Министерство образования Российской Федерации

Амурский государственный университет

Факультет математики и информатики

Еремина В.В.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вычислительный практикум

Благовещенск
2005

ББК 22.171

Е 70

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Еремина В.В.

Теория вероятностей: Вычислительный практикум. Изд-во Амурского гос. ун-та, 2005. 97 с.

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения, вопросы текущего контроля знаний и задания для выполнения практических работ, составленных в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы» для студентов очной формы обучения по специальностям 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и 230201 «Информационные системы и технологии».

Предназначается для студентов и преподавателей.

Рецензенты: *Л.Л. Пашина*, доцент кафедры статистики и экономического анализа ДальГАУ, кандидат экономических наук, доцент
Т.А. Макарчук, ст. преподаватель кафедры общей математики и информатики АмГУ, кандидат педагогических наук

Содержание

Введение

Предмет теории вероятностей является одной из базовых дисциплин, необходимых для практической деятельности инженеров в областях информационных технологий и управляющих систем. Кроме того, понятия и математический аппарат данной области знаний используется в преподавании таких специальных дисциплин, как: «Надежность АСОИиУ», «Надежность ИС», «Моделирование систем» и т. п.

Предлагаемое учебное пособие содержит описание десяти практических занятий по разделу «Теория вероятностей» дисциплины «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», при этом четыре последних занятия разработаны в нескольких индивидуальных вариантах для самостоятельной работы студентов в группах. Каждое занятие содержит краткие теоретические сведения, а также вопросы текущего контроля знаний. Структура пособия включает в себя три приложения, первое из которых представляет собой пример контрольной работы.

Цель практикума заключается в формировании и закреплении навыков в вычислениях вероятности события, усвоении методики использования теорем при решении задач.

Практическое занятие №1

Тема: Случайные события

1. Случайное событие

Человека окружает мир событий. Он часто замечает такой факт: одни события при реализации данного комплекса условий непременно происходят, другие же могут произойти, а могут и не произойти.

Случайным событием называется такой исход наблюдения или эксперимента, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может не произойти.

2. Пространство элементарных исходов. Операции над событиями

Пространством элементарных исходов Ω («омега») называется множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют *элементарными исходами* и обозначают буквой ω («омега») с индексами или без.

Событиями мы будем называть подмножества множества Ω. Говорят, что в результате эксперимента *произошло событие* $A \subseteq \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A.

Замечание. Вообще говоря, можно назвать событиями не обязательно все подмножества множества Ω, а лишь множества из некоторого набора подмножеств.

Пример 1. Один раз подбрасывается одна *игральная кость* (кубик). Самый разумный способ задать пространство элементарных исходов таков: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, элементарные исходы здесь соответствуют здесь числу выпавших очков.

Примеры событий: A = {1, 2} – выпало одно или два очка, A = {1, 3, 5} – выпало нечетное число очков.

Пример 2. Два раза подбрасывается одна *игральная кость* (кубик). Или, что то же самое, один раз подбрасывается две игральные кости. Как мы увидим в дальнейшем, здесь самый разумный способ задать пространство элементарных исходов – считать результатом эксперимента упорядоченную пару чисел (i, j), в которой $1 \le i, j \le 6$ и $i(j)$ есть число очков, выпавших при первом (втором) подбрасывании: $\Omega = \{(i, j)$, где $1 \le i, j \le 6\}$.

Примеры событий:

A = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)} – при первом подбрасывании выпало одно очко,

A = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)} – при двух подбрасываниях выпало одинаковое число очков.

Пример 3. На поверхность стола бросается монета. Результатом эксперимента можно считать координату центра монеты (если не безразличен угол поворота монеты, то можно добавить и величину этого угла). Пространство элементарных исходов – множество точек стола (во втором случае - множество пар $\{(x,\varphi)\}$, где $x \in \boldsymbol{R}^2$ – точка стола и $\varphi \in [0, 2\pi)$ – угол поворота). Число элементарных исходов такого эксперимента несчетно.

Пример 4. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет вверх орлом. Пространство элементарных исходов состоит из бесконечного, но счетного числа исходов: $\Omega = \{p, po, ppo, pppo, ppppo, pppppo, \dots .\}$, где p и o обозначают выпадение решки и орла при одном подбрасывании, соответственно.

3. Достоверное и невозможное событие

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, то есть единственное событие, включающее все без исключения элементарные исходы - событие Ω.

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента, то есть событие, не содержащее ни одного элементарного исхода («пустое множество» $\varnothing$). Заметим, что всегда $\varnothing \subset \Omega$.

4. Операции над событиями. Отношения между событиями

Пусть A и B – события. *Объединением* $A \cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло либо A, либо B, либо оба события одновременно. На языке теории множеств $A \cup B$ есть множество, содержащее как элементарные исходы, входящие в A, так и элементарные исходы, входящие в B. *Пересечением* $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что оба события A и B произошли одновременно. То есть $A \cap B$ есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие одновременно в A и в B. *Дополнением* A/B события B до A называется событие, состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B. То есть A/B есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие в A, но не входящие в B.

Противоположным (или *дополнительным*) к событию A называется событие $\overline{A} = \Omega / A$, состоящее в том, что событие A в результате эксперимента не произошло. Иначе говоря, $\overline{A}$ есть множество, содержащее элементарные исходы, не входящие в A.

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$.

События A_1, …, A_n называются *попарно несовместными*, если для любых $i \neq j$, в которой $1 \le i, j \le n$, события A_i и A_j несовместны.

Говорят, что событие A *влечет* событие B, и пишут $A \subseteq B$, если всегда, как только происходит событие A, происходит и событие B. На языке теории множеств это означает, что любой элементарный исход, входящий в А, одновременно входит и в событие B.

Задания к практическому занятию

1. Какие из следующих событий достоверные:

A – «два попадания при трех выстрелах»;

B – «выплата рубля семью монетами»;

C – «наугад выбранное трехзначное число не больше 1000»;

E – «наугад выбранное число, составленное из цифр 1, 2, 3 без повторений меньше 400»?

2. Какие из следующих событий невозможные:

A – «опаздывание ленинградского экспресса в субботние дни»;

B – «появление 17 очков при бросании 3 игральных костей»;

C – «появление слова «мама» при случайном наборе букв а, а, м, м»;

E – «появление составленного из цифр 1, 23, 3, 7, 8 и кратного 9 числа при случайном однократном наборе указанных цифр»;

D – «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 3 числа при произвольном однократном наборе указанных цифр»?

3. Укажите достоверные и невозможные события:

A – «выплата десяти рублей 4 монетами»;

B – «появление сразу 3 лайнеров над аэропортом»;

C – «попадание в мишень при 3 выстрелах»;

E – «появление в окошке счетчика трехзначного числа, составленного из цифр 1, 2, 3 и кратного 5».

4. Какие из событий являются частью другого события:

a. A – «попадание в мишень первым выстрелом»;

B – «попадание в мишень по меньшей мере одним из 4 выстрелов»;

C – «попадание точно в мишень одним из 2 выстрелов»;

E – «попадание в мишень не более чем 5 выстрелами»?

b. Мишень изображена на рисунке 1:

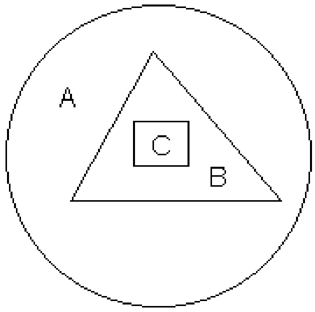

Рисунок 1.

A – «попадание в круг»;

B – «попадание в треугольник»;

C – «попадание в квадрат».

5. Событие A – «попадание в мишень первым выстрелом», событие B – «попадание в мишень вторым выстрелом». В чем состоит событие $A \cup B$?
6. Событие A – «ученик учится без троек», событие B – «ученик учится без двоек», событие C – «ученик не отличник». В чем состоит событие $A \cup B \cup C$?
7. Событие A – «лотерейный выигрыш 1 тыс.», событие B – «лотерейный выигрыш 2 тыс.», событие C – «лотерейный выигрыш 3 тыс.», событие D – «лотерейный выигрыш 4 тыс.». В чем состоит событие $A \cup B \cup C \cup D$?
8. Событие A – «появление двух орлов при подбрасывании двух монет», событие B – «появление орла и решки при подбрасывании двух монет». В чем состоит событие $A \cup B$?
9. Событие A – «попадание в мишень первым выстрелом», событие B – «попадание в мишень вторым выстрелом». В чем состоит событие $A \cap B$?
10. Событие А – «появление нечетного числа очков при бросании игральной кости», событие B – «не появление 3 очков при подбрасывании игральной кости», событие C – «не появление 5 очков при бросании игральной кости ». В чем состоят событие $A \cap B \cap C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$?

11. Рассмотрев конкретные события A, B, C, убедитесь в том, что:
$A \cap B = B \cap A$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
При решении пользуйтесь геометрическим представлением событий и их соотношений.

Контрольные вопросы по теме

1. Что называют случайным событием
2. Приведите примеры случайных событий
3. Достоверные и невозможные случайные события
4. Действия над случайными событиями

Практическое занятие №2

Тема: Комбинаторика

1. Общие правила комбинаторики

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству.

Правило суммы: Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B – k способами (не такими, как A), то объект «либо A, либо B» можно выбрать $m + k = n$ способами.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пары объектов A и B можно выбрать $m \cdot k$ способами.

2. Генеральная совокупность без повторений. Выборки без повторений

Генеральная совокупность без повторений – это набор некоторого конечного числа различных элементов: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Выборкой без повторений объема m ($m \le n$) называется произвольная группа m элементов генеральной совокупности без повторений.

Минимальным признаком отличия одной выборки от другой может быть:

a) их различие по крайней мере одним элементом;

b) их различие порядком расположения элементов.

Размещениями без повторений из n элементов по m называются такие выборки, которые имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений без повторений определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Перестановками без повторений из n элементов называются размещения без повторений из n элементов по n, т. е. размещения, отличающиеся одно от другого только порядком расположения элементов.

Число перестановок без повторений определяется формулой:

$$P_n = n!\,.$$

Сочетаниями без повторений из n элементов по m называются такие размещения без повторений из n элементов по m элементов, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний без повторений определяется формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

3. Генеральная совокупность с повторениями. Выборки с повторениями

Генеральная совокупность с повторениями – это набор элементов n различных классов, когда элементы, принадлежащие одному классу, считаются одинаковыми:

$$\underbrace{a, a, \ldots, a}_{\text{1-й класс}}\ \underbrace{b, b, \ldots, b,}_{\text{2-й класс}}\ \underbrace{l, l, \ldots, l.}_{\text{n-й класс}}$$

Число элементов в каждом из этих n классов неограниченное.

Выборкой с повторениями объема m называется произвольная группа m элементов генеральной совокупности с повторениями.

Минимальным признаком отличия одной выборки от другой может быть:

a) их различие по крайней мере одним элементом;

b) их различие порядком расположения элементов.

Размещениями с повторениями из элементов n классов по m называются такие выборки, которые имея по m элементов, выбранных из числа элементов данных n классов генеральной совокупности с повторениями, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений с повторениями определяется формулой

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Перестановками с повторениями по k элементов из n различных классов называются размещения с повторениями объема k, которые одно от другого отличаются только порядком расположения элементов, когда от i-го класса в каждой выборке участвует k_i элементов.

Число перестановок с повторениями определяется формулой:

$$P_{k_1;k_2;...;k_n} = \frac{k!}{k_1!k_2!...k_n!},$$

где $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Сочетаниями с повторениями из элементов n классов по m называются такие размещения с повторениями из элементов n классов по m, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний с повторениями определяется формулой:

$$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Задания к практическому занятию

1. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?
2. В группе 25 студентов. Необходимо избрать старосту, заместителя старосты и культорга группы. Сколькими способами можно образовать эту руководящую тройку, если одно лицо может занимать только один пост?
3. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж космического корабля: командир корабля, первый его помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командующая тройка может быть отобрана из числа 25 готовящихся к полету летчиков, два бортинженера – из числа 20 специалистов, в совершенстве знающих устройство космического корабля, а врач – из числа 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?
4. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?
5. Игрок сначала бросает белую игральную кость, потом черную. Сколько может быть случаев, когда число очков, появившихся на белой кости, больше числа очков, появившихся на черной?

6. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

7. В одной арабской сказке речь идет о такой задаче. Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью спрятать награбленное необходимо выделить 5 разбойников. Сколькими способами атаман может назначить пятерых так, чтобы между ними не было распрей?

8. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?

9. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры могут повторяться?

10. На книжной полке плотно уставлено n книг. Сколькими способами можно взять с полки k книг при условии, что ни разу не будут вынуты рядом стоящие дети?

11. Докажите, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Контрольные вопросы по теме

1. Что называют комбинаторикой?
2. Сформулируйте правила комбинаторики.
3. Что такое генеральная совокупность и выборка без повторений?
4. Дайте определения размещениям, перестановкам, сочетаниям без повторений и выведите для них формулы.
5. Что такое генеральная совокупность и выборка с повторениями?
6. Дайте определения размещениям, перестановкам, сочетаниям с повторениями и выведите для них формулы.

Практическое занятие №3

Тема: Классическое, статистическое и геометрические определения вероятностей.

1. Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события A называется отношение числа m равновозможных элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных элементарных событий пространства Ω, определяемого данным испытанием, т. е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности:

1. $0 \le P(A) \le 1$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $P(\Omega) = 1$;
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
5. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \varnothing$.

2. Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события A называется величина, определяемая равенством

$$W(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число испытаний, в которых событие A наступило, n – общее число произведенных испытаний. При *статистическом* определении в качестве вероятности события принимают его относительную частоту.

3. Геометрическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий Ω представляет собой некоторую область плоскости. Тогда в качестве событий будем рассматривать области A, содержащиеся в Ω.

Вероятность попадания в область A точки, наудачу выбранной из области Ω, называется *геометрической вероятностью* события A и находится по формуле:

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ площади областей A и Ω соответственно.

Случай, когда Ω представляет собой отрезок или трехмерную область, рассматривается аналогично.

Задачи к практическому занятию

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: a) сумма выпавших очков равна семи; b) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; c) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; d) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: a) одну; b) две; c) три.
3. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «решка».
4. В коробке шесть одинаково занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

5. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести)
6. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
7. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: a) нет бракованных; b) нет годных.
8. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
9. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
10. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 5 отличников.
11. В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашенные. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среду двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.
12. По цели произведено 20 выстрелов, при этом было зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.
13. При испытаниях партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. найти число годных приборов, если всего было проверено 200 штук.

14.На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

15.В круге радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная внутри большого круга, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна его площади и не зависит от месторасположения.

16.Плоскость разграфлена прямыми параллельными линиями, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из линий.

Контрольные вопросы по теме

1. Что называется равновозможными элементарными событиями?
2. Что называется благоприятствующим событием?
3. Дайте классическое определение вероятностей.
4. Дайте статистическое определение вероятностей. Чем отличаются классическое и статистическое определения вероятностей?
5. Сформулируйте геометрическое определение вероятностей. Решите задачу Бюффона.

Практическое занятие №4

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Вероятность появления несовместных событий

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n)$.

2. Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n образующих полную группу, равна единице:

$P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) = 1$.

3. Противоположные события

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Задачи к практическому занятию

1. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.
2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

4. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: a) только один элемент; b) только два элемента; c) все три элемента.

5. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: a) не более чем в трех ящиках; b) не менее чем в двух ящиках.

6. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

7. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены четыре точки. Найти вероятности следующих событий: a) все четыре точки попадут внутрь треугольника; b) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет на каждый «малый» сегмент. Предполагается, что вероятность попадания точки в фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

8. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

9. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Контрольные вопросы по теме

1. Какие события называются несовместными?

2. Сформулируйте и докажите теорему о сумме несовместных событий, и следствия из нее.
3. Полная группа событий. Теорема о сумме вероятностей событий, образующих полную группу.
4. Дайте определение противоположных событий. Докажите теорему о сумме вероятностей противоположных событий

Практическое занятие №5

Тема: Условная вероятность

1. Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило ($P(A) > 0$), т. е.

$P_A(B) = P(AB) / P(A)$.

2. Теорема умножения вероятностей

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое уже наступило:

$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B)$.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P_{A1}(A_2)\cdot\ \ldots P_{A1\,A2\cdot\ldots\cdot An\text{-}1}(A_n)$.

3. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Событие В называют независимым от события А, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$P_A(B) = P(B)$.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий (теорема умножения независимых событий):

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

4. Вероятность появления хотя бы одного события

Несколько событий называют *независимыми в совокупности* (или просто *независимыми*), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ..., A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

5. Вероятность появления совместных событий

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$.

Следствие. Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Для тех совместных событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(AB) – P(AC) – P(BC) + P(ABC).$$

Задачи к практическому занятию

1. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

2. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

3. Из стандартного набора домино (28 штук) берется наудачу одна кость. Какова вероятность того, что эта кость будет дублем (т. е. будет иметь вид 1-1, 4-4 и т. д.), если известно, что сумма очков на ней – четное число?

4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

5. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья ($A\overline{B}$) – 7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья ($\overline{A}B$) – 8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{A}\overline{B}$) – 78,2%. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

6. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

7. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

8. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна $0,9984$. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

9. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

10.В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий: a) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5; b) извлеченные шары будут иметь номера 1, 4, 5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

Контрольные вопросы по теме

1. Дайте определение условной вероятности
2. Докажите теорему умножения вероятностей и сформулируйте следствие из нее.
3. Что такое независимые события, докажите теорему умножения для независимых событий.
4. Вероятность появления хотя бы одного события.
5. Какие события называются совместными.
6. Докажите теорему сложения вероятностей совместных событий.
7. Сформулируйте теорему сложения вероятностей совместных, независимых и зависимых событий

Практическое занятие №6

Тема: Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

1. Формула полной вероятности

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу, причем $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$ известны и $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$, и пусть условные вероятности $P_{B1}(A)$, $P_{B2}(A)$, …, $P_{Bn}(A)$ известны.

Теорема. Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A).$$

2. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу событий. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_A(B_i)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)$.

Задачи к практическому занятию

1. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).
2. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

3. В пирамиде десять винтовок, четыре из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

4. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

5. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

6. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *K*, 30% - с заболеванием *L*, 20% - с заболеванием *M*. Вероятность полного излечения болезни *K* равна 0,7; для болезней *L* и *M* эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *K*.

7. Событие A может появиться при условии появления лишь одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез, т. е. были найдены условные вероятности $P_A(B_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Доказать, что $\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1$.

8. Событие A может появиться при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез, т. е. были найдены условные вероятности этих гипотез, причем оказалось, что $P_A(B_1) = 0{,}6$ и $P_A(B_2) = 0{,}3$. Чему равна условная вероятность $P_A(B_3)$ гипотезы B_3?

Контрольные вопросы по теме

1. Какие события образуют полную группу?
2. Дайте определение условной вероятности.
3. Выведите формулу полной вероятности.
4. Получите формулы Бейеса.

Практическое занятие №7

Тема: Независимые повторные испытания

1. Формула Бернулли

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0<p<1$), а вероятность не наступления события A равна $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит:

a) менее k раз, - находят по формуле $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$;
b) более k раз, - находят по формуле $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$;
c) не менее k раз, - находят по формуле $P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$;
d) не более k раз, - находят по формуле $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$;

e) хотя бы один раз, - находят по формуле $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$;

f) не менее k_1 раз и не более k_2 раз, - находят по формуле $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1) + \ldots + P_n(k_2)$.

Непосредственное применение формулы Бернулли при большом числе испытаний связано с громоздкими вычислениями. Поэтому при больших n вместо нее, как правило, используют приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

2. Формула Пуассона

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала (т. е. $p < 0{,}1$; $npq < 10$; $np=\lambda$), то вероятность $P_n(k)$ можно приближенно найти по формуле Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

3. Локальная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 2; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, т. к. функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

4. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1;k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ - функция Лапласа,

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции *Лапласа* для положительных значений x ($0 \le x \le 5$) приведена в приложении 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x)=0,5$. Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, учитывая, что функция *Лапласа* нечетная, т. е. $\Phi(-x)= -\Phi(x)$.

5. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0<p<1$), абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

5. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0, определяют из неравенства

$$np - q \le k_0 < np + p,$$

причем:

a) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

b) если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и $k_0 + 1$;

c) если число np – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно $k_0 = np$.

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Десять человек пришли на избирательный участок и случайным образом отдали свои голоса за одного из пяти кандидатов в президенты. Какова вероятность того, что за первого по списку кандидата проголосовало 3 человека?
2. Некачественные изделия составляют 2% всей продукции цеха. Какова вероятность того, что среди восьми наудачу взятых изделий окажется: a) не более 5 некачественных изделий; b) два или три некачественных изделия.

3. Телефонная станция A, обслуживающая 2000 абонентов, соединяет их со станцией B. Устанавливать 2000 проводов от станции A до B нерационально. Сколько линий проводов необходимо провести от A до B, чтобы только один из сотни абонентов станции A, наугад выбравший момент разговора с абонентом станции B, нашел бы все линии занятыми? Вероятность того, что при случайном звонке линия занята, равна 1/30.

4. 10000 деталей произвольно распределяются по 9 ящикам. Какова вероятность того, что в первом ящике не менее 1100 и не более 1200 деталей?

5. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

6. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: a) наивероятнейшее число отказавших элементов; b) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; c) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

Вариант II

1. Вероятность выигрыша по билету лотереи «Золотой ключик» равна 0,125. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из пяти.

2. Какова вероятность того, что среди 730 пассажиров поезда: a) пятеро родились 8 марта; b) трое родились 12 июля?

3. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний. Если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

4. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

5. Игральную кость бросают 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 1900 и не более 2100 раз?

6. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Приборы испытываются независимо друг от друга. Что вероятнее: отказ 10 приборов при испытании 80, или отказ 15 при испытании120?

Вариант III

1. По статистике в городе N в среднем 10% заключенных браков в течение года заканчиваются разводом. Какова вероятность того, что из 8 случайно отобранных пар, заключивших брак, в течение года: a) ни одна пара не разведется; b) разведутся 2 пары?

2. Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1200 знаков, равна 0,005. Найти вероятность того, что при наборе будет допущено: a) 6 ошибок; b) хотя бы одна ошибка.

3. Монета подбрасывается 2020 раз. Какова вероятность того, что орел выпадет 1000 раз?

4. Найдите такое число k, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что среди 900 новорожденных более k мальчиков. Вероятность рождения мальчика 0,515.

5. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

6. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

Вариант IV

1. Вероятность выхода на линию каждого из 18 такси равна 0,9. Какова вероятность нормальной работы таксопарка в течение дня, если для этого необходимо иметь на линии не менее 15 такси?

2. Вероятность выхода из строя одного элемента устройства, в течение t часов работы, равна 0,002. Какова вероятность того, что за время t из 1500 независимо работающих элементов выйдет из строя: а) 4 элемента; b) не более 3 элементов?

3. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 30.

4. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,98 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысила ε.

5. Всхожесть семян данного сорта пшеницы составляет 70%. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян взойдут 500.

6. 70% продукции объединения «Вилия» высшего сорта. Какова вероятность того, что среди 1000 изделий этого объединения высшего сорта будет не менее 682 и не более 760 изделий?

Вариант V

1. В электричку из 4 вагонов садятся наудачу 8 пассажиров. Какова вероятность того, что в каждый вагон вошло по 2 человека?

2. Вероятность попадания в мишень стрелком примерно 0,001. Какова вероятность того, что при 5000 выстрелов будет не меньше трех попаданий?

3. В каждом из 1000 ящиков 5000 белых и столько же черных пуговиц. Из каждого ящика наугад вынимаются по 3 пуговицы. Какова вероятность,

что число ящиков, из которых вынуты 3 пуговицы одного цвета, не меньше чем 220 и не больше чем 260?

4. В городе M из каждых 100 семей 85 имеют цветные телевизоры. какова вероятность того, что из 400 семей 340 имеют такие телевизоры?

5. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила ε.

6. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

Вариант VI

1. Считая, что в среднем 15% открывающихся малых предприятий становятся в течение года банкротами, найти вероятность того, что из 10 новых малых предприятий за это время банкротами станут: a) одно предприятие; b) более трех предприятий.

2. Какова вероятность того, что среди 500 наугад отобранных человек: a) пятеро родились 4 апреля; b) трое родились 12 июля; c) ни один не родился 22 сентября?

3. Найти наивероятнейшее число правильно набитых перфораторщицей перфокарт среди 19 перфокарт, если вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,1.

4. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95

можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?

5. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

6. Вероятность изготовления доброкачественного изделия равна 0,9. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 300 изделий 95% окажется доброкачественных.

Контрольные вопросы по теме

1. Дайте определение последовательности независимых испытаний.
2. Изложите схему Бернулли.
3. Докажите формулу Бернулли.
4. Сформулируйте локальную теорему Муавра – Лапласа.
5. Докажите теорему Пуассона.
6. Области применения теоремы Пуассона и локальной теоремы Муавра – Лапласа.

Практическое занятие №8

Тема: Дискретные случайные величины

1. Случайная величина (СВ). Функция распределения СВ

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Используя теоретико-множественную трактовку, можно дать более строгое определение: *случайная величина* X есть числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω, т. е. СВ X каждому элементарному событию ω ставит в соответствие действительное число $X=X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Случайная величина задается *законом распределения*. *Закон распределения* СВ – любое правило (таблица, функция или график), которое позволяет находить вероятности того, что данная СВ примет конкретное значение или попадет в заданный интервал. Если СВ X задана законом распределения, то говорят, что она распределена по этому закону.

Универсальным способом задания закона распределения СВ X является функция распределения. *Функцией распределения* СВ X называется функция $F(x)$, которая для $\forall\ x \in R$ равна вероятности события $\{X< x\}$, т. е. $F(x) = P(X< x)$.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_1) \ge F(x_2)$, если $x_1 \ge x_2$;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x)$ – непрерывна слева в любой точке x, т. е. $F(x-0) = F(x)$, $x \in R$;
5. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

2. Дискретная случайная величина (ДСВ)

Дискретной называют СВ, возможные значения которой, есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Число возможных значений ДСВ может быть конечным или бесконечным (счетным).

Законом распределения ДСВ называется перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения ДСВ X

может быть задан в виде таблицы (*ряда распределения*), первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графически ряд распределения изображают в виде *многоугольника распределения* (*полигона*), для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_i(x_i; p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности), и соединяют их отрезками прямых.

Функция распределения ДСВ имеет вид

$F(x) = \Sigma\, p_i,$

где суммирование ведется по всем индексам i, для которых $x_i < x$.

3. Основные законы распределения ДСВ

<table>
<tr><th>Закон распределения</th><th>Формула</th><th colspan="2">Условия</th></tr>
<tr><td>Биномиальное</td><td>$P_n(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$</td><td rowspan="3">Производятся n независимых испытаний, вероятность появления каждого постоянна и равна p ($0<p<1$), а вероятность не наступления равна q=1-p. k – значение СВ X.</td><td>В n испытаниях событие A произошло k раз</td></tr>
<tr><td>Распределение Пуассона</td><td>$P_n(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$</td><td>В n испытаниях событие A произошло k раз. $\lambda = np,\ n \to \infty,\ p \to 0$</td></tr>
<tr><td>Геометрическое распределение</td><td>$P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$</td><td>Испытания проводятся до первого появления события A. k – количество проведенных испытаний.</td></tr>
</table>

Закон распределения	Формула	Условия
Гипергеометрическое	$P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	Среди N элементов имеется M элементов с заданными качествами. Отбирают n изделий, среди которых k с заданными свойствами.
Равномерное	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	Рассматривается в случае одного испытания, элементарные исходы которого равновозможны. k – значение СВ X.

4. Схема решения задач на составление ряда распределения ДСВ

1) Определить СВ в рассматриваемой задаче.
2) Перечислить все возможные значения СВ.
3) Определить закон распределения вероятностей СВ согласно условию задачи.
4) Найти вероятности возможных значений СВ по соответствующей формуле.
5) Выполнить проверку $\sum\limits_i p_i = 1$.

5. Числовые характеристики ДСВ

Закон распределения полностью характеризует СВ. Часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями, т. е. числами, которые описывают СВ суммарно. Такие числа называют *числовыми характеристиками* СВ. К числу важных характеристик относятся:

а) *Математическое ожидание* (или среднее значение) $M(X)$ ДСВ X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их соответствующие вероятности:

$$M(X)=\sum_i x_i p_i\ .$$

Если ДСВ принимает конечное число значений x_1, x_2, ..., x_n, то ее математическое ожидание находится по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ .$$

Если же ДСВ принимает счетное число значений, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\ ,$$

при этом математическое ожидание существует, если ряд в правой части этой формулы абсолютно сходится.

b) *Дисперсия* (рассеяние) ДСВ X – математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X-M(X))^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot p_i\ .$$

Часто для вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X)=M(X)^2-M^2(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right)^2\cdot p_i-M^2(X)\,.$$

c) *Среднее квадратическое отклонение* СВ X называется число $\sigma(X)$, определяемое равенством $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример 1. В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Построить ряд распределения числа длинных волокон среди 4 взятых наудачу волокон.

Решение: Дискретная случайная величина X – число длинных волокон . Возможные значения ДСВ X: 0, 1, 2, 3, 4. Проводимые испытания независимы. Каждое испытание имеет два исхода: событие A – взято длинное волокно, событие $\overline{A}$ – взято короткое волокно. Вероятность события A постоянна и равна p = 0,8. Следовательно, ДСВ имеет биномиальное распределение.

Найдем вероятности возможных значений ДСВ по формуле $P_n(X=k)=C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где k – принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, n = 4, q = 1 – 0,8 = 0,2. Полученные значения занесем в таблицу:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Сделаем проверку:

$\Sigma\, p_i$ = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.

Пример 2. В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух спортсменов. Построить ряд распределения числа перворазрядников среди выбранных.

Решение: Дискретная случайная величина X – число перворазрядников в выборке. Возможные значения ДСВ X: 0, 1, 2. ДСВ имеет гипергеометрическое распределение.

Найдем вероятности возможных значений ДСВ по формуле

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

где k – принимает значения 0, 1, 2; n = 2; N = 16; M = 6.

Полученные значения занесем в таблицу:

X	0	1	2
P	3/8	4/8	1/8

Сделаем проверку:

$\Sigma\, p_i$ = 3/8 + 4/8 + 1/8 = 1.

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	-3	-2	0	1	3
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 0)$, $P(|X| > 2)$.

2. Вероятность попадания из винтовки с оптическим прицелом в цель при одном выстреле равна ¾. Составить таблицу распределения числа попаданий при четырех выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.
3. У спортсмена перворазрядника 4 патрона. Он стреляет по мишени, пока не попадет, или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить таблицу распределения числа выстрелов. Сколько раз в среднем придется стрелять спортсмену?
4. В ящике стола 5 синих карандашей и 3 желтых. Выбирают наудачу 3 карандаша. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа желтых карандашей среди трех выбранных. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.
5. Найти среднее число страниц с опечатками, если книга содержит 1000 страниц, а вероятность опечатки на одной странице равна 0,05.

Вариант II

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	0	2	4	6	8
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 2)$, $P(X < 2)$.

12. По одному и тому же маршруту следуют три автобуса. Для каждого автобуса вероятность прибыть на конечную остановку по расписанию равна 0,8. Составить рад распределения числа автобусов, прибывших на конечную остановку по расписанию. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

13. Жонглер в цирке, имея 5 колец, набрасывает их на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования колец. Составить ряд распределения числа бросков. Сколько в среднем бросков придется сделать жонглеру?

14. В партии из шести лампочек имеется 2 бракованные. Наудачу отобраны четыре лампочки. Составить закон распределения числа бракованных лампочек среди отобранных. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

15. Наладчик обслуживает в цехе 300 станков. Вероятность поломки в течение времени t на станке одинакова и равна 0,05. Каково среднее число поломок за время t?

Вариант III

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 0)$, $P(X^2 > 2)$.

2. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,4. Построить ряд распределения числа библиотек, которые он может посетить, если ему доступны 4 библиотеки. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

3. Бросается игральная кость до первого выпадения шести очков. Составить ряд распределения числа бросков. Сколько раз в среднем придется бросать игральную кость?

4. На заводе имеется 15 инженеров, среди которых 2 женщины. Для дежурства на смену выходят 5 человек. Составить ряд распределения числа бракованных женщин, попавших в выборку. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

5. АТС содержит 2000 одинаково надежных проводов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,005. Каково для данной АТС среднее число оказавших проводов?

Вариант IV

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	-3	-2	0	4	5
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 0)$, $P(X > 2)$.

2. Тест по математике содержит четыре вопроса. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Ученик к тесту не готов и просто угадывает правильный ответ. Составить ряд распределения числа правильных ответов, данных учеником. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

3. Ребенок бросает мяч в корзину до первого попадания. Составить закон распределения числа бросков, если ребенок забрасывает мяч в корзину с вероятностью 0,6 и он может сделать не более 4 бросков. Сколько в среднем сделает броско ребенок?

4. Группа студентов, состоящая из 12 человек, среди которых семь девушек, распределяет по жребию 3 билета в театр. Составить закон распределения числа юношей, получивших билеты. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

5. Производится 25 независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найти дисперсию числа появления успеха в этих испытаниях.

Вариант V

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	2	4	6	8	10
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 8)$, $P(X < 4)$.

2. Всхожесть семян пшеницы составляет 70%. Посеяно 5 семян. Составить закон распределения числа взошедших семян. Найти $M(X)$, $D(X)$, σ (X). Построить многоугольник распределения.

3. Дети играют в фанты. Один ребенок (ведущий) отворачивается, все остальные загадывают желание. Если ведущий отгадал желание, то его меняют на другого ведущего. Если не отгадал, то он снова отворачивается и все повторяется сначала. Если ведущий не отгадал желание с четырех попыток, то для него игра прекращается. Составить закон распределения числа попыток ведущего отгадать желание. Найти среднее число попыток для ведущего?

4. У дежурного имеется набор из 7 ключей, среди которых 2 одинаковых. Выбирают наудачу 4 ключа. Составить закон распределения числа одинаковых ключей, оказавшихся в выборке. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

5. Прядильщица обслуживает в цехе 1000 веретен. Вероятность обрыва нити в течение времени t на каждом веретене одинакова и равна 0,0005. Каково среднее число обрывов нити за время t?

Вариант VI

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	2	4	6	8	10
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 4)$, $P(X < 11)$.

2. Из всей выпускаемой заводом продукции 95% составляют стандартные изделия. Наугад отобрано 6 деталей. Составить закон распределения стандартных деталей среди шести отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.
3. Дети затеяли интересную игру. В одной из трех совершенно одинаковых шкатулок спрятан красивый значок. Желающий отгадать наугад выбирает шкатулку и проверяет, есть ли в ней значок. Если значка в ней не оказалось, он должен отвернуться. За его спиной шкатулки переставляются местами. Ему предлагают попытать счастье еще раз. Игра продолжается до обнаружения значка. Составить закон распределения числа попыток ведущего отгадать шкатулку со значком. Найти среднее число попыток для ведущего?
4. Имеется 8 билетов в театр, из которых 6 билетов в партер. Наудачу выбирается 4 билета. Составить закон распределения числа билетов в партер, оказавшихся в выборке. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.
5. АТС получает в среднем за час 540 вызовов. Какова вероятность того, что в данную минуту она получит ровно 20 вызовов?

Контрольные вопросы по теме

1. Дайте определение случайной величины. Что называют значением СВ?
2. Какую СВ называют дискретной случайной величиной?
3. Что такое закон распределения ДСВ?
4. Что такое ряд распределения ДСВ?
5. Всегда ли закон распределения ДСВ имеет вид ряда?

6. Дайте определение функции распределения ДСВ. Сформулируйте и докажите ее свойства.
7. Дайте определение математического ожидания ДСВ, сформулируйте и докажите его свойства.
8. Дайте определение дисперсии ДСВ, сформулируйте и докажите ее свойства.
9. Дайте определение среднего квадратического отклонения.
10. Перечислите известные законы распределения ДСВ, запишите формулы, по которым определяются вероятности в каждом из распределений. Что является СВ в каждом из законов распределения?
11. Докажите, что для биномиального распределения $M(X)=np$, $D(X)=npq$.
12. Докажите, что для распределения Пуассона $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.
13. Как связаны между собой закон Пуассона и биномиальный закон?
14. Докажите, что для геометрического распределения $M(X) = 1/p$,
$D(X) = (1 - p)/p^2$.

Практическое занятие №9

Тема: Непрерывные случайные величины

1. Понятие непрерывной СВ

Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(X)$ непрерывна на всей числовой оси.

Для непрерывной СВ вероятность отдельного значения равна нулю:

$P(X=x) = 0, \forall x \in R.$

Поэтому для непрерывной СВ имеем:

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

2. Плотность распределения непрерывной СВ

Плотность распределения вероятностей непрерывной СВ X называются функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(X)$, т. е. $f(x)=F'(X)$.

Свойства плотности распределения:

1. $f(x)\geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$;
4. $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$;
5. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

График плотности распределения $f(x)$ называется *кривой распределения*.

3. Числовые характеристики непрерывных СВ

Математическим ожиданием непрерывной СВ X с плотностью вероятности $f(x)$ называют величину несобственного интеграла (если он сходится)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсией непрерывной СВ X, математическое ожидание которой $M(X)=a$ и функция $f(x)$ является ее плотностью вероятности, называются величина несобственного интеграла (если он сходится)

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot f(x)dx$$

или

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - a^2 .$$

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной СВ имеют те же свойства, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной СВ.

Для непрерывных СВ X среднее квадратическое отклонение σ (X) определяется, как и для ДСВ, формулой

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Начальным моментом порядка k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) СВ X называется число ν_k, определяемое по формуле

$$\nu_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx .$$

Центральным моментом порядка k СВ X называется число μ_k, определяемое по формуле

$$\mu_k = M(X - a)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k \cdot f(x)dx .$$

Коэффициент асимметрии (*«скошенности»*), или асимметрия СВ X есть величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)} .$$

Коэффициент эксцесса (*«островершинности»*), или эксцесс СВ X есть величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3 .$$

Мода непрерывной СВ X с плотностью $f(x)$ есть то ее значение $M_0(X)$, при котором функция $f(x)$ достигает максимума.

Медиана СВ X (обозначение $M_e(X)$) – есть такое ее значение x_p, для которого одинаково вероятно, окажется ли СВ X меньше x_p или больше x_p, т. е.

$P(X< x_p) = P(X> x_p) = ½$.

Квантилью уровня p СВ X называется число x_p, удовлетворяющее уравнению $P(X< x_p) = p$.

4. Важнейшие распределения непрерывных СВ

Распределение	Плотность вероятности	Числовые характеристики
Равномерное	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, при\, x\in[a;b],\\ 0, \quad при\, x\notin[a;b].\end{cases}$	$M(X)=\dfrac{a+b}{2}, D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}.$
Показательное (экспоненциальное)	$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, при\, x\geq 0,\\ 0, \quad при\, x<0.\end{cases}$	$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}, D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2},$ $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}.$
Нормальное	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$a=M(X), \sigma=\sigma(X),$ $D(X)=\sigma^2.$

5. Нормальная кривая

График плотности нормального распределения $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ называют *нормальной кривой* (*кривой Гаусса*) см. рисунок 2.

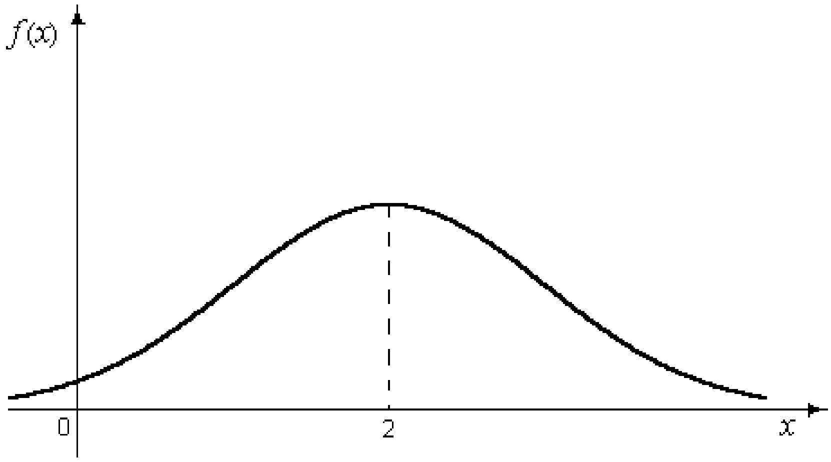

Рисунок 2.

1. Функция определена на всей оси x.
2. Нормальная кривая расположена над осью Оx.
3. Ось Оx служит горизонтальной асимптотой графика.
4. При $x = a$ функция имеет максимум, равный $1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$.
5. График функции симметричен относительно примой $x = a$.
6. Точки графика $\left(a-\sigma, 1/\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)\right)$ и $\left(a+\sigma, 1/\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)\right)$ являются точками перегиба.

Изменение величины параметра a (математического ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси Оx: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает.

С возрастанием σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т. е. сжимается к оси Оx; при убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси Oy.

При любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью Оx, остается равной единице.

При a = 0 и σ = 1 нормальную кривую $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ называют *нормированной*.

6. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной СВ

Если СВ X задана плотностью распределения $f(x)$, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), такова:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$ – функция Лапласа, значение которой находят по таблице (приложение 3).

7. Вычисление вероятности заданного отклонения

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной СВ X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, вычисляется по формуле:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

8. Правило трех сигм

Если $\delta = 3\sigma$, то

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3\sigma/\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения *превысит* утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027, т. е. лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: *если СВ распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.*

На практике правило трех сигм применяется следующим образом: если распределение изучаемой СВ неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально, в противном случае она не распределена нормально.

9. Центральная предельная теорема

Если СВ X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых СВ, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<3,\\ C(x-3)^2, & при\ 3\le x\le 5,\\ 1, & при\ 5<x.\end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) $P(3 < X < 4)$.

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x<0,\\ b\cdot x, & при\, 0\le x\le 5{,}8,\\ 0, & при\ 5{,}8<x.\end{cases}$$

a) построить функцию распределения F(X) и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. Нормально распределенная СВ X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\frac{1}{7\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{98}}.$$

Найти вероятность того, что СВ X примет значение в интервале (6; 9).

4. Используя свойства кривой плотности вероятностей СВ X, подчиненной нормальному закону распределения, найдите ее математическое ожидание, если известно, что $P(-\infty < X < -2) = P(6 < X < +\infty)$. Запишите выражение для $f(x)$, если $\sigma = 2$, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. Деталь изготавливается на станке с систематической ошибкой 3, средне-квадратической ошибкой 4 и считается годной, если ее отклонение от номинала менее 12. Найти вероятность того, что три наудачу взятые детали из пяти будут годными.

Вариант II

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<\dfrac{\pi}{3},\\ C\cos x, & при\,\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & при\ \dfrac{\pi}{2}<x.\end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) $P(\pi/3 < X < \pi/2)$, $P(\pi/4 < X < 2\pi)$, $P(X = \pi/2)$.

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0, \\ b \cdot x, & при\ 0 \le x \le 4, \\ 0, & при\ 4 < x. \end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. СВ X распределена нормально. $M(X) = 10$, $D(X) = 100$. Найти вероятность того, что отклонение СВ от ее математического ожидания по абсолютной величине будет:

a) меньше четырех;

b) больше четырех.

4. СВ X подчинена нормальному закону распределения. Математическое ожидание $a = 10$. Вероятность попадания в интервал (10; 20) равна 0,4. Чему равна вероятность попадания СВ в интервал (0; 10)? Запишите выражение для $f(x)$, если $\sigma = 12$, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. Стрельба из орудия ведется вдоль определенного направления. Средняя дальность полета снаряда 10 тысяч метров. Предполагая, что дальность полета X подчинена нормальному закону с дисперсией 1600 м^2, найдите, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 100 до 200 м.

Вариант III

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0, \\ Cx^2, & при\ 0 \le x \le 1, \\ 1, & при\ 1 < x. \end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) $P(\pi/3 < X < \pi/2)$, $P(\pi/4 < X < 2\pi)$, $P(X = \pi/2)$.

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0, \\ c\left(x^2 + 2x\right), & при\ 0 \le x \le 1, \\ 0, & при\ 1 < x. \end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. СВ X распределена нормально. $M(X) = 30$, $D(X) = 100$. Написать функцию, задающую плотность вероятностей данной СВ. Найти $P(10 < X < 50)$.

4. Используя свойства кривой плотности вероятностей СВ X, подчиненной нормальному закону распределения, найдите ее математическое ожидание, если известно, что $P(-\infty < X < -3) = P(7 < X < +\infty)$. Запишите выражение для $f(x)$, если $\sigma = 2$, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. Распределение веса деталей, выпускаемых заводом, подчиняется нормальному закону со средним весом 0,25 килограмм и средним квадратическим отклонением, равным 0,005 килограмм. Определить вероятность того, что отклонение веса деталей от среднего веса по абсолютной величине не превысит 0,008 килограмм.

Вариант IV

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < -2, \\ C\left(x + 2\right), & при\ -2 \le x \le 3, \\ 1, & при\ 3 < x. \end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) $P(-2 < X < -1)$, $P(X > 2)$, $P(X = 3)$.

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0, \\ x - 3, & при\ 0 \le x \le 1, \\ 0, & при\ 1 < x. \end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. $M(X)$=10 и среднее квадратическое отклонение равно двум для нормально распределенной СВ X. Написать функцию, задающую плотность вероятностей данной СВ. Найти $P(12 < X < 14)$.

4. СВ X подчинена нормальному закону распределения. Ее математическое ожидание a=2, $P(-1 < X < 1)$= 0,16. Чему равна вероятность попадания X в интервал (3; 5)? Запишите выражение для $f(x)$, если $\sigma = 1$, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,02 кг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,01 кг.

Вариант V

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0, \\ C(x + 2), & при\ 0 \le x \le 4, \\ 1, & при\ 4 < x. \end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент *C*;

b) плотность распределения *f*(*x*) СВ *X* и построить графики функций *f*(*x*) и *F*(*X*);

c) $P(-2 < X < -1)$, $P(X > 2)$, $P(X = 3)$.

2. Плотность вероятности непрерывной СВ *X* равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x<2,\\ -\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-3, & при\ 2\le x\le 4,\\ 0, & при\ 4<x.\end{cases}$$

a) построить функцию распределения *F*(*X*) и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. Написать дифференциальную функцию нормально распределенной СВ *X*, если $M(X)=4$, $D(X) = 100$. Найти вероятность того, что СВ примет значение в интервале (6; 12), примет значение вне этого интервала.

4. СВ *X* распределена нормально с математическим ожиданием $a = 3$. Вероятность попадания *X* в интервал (-1; 1) равна 0,15. Чему равна вероятность попадания *X* в интервал (5; 7)? Схематически изобразите график *f*(*x*), если $\sigma = 1$.

5. Станок изготавливает детали, причем контролируется их размер *X*. Считая, что *X* – нормально распределенная СВ с $M(X)=0{,}1$ см и $\sigma = 0{,}01$, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены размеры изготовленных деталей.

Вариант VI

1. Задана функция распределения непрерывной СВ *X*

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<0,\\ Cx+\frac{2}{3}, & при\ 0\le x\le 4,\\ 1, & при\ 4<x.\end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) $P(-2 < X < -1)$, $P(X > 2)$, $P(X = 3)$.

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, при 0 \le x \le \pi, \\ 0, & при\, \pi < x. \end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. При средней длине некоторой детали в 20 см найдено, что отклонения, превосходящие ±0,5 см, встречаются в среднем 4 раза на 100 деталей. Считая, что длина детали распределена по нормальному закону, определите ее среднее стандартное отклонение.

4. Максимальное значение плотности вероятности СВ X, которая подчинена нормальному закону распределения, равно $1/8\sqrt{\pi}$. Найдите среднее квадратическое отклонение СВ X. Запишите выражение для $f(x)$, если $M(X)=4$, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. При измерении детали ее длина есть СВ X, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = 220$ мм и $\sigma = 2$ мм. Найдите интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадает СВ X.

Контрольные вопросы по теме

1. Какая СВ называется непрерывной?
2. Вероятностью какого случайного события является функция распределения СВ?

3. Докажите свойства функции распределения.

4. Как связаны $P(a < X < b)$ и функция распределения $F(X)$, $F(X)$ и $f(x)$?

5. Перечислите и докажите свойства $f(x)$.

6. Запишите плотность распределения $f(x)$ для непрерывной величины, которая распределена равномерно.

7. Как связаны $P(a < X < b)$ и $f(x)$?

8. Дать определения математического ожидания и дисперсии для непрерывной СВ?

9. Запишите плотность распределения $f(x)$ для непрерывной величины, которая распределена нормально.

10. Как изменится максимальное значение ординаты кривой Гаусса, если дисперсия СВ увеличится в 16 раз?

11. Чему равна $P(a < X < b)$, если СВ X распределена нормально?

12. Получите формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ для нормально распределенной СВ X?

13. В чем заключается правило трех сигм?

14. Сформулируйте центральную предельную теорему.

Практическое занятие №10

Тема: Системы двух случайных величин

1. Закон распределения двумерной случайной величины

Двумерной называют случайную величину (X,Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют *систему* двух СВ (случайных величин).

Двумерную СВ (X,Y) геометрически можно истолковать либо как случайную точку $M\ (X,Y)$ на плоскости Oxy (т. е. как точку со случайными координатами) либо как случайный вектор $\vec{OM}$.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения вероятностей двумерной СВ называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной двумерной СВ может быть задан:

a) в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности;

b) аналитически, например в виде функции распределения.

Функцией распределения вероятностей двумерной СВ (X,Y) называют функцию $F(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел (x, y) вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом x, Y примет значение, меньшее y: $F(x,y)=P(X<x,\ Y<y)$.

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x,y)$ есть вероятность того, случайная точка (X,Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству: $0 \le F(x,y) \le 1$.

2. $F(X,Y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу, т. е.

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), если\, x_2 > x_1$;

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1), если\, y_2 > y_1$.

3. Имеют место предельные соотношения:

a) $F(-\infty, y) = 0$,

b) $F(x, -\infty) = 0$,

c) $F(-\infty, -\infty) = 0$,

d) $F(\infty, \infty) = 1$.

4. *a*) При $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей *X*: $F(x, \infty) = F_1(x)$.

b) При $x = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей *Y*: $F(\infty, y) = F_2(y)$.

Используя функцию распределения, можно найти вероятность попадания СВ в прямоугольник $x_1<X<x_2$, $y_1<Y<<y_2$:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Плотностью совместного распределения вероятностей f(x, y) двумерной непрерывной СВ (*X,Y*) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Иногда вместо термина «двумерная плотность вероятности» используют термин «дифференциальная функция системы».

Плотность совместного распределения можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника, когда обе стороны его стремятся к нулю; геометрически ее можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения*.

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D определяется равенством

$$P[(X,Y)\subset D]=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy.$$

Двумерная плотность вероятности обладает следующими свойствами:

1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна, т. е. $f(x, y)\geq 0$.
2. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$.

В частности, если все возможные значения (X,Y) принадлежат конечной области D, то $\int\int_{(D)} f(x,y)dxdy=1$.

2. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ

Пусть дана дискретная двумерная СВ (X,Y). Пусть возможные значения составляющих таковы: x_i; y_j ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$).

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1/y_j)$, $p(x_2/y_j)$, …, $p(x_n/y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y=y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило.

Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Условные вероятности составляющих X и Y вычисляют соответственно по формулам $p(x_i/y_j)=p(x_i,y_j)/p(y_j)$, $p(y_j/x_i)=p(x_i,y_j)/p(x_i)$.

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице, т. е. при фиксированном y_j имеет место

$$\sum_{i=1} p(x_i / y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) / p(y_j) = p(y_j) / p(y_j) = 1,$$

а при фиксированном x_i вытекает

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j / x_i) = 1.$$

3. Отыскание плотностей и условных законов распределения составляющих непрерывной двумерной СВ

Плотность распределения одной из составляющих равна несобственному интегралу с бесконечными пределами от плотности совместного распределения системы, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \ f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Здесь предполагается, что возможные значения каждой из составляющих принадлежат всей числовой оси; если же возможные значения принадлежат конечному интервалу, то в качестве пределов интегрирования принимают соответствующие конечные числа.

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении Y=y называют отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y:

$$\varphi(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx},$$

где $f_2(x) \neq 0$.

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей Y:

$$\varphi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy},$$

где $f_1(x)\neq 0$.

Если условные плотности распределения СВ X и Y равны их безусловным плотностям, то такие величины независимы и имеет место равенство:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Теорема умножения плотностей распределения:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f(y/x)=f_2(y)\cdot f(x/y).$$

Равномерным называют распределение двумерной непрерывной СВ (X,Y), если в области, которой принадлежит все возможные значения (x,y), плотность совместного распределения вероятностей сохраняет постоянное значение.

4. Числовые характеристики непрерывной системы двух СВ

Зная плотности распределения составляющих X и Y непрерывной двумерной СВ (X,Y), можно найти их математические ожидания и дисперсии:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x)dx,\ M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_2(y)dy;$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2\cdot f_1(x)\cdot dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx-[M(X)]^2;$$

$$D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[y-M(Y)]^2\cdot f_2(y)\cdot dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy-[M(Y)]^2.$$

Иногда удобнее использовать формулы, содержащие двумерную плотность вероятности (двойные интегралы берутся по области возможных значений системы):

$$M(X) = \iint x \cdot f(x, y) dxdy, \; M(Y) = \iint y \cdot f(x, y) dxdy;$$

$$D(X) = \iint [x - M(X)]^2 f(x, y) dxdy = \iint x^2 f(x, y) dxdy - [M(X)]^2 .$$

$$D(Y) = \iint [y - M(Y)]^2 f(x, y) dxdy = \iint y^2 f(x, y) dxdy - [M(Y)]^2 .$$

Начальным моментом $\nu_{\mathrm{k,\ s}}$ порядка k+s системы (X,Y) называют математическое ожидание произведения $X^k Y^s$:

$$\nu_{\mathrm{k,\,s}} = M[X^k Y^s].$$

В частности,

$$\nu_{1,0} = M(X), \; \nu_{0,1} = M(Y).$$

Центральным моментом $\mu_{k,s}$ порядка k+s системы (X,Y) называют математическое ожидание произведения отклонений соответственно k-ой и s-ой степеней:

$$\mu_{k,s} = M\{[X - M(X)]^k \cdot [Y - M(Y)]^s\}.$$

В частности,

$$\mu_{1,0} = M[X - M(X)] = 0, \; \mu_{0,1} = M[Y - M(Y)] = 0;$$

$$\mu_{2,0} = M[X - M(X)]^2 = D(X), \; \mu_{0,2} = M[Y - M(Y)]^2 = D(Y).$$

Корреляционным моментом μ_{xy} системы (X,Y) называют центральный момент $\mu_{1,1}$ порядка 1+1:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\}.$$

Коэффициентом корреляции величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y).$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, характеризующая степень линейной зависимости случайных величин *X* и *Y*. Чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее; чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее.

Свойства коэффициента корреляции

1. $-1 \le r_{xy} \le 1$;
2. Если *X* и *Y* – независимые СВ, то $r_{xy} = 0$;
3. Если СВ *X* и *Y* связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$, $a \ne 0$, то $|r_{xy}| = 1$;
4. Если $|r_{xy}| = 1$, то СВ *X* и *Y* связаны линейной функциональной зависимостью.

Коррелированными называют две СВ, если их корреляционный момент отличен от нуля.

Некоррелированными называют две СВ, если их корреляционный момент равен нулю.

Две коррелированные величины также и зависимы; если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя сделать вывод о независимости этих величин (для нормально распределенных величин из некоррелированности этих величин вытекает их независимость).

Для непрерывных величин *X* и *Y* корреляционный момент может быть найден по формулам:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)] \cdot [y - M(Y)] f(x, y)\,dxdy,$$

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y).$$

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Задана таблица распределения дискретной двумерной СВ

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0,10	0,15	0,04	0,06
2	0,12	0,08	0,05	0,04
3	0,03	0,02	0,11	D

Найти:

a) значение числа D;

b) безусловные законы распределения СВ X и Y;

c) вероятности событий $\{X = 1, Y \geq 2\}$ и $\{X = Y\}$.

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} C \cdot (y - xy), (x,y) \in D, \\ 0, \qquad\qquad (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Найти:

a) коэффициент С;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область $D_1 = \{(x, y)$: $0{,}7 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 0{,}3\}$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант II

1. Двумерная СВ (X, Y) задана законом распределения

$X \setminus Y$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Найти:

a) функцию распределения ДСВ X;

b) функцию распределения двумерной СВ (X, Y);

c) вероятность события $\{X \le Y\}$.

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \frac{C}{\left(\frac{1}{3} + x^2\right) \cdot \left(3 + y^2\right)}, x \in R, y \in R.$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность события $A = \{ X < 1,\ Y < \sqrt{3} \}$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант III

1. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна 0,75. Пусть СВ X – число попаданий; СВ Y – число промахов. Составить таблицу совместного распределения вероятностей СВ X и Y. Описать функцию распределения $F(x, y)$ системы СВ (X, Y).

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C\cdot xy, (x,y)\in D, \\ 0, \qquad (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y): x \ge 0, y \ge 0 \ \ x + y \le 1\}$. Найти:

a) коэффициент С;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность события $A = \{ X > 1/2, Y \le 1\}$;

d) функции распределения отдельных компонент.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант IV

1. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, при втором 0,9. СВ X – число попаданий при первом выстреле, Y – число попаданий при втором выстреле. Найти:

a) закон распределения системы СВ (X, Y);

b) безусловные законы распределения отдельных компонент X и Y и их функции распределения;

c) функцию распределения $F_{XY}(x, y)$.

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C\cdot\sin(x+y), (x,y)\in D, \\ 0, \qquad\qquad (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y): x \geq 0,\ x \leq \pi/2, y \geq 0, y \leq \pi/2\}$. Найти:

a) коэффициент C;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник $x = 0$, $x = \pi/6$, $y = 0$, $y = \pi/2$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант V

1. Симметричную монету подбрасывают 3 раза. Пусть СВ X – число гербов, выпавших в первом и втором испытаниях, Y – число гербов, выпавших во втором и третьем испытаниях. Найти:

a) совместное распределение СВ X и Y;

b) вероятность события $\{ X \neq Y \}$.

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C, (x,y)\in D, \\ 0, (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y): x + y \leq 1,\ 2y - x \leq 2, y \geq 0\}$. Найти:

a) коэффициент C;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность события $\{X \geq 0\}$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант VI

1. Задана таблица распределения дискретной двумерной СВ

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти:

a) законы распределения СВ X и Y;

b) функцию распределения системы СВ (X, Y).

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C\cdot e^{-x-y}, x\geq 0, y\geq 0, \\ 0, \qquad x<0, y<0. \end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент С;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность события $A = \{ X < 0, Y < 2\}$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Контрольные вопросы по теме

1. Какую величину называют двумерной?
2. Какие двумерные величины различают?
3. Что называется законом распределения вероятностей двумерной СВ?
4. Дайте определение функции распределения двумерной СВ, перечислите ее свойства.

5. Что называется двумерной плотностью вероятности, перечислите ее свойства.
6. Дайте определение условному распределению вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ.
7. Как найти плотности и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной СВ.
8. Числовые характеристики непрерывной системы двух СВ.

Список используемой литературы

1. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: Учеб. пособие для студентов вузов. СПб.: Лань. 1999. 342 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк. 2000. 479 с.
3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Под ред. В.А. Колемаева. М.: ИНФРА-М. 2001. 302 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для студентов вузов. М.: Высш. шк. 2001. 408 с.
5. Турецкий В.Я. Математика и информатика.М.:ИНФРА-М.2002. 560с.
6. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике и теории случайных функций / Под ред. Свешникова А.А. М.: Наука. 1968. 268 с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II: Учеб. пособие для втузов. М.: Высш. шк. 1997. 416 с.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высш. шк. 1998. 400 с.
9. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математики / Под ред. С.Н. Федина. М.: Айрис-пресс. 2004. 592 с.
10. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике: Теория вероятностей. М.: Просвещение. 1990. 160 с.

Приложение I

Контрольная работа

Вариант I

1. Имеется материал семи различных цветов. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (3 горизонтальные полосы)?
2. У врача есть три вида одного лекарства, 5 видов - другого и 7 видов – третьего. В течение девяти дней он каждый день предлагает больному по одному лекарству. Сколькими способами он может выделить больному лекарства?
3. В ящике находятся 20 лампочек, среди которых 4 перегоревших. Найти вероятность того, что 10 лампочек, взятых наудачу из ящика, будут гореть.
4. На АТС могут поступать вызовы трех типов. Вероятности поступления вызовов первого, второго и третьего типа соответственно равны 0,2; 0,3; 0,5. Поступило три вызова. Какова вероятность того, что: a) все они разных типов; b) среди них нет вызова второго типа?
5. На елочный базар поступают елки с трех лесхозов, причем первый лесхоз поставил 50% елок, второй – 30%, третий 20%. Среди елок первого лесхоза 10 % голубых, второго – 20%, третьего 30%. Куплена одна елка. Она оказалась голубой. Какова вероятность, что она поставлена вторым лесхозом?
6. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий более трех изделий не выдержат испытания?

Вариант II

1. 12 студентов случайным образом рассаживаются на 12 первых местах одного ряда партера. Какова вероятность, что студенты Петров и Васечкин будут сидеть рядом?
2. Батарея, состоящая из 10 орудий, ведет огонь по 15 кораблям неприятеля. Найти вероятность того, что все орудия стреляют: а) по одной цели; b) по разным целям (выбор цели случаен и не зависит от других)?
3. В ящике находятся 20 лампочек, среди которых 4 перегоревших. Найти вероятность того, что среди десяти лампочек, взятых наудачу из ящика, будут гореть шесть.
4. В магазин трикотажных изделий поступили три вида трикотажных изделий. Вероятность того, что будет куплено изделие первого вида, равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,85. Найти вероятность того, что будет куплено изделие только одного вида.
5. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой, в разные стороны, ведут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет около 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?
6. Вероятность того, что изделие не пройдет контроля, равна 0,125. Какова вероятность того, что среди двенадцати изделий не будет ни одного забракованного контролером?

Вариант III

1. Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «математика»?

2. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?

3. Из стада наудачу отобрано 10 коров, среди них – 6 холмогорской породы, 4 – симментальской. На выставку были отправлены 2 коровы. Найти вероятность того, что они холмогорской породы.

4. В магазин трикотажных изделий поступили три вида трикотажных изделий. Вероятность того, что будет куплено изделие первого вида, равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,85. Найти вероятность того, что будет куплено изделие только двух видов.

5. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой, в разные стороны, ведут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет около 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист выйдет из леса?

6. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой примерно равна ¾. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

Вариант IV

1. 9 туристов наудачу рассаживаются по 12 вагонам электрички. Найти вероятность того, что все они окажутся: a) в одном вагоне; b) во втором вагоне; c) в разных вагонах.

2. В автопарке 20 экскурсионных автобусов двух марок: 12 и 8 соответственно. Вероятность выезда на экскурсию автобусов каждой марки одна и та же. Какова вероятность того, что после выезда на экскурсию 16 автобу-

сов, в автопарке остались автобусы: a) первой марки; b) одной марки; c) разных марок.

3. С вероятностью 0,4 посланное сообщение принимается при одной передаче. Сколько надо сделать передач, чтобы с вероятностью не менее 0,9 она была принята хотя бы один раз?

4. В одной коробке находится 4 красных, 5 зеленых и 3 черных карандаша, а в другой – 3 красных и 2 черных. Из первой коробки взяты три карандаша, а из второй – два. Какова вероятность того, что все вытащенные карандаши одного цвета?

5. Из 1000 ламп 590 принадлежит 1-й партии, 200 – 2-й, остальные – 3-й партии. В 1-й партии 6%, во 2-й – 5%, в 3-й – 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что она бракованная?

6. Проведено 8 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании двух монет. Найти вероятность того, что: a) в трех испытаниях из восьми появится по 2 герба; b) не менее двух раз выпадет 2 герба.

Вариант V

1. В пятизначном телефонном номере стерлись три последние цифры. Найти вероятность того, что стерлись: a) одинаковые цифры; b) разные цифры.

2. На устройство поступают 2 сигнала, причем поступление каждого сигнала, в течение часа, равновозможное. Устройство срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 10 минут. Найти вероятность того, что устройство сработает.

3. В урне находится 40 шаров. Вероятность того, что 2 извлеченных шара окажутся белыми, равна 7/60. Сколько в урне белых шаров?

4. Вероятность потери письма в почтовом отделении равна 0,03, а телеграммы – 0,01. Отправлено два письма и одна телеграмма. Какова вероятность того, что дойдет: a) только телеграмма; b) хотя бы одно из отправлений?

5. В пункте проката имеется 8 новых и 10 подержанных (т. е. хотя бы раз использованных) автомобилей. 3 машины взяли наудачу и спустя некоторое время вернули. После этого вновь наудачу взяли напрокат два автомобиля. Какова вероятность того, что оба автомобиля новые?

6. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того. Что при 5 выстрелах цель будет поражена: a) 2 раза; b) не менее 2 раз; c) не будет поражена ни разу.

Вариант VI

1. Два приятеля Васечкин и Сидоров решили, что за билетами в кино пойдет тот, у кого выпадет меньшее число очков при бросании игральной кости. Какова вероятность того, что за билетами пойдет: a) Сидоров; b) проигравший; c) выигравший?

2. В ящике 50 годных и 16 дефектных деталей. Сборщик наудачу достает 8 деталей. Найти вероятность того, что среди них: a) нет дефектных; b) 3 дефектных.

3. Вероятность того, что в результате 5 независимых опытов событие A (предполагается, что она одна и та же во всех опытах) произойдет хотя бы один раз, равна 0,99757. Определить вероятность появления события при одном опыте.

4. В мастерской три станка. Они требуют наладки в течение смены с вероятностями 0,05; 0,1; 0,3 соответственно. Какова вероятность того. Что в течение смены потребуется наладить: a) все станки; b) только один станок.

5. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй 5 белых и 2 черных. Из первой урны переложили во вторую три шара, затем из второй урны извлечен один шар. Какова вероятность того, что он белый?

6. По каналу связи передаются 7 сообщений, каждое из которых, независимо от других, может быть искажено с вероятностью 0,15. Найти вероятность того, что будет правильно принято не менее двух сообщений.

Вариант VII

1. В ящике лежат 9 кубиков с номерами от 1 до 9. Последовательно извлекаются три кубика. Найти вероятность того, что появятся кубики: a) с номерами 2, 5, 9; b) с номерами 5, 2, 9; c) с номерами 4, 5, 4.

2. 52 игральные карты раздаются 4 игрокам. Найти вероятность того, что: a) будут у одного игрока; b) каждый игрок получил один туз.

3. Три стрелка делают по одному выстрелу в цель. Вероятности попаданий в цель соответственно равны 0,6; 0,85; 0,7. Какова вероятность попадания в цель: a) только второго стрелка; b) хотя бы одного стрелка?

4. В мешке смешаны нити, среди которых 30% красных, 60% синих, а остальные белые. Какова вероятность того, что три вынутые наудачу нити будут одного цвета?

5. На склад с оружием совершают налет четыре самолета. Вероятность поражения самолета системой ПВО равна 0,8. При прорыве k самолетов атакуемый объект будет уничтожен с вероятностью p_k. Найти вероятность уничтожения склада.

6. Найти вероятность того, что в серии из 9 подбрасываний игральной кости 5 очков выпадет менее трех раз.

Вариант VIII

1. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что случайная точка, брошенная в круг, не попадет в квадрат.
2. В цветочном ларьке продаются 8 азалий и 5 кактусов. Какова вероятность того, что среди проданных растений: a) 2 азалии; b) все кактусы?
3. В ящике 6 белых и 30 черных шаров. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров один белый, а другой черный?
4. Вероятность дозвониться с первой попытки в справочное бюро аэропорта равна 0,4. Какова вероятность того, что: a) удастся дозвониться при втором звонке; b) придется звонить не более трех раз?
5. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что третье орудие попала, если вероятности попадания в цель 1-м, 2-м, 3-м орудиями соответственно равны 0,5; 0,3; 0,4.
6. Сообщение содержит 500 символов. Вероятность искажения символа при передаче постоянна и равна p. Если хотя бы один символ искажен, то сообщение будет принято неверно. При каких значениях p вероятность того, что сообщение будет успешно передано, окажется равной 0,95?

Вариант IX

1. В читальном зале АмГУ имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в мягком переплете. Библиотекарь взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.
2. В группе 17 юношей и 8 девушек. Какова вероятность того, что студент, фамилия которого первая в списке, окажется девушкой?
3. На военных учениях летчик получил задание «уничтожить» 3 рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад примерно равна 0,01, во

второй – 0,008, в третий – 0,025. Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв всех складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?

4. Для некоторой местности в июле шесть пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

5. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта, равна 0,8; второго - 0,5; третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно.

6. Семена пшеницы содержат 0,2% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.

Вариант X

1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Неграмотный мальчик перемешал буквы, а потом наугад их собрал. Какова вероятность того, что он опять составил слово «книга»?

2. На первом этаже девятиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятность выхода каждого из лифта на любом этаже одинакова. Найдите вероятность того, что: a) все вышли из лифта на четвертом этаже; b) все вышли из лифта на одном и том же этаже; c) все выходили из лифта на разных этажах.

3. В ящике лежат 20 электрических лампочек, из которых 3 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые одна за другой две лампочки окажутся стандартными.

4. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта, равна 0,8; второго - 0,5; третьего – 0,3. Зерно взошло. Найти вероятность того, что это было зерно первого сорта.

5. Всхожесть семян пшеницы составляет 90%. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.

6. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется пригодным без доводки, равна 0,97. Контролер проверяет 400 изделий. Если среди них окажется 16 или более нуждающихся в доводке, вся пария возвращается на доработку. Найти вероятность того, что партия изделий будет принята.

Вариант XI

1. 15 шаров произвольно раскладываются по 5 ящикам. Чему равна вероятность того, что в первом ящике окажется 1 шар, во втором – 2, в третьем – 3, в четвертом – 4 и в пятом – 5 шаров?

2. 5 зенитных пулеметов ведут огонь по 4 самолетам противника. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Какова вероятность того, что все 5 пулеметов ведут огонь по одному и тому же самолету?

3. Две подруги условились встретиться в Москве у памятника А. С. Пушкину между 12 и 13 часами. Пришедшая первой ждет вторую в течение α минут ($\alpha<60$), после чего уходит. Чему равна вероятность встречи?

4. Бросают три монеты. Чему равна вероятность появления хотя бы одного орла?

5. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта, равна 0,8; второго - 0,5; третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет зерно второго сорта.

6. Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее число k_0 появлений числа очков, кратного трем. Найти вероятность $P_{16}(k_0)$?

Вариант XII

1. На 5 карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4 и 5. Наугад выбираются одна за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?
2. Замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, если все диски занимают определенные положения относительно корпуса замка, их цифры образуют определенное число, составляющее «секрет» замка. Какова вероятность открыть замок, установив произвольную комбинацию цифр?
3. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из которых 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену мужчин окажется не менее 2.
4. На участке две бригады. Вероятность выполнения плана первой бригадой равна 0,8, а вероятность выполнения плана второй – 0,9. Найти вероятность того, что: a) участок выполнит план; b) план выполнит только одна бригада участка; c) хотя бы одна бригада участка выполнит план.
5. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения из 500 бактерий останется не менее 3 бактерий.
6. На тракторном заводе рабочий за смену изготавливает 400 деталей. вероятность того, что деталь окажется первого сорта равна 0,8. какова вероятность, что деталей первого сорта будет 330 штук.

Вариант XIII

1. В одном ящике 6 белых и 4 черных шара, в другом – 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шару. Чему равна вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

2. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Чему равна вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево.

3. 12 предметов произвольно расставляют по трем комнатам. Какова вероятность того, что в первой комнате окажется 2 предмета, во второй – 3, а в третьей – 7?

4. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым, получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.

5. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; b) не менее трех.

6. Книга издана тиражом в 50000 экземпляров. Вероятность того, что в книге имеется дефект брошюровки, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 неправильно сброшюрованных книг.

Вариант XIV

1. В одном ящике 6 белых и 4 черных шара, в другом – 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары разных цветов?

2. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что второе число больше первого, если выбор осуществляется с возвращением?

3. Стержень длины 24 ломают на три части, выбирая случайным образом места разлома. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник.

4. Иванов может добраться до работы или автобусом, который ходит через каждые 20 минут, или трамваем, который ходит через каждые 10 минут.

Найти вероятность того, что Иванов, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших 5 минут?

5. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение часа равна 0,002. Найти вероятность того, что за час откажут 4 элемента.

6. В хлопке число длинных волокон составляет 8-%. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 5 волокон длинных окажется: a) три; b) не более двух.

Вариант XV

1. Четырем игрокам раздается поровну колода из 32 карт. Определите вероятность того, что каждый игрок получил карты только одной масти.

2. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, случайно падает монета радиуса r. Найти вероятность того, что монета целиком окажется внутри одного из треугольников.

3. В водоеме обитают особи рыб двух близких видов, причем особи первого вида составляют 70% всей популяции, особи второго вида – 30%. На каждые 100 особей первого вида приходится в среднем 65 самцов, а на 100 особей второго вида - 55 самцов. Какова вероятность того, что первая особь, выловленная из этого водоема, окажется самцом?

4. Покупатель ищет необходимую ему книгу, обходя три книжных магазина. Вероятность наличия ее в каждом магазине равна 0,2. что вероятнее – найдет он искомую вещь или нет?

5. Принимая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, среди 6 новорожденных: a) 4 мальчика; b) не более двух девочек.

6. Вероятность появления бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 500 случайно отобранных деталей окажется 3 бракованных.

Вариант XVI

1. Какова вероятность того, что при случайном распределении 6 шариков по 6 гнездам одно гнездо окажется пустым?
2. Из букв А, А, И, Л, М, Н разрезной азбуки выбирают наудачу по одной и ставят в ряд. Найти вероятность того, что получится слово: a) МИНА; b) НАЛИМ; c) МАЛИНА?
3. Наудачу выбирают два числа из промежутка [0,1]. Какова вероятность того, что их сумма заключена между ¼ и 1?
4. Три охотника стреляют по кабану. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. Найти вероятность того, что при одном выстреле попадут в цель: a) все три стрелка; b) попадет хотя бы один из них.
5. В некотором водоеме карпы составляют 80%. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб окажется: a) 4 карпа; b) не менее 4 карпов.
6. Семена содержат 0,1% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

Вариант XVII

1. На стоянке автомобилей можно поместить 12 машин в один ряд. Однажды оказались свободны 4 места подряд. Является ли это событием исключительным или столь же часто бывают свободны 4 не соседних места?
2. Какова вероятность того, что произведение двух наугад взятых правильных положительных дробей будет не больше ¾?

3. Стрелок производит выстрел по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5. Какова вероятность того, что по мишени будет произведено: a) 5 выстрелов; b) не более 5 выстрелов?

4. В магазин «Электромир» поступили магнитофоны с трех заводов. Вероятность того, что магнитофон изготовлен на первом заводе, равна 0,3, на втором – 0,2, на третьем – 0,5. Вероятность того, что магнитофон окажется бракованным, для первого завода равна 0,2, для второго – 0,1, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что наугад взятый магнитофон окажется не бракованным.

5. Прибор состоит из 4 узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за смену откажут: a) два узла; b) не менее двух узлов.

6. Вероятность появления события A в каждом из 150 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится: a) не менее 78 и не более 96 раз; b) более 78 раз; c) не более 77 раз.

Вариант XVIII

1. В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных деталей. Какова вероятность того, что среди 10 взятых наугад деталей бракованных не окажется?

2. Четверть билетов лотереи – выигрышные. Сколько билетов надо приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, быть уверенным, что выиграет хотя бы один билет?

3. На плоскости нарисованы две концентрические окружности, радиусы которых соответственно 5 и 10 метров. Какова вероятность того, что точка

брошенная наугад в большой круг, попадет в кольцо, образованное этими окружностями?

4. Всхожесть семян сои составляет 90%. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.

5. В магазин «Электромир» поступили магнитофоны с трех заводов. Вероятность того, что магнитофон изготовлен на первом заводе, равна 0,3, на втором – 0,2, на третьем – 0,5. Вероятность того, что магнитофон окажется бракованным, для первого завода равна 0,2, для второго – 0,1, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что магнитофон, изготовленный третьим заводом, окажется не бракованным.

6. Семена гречихи содержат 0,2% сорняков. Какова вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков?

Вариант XIX

1. В одной семье 4 сестры по очереди моют посуду. Из каждых 4 разбитых тарелок 3 разбито младшей, и потому ее называют неуклюжей. Справедливо ли это?

2. В группе студентов, состоящей из 20 человек, 12 юношей и 8 девушек. Для дежурства случайным образом отобрано двое студентов. Какова вероятность того, что среди них будет один юноша и одна девушка?

3. Расстояние от дома до института студент Иванов проходит за 20 минут, а автобус – за 2 минуты. Интервал движения автобусов 30 минут. Студент в случайный момент времени отправляется из дома в институт. Какова вероятность того, что его в пути догонит автобус?

4. Исследователь разыскивает нужные ему сведения в трех справочниках. Вероятности того, что эти сведения находятся в первом, во втором и в третьем справочнике равны соответственно 0,7; 0,6; 0,9. Найти вероятность того, что требуемые сведения содержатся хотя бы в одном справочнике.

5. При взрыве снаряда образуются осколки трех весовых категорий: крупные, средние и мелкие, причем число крупных, средних и мелких осколков составляет соответственно 0,1; 0,3; 0,6 общего числа осколков. При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью около 0,9, средний – с вероятностью, близкой к 0,2, и мелкий с вероятностью, близкой к 0,05. В броню попал один осколок и пробил ее. Найдите вероятности того, что эта пробоина причинена: крупным, средним и мелким осколком.

6. В телевизоре 12 ламп. Для любой из ламп вероятность, что она останется исправной в течение года, равна 0,9. Какова вероятность того, что: a) в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя; b) в течение года выйдет из строя ровно одна лампа; c) в течение года выйдут из строя 2 лампы?

Вариант XX

1. Найти вероятность того, что 20 студентов одной группы родились: a) в разные дни года (в году 365 дней); b) в один день года; c) 23 февраля.

2. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 хотя бы один раз выпало 5 очков?

3. Среди 15 компьютеров, имеющихся в вычислительной лаборатории, лишь 6 новых, а остальные – бывшие в употреблении. Лаборант наугад включает три компьютера. Какова вероятность, что все они окажутся новыми?

4. Какой толщины должна быть монета радиуса 10 миллиметров. Чтобы вероятность попадания на ребро была равна 1/3?

5. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой примерно равна ¾. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При за-

полнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

6. Группе студентов для прохождения производственной практики выделено 30 мест: 15 – в Благовещенске, 8 – в Свободном, 7 – в Белогорске. Какова вероятность того, что студент и студентка, которые в скором времени собираются справить свадьбу, будут посланы для прохождения практики в один и тот же город, если декан ничего не знает об их семейных делах?

Вариант XXI

1. Найти вероятность того, что 20 студентов одной группы родились: a) в разные месяцы года; b) в октябре; c) в разные дни октября.
2. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.
3. На 9 одинаковых карточках написаны буквы Е, Е, Р, Р, С, С, Я, Г, И. Эти карточки выкладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово РЕГРЕССИЯ?
4. В одном из ящиков 10 белых и 6 черных шариков, во втором – 7 белых и 9 черных. Произвольно выбирают ящик и из него наугад вынимают шарик. Он белый. Чему равна вероятность того, что и второй шарик, наугад вынутый из этого ящика, окажется белым?
5. При проведении некоторого испытания вероятность появления ожидаемого результата 0,01. сколько раз его нужно провести, чтобы с вероятностью 0,5 можно было ожидать хотя бы одного появления этого результата?

6. По данным телевизионного ателье, в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12% кинескопов. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных кинескопов 36 проработают гарантийный срок?

Вариант XXII

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое двузначное число делится на 3?
2. Два железнодорожных состава должны подойти к одной и той же платформе. Моменты времени прихода обоих составов независимы и равновозможны в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из железнодорожных составов придется ожидать освобождения платформы, если время стоянки первого состава – 0, 3 часа, а второго – 0,5 часа.
3. В корзине 7 красных и 9 синих шара. Наугад вынимают один шар, рассматривают его на свету и кладут его обратно в корзину. Опять наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба шара красные?
4. У рыбака есть три излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что рыба клюнет в первом месте, равна 1/3, во втором – ½, в третьем – ¼. Известно, что рыбак забросил удочку 3 раза, а вытащил только одну рыбу. Какова вероятность того, что он рыбачил в первом из излюбленных мест?
5. В городе 1900 жителей. Какова вероятность того, что в году есть 4 дня, когда ни один житель города не отмечает свой день рождения?
6. В НИИ земледелия проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы частота всхожести отличалась бы от 0,95 меньше чем на 0,01?

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое трехзначное число делится на 9?
2. Из 4 видов открыток наудачу выбираются 3 открытки. Найти вероятность того, что все отобранные открытки будут разными.
3. Вероятность того, что смерть человека произойдет на 25-м году жизни примерно 0,006. Застраховано 1000 двадцатичетырехлетних. Годовой взнос 1500 рублей с каждого. В случае смерти застрахованного его родственникам выплачивается 120000 рублей. Какова вероятность того, что в конце года выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?
4. 80% изделий, поступающих в магазин со склада, высшего сорта. Сколько изделий придется взять со склада для контрольной проверки, чтобы с вероятностью 0,99 можно было бы утверждать: в магазине изделий высшего сорта от 75% до 80%?
5. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковывают в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что: a) в ящике не окажется некачественных сверл; b) в ящике окажется не больше 3 некачественных сверл? Сколько сверл необходимо упаковать в ящик, чтобы с вероятностью не меньше 0.9 в ящике было 100 доброкачественных сверл?
6. Путешественник может купить билет в одной из трех касс железнодорожного вокзала. Вероятность того, что он направится к первой кассе, равна ½, ко второй – 1/3, к третьей – 1/6. Вероятности того, что билетов уже нет в кассах, примерно такие: в первой кассе – 1/5, во второй – 1/6, в третьей – 1/8. Путешественник обратился в одну из касс и получил билет. Определите вероятность того, что он направился к первой кассе.

Вариант XXIV

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое четырехзначное число делится на 9?

2. Из 7 видов открыток наудачу выбираются 5 открытки. Найти вероятность того, что все отобранные открытки будут разными.

3. Путешественник может купить билет в одной из трех касс железнодорожного вокзала. Вероятность того, что он направится к первой кассе, равна ½, ко второй – 1/3, к третьей – 1/6. Вероятности того, что билетов уже нет в кассах, примерно такие: в первой кассе – 1/5, во второй – 1/6, в третьей – 1/8. Определите вероятность того, что путешественник купил билет.

4. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,2 может оказаться брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином и с вероятностью 0,1 – рыжим. Какова вероятность того, что среди шести случайно встреченных лиц: a) не меньше 4 блондинов; b) хотя бы один рыжий; c) 3 блондина и 3 шатена?

5. Частные конторы страхования жизни заинтересованы в получении прибыли за счет своих клиентов. В одной такой конторе застраховано 10000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти клиента в течение года примерно 0,006. Каждый клиент 1 января вносит 12 долларов. Если в течение года он умрет, то контора обязана выплатить его родственникам 1000 долларов. Чему равна вероятность того, что: a) контора разорится; b) контора получит не менее 40000 долларов прибыли?

6. Игральную кость бросают 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 1900 и не более 2100 раз?

Приложение II

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение III

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0.4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732		
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		