое изложение программного материала.

2.1. Тематический план лекций.

Лекция 1. Случайные события и их вероятности Основные понятия теории вероятностей (2часа).

План: 1. Случайные события и их классификация.
2. Элементы комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания.
3. Различные подходы к введению понятия вероятности. Практически достоверные

и практически невозможные события. Принцип практической уверенности.

Цель: 1. Ознакомление с понятием события. Примеры событий. Классификация событий.

2. Ознакомление с классическим, геометрическим определением события, частотой события.

3. Ознакомление с элементами комбинаторики.

Задачи: Сформировать четкое понятие события; видов событий; определение вероятности событий.

Основные понятия.

Определение. **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

Определение. **Вероятностью** события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Определение. **Относительной частотой** события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L.

Ключевые вопросы:

1. Какие закономерности изучает теория вероятностей?
2. Дайте определение вероятности события.
3. Какие события называют совместными, несовместными?
4. Какие события называют зависимыми и независимыми?
5. Какие соединения называют перестановками?
6. Запишите формулу для вычисления перестановок.
7. Приведите примеры.
8. Какие соединения называют размещениями? Запишите формулудля вычисления размещений. Приведите примеры.
9. Какие соединения называют сочетаниями? Запишите формулу для вычисления сочетания. Приведите примеры.
10. Какое событие называется достоверным? Чему равна вероятность достоверного события?
11. Какое событие называется невозможным? Чему равна вероятность невозможного события?

Лекция 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей (2часа)

План: 1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
2. Теорема умножения вероятностей независимых и нзависимых событий.
3. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
4. Вероятность появления хотя бы одного из событий.

Цель: 1. Ознакомление с теоремами сложения, умножения вероятностей событий.
2. Выработка навыков решения задач с применением этих теорем.

Задачи: 1. Развитие интереса к изучению данного раздела математики.
2. Расширение кругозора.
3. Развитие мышления.

<u>Операции над событиями.</u>

<u>**Определение.**</u> События А и В называются **равными**, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

<u>**Определение.**</u> **Объединением** или **суммой** событий A_k называется событие А, которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

<u>**Определение.**</u> **Пересечением** или **произведением** событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении **всех** событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

<u>**Определение.**</u> **Разностью** событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

Определение. **Дополнительным** к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А **не происходит.**

Определение. **Элементарными исходами** опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1: *Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Определение. **Противоположными** называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Определение. Событие А называется **независимым** от события В,если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

Теорема. **(Умножения вероятностей)** *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Ключевые вопросы:

1. Как обозначают случайное событие?
2. Определение совместных событий; несовместных событий.
3. Определение независимых и независимых событий.
4. Определение условной вероятности события. Запишите формулу условной вероятности.
5. Чему равна вероятность появления суммы нескольких несовместных событий? Запишите формулу для вычисления.
6. Чему равна сумма двух совместных событий? Запишите формулу для вычислений.
7. Как вычислить вероятность появления хотя бы одного из независимых в совокупности событий.

Лекция 3. Схема независимых испытаний. Формула полной верной вероятности. Формула Бернулли, теоремы Лапласа (2часа).

План: 1. Формула полной верной вероятности.
2. Теорема Байеса.
3. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления события.
4. Локальная теорема Лапласа.
5. Интегральная теорема Лапласа.
6. Вероятность отклонения частоты от постоянной вероятности.
7. Формула Пуассона.

Цель: Ознакомление с причиной использования приближенных формул для вычисления вероятности появления события А m-раз в n-независимых испытаниях.

Ознакомление с формулой полной вероятности; формулами Байеса и Бернулли

Ознакомление с причиной использования приближенных формул для вычисления вероятности появления события А m-раз в n-независимых испытаниях.

Задачи: 1. Научить вычислять вероятность появления события А в испытаниях, после появления событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – независимых в совокупности.
2. Научить переоценивать вероятности событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ после появления события А.
3. Вычислять вероятности появления события А один, два,…, n раз в n испытаниях.
4. Ознакомление с формулами вычисления $P_n(m)$ – вероятности события.
5. Ознакомление с оценкой вероятности отклонения частоты события от постоянной вероятности на заданную величину ε.

Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

Формула Бейеса. (формула гипотез)

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если в результате *n* опытов событие А наступает ровно *m* раз, то остальные *n-m* раз это событие не наступает. Событие А может появиться *m* раз в *n* испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из *n* элементов по *m*. Это количество сочетаний находится по формуле: $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m(1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли:** $P_{m,n}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *p*, событие наступит ровно m раз приближенно равна:

$P_n(m)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, если n > 10.

Значение функции φ(x) находится по таблице приложения 1.

Так как $\varphi(x)$ – четная функция, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, то таблица составлена только для положительных *x*. Для всех $x>5$ считают, что $\varphi(x)=0$.

Формула Пуассона. Если вероятность *p* наступления события постоянна и мала, а число испытаний n велико, то: $P_n(m)\approx\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda=np$, если n > 10 и $p<0{,}01$.

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна ($0 < p < 1$), а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что это событие наступит не менее a раз и не более b приближенно равна.

$$P(a \le m \le b) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \quad (1)$$

где $\alpha = \dfrac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad \beta = \dfrac{b - np}{\sqrt{npq}}.$

Здесь $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ − функция Лапласа.

Причём, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ т.е. функция Лапласа нечётная и при $x > 5$, $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Из формулы (1) вытекает следующая формула (2)

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right). \quad (2)$$ − вероятность отклонения частоты от вероятности появления события.

Ключевые вопросы:

1. Какие события образуют полную группу событий?
2. Сформулировать и записать формулу полной вероятности.
3. Записать формулу гипотез (формулу Байеса).
4. Записать формулу Бернулли.
5. Дайте определение наивероятнейшего m_0 числа наступления события А и запишите формулу.
6. Сформулировать локальную теорему Лапласа. Записать формулу.
7. Сформулировать и записать формулу интегральной теоремы Лапласа.
8. Как определить вероятность отклонения частоты появления события А от его вероятности на заданную величину ε?
9. Что надо знать, чтобы из последней формулы определить или n, или ε.
10. Когда применяется формула Пуассона?
11. Вероятность какого события можно вычислить по формуле Пуассона?
12. Запишите формулу Пуассона.

Лекция 4. Случайные величины и их числовые характеристики. Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины. (2 часа)

План: 1. Случайные величины. Законы распределения дискретных случайных величин.

2. Функция распределения и её свойства.

3.Плотность распределения и её свойства.

1. Математическое ожидание. Свойства. Мода. Медиана.

2. Дисперсия случайной величины. Свойства дисперсии

Цель: 1. Ознакомление с понятием случайная величина.

Отличие её от случайного события.

2. Ознакомление с различными характеристиками случайной величины.

Задачи: 1. Формирование понятия случайной величины; её обозначение; различные виды.

2. Рассмотреть различные характеристики случайной величины.

Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление ряда распределения называется **многоугольником распределения.**

Биноминальное распределение.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биноминальным**.

Распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события А имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события А в каждом испытании мала ($p \le 0,1$), то для нахождения вероятности появления события А k раз находится по формуле

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \qquad np = \lambda .$$

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

<u>**Определение.**</u> **Дисперсией** непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожмидания.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

<u>**Определение.**</u> **Средним квадратичным отклонением** называется квадратный корень из дисперсии. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

<u>**Определение.**</u> **Модой** M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум. $f(M_0) = \max$.

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется **двухмодальным** или **многомодальным**.

Если распределение имеет минимум, то оно называется **антимодальным**.

<u>**Определение.**</u> **Медианой** M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины. $P(X < M_D) = P(X > M_D)$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

<u>**Определение.**</u> **Начальным моментом** порядка *k* случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k.

$$\alpha_k = M[X^k].$$

Для дискретной случайной величины: $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

<u>Определение.</u> Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k$. $\mu_k = M[(X - m_x)^k]$.

Для дискретной случайной величины: $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx$.

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

<u>Определение.</u> Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется **коэффициентом асимметрии** $a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$.

<u>Определение.</u> Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая **эксцессом**. $E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$.

Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты:

Абсолютный начальный момент: $\beta_k = M[|X|^k]$.

Абсолютный центральный момент: $\nu_k = M[|X - m_x|^k]$.

Абсолютный центральный момент первого порядка называется **средним арифметическим отклонением**.

Ключевые вопросы:

1. Дайте определение случайной величины.

2. Какие случайные величины называются дискретными, а какие непрерывными. Приве дите примеры.

3. Что называют законом распределения случайной величины.

4. Какие способы задания закона распределения случайной величины вы знаете.
5. Дайте определение функции распределения случайной величины. Перечислите её свойства.
6. Какой вид графика имеет дискретная функция случайной величины.
7. Какой вид графика имеет непрерывная случайная величина.
8. Чему равна площадь плоской области, ограниченной кривой распределения y=F(x) и y=0.
9. Дайте определение плотности распределения случайной величины X.
10. Перечислите свойства плотности
11. Определение математического ожидания случайной величины *X*. Его свойства.
12. Записать формулы для вычисления математического ожидания для дискретной и непрерывной случайной величины.
13. Определение моды случайной величины *X*.
14. Определение медианы случайной величины *X*.
15. Определение дисперсии случайной величины *X*.
16. Записать формулы вычисления дисперсии, если а) *X* – дискретная с.в.;б) *X* – непрерывная с.в.
17. Дать определение среднего квадратичного отклонения.

Выводы: Закон распределения даёт исчерпывающую информацию о неё, случайной величинt, так как позволяет вычислить вероятность любого события, связанного со случайной величиной. Однако, закон распределения бывает трудно обозримым. Числовые характеристики позволяют в сжатой форме выявить наиболее важные особенности случайной величины.

Лекция 5. Основные законы распределения. Закон больших чисел и предельные теоремы (2часа).

План: 1. Нормальное распределение. Смысл параметров a и σ.

2. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины на заданный участок. Правило трёх сигм.
3. Кривая Гаусса.
4. Понятие о теореме Ляпунова.
5. Биномиальное распределение.
6. Распределение Пуассона.
7. Равномерное распределение.
8. Показательное распределение.

9 Простейших поток событий;

10. Неравенство Чебышева;

11. Теорема Чебышева;

12. Теорема Бернулли.

Цель: 1. Ознакомление с различными видами распределений случайной величины и их числовыми характеристиками.

2. Ознакомление с законом Гаусса – нормальным распределением (N (a,σ)).

3. Ознакомление с понятием потока на событий и его характеристиками.

4. Ознакомление с законами больших чисел.

Задачи: Научить записывать все характеристики нормального распределения, понимать их смысловое значение, уметь применять на практике.

Научить находить для случайных различных типов следующие характеристики: ряд распределения, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения, и плотность распределения, строить график этих функций.

Нормальный закон распределения.

Определение. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Нормальный закон распределения также называется **законом Гаусса**.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Функция распределения *F(x)* имеет вид $F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$.

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\overline{\Phi}(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973\,.$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидание на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.Это правило называется **правилом трех сигм**.

<u>Теорема.</u> *Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

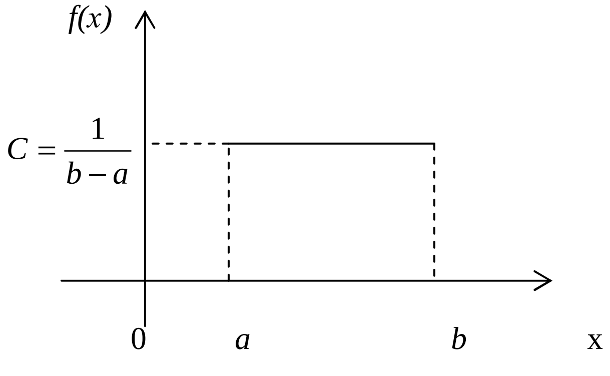
На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

<u>Равномерное распределение.</u>

<u>Определение.</u> Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке [*a*, *b*], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

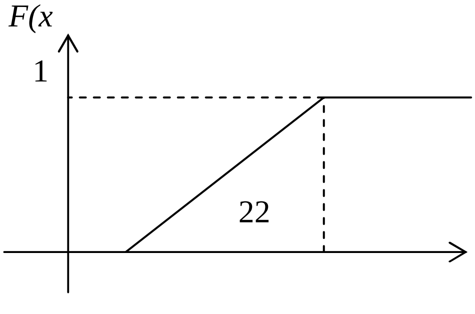
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}, \text{ где } C = \frac{1}{b-a}$$

Постоянная величина С может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.



Найдем функцию распределения *F(x)* на отрезке [*a*,*b*].

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b, \\ 1, & при \quad x > b. \end{cases}$$



0 a b x

Показательное распределение.

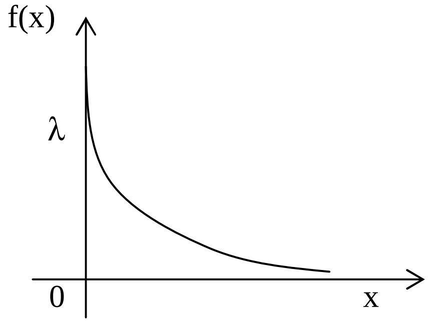
Определение. **Показательным (экспоненциальным)** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

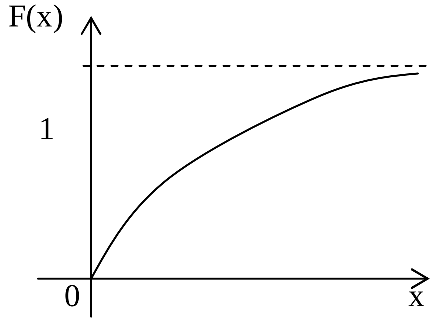
$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\geq 0,\end{cases}$$

где λ - положительное число.

Функция распределении $F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0\end{cases}.$

Графики функции распределения и плотности распределения:





Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева.

На практике сложно сказать какое конкретное значение примет случайная величина, однако, при воздействии большого числа различных факторов поведение большого числа случайных величин практически утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Теорема. (Неравенство Чебышева) *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем* $1-D(X)/\varepsilon^2$.

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-D(X)/\varepsilon^2$$

Теорема Чебышева.

<u>Теорема.</u> *Если X_1, X_2, …, X_n- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышаю постоянного числа С), то, как бы мало не было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$\left[\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right] < \varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Т.е. можно записать:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Дробь, входящая в записанное выше выражение есть не что иное как среднее арифметическое возможных значений случайной величины.

Теорема утверждает, что хотя каждое отдельное значение случайной величины может достаточно сильно отличаться от своего математического ожидания, но среднее арифметическое этих значений будет неограниченно приближаться к среднему арифметическому математических ожиданий.

<u>Теорема Бернулли.</u>

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равно *p*.

Возможно определить примерно относительную частоту появления события А.

<u>Теорема.</u> *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события А постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний p достаточно велико.*

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$$

Здесь *m* – число появлений события А. Из всего сказанного выше не следует, что с увеличением число испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности *p*, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} = p$. В теореме имеется в виду только вероятность приближения относительной частоты к вероятности появления события А в каждом испытании.

В случае, если вероятности появления события А в каждом опыте различны, то справедлива следующая теорема, известная как **теорема Пуассона.**

$$P_n(m) = \frac{(\lambda)^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Поток событий.

Определение. Потоком событий называется последовательность событий, происходящих один за другим в какие- то моменты времени.

Определение. Поток событий называется **регулярным**, если события следует одно за другим через строго определенные промежутки времени.

Определение. Поток событий называется **стационарным**, если вероятность попадания того ли иного числа событий на участок времени τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси расположен этот участок.

Стационарность потока событий означает, что плотность потока постоянна, отсутствуют промежутки времени, в течение которых событий больше чем обычно. Классический пример – "час пик" на транспорте.

Определение. Поток событий называется **потоком без последействий**, если для любых неперекрещивающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, опадающих на другие.

Отсутствие последействий означает, что заявки в систему поступают независимо друг от друга. Поток выходных событий систем массового обслуживания обычно имеет последействие, даже если входной поток его не имеет. Пример – вход пассажиров на станцию метро – поток без последействия, т.к. причины прихода отдельного пассажира не связаны с причинами прихода всех остальных, а выход пассажиров со станции – поток с последействием, т.к. он обусловлен прибытием поезда.

Последействие, свойственное выходному потоку следует учитывать, если этот поток в свою очередь является входным для какой- либо другой системы.

Определение. Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий достаточно мало по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Условие ординарности означает, что заявки на систему приходят по одному, а не парами, тройками и т.д. Однако, если заявки поступают **только** парами, **только** тройками и т.д., то такой поток легко свести к ординарному.

Определение. Если поток событий стационарен, ординарен и без последействий, то такой поток называется **простейшим (пуассоновским)** потоком.

Это название связано с тем, что в этом случае число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, распределено по распределению Пуассона .

В соответствии с этим законом распределения математическое ожидание числа точек, попавших попадающих на участок времени τ, имеет вид:

$$a = \lambda\tau$$

λ - плотность потока – среднее число событий в единицу времени.

Вероятность того, что за время τ произойдет ровно *m* событий, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны: $m_t = \frac{1}{\lambda}$; $D_t = \frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_t = \frac{1}{\lambda}$;

Ключевые вопросы:

1. Как записать ряд распределения, если случайная величина имеет: а) биномиальное распределение;б) распределение Пуассона;\в)геометрическое распределение.

2. Какой вид графика имеет функция распределения:
а) для дискретной случайной величины.
б) для непрерывной случайной величины.
3. Приведите примеры распределений. а) биномиального распределения;

б) распределение Пуассона;
в) равномерное распределение;
г) показательного распределения.
4. Записать дифференциальную функцию распределения вида:а) (N (a;σ)); б) (N (0;1)).
5. Записать формулу P(α≤x≤β)=...
6. Записать формулу вероятности события: а) $|x-a|$<0; б) $|x-a|$<3σ.
7. Перечислить свойства F(x)
8. В чём смысл «правило трёх сигм».
9. Вероятности каких событий можно вычислить используя: а) неравенство Чебыше ва; б)теорему Чебышева; в)теорему Бернулли.
10. Дайте определение потока событий;
11. Перечислите свойства потока событий (стационарности; отсутствия последствий; ординарности).

Лекция 6. Основы математической теории выборочного метода (2 часа).

План:

1. Основные понятия математической статистики.
2. Генеральная совокупность и выборка.
3. Вариационный ряд, статистический ряд.
4. Группированная выборка.
5. Группированный статистический ряд. Полигон частот.
6. Выборочная функция распределения и гистограмма.

Цель: 1. Ознакомление с задачами математической статистики; видами выборки; основными характеристиками вариационного ряда и геометрическим изображением.

Задачи: 1. Научить записывать вариационный ряд; статистический ряд по сгруппированным и не сгруппированным данным.

2. Строить полигон и гистограмму частот и относительных частот, эмпирическую функцию распределения.

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической статистики являются:
- определение способов сбора и группировки статистических данных;
- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.
Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности *N* и объем выборки *n* – число объектов в рассматривае-мой совокупности.
Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Замечание. Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была **репрезентативной** (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Полигон частот. Выборочная функция распределения и гистограмма.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – **полигон частот**: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим **полигон относительных частот** (рис.1**).**

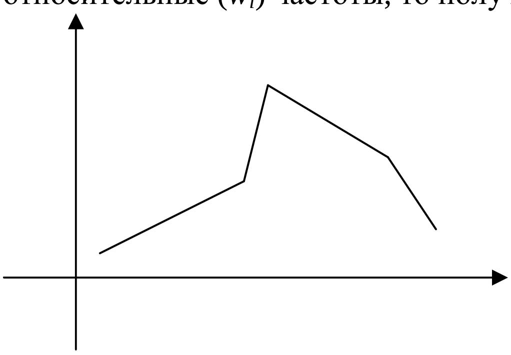


Рис. 1.

По аналогии с функцией распределения случайной величины можно задать некоторую функцию, относительную частоту события $X < x$.

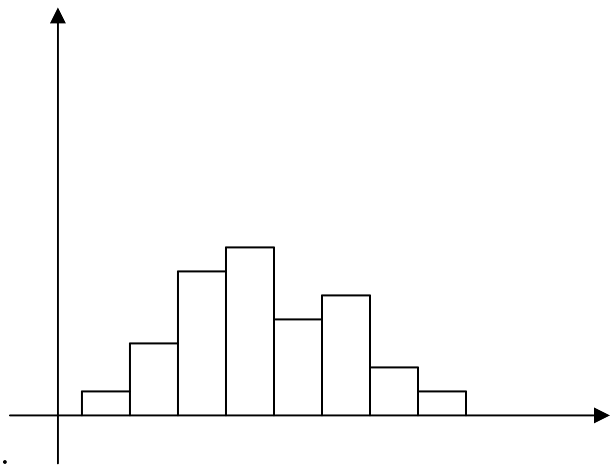
Определение. **Выборочной (эмпирической) функцией распределения** называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Таким образом,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Замечание. В отличие от эмпирической функции распределения, найденной опытным путем, функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ – его относительную частоту. При достаточно больших n, как следует из теоремы Бернулли, $F^*(x)$ стремится по вероятности к $F(x)$.
Из определения эмпирической функции распределения видно, что ее свойства совпадают со свойствами $F(x)$, а именно:
$0 \le F^*(x) \le 1$, $F^*(x)$ – неубывающая функция.
Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

Для непрерывного признака графической иллюстрацией служит **гистограмма**, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высотами – отрезки длиной n_i /h (гистограмма частот) или w_i /h (гистограмма относительных частот). В первом случае площадь гистограммы равна объему выборки, во втором – единицы (рис.2).



. Рис.2.

Ключевые вопросы:

1. Дайте определение генеральной и выборочной совокупности. Приведите примеры.
2. Дайте определение объема совокупности (генеральной или выборочной). Приведите примеры.
3. Перечислите виды выборок. Приведите примеры.
4. Дайте определение вариационного ряда.
5. Дайте определение размаха выборки.
6. Дайте понятие сгруппированного статистического ряда.
7. Дайте понятие эмпирической функции распределения.
8. Назовите закон распределения генеральной совокупности, приближением которого является эмпирическая функция распределения.
9. Опишите способ построения эмпирической функции распределения.
10. Дайте понятие теоретического распределения.

11. Дайте определение гистограммы частот (относительных частот).
12. Опишите способ построения гистограммы частот (относительных частот).
13. Дайте определение полигона частот (относительных частот).
14. Назовите теоретический закон, приближением которого является гистограмма и полигон относительных частот.

Лекция 7. Статистические оценки параметров распределения

План;

1. Числовые характеристики статистического распределения: выборочное среднее.
2. Оценки дисперсии, оценки моды и медианы.
3. Оценки начальных и центральных моментов.

Цель:
Ознакомление с числовыми характеристиками статистического распределения; выборочным средним; выборочной дисперсией; начальными и центральными моментами *к-го* порядка.
Задачи:

1. Сформировать навыки вычисления выборочных характеристик по опытным данным.

2. Показать сходство и отличие выборочных характеристик от аналогичных характеристик в теории вероятностей.

Одна из задач математической статистики: по имеющейся выборке оценить значения числовых характеристик исследуемой случайной величины.
Определение. **Выборочным средним** называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

где x_i – варианты, n_i - частоты.
Замечание. Выборочное среднее служит для оценки математического ожидания исследуемой случайной величины. В дальнейшем будет рассмотрен вопрос, насколько точной является такая оценка.
Определение. **Выборочной дисперсией** называется

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n},$$

а **выборочным средним квадратическим отклонением –**

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Так же, как в теории случайных величин, можно доказать, что справедлива следующая формула для вычисления выборочной дисперсии:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Оценки начальных и центральных моментов (так называемые эмпирические моменты) определяются аналогично соответствующим теоретическим моментам:
- начальным эмпирическим моментом порядка *k* называется

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

В частности, $M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}_B$, то есть начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочному среднему.
- **центральным эмпирическим моментом порядка *k*** называется

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^k}{n}.$$

В частности, $m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = D_B$, то есть центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии.

Лекция 8. Основные свойства статистических характеристик параметров распределения: несмещенность, состоятельность, эффективность.

План:

2. Несмещенность и состоятельность выборочного среднего как оценки математического ожидания.
3. Смещенность выборочной дисперсии.
4. Способы построения оценок: метод наибольшего правдоподобия, метод момен-тов, метод квантили, метод наименьших квадратов, байесовский подход к получению оценок.

Цель:

Ознакомление с основными свойствами параметров распределения; несмещенности и состоятельности, эффективности и способами их оценивания.

Задачи:

1. Научить вычислять по экспериментальным данным выборочную средюю; выборочную дисперсию; выборочные начальныйпи центральный моменты, асимметрию и эксцесс.

2. Научить вычислять исправленную дисперсию.

Получив статистические оценки параметров распределения (выборочное среднее, выборочную дисперсию и т.д.), нужно убедиться, что они в достаточной степени служат приближением соответствующих характеристик генеральной совокупности. Определим требования, которые должны при этом выполняться.

Пусть Θ* - статистическая оценка неизвестного параметра Θ теоретического распределения. Извлечем из генеральной совокупности несколько выборок одного и того же объема *n* и вычислим для каждой из них оценку параметра Θ: $\Theta_1^*, \Theta_2^*, ..., \Theta_k^*$. Тогда оценку Θ* можно рассматривать как случайную величину, принимающую возможные значения $\Theta_1^*, \Theta_2^*, ..., \Theta_k^*$. Если математическое ожидание Θ* не равно оцениваемому параметру, мы будем получать при вычислении оценок систематические ошибки одного знака (с избытком, если $M(\Theta^*) > \Theta$, и с недостатком, если $M(\Theta^*) < \Theta$). Следовательно, необходимым условием отсутствия систе-матических ошибок является требование $M(\Theta^*) = \Theta$.

Статистическая оценка Θ* называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание

равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки:

$$M(\Theta^*) = \Theta.$$

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Однако несмещенность не является достаточным условием хорошего приближения к истин-ному значению оцениваемого параметра. Если при этом возможные значения Θ* могут значительно отклоняться от среднего значения, то есть дисперсия Θ* велика, то значение, найденное по данным одной выборки, может значительно отличаться от оцениваемого параметра. Следовательно, требуется наложить ограничения на дисперсию.

Определение. Статистическая оценка называется **эффективной**, если она при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема к статистическим оценкам предъявляется еще и требование состоятельности.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при $n\to\infty$ стре-мится по вероятности к оцениваемому параметру (если эта оценка несмещенная, то она будет состоятельной, если при $n\to\infty$ ее дисперсия стремится к 0).

Убедимся, что $\bar{x}_B$ представляет собой несмещенную оценку математического ожидания $M(X)$.

Будем рассматривать $\bar{x}_B$ как случайную величину, а $x_1, x_2,\ldots, x_n$, то есть значения исследуемой случайной величины, составляющие выборку, – как независимые, одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2,\ldots, X_n$, имеющие математическое ожидание a. Из свойств математического ожидания следует, что

$$M(\bar{X}_B) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = a.$$

Но, поскольку каждая из величин $X_1, X_2,\ldots, X_n$ имеет такое же распределение, что и генеральная совокупность, $a = M(X)$, то есть $M(\bar{X}_B) = M(X)$, что и требовалось доказать. Выборочное среднее является не только несмещенной, но и состоятельной оценкой математического ожидания. Если предположить, что $X_1, X_2,\ldots, X_n$ имеют ограниченные дисперсии, то из теоремы Чебышева следует, что их среднее арифметическое, то есть $\bar{X}_B$, при увеличении n стремится по вероятности к математическому ожиданию a каждой их величин, то есть к $M(X)$. Следовательно, выборочное среднее есть состоятельная оценка математического ожидания.

В отличие от выборочного среднего, выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности. Можно доказать, что

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_Г,$$

где $D_Г$ – истинное значение дисперсии генеральной совокупности. Можно предложить другую оценку дисперсии – **исправленную дисперсию s^2**, вычисляемую по формуле

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}.$$

Такая оценка будет являться несмещенной. Ей соответствует **исправленное среднее квадратическое отклонение**

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}.$$

Определение. Оценка некоторого признака называется **асимптотически несмещенной**, если для выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = X,$$

где X – истинное значение исследуемой величины.

Ключевые вопросы:

1. Запишите формулы для нахождения выборочной средней, выборочной дисперсии, выборочных начальных и центральных моментов, эксцесса и асимметрии.

2. Что такое ложный нуль? Для чего он вводится?

3. Укажите способ вычисления условных вариант.

4. Дайте понятие точечной оценки.

5. Перечислите свойства точечных оценок.

6. Охарактеризуйте каждое свойство точечных оценок.

7. Укажите выборочные характеристики, являющиеся точечными оценками математического ожидания, дисперсии.

8. Дайте понятие исправленной выборочной дисперсии. Когда и для чего она вводится?

Лекция 9. Интервальное оценивание неизвестных параметров.

План;

1. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность), доверительный интервал.
2. Построение доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения при известной и при неизвестной дисперсии.
3. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

Цель:

Ознакомление с методами интервального оценивания основных характеристик случайных величин.

Задачи:

Приобретение навыков: построения доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения при известной и неизвестной дисперсии; доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, что приводит к грубым ошибкам. Поэтому в таком случае лучше пользоваться *интервальными оценками*, то есть указывать интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение оцениваемого параметра. Разумеется, чем меньше длина этого интервала, тем точнее оценка параметра. Поэтому, если для оценки Θ^* некоторого параметра Θ справедливо неравенство $|\Theta^* - \Theta| < \delta$, число $\delta > 0$ характеризует **точность оценки** (чем меньше δ, тем точнее оценка). Но статистические методы позволяют говорить только о том, что это неравенство выполняется с некоторой вероятностью.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ^* параметра Θ называется вероятность γ того, что выполняется неравенство $|\Theta^* - \Theta| < \delta$. Если заменить это неравенство двойным неравенством $-\delta < \Theta^* - \Theta < \delta$, то получим:

$$p(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta) = \gamma.$$

Таким образом, γ есть вероятность того, что Θ попадает в интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$.

Доверительным называется интервал, в который попадает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Построение доверительных интервалов.

1. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

Пусть исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону с известным средним квадратическим σ, и требуется по значению выборочного среднего $\bar{x}_B$ оценить ее математическое ожидание a. Будем рассматривать выборочное среднее $\bar{x}_B$ как случайную величину $\bar{X}$, а значения вариант выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как одинаково распределенные независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ. При этом $M(\bar{X}) = a$, $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (используем свойства математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин). Оценим вероятность выполнения неравенства $|\bar{X} - a| < \delta$.

Применим формулу для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал:

$p\,(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$. Тогда , с учетом того, что $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $p\,(|\bar{X} - a| < \delta) =$ $2\Phi\left(\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$

$=2\Phi(t)$, где $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Отсюда $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, и предыдущее равенство можно переписать так:

$$p\left(\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma .$$

Итак, значение математического ожидания a с вероятностью (надежностью) γ попадает в интервал $\left(\bar{x}_B - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_B + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где значение t определяется из таблиц для функции Лапласа так, чтобы выполнялось равенство $2\Phi(t) = \gamma$.

2. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.

Если известно, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону с неизвестным средним квадратическим отклонением, то для поиска доверительного интервала для ее математического ожидания построим новую случайную величину

$$T = \frac{\bar{x}_B - a}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}},$$

где $\bar{x}_B$ - выборочное среднее, s – исправленная дисперсия, n – объем выборки. Эта случайная величина, возможные значения которой будем обозначать t, имеет распределение Стьюдента (см. лекцию 12) с $k = n - 1$ степенями свободы.

Поскольку плотность распределения Стьюдента $s(t, n) = B_n\left(1 + \dfrac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$, где

$B_n = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}$, явным образом не зависит от a и σ, можно задать вероятность ее попадания в некоторый интервал (- t_γ , t_γ), учитывая четность плотности распределения, следующим образом: $p\left(\left|\frac{\overline{x}_B - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} s(t,n)dt = \gamma$. Отсюда получаем:

$$p\left(\overline{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Таким образом, получен доверительный интервал для *a*, где t_γ можно найти по соответст-вую-щей таблице при заданных *n* и γ.

3. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

Будем искать для среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины доверительный интервал вида ($s - \delta$, $s + \delta$), где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, а для δ выполняется условие: p ($|\sigma - s| < \delta$) = γ.

Запишем это неравенство в виде: $s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$ или, обозначив $q = \frac{\delta}{s}$,

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q).$$

Рассмотрим случайную величину χ, определяемую по формуле

$$\chi = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n-1},$$

которая распределена по закону «хи-квадрат» с n-1 степенями свободы. Плотность ее распределения

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

не зависит от оцениваемого параметра σ, а зависит только от объема выборки *n*. Преобразуем неравенство так, чтобы оно приняло вид $\chi_1 < \chi < \chi_2$. Вероятность выполнения этого неравенства равна доверительной вероятности γ, следовательно, $\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi, n)d\chi = \gamma.$ Предполо-жим, что $q < 1$, тогда неравенство можно записать так:

$$\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)},$$

или, после умножения на $s\sqrt{n-1}$, $\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Ключевые вопросы:

1. Дайте понятия оценки параметра.
2. Дайте определение точечной и интервальной оценки параметра.
3. Сформулируйте свойства точечных оценок.
4. Дайте понятие состоятельности оценки. Приведите пример.

5. Дайте понятие смещенной и несмещенной оценки. Приведите пример.
6. В чем состоит эффективность оценки?
7. Дайте обоснование необходимости введения интервальной оценки.
8. Дайте определение доверительного интервала, надежности, точности оценки.
9. Дайте понятие нормального распределения.
10. Запишите дифференциальный и интегральный законы нормального распределения.
11. Укажите смысл параметров, характеризующих закон нормального распределения.
12. Запишите формулы для нахождения точечных оценок параметров нормального распределения.
13. Запишите функцию Лапласа.
14. Постройте кривую Гаусса.
15. Запишите формулы для нахождения вероятности попадания нормального распределения случайной величины в заданный интервал.
16. Запишите формулы для нахождения вероятности $P(|X-a|<\delta)$, если X - случайная величина, имеющая нормальное распределение, а- математическое ожидание.
17. Сформулируйте следствия из теоремы Ляпунова. Приведите примеры.
18. Сформулируйте алгоритм нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ, при неизвестном σ.
19. Сформулируйте правило нахождения доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

3. Методические указания

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы. Определения, выводы, формулы – заучивать наизусть.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при изучении конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать рациональный.. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны по-

мочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

Лекции и практические занятия

Студенты повторяют «Адаптивный курс» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (1 ч. лекций и 1 ч. практических занятий в неделю.. После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на повседневную серьезную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию – остается в голове всего крепче.

Образовательные технологии и формы.

1) Методы обучения: проблемная лекция, лекция - визуальная, лекция - пресс-конференция, лекция- беседа, лекция - дискуссия, лекция -консультация.

2) На практических занятиях применяется: работа в группах, решение творческих задач, ведение рабочей тетради. .

Самостоятельная работа подразумевает работу студентов под руководством преподавателем: консультации при усвоении разделов математики, помощь в написании и защите рефератов, подготовка к тематическому тестированию, выступлению на конференциях, олимпиадах и других видов самостоятельной работы.

3) Используются на занятиях материально технические средства: аудитория с компьютером и проектором; интерактивной доской.

3.1. Методические указания к практическим занятиям.

ТЕМА 1. Случайные события

Практические занятия 1, 2,3, 4 (8 часов)

Цель: 1. Ознакомление с различными подходами к понятию вероятности события; элементами комбинаторики; применением теорем сложения, умножения вероятностейсобытий.

Задачи: 1. Приобретены навыки вычисления вероятностей событий; непосредственно и с использованием теорем сложения и умножения.

2. Освоение приемов и методов нахождения полной вероятности события.
3. Освоение правил вычисления вероятности появления события заданное число раз, для случаев, когда $n<20$ и $n \geq 20$.

Тематика практических занятий.

1. Элементы комбинаторики. Классическое определение вероятности (2 часа).
2. Геометрическая вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей (2 часа).
3. Формула полной вероятности. Повторные испытания. Формула Бернулли (2 часа).
4. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа (2 часа).

Упражнение 1

1. В урне находится 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из нее наугад извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белый? черный?

2. В магазин поступило 30 новых цветных телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для продажи. Какова вероятность того, что он не имеет скрытых дефектов?

3. Игральная кость подбрасывается один раз. Найти вероятности событий:

А – число очков равно шести,

В – число очков кратно трем,

С – число очков четно,

4. Меланжевая пряжа смешана из крашеного и некрашеного хлопка в пропорции 3:5. Найти вероятность того, что наугад взятое волокно окажется крашеным.

5. Менеджер рассматривает кандидатуры 4 человек, подавших заявления о приеме на работу. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в случайном порядке? Какова вероятность того, что они случайно будут приглашены на собеседование в зависимости от времени их прихода в офис?

6. В коробке 6 одинаковых, занумерованных кубиков. Произвольно извлекают по одному все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

7. На 6 одинаковых карточках написаны буквы «а», «а», «а», «з», «д», «ч». Вынимают наудачу по одной карточке и прикладывают их друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово «задача»?

8. На железнодорожной станции 6 путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 одинаковых состава? Какова вероятность того, что составы случайно будут расставлены на путях в порядке возрастания их номеров?

9. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

10. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что первый потребует его внимания в течение часа равна 0,6, второй – 0,7, третий – 0,8. Найти вероятность того, что в тчение некоторого часа внимания рабочего:а) потребуют все станки, б) не потребует ни один станок, в) потребует один из станков, г) потребуют какие-либо два станка, д) потребует хотя бы один станок, е) не потребует хотя бы один станок.

11. В урне 3 белых и 2 черных шара. Вынули сразу 2 шара. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один шар черный?

12. В ящике 8 деталей, среди которых 3 нестандартные. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

13 Вероятность того, что покупатель, собирающийся приобрести компьютер и пакет прикладных программ, приобретет только компьютер, равна 0,2, только пакет программ − 0,1. Вероятность того, что будет куплен и компьютер и пакет программ, равна 0,05. Чему равна вероятность того, что будет куплен или компьютер, или пакет программ?

14. Банк может выдать кредит одному из трех клиентов с вероятностью 0,4, 0,3 и 0,3 соответственно. Вероятность возврата кредита для первого клиента равна 0,99 для второго 0,91 и для третьего 0,39. Какова вероятность того, что клиент, вернет кредит.

15. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты, о чем можно высказать четыре предположения (гипотезы) − H_1, H_2, H_3, H_4. По данным статистики, $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,4$; $P(H_3) = 0,3$; $P(H_4) = 0,1$. В ходе расследования обнаружено, что при запуске произошла утечка топлива (событие А). Условные вероятности события А, согласно той же статистике, равны $P(A/H_1) = 0,9$; $P(A/H_2) = 0,8$; $P(A/H_3) = 0,2$; $P(A/H_4) = 0,3$. Какая из гипотез наиболее вероятна в данных условиях?

16. В монтажном цехе к устройству присоединяют электродвигатель, который поставлен одним из трех заводов-изготовителей. На складе имеются электродвигатели этих за-

водов соответственно в количестве 19, 6 и 11 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно 0,85; 0,76; 0,71.Рабочий берет случайно выбранный один электродвигатель и присоединяет его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым, третьим заводом-изготовителем.

17. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой составляет 20%, второй –46%, третьей –34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, второй –2%, а третьей –1%. Найдите вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

18. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,9.Чему равна вероятность, что из 5 наудачу взятых деталей:а) нет стандартных; б) одна стандартная, в) менее 3 окажутся стандартными.

19. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдёт 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,75.

20. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути повреждено изделий: а) ровно 3; б) менее трёх; в) более трёх; г) хотя бы одно.

21. Вероятность того, что оконные переплёты, изготовленные домостроительным комбинатом, подходят к оконным проёмам равна 0,9. Найти наиболее вероятное число оконных переплётов, не подходящих к проёмам, для дома, в котором 180 окон.

22. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты правильно сработает, равна 0,99. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа случаев, если будет опущено 200 монет.

23. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70 % продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в
партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760

24. На склад магазина поступают изделия, из которых 80 % оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 взятых наудачу изделий не менее 85 окажутся высшего сорта.

Ключевые вопросы.

1. Случайные события и их классификация.
2. Элементы комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания.
3. Различные подходы к введению понятия вероятности. Практически невозможные и
4. практически достоверные события. Принцип практической уверенности.

5. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.
6. Теорема умножения вероятностей.
7. Теорема сложения вероятностей совместимых событий.
8. Формула полной вероятности.
9. Теорема Бейеса.
10. Формула Бернулли Наивероятнейшее число наступления события.
11. Теоремы Лапласа.
12. Вероятность отклонения частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

ТЕМА 2. Случайные величины.

Практические занятия 5, 6 (4 часа)

Цель:
1. Ознакомление с понятием «Случайная величина», её отличие от случайного события.
2. Ознакомление с различными характеристиками случайной величины.

Задачи:
1. Формирование у студентов умений навыков по самостоятельному приобретению знаний, их углублению и применению на практике.
2. Освоение приемов и методов нахождения интегральной, дифференциальной функций распределения и числовых характеристик случайной величины.

Тематика практических занятий

1. Законы распределения случайных величин. Интегральная и дифференциальная функции распределения (2 часа).
2. Числовые характеристики случайных величин (2 часа).

Упражнение 2

1. Составить закон распределения числа трех пакетов акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5, 0,6, 0,7. Найти функцию распределения и построить ее график.

2. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбрано 3. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{5} & \text{при} \quad 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$$

Найти вероятность того, величина *X* примет значение: а) меньше нуля; б) меньше трех; в) не меньше трех; г) не меньше шести; д) в интервале (1; 3).

4. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \sin x & \text{при } 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$ Найти интегральную функцию *F(x)*.

5. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр *C*.

6. . Два стрелка сделали по выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго — 0,7. Необходимо: а) составить закон распределения общего числа попаданий; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) составить функцию распределения.

7 . Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

8. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\, x\le 0,\\ 2x & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины .

9. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x^2/4 & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

а) Найти плотность вероятности *f(x)*; б) построить графики *f (x)* и *F(x);*

в) найти вероятности P(X=1), P(X<1), P(1≤ X <2) г) вычислить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), медиану случайной величины X.

10. Случайная величина X в интервале (2, 4) задана плотностью распределения $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6;$ вне этого интервала $f(x) = 0.$ Найти моду величины X.

Контрольные вопросы

13. Случайные величины. Закон распределения дискретных случайных величин.
14. Функция распределения и её свойства.
15. Плотность распределения и её свойства.
16. Математическое ожидание случайной величины, свойства.
17. Дисперсия случайной величины, свойства дисперсии.
18. Среднее квадратическое отклонение.

ТЕМА 3. Различные виды распределений.

Практические занятия 7, 8 (4 часа)

Цель: Ознакомление с различными видами распределений случайной величины и их числовыми характеристиками.

Задачи: Научить вычислять для случайных величин различных типов следующие характеристики: ряд распределения; функцию распределения, строить график этой функции; интегральную и дифференциальную функции распределения, строить графики этих функций.

Тематика практических занятий

1. Распределение Пуассона. Равномерное распределение (2 часа).

2. Показательное распределение. Нормальное распределение (2 часа).

Упражнение 3.

1. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нор мальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклоне нием, 3 года. Определить вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

2. Распределение веса консервных банок, выпускаемых заводом, подчиняется нормальному закону со средним весом 250 г и средним квадратическим отклонением, равным 5 г. Определить вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8 г.

3. Средний вес изделия равен 8,4 кг. Известно, что отклонение по абсолютной величине, превосходящее 0,05 кг, встречается в среднем 3 раза на каждые 100 изделий. До

пуская, что вес изделия распределен по нормальному закону, определить его среднеквадратическое отклонение.

4. Средний рост взрослых женщин некоторого национального округа равен 167,3 см; σ = 5,8 см. Каков общий процент женщин ростом:

1) не превышающим 170 см, 2) меньшим, чем 165 см.

5. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке $[2; 8]$. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток $[3;5]$.

5. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, при отсчете будет сделана ошибка: а) превышающая 0,02 А; б) меньшая 0,04А.

6. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ $(t > 0)$.Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 50$ ч.: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

7. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 100$ ч.: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

8. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 мин поступит: а) два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Контрольные вопросы

1. Биноминальное распределение. 2. Распределение Пуассона.
3. Равномерное распределение. 4. Показательное распределение.
5. Нормальное распределение.
6. Оценка отклонения Вероятность попадания нормально распределенной величины на заданный участок. Правило трех сигм..Эксцесс и асимметрия.

ТЕМА 4. Законы больших чисел

Практическое занятие 9 (2 часа)

Цель: 1. Ознакомление с понятием потока событий и его характеристиками.

2. Ознакомление с неравенством Чебышева.

Задачи: Раскрыть суть решения задач с использованием неравенств Чебышева и теоремы Бернулли.

Тематика практических занятий

1. Поток событий 2. Неравенство Чебышева. 3. Теорема Чебышева. 4. Теорема Бернулли.

1. Электростанция обслуживает сеть на 1600 электроламп, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0.9- Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число ламп, включенных в сеть вечером, отличается от своего математического ожидания не более чем на 100 (по абсолютной величине).

2. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оценить необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,2 не более чем на 0,01 (по абсолютной величине).

3. Вероятность того, что акции, переданные на депозит, будут востребованы, равна 0,08. Оцепить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 1000 клиентов от 70 до 90 востребуют свои акции.

4. В среднем 10% работоспособного населения некоторого региона — безработные. Оценить вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10 000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9% до 11% (включительно).

5. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. Оценить вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

Контрольные вопросы

1. Неравенство Чебышева. 2. Теорема Чебышева. 3. Теорема Бернулли.

Лабораторные работы

1. Метод наименьших квадратов (2часа).

Цель работы: приобретение навыков нахождения параметров функциональной зависимости методом наименьших квадратов.

Основные понятия

Предположим, что величины x и у связаны функциональной зависимостью. Требуется определить эту зависимость на основании полученной экспериментальной таблицы

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Известно, что через n точек можно всегда провести кривую, аналитически выражаемую многочленом (n-1)-й степени. Этот многочлен называется интерполяционным, а замену функции $F(x)$ на функцию $\varphi(x)$ так, что их значения совпадают в данных точках $F(x_i) = \varphi(x_i)$, $i = 1,2....n$ называют интерполяцией.

Однако такое решение проблемы в рассматриваемом случае не является удовлетворительным, поскольку $y_i \neq F(x_i)$ из-за случайных ошибок. Поэтому требуется провести кривую так, чтобы она в наименьшей степени зависела от случайных ошибок. Эта задача называется сглаживанием (аппроксимацией) экспериментальной зависимости. Сглаживающую кривую называют аппроксимирующей.

Задача аппроксимации решается следующим способом. В декартовой прямоугольной системе координат наносят точки (x_i; y_i). По расположению этих точек высказывают предположения о принадлежности искомой кривой к определенному классу функций. Иногда вид функциональной зависимости известен из других соображений, а на основании экспериментальных данных требуется найти значения неизвестных параметров. Для отыскания параметров функциональной зависимости применяют методы моментов, наибольшего правдоподобия и наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов получил самое широкое распространение в практике статистических исследований, так как не требует знания закона распределения выборочных данных и достаточно хорошо разработан в плане вычислительной реализации.

Итак, пусть в выбранной по каким-либо соображениям формуле

$y=F(x, a_0, a_1, \dots a_m)$ требуется определить по методу наименьших квадратов значения параметров $a_0, a_1, \dots a_m$.

Согласно методу наименьших квадратов из данного класса функций $y=F(x, a_0, a_1, \dots a_m)$ наилучшим образом отражающих наблюдаемые значения, считается та, для которой сумма квадратов отклонений экспериментальных значений от вычисленных по формуле $y=F(x, a_0, a_1, \dots a_m)$, доставляет минимум суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(F\left(x,\, a_0, a_1, ..., a_m\right) - y_i\right)^2 . \qquad (1)$$

Величина S называется суммарной невязкой.

Необходимым условием минимума функции нескольких переменных является обращение в нуль частных производных суммарной невязки

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \qquad (j = 0,1,2,..,m) \quad \text{или}$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x,\ a_0, a_1, ..., a_m\right) - y_i\right) \cdot \frac{\partial F}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0,1,...., m. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (2), находим неизвестные параметры a_j и тем самым полностью определяем функцию, которая наилучшим образом приближает искомую функцию *F(x)*.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для нахождения параметров в некоторых частных случаях.

Контрольные вопросы.

1. Дать понятие интерполяции и аппроксимации. В чем их сходства и различия?
2. Назначение и суть метода наименьших квадратов.
3. Выведите формулы для нахождения параметров линейной и квадратической зависимости методом наименьших квадратов. Запишите формулу для вычисления среднего квадратического отклонения.
4. Каким образом выбирается степень многочлена.
5. Назначение и суть линеаризации функции.
6. Приведите примеры линеаризации функций в простейших случаях.

2. Первичная обработка экспериментальных данных (2часа)

Цель работы: ознакомление с методами получения оценок параметров и законов распределения случайных величин .

Основные понятия

Методы математической статистики позволяют получить обоснованные выводы о параметрах, видах распределений и других свойствах случайных величин по конечной совокупности наблюдений над ними т. е. по выборке.

Выборкой или выборочной совокупностью называется совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (генеральной или выборочной) называется количество объектов этой совокупности. Объем генеральной совокупности обозначается N, а выборочной − n.

При осуществлении выборки после того, как объект отобран и наблюдение произведено, он может быть возвращен или не возвращен в генеральную совокупность. В первом случае выборку называют повторной, а во втором – бесповторной. Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, т.е. быть представительной (репрезентативной).

Для того чтобы обоснованно применять методы статистического анализа, выборка должна быть извлечена определенным образом.

Различают два способа отбора:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части, - простой случайный отбор: повторный или бесповторный.
2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части, - типический, механический, серийный.

Построение вариационного или сгруппированного статистического ряда

Вариационный ряд получают из исходных данных путем их расположения в порядке возрастания от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ так, чтобы

$x_{\min} = x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = x_{\max}$.

Разность $x_{\max} - x_{\min} = \omega$ называют размахом выборки.

Если объем выборки достаточно большой, то работа непосредственно с эмпирическими данными громоздка и эта громоздкость не оправдывается улучшением результатов обработки.

Поэтому «сырой» материал подвергают первичной обработке, состоящей из следующих операций.

Просмотром результатов наблюдений находят наименьшее $x_{\min}$ и наибольшее $x_{\max}$ значения величины.

Установленную область значений величины делят на k равных (можно и неравных) частей (интервалов), заботясь при этом (для упрощения вычислений), чтобы границы интервалов были числами с малым количеством значащих цифр. Вопрос о числе интервалов не имеет пока теоретического обоснования и решается пробами. Принято брать от 10 до 20 интервалов

x_i	x_1	x_2	…	x_k
p_i	p_1	p_2	…	p_k

Принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с эмпирическими вероятностями

$\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_k}{n}$, где x_i – середина i-го интервала, а $p_i = \frac{n_i}{n}$ - соответствующая ему частота, причем $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Эмпирической функцией распределения случайной величины X называется функция

$F_n(x) = \frac{n_x}{n}$, где n – объем выборки; n_x – число значений x_i из выборки, удовлетворяющих неравенству $x_i < x$.

Построение гистограммы выборки

В ряде случаев (в частности для непрерывных распределений) более наглядное представление о случайной величине дает гистограмма частот или гистограмма относительных частот.

Гистограммой частот сгруппированной выборки называется кусочно-постоянная функция, постоянная на интервалах группировки и принимающая на каждом из них соответственно значения $\frac{n_i}{\Delta x_i}$, $i = 1,2, \ldots, k$. Площадь ступенчатой фигуры под графиком гистограммы равна объему выборки n.

Определение оценок числовых характеристик

Выборочная средняя: $\bar{x}_в = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*$ или $\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$

Выборочная дисперсия:

$$D_в(x) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 p_i^* \quad \text{или} \quad D_в(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n}.$$

Выборочные начальные моменты:

$$\bar{m}_к(x) = \sum_{i=1}^{k} (x_i)^к p_i^* \quad \text{или} \quad \bar{m}_к(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i)^к n_i}{n}.$$

Выборочные центральные моменты:

$$\mu_к(x) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^к p_i^* \quad \text{или} \quad \mu_к(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_b)^к n_i}{n}.$$

Эксцесс: $E_x = \frac{\mu_4}{S^4} - 3$. Асимметрия: $a_x = \frac{\mu_3}{S^3}$

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение генеральной и выборочной совокупности. Приведите примеры.
2. Дайте определение объема совокупности (генеральной или выборочной).
3. Перечислите виды выборок. Приведите примеры.
4. Дайте определение вариационного ряда.
5. Дайте определение размаха выборки.
6. Дайте понятие сгруппированного статистического ряда.
7. Дайте понятие эмпирической функции распределения.
8. Назовите закон распределения генеральной совокупности, приближением которого является эмпирическая функция распределения.
9. Опишите способ построения эмпирической функции распределения.
10. Дайте понятие теоретического распределения.
11. Дайте определение гистограммы частот (относительных частот).
12. Опишите способ построения гистограммы частот (относительных частот).
13. Дайте определение полигона частот (относительных частот).
14. Назовите теоретический закон, приближением которого является гистограмма и полигон относительных частот.
15. Запишите формулы для нахождения выборочной средней, выборочной дисперсии, выборочных начальных и центральных моментов, эксцесса и асимметрии.
16. Что такое ложный нуль? Для чего он вводится?
17. Укажите способ вычисления условных вариант.
18. Дайте понятие точечной оценки.
19. Перечислите свойства точечных оценок.
20. Охарактеризуйте каждое свойство точечных оценок.
21. Укажите выборочные характеристики, являющиеся точечными оценками математического ожидания, дисперсии.
22. Дайте понятие исправленной выборочной дисперсии. Когда и для чего она вводится?

3. Интервальные оценки параметров распределения (2часа)

Цель работы: Изучение методов интервального оценивания основных характеристик случайных величин. Приобретение навыков нахождения доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии случайных величин.

Основные понятия

При статистической обработке результатов наблюдений часто необходимо не только найти оценку $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ, но и охарактеризовать точность и надежность этой оценки.

Такого рода задачи важны при малом числе наблюдений, т.к. точечная оценка $\tilde{\theta}$ в значительной мере является случайной и приближенная замена θ на $\tilde{\theta}$ может привести к серьезным ошибкам. С этой целью вводят понятие доверительного интервала.

Пусть для параметра θ получена из опыта несмещенная оценка $\tilde{\theta}$. Требуется оценить возможную при этом ошибку. Зададим некоторую вероятность γ (например , γ = 0,9) и найдем такое значение ε >0 для которого

$$P(|\theta - \tilde{\theta}| < \varepsilon) = \gamma \qquad (1)$$

Представим (1) в виде $P(\tilde{\theta} - \varepsilon < \theta < \tilde{\theta} + \varepsilon) = \gamma$ (2).

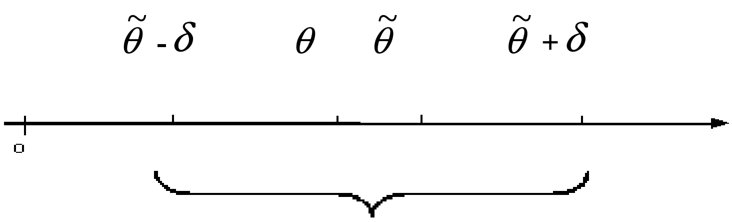
Обозначим $\theta_1 = \tilde{\theta} - \varepsilon$, $\theta_2 = \tilde{\theta} + \varepsilon$. Тогда $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал

(θ_1, θ_2), содержащий (покрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$.

Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение γ − уровнем значимости, границы θ_1 и θ_2 являющимися случайными величинами − соответственно нижней и верхней границами доверительного интервала.

Величина $\alpha = 1 - \gamma$ указывает на то, что те значения параметра θ, для которых $|\theta - \tilde{\theta}| > \varepsilon$ нужно признать противоречащими опытным данным.



доверительный интервал

Длина доверительного интервала, характеризующая точность интервального оценивания зависит от объема выборки n и доверительной вероятности (надежности) γ.

Выбор доверительной вероятности определяется конкретными условиями. Обычно используются значения 1-α, равные 0,90; 0,95; 0,99.

Рассмотрим доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Доверительные оценки для математического ожидания нормального распределения при известном σ.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение, то и выборочная средняя

$\overline{x}_в = \sum_{i=1}^{n} x_i$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\overline{x}_в) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

а также математическое ожидание $M(\overline{x}_в) = a$ имеют нормальное распределение.

Известно, что, если X нормально распределенная случайная величина, то

$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$ Заменив X на $\overline{x}_в$ и σ на $\sigma(\overline{x}_в) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, получим

$P\{|\overline{x}_в - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t)$, где $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$, а $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Итак $P\{|\overline{x}_в - a| < \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\} = 2\Phi(t)$ или, где γ – заданная надежность.

Из этого равенства следует, что доверительный интервал

$\left(\overline{x}_в - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}_в + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ с надежностью γ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Число t определяется из уравнения $2\Phi(t) = \gamma$ по таблице значений функций Лапласа.

Оценку $|\overline{x}_в - a| < \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ называют классической. Из равенства $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, определяющей точность классической оценки, можно сделать выводы:

1) при возрастании n число δ убывает и, следовательно, точность оценки увеличивается;

2) увеличение надежности оценки $\gamma = 2\Phi(t)$ приводит к увеличению t, т.е. к увеличению длины доверительного интервала, а значит к уменьшению точности оценки;

3) объем выборки обеспечивающий заданную надежность, можно найти по формуле $n = \dfrac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном σ.

Допустим, что выборка произведена из генеральной совокупности
имеющей нормальное распределение. Тогда математического ожидания
является случайной величиной, которая при неизвестном сренеквадратическом отклонении σ подчинена распределению Стьюдента с n - 1 степенями свободы.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* при неизвестном σ для заданной доверительной вероятности γ вычисляется по формуле:

$$\bar{x}_в - t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \bar{x}_в + t_\gamma S/\sqrt{n} \ ,$$

где $\bar{x}_в = \dfrac{\sum_{i-1}^{n} x_i}{n}$, $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n-1}$, где $\alpha = 1 - \gamma$.

Доверительный интервал для оценки значение генерального среднеквадратического отклонения при выборках малого объема

Малыми выборками в математической статистике принято называть выборки объема n < 30. В этих случаях «исправленное» среднеквадратическое отклонение $\bar{S}$ (случайная величина) используется как оценка неизвестного генерального отклонения σ.

В этом случае ошибка t должна зависеть не только от надежности γ,
но и от объема выборки *n*. Рост ошибки t при малом объеме выборки будет приводить к увеличению доверительного интервала, формула для которого в этом случае имеет вид:

$$\bar{x}_в - t\,\bar{S}/\sqrt{n} < a < \bar{x}_в + t\,\bar{S}/\sqrt{n}, \quad где \quad S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n-1}$$

Значение t определяются поведением величины $T = \dfrac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\bar{s}}$

имеющей распределение Стьюдента с числом степеней свободы *n-1*,
которое при n > 30 несущественно отличается от нормального.

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормального распределения.

Пусть генеральная совокупность имеет нормальное распределение $x \in N(a, \sigma)$ ..

Рассмотрим случайную величину $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$, которая имеет χ^2 - распределение с числом степеней свободы n-1.

Случайная величина с χ^2 - распределением принимает только неотрицательные значения. По таблице χ^2 − распределения (приложения 5) можно найти χ_α удовлетворяющие условию: $P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$

Из рисунка 8 видно, что найденный интервал не симметричен.

По таблицам χ^2 – распределения всегда можно найти такие два числа χ_1^2 и χ_2^2 которые удовлетворяли бы условию $P(\chi_1^2 \le \chi^2 \le \chi_2^2) = \gamma$ Таких пар чисел χ_1^2 и χ_2^2 существует бесчисленное множество.

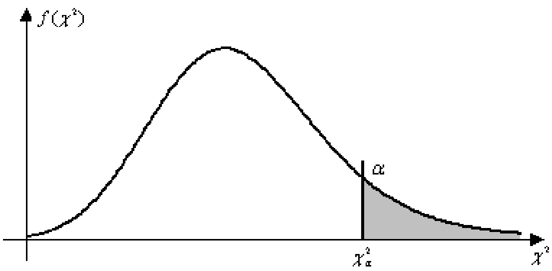


Рис. 8.

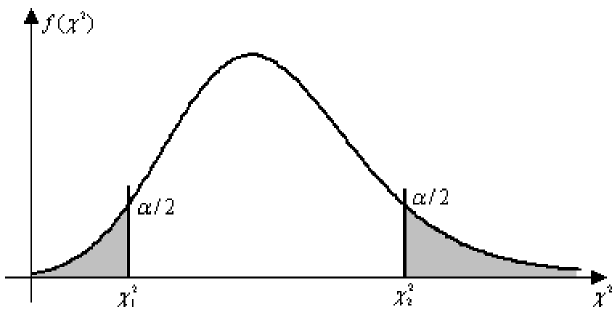


Рис. 9.

Чтобы зафиксировать одну такую пару χ_1^2 , χ_2^2 , введем дополнительное условие (симметричность по вероятности) (рис. 3).

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}$$

Из таблицы приложения 5 находим значение χ_2^2 . Для нахождения χ_1^2 используем вероятность противоположного события $P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Таким образом, найдены симметричные границы

$$\chi_1^2 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1} \quad \text{и} \quad \chi_2^2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2};\, n-1}.$$

Заменяя в формуле (8) χ^2 его значением из формулы (7) и выполняя преобразования, получим

$$Ð\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}};n-1} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\tilde{o}^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}\right) = \gamma ,$$

где в скобках записан доверительный интервал для дисперсии σ^2 .

Извлекая корень квадратный из обеих частей неравенства, получим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

$$S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,n-1}}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}}}\ . \ \ .$$

Контрольные вопросы.

1. Дайте понятия оценки параметра.
2. Дайте определение точечной и интервальной оценки параметра.
3. Сформулируйте свойства точечных оценок.
4. Дайте понятие состоятельности оценки. Приведите пример.
5. Дайте понятие смещенной и несмещенной оценки. Приведите пример.
6. В чем состоит эффективность оценки?
7. Дайте обоснование необходимости введения интервальной оценки.
8. Дайте определение доверительного интервала, надежности, точности оценки.
9. Дайте понятие нормального распределения.
10. Запишите дифференциальный и интегральный законы нормального распределения.
11. Укажите смысл параметров, характеризующих закон нормального распределения.
12. Запишите формулы для нахождения точечных оценок параметров нормального распределения.
13. Запишите функцию Лапласа.
14. Постройте кривую Гаусса.
15. Запишите формулы для нахождения вероятности попадания нормального распределения случайной величины в заданный интервал.
16. Запишите формулы для нахождения вероятности $P(|X-a|<\delta)$, если X - случайная величина, имеющая нормальное распределение, a- математическое ожидание.
17. Сформулируйте следствия из теоремы Ляпунова. Приведите примеры.

18. Сформулируйте алгоритм нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ, при неизвестном σ.

19. Сформулируйте правило нахождения доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

4. Проверка гипотез о параметрах распределения (2аса)

Цель работы: Овладение методикой применения статистических критериев проверки гипотез.

Основные понятия

На разных этапах статистического исследования возникает необходимость в формулировании и экспериментальной проверке некоторых предположительных утверждений (гипотез, истин), от которых зависят правомерность и эффективность применяемых методов анализа, например:

1) можно ли считать подлежащие обработке данные результатами независимых наблюдений случайной величины;

2) при наличии нескольких групп исходных данных можно ли считать, что они извлечены из одной генеральной совокупности;

3) симметричен ли закон распределения исследуемой случайной величины относительно центра группирования;

4) какую модель надо выбрать для описания эмпирических данных;

5) какова природа и величина неизвестных параметров рассматриваемой стохастической схемы и т. д.

Процедура обоснованного сопоставления высказанной гипотезы с имеющейся выборкой $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ осуществляется с помощью того или иного статистического критерия и называется статистической проверкой гипотез.

Результат такого сопоставления может быть как отрицательным (данные наблюдения противоречат выдвинутой гипотезе, следовательно, от нее надо отказаться), так и положительным (наблюдения не противоречат высказанной гипотезе, и поэтому ее можно принять в качестве одного из решений).

Неотрицательный результат статистической проверки гипотез не означает, что высказанное нами предположительное утверждение является наилучшим. Могут также существовать другие гипотезы, которые не будут противоречить тем же эмпирическим данным.

Принятая в этом случае гипотеза будет рассматриваться как достаточно правдоподобное, не противоречащее опыту утверждение.

При анализе статистических данных решаются следующие задачи, связанные с проверками гипотез:

1. Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик случайной величины (гипотезы о равенстве математических ожиданий и дисперсий);

2. Проверка гипотез об однородности двух или нескольких выборок (гипотезы об однородности проверяются выборок по критерию χ^2 и по критерию Вилкоксона);

3. Проверка гипотез о согласии эмпирического распределения и выбранной модели (критерий согласия χ^2 Пирсона и Колмогорова);

4. Проверка гипотез о стохастической независимости элементов выборки (критерий стохастической независимости Аббе, «восходящих» и «нисходящих» серий и серий, основанных на медиане).

Остановимся более подробно на проверке гипотез о законах и параметрах распределений.

При изучении случайных величин необходимо знать законы и параметры распределений.

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предполагать, что он имеет определенный вид (назовем его А), то выдвигают гипотезу: случайная величина *X* распределена по закону А.

Встречаются задачи, в которых закон распределения случайной величины *X* известен, а неизвестен его параметр Θ. В этом случае выдвигают гипотезу: $\Theta = \Theta_0$.

Например, случайная величина *X* имеет распределение Пуассона (гипотеза о законе распределения); случайная величина с нормальным законом распределения имеет математическое ожидание $a \neq 5$ (гипотеза о параметре распределения).

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривается и противоречащая ей гипотеза.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей называют, гипотезу H_1, которая противоречит нулевой гипотезе.

Например, если проверяется гипотеза о равенстве параметра Θ некоторому значению Θ_0, т.е. $H_0 : \Theta = \Theta_0$, то в качестве конкурирующей гипотезы можно рассматривать одну из следующих гипотез:

$$H_1 : \Theta > \Theta_0; \quad H_1 : \Theta < \Theta_0; \quad H_1 : \Theta \neq \Theta_0; \quad H_1 : \Theta = \Theta_1, \qquad где\ \Theta_1 \neq \Theta_0.$$

Выбор конкурирующей гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи.

Гипотезы бывают простые и сложные.

Гипотезу называют простой, если она содержит только одно предположение. Например, параметр λ показательного распределения равен 6, т.е. $H_0 : \lambda = 6$.

Гипотезу называют сложной, если она состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, $H_1 : \lambda > 6$.

Нулевая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому её необходимо проверить. Проверка гипотез осуществляется статистическими методами.

Из-за случайности выборки в результате проверки могут возникнуть ошибки и быть приняты неправильные решения. Возможны ошибки первого и второго рода.

Ошибка первого рода α состоит в том, что отвергается правильная гипотеза H_0, а принимается неправильная гипотеза H_1.

Ошибка второго рода β стоит в том, что правильная гипотеза H_1 отвергается, а принимается неправильная гипотеза H_0.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно. Эту величину обозначают различными буквами в зависимости от закона её распределения. Поскольку нас не интересует вид распределения этой величины, обозначим её через *K*.

Случайную величину *K*, которая служит для проверки нулевой гипотезы, называют статическим критерием (статистикой). Мощность критериев равна $1-\beta$.

Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий нормальных совокупностей ($K_0 : S_1^2 = S_2^2$), то в качестве критерия принимают отношение выборочных исправленных дисперсий $K = \dfrac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2}$.

Для проверки нулевой гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и получают частное значение критерия, называемое наблюдаемым значением $K_{набл}$.

Например, если по выборкам, извлечённым из двух нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии $\tilde{S}_1^2 = 15$, $\tilde{S}_2^2 = 5$, то наблюдаемое значение критерия $K_{набл} = \dfrac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} = \dfrac{15}{5} = 3$.

После выбора критерия K множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества, называемые критической областью и областью принятия гипотезы.

Критической областью называют совокупность значений критерия при которых нулевую гипотезу отвергают.

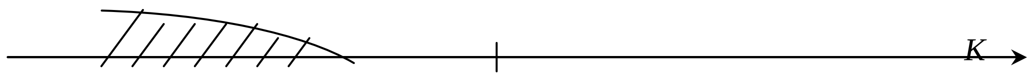
Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Так как критерий K – одномерная случайная величина, возможные значения которой принадлежат обычно интервалу $(-\infty;\ +\infty)$ или $(0;\ +\infty)$, то критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами, а значит существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками $K_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

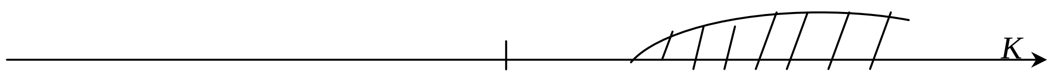
Различают одностороннюю (левостороннюю или правостороннюю) и двухстороннюю критические области.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < K_{кр}$, где $K_{кр}$ - отрицательное число.



критическая область $K_{1кр}$ 0 область принятия гипотезы

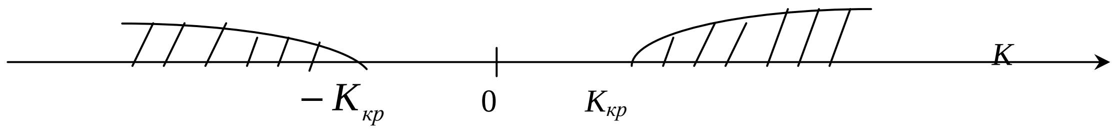
Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > K_{кр}$, где $K_{кр}$ - положительное число.



область принятия гипотезы 0 $K_{2кр}$

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < K_{1кр}$, $K > K_{2кр}$, где $K_{1кр} < K_{2кр}$.

В частности, если критические точки $K_{1кр}$ и $K_{2кр}$ симметричны относительно нуля, то двухсторонняя область определяется неравенствами $K < -K_{кр}$, $K > K_{кр}$ ($K_{кр} > 0$) или $|K| > K_{кр}$.



Для нахождения критической области задают уровень значимости α. Обычно его выбирают равным 0,01; 0,1; 0,05. Уровень значимости α определяет размер критической области.

Для правосторонней критической области критическую точку находят исходя из требования, что при условии справедливости нулевой гипотезы, вероятность того, что критерий *K* принимает значение больше $K_{кр}$ была равна принятому значению α.

$$P(K > K_{кр}) = \alpha .$$

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым по заданному уровню значимости α находят критическую точку.

Левосторонняя критическая область определятся аналогично, т.е. $P(K < K_{кр}) = \alpha$, где $K_{кр} < 0$, α - уровень значимости.

Двустороннюю критическую область определяют неравенствами

$$K < K_{1кр}, \quad K > K_{2кр} \quad (K_1 < K_2).$$

Критические точки K_1 и K_2 находят исходя из требования:

$$P(K < K_{1кр}) + P(K > K_{2кр}) = \alpha.$$

Если критические точки симметричны относительно нуля, т.е. $-K_{кр}$ и $K_{кр}$ $(K_{кр} > 0)$, то $P(K < -K_{кр}) = P(K > K_{кр})$.

Из неравенства $P(K < -K_{кр}) + P(K > K_{кр}) = \alpha$ находим

Гипотеза о математическом ожидании нормального распределения при известной дисперсии

Предположим, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение $X \in N(a,\ \sigma)$, причём значение σ известно. При уровне значимости α нужно проверить гипотезу $H_0 : a = a_0$. В качестве альтернативной можно использовать одну из следующих гипотез $H_1 : a < a_0$; $H_1 : a > a_0$; $H_1 : a \neq a_0$. В качестве статистики используется случайная величина $Z = \dfrac{\overline{x}_в - a_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$, где $\overline{x}_в$ - выборочная средняя, *n* – объём выборки. При истинной гипотезе H_0 случайная величина *Z* имеет нормированное (стандартизированное) нормальное распределение $Z \in N(0;\ 1)$.

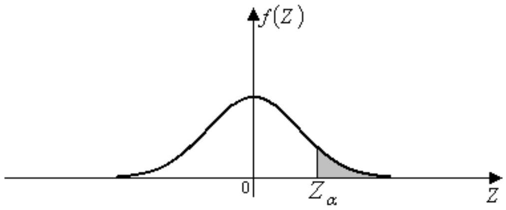
Критическую область определяют с помощью таблицы значений функции Лапласа.

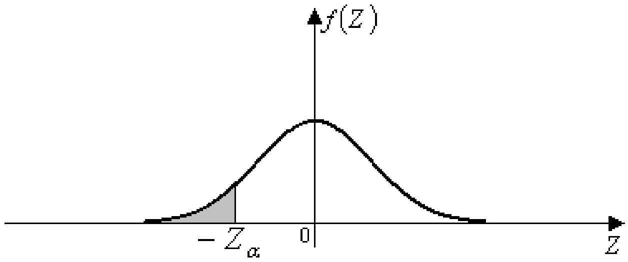
Если альтернативная гипотеза имеет вид $H_1: a < a_0$, то используем левостороннюю критическую область (рис. 8), которая удовлетворяет условию $P(Z < -Z_\alpha) = \Phi(-Z_\alpha) = \alpha$.

Учитывая, что таблицы значений функции Лапласа составлены для положительных значений аргумента, Z_α находится из условия

$\Phi(Z_\alpha) = 0{,}5 - \alpha$, т.к. $P(Z < -Z_\alpha) = P(-\infty < Z < -Z_\alpha) = \Phi(-Z_\alpha) - \Phi(-\infty) =$

$= \Phi(\infty) - \Phi(Z_\alpha) = 0{,}5 - \Phi(Z_\alpha) = 0{,}5 - \alpha.$





Если альтернативная гипотеза имеет вид $H_1: a > a_0$, то используем правостороннюю критическую область. Критическую точку Z_α находим из условия $P(Z > Z_\alpha) = \alpha$ или $P(Z_\alpha < Z < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi(Z_\alpha) = \alpha$. Откуда $0{,}5 - \Phi(Z_\alpha) = \alpha$ и $\Phi(Z_\alpha) = 0{,}5 - \alpha$.

Критическая область определяется в зависимости от альтернативной гипотезы H_1.

При альтернативной гипотезе $H_1: a \neq a_0$ используем двухстороннюю критическую область (рис.10), удовлетворяющую условию $P(|Z| > Z_\alpha) = \alpha$.

Учитывая, что $P(Z < -Z_\alpha) = P(Z > Z_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$, находим $\Phi(Z_\alpha) = 0{,}5 - \dfrac{\alpha}{2}$

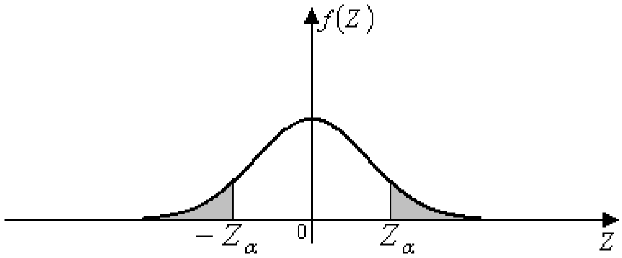


Рис. 10.

5. Критерии согласия Пирсона (2часа)

Цель работы: Овладение методикой применения статистических критериев для проверки гипотез о законах распределения.

Пусть выдвинута гипотеза о том, что случайная выборка из генеральной совокупности может быть описана некоторой моделью с функцией распределения $F_0(x, \vec{\Theta})$, где $\vec{\Theta}$ - вектор параметров, которые могут быть как известны, так и неизвестны.

Критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения называется критерием согласия. Большинство критериев проверки согласия основаны на использовании меры расстояний между анализируемой эмпирической функцией распределения $F_э(x)$ (определенной по выборке объема n) и гипотетической моделью $F_0(x, \vec{\Theta})$.

Рассмотрим критерии согласия χ^2 - Пирсона..

Критерии согласия χ^2 - Пирсона позволяет осуществлять проверку гипотезы о согласии, когда параметры модели неизвестны.

Неизвестные параметры модели могут быть заменены в модели их оценками, полученными по выборке, например по методу моментов или методу максимального правдоподобия.

Критерии согласия χ^2 - Пирсона применим при $n \geq 200$ и требует группирования выборки. При этом число интервалов группирования $\kappa \geq 8$, а количество попаданий в каждый интервал μ_j должно быть не менее 7… 10. В противном случае соседние интервалы необходимо объединить в один, не забывая при этом корректировать κ ..

Пусть высказано предположение, что ряд наблюдений $X_1, X_2, ..., X_n$ образует случайную выборку из распределения с функцией распределения $F\left(x, \Theta^{(1)}, ..., \Theta^{(S)}\right)$, где F (т.е. тип модели считается известным, а параметры могут быть как известными, так и нет).

Требуется проверить гипотезу $H_0 : F^*(x) = F(x)$.

Процедура проверки гипотезы состоит из следующих шагов:

1. Диапазон значений исследуемой случайной величины X разбивается на k взаимно исключающих и непересекающихся интервалов $I_1, ..., I_k$.

2. Подсчитывается число наблюдений n_j, попадающих в интервал I_i, $i = 1, ..., k$.

3. Вычисляется ожидаемое число наблюдений n_i' в интервале I_i при условии справедливости гипотезы H_0 .

4. Вычисляется статистика $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$, которая при верной H_0 имеет χ^2 - распределение с $f = k - s - 1$ степенями свободы, s- количество параметров определяемого закона распределения.

5. Гипотеза о том, что исследуемая случайная величина ξ подчиняется закону распределения F_0, принимается на уровне значимости α, если

$$\Delta\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \chi^2 < \Delta\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

где $\Delta(\varepsilon)$ - квантиль уровня ε имеет χ^2- распределение с $f = k - s - 1$ степенями свободы; если $\chi^2 \ge \Delta\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, гипотеза H_0 отклоняется.

Контрольные вопросы.

1. Назовите основные типы статистических критериев проверки гипотез.

2. Приведите примеры применения аппарата статистической проверки гипотез.

3. Назовите шаги логической схемы проверки статистического критерия.

4. Что означает уровень значимости критерия?

5. Каков смысл критической статистики критерия?

6. Что общего в методике построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез?

7. Поясните смысл понятий «ошибка первого рода», «ошибка второго рода», «мощность критерия».

8. Зачем необходимо знать закон распределения критической статистики?

9. В чем отличие одностороннего и двухстороннего критериев, простой и сложной гипотез?

10. Как зависит ширина области принятия основной гипотезы от уровня значимости?

11. Как определяются критические границы для одностороннего и двухстороннего критериев при заданном уровне значимости α?

12. Приведите примеры практических задач, когда необходима проверка гипотез о равенстве математических ожиданий, дисперсий.

13. Таблицами какого предельного распределения необходимо воспользоваться, чтобы найти $K_{кр.в.}$ и $K_{кр.н.}$ для гипотезы о равенстве дисперсий при неизвестных математических ожиданиях?

14. Назовите условия применимости критериев согласия χ^2- Пирсона.

6. Корреляционно – регрессионный анализ (2часа).

Цель работы: Знакомство с основными понятиями теории корреляции. Овладение методикой нахождения уравнений регрессии по данным выборки.

Общие сведения

Большинство процессов и явлений находятся в постоянной связи. Исследование зависимостей и взаимосвязей между явлениями и процессами дает возможность понять механизм причинно-следственных отношений между ними. Для исследования интенсивности, вида и формы зависимостей широко применяется корреляционно-регрессивный анализ.

Различают два вида взаимосвязей: функциональную и статистическую.

Функциональная зависимость-это вид причинной зависимости, при которой определенному значению одной или нескольких величины соответствует одно или несколько точно заданных значений другой величины.

Однако функциональная зависимость встречается редко. В большинстве случаев функция $(У)$ или аргумент (X) - случайные величины.

Статистической называется зависимость между случайными величинами, при которой изменение одной величины влечет за собой изменение закона распределения другой величины.

Корреляционная связь - это и есть функциональная зависимость среднего значения результативного признака от изменения факторного признака или признаки X и $У$ находятся в корреляционной зависимости, если каждому значению одного признака $X = x$ соответствует определенная условная средняя $\overline{y_x}$ другого признака, т.е. $\bar{y}_x = f(x)$.

(1)

Уравнение (1) называют уравнением регрессии $У$ на X, функцию $f(x)$ называют регрессией $У$ на X, а её график - линейной регрессией $У$ на X.

Аналогично определяется корреляционная зависимость X от $У$: $\bar{x}_y = \varphi(y)$

где $\bar{x}_y$ - среднее арифметическое значений X, соответствующих значению $У = y$.

Различают следующие виды регрессий:

1. Регрессия относительно числа переменных:

1) простая регрессия – регрессия между двумя переменными;

2) множественная регрессия – регрессия между зависимой переменной y и несколькими объясняющими переменными $x_1,\ x_2,\dots,x_m$.

2. Регрессия относительно формы зависимости:

1) линейная регрессия, выражаемая линейной функцией;

2) нелинейная регрессия, выражаемая нелинейной функцией.

3. В зависимости от характера регрессии различают следующие ее виды:

1) положительную регрессию. Она имеет место, если с увеличением (уменьшением) объясняющей переменной значения зависимой переменной также соответственно увеличиваются (уменьшаются);

2) отрицательную регрессию. В этом случае с увеличением или уменьшением объясняющей переменной зависимая переменная уменьшается или увеличивается.

Регрессия тесно связана с корреляцией. **Корреляция** в широком смысле слова означает связь, соотношение между объективно существующими явлениями. Связи между явлениями могут быть различны по силе.

В корреляционном анализе оценивается сила связи, а в регрессионном анализе исследуется ее форма.

Задачи корреляционного анализа

Рассмотрим основные элементы анализа структуры и степени тесноты статистической связи между анализируемыми переменными, т.е. задачи корреляционного анализа.

Основное содержание корреляционного анализа составляют методы, которые позволяют ответить на вопросы:

• существует ли связь между исследуемыми переменными?

• как измерить тесноту связей?

Корреляционный анализ – совокупность методов исследования параметров многомерного признака, позволяющая по выборке из генеральной совокупности сделать статистические выводы о мерах статистической зависимости между компонентами исследуемого признака.

Контрольные вопросы.

1. Дайте пояснение функциональной, статистической и корреляционной зависимости.

2. Дайте определение условной средней.

3. Дайте определение корреляционной зависимости. Виды корреляции.

4. Перечислите основные задачи корреляционного анализа.

5. Для измерения какой связи используют парный коэффициент корреляции, частный коэффициент корреляции, корреляционное отношение?

6. Когда необходимо использовать измерители степени тесноты ранговой связи?
7. Назовите свойства коэффициента корреляции.
8. Дайте понятие уравнения регрессии.
9. Виды регрессии.
10. Основные задачи регрессионного анализа.
11. Дайте понятие линейной корреляции.
12. Запишите уравнение линейной регрессии парной корреляции.

3. 2. Методические указания по самостоятельной работе студентов.

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Самостоятельная работа. Тест.	2
2	2	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
3	3	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
4	4	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
5	5	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
6	6	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2

7	7	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
8	8	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
9	9	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
		Подготовка к зачёту	10
Итого			36

3. 3. Контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, зачёт. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

3.4 Текущий контроль.

Промежуточный контроль знаний студентов осуществляется:

а) проведение самостоятельных и контрольных заданий в аудитории, б) проверка выполнения домашних работ; проведения диктантов;выполнение6м расчетно- графических и индивидуальных работ; д) отчеты по расчетно- графическим работам. при подготовке к работе, выполнении и сдаче каждого задания лабораторной работы, а так же во время контрольных точек при выполнении курсовой работы.

В качестве заключительного контроля знаний студентов в 1 семестре служит зачет. На зачете оцениваются знания студентов по выполненным лабораторным работам. Во 2 семестре заключительным контролем служит экзамен, в 3 семестре – курсовая работа. К экзамену допускаются студенты при выполнении и защите всех лабораторных работ

Домашнее задания

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй ─0,9; третий ─ 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы:
а) только 2-й экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

2. Два стрелка, вероятности попадания в цель которых при одном выстреле равны соответственно 0,8 и 0,7, производят по 2 выстрела. Чему равна вероятность того, что бу дет одно; два, хотя бы одно попадание?

3. В электрическую цепь последовательно включены 2 элемента, работающие незави- симо друг от друга. Вероятности отказов элементов известны, $P_1=0,2$, $P_2=0,3$. Найти веро ятность того, что тока в цепи не будет.

4. Определить вероятность надежного электроснабжения потребителя при последо- вательном (схема 1), параллельном (схема 2) соединении элементов цепи. Вероятности безотказной работы первого элемента p_1=0,85, второго – p_2 = 0,9, третьего – p_3 = 0,8.

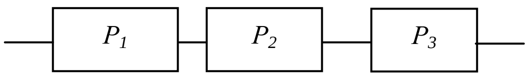


Схема 1.

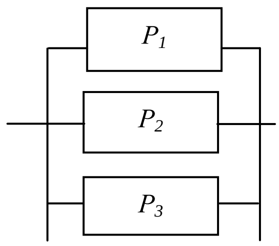


Схема 2.

5. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся окрашенными.

6. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент знает все 3 вопроса в билете.

7. Первый студент знает из 20 вопросов программы выучил 17, второй ─ 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) хотя бы один ответит верно; в) правильно ответит только первый студент.

8. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или элементов ─ K_2 и K_3. Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

9. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. . Найти вероятность того, что: а) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания; б) для запуска двигателя придется включать не более трех раз.

10. В коробке 5 черных и 3 белых шара. Вынимается наудачу 2 шара.
Какова вероятность того, что они: а) одноцветные; б) разноцветные; в) оба белые; г) оба черные.

11. Покупатель может приобрести акции двух компаний – *А* и *В*. Надежность первой оценивается экспертами на уровне 90% , второй – 80%. Чему равна вероятность того, что:

а) обе компании в течение года не станут банкротами; б) наступит хотя бы одно банкротство?

12. На склад поступило 20 телевизоров. Известно, что 8 телевизоров с дефектами, но неизвестно − какие. Найти вероятность того, что три взятых наугад телевизора будут с дефектами.

13. Вероятность для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, получить контракт в стране A равна 0,4; получить в стране B равна 0,3. Чему равна вероятность того, что компания получить контракт хотя бы в одной стране?

Вариант контрольной работы

1. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели для каждого стрелка равна соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что: а) все три стрелка промахнутся; б) только один стрелок поразит цель;
в) только два стрелка поразят цель; г) все три стрелка поразят цель;
д) хотя бы один стрелок поразит цель.

2. Стрельба производится по пяти мишеням типа А, трем – типа В, двум – типа С. Вероятность поражения мишени при одном выстреле типа А равна 0,4, типа В – 0,1, типа С – 0,15. Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если не известно, в мишень какого типа он сделан.

3. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения 500 бактерий останется не менее 3 бактерий.

4. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9876 можно было ожидать отклонение относительной частоты появления события от его вероятности не более чем на 0,04?

5. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента, в момент включения прибора равна 0,2.
Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемента.

6. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) от 480 до 520. в) наивероятнейшее число предприятий число имеющих нарушение финансовой дисциплины.

7. Из статистики деятельности биржи известно, что в среднем цены на 75% котирующихся на бирже акций в течение месяца повысятся или останутся неизменными, а цены на 25% акций упадут. Некто имеет 6 акций, котирующихся на данной бирже. Найти вероятность того, что: а) более половины имеющихся у него акций не упадут в цене; б) по крайней мере, одна акция упадет в цене.

Тестовые вопросы;

а) по теории вероятностей;

Верно (В) или не верно (Н)?

1 . Случайными называются события, которые при выполнении некоторого комплекса условий могут произойти или не произойти.

2 . Наступление некоторого события может означать появление более одного исхода опыта.

3 . Вероятность события может быть больше единицы как указание того, что оно достоверно.

4 . Классический метод определения вероятности события предполагает многократное проведение опыта (испытания) в одинаковых условиях.

5. Геометрический метод определения вероятности события применяется в случае, когда число исходов опыта конечно.

6. В статистическом методе определения вероятности .события относительная частота его появления в серии независимых опыте принимается за вероятность этого события.

7. Два независимых события всегда несовместны.

8. Два несовместных события всегда независимы.

9. К случайным событиям можно применять операции аналогично операциям над множествами.

10. Использование косвенного способа определения вероятности со бытия позволяет вычислить вероятности одних событий на основании уже известных вероятностей других событий.

11. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

12. Вероятность произведения двух несовместных событий равна произведению их вероятностей.

13. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, всегда равна единице.

14. Формула Байеса позволяет вычислять вероятности событий в схеме повторных испытаний (при которой испытания повторяются).

15. Формула полной вероятности используется для вычисления вероятностей событий, образующих полную группу.

16. Понятие «случайная величина» является дальнейшим развитием и усложнением понятия «случайное событие» и связано с многозначностью исходов опыта (испытания).

17. Дискретная случайная величина в отличие от непрерывной случайной величины принимает только конечное число значений.

18. Законом распределения случайной величины называют соотношение или правило, устанавливающее связь между ее возможными значениями и их вероятностями.

19. Закон распределения случайной величины можно задать графически.

20. Для любой случайной величины можно определить ее математическое ожидание и дисперсию.

21. В отличие от математического ожидания случайной величины, ее дисперсия является также случайной величиной.

22. Математическое ожидание неслучайной величины равно этой величине

23. Дисперсия случайной величины может принимать отрицательные значения.

24. В качестве числовых характеристик случайных величин используют чаще всего математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

25. Размерность среднего квадратического отклонения совпадает (в отличие о дисперсии) с размерностью случайной величины.

Ответы на тестовые вопросы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
В	В	Н	Н	Н	В	Н	Н	В	В	В	Н	В

14	1	1	17	1	1	20	21	22	23	24	25
Н	Н	В	Н	В	В	В	Н	В	Н	В	В

б) по математической статистике

Верно (В) или не верно (Н)?

1. Математическая статистика является наукой о методах количественного анализа массовых явлений.

2. Генеральная совокупность формируется из общей совокупности изучаемых объектов на основе специальных критериев значимости.

3. При повторной выборке каждый отобранный элемент повторяется в выборочной совокупности неоднократно.
4. Выборочный метод исследования позволяет осуществить целенаправленный отбор объектов, которые более доступны или удобны для исследования.
5. Представительная выборка — это выборочная совокупность минимального объема.
6. Вариационный ряд — это упорядоченная последовательность статистических данных.
7. Эмпирическое распределение позволяет исследовать закономерности наблюдаемой случайной величины в аналитическом виде
8. Эмпирическое распределение строится в виде таблиц и графиков.
9. По виду графика эмпирического распределения можно судить о теоретическом (истинном) законе распределения наблюдаемой случайной величины.
10. Выявление теоретического закона распределения (функции распределения или плотности распределения) — это определение в общем виде формулы с входящими в нее одним или несколькими параметрами, выражающей закон распределения наблюдаемой случайной величины,
11. Вычисление числовых значений параметров, входящих в формулу закона распределения, осуществляется с помощью их оценивания на основе выборки.
12. Статистическая оценка — это некоторая функция от выборки.
13. Любая статистическая оценка обладает свойствами несмещенности и состоятельности.
14. Точечная оценка параметра реализуется в виде конкретного числового значения, а интервальная оценка – в виде интервала, который «накрывает» истинное значение оцениваемого параметра.
15. Выборочная средняя является примером точечной оценки математического ожидания случайной величины, а выборочная дисперсия – примером интервальной оценки дисперсии случайной величины.
16. Для количественного определения расхождения между оцениваемым параметром и статистической оценкой пользуются доверительным интервалом и доверительной вероятностью.
17. «Правило трех сигма» позволяет получить как точечные, так и интервальные оценки.

Ответы на тестовые вопросы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
В	Н	Н	Н	Н	В	Н	В	В	В	В	В	Н	В	Н	В	Н

с) по теме «Случайные события»

1. Вероятность случайного события изменяется в интервале:
а) [0; 1]; б) [-1; 0]; в) [-1; +1].
2. Если события А и В равны, А={2; 4; 9}, В={4; 6; 7}, то событие А + В равно:
а) {2; 4; 6; 7; 9}; б) {6; 7; в) {4}.
3. Если р(А) = 0,6, то р($\overline{A}$) равно: а) 0; б)1; в) –0,6; г) 0,4.
4. Для совместных событий А и В имеет место утверждение:
а) р(А·В) = р(А)·р(В/А); б) р(А·В) = р(А)·р(В);
в) р(А+В) = р(А)+р(В); г) р(А+В) = р(А) + р(В) - р(А В).
5. Для независимых событий А и В имеет место утверждение:
а) р(А·В) = р(А)·р(В/А); б) р(А·В) = р(А)·р(В);
в) р(А+В) = р(А)+р(В); г) р(А+В) = р(А)+р(В)-р(А В).

6. Событие, состоящие из всех элементарных событий, принадлежащих каждому из двух событий есть:а) сумма этих событий; б) произведение этих событий; в) разность этих событий.

7. Частный случай схемы независимых испытаний, в котором каждое испытание может закончиться только одним из двух исходов, назвают: а) полиномиальной схемой; б) конечной вероятностной схемой; в) схемой Бернулли.

8. События $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу событий, если в результате испытания:

а) произойдут хотя бы два из них; б) одно из них обязательно произойдет; в) все события $A_1, A_2, \ldots A_n$ обязательно произойдут.

9. Символом C_n^m обозначается:

а) число перестановок из n элементов по n; б) число сочетаний из n эле ментов по m; г) число размещений из n элементов по m.

10. Сочетания из n элементов по m отличается друг от друга:

а) порядком элементов; б) хотя бы одним элементом; в) либо порядком, либо самими элементами.

11. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верх ней грани выпадет ***не более четырех очков***, равна…

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 1.

12. В коробке 5 одинаковых, занумерованных кубиков. Произвольно извле кают по одно-му все кубики. Найти вероятность того, что номера извлечен-ных кубиков появятся в возрастающем порядке. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{120}$; 3) $\frac{1}{24}$; 4) 1.

13. В урне находятся 2 белый и 3 черных шара. Из урны поочередно извлекают два шара, но после первого извлечения шар **возвращается** в урну, и шары в урне перемешиваются. Тогда вероятность того, что оба шара бе лые, равна: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{4}{25}$; 4) $\frac{2}{3}$.

14. В первой урне 3 черных и 6 белых шаров. Во второй урне 4 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна:

1) 0,15; 2) 0,9; 3) 0,4; 4) 0,54.

15. Случайные события A и B, удовлетворяющие условиям $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(AB) = 0.3$, являются:

1) совместными и независимыми ; 2) несовместными и независимыми;
3) совместными и зависимыми; 4) несовместными и зависимыми.

16. По мишени производится четыре выстрела. Значение вероятности промаха при первом выстреле 0,6; при втором - 0,2; при третьем – 0,4; при четвертом – 0,1.

Тогда вероятность того, что мишень **не будет** поражена ни разу равна..

1) 0,04; 2) 1,3; 3) 0,173; 4) 0,0048.

17. Событие *A* может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу событий.
Известны вероятность $P(B_1) = 0{,}4$ и условные вероятность $P(A/B_1) = 0{,}3$, , $P(A/B_2) = 0{,}4$. Тогда вероятность $P(A)$ равна;

1) 0,12 ; 2) 0,24; 3)0,5; 4)0,36.

18. Устройство состоит из 6 элементов, 2 из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются 2 элемента. Найти вероятность того, что влючатся изношенные элементы…. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{15}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{1}{15}$.

19. Из 10 деталей в ящике 4 бракованных. Какова вероятность того, что взятые одновременно три детали не будут бракованными…1) $\frac{1}{30}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{1}{6}$.

20. Вероятность того, что некоторая деталь имеется в первом из 3 ящиков, равна 0,3, во втором − 0,8, а в третьем − 0,4. Какова вероятность того, что деталь найдется хотя бы в одном из ящиков. … 1) 0.91; 2) 0,28; 3) 0, 084; 4)0.916.

21. A, B, C попарно независимые события. Их вероятности:
$P(A) = 0{,}8$ $P(B) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}3$. Укажите соответствие между событиями и их вероятностями: 1. $A \cdot B$ 2. $A \cdot C$ 3. $B \cdot C$ 4. $A \cdot B \cdot C$

1) 1,5; 2) 0,12; 3) 0,32; 4) 0,096

22. Бросают 2 монеты. События А – «герб на первой монете» и В – «цифра на второй монете» являются: 1)зависимыми; 2) несовместными; 3) независимыми; 4) совместными.

23. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8 . Чему равна вероятность, если из 5 наудачу взятых деталей 3 окажутся стандартным: 1) 0,6; 2) 0, 4; 3) 0,07; 4)0,2.

24.Сколько нужно деталей, чтобы наивероятнейшее число годных было ровно 20, если вероятность того, что наугад взятая деталь будет бракованной, равна 0,2: 1) 15; 2) 10; 3) 16; 4)25.

25.Инвестор предполагает, что в следующем периоде вероятность роста цены акции компании N будет составлять 0,6 а компании M − 0,8.
Вероятность того, что цены поднимутся на те и другие акции, равна 0,5.
Вычислите вероятность их роста или компании N или компании M, или обеих компаний вместе; 1) 0,3; 2) 0, 48; 3) 0,56; 4) 0,9.

3. 4. Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль знаний проводится в виде зачета. К зачету допускаются студенты, получившие положительные оценки по рефератам и предоставившие законченное изделие. Вопросы к экзамену выдаются на первом занятии по дисциплине и полностью соответствуют изучаемому материалу.

Оценка знаний студентов

Нормы оценки знаний предполагают учет индивидуальных особенностей студентов, дифференцированный подход к обучению, проверке знаний, умений.

В устных ответах студентов на экзамене и при защите курсовой работы учитываются: глубина знаний, полнота знаний и владение необходимыми умениями (в объеме полной программы); осознанность и самостоятельность применения знаний и способов учебной деятельности, логичность изложения материала, включая обобщения, выводы (в соответствии с заданным вопросом), соблюдение норм литературной речи.

Критерии оценки

Оценка знаний на экзамене и при защите курсовой работы производится по четырех балльной системе.

Оценка "пять" – материал усвоен в полном объеме; изложен логично; основные умения сформулированы и устойчивы; выводы и обобщения точны.

Оценка "четыре" – в усвоении материала незначительные пробелы, изложение недостаточно систематизированное; отдельные умения недостаточно устойчивы; в выводах и обобщениях допускаются некоторые неточности.

Оценка "три" – в усвоении материала имеются пробелы: материал излагается несистематизированно; отдельные умения недостаточно сформулированы; выводы и обобщения аргументированы слабо; в них допускаются ошибки.

Оценка "два" – основное содержание материала не усвоено, выводов и обобщений нет.

Экзаменационный билет

1. Найти закон распределения числа двух пакетов акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,6 и 0,7. Найти математическое ожидания, дисперсию, функцию распределения, построить ее график.

2. В группе спортсменов 15 лыжников, 11 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнения квалификационной нормы равна: для велосипедиста 0,7, для лыжника – 0,9 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, названный наугад, выполнит норму.

3. Известно, что $\frac{3}{5}$ всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов выпускается первым сортом. Приемщик берет произвольно 200 штук. Чему равна вероятность, что среди них окажется первого сорта от 100 до 130 штук.

4. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad при\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25}\ \ при\ 0<x\le 5,\\ 1 \quad при\ x>5.\end{cases}$$

Найти: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (2;3);
б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X .

5. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 14 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 3 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции от 12 до 18 ден. ед.

6. Известно, что 75% выпускаемых швейной фабрикой изделий, высшего сорта. Какова вероятность того, что в партии из 100 изделий высшего сорта окажется 80 штук.

Вопросы к экзамену.

1. Предмет теории вероятностей и ее значение для экономических наук.
2. Комбинаторный анализ – перестановки, размещения, сочетания.
3. Комбинаторный анализ – правило сумм и правило произведений.
4. Событие. Классификация событий. Виды случайных событий. Пространство элементарных событий. Вероятностное пространство.
5. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности. Ограниченность классического определения вероятности.
6. Относительная частота. Основные свойства. Устойчивость относительной частоты. Статистическая вероятность.
7. Геометрическая вероятность.
8. Сумма событий. Теорема сложения вероятностей, несовместных и совместных событий.
9. Произведение событий. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.
10. Зависимые и независимые события. Теорема умножения для независимых событий.

11. Теорема о вероятностях событий, образующих полную группу событий. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.

12. Формула полной вероятности.

13. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли.

14. Схема независимых испытаний. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

15. Схема независимых испытаний. Интегральная теорема Лапласа.

16. Схема независимых испытаний. Формула Пуассона.

17. Схема независимых испытаний. Общая теорема о повторении опытов (производящая функция).

18. Схема независимых испытаний. Наивероятнейшее число. Примеры его нахождения.

19. Случайная величина ДСВ и НСВ. Закон распределения ДСВ. Пример дискретного распределения.

20. ДСВ. Закон распределения ДСВ. Биноминальное, пуассоновское и геометрическое распределения.

21. ДСВ. Числовые характеристики ДСВ. Математическое ожидание и его основные свойства.

22. ДСВ. Числовые характеристики ДСВ. Дисперсия ДСВ. Формула для вычисления дисперсии. Основные свойства дисперсии.

23. ДСВ. Числовые характеристики ДСВ. Начальные и центральные теоретические моменты.

24. Определение функции распределения (интегральной функции), ее свойства и график.

25. Определение функции плотности вероятностей (дифференциальная функция), ее свойства и график.

26. Числовые характеристики НСВ. Математическое ожидание и дисперсия НСВ. Основные свойства $M(x)$ и $D(x)$.

27. Закон распределения НСВ. Показательное (экспоненциальное) распределение. Графики функций $F(x; \lambda)$, $f(x; \lambda)$. Вероятный смысл параметра λ.

28. Закон распределения НСВ. Нормальное распределение. График функции $f(x;a;\sigma)$. Вероятностный смысл параметров a и σ.

29. Вероятность попадания нормально распределенной СВ в заданный интервал. Вероятность заданного отклонения.

30. Определение случайной функции. Закон распределения и математическое ожидание функции одного случайного аргумента.

31. Закон больших чисел в форме Чебышева. Значение теоремы Чебышева для практики.

32. Закон больших чисел в форме Бернулли и Пуассона.

33. Генеральная совокупность и выборка. Репрезентативность выборки. Основные способы отбора.

34. Графические средства изображения вариационных рядов – полигон и гистограмма.

35. Вариационный ряд. Статистическое распределение частот и относительных частот. Числовые характеристики вариационного ряда - мода, медиана, размах варьирования, среднее абсолютное отклонение, коэффициент вариации.

36. Генеральная и выборочная средние. Свойства.

37. Групповая и общая средние. Теорема о сложении.

38. Выборочная и генеральная дисперсии. Формула для вычисления дисперсии.

39. Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсия. Теорема о сложении дисперсий.

40. Эмпирическая функция распределения, ее основные свойства и график.

41. Обычные начальные и центральные эмпирические моменты.

42. Вариационный ряд. Условные варианты. Условные эмпирические моменты.
43. Метод произведений (случай равноотстоящих вариант).
44. Метод произведений (случай неравноотстоящих вариант).
45. Метод сумм (случай равноотстоящих вариант).
46. Метод сумм (случай неравноотстоящих вариант).
47. Статистическая оценка. Несмещенность, эффективность и состоятельность оценки.
48. Точечная оценка. Метод моментов точечного оценивания.
49. Точечная оценка. Метод максимального (наибольшего правдоподобия точечного оценивания).
50. Доверительный интервал. Построение доверительного интервала для параметра $\boldsymbol{a}$ нормального распределения.
51. Доверительный интервал. Построение доверительного интервала для параметра $\boldsymbol{\sigma}$ нормального распределения.
52. Статистическая оценка. Несмещенность, эффективность и состоятельность оценки.
53. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Определение формы связи. Уравнения регрессии. Основные положения корреляционного анализа.
54. Корреляционная зависимость. Отыскание уравнения прямой линии регрессии по не сгруппированным данным.
55. Корреляционная зависимость. Отыскание уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным.
56. Простейшие случаи криволинейной корреляции. Метод линеаризующих замен.
57. Выборочный коэффициент корреляции. Основные свойства $r_в$.
58. Выборочное корреляционное отношение. Основные свойства.
59. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы. Ошибки первого и второго рода.
60. Статистический критерий. Наблюдаемое и критическое значения критерия. Критическая область, область принятия гипотезы.

5. Интерактивные технологии, используемые в образовательном процессе.

Индивидуальные методы обучения применяются на практических занятиях при выполнении индивидуальных заданий, при подготовке рефератов, сообщений – темы 5,9.
Активные формы работы используются на практических (семинарских) занятиях:
- деловые игры: тема 4 – разработка группой студентов решения экономических задач..

Коллективные формы работы на занятиях способствуют овладению культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, формируют у обучающегося готовность к кооперации с коллегами, бесконфликтной работе в коллективе, готовность к организации и выполнению проектов в профессиональной деятельности.

6. Оценочные средства аттестации по итогам освоения дисциплины.

Результативность работы студентов обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает:
− устный или письменный опрос студентов на практических занятиях;
− проверку выполнения текущих заданий;
− самостоятельные работы;
− контрольные работы;
− выполнение и защита типовых расчетов (РГР);

− проведение коллоквиумов;
− зачеты и экзамены.
Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с краткого (10-15 мин.) опроса студентов по теоретическому материалу и выяснения вопросов по текущим заданиям. На лекциях и практических занятиях проводятся мини - контрольные работы. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами. Данная программа предусматривает проведение в течение семестра двух рубежных контрольных работ и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнением индивидуального задания осуществляется в два этапа:Проверка письменных отчётов;Защита задания в устной или письменной форме.

Выполнение каждого индивидуального задания требует не менее 10 часов самостоятельной работы студентов. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждым обучающимся, своевременного выявления и устранения отставаний и ошибок.
Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины.
Рефераты студенты выполняют по усмотрению преподавателя.
Студенты заочной формы обучения текущий контроль усвоения материала осуществляют самостоятельно по контрольным вопросам и заданиям для упражнений

6.1 **Положение о рейтинговой системе оценки успеваемости студентов кафедры общей математики и информатики**

Рейтинговая система оценки успеваемости студентов по кафедре ОМиИ является одной из форм контроля текущей успеваемости обучаемых. Она предусматривает еженедельный мониторинг и оценку в баллах учебной активности и уровня знаний по дисциплине.
1. По этой системе в баллах оценивается уровень следующих видов учебной деятельности студентов:
   - активность на практических занятиях;
   - экспресс тестирования на лекциях;
   - расчетно-графическая работа;
   - контрольная (самостоятельная) работа;
   - коллоквиум;
   - лабораторная работа.

Указанные виды учебной деятельности имеют следующее содержание.

Активность на практических занятиях. Оценивается учебная активность и самостоятельность работы студентов.

Экспресс-тестирование на лекциях. Систематически проводится на лекциях с целью проверки усвоения текущего теоретического материала. Заключается в ответе на один теоретический вопрос или решение одной простейшей задачи. Проводится письменно, как правило, в течение 5-6 минут.

Контрольная (самостоятельная) аудиторная работа. Проводится письменно, с целью оперативного контроля степени усвоения изученного материала, например, базовых положений отдельных дидактических единиц.

Расчетно-графическая работа. РГР содержит задачи, решение которых требует применения типового арсенала вычислительных приемов, усвоенных при изучении соответствующих дидактических единиц. РГР зависит от содержания и вычислительной сложности дидактической единицы.

С целью выявления качества усвоения изученного материала вводится процедура **«Защита РГР».**

Коллоквиум. проводится письменно, с целью доэкзаменационной оценки уровня теоретических знаний и практических навыков.

Лабораторная работа. Проводится по темам, требующим применения вычислительных методов.

2. Рейтинговая оценка студента по дисциплине складывается из оценки за работу в семестре максимально **60 баллов** и экзаменационной оценки – максимально **40 балов**. Таким образом, максимально возможное количество баллов, которыми оценивается успеваемость за семестр по дисциплинам кафедры ОМиИ, равно **100**.
3. При пропуске рейтингового теста или контрольной работы в течении семестра по документально подтвержденной уважительной причине студент имеет право написать их в дни консультаций преподавателя группы. В случае пропуска теста по неуважительной причине или при неудовлетворительной оценке за тест (менее половины от максимально возможного балла), переписывание теста возможно только в течение последней недели семестра (не более двух встреч с преподавателем на все тесты и контрольные работы). Баллы, полученные студентом в таком случае, учитываются с коэффициентом **0,8.**
4. Студент, активно участвовавший в учебном процессе (доклады, рефераты, выступления на олимпиадах и конференциях) может быть поощрен лектором потока или заведующим кафедрой дополнительными баллами (как правило, не более 5 баллов за семестр).
5. Минимальное количество баллов за работу в семестре, необходимое для получения студентом допуска на экзамен, равно **30** баллов (половина баллов от максимального балла за работу в семестре).

Минимальное количество баллов за выполнение экзаменационной работы, необходимое для получения оценки:

«удовлетворительно» **– 15 баллов**;

«хорошо» **– 20 баллов**;

«отлично» **– 30 баллов**.

6. В течении семестра студенты выполняют рейтинговые мероприятия (см. приложение).
7. Распределение модульных баллов:

Соответствие итогового рейтинга студента и традиционных оценок устанавливается по следующей шкале:

Баллы (%)	Оценка
0-50	Неудовлетворительно

51-75	Удовлетворительно
76-90	Хорошо
91-100	Отлично

8. Студент, набравший в семестре **менее 30 баллов**, сдает экзамен по дисциплине в два этапа: предварительный и основной.

8.1. **Предварительный этап экзамена**

Предварительный этап проходит в день сдачи экзамена своей группы. На нем студент выполняет практическое экзаменационное задание по материалу, изученному в семестре и вошедшему в тесты, контрольные и домашние работы по данной дисциплине. Это практическое задание оценивается в **20** баллов. Предварительный экзамен считается сданным при условии набора на нем **10 и более** баллов. Результат **сданного** предварительного экзамена **суммируется** с семестровым рейтингом, а студент со своим новым рейтингом допускается к основному экзамену. При наборе студентом на предварительном этапе менее **10 баллов** экзамен считается **не сданным** и его результат **не добавляется** в итоговый рейтинг. В любом из указанных случаев после предварительного этапа экзамена в ведомость студенту выставляется оценка «**Неудовлетворительно**», а в графу «Суммарный балл» проставляется рейтинг с учетом результата предварительного экзамена.

8.2. **Основной этап экзамена**

Для студентов, успешно сдавших предварительный экзамен, основной экзамен проводиться в установленный на кафедре день пересдач.

Как исключение, студент, имевший семестровый рейтинг **в диапазоне от 20 до 30 баллов** и успешно сдавший предварительный этап экзамена (т.е. набравший на нем 10 баллов и более), с разрешения ответственного экзаменатора, назначенного на экзамен, может быть допущен к основному экзамену в день сдачи предварительного экзамена (т.е. со своей группой).

Студенты, имеющее семестровый рейтинг **в диапазоне от 10 до 20 баллов** и успешно преодолевшие предварительный этап (10 баллов и более), сдают основной экзамен только в день пересдач.

Студенты, набравшие в семестре **менее 10 баллов** и успешно прошедшие предварительный этап экзамена, допускается к сдаче основного экзамена **только по назначению заведующего кафедрой или заместителя по учебной работе**.

Замечание. Руководству кафедры сдаются экзаменационные работы:

- предварительного экзамена (10 и более баллов) – в день его сдачи студентом;
- основного экзамена (для прошедших предварительный экзамен) – в день основного экзамена.

9. Для дисциплин с зачетом:

9.1. Минимальное значение рейтинговой оценки, набранной студентом по результатам текущего контроля по всем видам занятий, при которой студент допускается к сдаче зачета, составляет **40 баллов**.

9.2. Если к моменту проведения зачета студент набирает 51 и более баллов, они могут быть выставлены ему в виде поощрения в ведомость и в зачетную книжку без процедуры принятия зачета. Выставление баллов производится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплине.

9.3. Устранение задолженности студента по отдельным контролируемым темам дисциплины может проходить в течение семестра в часы дополнительных занятий или консультаций, установленных в расписании.

9.4. Устранение задолженности по текущему контролю для допуска студента к зачету проводится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплин

6. 2 Формы контроля по разделам программы представлены в таблице

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
Ш семестр

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4	
	Вид работы	Случайные события	Случайные величины	Математическая статистика	Итоговая работа	$\sum$
1	Контрольная работа	5	5		5	15
2	Тест	5	5	5		15
3	Расчетно-графическая работа	5	5	5		15
4	Коллоквиум	5				5
5	Домашние задания	5	5			10

Всего. 60

Коллоквиум	Оценка контрольных работа	Тест 25 заданий	Расчетно-графическая работа
«3» − 3 б	«3» − 3 б	9 – 12 – 2 б	Сдача в срок − 2 б
«4» − 4 б	«4» − 4 б	13 – 19 − 3 б	Защита: «3» − 1 б
«5» − 5 б	«5» − 5 б	20 – 22 − 4 б	«4» − 2 б
		23− 25 − 5 б	«5» − 3 б

7. Учебно - методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература:

1. Андронов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. / А. М. Андронов, Е.А. Копытов, Л.Я. Гринглаз. - СПб. : Питер , 2004. - 461 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: Учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / В.Е. Гмурман. - М. : Высш. шк., 2003, 2005, 2006,2009 - 480 с.
3. Красс, М. С. Математика для экономистов [Текст]: учеб. пособие: рек. УМО / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.:Питер, 2005, 2006, 2008, 2009, 2010. - 464 с.

Дополнительная литература:

2. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. : рек. Мин. обр. РФ / Н. Ш. Кремер. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004, 2006 . - 574 с.
3. Бочаров, П.П. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. - М. : Физматлит, 2005. - 296 с.
1. Высшая математика в упражнениях и задачах. [Текст]: учебное пособ: В2ч/П.Е. Данко [и др.]. -7-е изд испр. −М.; Оникс: Мир и Образование, 2008.ч. 1−2008.−368с.
4. Кочетков, Е.С. Теория вероятностей в задачах и примерах [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская. - М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2005. - 480 с.
5. Соколов, Г.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО / Г. А. Соколов, Н. А. Чистякова. - М. : Физматлит, 2005. - 247 с.
6. Шведов, А.С. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : [учеб. пособие] / А. С. Шведов. - М. : ГУ ВШЭ, 2005. - 254 с.
7. Семенчин, Е.А. Теория вероятностей в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО / Е. А. Семенчин. - СПб. : Лань, 2007. - 352 с.
8. Большакова, Л.В. Теория вероятностей для экономистов [Текст] : учеб. пособие : рек. УМО / Л.В. Большакова. - М.: Финансы и статистика, 2009. - 208 с.
9. Боровков, А.А. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие : рек. УМО / А.А. Боровков. - М. :Либроком, 2009. - 652 с.
10. Балдин, К.В. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - М. : Дашков и К, 2010. - 473 с.
11. Хрущева, И.В. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие / И. В. Хрущева. - СПб. : Лань, 2009. - 300 с.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http:// iqlib.ru	Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам, отдельным темам и отраслям знаний.
2	Электронная библиотечная система «Университетская библиотека - online»	ЭБС по тематике охватывает всю область гуманитарных знаний и предназначена для использования в процессе обучения в высшей школе.

8. Материально – техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием

Содержание