Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«Адаптивный курс математики»

По направлению 080100. 62- Экономика

Квалификация (степень) выпускника «Бакалавр»

профили: «Мировая Экономика»,

«Финансы и кредит»,

«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,

«Налоги и налогообложение»,

«Экономика и организация»

Благовещенск 2012

УМКД разработан доцентом Кафедры ОМ и И

Вохминцевой Галины Павловны

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от «_____» ________________2012 г. № _____

Зав. кафедрой _______________________/ Г. В. Литовка /

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМСС ____
от «____» _________________ 2012 г. №______

Председатель УМСС _______________/ Ковшун Ю. А.

1. Рабочая программа учебной дисциплины.

1. 1. Цели и задачи освоения дисциплины

Цель дисциплины: получение фундаментального образования, соответствующего развитию личности; формирование у студентов практических навыков использования необходимого математического аппарата, воспитание у студентов информационной культуры и обучение теоретическим основам математики.

Задачи дисциплины:

– развитие логического и алгоритмического мышления студента;
– углубление курса элементарной математики.

1. 2. Место дисциплины в структуре ооп впо.

Предлагаемая дисциплина относится к базовой части математического и естественно-научного цикла ООП.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы базовые знания разделов «Математика» в объеме средней общеобразовательной школы.

1.3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1) Знать: основные понятия и инструменты алгебры и геометрии, математического анализа.

2) Уметь: решать типовые задачи по математике.

3) Владеть: базовыми знаниями по математике необходимыми для дальнейшего изучения дисциплин.

В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие общеобразовательные компетенции:

– владеть методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-15);

– пониманием роли и значения информации в развитии современного общества и экономических знаний (ОК-16).

1. 4. Структура и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (*по неделям семестра*) Форма промежуточной аттестации (*по семестрам*)
				Лекции	Практические работы	Самостоятельная работа	
1	Основные элементарные функции и их графики	1	1	2		2	
2	Степени и корни	1	2		2	2	
3	Многочлены и действия над ними	1	3		2	2	контрольная работа
4	Разложение многочленов на множители. Действмя с алгебраическими дробями	1	4		2	2	контрольная работа
5	Алгебраические уравнения, неравенства и системы	1	5-6	2	2	4	
	Геометрический смысл квадратного трех члена. График дробно- линейной функции.	1	7	2		4	
6	Показательная и логарифмическая функция	1	8-9	2	2	4	
7	Тригонометрия	1	10-11	2	2	2	
8	Предел функции. Раскрытие неопределенностей.	1	12	2		4	контрольная работа
	Производные элементарных функций	1	13-15	2	4	4	

9	Приложения. производной к исследованию функции построению графиков.	1	16-17	2	2	4	контрольная работа
	Числовые последовательности.	1	18	2		2	
	ИТОГО			18	18	36	Зачет

1. 5. Содержание разделов и тем дисциплины.

№ п/п	Наименование темы	Содержание темы
1	Основные элементарные функции и их графики	Определение функции, области определения и значений, четности, нечетности. Графики функции. Преобразование графиков
2	Преобразование алгебраических выражений	Алгебраические преобразования. Одночлены и многочлены, действия над ними формулы сокращённого умножения и деления. Деление многочленов. Разложение многочленов на множители. Тождественное преобразование алгебраических выражений.
3	Алгебраические уравнения и системы	Общие понятия. ОДЗ. Линейное уравнение, системы линейных уравнений. Квадратные уравнения. Геометрическая интерпретация. Теорема Виета. Биквадратные уравнения Иррациональные уравнения. Системы уравнений.
4	Неравенства	Свойства числовых неравенств. Действия над неравенствами. Доказательство числовых неравенств. Линейные неравенства и сводящиеся к ним. Графическое решение неравенств. Квадратные неравенства и сводящиеся к ним. Метод интервалов. Иррациональные неравенства.
5	Тригонометрия	Свойства тригонометрических функций, графики. Основные тригонометрические формулы. Тригонометрические тождества. Тригонометрические уравнения и неравенства.
6	Показательная и логарифмическая функция	Решение показательных уравнений. Логарифм числа. Действия над логарифмами.
7	Предел функции. Раскрытие неопделенностей.	Определение предела функции. Неопределенность вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, (\infty-\infty)$.
8	Производная функции и некоторые её приложения	Определение производной, геометрический и физический смысл производной. Некоторые правила и формулы дифференцирования. Максимум, минимум функции. Наибольшее, наименьшее значение функции на отрезке.
9	Числовые последовательности	Арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия и бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

1.6 Матрица компетенций учебной дисциплины

Раздел дисцип-	ИТОГО		
лины	ОК-15	ОК-16	
Раздел 1	+		1
Раздел 2	+		1
Раздел 3	+		1
Раздел 4	+		1
Раздел 5	+		1
Раздел 6	+		1
Раздел 7	+		1
Раздел 8	+	+	2
Раздел 9	+	+	2

2. Краткое изложение программного материала.

2. 1. Тематический план лекций (18 часов).

ТЕМА 1. Основные элементарные функции и их графики (2 часа).

План:
1. Определение функции. Область определения и значений.
2. Четность и нечетность функции.
3. Графики основных элементарных функций. Преобразование графиков.

Цель: Сформировать понятие функции, её области определения, значений, свойства.

Задачи:
1. Научить находить область определения и значения функции.
2. Определять четность функции.
3. Научить строить графики основных элементарных функций.

Ключевые вопросы.
1. Дайте определение функции, её области определения и значений.
2. Какая функция называется четной, нечетной, общего вида. Графики четных и нечетных функций.
3. Постройте графики функций: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = x^3$; г) $y = a^x$; д) $y = sinx$; е) $y = cosx$; ж) $y = tgx$; з) $y = arcsinx$; и) $y = arctgx$.

1. Основные понятия функции.

Пусть дано некоторое числовое множество X и указан закон f, по которому **каждому числу x**$\in$ X ставится в соответствие **единственное число y**.Тогда говорят, что задана **функция y=f(x)** с областью определения X и обозначают **y=f(x), x**$\in$ **X.**

Множество Y всех значений y, для каждого из которых существует, по крайней мере, одно число x из X такое, что **y=f(x) называется областью изменения (или областью значений) функции.**

Если функция задана формулой, то говорят, что она задана **аналитически**.

Например, каждая из следующих функций:

1) y= x^2, x$\in [0;\infty]$;   2) y=$\begin{cases} x, \text{ если } x \le 0, \\ x^2 - 4x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$ 3) y=$\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$, x$\in R$, задана аналитически.

Если область определения функции y=f(x) не указана, то функция считается заданной на её естественной области определения, называемой областью её существования,

Например: а) для функции y=$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, естественная область, определения, есть множество действительных чисел, для которых $\varphi(x) \ne 0$.

б) y=$\sqrt{f(x)}$, f(x)≥ 0;

в) y=$\log_a f(x)$, a>0 , $a \ne 1$, f(x)>0.

Пример 1. Найти область определения функции y=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Область существования данной функции состоит из всех чисел x, для которых выражение $\sqrt{1-x^2}$ имеет смысл и возможно деление на $\sqrt{1-x^2}$,

т.е. 1-x^2>0, x^2-1<0, $|x|$<1, -1<x<1. Следовательно, областью определения данной функции является интервал (-1;1).

Значение функции **y=f(x)**, x$\in X$, при x=x_0, где $x_0 \in X$ обозначается символом $y_0 = f(x_0)$ и называется её частным значением.

Число x_0 из области существования функции **y=f(x)** называется **нулём функции**, если $f(x_0) = 0$.

Пример 2. Найти нули функции y=$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2}$.

Решение. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т.е. $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, но x^2+x-2$\ne$ 0, x=-2, x$\ne$1, тогда x= -2 -посторонний корень.

Ответ: x=2.

2. Некоторые классы элементарных функций.

1) Многочленом степени n называется функция вида:

f(x)=$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \ne 0$, где $a_0, a_1, \ldots a_n$ - постоянные коэффициенты, n$\in$ N.

2) Отношение двух многочленов, т.е. функция вида:

f(x)=$\dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$,называется **рациональной функцией**.

Так, например, функции: f(x)=ax+b – линейная функция;

f(x)=ax^2+bx+c – квадратичная функция; f(x)=$\dfrac{x-1}{3x^2+4x}$ - рациональная функция.

3) **Степенная функция.**

Функция вида: f(x)= x^2, где α - действительное число, называется **степенной функцией**.

При α целом значении f(x) – рациональная функция.

При α дробном – y=$\sqrt[n]{f(x)}$ - иррациональная функция.

Например, y=$\sqrt{x}$, y=$\sqrt[3]{x^2}$, y=$\sqrt[5]{x^2-4}$.

4) **Показательная функция.** Функция вида f(x)=a^x, где a>0, a$\neq 1$.

Например, f(x)=10^x, f(x)=e^x, f(x)= $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, f(x)=$\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^x$.

5) **Логарифмическая функция.** Функция вида f(x)= $\log_a x$, a>0 , a$\neq 1$.

Например, f(x)=lnx – натуральный логарифм с основанием e, e$\approx$2,718…

6)**Тригонометрические функции**:

f(x)=sinx, f(x)=cosx, f(x)=tgx, f(x)=ctgx.

7)**Обратные тригонометрические функции.**

f(x)=arcsinx, f(x)=arccosx, f(x)=arctgx, f(x)=arcctgx.

8) Сложная функция.

Пусть даны две функции y=f(φ) и U=φ(x).

Функция y= $f\left[\varphi(x)\right]$ называется сложной функцией, U – промежуточный аргументом.

Например, y=lnU, где U=sinx, тогда y=lnsinx – сложная функция.

9) Обратная функция.

Имеем функцию y=f(x), x$\in$ X.

Переменной y будем придавать различное значение, и находить соответствующие значения **X**. Получим функцию X=$\varphi(y)$, которая называется обратной функцией.

Но функцию принято обозначать буквой **y**, а независимую переменную буквой **X**.

Переобозначим. Функция y=φ(x) – обратная функция, относительно функции y=f(x).

Графики исходной функции y=f(x) и обратной функции y=φ(x) симметричны относительно прямой y=x – биссектрисы 1 и 3 координатных углов.

Пример. Для заданной функции y=$\dfrac{x}{x+1}$ найти обратную.

Решение. Заменим в данной функции переменные x на y, а y на x, получим x=$\dfrac{y}{y+1}$. Решим уравнение относительно y, т.е. y=$\dfrac{x}{x-1}$ - в результате получим обратную функцию.

10) Четные и нечетные функции.

Функция y=f(x) называется чётной, если:

1)Она задана на интервале, симметричном относительно начала координат.

2)При замене x на (-x) значение функции не меняется, т.е. f(-x)=f(x).

Примеры чётных функций:

y=x^2, y=x^4, y=$\dfrac{x^4}{1+x^2}$, y=$2^{|x|}-|\sin x|$, y=cosx, y=$\sqrt{x^2-1}$,

y=$\sqrt{4-x^2}$+arccos$\dfrac{1}{x^2}$, x$\in[-\pi;\pi]$.

Функция y=f(x) называется нечётной, если:

1)Она задана на интервале, симметричном относительно начала координат.

2)При замене x на (-x) значение функции меняется на противоположное, т.е. f(- x)= $-f$(x).

Примеры нечётных функций:

y=x^3, y=sinx, y=$\dfrac{x}{1+x^2}$, y=$\sqrt[3]{x}$, y=$\dfrac{1}{x}$, y=$x\sqrt{x^2-9}$, y=arcsin$\dfrac{4}{x}$.

График чётной функции симметричен оси oy.

График нечётной функции симметричен началу координат.

Функцию, не обладающую свойством чётности, называют **функцией общего вида**.

3. Решения типовых заданий

1) Найти линейную функцию *f(x),* если *f*(-4)=6, *f*(4)=4.

Решение. Пусть *f(x)*=k*x*+b. Тогда, согласно условию задачи получаем систему двух уравнений относительно двух неизвестных k и b:

$$\begin{cases} 6=-4k+b, \\ 4=\ \ 4k+b. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получим 10 = 2b, или b = 5. Вычитая из первого уравнения системы второе, получим k= $-\dfrac{1}{4}$

Таким образом, $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+5.$

Задания для самостоятельной работы.

Найти линейную функцию *f(x)*, если:

1) f(-2)=10, f(1)=-5; 2) f(-10)=-2, f(5)=1;

3) f(-2)=-5, f(2)=-3; 4) f(-3)=3, f(0)=0.

2. Найти квадратичную функцию *f(x)*, если :

1) f(-1)=-1, f(3)=-3, f(6)=12.

2) f(-1)=3, f(1)=3, f(2)=12.

3) f(-2)=9, f(1)=3, f(3)=19.

3. Найти область определения функции:

1) f(x)= $\sqrt{3x^2+5-2}$; 2) f(x)= $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-4}$; 3) f(x)= $\frac{x}{x^2+3x-4}$;

4) f(x)= $log_2(4-x)-log_2(x+7)$;

5) f(x)= $\sqrt{log_5\frac{1-2x}{x+3}}$; 6) f(x)= $\sqrt{-x}+\frac{4}{\sqrt{x+3}}$.

4. Дана функция *y(x)*= $\frac{x}{x+1}$. Найти: *1) y(-x); 2)* $\frac{1}{y(x)}$; *3) y=(2x);*

4) 2y(x); 5) y(1-x).

5. Найти функцию обратную к функции *y=f(x), x* ∈ *X* если:

а) y= $\sqrt{2-x}$ *; б) y=* $\frac{3x}{x+2}$; *в) y=* 3^{2x}; *г) y=* $\log_5 x$.

6. Найти *y(2); y(-2); y(0); y(1); y(-3)*

Если y (x) = $\begin{cases} 2^x, & если\ \ x<0; \\ 5, & если\ \ x=0; \\ 2+x, & если\ \ x>0. \end{cases}$

7. Построить график функции

1. y (x) = $\begin{cases} -2, & если\ \ x<0; \\ 3, & если\ \ x=0; \\ 1, & если\ \ x>0. \end{cases}$ 2. y (x) = $\begin{cases} x, & если\ \ x<0; \\ x^2, & если\ 0\le x\le 1; \\ x-3, & если\ \ x>1. \end{cases}$

Выводы.

1. Сформировано понятие функции, области её определения и значений, четности, нечетности.
2. Приобретены новые навыки построения графиков функций методом параллельного переноса системы координат.

Литература. (1. глава 1; 2.глава 5)

ТЕМА 2. Предел функции. Раскрытие неопределенностей (2 часа).

План: 1. Определение предела функции

2. Теоремы о пределах.

3. Раскрытие неопределенностей. $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ и $(\infty-\infty)$ для случая дробно-рациональной функции.

Цель: Ознакомление с понятием предела функции..

Задачи: 1. .Научить вычислять предел функции и раскрывать неопределенные выражения $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ и $(\infty-\infty)$.

Контрольные вопросы.

1. Определение предела функции.
2. Записать теоремы о пределах.
3. Пояснить раскрытие неопределенных выражений $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ и $(\infty-\infty)$.

Предел функции

Число *a* называется пределом функции **y=*f*(*x*)** при $x \to x_0$, если для всех *x* достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции сколь угодно мало отличаются от числа *a*. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

Теоремы о пределах.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, где C = const.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) * \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) * \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} c * f(x) = C * \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$.

6. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$.

Для отыскания предела функции при $x \to x_0$ достаточно вместо x подставить предельное значение x_0 и вычислить.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4x+5}{x^2+4}=\frac{17}{8}$.

Пример2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\frac{0}{0}$.

Говорят, что $\frac{0}{0}$ –неопределенное выражение или просто неопределенность.

Существуют и другие неопределенности: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $(\infty-\infty)$.

В этих случаях теоремы о пределах не применимы.

А) При раскрытии неопределенности $\frac{0}{0}$, если имеются многочлены, надо многочлены разложить на множители и сократить на (x-x_0) или просто разделить числитель и знаменатель на (x-x_0). Затем вычислить при x=x_0.

Возвратимся к примеру 2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{3+1}{3+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

В) Если в числителе или знаменателе имеются иррациональные выражения, то избавляются от иррациональностей, используя формулы сокращенного умножения

$$(a - b)(a + b)= a^2-b^2$$

Пример3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$
$$=\frac{1}{4*2}=\frac{1}{8}$$

С) Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ надо числитель и знаменатель разделить на x^n, где n наивысшая степень многочленов.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+5}{x^3+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$(разделим на x^3)= $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}$

$=\frac{0}{1}=0$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+5}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$(разделим на x^2)=

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty$.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+2x+5}{2x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$(разделим на x^2)=

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{6}{2}=3.$

Правило раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\frac{\infty}{\infty}=\begin{cases}0, & при \quad n<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n=m,\\ \infty, & при \quad n>m.\end{cases}$$

Д) Раскрытие неопределенности $(\infty-\infty)$.

Пример 7. Вычислить

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+4})=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+4})(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+4})}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x+4}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-5-x-4}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x+4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x+4}}=-\frac{9}{\infty}=0.$

Пример 8. Вычислить

$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x^2-4}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2(x+2)-2}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+4}{(x-2)(x+2)}==$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{x-2}=\frac{2}{0}=\infty.$

Задания для самостоятельной работы.

1 Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$;
2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$;
3. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$;
4. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2+x-6}{x^2-9}$;
5. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2-x-3}{3x^2+4x+1}$;
6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;
7. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$;
8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$;
9. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;
10. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{x^2-5x}$.

2 Вычислить пределы функций .

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+2x+1}{2x^2+3x+4}$;
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+3}{3x^2+x+4}$;
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3+2x+1}{x^2-3x}$;
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x}}{2x}$;
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-1}{4x+3}$;
6. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+4x}-x)$;
7. $\lim\limits_{ч \to 2} \left(\frac{2}{4x-2} - \frac{3x+2}{x^2} \right)$;
8. $\lim\limits_{ч \to 1} \left(\frac{3x}{x^2-1} - \frac{4}{x-1} \right)$;
9. $\lim\limits_{ч \to \infty} \left(\sqrt{x^4-4x+1} - \sqrt{x^4-2x^2+3} \right)$;
10. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$.

Литература. (1. глава 6; 2. глава 3)

ТЕМА 3. Алгебраические уравнения и системы уравнений (2часа).

План:

1. Понятие линии на плоскости.
2. Линейные уравнения.
3. Квадратные уравнения. Решение квадратных уравнений. Свойства дискриминанта. Теория Виета.
4. Геометрический смысл квадратного трехчлена.

5. Решение биквадратных уравнений.
6. Решение иррациональных уравнений.
7. Системы линейных и квадратных уравнений. Методы их решений.

Цель: 1. Сформировать понятие о дискриминанте квадратного уравнения, его свойствах.
2. Ознакомить с различными способами решения систем уравнений.

Задачи: Научить решать квадратные, биквадратные, иррациональные уравнения и системы.

Ключевые вопросы.

1. Определение линии на плоскости.
2. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом и проходящей через две точки.
3. Построить прямую.
4. Найти точку пересечения двух линий.
5. Дать определение уравнения второго порядка и его дискриминанта.
6. Указать знак дискриминанта , если уравнение имеет:
   - два различных действительных корня;
   - два кратных корня;
   - два комплексных корня.
7. В чем заключается смысл квадратного трехчлена. Как построить график квадратного трехчлена.

8. Решение уравнений заменой неизвестного.
9. Решение иррациональных уравнений.
10. Решение систем линейных и квадратных уравнений.

Уравнение линии

Уравнение $F(x;y)=0$ называется общим уравнением линии L на плоскости, если ему удовлетворяют координаты $(x;y)$ любой точки, лежащей на этой линии, а координаты точек, не лежащих на линии L, не удовлетворяют данному уравнению.

Уравнение прямой на плоскости

Уравнение первой степени $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$, называется общим уравнением прямой на плоскости.

При различных значениях коэффициентов A, B и C возможны следующие частные случаи:

$C=0, A\neq 0, B\neq 0$ $\{Ax+By=0\}$ – прямая проходит через начало координат;

$A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0\ \{By+C=0\}$ – прямая параллельна оси Ox;

$B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0\ \{Ax+C=0\}$ – прямая параллельна оси Oy;

$B=C=0,\quad A\neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy;

$A=C=0,\quad B\neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox.

Из уравнения $Ax+By+C=0$ выразим y, получим $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$.

Обозначим k=$-\frac{A}{B}$ угловой коэффициент прямой, $-\frac{C}{B}=b$, тогда получим

$y=\kappa x+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k, где $\kappa=-\frac{A}{B}=tg\varphi$

(φ – угол между осью Ox и прямой), b- отрезок, отсекаемый на оси оу.

Пример 1 . Составить уравнение прямой, отсекающей на оси оу отрезок b=$\frac{2}{3}$ и составляющей с осью ох угол 45%.

Решение. По условию задачи k = tg45% = 1, тогда из уравнения прямой можно записать у = х +$\frac{2}{3}$ или, приводя к общему знаменателю получим 3х - 3у + 2 = 0.

Пример 2. Построить прямую 2х - 3у =6 .

Найдем две точки лежащие на прямой. Пусть х=0, тогда - 3у =6, у=-2.

Пусть у=0, тогда 2х =6, х=3. Через точки (3; 0) и (0; -2) проводим прямую.

Задания для самостоятельной работы.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(4; -3) с угловым коэффициентом k= $\frac{2}{3}$.

Построить прямые.

1) -2х - 3у =12;	2) 3у - 4=0;	3) 2х - 3у =0;	4) -2х +у =6;
5) 2х =- 6;	6) 3у =6;	7) х=0;	8) у=0.

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним.
Теорема Виета.

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0;\quad a\neq 0$; a, b, c- действительные числа, х- неизвестная переменная. $D=b^2-4ac$ -дискриминант.

1) Если D = 0, то $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ - уравнение имеет два кратных (равных корня).

Геометрически парабола касается оси ох в одной точке А($-\frac{b}{2a}$; 0).

2) Если D > 0, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ - уравнение имеет два различных действительных корня. Геометрически парабола пересекает ось ох в двух точках.

3) Если D < 0, то $x_{1,2}$ - уравнение имеет комплексные корни, т. е. в области действительных чисел решений не имеет. Геометрически парабола не пересекает оси ох..

4) Если b=0, $c \neq 0$, то $ax^2 + c = 0$ неполное квадратное уравнения, тогда $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, где a и c- разных знаков.

5) Если $b \neq 0$, c=0, то $ax^2 + bx = 0$ неполное квадратное уравнения, тогда,

$$x(ax+b) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

6) Теорема Виета.

Имеем приведенное квадратное уравнение (a=1).

$x^2 + px + q = 0$, тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$, где x_1, x_2 корни квадратного уравнения.

7) Разложение квадратного трехчлена на множители:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ где x_1, x_2 корни квадратного уравнения.

Задания для самостоятельной работы.

1. Решить квадратные уравнения.

1. $x^2 - 3x = 0$;
2. $x^2 + 49 = 0$;
3. $5x^2 = 8x$;
4. $3x^2 - 5x + 2 = 0$;
5. $2x^2 + x - 3 = 0$;
6. $4x^2 + x - 3 = 0$;
7. $-2x^2 + 7x = 0$;
8. $x^2 - 9 = 0$;
9. $x^2 + 25 = 0$;
10. $x^2 + 4x - 2 = 0$;
11. $(3x-1)(x+2) = 20$;
12. $(x-4)(4x-3) + 3 = 20$;
13. $x^2 - 8x - 20 = 0$;
14. $x^2 + 12x - 64 = 0$;
15. $x^2 - 4x = 45$;
16. $x^2 + 12x + 35 = 0$;
17. $x^2 + 14x + 24 = 0$;
18. $x^2 + 1 = 0$;
19. $x^2 - 11ax - 60a^2 = 0$;
20. $x + \dfrac{1}{x} = 2{,}5$;
21. $4x^2 - 25 = 0$.

2. Разложить квадратный трехчлена на множители.

1. $y = 30x^2 + 37x + 10$; 2. $y = x^2 + 7x + 10$; 3. $y = 2x^2 - ax - a^2$;

4. $y = x^2 - 6ax + 5a^2$ 5. $y = x^2 - 5x + 6$; 6. $y = x^2 + 4x + 4$.

3. Сократить дроби.

1. $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + 8x + 16}$; 2. $\dfrac{4m^2 + 12m + 9}{2m^2 - m - 6}$;

3. $\dfrac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 2a - 8}$; 4. $\dfrac{5a^2 - a - 4}{a^3 - 1}$.

4. Решить уравнения, приводя дроби к общему знаменателю.

1. $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{3(x-1)}{2x+2} = \dfrac{2(x^2+4)}{x^2-1}$; 2. $\dfrac{x}{x-5} + \dfrac{35}{x-2} = \dfrac{15}{x^2 - 7x + 10}$.

5. Решить уравнения заменой переменного.

1. $x^4 - 13x + 36 = 0$; 2. $x^4 - 4x^2 = 0$;

3. $(x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) - 5 = 0$; 4. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$;

5. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{10}{9}$; 6. $\dfrac{x^2 + x - 5}{x} + \dfrac{3x}{x^2 + x - 5} = 4$;

7. $x^4 - 81 = 0$; 8. $x^3 + 6x^2 - 9x - 54 = 0$.

Выводы.

1. Усвоены основные понятия линии на плоскости. Записи его уравнения.
2. Приобретены навыки решения квадратных, биквадратных, иррациональных уравнений и их систем.
3. Усвоены приемы построения прямой, графика квадратного трехчлена.

Литература. (1. глава 3; 2. глава 4)

ТЕМА 4. Геометрический смысл квадратного трехчлена. График дробно- линейной функции (2часа).

План: 1. Определение квадратного трехчлена

2. График дробно- линейной функции.

Цель: 2. Ознакомление с понятием квадратного трехчлена и дробно- линейной функции

Задачи: Научить строить график квадратного трехчлена несколькими способами.

Научить строить график гиперболы (график дробно- линейной функции)

Ключевые вопросы.

1. Записать квадратный трехчлен.
2. Как найти корни квадратного трехчлена.
3. Как построить параболу.
4. Как выполнить деление многочленов.
5. Как построить график дробно- линейной функции.

Геометрический смысл квадратного трехчлена.

Функция вида y = ax^2+bx+c , где $a\neq 0$, *a*, b, c- коэффициенты (действительные числа) называется квадратичной функцией $x\in(-\infty;\infty)$.

Для построения графика функции y = ax^2+bx+c выделим полный квадрат по переменной x. $y=a(x-x_0)^2+y_0$ или $y-y_0=a(x-x_0)^2$ - парабола со смещенной вершиной $C(x_0;y_o)$.

Если *a>0*, то ветви параболы направлены вверх,

Если *a<0*, то ветви параболы направлены вниз.

Пример. Построить параболу y = $4x^2-4x+3$.

Решение. Выделим полный квадрат.

$x^2-4x+3=(x^2-4x+4)+3-1=(x-2)^2+2$, получим

y − 2= $(x-2)^2$, вершина параболы в точке $C(2;2)$, ветви направлены вверх.

Построить графики функций.

1. y = x^2; 2. y = x^2; 3. y = $(x-2)^2$;

4. y-1 = $(x-3)^2$; 5. y =2$(x-2)^2$ -1; 6. y = – $(x+1)^2$;

7. y = $-x^2-2x+3$; 8. y = $4x^2-4x+3$; 9. y+2 = $(x+3)^2$;

10. y = $x^2-2|x|+3$; 11. $y=|x^2+x|$; 12. $y=|x^2-4x+3|$.

График дробно – линейной функции.

Дробно – линейной функцией называется функция вида

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \text{ где } \quad x\neq\frac{-d}{c}.$$

Для построения графика функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ выделяют целую часть из дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ делением числителя на знаменатель, затем функцию $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ приводят к виду

$y-y_0=\pm\frac{\kappa}{c(x-x_0)}$, где $C(x_0;y_o)$- центр симметрии.

Пример. Построить график функций $y=\frac{2x+1}{2x+4}$.

Решение. Выполним преобразования

$$\frac{2x+1}{2x+4}=\frac{2x+4-3}{2x+4}=\frac{2x+4}{2x+4}-\frac{3}{2(x+2)}=1-\frac{3}{2(x+2)},$$

$y=1-\frac{3}{2(x+2)}$, $\quad y-1=-\frac{3}{2(x+2)}$, где $C(-2;1)$- центр симметрии.

Получим график обратной пропорциональной зависимости (гиперболы), расположенной во II и IV четвертях

Задания для самостоятельной работы.

Построить графики функций.

1. $y=\frac{2}{x}$; 2. $y=-\frac{3}{x}$; 3. $y=\frac{2}{x+3}$;

4. $y-2=\frac{-3}{x-1}$; 5. $y=\frac{3x+2}{3x-1}$; 6. $y=\frac{-2x+1}{2x+3}$;

7. $yx=2$; 8. $yx=-1$; 9. $y=\frac{2x}{x+1}$.

Выводы.

1. Приобретены навыки в решения линейных, квадратных, иррациональных уравнений;
2. Построения параболы и гиперболы со смещенным центром симметрии.

Литература. (1. глава 3; 2. глава 4; 3. глава 1)

ТЕМА 5. Показательная и логарифмическая функции (2часа).

План: 1. Определение показательной функции. Её графики при $a>1$, $0<a<1$, свойства функции.

2. Решение показательных уравнений и неравенств.
3. Определение логарифма числа.
4. Определение логарифмической функции, её графики.
5. Свойства логарифмов.
6. Решение логарифмических уравнений.
7. Решение логарифмических неравенств.

Цель: Ознакомление с показательными и логарифмическими функциями, их графиками и свойствами.

Задачи: Научить решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Ключевые вопросы.

1. Дайте определение показательной функции, укажите значение параметра *a*, области определения и значений данной функции. Перечислите свойства показательной функции.
2. Запишите простейшее показательное уравнение и его решение.
3. Дайте определение логарифмической функции, укажите значение параметра *a*, область определений и значений функции.
4. Перечислите свойства логарифмов.
5. Укажите методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Логарифмические уравнения и неравенства

Определение. Логарифмом числа N по основанию *a* называется показатель степени b, в которую надо возвести основание, чтобы получить число N.

Обозначение: $\log_a N = b$, где $a>0$, $a \neq 1$.

Из определения логарифма следует, что $a^b = N$ или

$a^{\log_a N} = N$ – основное логарифмическое тождество.

Основные свойства логарифмов.

Пусть $a>0$, $a \neq 1$, $N_1>0$, $N_2>0$, $N>0$, тогда

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2$;

$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$; $\log_a N^k = k \cdot \log_a N$;

$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$; $c>0$, $c \neq 1$ – формула перехода к новому основанию.

Логарифмическая функция и ее график

Функция $y = \log_a x$, где $a>0$, $a \neq 1$ называется логарифмической функцией.

1. Функция $y = \log_a x$ определена при $0 < x < \infty$, множество значений функции $-\infty < y < \infty$.

2. Функция $y = \log_a x$ – возрастающая при $a>1$ и убывающая при $0 < a < 1$.

Примеры. Вычислить значений логарифмических выражений

1. $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5\log_3 3 = 5$.

2. $\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 4^{-3} = -3\log_4 4 = -3$.

3. $\log_{32} 64 = \log_{2^5} 2^6 = \frac{6}{5}$.

4. $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\log_3 3^{-\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = \log_3 3^{-3} = -3$.

5. $3\log_4 \sqrt[6]{16} = \log_4 16^{\frac{3}{6}} = \log_4 16^{\frac{1}{2}} = \log_4 4 = 1$.

Преобразование логарифмических выражений.

1. Вычислить

$$\log_2 12 - \log_2 15 + \log_2 20 = \log_2 \frac{12 \cdot 20}{15} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$$

2. Вычислить

$$2\log_{\frac{1}{5}} 10 - \log_{\frac{1}{5}} 28 + \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{49} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{100 \cdot 7}{28} = \log_{\frac{1}{5}} 5^2 = -2.$$

Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a N} = N$.

1. Вычислить $9^{2\log_3 5} = 3^{2\cdot 2\log_3 5} = 3^{\log_3 5^4} = 5^4 = 625$.

2 Вычислить $10^{3-2\lg 5}=\dfrac{10^3}{10^{2\lg 5}}=\dfrac{10^3}{10^{\lg 25}}=\dfrac{1000}{25}=40$.

Логарифмические уравнения

Логарифмическим называется уравнение, которое содержит неизвестную под знаком логарифма.

Основным методом решения логарифмических уравнений является потенцирование. $\log_a X=\log_a N$, откуда $X=N$.

При потенцировании возможно появление посторонних корней. В этом случае необходимо сделать проверку или установить соответствие полученных корней ОДЗ.

Примеры.Решить уравнение.1. $\log_2 x=3$, $x=2^3=8$.

2. $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-4$, используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$9^{\log_3(1-2x)}=3^{2\log_3(1-2x)}=3^{\log_3(1-2x)^2}=(1-2x)^2$$

Тогда, по условию $(1-2x)^2=5x^2-4$ или $x^2+4x-5=0$,

$x_1=-5$, $x_2=1$. $x_2=1$ – посторонний корень. Ответ: $x=-5$.

Логарифмирование при решении уравнений

Пример. Решить уравнение $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$.

Решение. Прологарифмируем уравнение по основанию 10

$\lg x^{\frac{\lg x+7}{4}}=\lg 10^{\lg x+1}$, $\dfrac{\lg x+7}{4}\cdot\lg x=\lg x+1$,

$(\lg x+7)\cdot\lg x=4\lg x+4$, заменим $\lg x=t$,

$(t+7)\cdot t=4t+4$, $t^2+3t-4=0$, $t_1=-4$, $t_2=1$,

$\lg x=-4$, $x=10^{-4}$, $\lg x=1$, $x=10$. Ответ: $x=10^{-4}$, $x=10$.

Решение логарифмических неравенств.

Решение логарифмических неравенств часто сводится к решению неравенств вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, где $a>0$, $a\neq 1$.

При решении логарифмических неравенств следует иметь в виду, что:

1. выражение, стоящее под знаком логарифма может быть только положительным.

2. логарифмическая функция монотонно возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

Поэтому при решении неравенств получим две системы:

если $a>1$, то $\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x) \end{cases}$, если $0<a<1$, то $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)<g(x) \end{cases}$.

Пример. Решить неравенство $\log_2\left(x^2-3x\right)\le 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x>0, & (1) \\ x^2-3x\le 2^2. & (2) \end{cases}$$

1. $x^2-3x>0$, $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$,

$x_1=0$, $x_2=3$, $x\in(-\infty;0)\cup(3;\infty)$.

2. $x^2-3x-4\le 0$; $x^2-3x-4=0$; $x_1=4$, $x_2=-1$.

$x\in[-1;4]$.

Объединяя полученные решения системы, запишем ответ: $x\in[-1;0)\cup(3;4]$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\log_3 x=-3$;
2. $\ln x=2$;
3. $\ln x=\frac{1}{2}$;
4. $\log_{\frac{1}{2}} x=-5$;
5. $\lg(2x+5)=0$;
6. $\log_3(2x-1)=2$;
7. $\log_3\sqrt{2x+1}=1$;
8. $\ln(x+1)=-1$;
9. $\lg(x-1)=1$;
10. $\log_{\frac{1}{4}}(x+12)=-2$;
11. $\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{x-1}=1$;
12. $\log_{\frac{3}{5}}\frac{2x+3}{x-2}=1$;
13. $\log_3\left(x^2+4x+12\right)=2$;
14. $\log_2\left(x^2-11x+12\right)=2$;
15. .$\log_2\left(7+2^{-x}\right)=x+3$;
16. $\log_3(x-2)+\log_3(x+4)=3$;
17. $\lg(3-x)-\lg(x+2)=2\lg 2$;
18. $5+\log_2 x=\log_2 7-\log_2 x^2$;
19. $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$;
20. $\ln\frac{2}{x-1}=\ln(4-x)$;
21. $\lg(3x-2)=3-\lg 25$;
22. $2^{2\log_2(1-2x)}=5x^2-4$;

23. $\log_2(1-2x)>0$;

24. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>-2$;

25. $\log_2(3x-1)<\log_3(2x+3)$;

26. $\ln(4x-5)\le\ln(3x-6)$;

27. $\log_3\dfrac{5-x}{x-2}>0$;

28. $\log_{0,1}(5x-4)\le 2\log_{0,1}x$;

29. $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x}=\sqrt{10}$.

Выводы.

1. Сформировано понятие о показательной и логарифмической функциях, их графиках, свойствах.
2. Приобретены навыки решения уравнений и неравенств, содержащих показательные и логарифмические функции.

Литература. (3. глава 7)

ТЕМА 6. Тригонометрия (2часа).

План:

1. Определение тригонометрических функций, построение их графиков, свойства.
2. Основные тригонометрические формулы суммы аргументов, двойного аргумента, суммы и произведения функций..
3. Доказательство тригонометрических тождеств.
4. Решение тригонометрических уравнений и неравенств.

Цель: Сформировать понятие тригонометрических функций, их графиков, свойств.

Задачи:

1. Научить доказывать тригонометрические тождества с использованием различных формул.
2. Научить решать простейшие тригонометрические уравнения.

Ключевые вопросы.

1. Дать определение тригонометрических функций: y = **sinx, y = cosx, y = tgx,** y= ctgx.
2. Построить графики этих функций и указать их свойства.

3. Записать тригонометрические формулы и тождества.

4. Записать формулы решений уравнений: *sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx=a.*

Основные понятия

$$1\,радиан = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0745\,.$$

Таблица значений тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
	0	30	45	60	90	180	270
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Формулы приведения

β	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$tg\beta$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
$ctg\beta$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$

Знаки тригонометрических функций

$\sin\alpha$	$\begin{array}{c\|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$	$\cos\alpha$	$\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$	$tg\alpha$ $ctg\alpha$	$\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$

Связь функций одного угла

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{ctg\alpha};$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2 a = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2 a = 1;$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$$

Формулы сложения аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = sun\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Формулы кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2}{ctg\alpha - tg\alpha}$$

Сложение тригонометрических функций

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right)$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка $tg\frac{\alpha}{2}=t$

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Выводы.

1. Сформированы основные понятия тригонометрических функций, их геометрические изображения, свойства.
2. Ознакомлены с доказательством тождеств.
3. Приобретены навыки решения тригонометрических уравнений.

Литература. (3. глава 2, 3)

ТЕМА 7. Производные элементарных функций (2 часа).

План:

1. Определение производной.
2. Механический, геометрический смысл производной.
3. Необходимое условие существования производной.
4. Основные правила дифференцирования функций. Таблица производных.
5. Таблица производных.

Цель: Ознакомление с понятием производной, геометрическим и механическим смыслом производной.

Задачи: 1. Научить дифференцировать функции.

Ключевые вопросы.

1. Записать приращение аргумента и приращение функции.
2. Дать определение производной функции.
3. Геометрический смысл производной.
4. Уравнение касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$.
5. Физический смысл производной.
6. Записать правила дифференцирования.
7. Записать таблицу производных.

Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и ее значение в этой точке равно $y = f\left(x_0\right)$.

Проделаем следующие операции.

1. Придадим x_0 приращение Δx, тогда $(x_0+\Delta x)$ - новое значение аргумента. Вычислим значение функции $f(x_0+\Delta x)$.
2. Вычислим приращение функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.
3. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
4. Найдем предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется производной функции *y=f(x)* в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, или $y'/_{x=x_0}$, или $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Если функция *y=f(x)*имеет производную точке x_0, то говорят, что она дифференцируема в точке x_0 .Процесс нахождения производной называется дифференцированием функции.

Замечание. Так как не всякая функция имеет предел , то не всякая функция имеет производную.

Если производная существует при каждом $x \in (a;b)$ то эта производная является функция от *x* и обозначается $y' = f'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл производной.

Производная функция *y=f(x)* есть тангенс угла, образованного касательной к кривой в токе x_0 с положительным направлением оси ох.

$$k=\operatorname{tg}\alpha = y' = f'(x_0).$$

Уравнения касательной и нормали.

Из геометрического смысла производной следует, что уравнение касательной к кривой *y= f(x)* в точке М (x_0, y_0) имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где k = $f'(x_0)$ – значение производной в точке $x = x_0$ (угловой коэффициент касательной).

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к *кривой*. Для нормали получаем уравнение

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Механические приложения производной

Скорость. Если при прямолинейном движенииточки задан закон движения S=S(t), то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени $V = S'(x_0)$.

Ускорение. Если при прямолинейном движенииточки задан закон движения S=S(t), то вторая производная от пути по времени выражает ускорение движения в момент времени t_0 т. е. $a = V'(x_0) = S''(x_0)$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

c – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции:

Правила дифференцирования.

$c' = 0$;

$x' = 1$;

$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(u\,v)' = u'v + uv'$;

$(cu)' = cu'$;

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$;

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$;

$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Если $\mathrm{u}=u(\mathrm{x})$***, то***

$$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$$

$$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$$

$$(e^u)'=e^u\cdot u'$$

$$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$$

$$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$$

$$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$$

$$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$$

$$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$$

$$(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$$

$$(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$$

$$(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

$$(arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

$$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$$

$$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$$

Производная сложной функции

Если $y=f(u),\ u=u(x),$ т.е. $y=f[u(x)],$ где $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'=f'(u)\cdot u'(x)$.

Задания для самостоятельной работы.

1. Найти производные функций

1) $y=x^2-3x^4;$ 2) $y=x^3-5x^2+4x+2$;

3) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2+x^{-4}+3$; 4) $y=\sqrt{x}+\frac{x^2-3x}{x}-5;$

5) $y=x^3-5x^2+\frac{3}{x^4}+4$; 6) y = sinx + tgx -1;

7) y = 4cos2x + sin3x ; 8) y = arcsin4x+$\frac{1}{3}x^6$;

9) y = arctg2x –cos5x; 10) y = tg4x + e $^{-x}$;

11) y = 3cos6x + 4x^{-4} -5lnx; 12) y = 3^{5x} - 4ctg2x;

13) $y = 6^x - 7tg3x;$ 14) $y = e^{3x} + 3arctgx;$

2. Найти производные произведения функций $(uv)' = u'v + uv'$

1) $y = x^2 \sin 5x;$ 2) $y = x^4 e^{-2x};$

3) $y = x^3 cos4x;$ 4) $y = x^2 \mathrm{tg}6x;$

5) $y = (x^2 + 3)e^{-4x};$ 6) $y = \sqrt{x}\sin 8x;$

7) $y = (2x+4)\ln 6x;$ 8)) y = xarcsin4x;

9) $y = e^{3x} arctgx;$ 10) $y = \sin 3x \cdot \ln 6x$.

3. Найти производные частного функции $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

1) $y = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1};$ 2) $y = \frac{x^3 + 2}{3};$

3) $y = \frac{5x+1}{4x^2+3};$ 4) $y = \frac{2}{3x+5};$

5) $y = \frac{\ln x}{1 + x^3};$ 6) $y = \frac{arctg 2x}{x^2};$

7) $y = \frac{cosx}{x^3};$ 8) $y = \frac{x^3}{e^{4x}};$

9) $y = \frac{x^2 - 3x}{\sin 4x};$ 10) $y = \frac{tg 2x}{e^{5x}};$

11) $y = \frac{ctg 3x}{e^{-4x}};$ 12) $y = \frac{e^{-x}}{\cos 2x};$

13) $y = \frac{\ln(3x+4)}{arctg 4x};$ 14) $y = \frac{\sin x^2}{\cos x^3}$.

15) y = $\sin^3 x$; 16) y=$tg^2 x$;

17) y = $\cos^4 x$; 18) y=$arctg^2 x$;

19) y = $ctg^4 x$; 20) y= $\arcsin^5 x$;

21) y = $\ln^5 x$; 20) y= $\sqrt{\cos x}$.

4. При движении тела по прямой расстояние S (в мерах) от начальной точки движения по закону $S(x)=\frac{t^3}{3}-t^2+t-1$ (t-время движения в секундах). Найти скорость $\left(\frac{м}{с}\right)$ тела через 4с после начала движения.

Выводы. 1) Сформировано понятия производной функции, ее геометрического и физического смысла.

2) Приобретены навыки нахождения производной функции.

Литература. (1. глава 8; 2. глава 4; 3. глава 4)

ТЕМА 8. Приложение производной к исследованию функции построению графиков (2часа).

План: 1. Определение возрастания (убывания) функции.

2. Определение экстремума функции. Необходимое и достаточное условие экстремума.

3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

4. Схема полного исследования функции и построение ее графика.

Цель: Ознакомление с методами исследования функции и построения ее графика.

Задачи: 1 Научить исследовать функции на экстремум с помощью первой производной и построить их графики.

2. Определять наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Ключевые вопросы.

1 Определения возрастания и убывания функции.

2 Необходимое и достаточное условие возрастание и убывания функции.

3 Экстремум функции (определение).

4 Построение графика функции с помощью полного исследования функции.

5 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке.

Интервалы монотонности и экстремумы функции

1. Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) во всех точках промежутка, то функция $y = f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на этом промежутке.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (*промежутки монотонности*). Эти промежутки ограниченны критическими точками x в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

2. **Необходимое условие экстремума**: в точке экстремума функции ее производная либо равна нулю ($f'(x) = 0$), либо не существует.

3. Первое достаточное условие экстремума: если в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна, а производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с « + » на «–», то точка x_0 − точка максимума, если знак

меняется с « – » на « + », то точка x_0 − точка миниума.

Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума не существует.

4. Второе достаточное условие экстремума: если в точке x_0

$f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$, то x_0 является точкой минимума функции. Если

$f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$, то x_0 является точкой максимума функции.

6. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения (глобальные максимум и минимум) функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, следует выбрать наибольшее (наименьшее) из значений функции в критических точках, находящихся в интервале (a, b), и на концах отрезка (в точках a и b).

Построение графиков функций с помощью производной

1. Исследовать функцию на монотонность и построить ее график.

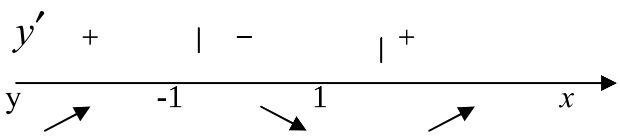
Пример 1. $y = x^3 - 3x$.

Найдем $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

Приравняем нулю производную. $y' = 0$.

$3(x-1)(x+1) = 0$, откуда $x = -1$, $x = 1$.

Нанесем точки на числовую прямую и определим знак в каждом из промежутков.



$x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ - интервалы возрастания функци $x \in (-1;\ 1)$ - интервалы убывания функции. Вычислим $y_{x=-1} = 2$, $y_{x=1} = -2$.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции).

$y = 0$, $x^3 - 3x = 0$, $x(x^2 - 3) = 0$, $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

Построим график функции.

Пример 2. Исследовать функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$ на экстремум.

Решение. Найдем $y' = 3x^2 - 18x + 24$, $y' = 3(x-2)(x-4)$, $y' = 0$,

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

y' + | − | +

y 2 4 x

Ответ. $x \in (-\infty;2) \cup (4;\infty)$ - интервалы возрастания функции

$x \in (2;4)$ - интервалы убывания функции.

$y_{\max}(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20$;

$y_{\min}(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 16$.

Построим эскиз графика функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции

$y = x^3 - 3x^2 + 5$; $x \in [-1;\ 3]$.

Найдем $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0$; $3x^2 - 6x = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x_1 = 0$;

$x_2 = 2$.Вычислим $y_{x=0} = 5$; $y_{x=2} = 1$; $y_{x=-1} = -3$; $y_{x=3} = 5$.

Выбираем $y_{\textit{набольшее}} = 5$;. $y_{\textit{наименьшее}} = -3$.

1**. Найти интервалы монотонности функций**.

1) $y = x^2 - 4x + 7$; 2) $y = 1 - x^3 + x^2$; 3) $y = x^3 - x$;

4) $y = 2x + 1$; 5) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$; 6) $y = x(\sqrt{x} - 2)$.

Выводы.

1. Приобретены навыки: определения возрастания и убывания функции.
2. Необходимое и достаточное условие возрастания и убывания функции.

3. Экстремум функции (определение).
4. Построение графика функции с помощью полного исследования функции.
5. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке..

Литература. (1. глава 5; 2. глава 8; 3. глава 4)

ТЕМА 9. Числовые последовательности (2часа).

План:

1. Определение числовой последовательности. Обозначение формулы общего члена последовательности.
2. Способы задания последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии как частный случай последовательности.
3. Определение арифметической прогрессии. Запись её общего члена. Свойства членов последовательности.
4. Нахождение суммы конечного числа слагаемых арифметической прогрессии.
5. Определение геометрической прогрессии. Формула общего члена и суммы прогрессии.
6. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Формула суммы S_n при $n \to \infty$.
7. Понятие среднего арифметического и среднего геометрического чисел.

Цель: Ознакомление с арифметической и геометрической прогрессиями, свойствами их членов, суммой конечного и бесконечного числа слагаемых.

Задачи 1. Научить находить члены последовательности, по заданной рекурентной формуле.

2 Научить решать текстовые задачи с использованием теории о прогрессиях.

1. Арифметическая прогрессия.

Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, у которой задан первый член a_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется арифметической прогрессией:

$a_{n+1}=a_n+d$, где a_n – общий член, d – разность прогрессии.

Формула общего члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+d(n-1)$.

Сумма n первых членов прогрессии S_n вычисляется по формуле:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2} \quad \text{или} \quad S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n .$$

Любой член арифметической прогрессии (кроме первого) равен среднему арифметическому равностоящих от него членов: $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ при $k = n$.

При k=1 имеем $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ среднее арифметическое.

2. Геометрическая прогрессия.

Последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots b_n$, у которой каждый последующий член, начиная со второго равен произведению предыдущего, умноженного на одно и тоже постоянное число $q \neq 0$, называется геометрической прогрессий.

Формула общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,

где b_n – n-ый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

Сумма n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Если $|q| < 1$ и число членов неограничено, то прогрессию называют бесконечно убывающей, а её сумма равна пределу S_n при $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Квадрат любого (кроме первого) члена геометрической прогрессии равен произведению соседних с ним членов:

$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$, где $|q| < 1; k \in N$, $b = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$ –среднегеометрическое.

1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

Решение. Имеем $a_3+a_9=8$, причём $a_3=a_1+2d$; $a_9=a_1+8d$, поэтому $a_1+2d+a_1+8d=8$.

Отсюда $2a_1+10d=8$. Подставим это значение в выражение суммы S_{11}:

$S_{11} = \frac{2a_1 + d(11-1)}{2} \cdot 11$, откуда получаем, что $S_{11}=4 \cdot 11=44$.ОТВЕТ: $S=44$.

2. Определить, при каких x три числа $a_1 = \lg 2, a_2 = \lg(3^x - 3), a_3 \lg(3^x + 9)$, взятые в указанной поледовательности, образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Если числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, то для них выполняется признак арифметической прогрессии:

$$\lg(3^x - 3) = \frac{\lg 2 + \lg(3^x + 9)}{2} \Rightarrow \log(3^x - 3)^2 = \lg 2(3^x + 9), \quad (3^x - 3)^2 = 2(3^x + 9).$$

Пусть $3^x = y$, тогда $(y-3)^2 = 2(y+9)$ или $y^2 - 8y - 9 = 0$, откуда $y_1 = 9; y_2 = -1$ (не подходит). Переходя к переменной x, имеем $3^x = 9, x = 2$. ОТВЕТ: $x=2$.

2. Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна *1,6*, а второй член равен – *0,5*.

   Решение. $S = 1,6, b_2 = -0,5$.

   Перепишем $\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 1,6, \\ b_1 q = -0,5. \end{cases}$

   Решая систему, получим $q_2 = \dfrac{5}{4} > 1,$ (не подходит); $q_1 = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow b_1 = 2; b_3 = b_1 q^2,$

   $b_3 = 2(-0,25)^2 = 0,125.$

   ОТВЕТ: 0,125.

3. Знаменатель геометрической прогрессии равен -2, сумма её первых пяти членов равна 5,5. Найти пятый член этой прогрессии.

Решение.

$$S_5 = 5,5; S_5 = \frac{b_1(1-(-2)^5)}{1-(-2)}; 5,5 = \frac{b_1 \cdot 33}{3}; b_1 = 0,5; a_3 = b_1 \cdot q^4, b_3 = 0,5 \cdot (-2)^4 = 8.$$

Выводы.

1. Сформированы понятия арифметической и геометрической последовательностей, свойств рекуррентной формулы, нахождение суммы *n* – числа слагаемых.
2. Приобретены навыки вычисления любого значения a_n, - заданного формулой.
3. Приобретены навыки решения задач с использованием арифметической и геометрической прогрессий.

Литература. (1. глава 2; 2. глава 6)

3. Методические указания

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы. Определения, выводы, формулы – заучивать наизусть.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при изучении конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать рациональный.. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

Лекции и практические занятия

Студенты повторяют «Адаптивный курс» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (1 ч. лекций и 1 ч. практических занятий в неделю.. После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Зачет

На зачете выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к зачету учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Зачет проводится в устно-письменной форме,

После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на повседневную серьезную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию – остается в голове всего крепче.

Образовательные технологии и формы.

1) Методы обучения: проблемная лекция, лекция - визуальная, лекция - пресс-конференция, лекция- беседа, лекция - дискуссия, лекция -консультация.

2) На практических занятиях применяется: работа в группах, решение творческих задач, ведение рабочей тетради. .

Самостоятельная работа подразумевает работу студентов под руководством преподавателем: консультации при усвоении разделов математики, помощь в написании и защите рефератов, подготовка к тематическому тестированию, выступлению на конференциях, олимпиадах и других видов самостоятельной работы.

3) Используются на занятиях материально технические средства: аудитория с компьютером и проектором; интерактивной доской.

3.1. Методические указания к практическим занятиям.

ТЕМА1 Степени и корни (2часа).

Цель:
1. Ознакомление с понятием степени и ее свойствами.
2. Ознакомление с понятием арифметического корня. Свойствами.

Задачи:
1. Изучение действий со степенями.
2. Изучение действий со степенями и радикалами.

Контрольные вопросы:
1. Перечислите свойства и действия со степенями.
2. Перечислите свойства и действия с радикалами.

Понятие степени и корня.

Свойства степеней:

Если $a > 0,$ то $a^0 = 1, \quad a \neq 0$;

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0;$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m;$$

Свойства арифметического корня:

Если $a > 0,\ b > 0,\ n \in N$, то

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0;$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0, \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}; \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \ a \neq 0.$$

Свойство пропорции $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}, \quad ad = bc.$

Действия со степенями и радикалами

1. Выполнить действия:: 1) $a^5 \cdot a^{-5}$; 2) $\left(3^{-2} \cdot 2^4\right) \cdot \left(3^3 \cdot 2^{-3}\right)$;

3) $\left(6^{-3} \cdot 49 \cdot 4^{-10}\right) \cdot \left(4^{10} \cdot 7^{-2} \cdot 6^4\right)$; 4) $\left(5m^3 \cdot n \cdot p^{-2}\right) \cdot \left(25^{-1} \cdot m^{-2} \cdot p^2\right)$;

5) $(a-x)^{-2} \cdot (x-a)^3$; 6) $x^{-7} : x^6$; 7) $x^7 : x^6$; 8) $x^{-9} : x^{-7}$;

9) $\left(2^3 \cdot a^{-3} \cdot b^4\right) : \left(2^3 \cdot a^{-4} \cdot b^{-3}\right)$;

10) $(x-y)^{-2} : (y-x)^{-1}$; 11) $\frac{7}{3} x^{-5} \cdot y^{n-1} \cdot z : \frac{5z}{6x^4 \cdot y^2}$.

2. Найти арифметический корень

1) $\sqrt{64 \cdot 36 \cdot 100}$; 2) $\sqrt[3]{216 \cdot 64}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{121}}$;

4) $\sqrt{\frac{81}{625}}$; 5) $\sqrt[3]{27a^3 \cdot b^6}$; 6) $\sqrt[4]{625}$;

7) $\dfrac{\left(12^{\frac{1}{2}} - \sqrt{8}\right) \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{\left(36^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{6}\right)\left(2 + \frac{2}{9}\right)}$; 8) $\dfrac{\left(4\sqrt{7} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2}{18 + 2 \cdot 56^{\frac{1}{2}}}$.

3. Выполнить действия

1) $\sqrt{25a^2}$; 2) $\sqrt[3]{27x^6}$; 3) $\sqrt{\frac{64a^2b^4}{25c^2d^6}}$; 4) $\sqrt[3]{-\frac{27a^6b^3}{64x^{12}}}$.

4. Решить уравнения

1) $3\sqrt{2x} - 4\sqrt{2x} = 24 - 3\sqrt{2x}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4z} + \frac{1}{3}\sqrt{9z} + \frac{1}{5}\sqrt{25z} = 9$;

3) $\sqrt{25x+25} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} = 16 - \sqrt{x+1}$;

4) $\left(\sqrt{7x} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{7x} - \sqrt{3}\right) = 11$; 5) $\left(6 + \sqrt{x}\right)\left(5 - \sqrt{x}\right) = 28 - x$;

6) $\left(2 + 3\sqrt{2x}\right) \cdot \left(3 - 2\sqrt{2x}\right) = 5\sqrt{2x} - 18$;

7) $(x-y) : \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$.

5. **Возвести в степень**

1) $\left(125\cdot x^{-6}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(32+x^{-10}\right)^{-\frac{3}{5}}$; 3) $\left(64\cdot c^{-6}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\left(64\cdot b^{-6}\right)^{-\frac{1}{6}}$.

6. **Сократить дроби**

1) $\frac{63x^2y^2}{77y^4}$; 2) $\frac{2x^3-8x^5}{12x^4}$; 3) $\frac{5a^2b^7-4ab^3}{10a^4b^6-8a^3b^3}$.

Выводы:
1. Сформировано понятие степени и арифметического корня.
2. В подобранных заданиях показано их практическое применение.
3. Самостоятельно решено достаточное количество заданий и упражнений.

Литература. (3. глава 8)

ТЕМА 2 Многочлены и действия над ними (2часа).

Цель: Ознакомление с понятиями одночлена и многочлена, степенью многочлена и действиями над степенями.

Задачи:
1. Научить пользоваться формулами сокращенного умножения и деления; выполнять деление многочленов.
2. Научить вычислять значение многочлена при заданных параметрах.

Контрольные вопросы:
1. Определение одночлена и многочлена.
2. Правило деления многочленов.
3. Записать формулы суммы и разности квадратов и кубов; разложение на множители разности квадратов; суммы и разность кубов.

Многочленом от x называют выражение вида

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – коэффициенты многочлена, действительные числа, $n-$ показатель степени старшего члена многочлена, a_n- свободный член.

Рассматривают многочлены вида $a-$ многочлен нулевой степени;

$ax+b$ –многочлен первой степени;

$ax^2+bx+c-$ многочлен второй степени;

$ax^3+bx^2+cx+d-$ многочлен третьей степени.

Над многочленами можно выполнять действия сложение, вычитание, умножение и деление.

Пример 1. Даны два многочлена $P(x) = x^2 - 3x$ и $Q(x) = 2x - 4$.

Найти: 1) $P(x) + Q(x);$ 2) $P(x) \cdot Q(x);$ 3) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}.$

Решение.

1) $P(x) + Q(x) = x^2 - 3x + 2x - 4 = x^2 - x - 4$.

2) $Q(x) = 2x - 4 = \left(x^2 - 3x\right)\left(2x^2 - 4\right) = 2x^3 - 10x^2 + 12x$.

3) $(x^2 - 3x) : (x - 4)$.

$$\begin{array}{ll} x^2 - 3x & x - 4 \\ \underline{x^2 - 4x} & x + 1 \text{(частное)} \\ x & \\ \underline{x - 4} & \\ 4(\textit{остаток}) & \end{array}$$

Получим $\dfrac{x^2 - 3x}{x - 4} = x + 1 + \dfrac{4}{x - 4}$.

Пример 2. Доказать, что значение выражения не зависит от a:

$a(2a + 1) - a^2(a + 2) + \left(a^3 - a + 3\right)$.

Решение. $2a^2 + a - a^3 - 2a^2 + a^3 - a + 3 = 3$.

Формулы сокращенного умножения.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$;
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6. $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$;
7. $a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 - ab + b^2)$.

1. Выполнить действия, используя формулы сокращенного умножения.

1) $(a + 5)^2$; 2) $(3a - 7)^2$; 3) $(a^n + b^n)^2$;

4) $(1-x)^3$;   5) $(3+y)^3$;   6) $\left(3a-\frac{1}{3}b\right)^3$;

7) $(4-a)(4+a)$;   8) $(a^2-8)\,(a^2+8)$;   9) $(a+3)\,(a^2-3a+9)$.

2. **Докажите тождества.**

1) $(x-2)(x+2)(x^2+4)=x^4-16$;

2) $(4x^2+4ax+a^2):(2x+a)-(2x+a)^3:(4x^2+4ax+a^2)=0$.

3. Выделите полный квадрат.

1) x^2+4x;   2) $36x^2-12x$;   4) m^2-3m;

4) x^2+2x+3;   5) $x^2-10x+15$;   6) x^2+4x+3;

7) x^2-2x+5;   8) $2x^2+4x-5$;   9) $3y^2+6y-8$.

4. Упростите выражения и вычислите.

1) $9m^2+24mn+16n^2$ при m=4;   n=-2.

2) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$ при x=3;   y=$-\frac{1}{2}$.

3) $\dfrac{a^6+8}{a^4-2a^2+4}$ при a = -4.

5. Упростите выражения.

1) $(a+5)(a^2-5a+25)$;   2) $(2b-1)(1+2b+4b^2)$;

3) $(a+b)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)$;   4) $(3d^3-4)(9d^6+12d^3+16)$.

6. Выполните деление многочленов.

1) $\dfrac{x}{x+4}$;   2) $\dfrac{x-5}{x-1}$;   3) $\dfrac{x^2}{x+4}$;

4) $\dfrac{x^3}{x-1}$;   5) $\dfrac{3x^2-4x+1}{x}$;   6) $\dfrac{x^3-5x+4}{x-2}$;

7) $\dfrac{3x^4-4x^2+2x}{3x+1}$;   8) $\dfrac{x^3}{x-2}$;   9) $\dfrac{x^3-5x}{x+3}$.

7. Выполнить действия.

1) $a^5\cdot a^{-5}$;   2) $(3^{-2}\cdot 2^4)\cdot(3^3\cdot 2^{-3})$;

3) $\left(6^{-3}\cdot 49\cdot 4^{-10}\right)\cdot\left(4^{10}\cdot 7^{-2}\cdot 6^{4}\right)$; 4) $\left(5m^{3}\cdot n\cdot p^{-2}\right)\cdot\left(25^{-1}\cdot m^{-2}\cdot p^{2}\right)$;

5) $(a-x)^{-2}\cdot(x-a)^{3}$; 6) $x^{-7}:x^{6}$;

7. $\frac{7}{3}x^{-5}\cdot y^{n-1}\cdot z:\frac{5z}{6x^{4}\cdot y^{2}}$ 8) $x^{-9}:x^{-7}$;

9) $\left(2^{3}\cdot a^{-3}\cdot b^{4}\right):\left(2^{3}\cdot a^{-4}\cdot b^{-3}\right)$; 10) $x^{7}:x^{6}$;

11) $(x-y)^{-2}:(y-x)^{-1}$.

8. Вычислить.

1) $\sqrt{64\cdot 36\cdot 100}$; 2) $\sqrt[3]{216\cdot 64}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{121}}$;

4) $\sqrt{\frac{81}{625}}$; 5) $\sqrt[3]{27a^{3}\cdot b^{6}}$; 6) $\sqrt[4]{625}$.

7) $\dfrac{\left(12^{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{\left(36^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}\right)\left(2+\frac{2}{9}\right)}$; 8) $\dfrac{\left(4\sqrt{7}+4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{2}}{18+2\cdot 56^{\frac{1}{2}}}$.

8. Выполнить действия.

1) $\sqrt{25a^{2}}$; 2) $\sqrt[3]{27x^{6}}$; 3) $\sqrt{\frac{64a^{2}b^{4}}{25c^{2}d^{6}}}$; 4) $\sqrt[3]{-\frac{27a^{6}b^{3}}{64x^{12}}}$.

9. Решить уравнения.

1) $3\sqrt{2x}-4\sqrt{2x}=24-3\sqrt{2x}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4z}+\frac{1}{3}\sqrt{9z}+\frac{1}{5}\sqrt{25z}=9$;

3) $\sqrt{25x+25}-\sqrt{9x+9}+\sqrt{4x+4}=16-\sqrt{x+1}$;

4) $\left(\sqrt{7x}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7x}-\sqrt{3}\right)=11$; 5) $\left(6+\sqrt{x}\right)\left(5-\sqrt{x}\right)=28-x$;

6) $\left(2+3\sqrt{2x}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2x}\right)=5\sqrt{2x}-18$;

7) $(x-y):\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

Выводы:

1. Сформировано понятие одночлена и многочлена.
2. Приобретены навыки арифметических действий над многочленами.
3. Приобретены навыки пользования формулами сокращенного умножения и

деления многочленов.

4. Выделять полный квадрат из квадратного трехчлена.

Литература. (3. глава 8)

ТЕМА 3. Разложение многочленов на множители. Действия с алгебраическими дробями (2часа).

Цель: Ознакомление с методами разложения многочлена на множители; сокращение дробей.

Задачи:

1. Научить разлагать многочлен на множители, используя приемы:

   а) вынесение общего множителя;

   б) группировки;

   в) формулы сокращенного умножения.

2. Научить сокращать дроби.
3. Научить выполнять действия с дробями.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть метода вынесения общего множителя за скобки.
2. В чем суть метода группировки слагаемых.
3. Какому условию должен удовлетворять общий знаменатель дроби.

1**. Разложите многочлены на множители.**

1) $2ab^3+6a^2b^2+8a^4b^4$; 2) $3x(x-3)+3-x$;

3) $m(m-1)+(1-m)^2$; 4) $(2p+3q)(p-q)+(2p-3q)(q-p)$;

5) $a^2+4ab+4b^2-1$; 6) $4(a+b)^2-9(a-b)^2$;

7) $a^4-a^2(b^2+1)+b^2$; 8) $5a(2x-3)-3x(2x-3)+(3-2x)$.

2. Сократите дроби.

1) $\dfrac{a^2+2a-8}{(a-1)^2-1}$; 2) $\dfrac{(x-1)^3-8}{x-3}$;

3) $\dfrac{9-12x+4x^2}{2x-3}$; 4) $\dfrac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}$;

5) $\dfrac{x^3-4x^2-9x+36}{x^2-7x+12}$; 6) $\dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12}$;

7) $\dfrac{x^3-x^2-16x+16}{x^2-3x-4}$.

3. При каких значениях x следующие дроби не имеют смысла.

1) $\dfrac{2x+1}{x-1}$; 2) $\dfrac{3x^2-2}{x^2-1}$; 3) $\dfrac{x}{x^3-1}$;

4) $\dfrac{x^2}{x^3+1}$; 5) $\dfrac{2x-1}{3x+1}$; 6) $\dfrac{3x}{3x^2+5}$;

7) $\dfrac{x+1}{x(x-2)(x+3)}$.

4. Упростите выражения.

1) $\dfrac{2x^2+3x-2}{2x-1}-\dfrac{4-x^2}{x+2}$; 2) $\dfrac{4x^2+3x-1}{4x-1}-\dfrac{1-x^2}{x+1}$;

3) $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x+1}-\dfrac{x^2-9}{3-x}$; 4) $\dfrac{5x^2-9x-2}{5x+1}-\dfrac{4-x^2}{x+2}$;

5) $\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{5}{x^2-x-6}+\dfrac{2x}{x-3}\right)\cdot\dfrac{x}{2x+1}$;

6) $\left(\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2+2x-3}\right)\cdot\dfrac{x}{2x+1}$.

Выводы:
1. Сформированы понятия:
   а) разложение многочлена на множители;
   б) сокращение дробей;
   в) приведение дробей к общему знаменателю.
2. Приобретены навыки:
   а) действий с дробями;
   б) преобразования алгебраических выражений.

Литература. (3. глава 8)

ТЕМА 4. Алгебраические уравнения и неравенства (2часа).

Цель: Ознакомление с приемами решения алгебраических уравнений и неравенств.

Задачи: 1. Научить решать алгебраические уравнения второй и высших степеней.

2. Научить решать уравнение заменой переменного.

3. Научить решать неравенства и системы неравенств. Находить область определения функции.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть метода замены переменной в уравнении.
2. Определение неравенства, виды неравенств.
3. Перечислите свойства неравенств.
4. Как решать двойное неравенство; неравенство с модулем.
5. Назовите область определения арифметического корня.

1. Решите уравнения.

1) $\dfrac{71-3x}{6x-9}=\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{17}{5x}=2-\dfrac{7}{x}$; 3) $\dfrac{25x+3}{3x+7}=5$;

4) $\dfrac{2}{x}-15=8x$; 5) $7-2x=\dfrac{3}{x}$; 6) $\dfrac{4}{x}+5=\dfrac{1}{x^2}$;

7) $(x+3)(x-2)+(x+2)^2-3x-10=0$;

8) $(x-5)^2-(3-x)^2-4(x+5)(3-x)-48=(x+1)^2$;

9) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3x-10}{4}$; 10) $\dfrac{x(x+4)}{2}-3=\dfrac{7x}{4}-\dfrac{5x-4}{6}$;

11) $\dfrac{21}{v+5}=3\dfrac{2}{7}-\dfrac{v}{7}$; 12) $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}=4\left(\dfrac{1+t^2}{t^2}-\dfrac{3}{2t}\right)$;

13) $\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{x+6}{x-3}=1$; 14) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;

15) $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$;

16) $\dfrac{2x+5}{x^2+x}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3x}{x+1}=0$; 17) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{33}{x^2-11}=\dfrac{x-4}{x-11}$.

2. Решите систему уравнений.

1) $\begin{cases} x-y=2; \\ 3x-2y=9. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=3; \\ 5x+y=4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=1; \\ xy=6. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-y^2=5; \\ x+y=-1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2+2xy=9; \\ x-y=1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x-2)(y-2)=-4; \\ x-y=-1. \end{cases}$

3. Решите неравенства.

1) $\frac{x-2}{8} \ge \frac{3x-5}{12}$; 2) $\frac{3-2x}{6} \le \frac{2x+8}{9}$;

3) $\frac{x+2}{10} \le \frac{3x-1}{15}$; 4) $(x-1)(x+1) \ge x^2+3x-4$;

5) $-x^2 \le 3-4x$; 6) $-x^2-4x-3>0$;

7) $-2 \le 1-3x \le 2$; 8) $-3 \le 2-5x \le 1$.

4. Решите систему неравенств.

1) $\begin{cases} 1-2x \le 3; \\ 3x+2<1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2-4x>3; \\ 3x+2 \le 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2+11x \le -5; \\ 3-3x<5. \end{cases}$

5. Найдите область определения функции.

1) $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$; 2) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x-3}}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$.

6. Выделите на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.

1) $\begin{cases} y>x^2; \\ y<x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y>x^2; \\ 3y-x<y. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y>x^2-1; \\ y<1-x^2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 1; \\ x^2+y^2<16. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y>x^2-5x+6; \\ y>5. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2y>x^2; \\ y \le -2x^2+3x. \end{cases}$

7. Решите уравнения.

1) $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{4}{x^2+6x+9}+\frac{6}{9-x^2}=\frac{1}{x-3}$.

Выводы: 1. Сформированы понятия о методах решения алгебраических уравнений.

2. Приобретены навыки решения неравенств и систем неравенств; области определения квадратного корня; логарифмического выражения дроби.

Литература. (3. глава 8)

ТЕМА 5. Показательные, логарифмические уравнения и неравенства (2часа).

Цель: Ознакомление с методами решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Задачи:
1. .Научиться решать показательные уравнения и неравенства.
2. Научиться решать логарифмические уравнения и неравенства.

.

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение называется показательным.
2. К какому простейшему виду преобразуют показательное уравнение, чтобы записать его решения.
3. Как записывать решение показательного неравенства, если $a > 1$ и $0 < a < 1$.
4. Какое уравнение называется логарифмическим.
5. Записать простейший вид логарифмического уравнения.
6. Записать область определения функции $y = \log_a x$.
7. Построить график функции $y = \log_a x$. , перечислить ее свойства.
8. Записать две системы решений логарифмических уравнений.

Показательные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестную в показателе, называется показательным уравнением. При решении показательных уравнений их преобразуют к уравнениям вида

$a^x = a^m$, $a > 0$, $a \neq 1$, тогда $x = m$.

Пример 1. Решить уравнение $\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5x-1} = 4$.

Представим левую и правую части уравнения как показательные функции с основанием 2.

$\left(2^{-3}\right)^{0,5x-1} = 2^2$, $2^{-1,5x+3} = 2^2$.

Приравняем показатели: $-1,5x + 3 = 2$, $x = \frac{2}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $5^{2x+3}=1$. Пусть $5^{2x+3}=5^0$, тогда $2x+3=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

Пример 3. $\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^x-\sqrt[3]{5}=0$. Имеем $5^{-\frac{3}{2}x}=5^{\frac{1}{3}}$, $-\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}$, $x=-\frac{2}{9}$.

1**. Решить показательные уравнения.**

1) $3^x=81$; 2) $2^{-x}=32$; 3) $8^x=16$;

4) $9^x=27$; 5) $\sqrt[3]{128}=2^{3x}$; 6) $6^{\sqrt{1-x}}=216$;

7) $25^x=\frac{1}{5}$; 8) $\sqrt[3]{7^x}=\sqrt[5]{343}$; 9) $\left(\frac{5}{12}\right)^{2x-3}=(2{,}4)^{3x-2}$;

10) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^3$; 11) $3^{9x+1}=9^{3x-1}$; 12) $4^{x^2-x+1}=8^x$;

13) $(0{,}3)^{5-2x}=0{,}09$; 14) $225\cdot 15^{2x+1}=1$; 15) $\sqrt{7^{2x+6}}=\frac{7}{\sqrt[4]{7}}$;

16) $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$; 7) $4^x-12\cdot 2^x+32=0$;

18) $9-2^x=2^{3-x}$; 19) $36^x-204\cdot 6^{x-1}-72=0$.

1 Логарифмические уравнения.

При решении логарифмических уравнений их обычно сводят к уравнениям вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$, тогда $f(x)=g(x)$.

При этом проверка корней обязательна.

Пример. $\log_3(2x+5)=0$. ОДЗ: $2x+5>0$, $x>-2{,}5$.

Известно, что $\log_3 1=0$, тогда $\log_3(2x+5)=\log_3 1$, $2x+5=1$, $x=-2$..

2**. Решить логарифмические уравнения.**

1) $\log_4 2x=\frac{1}{2}$; 2) $\log_3 3x=2$; 3) $\log_{0,5}(3x-1)=-2$;

4) $\log_{x+1}(3x^2+2x-1)=2$; 5) $\log_3\sqrt{2x+1}=1$;

6) $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$;

7) $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$.

3. Решить уравнения заменой переменного.

1) $(\lg x)^2 - \lg x^5 + 4 = 0$; 2) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$;

3) $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$; 4) $\dfrac{\lg x}{\lg x - 1} - \dfrac{2(\lg x - 1)}{\lg x} = 1$.

4. Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = \dfrac{3}{2}; \\ \log_{16} x + \log_4 y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 5 + \lg x + \lg y - \lg 2; \\ \lg x + \lg y - 2\lg 2 = \lg(x - y). \end{cases}$

5. Решить неравенства.

1) $2^{2x-4} < 2^{x+2}$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2+3x-4} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; 3) $\log_2 x > 3$; 4) $\log_2(x+2) < 2$;

5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x + 1)$; 6) $9^x < 8 \cdot 3^x + 9$;

7) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 15) > 0$; 8) $2\log_3(x-1) - \log_3(2x-5) > 1$.

Выводы: 1. Освоены методы решений показательных и логарифмических уравнений.

2. Приобретены навыки решений показательных и логарифмических неравенств.

3. Приобретены навыки решений систем показательных и логарифмических уравнений.

Литература. (3. глава 7)

ТЕМА 6. Тригонометрия (2часа).

Цель: Ознакомление с основными тригонометрическими функциями и их формулами.

Задачи:

1. Научить вычислять значения тригонометрических функций, при заданных значениях аргумента.
2. Научить выполнять преобразования выражений.
3. Научить решать уравнения.

Контрольные вопросы.

1. Определений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
2. Построений графиков тригонометрических функций

   $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx.$

3. Как применять формулы приведения для вычисления значений функции.
4. Записать формулы общего решения уравнения $\sin x = a, |a| \le 1;$

$$\cos x = a, |a| \le 1; \quad tgx = a; \quad ctgx = a.$$

Выводы: 1. Усвоены основные тригонометрические функции; формулы суммы и разности аргументов; двойного аргумента.
2. Приобретены навыки решения тригонометрических уравнений.

1. Определить знаки выражений.

1) cos 75^0; 2) cos 179^0; 3) cos (-279^0); 4) cos $\frac{2\pi}{3}$;

5) sin375^0: 6) sin225^0; 7) sin135^0: 8) sin330^0;

9) tg125^0: 10) tg240^0; 11) tg300^0: 12) tg380^0;

9) ctg155^0: 10) tg280^0; 11) tg220^0: 12) sin400^0.

2.Определить знаки тригонометрических функций, если 0< α <90^0:

1) sin(270^0- α); 2) tg(90^0+ α); 3) sin(α-180^0);

4) cos(2α-360^0); 5) tg($\frac{3\pi}{2}$ + α); 6) sin(π - α).

3. Вычислить.

1) 2sin 270^0 - cos90^0 + 3tg180^0; 2) 3cos 0^0 - 3sin90^0 + 6tg360^0;

3) 2sin $\frac{\pi}{3}$ +2cos$\frac{\pi}{6}$ + tg$\frac{\pi}{6}$; 4) 2cos π +3cos$\frac{3\pi}{2}$ +6 tg$\frac{\pi}{3}$;

5) 2sin 810^0+3 cos720^0 - 3sin630^0+5cos900^0.

4. Найти sinα, если sin$\frac{\alpha}{2}$ + cos$\frac{\alpha}{2}$ = 1,4.

5. Вычислить.

1) 1+5sin2α - 3$\cos^{-1}$2α, если tgα = -2; 2) $\frac{ctg\alpha + tg\alpha}{ctg\alpha - tg\alpha}$, если tgα = -2;

3) $tg^2\alpha$ +$ctg^2\alpha$, , если tgα -ctgα = m.

6. Упростить.

$\frac{5cos\alpha - 4}{3 - 5\sin\alpha} - \frac{3 + 5\sin\alpha}{4 + 5\cos\alpha}$, если sinα = $\frac{3}{5}$ и 0< α <90^0.

7. Вычислить.

1) sin 210^0; 2) sin 900^0; 3) cos (-855^0); 4) cos $\frac{2\pi}{3}$;

5) ctg3,5; 6) cos (150^0); 7) tg225^0; 8) ctg330^0.

8. Решить тригонометрические уравнения.

1) sinx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) cosx = -$\frac{1}{2}$; 3) tgx = 1; 4) ctgx = $\sqrt{3}$;

5) sin3x = $\frac{1}{2}$; 6) cos(x+$\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) ctg $\frac{x}{2}$ = -1; 8) ctgx = $\sqrt{3}$;

9) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 10) cos(x-$\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{2}$; 11) tg $\frac{3x}{5}$ = -1; 12) tg2x =-$\sqrt{3}$;

13) $4\cos^2 x$ -4cosx+1=0; 14) $\sin^2 x$ -3sinx+2=0;

15) $2\cos^2 x$ =3sinx; 16) sinx·coc2x=0;

17) sin2x·coc($\frac{\pi}{3}$- x)=0; 18) $3\text{tg}^2 x + \sqrt{3}$ tgx=0.

Литература. (3. глава 2)

ТЕМА 7, 8. Техника дифференцирования функций (4часа)

Цель: Ознакомление с правилами дифференцирования функций и таблицей производных.

Задачи: Научить находить производные функции.

.

Контрольные вопросы.

1. Определение производной.
2. Геометрический смысл производной.
3. Записать формулы дифференцирования и таблицу производных.

1. Найти производные функций.

1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = 5x^8 + 2x - 3;$

4) $y = 2x^{-3}$; 5) $y = 3x^2 - 4x^3 + 7;$ 6) $y = 3x^2 - 4x^3 + 7;$

7) $y = (x^2 - 3x)x^3;$ 8) $y = (x^2 - 4x)(x^3 + 5x);$ 9) $y = 10x^{-5} + 3x^2 - 2;$

10) $y = \frac{2}{x^3}$; 11) $y = \frac{1}{3x^4} - \frac{2}{x^2} + 3x$; 12) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x};$

13) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^5}$; 14) $y = (1 - x^3)^2$; 15) $y = (2 - x^2)^3$;

16) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$; 17) y = 2sinx + 4cosx; 18) y=5tgx -3 e^x ;

19) y=ctgx -4lnx; 20) y=sin6x + cos5x; 21) y=tg3x -4ln2x;

22) y=tg3x -3 e^{7x} ; 23) y = 2ln(3x+4) - 4cos2x; 24) y=ctg3x – ln(5x ^{2} +3);

25) y=arcsinx –ln4x; 26) y=arctgx –sinx ^{2} ; 27) y=5tgx -3 e^x ;

28) y=arctg5x ; 29) y=2tg $\frac{x}{2}$ – ln(3x ^{3} +3x); 30) y=sin $\frac{x}{5}$;

31) y=ctg $\frac{x}{3}$ +6 e^{2x} ; 32) y=arcsin $\sqrt{x}$ –ln6x ^{2} ; 33) y=sin(2x-5);

34) y=arcsin $\frac{x}{2}$ – ln($\frac{x}{7} - 5x^2$) ; 35) y=arctgx ^{2} –sin(8x+5);

36) $y = \sqrt{2x^2 + 4x}$; 37) $y = \sqrt{3x - 4}$.

2. **Производная произведения.**

Пусть u = u(x), v = v(x) – дифференцируемые функции.

Тогда $(uv)' = u'v + uv'$.

3. **Производная частного.** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - vu'}{v^2}$.

Найти производные.

1) y = x ^{2} cos3x; **2)** y = x ^{3} sin2x; **3)** y = xe $^{-2x}$;

4) y = $\sqrt{x}$ tg2x; **3)** y = e ^{4x} sin5x; ; **6)** y =x ^{3} arctg2x;

7) y = (4x ^{2} -3x)ln3x; 8) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$; 9) y = $\sqrt{x}$ e ^{4x} ;

10) $y = \frac{2x+4}{x^2}$; 11) $y = \frac{x^3 + 4x}{4x+3}$; 12) $y = \frac{4}{3x^2 + 3}$;

13) $y = \frac{x^3 - 5x}{6}$; 14) $y = \frac{x^2}{cos2x}$; 15) $y = \frac{e^{3x}}{\sin 2x}$;

16) $y = \dfrac{\sin 5x}{\cos 2x}$; 17) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 18) $y = \dfrac{tgx}{x^3}$;

19) $y = \dfrac{\arcsin 5x}{2x}$; 20) $y = \dfrac{4x+2}{arctg 2x}$; 21) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

4. **Производная сложной функции.** Пусть $y = f(u)$, где u = $\varphi(x)$- сложная функция тогда $f'(u) = f'_u(u) \cdot u'_x$.

Пример. Найти производную функции $y = \sin^5 x$.

$$y' = \left(\sin^5 x\right)' = 5\sin^4 x \cdot (\sin x)' = 5\sin^4 x \cdot \cos x.$$

Продифференцировать функции.

1) $y = cos^2 x$; 2) $y = tg^3 x$; 3) $y = ctg^2 x$;

4) $y = \sin^4 x$; 5) $y = \sin^4 2x$; 6) $y = 2tg^4 5x$;

7) $y = arctg^2 x$ 8) $y = \ln^3 x$; 9) $y = \sqrt{\cos 3x}$;

10) $y = \sqrt{\ln x}$; 11) $y = \sqrt{ars\sin x}$; 12) $y = e^{\cos x}$;

13) $y = e^{arctgx}$; 14) $y = cos^4(2x-5)$; 15) $y = e^{(x^3+3x)}$.

Выводы: 4. Усвоены основные правила и формулы нахождения производной.

5. Приобретены навыки дифференцирования функций.

Литература. (1. глава 4; 2. глава 8 ; 3. глава 4)

ТЕМА 9. Построение графиков функций с помощью производной (2часа)

Цель: Ознакомление с методами построения графика функции методом дифференциального исчисления.

Задачи: Научить строить график функции, используя общую схему.

Контрольные вопросы.

1. Область определения функции $y = \sqrt{f(x)}$; $y = \ln f(x)$; $y = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$.
2. Необходимое условие экстремума.

3. Достаточное условие экстремума.
4. Точки *max* и *min* функции.
5. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

1. Исследуйте функции и постройте их графики.

1) $y = x^2 - 5x - 6$; 2) $y = x^3 - 9x + 15$;

3) $y = x^2(x-3)$; 4) $y = x(3 - x^2)$;

5) $y = \frac{1}{8}(x^2 - 9)(x-3)$; 6) $y = \frac{1}{4}(x-3)(x+3)^2$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке.

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ на отрезке $[-1;1]$;

2) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке $[-2;2]$;

3) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ на отрезке $[-2;2]$;

4) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на отрезке $[-1;2]$;

5) y =sin2x - 1 на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Выводы:
1. Усвоены основные этапы построения графика функции.
2. Выработаны навыки нахождения максимума и минимума, наибольшего и наименьшего значений функции.

Литература. (1. глава 4; 2. глава4 ; 3. глава 8)

3. 2. Методические указания по самостоятельной работе студентов.

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Самостоятельная работа. Тест.	2
2	2	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения	2

		тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	
3	3	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
4	4	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
5	5	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
6	6	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
7	7	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
8	8	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2

9	9	Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Поведение контрольных, самостоятельных работ. Проверка домашних заданий.	2
		Подготовка к зачёту	10
Итого			36

3. 3. Контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, зачёт. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

Итоговая аттестация по итогам освоения дисциплины: зачет (1 семестр)

3. 4. Текущий контроль знаний.

Домашнее задание 1.

1. Вычислить: $(-2)^3;\ (-3)^4;\ (-6)^3$.
2. Вычислить: $10x^4 - 4x^5 - 2x^2 - 4x - 3$ при $x = -1\frac{1}{2}$.
3. Выполнить действия: 1) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2;\ \left(-\frac{2}{3}\right)^3;\ \left(2\frac{1}{3}\right)^2;$

2) $\left(3ab^2\right)^2$; $\left(\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2\right)^3$; $\left(6-4\left(\dfrac{5}{16}\right)^0\right)^{-2}$; $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}-\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$.

4. Сократить: $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

5. Разложить на множители: 1) $a-b$; 2) a^2-b^2; 3) a^3-b^3.

Домашнее задание 2

1. Выделить полный квадрат: 1) $y=x^2-4x+1$; 2) $y=x^2+2x+3$;

   3) $y=x^2+4x+5$; 4) $y=4x^2-8x+5$.

2. Упростите:1) $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$; 2) $(x+4)(x-4)$.

3. Выполните деление многочленов «углом»

   1) $\dfrac{\left(3x^2-5x+4\right)}{(x-2)}$; 2) $\dfrac{\left(x^3-3x\right)}{(x+1)}$; 3) $\dfrac{(x-5)}{(x-1)}$.

Домашнее задание 3.

1. Разложите на множители: 1) $6x^2-7x-3$; 2) $2x^2-9x+4$.

2. Сократите дробь: 1) $\dfrac{3x^2+8x-3}{x^2-3x}$; 2) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$.

3.Упростите выражение: $\left(x+\dfrac{3x-x^2}{x+1}\right):\dfrac{x+3}{1-x^2}$; 2) $\left(a+\dfrac{6-a^2}{1+a^2}\right):\dfrac{6+a}{a^2-1}$.

Домашнее задание 4.

1. Решите уравнения: 1) $2x^2+7x-15=0$; 2) $x^3-8=0$;

3) $(x+3)(x-2)+(x+2)^2-3x-10=0$; 4) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3x-10}{4}$;

5) $\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{2x+3}{6}=\dfrac{x^2-11}{12}$; 6) $\sqrt{3x-2}=5$.

2. Разложите на множители квадратный трехчлен:

   1) $x^2+10x+9$; 2) $x^2-2x-15$; 3) $3x^2-x-4$.

3. Решите неравенства:

1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-5x-4\ge 0$; 3) $\dfrac{x-5}{x+4}<0$;

4) $\dfrac{x-3}{x+2}-1>0$; 5) $\dfrac{x-10}{5+x^2}<-3$; 6) $\dfrac{5-7x}{x+1}<x$.

4. Найдите область определения функции

1) $y=\sqrt{5x^2-6x+1}$; 2) $y=\sqrt{4+8x-5x^2}$.

Домашнее задание 5.

1. Построить на плоскости прямые

а) $x+y=3$; б) $-x+2y=4$; в) $y=4$; г) $x=-3$.

2. Изобразить на плоскости график квадратного трехчлена

а) $y=3x^2+11x-4$; б) $y=2x^2+x-3$.

3. Построить область, ограниченную линиями

а) $\begin{cases} y=x^2-x, \\ y=3x+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=2x^2-3x+4, \\ y=x+5,5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=4x, \\ y=2x, \\ 0\le x\le 3. \end{cases}$

Домашнее задание 6.

Выполнить преобразование.

1. $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2(\pi+\alpha)$; 2. $\cos^2(\pi-\alpha)-\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$;

3. $tg^2(270^o+\alpha)\sin^2(180^o+\alpha)$; 4. $ctg^2(360^o-\alpha)\cos^2(270^o-\alpha)$;

5. $\dfrac{ctg^2\frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}}$; 6. $\dfrac{tg^2 60^o\cos 60^o}{\sin 30^o}$; 7. $\dfrac{tg^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}$; 8. $\dfrac{ctg^2 30^o\sin 30^o}{\cos 60^o}$.

Домашнее задание 7.

Найти производные функции.

1. $y=\dfrac{8x^3}{3}-\sqrt{x}$; 2. $y=4x^5-3\cos 6x+\ln x$; 3. $y=\cos 3x\cdot e^{-2x}$;

4. $y=\dfrac{\sin 2x}{x^2+3x}$; 5. $y=\dfrac{\ln(x^2-5x)}{arctg 4x}$; 6. $y=\sqrt{x^2-5x}$.

Домашнее задание 8.

Найти производные функции.

1. $y=\dfrac{3x^2}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}$; 2. $y=\dfrac{1}{4}e^{-4x}+arctg 2x$; 3. $y=x^3\cdot\cos(2x-1)$;

2. $y=\dfrac{\cos x^2}{\sin x^3}$;   5. $y=\dfrac{\arcsin 2x}{\ln tgx}$;   6. $y=\sqrt{\sin^3 4x}$.

Домашнее задание 9.

Исследовать функцию на экстремум и построить ее график

1. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{9x}{4}+1$;   2. $y=5-3x-x^3$;   3. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

Подготовка к зачету

1. Решить уравнения:

1)$x^3 - 3x = 0$;   2) $2x^2 - 5x + 6 = 0$;   3) $(x+4)(2x-5) =0$;

4)$x^2 - 2x +6 = 0$;   5) $x^2 + 16 = 0$.

2. Упростить::1) $(81x^{-3})^{-\frac{2}{4}}$;   2) $(125a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\dfrac{a^{-3}}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}$;
3. Разложить многочлен на множители:1)$2^x - 2^{2x}$; 2) $a^3 - 5a^2 - 4a + 20$.
4. Вычислить: $12\dfrac{3}{7}:(1\dfrac{8}{15}+0,25-3\dfrac{1}{30}-1\dfrac{3}{4})$.
5. Решить систему: 1) $\begin{cases} y=4x+1, \\ y=x^2-6; \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x^3; \end{cases}$.
6. Упростить: $\left(\dfrac{10}{25-b^2}+\dfrac{-1}{5+b}-\dfrac{1}{5-b}\right)(25-10b+b^2)$
7. Упростить: 1) $\left(\dfrac{\sin 10^o-\sin 80^o}{\cos 80^o-\cos 10^o}\right)$;   2) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{2\sin(\pi+\alpha)}$;
8. Решить неравенства: 1) $|x|<2$;   2) $|x+3|\le 5$;   3) $|x+1|>4$;

4) $x^2-3x-4<0$; 5) $5(x-1)(x^2-4)>0$; 6) $\dfrac{3-2x}{x+1}\le 2$;   7) $-5\le 2x+3\le 2$.

9. Найти область определения функции: 1) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-x-2}}$;

2) $y=\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}$; 3) $y=\log_3\dfrac{x-4}{x+2}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{x(x+1)}$; 5) $y=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^2}{3}-3}}{x^2-4x}$.

10. При каких значениях «k» квадратное уравнение обладает данным свойством…

1) $x^2+\kappa x+\kappa-\dfrac{5}{4}=0$ − имеет два равных корня;

2) $x^2-2\kappa x-\kappa=0$ − не имеет корней;

3) $3x^2+2\kappa x+\kappa-6=0$ − имеет два комплексных корня;

4) $2x^2+2\kappa x+\kappa+12=0$ − имеет два кратных корня;

5) $x-2\kappa x-\kappa=0$ − имеет два действительных различных корня;

6) $x^2+\kappa x-\kappa-\dfrac{1}{4}=0$ − имеет два равных корня.

11. Найти пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2-16}=0;$ 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{4x^2-8x}=0;$ 3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=0.$

12. Найти производные функций

1) $y=x^2\sqrt{x}-\dfrac{4}{x^5}+2\sqrt{x};$ 2) $y=tg3x-e^{5x}+x^3;$ 3) $y=\sqrt{\sin 4x};$

4) $y=\ln(x-1)(x^2-3x);$ 5) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$.

13. Решить уравнение

1) $\ln(x-6)-2=\dfrac{1}{2}\ln(2x-3)-\ln 25;$ 2) $2^x-2^{x-2}=3.$

14. Построить линии 1) $y=2x-3;$ 2) $3x+y=6;$ 3) $y=\dfrac{2x-1}{x+2};$ 4) $y=2x^2-5x-3.$

15. Найти наибольшее и наименьшее значение $f(x)=2x^2-8x+3$, $x\in[0;3]$.

16. Построить график функции y=x ^{2} (x-3) с помощью производной.

Тестовые задания

1. $-5+(6-8)+(-3+9)=\ldots$ 1) 13; 2) -1; 3) 4; 4) -15.

2. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{12}=\cdots$ 1) $\dfrac{7}{12}$; 2) $-\dfrac{7}{12}$; 3) $\dfrac{3}{12}$; 4) $\dfrac{3}{8}$.

3. $\left(\frac{1000^3\cdot 10}{10^2\cdot 100^5}\right)^2$ =… 1) 10; 2) 10^3; 3)) 10^{-4}; 4) 0,01.

4. Если 4–7x= 7x+11, то x =… 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{15}{4}$; 4) -$\frac{1}{2}$.

5. Корни уравнения $6x^2+5x-1=0$ равны:

1) -1; -$\frac{1}{6}$; 2) -1; $\frac{1}{6}$; 3) 1; -$\frac{1}{6}$; 4) 1; $\frac{1}{3}$.

6. Разложение многочлена $3+x-2x^2$ на множители имеет вид:

1) $2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$; 2) $-2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$; 3) $-2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$; 4) $2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$.

7. $\log_4 6-\frac{1}{2}\log_4 9+\log_4 8=\cdots$ 1) $\log_4\frac{16}{3}$; 2) –1; 3) 0; 4) 2.

8. Решением неравенства $x^2-6x+9\geq 0$ является 1) x – любое; 2) (3;∞); 3)(–∞; –3); 4).

9. Если $8^{3x}\cdot 4^{1-x}=4^3$, то x=… 1) 2; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{4}{7}$.

10. Если $\log_3(x+4)=2$, то x=… 1) 4; 2) 5; 3) -2; 4) 0,5.

11. Если $\cos\frac{x}{4}=1$, то x=… 1) π+2πn; 2) 2 πn; 3) $\frac{\pi n}{2}$; 4) 8πn.

12. Одной из точек пересечения линий $x-2+2y=0$ и $x^2+1=y$ является…

1) (1;0); 2) (0;1); 3) (1;2); 4) (2;0).

13. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза BC = 4, sin B = 0,8, то катет AC = …

1) 2,4; 2) 3; 3) 3,2; 4) 4.

14. Решением неравенства $\log_{0,5}(2-x)\geq -2$ является:

1) (–∞;2); (–∞;2]; $[-2;2)$; $[-2;2)$.

15. Решением неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}\geq\frac{1}{16}$ является:

1) [2,5;∞); 2) (–∞;2,5]; 3) (–∞;2,5]; 4) (2,5; ∞).

16. Найти наибольшее значение функции $y=-x^2+4x+1$ на отрезке [1;4].

1) 4; 2) 1; 3) 5; 4) 2.

17. Найти минимум функции $y=x^3-6x^2+1$ …. 1) 0; 2) 24; 3) 30; 4) -31.

18. Найти интервал возрастания функции $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3$

1) (,6;∞); 2) (–∞;0][6;8); 3) (0;6); 4) [0;6].

19. Упростить $(a+3)^2+(a–3)(a+3)$…

1) 6a+18; 2) $2a^2+6a$; 3) 18; 4) 9.

20. Решение системы уравнений $\begin{cases} 2x+2y=10, \\ x-3y=-7. \end{cases}$ является…..

1) (2;3); 2) (3;2); 3) (0;2); 4) (1;3).

21. Произведение корней $(x^2-9)\cdot\sqrt{2-x}=0$

1) 3; 2) – 3; 3) – 18; 4) – 6.

22. При x = 4 значение дроби $\frac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$ равно…

1) 2; 2) – 1; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{4}$.

23. Упростите выражение $16 – 12\mathrm{Sin}^2\beta – 12\mathrm{Cos}^2\beta$…

1) 10; 2) 4; 3) 16; 4) – 8.

24. Сумма корней уравнения $\log_5(x^2-11x+43)=2$

1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11.

25. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 равен…

1) 12; 2) 14; 3) 10; 4) 8.

3.5. Итоговый контроль.

Вопросы к зачёту.

1. Определение функции, области определения и значений, четности, нечетности.
2. Графики элементарных функции. Преобразование графиков.
3. Алгебраические преобразования. Одночлены и многочлены, действия над ними формулы сокращённого умножения и деления. Деление многочленов.

4. Разложение многочленов на множители. Тождественное преобразование алгебраических выражений.
5. Алгебраические уравнения. Общие понятия. ОДЗ. Линейное уравнение, системы линейных уравнений.
6. Квадратные уравнения. Геометрическая интерпретация. Теорема Виета.
7. Биквадратные уравнения.
8. Иррациональные уравнения.
9. Системы уравнений.
10. Свойства числовых неравенств. Действия над неравенствами. Доказательство числовых неравенств.
11. Линейные неравенства и сводящиеся к ним. Графическое решение неравенств.
12. Квадратные неравенства и сводящиеся к ним. Метод интервалов.
13. Иррациональные неравенства.
14. Свойства тригонометрических функций, графики.
15. Основные тригонометрические формулы. Тригонометрические тождества.
16. Тригонометрические уравнения и неравенства.
17. Решение показательных уравнений. +
18. Логарифм числа. Действия над логарифмами.
19. Арифметическая прогрессия.
20. Геометрическая прогрессия и бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
21. Определение производной, геометрический и физический смысл производной.
22. Некоторые правила и формулы дифференцирования.
23. Максимум, минимум функции.
24. Наибольшее, наименьшее значение функции на отрезке.

Вариант заданий к зачету.

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 9}$.
2. Исследовать функцию на чётность-нечётность: $y = x^3 \sin x^2$.
3. Построить схематически график функции: $y = 1 - 2\cos 2x$.
4. Решить уравнение с помощью теоремы Виета $x^2 + 4x - 3 = 0$.
5. Решить биквадратное уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
6. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$
7. Решить неравенство: $\log_{\frac{x}{4}}(2 - x) > 1$.
8. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна $3n - 2n^2$.
Найти пятый член этой прогрессии.
9. Решить уравнение: $3(1 - \sin 2x) - 8\cos x = 3 - 8\sin x$.
10. Исследовать функцию $y = x^4 - 2x^2$ на наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[1; 2]$.

11 айти производную функции $y = x^2 \cdot \sin 3x$.

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2005, 2006, 2008, 2009.-464с.:а-ил,а-рис.

2. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ,2008.-480 с.:а-рис.

3. Мордковмч А. Г. Алгебра и начала анализа: 10-11кл.:Задачник для общеобразоват. Учереждений.− М.: Мнемозина, 2010.−315с.:ил.

б) дополнительная литература:

1. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М.: Высшее образование,2009.-646 с.:а-рис.

2. Тесты и контрольные работы по математике: учеб пособие/А.П. Иванов- М: Изд-во МФТИ,200.-272с.

5. Материально – техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием.

6. Оценочные средства аттестации поитогам освоения дисциплины.

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
1семестр

		Раздел 1	Раздел 2	Раздел 3	Раздел 4	Раздел 5	Раздел 6	Раздел 7	Раздел 8
	Виды работ	Осн. эле-мен. функ.	Преобр. Алгебр. Выраж.	Алгебр. урав. и систе-мы	Нера-венст-ва	Тригоно-метрия	Показ. и логар. функции	Числ. Послед-ова-тельно-сти	Производ-ные функции
1.	Конт. раб.			**5**	**5**				**5**
2.	Тест	**5**							
3.	Дом. За-дан-ия.	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
	Зачёт								**40**
	$\sum$	**10**	**5**	**10**	**10**	**5**	**5**	**5**	**10**

$\sum$ 60 +40=100

Контрольная работа:	Тест 25 заданий:	Домашнее задание
	7-11 -1	
«5»-5 б	7-12 –2	«5» -5 б
«4»-4 б	13-19 –3	«4» -4 б
«3»-3 б	20-22 –4	«3» - 3 б
	23-25 –5	

Содержание