

*Федеральное агентство по образованию Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*

Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Методическое пособие к выполнению практических,  
лабораторных и самостоятельных работ**

Благовещенск

2012

## Содержание

<b>ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ</b> .....	5
Практическое занятие №1. Исследование характеристик типовых звеньев.....	5
Практическое занятие №2. Преобразование моделей линейных непрерывных объектов и систем.....	5
Практическое занятие №3. Определение чувствительности, инвариантности, управляемости и наблюдаемости объектов и систем ...	9
Практическое занятие №4. Построение корневого годографа системы второго и третьего порядков.....	15
Практическое занятие № 5. Определение устойчивости систем с помощью алгебраических критериев.....	17
Практическое занятие №6. Определение устойчивости систем с помощью частотных критериев.....	20
Практическое занятие №7. Определение статической точности систем.....	21
Практическое занятие № 8. Определение точности систем при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной.....	23
Практическое занятие № 9. Определение основных характеристик случайного сигнала (мат. ожидания, дисперсии, корреляционной функции, спектральной плотности).....	25
Практическое занятие № 10. Определение точности системы при случайном входном воздействии.....	32
Практическое занятие №11. Определение косвенных частотных показателей качества (показателя колебательности, запасов устойчивости).....	37
Практическое занятие №12. Определение корневых показателей колебательности и расчет коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели.....	39
Практическое занятие №13. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза.....	41
Практическое занятие №14. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по переменным состояниям объекта.....	43
Практическое занятие №15. Расчет системы модального управления со стационарным наблюдателем.....	45
Практическое занятие №16. Расчет последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ.....	46
Практическое занятие №17. Расчет устройства компенсации возмущения в комбинированной системе управления.....	51
Практическое занятие № 18. Расчет двусвязной системы автоматического регулирования.....	64
Практическое занятие № 19. Составление разностных уравнений, Z-изображений сигналов и передаточных функций.....	71

Практическое занятие № 20. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений и их систем.....	78
Практическое занятие №21. Исследование нелинейных САР на фазовой плоскости.....	79
Практическое занятие № 22. Определение устойчивости нелинейной системы с помощью второго метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости Попова .....	83
Практическое занятие № 23. Расчет параметров автоколебаний в релейной системе с помощью метода гармонического баланса.....	89
Практическое занятие № 24. Решение задачи оптимального управления методом классического вариационного исчисления.....	90
Практическое занятие № 25. Решение задачи на максимальное быстроедействие методом максимума .....	90
Практическое занятие № 26. Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования.....	90
ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ .....	91
Лабораторная работа № 1. Моделирование линейной системы.....	91
Лабораторная работа №2. Исследование влияния коэффициента передачи на динамические свойства и устойчивость линейной системы. 97	
Лабораторная работа №3. «Экспериментальное» определение запасов устойчивости замкнутой системы с помощью имитационного моделирования.....	100
Лабораторная работа №4. Определение точности системы в статических и стационарных динамических режимах путем имитационного моделирования.....	104
Лабораторная работа №5. Определение характеристик случайных сигналов на входе и выходе системы с помощью имитационной модели 107	
Лабораторная работа №6. Определение частотных показателей качества с помощью имитационных моделей.....	109
Лабораторная работа №7. Исследование моделей, заданных эталонными передаточными функциями .....	117
Лабораторная работа №8. Моделирование системы с последовательным корректирующим устройством.....	119
Лабораторная работа № 9. Моделирование комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования.....	120
Лабораторная работа № 10. Моделирование линейной импульсной системы автоматического регулирования.....	122
Лабораторная работа № 11. Моделирование линеаризованных «в малом» систем .....	128
Лабораторная работа № 12. Построение фазовых портретов с помощью имитационного моделирования.....	134
Лабораторная работа № 13. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.1 .....	135
Лабораторная работа № 14. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.2 .....	139

*Лабораторная работа № 15. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – классическое вариационное исчисление) ... 143*

*Лабораторная работа № 16. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – принцип максимума)..... 144*

*Лабораторная работа №17. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – динамическое программирование)..... 144*

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

### *Практическое занятие №1. Исследование характеристик типовых звеньев*

В работе исследуются переходные и частотные характеристики следующих типовых звеньев:

– апериодическое звено

$$(T_p + 1)y(t) = ku(t), \quad (1)$$

– колебательное звено

$$(T^2 p^2 + 2\xi T_p p + 1)y(t) = ku(t), \quad (2)$$

– реальное дифференцирующее звено

$$(T_p + 1)y(t) = kpu(t). \quad (3)$$

В ряде вариантов может быть исследовано звено, представляющее собой соединение типовых звеньев (при условии, что порядок звена не более двух).

Требуется без применения вычислительных средств определить аналитические выражения для

– переходной и импульсной переходной характеристик;

– амплитудно-фазовой частотной характеристики, вещественной и мнимой частотных характеристик;

– амплитудно-частотной, логарифмической амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

Задание в форме передаточной функции звена выдается студенту преподавателем индивидуально. Студент выполняет задание самостоятельно и предоставляет преподавателю отчет. Ряд вариантов рассматривается на практическом занятии у доски.

### *Практическое занятие №2. Преобразование моделей линейных непрерывных объектов и систем*

В данной работе требуется:

– выразить передаточные функции системы автоматического регулирования по передаточным функциям ее звеньев, проведя необходимые структурные преобразования;

– построить модель системы в пространстве состояний и определить матрицы описания системы.

Пример. Дана система автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 1.

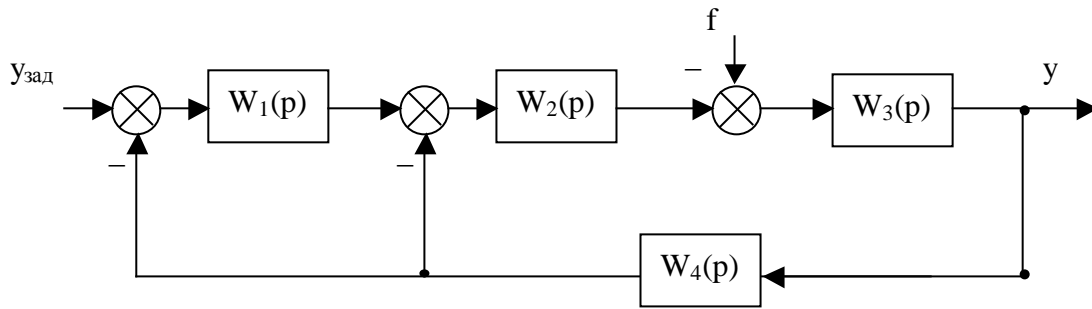


Рис.1. Структурная схема системы

Передаточные функции звеньев:

$$W_1(p) = \frac{10(0,1p+1)}{0,01p+1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{0,5p+1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{3p}, \quad W_4(p) = \frac{1}{0,2p+1}. \quad (1)$$

Определим передаточные функции системы путем структурных преобразований. Для этого представим систему в виде (рис.2)

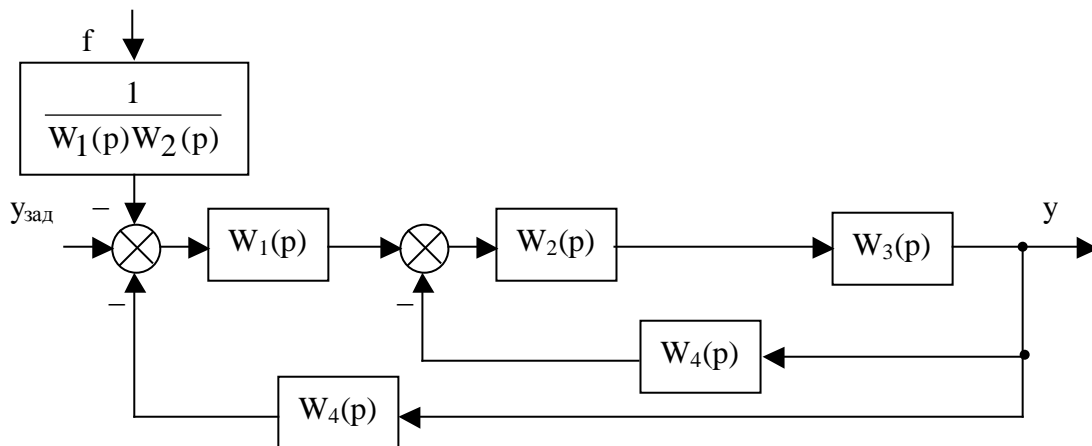


Рис.2. Структурная схема системы

Передаточная функция системы по заданию:

$$W_{\zeta\grave{a}\grave{a}}(p) = \frac{W_1(p) \times \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4}}{1 + W_1(p) \times \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4} \times W_4(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)[1 + W_1(p)]}. \quad (2)$$

Передаточная функция системы по возмущению:

$$W_f(p) = \frac{W_{\zeta\grave{a}\grave{a}}(p)}{W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)[1 + W_1(p)]}. \quad (3)$$

Вычисление явного вида передаточных функций (2),(3) производится с помощью пакета Matlab при выполнении лабораторной работы №1.

Построим модели звеньев системы в пространстве состояний и соединим их по схеме, приведенной на рис. 1. Получим структуру (рис. 3).

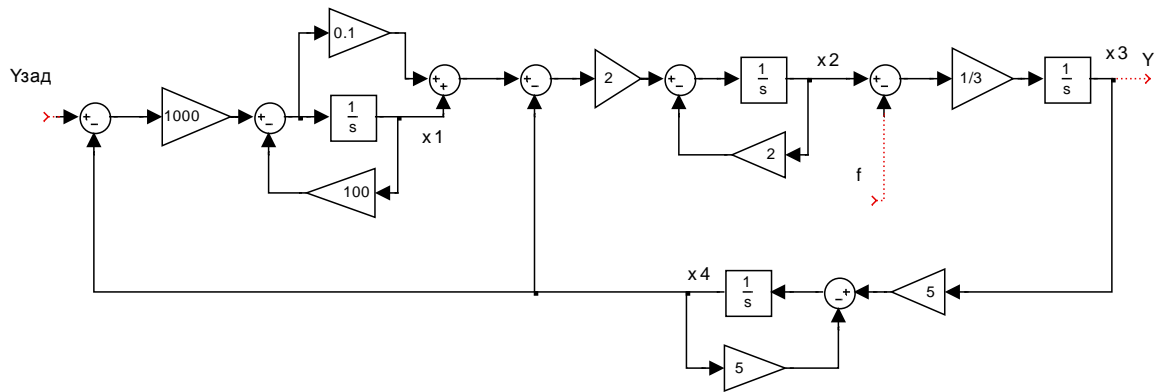


Рис. 3. Структура системы в пространстве состояний

Составим уравнения состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -100x_1 - 1000x_4 + u_{зад}; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 0,2\dot{x}_1 - 2x_4 = -18x_1 - 202x_4 + 0,2u_{зад}; \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}f; \\ \dot{x}_4 = 5x_3 - 5x_4. \end{cases} \quad (4)$$

$$y = x_3. \quad (5)$$

Представим описание системы в виде

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX. \quad (6)$$

Матрицы описания будут иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 & -1000 \\ -18 & 0 & 0 & -202 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 0 \ 1 \ 0). \quad (7)$$

### Порядок выполнения работы

Исходные данные к выполнению задания в форме одного из вариантов структуры системы и численных значений коэффициентов передаточных функций ее звеньев выдается студенту преподавателем индивидуально. Студент выполняет задание самостоятельно и предоставляет преподавателю отчет. Ряд вариантов рассматривается на практическом занятии у доски. Продолжение работы по теме производится в рамках выполнения лабораторной работы №1.

Таблица 1. Варианты исходных данных.

№ п/п	Структурная схема	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$W_3(s)$	$W_4(s)$	$W_5(s)$
1		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	-
2		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	-
3		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	-	-
4		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	-



5		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	-	-
6		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	$(T_7s + 1)$
7		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	-	$(T_7s + 1)$
8		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	$(T_7s + 1)$
9		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	-	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	$(T_7s + 1)$
10		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	-
11		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	-	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	$(T_7s + 1)$
12		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	-	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	$(T_7s + 1)$
13		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	-

**Практическое занятие №3. Определение чувствительности, инвариантности, управляемости и наблюдаемости объектов и систем**

В данной работе определяется чувствительность, управляемость и наблюдаемость системы с несколькими входами и несколькими выходами. В качестве исходных данных выступают матрицы описания линейной системы.

## Теоретические сведения

Под чувствительностью системы по каналу  $u_i - y_j$  понимают отношение приращения выходной величины  $\Delta y_j$ , вызванное приращением входной величины  $\Delta u_i$ :

$$k_{ij} = \frac{\Delta y_j}{\Delta u_i}. \quad (1)$$

Если  $k_{ij} = 0$ , система *инвариантна* по данному каналу.

Под управляемостью системы в общем смысле понимается возможность оказания на нее управляющих воздействий, которые обеспечили бы заданное движение. Приведем определение управляемости.

Система является полностью управляемой, если для любых начального  $X(t_n)$  и конечного  $X(t_k)$  ее положений найдется допустимое управление  $U(t)$ , переводящее систему из  $X(t_n)$  в  $X(t_k)$  за время  $t = t_k - t_n$ .

Для линейных систем в отсутствии ограничений на управляющие сигналы управляемость системы может быть определена с помощью критерия Калмана.

Система полностью управляема, если

$$\text{rank}(J) = \text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n, \quad (2)$$

где  $n$  – порядок системы (размеры матрицы  $A$ ).

В том случае, когда система имеет несколько входов, управляемость проверяется для каждого из них. В (2) вместо «всей» матрицы  $B$  подставляется  $i$ -ый ее столбец  $B_i$ , где  $i$  – номер входа, для которого проверяется управляемость.

Если  $\text{rank}(J) = k < n$ , то  $k$  переменных управляемы,  $k-n$  – не управляемы.

В этом случае описание системы может быть представлено следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_y \\ \dot{X}_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_y \\ X_{ny} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times U, \quad (3)$$

где  $X_y$  –  $k$ -мерный вектор управляемых координат;  $X_{ny}$  –  $(k-n)$ -мерный вектор неуправляемых координат.

Для таких систем вводится понятие *стабилизируемости*. Система стабилизируема, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_{ny}(t) = 0$ .

Это имеет место, если  $A_{22}$  – гурвицева матрица, т.е. матрица, собственные числа которой (корни характеристического полинома  $\det(pE - A_{22})$ ) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Под наблюдаемостью системы понимается возможность по наблюдениям за ее входами и выходами восстановить вектор состояний. Определение: система называется наблюдаемой, если существует момент времени  $t^*$ , такой, что по наблюдениям за  $y(\tilde{t})$  и входом  $U(\tilde{t})$ , где  $\tilde{t} \in [t, t^*]$ , можно определить состояние  $X(t)$ .

Для линейных систем наблюдаемость можно определить с помощью критерия Калмана.

Для того, чтобы система была полностью наблюдаема, необходимо и достаточно:

$$\text{rank}N = \text{rank}[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T] = n. \quad (4)$$

В том случае, когда система имеет несколько выходов, наблюдаемость проверяется для каждого из них. В (2) вместо «всей» матрицы  $C$  подставляется  $j$ -ая ее строка  $C_j$ , где  $j$  – номер выхода, для которого проверяется наблюдаемость.

Если  $\text{rank}(N) = k < n$ , то  $k$  переменных наблюдаемы,  $n-k$  – не наблюдаемы, и тогда систему можно описать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_H \\ \dot{X}_{HH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_H \\ X_{HH} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \times U, \quad (5)$$

где  $X_H$  –  $k$ -мерный вектор наблюдаемых координат,  $X_{HH}$  –  $(n-k)$ -мерный вектор ненаблюдаемых координат.

Для таких систем вводится понятие *обнаруживаемости*.

Для того, чтобы система была обнаруживаема, необходимо и достаточно:  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_{HH} = 0$  при  $X_H = 0, U = 0$ , т.е.  $A_{22}$  была гурвицевой матрицей.

*Примеры определения наблюдаемости*

*1. Интегратор.*

Рассмотрим звено структурной схемы системы – интегратор.

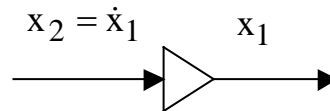


Рис. 1. Интегратор

Если измерению поддается величина  $x_1$ , т.е.  $Y = x_1$ , можно определить и вторую координату, дифференцируя  $x_1$ :

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{Y}. \quad (6)$$

Если же измерению подлежит  $x_2$ , т.е.  $Y = x_2$ , определить координату  $x_1$  невозможно:

$$x_1 = \int_0^t x_2 dt = F_{x_2}(t) - F_{x_2}(0) + x_1(0), \quad (7)$$

где  $F_{x_2}$  – первообразная  $x_2$ . Действительно,  $x_1(0)$  неизвестно.

*2. Объект с двойным интегрированием:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U, \\ Y = c_1 x_1 + c_2 x_2. \end{cases} \quad (8)$$

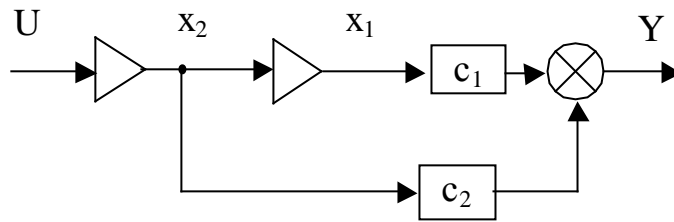


Рис. 2. Объект с двойным интегрированием

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1 \quad c_2). \quad (9)$$

Матрица наблюдаемости

$$H = \begin{pmatrix} c_1 & (0 \quad 0) \\ c_2 & (1 \quad 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Ее определитель:

$$\det(H) = -c_1^2. \quad (11)$$

Таким образом, наблюдаемость объекта с двойным интегрированием определяется только коэффициентом  $c_1$ .

При  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  – координата  $x_1$  не наблюдаема.

При  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{c_1} Y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{1}{c_1} \dot{Y}, \quad (12)$$

т.е. система полностью наблюдаема.

При  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$

$$\dot{Y} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = c_1 x_2 + c_2 U, \quad (13)$$

откуда

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{c_1} \dot{Y} - \frac{c_2}{c_1} U, \\ x_1 = \frac{1}{c_1} Y - \frac{c_2}{c_1} x_2 = \frac{1}{c_1} Y - \frac{c_2}{c_1^2} \dot{Y} + \frac{c_2^2}{c_1^2} U. \end{cases} \quad (14)$$

Схема восстановления координат, составленная на основании (14), приведена на рис. 3.

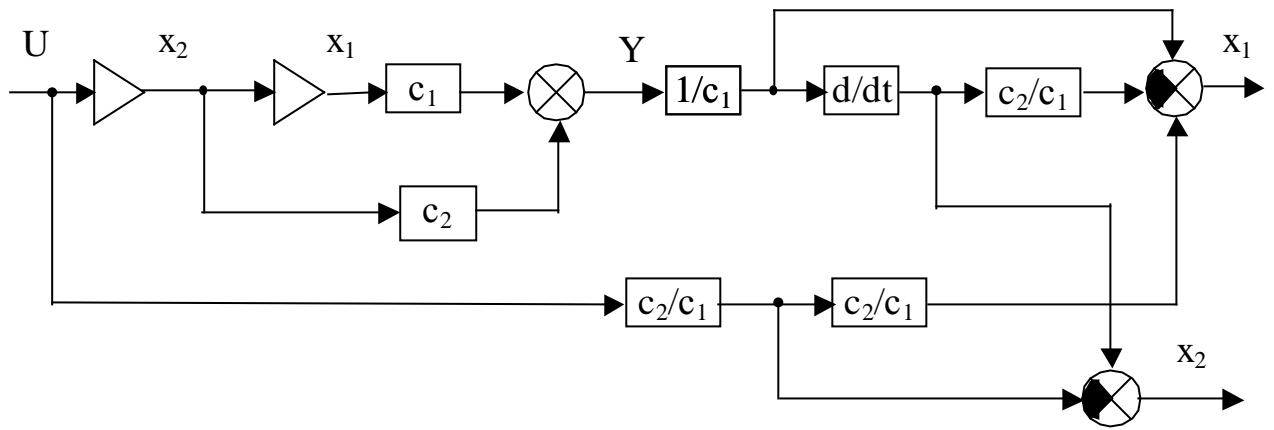


Рис. 3. Схема восстановления координат объекта (8)

3. Объект второго порядка с обратными связями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U - a_1 x_1 - a_2 x_2, \\ Y = c_1 x_1 + c_2 x_2. \end{cases} \quad (15)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1 \quad c_2). \quad (16)$$

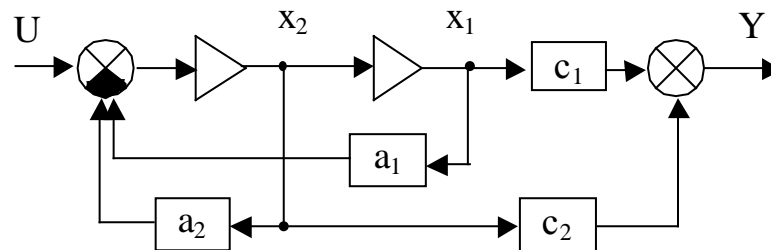


Рис. 4. Система второго порядка с обратными связями

Матрица наблюдаемости:

$$H = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -a_1 c_2 \\ c_2 & c_1 - a_2 c_2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

ее определитель

$$\det(H) = c_1^2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2. \quad (18)$$

При  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$   $\det(H) = a_1 c_2^2$  и система наблюдаема при любом ненулевом  $a_1$ . Координата  $x_2$  определяется просто:

$$x_2 = \frac{1}{c_2} Y. \quad (19)$$

Определим  $x_1$ , продифференцировав уравнение выхода:

$$\dot{Y} = c_2 \dot{x}_2 = c_2 U - c_2 a_1 x_1 - a_2 Y, \quad (20)$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{a_1} U - \frac{a_2}{c_2 a_1} Y - \frac{1}{c_2 a_1} \dot{Y}. \quad (21)$$

При  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$   $\det(H) = c_1^2$  и система полностью наблюдаема при любых  $a_1, a_2$ :

$$x_1 = \frac{1}{c_1} Y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{1}{c_1} \dot{Y}. \quad (22)$$

При  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$  в общем случае система наблюдаема, однако возможен вариант

$$\det(H) = c_1^2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2 = 0, \quad (23)$$

что имеет место при  $a_1 = \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{c_1}{c_2} a_2$ , и в этом случае система не наблюдаема.

Продифференцировав уравнение выхода, получим:

$$\dot{Y} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = c_1 x_2 + c_2 U - c_2 a_1 x_1 - c_2 a_2 x_2, \quad (24)$$

или

$$\dot{Y} = c_2 U - c_2 a_1 x_1 + (c_1 - c_2 a_2) x_2. \quad (25)$$

Решая совместно уравнение (63) и уравнение выхода, получим

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c_1 - c_2 a_2}{\det(H)} Y - \frac{c_2}{\det(H)} \dot{Y} + \frac{c_2^2}{\det(H)} U, \\ x_2 = \frac{c_2 a_1}{\det(H)} Y + \frac{c_1}{\det(H)} \dot{Y} - \frac{c_1 c_2}{\det(H)} U. \end{cases} \quad (26)$$

Схема восстановления координат приведена на рис. 5 (сам объект не показан).

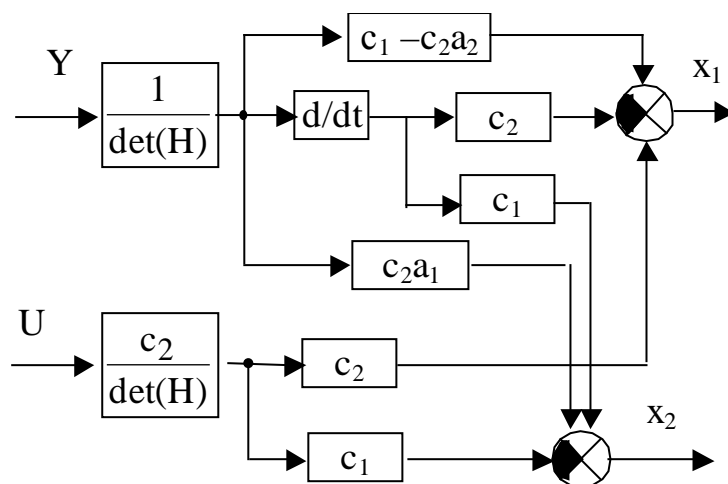


Рис. 5. Схема восстановления координат для объекта (15)

## Порядок выполнения работы

Каждому студенту индивидуально выдаются матрицы описания линейной системы с несколькими входами и несколькими выходами.

В ходе выполнения работы необходимо

- 1) построить структурную схему системы;
- 2) определить управляемость системы по каждому каналу;
- 3) определить наблюдаемость систем по каждому выходу;
- 4) определить чувствительность системы по каждому каналу.

На занятии рассматриваются примеры решения задач.

#### **Практическое занятие №4. Построение корневого годографа системы второго и третьего порядков**

В данной работе требуется построить корневые годографы системы, схема которой приведена на рис. 1, при изменении коэффициента передачи  $k_p$ . Исходными данными являются значения коэффициентов передачи  $k_1$ ,  $k_2$  и постоянных времени  $T_1$ ,  $T_2$ .

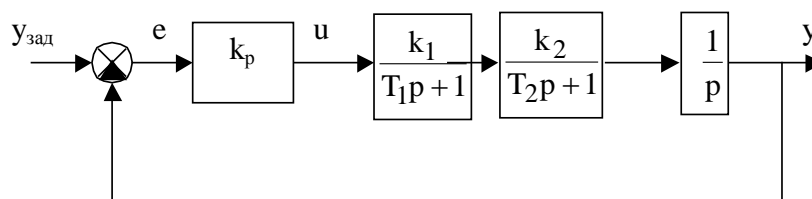


Рис. 1. Структурная схема САР

#### **Пример.**

Пусть  $k_1=k_2=T_1=1$ ,  $T_2 = 0,5$ .

Разомкнутая система нейтральна, так как состоит из устойчивых звеньев и одного нейтрального. Ее передаточная функция равна

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{2k_{\delta}}{p^3 + 3p^2 + 2p}. \quad (1)$$

Корни характеристического полинома разомкнутой системы 0, -1, -2. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{2k_{\delta}}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2k_{\delta}}. \quad (2)$$

На рис. 48 приведен корневой годограф системы – зависимость положения ее полюсов на комплексной плоскости от коэффициента передачи регулятора.

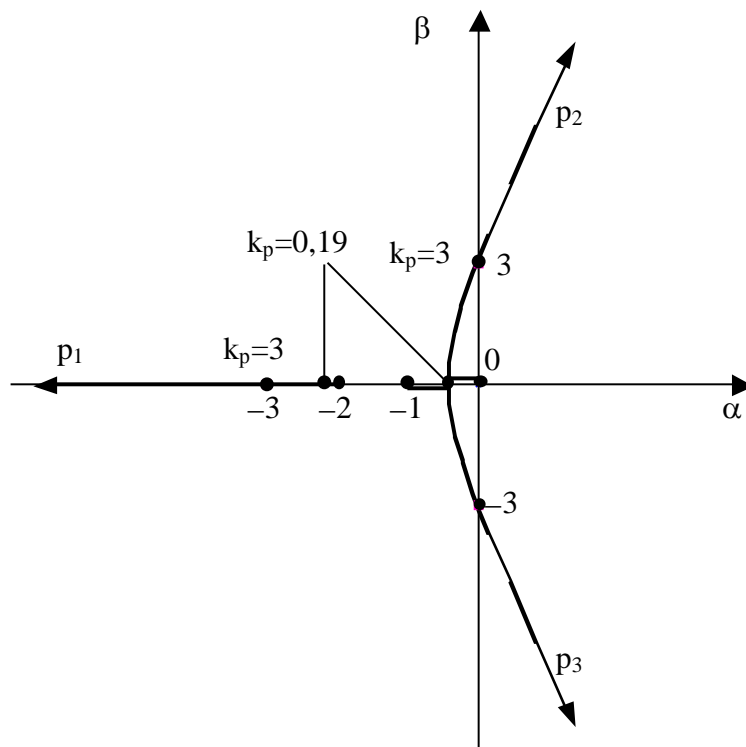


Рис. 2. Корневой годограф системы

При  $k_p \rightarrow 0$ . Корни характеристического полинома замкнутой системы, как это видно из (2), стремятся к полюсам  $W_{раз}(p)$ :  $0, -1, -2$ .

В диапазоне коэффициентов передачи от  $k_p = 0$  до  $k_p \approx 0,19$  происходит «сближение» полюсов  $p_2$  и  $p_3$  и уменьшение полюса  $p_1$ . Переходные характеристики системы носят апериодический характер, причем с увеличением  $k_p$  быстродействие системы растет.

При  $k_p \approx 0,19$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся равными  $-0,42$ . Полюс  $p_1$  принимает значение  $-2,15$ . Дальнейшее увеличение  $k_p$  приводит к тому, что полюса  $p_2$  и  $p_3$  вновь «расходятся», становясь комплексно-сопряженными. вещественные части полюсов и модуль мнимых частей увеличиваются. Полюс  $p_1$  по-прежнему уменьшается, оказывая все меньшее влияние на характер движения системы. Переходная характеристика становится колебательной, причем перерегулирование и частота колебаний с ростом  $k_p$  увеличиваются.

При  $k_p = 3$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся чисто мнимыми, равными  $\pm 3j$ , и система выходит на границу устойчивости. Ее переходная характеристика принимает вид незатухающих колебаний.

Дальнейшее увеличение коэффициента передачи делает систему неустойчивой. При этом ее поведение определяется в основном парой правых комплексно-сопряженных корней  $p_2$  и  $p_3$ .

Продолжение работы по теме производится в рамках лабораторной работы №2.



## **Практическое занятие № 5. Определение устойчивости систем с помощью алгебраических критериев**

В данной работе с помощью критерия Гурвица определяется:

- устойчивость системы, заданной на практическом занятии №2;
- критическое значение коэффициента передачи  $k_p$  для системы, заданная на практическом занятии №4.

### **Теоретические сведения**

Для оценки устойчивости по критерию Гурвица необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить определитель Гурвица по следующим правилам:

- 1) по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов; столбцы определителя заполняются коэффициентами от главной диагонали вниз по убывающим, а вверх- по возрастающим индексам;
- 2) места коэффициентов, индексы которых больше  $n$  или меньше нуля заполняются нулями.

Для примера составим определитель Гурвица, для системы 5-го порядка. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0, \quad (1)$$

где все коэффициенты строго больше нуля. Получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части и система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты и все диагональные определители определителя Гурвица были строго больше нуля.

Для устойчивости системы 5-го порядка необходимо выполнение условий

$$a_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots, 5; \quad (3)$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \quad (4)$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0; \quad (5)$$

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 - a_2 a_5 \Delta_2 + a_0 a_5 (a_1 a_4 - a_0 a_5) > 0; \quad (6)$$

$$\Delta_5 = a_5 \Delta_4 > 0. \quad (7)$$

Так как при выполнении необходимого условия устойчивости всегда  $a_n > 0$ , то об устойчивости системы можно судить по определителям до  $\Delta_{n-1}$  включительно. Доказано, что если  $\Delta_{n-1} = 0$ , то система находится на колебательной границе устойчивости, т.е. имеет пару чисто мнимых корней. Из ус-

ловия  $\Delta_{n-1} = 0$  можно определить критические значения параметров системы, при которых она выходит на границу устойчивости.

**Пример.** Исследовать устойчивость системы стабилизации угла тангажа самолета и определить критическое значение передаточного числа автопилота по углу тангажа. Система задана структурной схемой.

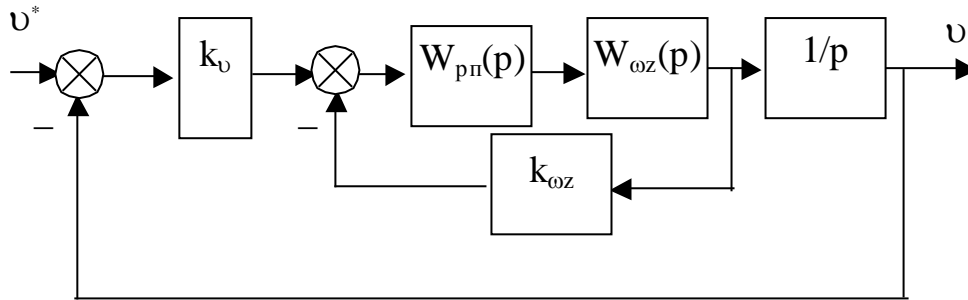


Рис.1. Структурная схема системы стабилизации угла тангажа.

На схеме обозначено:

$k_v$  - передаточное число (коэффициент передачи) автопилота по углу тангажа;

$W_{\delta i}(p) = \frac{1}{T_{\delta i} p + 1}$  – передаточная функция рулевого привода;

$W_{\omega z}(p) = \frac{k_c(T_1 p + 1)}{T^2 p^2 + 2T\zeta p + 1}$  – передаточная функция самолета по угловой

скорости тангажа  $\omega_z$ ;

$k_{\omega z}$  - передаточное число автопилота по угловой скорости тангажа.

Для передаточной функции разомкнутой системы можно записать

$$W(p) = \frac{k_v k_c W_{\delta i}(p) W_{\omega z}(p)}{p(1 + k_{\omega z} W_{\delta i}(p) W_{\omega z}(p))} = \frac{k_v k_c (T_1 p + 1)}{p(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3)}, \quad (8)$$

где  $a_0 = T^2 T_{\delta i}$ ;  $a_1 = 2T T_{\delta i} \zeta + T^2$ ;  $a_2 = T_{\delta i} + 2T\zeta + k_{\omega z} k_c T_1$ ;

$a_3 = 1 + k_{\omega z} k_c$ .

Передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\hat{O}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k_v k_c (T_1 p + 1)}{d_0 p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p + d_4}, \quad (9)$$

где  $d_0 = a_0$ ;  $d_1 = a_1$ ;  $d_2 = a_2$ ;  $d_3 = a_3 + k_v k_c T_1$ ;  $d_4 = k_v k_c$ .

Составим определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & 0 & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_0 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Оценим устойчивость системы для следующих значений параметров:  $k_v = 5$ ;  $k_{vz} = 1,2$ ;  $k_c = 0,9$ ;  $T_1 = 1,8$ ;  $T = 0,12$ ;  $\xi = 0,1$ .

При этих значениях для коэффициентов характеристического уравнения получим:

$$d_0 = a_0 = 0,00115; \quad d_1 = a_1 = 0,0163; \quad d_2 = a_2 = 2,048; \quad a_3 = 2,08; \quad d_3 = 10,18; \\ d_4 = 4,5.$$

Следовательно, все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы положительны и

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= d_1 d_2 - d_0 d_3 = 0,021675 > 0; \\ \Delta_3 &= d_3 \Delta_2 - d_1^2 d_4 = 0,21945 > 0; \\ \Delta_4 &= d_4 \Delta_3 = 0,98755 > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия устойчивости выполнены и система при избранных параметрах устойчива.

Определим критическое значение передаточного числа по углу тангажа, для чего приравняем третий диагональный определитель нулю и сделаем преобразования.

$$d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3) - d_1^2 d_4 = 0. \quad (12)$$

Отсюда

$$d_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} d_3 + \frac{d_1^2}{d_0} d_4 = 0. \quad (13)$$

В последнем выражении только  $d_3$  и  $d_4$  являются функциями коэффициента  $k_v$  и подставив их в него, получим квадратное уравнение относительно этого коэффициента

$$(k_c T_1)^2 k_v^2 + (2a_3 k_c T_1 - \frac{d_1 d_2}{d_0} k_c T_1 + \frac{d_1^2}{d_0} k_c) k_v + (a_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} a_3) = 0. \quad (14)$$

Решив это уравнение, получим критическое значение передаточного числа по углу тангажа

$$(k_v)_{\text{крит}} = 16.56. \quad (15)$$

Система устойчива, если  $k_v < 16.56$ .

## **Практическое занятие №6. Определение устойчивости систем с помощью частотных критериев**

В данной работе с помощью критериев Михайлова и Найквиста определяется устойчивость системы, заданной на практическом занятии №4 при различных значениях коэффициента передачи  $k_p$ .

### **Пример.**

Пусть  $k_1=k_2=T_1=1$ ,  $T_2 = 0,5$ . Требуется определить устойчивость системы с помощью критерия Михайлова.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{2k_{\delta}}{p^3 + 3p^2 + 2p}. \quad (1)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{2k_{\delta}}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2k_{\delta}}. \quad (2)$$

Годограф характеристического многочлена системы (годограф Михайлова):

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2j\omega + 2k_{\delta} = \\ &= [-3\omega^2 + 2k_{\delta}] + j[-\omega^3 + 2\omega] = P(\omega) + jQ(\omega). \end{aligned} \quad (3)$$

Найдем точки пересечения годографа с осями комплексной плоскости.

Точки пересечения с вещественной осью найдем из условия

$$Q(\omega) = 0. \quad (4)$$

Получим

$$-\omega^3 + 2\omega = 0, \quad (5)$$

откуда  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_3 = \sqrt{2}$ .

$$P(\omega_1) = 2k_{\delta}, \quad P(\omega_3) = -6 + 2k_{\delta}.$$

Точку пересечения с мнимой осью найдем из условия

$$P(\omega) = 0. \quad (6)$$

Получим

$$-3\omega^2 + 2k_{\delta} = 0, \quad (7)$$

$$\text{откуда } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k_{\delta}}{3}}.$$

$$Q(\omega_2) = 2\sqrt{\frac{2k_{\delta}}{3}} \left(1 - k_{\delta}/3\right). \quad (8)$$

Согласно критерию Михайлова система находится на границе устойчивости, если годограф проходит через начало координат, т.е. через точку

$$P(\omega) = Q(\omega) = 0. \quad (9)$$

Это возможно на частоте  $\omega = \omega_1 = 0$  при  $k_p = 0$ , а также на частоте  $\omega = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{2}$  при  $k_p = 3$ . Очевидно, что первое решение не представляет интереса, так как не имеет отношения к реальной системе.

Рассчитаем и построим годографы Михайлова при  $k_p = 2, 3, 4$  (рис.1).

При  $k_p = 2$  система устойчива, так как годограф, начинаясь на положительной вещественной полуоси, проходит последовательно три квадранта, то есть ровно столько квадрантов, каков порядок системы.

При  $k_p = 3$  система находится на границе устойчивости.

При  $k_p = 4$  система неустойчива, поскольку годограф проходит квадранты не последовательно (из первого квадранта попадает в четвертый, потом в третий).

Кроме того, из рис. 1 видно, что увеличение  $k_p$  приводит только к смещению годографа Михайлова вправо (вдоль вещественной оси). Таким образом для построения семейства годографов достаточно было построить один годограф при определенном  $k_p$  – остальные будут его копиями, сдвинутыми вдоль вещественной оси. Величина сдвига легко вычисляется из (3).

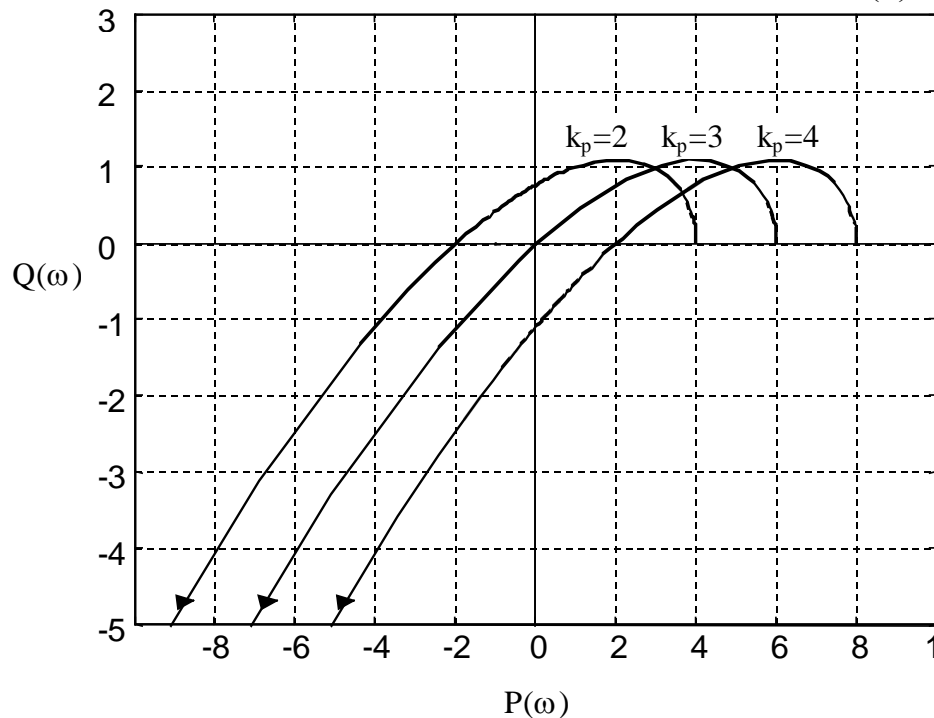


Рис. 1. Годографы Михайлова при различных значениях  $k_p$

### ***Практическое занятие №7. Определение статической точности систем***

В данной работе определяется статическая точность системы, заданной на практическом занятии №2, при различных значениях коэффициента передачи одного из звеньев. Преподаватель задает места приложения возмущающих воздействий, а также указывает переменный коэффициент передачи. Требуется построить статические характеристики системы – зависимости выходной величины от всех внешних воздействий в установившемся режиме

при различных коэффициентах передачи, а также определить общую зависимость выходной величины от всех входных.

**Пример.** Пусть структура системы имеет вид (рис.1).  $k_1=k_2=1$ .

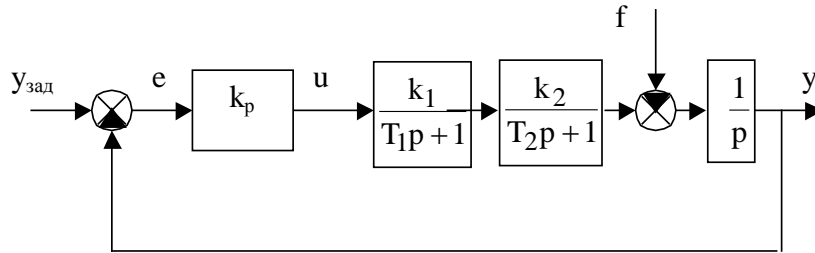


Рис. 1. Структурная схема САР

Поскольку в структуру контура входит интегрирующее звено, система является астатической, а, следовательно, при любом  $k_p$  коэффициент передачи замкнутой системы по задающему воздействию равен единице и при отсутствии возмущения  $y = y_{зад}$ . (см. также практическое занятие №5).

Зависимость  $y(f)$  при  $y_{зад} = 0$  можно определить двумя способами.

1) В установившемся режиме сигнал на входе интегрирующего звена равен нулю. Отсюда следует, что

$$e k_{\delta} k_1 k_2 - f = 0. \tag{1}$$

Поскольку при нулевом задании  $e = -y$ ,

$$-y k_{\delta} k_1 k_2 - f = 0, \tag{2}$$

откуда

$$y = -\frac{f}{k_{\delta} k_1 k_2} = -\frac{f}{k_{\delta}} \tag{3}$$

2) Определим коэффициент передачи системы по возмущению. Для этого в передаточных функциях всех звеньев системы за исключением интегрирующего положим  $p = 0$  и воспользуемся известными правилами преобразования структурных схем. Получим

$$W_f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ -\frac{1/p}{1 + k_{\delta} k_1 k_2 / p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{p + k_{\delta} k_1 k_2} \right] = \\ = -\frac{1}{k_{\delta} k_1 k_2} = -\frac{1}{k_{\delta}}. \tag{4}$$

В установившемся режиме при  $y_{зад} = 0$

$$y = W_f(0) f = -\frac{f}{k_{\delta}}, \tag{5}$$

что соответствует результату полученному ранее (3).

По (5) построены графики зависимости  $y(f)$  при  $k_p = 10, 5, 2,5$  (рис. 2).

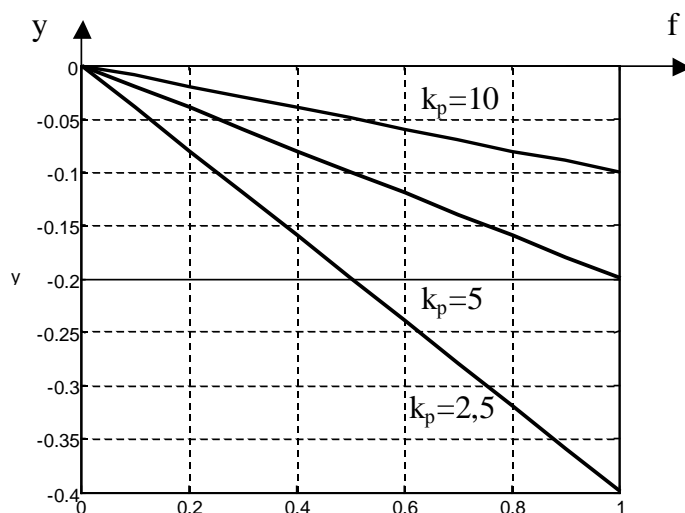


Рис. 2. Зависимость  $y(f)$  при  $k_p = 10, 5, 2,5$ .

Общая зависимость выходной величины от входных имеет вид:

$$y = y_{\text{ст}} - \frac{f}{k_{\delta}}. \quad (6)$$

**Практическое занятие № 8. Определение точности систем при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной**

В данной работе определяется точность системы, заданной на практическом занятии №2, при постоянных входных воздействиях и воздействиях, изменяющихся с постоянной скоростью. Преподаватель задает места приложения возмущений. Требуется провести анализ влияния всех входных воздействий на ошибку регулирования в статике и в стационарных динамических режимах (предполагается, что система устойчива). Внешние воздействия могут быть постоянными, изменяться с постоянной скоростью, ускорением.

Теоретические сведения по данной работе приведены в пособии «Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию», п. 4.1.3. «Качество САР в стационарных динамических режимах».

**Пример.** Структура системы имеет вид (рис.1). Пусть  $k_1=k_2=1$ .

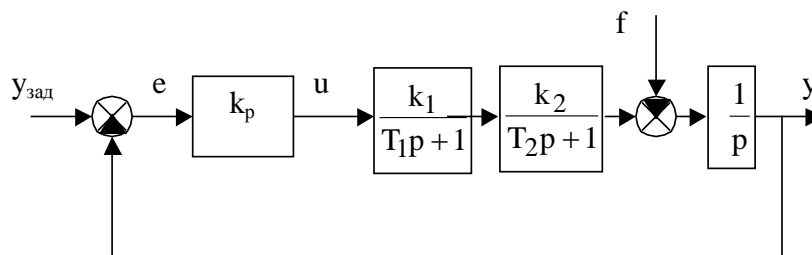


Рис. 1. Структурная схема САР

Зависимость ошибки регулирования от возмущения при  $f = \text{const}$  для данной системы определена на практическом занятии №8. При  $y_{\text{зад}} = 0$

$$y = -\frac{f}{k_{\delta}k_1k_2} = -\frac{f}{k_{\delta}}, \quad (1)$$

$$e = y_{\text{зад}} - y = \frac{f}{k_{\delta}k_1k_2} = \frac{f}{k_{\delta}}. \quad (2)$$

Если возмущение изменяется с постоянной скоростью, ошибка регулирования будет неограниченно возрастать по модулю, поскольку число интегрирующих звеньев в контуре перед местом приложения возмущения (нуль) меньше порядка воздействия (единица). Это можно показать также с помощью следующих простейших рассуждений.

Предположим, при постоянной скорости изменения возмущения, ошибка постоянна и равна некоторой величине

$$e = e^* = \text{const}. \quad (3)$$

Условием постоянства ошибки будет нулевой сигнал на входе интегрирующего звена:

$$e^* k_{\delta}k_1k_2 - f = 0. \quad (4)$$

Однако, поскольку возмущение изменяется, равенство (4) не может соблюдаться в любой момент времени и, следовательно, наше предположение неверно.

Зависимость ошибки от задающего воздействия зависит от порядка воздействия.

1. При  $y_{\text{зад}} = \text{const}$  ошибка равна нулю, так как порядок воздействия (нуль) меньше порядка астатизма (единица). Действительно, система может находиться в установившемся состоянии, если на входе интегрирующего звена нулевой сигнал, а при  $f = 0$  это возможно, только если  $e = 0$ .

2. При  $y_{\text{зад}} = \lambda t$ , где  $\lambda$  – скорость изменения задания, ошибка регулирования постоянна, так как порядок воздействия (единица) равен порядку астатизма. Определим значение ошибки в данном случае.

Если  $e = e^* = \text{const}$ , то скорость изменения выходной величины равна скорости изменения задания, следовательно, на входе интегрирующего звена присутствует сигнал, равный  $\lambda$ . Отсюда

$$e^* k_{\delta}k_1k_2 = \lambda. \quad (5)$$

Из (5) найдем

$$e^* = \frac{\lambda}{k_{\delta}k_1k_2} = \frac{\lambda}{k_{\delta}}. \quad (6)$$

3. При  $y_{\text{зад}} = \mu t^2/2$ , где  $\mu$  – ускорение задания, ошибка регулирования неограниченно возрастает, так как порядок воздействия (два) больше порядка астатизма. Действительно, для того, чтобы ошибка была постоянной, требуется, чтобы выходной сигнал изменялся с тем же ускорением, что и задание.



Однако это невозможно, так как при постоянной ошибке постоянен и сигнал на входе интегратора и, следовательно, выходной сигнал системы может возрастать только с нулевым ускорением.

**Практическое занятие № 9. Определение основных характеристик случайного сигнала (мат. ожидания, дисперсии, корреляционной функции, спектральной плотности)**

В данной работе определяются основные характеристики случайного сигнала: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция, спектральная плотность.

**Теоретические сведения**

Для стационарного случайного процесса  $y(t)$  благодаря его эргодичности среднее по множеству, т.е. математическое ожидание  $m_y$ , можно определить как среднее по времени:

$$m_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt. \quad (1)$$

Поскольку на практике  $y(t)$  чаще всего представляется своими дискретными отсчетами, отсчитанными через один и тот же промежуток времени, математическое ожидание можно определить как среднее значение отчета, рассчитанное на достаточно большом интервале времени. В Matlab эту задачу выполняет функция `mean`.

Случайная функция, математическое ожидание которой равно нулю, называется центрированной. Соответственно, любую случайную функцию можно представить как сумму математического ожидания и центрированной случайной функции:

$$y(t) = m_y + y^o(t), \quad (2)$$

где  $y^o(t)$  – центрированная случайная функция.

Поскольку мы рассматриваем только стационарные случайные процессы, для которых  $m_y = \text{const}$ , можно считать, что любой случайный сигнал содержит постоянную составляющую  $m_y$  и случайную составляющую  $y^o(t)$ .

Дисперсия  $D_y$  случайной функции  $y(t)$  – это среднее значение квадрата ее отклонения от среднего значения, или, что то же самое, среднее значение квадрата центрированной случайной функции:

$$D_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (y(t) - m_y)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (y^o(t))^2 dt. \quad (3)$$

Дисперсия является мерой отклонения случайной функции от ее среднего значения.

Среднеквадратическое отклонение есть квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}. \quad (4)$$

Эта величина удобна тем, что имеет ту же размерность, что и случайная функция.

В Matlab среднеквадратическое отклонение вычисляется с помощью функции `std`.

Корреляционная (автокорреляционная) функция  $R_y(\tau)$  случайной функции – это среднее значение произведения двух значений этой функции, сдвинутых на определенный промежуток времени  $\tau$ :

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t + \tau)dt. \quad (5)$$

Эта функция служит для количественной оценки зависимости между последующими во времени значениями случайного процесса, т.е. оценивает быстроту изменения случайного процесса во времени.

Корреляционная функция является четной функцией, т.е.  $R_y(\tau) = R_y(-\tau)$  и имеет следующий общий вид (рис.1). Максимальное значение корреляционной функции имеет место при  $\tau=0$ , когда  $y(t+\tau)=y(t)$ , и равно среднему значению квадрата случайной функции:

$$R_y(0) = M[y^2]. \quad (6)$$

Такому же значению будет равна корреляционная функция при всех значениях  $\tau$  для детерминированной постоянной во времени величины  $a$ :

$$R_a(\tau) = a^2. \quad (7)$$

Если случайная величина центрирована, то, согласно (3), максимальное значение корреляционной функции равно дисперсии сигнала.

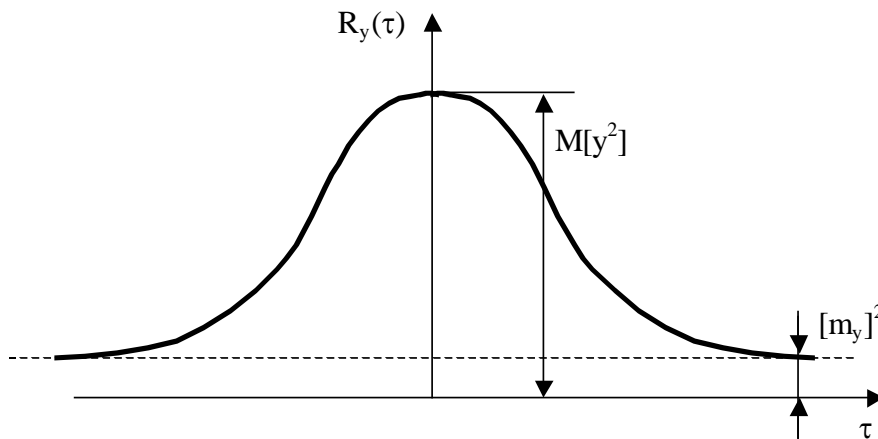


Рис.1. Корреляционная функция

Предельное значение корреляционной функции при  $\tau \rightarrow \infty$  равно квадрату среднего значения:

$$R_y(\infty) = m_y^2. \quad (8)$$

Для центрированной случайной функции предельное значение равно нулю.

В системе Matlab корреляционные функции вычисляются с помощью функции `xcorr` из пакета `Signal Processing Toolbox`.

Спектральная плотность  $S_y(\omega)$  случайного процесса  $y(t)$  – частотная функция, характеризующая спектральный (частотный) состав процесса. Она представляет собой функцию распределения средних значений квадратов амплитуд гармоник, на которые может быть разложен случайный процесс.

Спектральная плотность формально определяется как изображение Фурье корреляционной функции:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9)$$

Поскольку  $R_y(\tau)$  – четная функция, выражение удобно представить в тригонометрической форме:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (10)$$

С помощью обратного преобразования Фурье можно выразить корреляционную функцию через спектральную плотность:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (11)$$

или в тригонометрической форме, учитывая, что  $S_y(\omega)$  – четная функция

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (12)$$

Спектральная плотность, как и корреляционная функция, является четной, т.е.  $S_y(\omega) = S_y(-\omega)$ , ее вид также подобен виду корреляционной функции. Соотношение между графиками спектральной плотности и корреляционной функции следующее: чем шире график корреляционной функции, тем уже график спектральной плотности и наоборот. В предельном случае, когда процесс детерминирован,  $y = a$ ,  $R_y(\tau) = a^2$ , спектральная плотность равна нулю всех частотах, кроме нулевой и описывается следующим образом:

$$S_y(\omega) = 2\pi a^2 \delta(\omega), \quad (13)$$

где  $\delta(\omega)$  – дельта-функция.

В другом предельном случае, когда  $y(t)$  является чисто случайным стационарным процессом и связь между последующими значениями  $y(t)$ , совсем отсутствует,

$$S_y(\omega) = a = \text{const}, \quad R_a(\tau) = a\delta(t). \quad (14)$$

Такой случайный процесс называется белым шумом. На практике процесс в виде белого шума невозможен, так как он имеет бесконечный спектр, и, следовательно, бесконечную мощность. Однако реальные случайные процессы с конечным спектром часто можно приближенно представить в виде белого шума, если рассматривается действие их на систему, полоса пропускания которой значительно уже ширины спектра процесса. Кроме того, приближенно реализованный белый шум можно использовать для формирования

случайных процессов с заданными характеристиками, как это и делается в данной работе.

Для центрированной случайной величины существует следующая связь между спектральной плотностью и дисперсией:

$$D_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{y^o}(\omega) d\omega. \quad (15)$$

### Формирование случайной последовательности

Исходными данными являются последовательности значений случайного сигнала, сформированного преподавателем с помощью имитационной модели.

Случайная последовательность формируется с помощью некоторой Simulink-модели, например, приведенной на рис. 2.

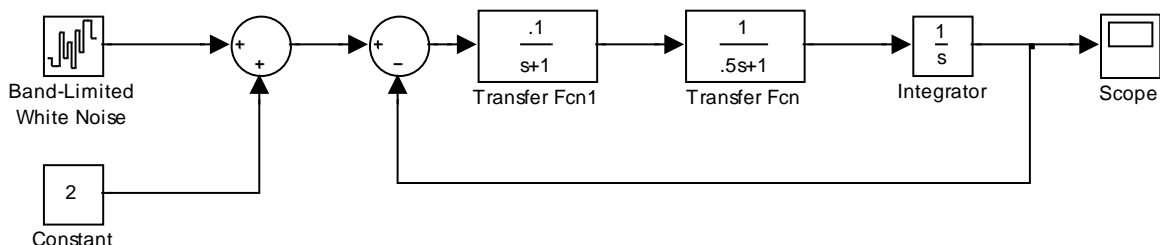


Рис. 2. Simulink-модель для формирования случайной последовательности

Случайный сигнал на входе системы имеет постоянную составляющую, формируемую блоком «Constant» и центрированную случайную составляющую, формируемую блоком «Band Limited White Noise». Последний моделирует работу генератора «белого шума» заданной мощности  $a$ . Проходя через линейную систему, случайный сигнал приобретает заданные характеристики, которые полностью определяются свойствами системы. В частности, его спектральная плотность равна

$$S(\omega) = aA^2(\omega), \quad (16)$$

где  $A(\omega)$  – АЧХ системы.

В блоке «Scope» выходной случайный сигнал сохраняется в рабочей области Matlab как переменная, в нашем случае имеющая имя rs (рис. 3).

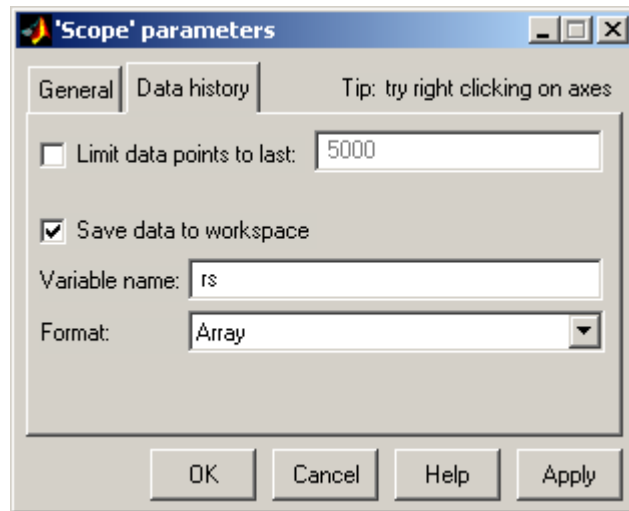


Рис. 3. Сохранение случайного сигнала в рабочей области

Расчет должен проводиться методом-решателем с постоянным шагом, например, `ode5`, причем шаг решателя должен быть равен параметру «Sample time» блока «Band Limited White Noise». Для того чтобы выходной сигнал системы с достаточной степени отражал свойства системы, необходимо, чтобы

- шаг интегрирования должен быть достаточно мал, чтобы отразить поведение системы на всех частотах ее полосы пропускания;

- расчетный промежуток времени должен быть достаточно велик, чтобы отразить усредненные характеристики выходного сигнала.

Для проверки «адекватности» полученной случайной последовательности следует предпринять следующие шаги:

1) извлечь массивы значений времени и выходного случайного сигнала из массива `rs` и определить шаг дискретизации. Поскольку формируется, по сути, возмущающее воздействие, для его обозначения будем использовать символ «`f`»:

```
t = rs(:,1);
f = rs(:,2);
dt = t(2)-t(1);
```

2) определить математическое ожидание и выделить центрированную случайную величину:

```
mf = mean(f);
f = f - mf;
```

3) определить корреляционную (автокорреляционную) функцию  $R_f(\tau)$  с помощью функции `xcorr` (пакет `Signal Processing Toolbox`):

```
max_tau = 100; % область определения  $R_f(\tau)$   $-100 \leq \tau \leq 100$ 
max_lag = round(max_tau/dt); % максимальное число отчетов
Rf = xcorr(f,max_lag,'unbiased'); % расчет  $R_f(\tau)$ 
tr = [-max_lag :max_lag]*dt; % формирование оси абсцисс
```

```
figure(1),plot(tr,Rf), grid % построение графика  $R_f(\tau)$ 
```

4) рассчитать спектральную плотность  $S_f(\omega)$  по формуле (10), заменив интеграл суммой:

```
w = 0:.01:1.5;
ws = length(w);
Sf = zeros(ws,1);
for j=1:ws
    for i=1:size(Rf)
        Sf(j) = Sf(j)+ Rf(i)*cos(w(j)*tr(i))*dt;
    end
end
```

5) рассчитать АЧХ системы с помощью методов пакета Control:

```
W1 = tf(.1,[1 1]);
W2 = tf(1,[.5 1]);
W3 = tf(1,[1 0]);
W = feedback(W1*W2*W3,1);
[A,ph] = bode(W,w); A = A(:);
```

6) построить на одних осях графики функции  $S_f(\omega)$ , рассчитанной по случайной последовательности и по формуле (16)

```
a = .1; % мощность белого шума  $P_{бш}$ 
Sf1 = a*A.*A; % спектральная плотность по (16)
figure(2), plot(w,Sf,w,Sf1), grid
```

7) определить дисперсию и среднеквадратическое отклонение выходного сигнала по случайной последовательности и через полученную спектральную плотность согласно (15):

```
d = std(f) % среднеквадратическое отклонение по сл. послед.
D = d^2 % дисперсия
D1 = 1/pi*trapz(w,Sf) % дисперсия по спектр. плотности
d1 = sqrt(D1) % среднеквадратическое отклонение
```

Ниже показаны результаты расчетов для системы, приведенной на рис. 2 при следующих параметрах:

```
мощность белого шума:  $a = 0,1$ ;
шаг интегрирования:  $dt = 1$ ;
расчетный интервал:  $t = 0 \dots 500000$ ;
область определения  $R(\tau)$ :  $-100 \leq \tau \leq 100$ ;
область определения  $S(\omega)$ :  $\omega = 0 \dots 1,5$ ;
```

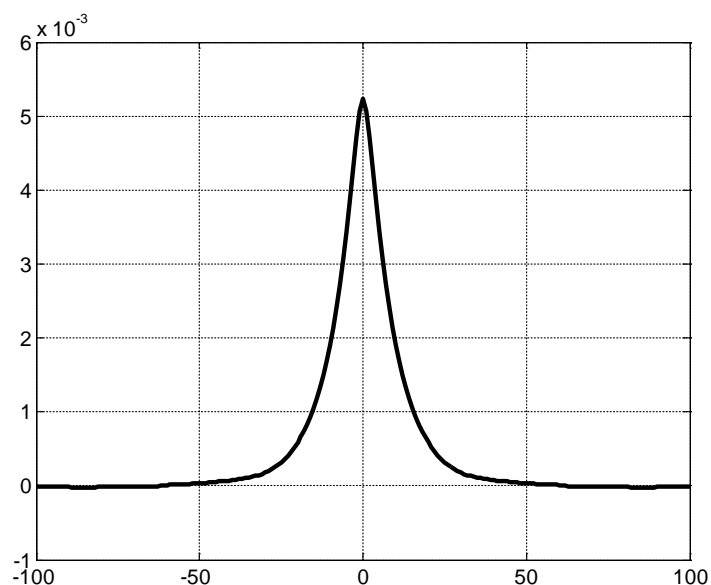


Рис. 2. Корреляционная функция  $R_f(\tau)$  (величина  $f$  центрирована)

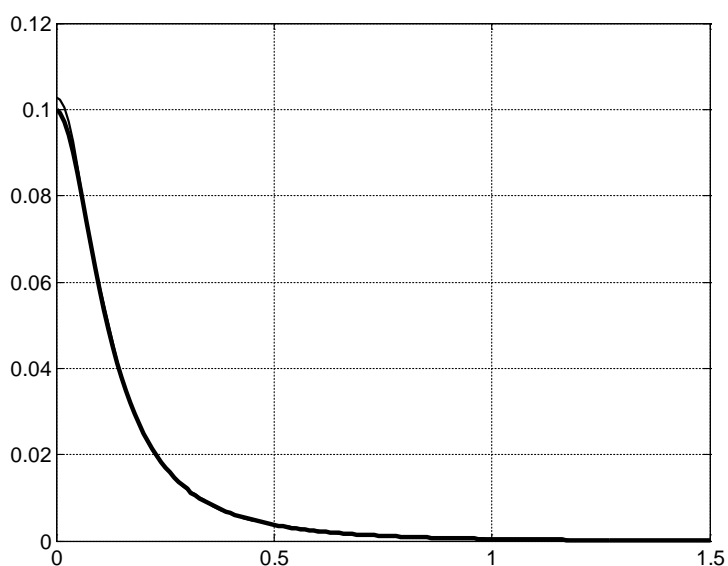


Рис. 3. Спектральные плотности, определенные теоретически (жирн.) и по выходной случайной последовательности (тонк.)

Дисперсия выходного сигнала, определенная по случайной последовательности: 0.0052332.

Дисперсия выходного сигнала, определенная по спектральной плотности: 0.0052201.

Описанная выше процедура может использоваться студентами для расчетов.

### **Порядок выполнения работы**

Преподаватель заранее формирует случайные последовательности с заданными характеристиками и в начале занятия выдает их студентам в виде

mat-фалов Matlab. По данной последовательности студенты самостоятельно определяют математическое ожидание и дисперсию случайного сигнала, рассчитывают корреляционную функцию и спектральную плотность и строят соответствующие графики. Правильность расчета проверяется путем сравнения значений дисперсии, определенных непосредственно по выборке и через спектральную плотность. Кроме того, поскольку рассчитывается дисперсия центрированной случайной величины, ее значение должно совпадать с максимальным значением корреляционной функции. Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №5.

На занятии разбирается пример решения задачи.

Сначала берется небольшая выборка в 20–30 отчетов. С помощью калькулятора определяется математическое ожидание и дисперсия сигнала, вычисляются значения корреляционной функции для 4–5 значений  $\tau$ . Далее, интерполируя, строится график функции  $R(\tau)$ . Определяются значения спектральной плотности для 5–6 значений  $\omega$ . Интерполируя, строится график  $S(\omega)$ . По нему рассчитывается дисперсия и сравнивается с полученной непосредственно по выборке. Цель данного этапа – уяснить «технология» расчетов.

Далее разбирается программа решения задачи в Matlab. Используется «большая» выборка (300000 – 500000 отчетов). Для демонстрации используется видеопроектор.

### ***Практическое занятие № 10. Определение точности системы при случайном входном воздействии***

В данной работе определяется точность системы, заданной на практическом занятии №2, при случайном воздействии, характеристики которого получены на практическом занятии №9. Преподаватель задает места приложения случайного воздействия. Требуется определить характеристики случайного процесса на выходе системы: математическое ожидание, корреляционную функцию, спектральную плотность и дисперсию.

#### **Теоретические сведения**

Математическое ожидание сигнала на выходе системы при случайном воздействии находится следующим образом:

$$m_y = W(0)m_f, \quad (1)$$

где  $m_f$  – математическое ожидание случайного входного сигнала,  $W(0)$  – коэффициент передачи системы.

Корреляционная функция выходного сигнала получается двукратным взятием интеграла Дюамеля (интеграла свертки) от корреляционной функции входного воздействия:



$$\begin{cases} R_y(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(\tau_2)x(\tau - \tau_2)d\tau_2; \\ x(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(\tau_1)R_f(\tau)(\tau + \tau_1)d\tau_1. \end{cases} \quad (2)$$

где  $R_f(\tau)$  – корреляционная функция входного сигнала,  $\omega(\tau)$  – весовая функция системы,  $x(\tau)$  – вспомогательная (промежуточная) функция.

Спектральная плотность выходного случайного сигнала может быть найдена по корреляционной функции:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_y(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau. \quad (3)$$

или через спектральную плотность входного воздействия и АЧХ системы:

$$S_y(\omega) = S_f(\omega)A^2(\omega), \quad (4)$$

Поскольку характеристики  $R_f(\tau)$  и  $S_f(\omega)$  были получены для центрированной случайной входной последовательности, характеристики  $R_y(\tau)$  и  $S_y(\omega)$  относятся к центрированной случайной выходной последовательности. Поэтому дисперсию можно определить через спектральную плотность:

$$D_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega)d\omega. \quad (5)$$

### Пример

На систему, структурная схема которой показана на рис.1, подается случайный сигнал  $f$ .

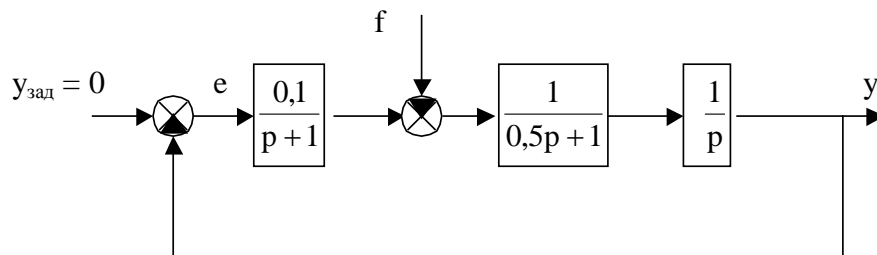


Рис. 1. Структурная схема САР

Известны характеристики сигнала: математическое ожидание, корреляционная функция и спектральная плотность. Они получены в результате выполнения предыдущего практического задания и сохранены в переменных:

$m_f$  - мат. ожидание входного воздействия

$R_f$  - корреляционная функция входного воздействия

$\tau_r$  - область определения  $R_f$

$dt$  - шаг по времени

$S_f$  - спектральная плотность входного воздействия

$\omega$  - область определения  $S_f$

Требуется определить характеристики выходного сигнала  $y$ .

1) Определим передаточную функцию системы по возмущению, весовую функцию и АЧХ

```
W1 = tf(.1,[1 1]);
W2 = tf(1,[.5 1]);
W3 = tf(1,[1 0]);
W = feedback(W2*W3,W1); % ПФ системы по возмущению
t = 0:dt:100;
ww = impulse(W,t); % весовая функция системы
[A,ph] = bode(W,w); A = A(:); % АЧХ системы
```

2) Определим математическое ожидание выходного сигнала

```
k = dcgain(W); % коэффициент передачи системы по возмущению
my = mf*k
```

3) Найдем корреляционную функцию выходного сигнала, численно решив интегральные уравнения (2).

```
n = length(Rf);
m = length(ww);
x = zeros(n,1); % вспомогательная величина
Ry = zeros(n,1);

% Нахождение  $x(\tau)$ :
for j = 1:n % цикл по  $\tau$ 
    for i=1:m % цикл по  $\tau_1$ 
        if (j+i) < n % участвуют только реальные данные
            x(j) = x(j) + ww(i)*Rf(j+i)*dt;
        end
    end
end

% Нахождение  $R_y(\tau)$ :
for j = 1:n % цикл по  $\tau$ 
    for i=1:m % цикл по  $\tau_2$ 
        if (j-i) > 0 % участвуют только реальные данные
            Ry(j) = Ry(j) + ww(i)*x(j-i)*dt;
        end
    end
end

figure(1), plot(tr,Ry), grid % график  $R_y(\tau)$ 
```

3) Найдем спектральную плотность выходного сигнала через  $R_y(\tau)$ , численно решив интеграл (3):

```
Sy = zeros(1,ws);  
for j=1:ws  
    for i=1:size(Ry)  
        Sy(j) = Sy(j)+ Ry(i)*cos(w(j)*tr(i))*dt;  
    end  
end
```

4) Для проверки найдем спектральную плотность выходного сигнала через  $S_f(\omega)$  и  $A(\omega)$  и построим графики:

```
Sy1 = Sf.*A.*A;  
figure(2), plot(w,Sy,w, Sy1), grid
```

5) Определим дисперсию и среднеквадратическое отклонение выходного сигнала

```
Dy = 1/pi*trapz(w,Sy)  
dy = sqrt(Dy)
```

Результаты вычислений показаны на рис. 2,3.

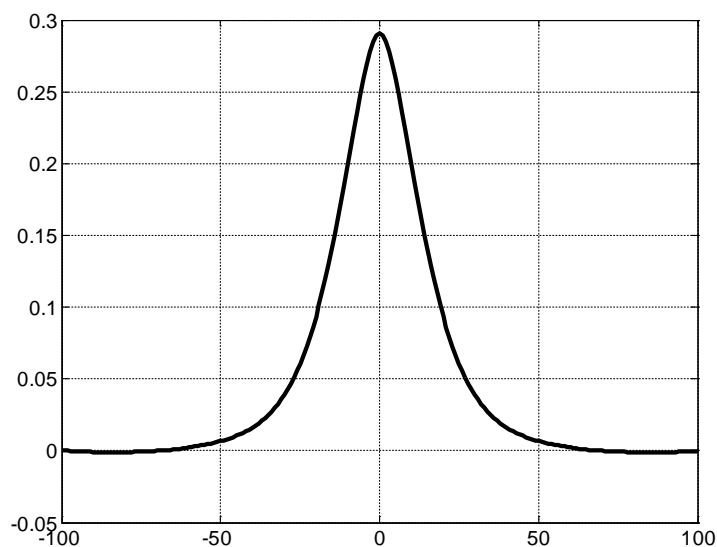


Рис. 2. Корреляционная функция  $R_y(\tau)$  (величина у центрирована)

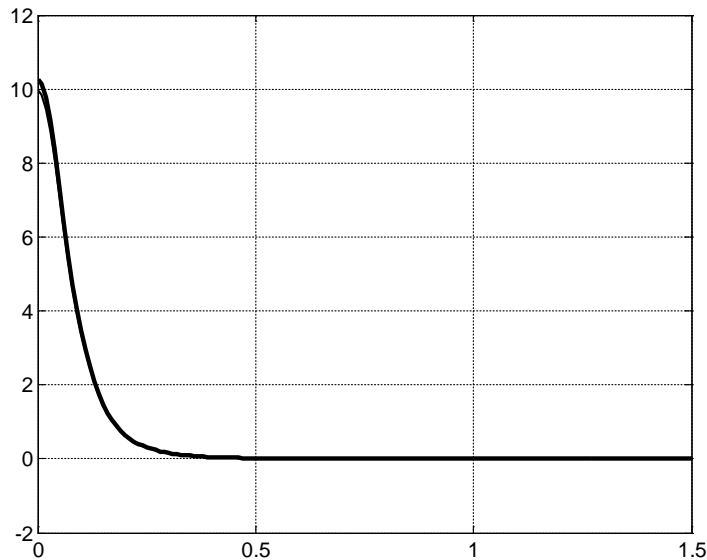


Рис. 3. Спектральные плотности  $S_y(\omega)$ , определенные через АЧХ системы (жирн.) и по корреляционной функции (тонк.)

Математическое ожидание выходного сигнала

$$m_y = 19.999.$$

Дисперсия выходного сигнала

$$D_y = 0.2906.$$

Среднеквадратическое отклонение

$$d_y = 0.5391.$$

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются характеристики случайного воздействия, полученные при выполнении практического задания №9 и структурная схема системы, включающая место приложения возмущения и параметры всех звеньев.

Студенты самостоятельно определяют математическое ожидание и дисперсию случайного сигнала на выходе системы, рассчитывают корреляционную функцию и спектральную плотность и строят соответствующие графики. Правильность расчета проверяется путем сравнения графиков спектральной плотности выходного сигнала, рассчитанных по корреляционной функции и через АЧХ системы. Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №5.

На занятии разбирается пример решения задачи. Для демонстрации используется видеопроектор.

**Практическое занятие №11. Определение косвенных частотных показателей качества (показателя колебательности, запасов устойчивости)**

В данной работе определяются косвенные частотные показатели качества системы, заданной на практическом занятии №2. Требуется определить показатель колебательности системы и ее запасы устойчивости.

**Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 4.2.3. [«Показатели качества переходных процессов»](#).

**Пример**

Определить значения частотного показателя колебательности, запасы устойчивости по фазе и амплитуде системы, структурная схема которой представлена на рис.1.

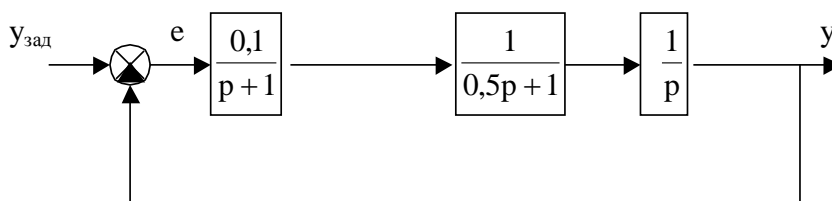


Рис. 1. Структурная схема САР

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{0,1}{p+1} \frac{1}{0,5p+1} \frac{1}{p} = \frac{0,1}{0,5p^3 + 1,5p^2 + p}. \quad (1)$$

АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{0,1}{0,5(j\omega)^3 + 1,5(j\omega)^2 + j\omega} = \frac{0,1}{-1,5\omega^2 + j\omega(1 - 0,5\omega^2)} = \frac{-0,15\omega^2}{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2} + j \frac{-0,1\omega(1 - 0,5\omega^2)}{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}. \quad (2)$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$\dot{A}_{\text{раз}}(\omega) = \frac{0,1}{\sqrt{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}}. \quad (3)$$

Найдем частоту среза разомкнутой системы из условия  $A_{\text{раз}}(\omega_{\text{ср}}) = 1$ :

$$\frac{0,1}{\sqrt{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}} = 1, \quad (4)$$

откуда

$$2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2 = 0,01. \quad (5)$$

После преобразования из (5) получим

$$0,25\omega^6 + 1,25\omega^4 + \omega^2 - 0,01 = 0. \quad (6)$$

Решения данного уравнения:  $\omega = \pm 1.9992j, \pm 1.0066j, \pm 0.0994$ . Из всех решений выбираем  $\omega_{cp} = 0,0994$  как единственное вещественное неотрицательное.

Фазо-частотная характеристика разомкнутой системы

$$\varphi_{\delta\grave{a}\zeta}(\omega) = \text{arctg} \frac{-0,1\omega(1 - 0,5\omega^2)}{-0,15\omega^2} \quad (7)$$

Анализируя выражение для АФЧХ (2), приходим к выводу, что на частоте среза вещественная и мнимая частотные характеристики отрицательны, поэтому

$$-\pi/2 < \varphi_{\delta\grave{a}\zeta}(\omega_{\grave{n}\delta}) < -\pi. \quad (8)$$

Если функция  $\text{arctg}$  возвращает результат в диапазоне от 0 до  $\pi$ , то с учетом установленного выше формулу (8) следует применить следующим образом:

$$\varphi_{\delta\grave{a}\zeta}(\omega_{\grave{n}\delta}) = -\pi + \text{arctg} \frac{0,1\omega_{\grave{n}\delta}(1 - 0,5\omega_{\grave{n}\delta}^2)}{0,15\omega_{\grave{n}\delta}^2}. \quad (9)$$

Тогда запас устойчивости по фазе

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi_{\delta\grave{a}\zeta}(\omega_{\grave{n}\delta}) = \text{arctg} \frac{0,1\omega_{\grave{n}\delta}(1 - 0,5\omega_{\grave{n}\delta}^2)}{0,15\omega_{\grave{n}\delta}^2}. \quad (10)$$

Подставив  $\omega_{cp} = 0,0994$  в (10) найдем  $\Delta\varphi = 81,4782^\circ$ .

Для нахождения запаса по амплитуде определим точку пересечения АФЧХ с отрицательной вещественной полуосью. В этой точке мнимая частотная характеристика принимает нулевое значение. Из (2) непосредственно видно, что это возможно только на частоте  $\omega_1 = \sqrt{2}$ . Подставляя данную частоту в (3) получим

$$\dot{A}_{\delta\grave{a}\zeta}(\omega_1) = \frac{0,1}{1,5\omega_1^2} = 0,0333. \quad (11)$$

Запас устойчивости по амплитуде равен

$$\Delta A = 1 - \dot{A}_{\delta\grave{a}\zeta}(\omega_1) = 1 - 0,0333 = 0,9667. \quad (12)$$

Для определения частотного показателя колебательности, найдем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(p) = \frac{W_{\delta\grave{a}\zeta}(p)}{1 + W_{\delta\grave{a}\zeta}(p)} = \frac{0,1}{0,5p^3 + 1,5p^2 + p + 0,1}. \quad (13)$$

АФЧХ системы

$$W(j\omega) = \frac{0,1}{0,5(j\omega)^3 + 1,5(j\omega)^2 + j\omega + 0,1} = \frac{0,1}{-1,5\omega^2 + 0,1 + j\omega(1 - 0,5\omega^2)}. \quad (14)$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{0,1}{\sqrt{(-1,5\omega^2 + 0,1)^2 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}}. \quad (15)$$

Максимум АЧХ соответствует минимуму подкоренного выражения:

$$f(\omega) = (-1,5\omega^2 + 0,1)^2 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2 = \\ = 0,25\omega^6 + 1,25\omega^4 + 0,7\omega^2 + 0,01 \rightarrow \min. \quad (16)$$

Условие минимума:

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} = 0,25\omega^6 + 1,25\omega^4 + 0,7\omega^2 + 0,01 = 1,5\omega^5 + 5\omega^3 + 1,4\omega = 0. \quad (17)$$

Поскольку максимум АЧХ ищется на частотах, больших нуля, его условием будет

$$1,5\omega^4 + 5\omega^2 + 1,4 = 0. \quad (18)$$

Сделаем замену переменной  $\omega^2 = \varpi$ , тогда

$$1,5\varpi^2 + 5\varpi + 1,4 = 0. \quad (19)$$

Решения квадратного уравнения:  $\varpi = -3,0248, -0,3086$ . Поскольку оба решения отрицательны, делаем вывод, что при  $\omega > 0$  АЧХ системы максимума не имеет. Следовательно, частотный показатель колебательности равен единице.

### ***Практическое занятие №12. Определение корневых показателей колебательности и расчет коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели***

Работа посвящена определению корневых показателей колебательности и расчету коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 4.2.3. [«Показатели качества переходных процессов»](#).

#### **Пример 1**

Характеристический полином замкнутой системы

$$D(p) = p^2 + 3p + 2. \quad (1)$$

Определить степень устойчивости системы  $\eta$ .

Сделаем в полиноме замену  $p = q - \eta$ :

$$D(q) = (q - \eta)^2 + 3(q - \eta) + 2, \quad (2)$$

откуда после простейших преобразований получим

$$D(q) = q^2 + (3 - 2\eta)q + \eta^2 - 3\eta + 2. \quad (3)$$

Применяя критерий Гурвица, определим такое  $\eta$ , чтобы система оказалась на границе устойчивости. Эта величина и будет искомым значением степени устойчивости.

Определитель Гурвица и условие нахождения системы на границе устойчивости:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-2\eta & 0 \\ 1 & \eta^2 - 3\eta + 2 \end{vmatrix} = (3-2\eta)(\eta^2 - 3\eta + 2) = 0. \quad (4)$$

Решения уравнения (4):  $\eta = 1, 1,5, 2$ . Исходя из определения степени устойчивости, выбираем наименьшее значение и окончательно получаем значение  $\eta = 1$ .

### Пример 2

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k}{p^2 + 3p + 1}. \quad (5)$$

Определить коэффициент передачи  $k$ , обеспечивающий степень устойчивости замкнутой системы  $\eta = 1$ .

Передаточная функция замкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p^2 + 3p + 1 + k}. \quad (6)$$

Произведем в характеристическом полиноме замену  $p = q - \eta = q - 1$ :

$$D(q) = (q - 1)^2 + 3(q - 1) + 1 + k = q^2 + q - 1 + k. \quad (7)$$

Для нахождения  $k$  составим определитель Гурвица и приравняем его к нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 + k \end{vmatrix} = -1 + k = 0, \quad (8)$$

откуда искомым значением является  $k=1$ .

### Пример 3

Определить с помощью критерия Михайлова показатель колебательности  $m$  САУ с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2}. \quad (9)$$

Запишем выражение для частотной характеристики Михайлова, заменив в характеристическом полиноме системы оператор  $p$  на  $(j-m)\omega$ :

$$D((j-m)\omega) = (j-m)^2 \omega^2 + 2(j-m)\omega + 2. \quad (10)$$

После преобразований получим

$$D((j-m)\omega) = (m^2 - 1)\omega^2 - 2m\omega + 2 + j(-2m\omega^2 + 2\omega). \quad (11)$$

Условиями нахождения системы на границе устойчивости будут

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D((j-m)\omega)] = (m^2 - 1)\omega^2 - 2m\omega + 2 = 0; \\ \operatorname{Im}[D((j-m)\omega)] = -2m\omega^2 + 2\omega = 0. \end{cases} \quad (12)$$



Из второго уравнения системы (12) найдем  $\omega = 1/m$  (решение  $\omega = 0$  нас не интересует). Подставив данное соотношение в первое уравнение, получим:

$$-\frac{1}{m^2} + 1 = 0, \quad (13)$$

откуда  $m = 1$ .

#### **Пример 4**

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{\delta\alpha\zeta}(p) = \frac{k}{p^2 + 2p + 1}. \quad (14)$$

Применяя критерий Найквиста определить коэффициент усиления  $k$  такой, чтобы показатель колебательности  $m$  был равен единице.

Расширенная АФЧХ разомкнутой системы:

$$W_{\delta\alpha\zeta}((j-m)\omega) = \frac{k}{(j-m)^2\omega^2 + 2(j-m)\omega + 1} = \frac{k}{(j-1)^2\omega^2 + 2(j-1)\omega + 1}. \quad (15)$$

Проведя необходимые преобразования, получим

$$W_{\delta\alpha\zeta}((j-m)\omega) = \frac{k(1-2\omega)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2} + j \frac{-2k(\omega-\omega^2)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2}. \quad (16)$$

Определим  $k$  из условий

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[W_{\delta\alpha\zeta}((j-m)\omega)] = \frac{k(1-2\omega)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2} = -1; \\ \operatorname{Im}[W_{\delta\alpha\zeta}((j-m)\omega)] = \frac{-2k(\omega-\omega^2)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из второго уравнения системы (17) найдем  $\omega = 1$  (решение  $\omega = 0$  нас не интересует). Подставив это значение в первое уравнение, получим  $k = 1$ .

#### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются передаточная функция разомкнутой системы второго порядка, и заданные значения степени устойчивости и показателя колебательности системы, которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбираются примеры решений задач.

#### ***Практическое занятие №13. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза***

В работе рассчитываются параметры регуляторов, построенных по принципу динамической компенсации и с помощью уравнений синтеза.

### Теоретические сведения

Рассмотрим примеры расчета регуляторов для объекта с передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{1}{A(p)} = \frac{1}{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p}. \quad (1)$$

Требуется определить передаточную функцию регулятора такую, чтобы обеспечить распределение полюсов замкнутой системы по Баттерворту с  $\omega_0 = 1$ .

#### Пример 1. Расчет регулятора методом динамической компенсации

Согласно методу динамической компенсации передаточная функция регулятора имеет вид:

$$W_{\delta}(p) = W_o^{-1}(p)W_{\delta\grave{a}\grave{c},\acute{y}\grave{o}}(p), \quad (2)$$

где  $W_{\text{раз, эт}}(p)$  – эталонная передаточная функция разомкнутой системы, которая определяется через эталонную передаточную функцию  $W_{\text{эт}}(p)$  замкнутой системы:

$$W_{\delta\grave{a}\grave{c},\acute{y}\grave{o}}(p) = \frac{W_{\acute{y}\grave{o}}(p)}{1 - W_{\acute{y}\grave{o}}(p)}. \quad (3)$$

Передаточная функция  $W_{\text{эт}}(p)$  имеет тот же порядок, что и объект и обладает заданным распределением полюсов. Идеальный низкочастотный фильтр Баттерворта третьего порядка описывается передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3}. \quad (4)$$

Таким образом, получим

$$W_{\acute{y}\grave{o}}(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), найдем

$$W_{\delta\grave{a}\grave{c},\acute{y}\grave{o}}(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p}. \quad (4)$$

и, далее, по (2) определим передаточную функцию регулятора

$$W_{\delta}(p) = \frac{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p}{p^3 + 2p^2 + 2p} = \frac{p^2 + 1,5p + 0,5}{p^2 + 2p + 2}. \quad (5)$$

#### Пример 2. Расчет регулятора с помощью уравнений синтеза

Передаточная функция регулятора, рассчитываемого с помощью уравнений синтеза, имеет такой же порядок, как и передаточная функция объекта, причем порядок числителя на единицу меньше порядка знаменателя:

$$W_{\delta}(p) = \frac{r_2 p^2 + r_1 p + r_0}{p^3 + \tilde{n}_2 p^2 + \tilde{n}_1 p + \tilde{n}_0} = \frac{R(p)}{C(p)}. \quad (6)$$

Необходимо найти такие коэффициенты  $r_0, r_1, r_2, c_0, c_1, c_2$ , чтобы обеспечить заданное распределение корней характеристического полинома замкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы:

$$D(p) = C(p)A(p) + R(p) = [p^3 + \tilde{n}_2 p^2 + \tilde{n}_1 p + \tilde{n}_0] \times [p^3 + 1,5p^2 + 0,5p] + r_2 p^2 + r_1 p + r_0. \quad (7)$$

После преобразований получим

$$D(p) = p^6 + (1,5 + c_2)p^5 + (0,5 + 1,5c_2 + c_1)p^4 + (0,5c_2 + 1,5c_1 + c_0)p^3 + (0,5c_1 + 1,5c_0 + r_2)p^2 + (0,5c_0 + r_1)p + r_0. \quad (8)$$

Эталонный полином шестого порядка с распределением корней по Баттерворту имеет вид:

$$D_y(p) = p^6 + 3,86\omega_0 p^5 + 7,46\omega_0^2 p^4 + 9,14\omega_0^3 p^3 + 7,46\omega_0^4 p^2 + 3,86\omega_0^5 p + \omega_0^6. \quad (9)$$

При  $\omega_0 = 1$  имеем

$$D_y(p) = p^6 + 3,86p^5 + 7,46p^4 + 9,14p^3 + 7,46p^2 + 3,86p + 1. \quad (10)$$

Сравнив (8) и (10), найдем коэффициенты регулятора  $c_2 = 2,36, c_1 = 3,42, c_0 = 2,83, r_2 = 1,51, r_1 = 2,45, r_0 = 1$ .

### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, и требования к эталонной передаточной функции (распределение полюсов, среднегеометрический полюс), которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбираются примеры решений задач.

### ***Практическое занятие №14. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по переменным состояниям объекта***

В работе рассчитывается регулятор в виде обратных связей по координатам состояния для объекта третьего порядка.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Системы автоматического управления. Лабораторный практикум»](#), в п. [3.1. «Модальное управление»](#)

#### **Пример**

Определить параметры регулятора для системы, структурная схема которой приведена на рис. 1, таким образом, чтобы обеспечить распределение полюсов системы по Баттерворту ( $\omega_0 = 1$ ) и коэффициент передачи, равный единице. Все переменные состояния объекта измеряемы.

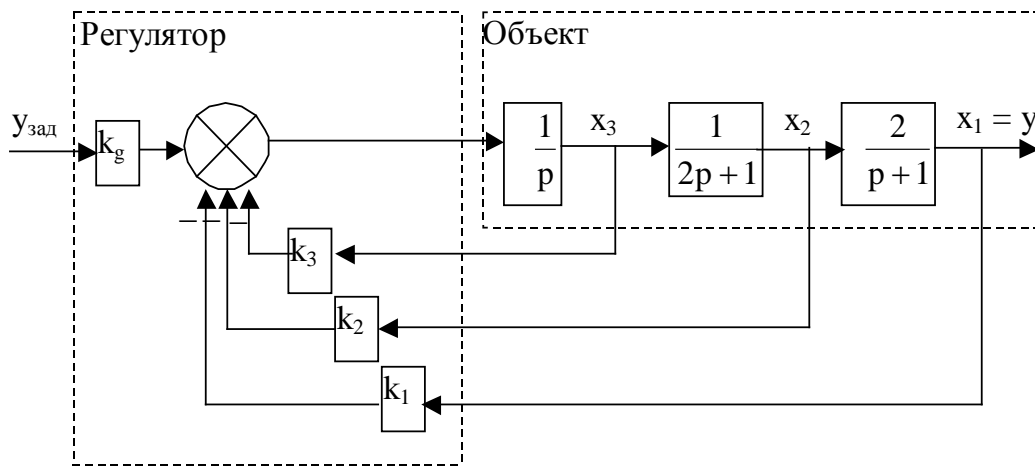


Рис.1. Структурная схема системы управления

Передаточная функция системы, удовлетворяющая требованиям задания, имеет вид:

$$W(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}. \quad (1)$$

Уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1; \\ \dot{x}_2 = 0,5x_3 - 0,5x_2; \\ \dot{x}_3 = k_g u_{зад} - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{cases} \quad (2)$$

$$y = x_1.$$

Матрицы описания:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_g \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0), \quad D = 0. \quad (3)$$

Характеристический полином системы:

$$\begin{aligned} \det(pE - A) &= \det \begin{pmatrix} p+1 & -2 & 0 \\ 0 & p+0,5 & -0,5 \\ k_1 & k_2 & p+k_3 \end{pmatrix} = \\ &= (p+1)(p+0,5)(p+k_3) + k_1 + 0,5k_2(p+1) = \\ &= p^3 + (1,5 + k_3)p^2 + (0,5 + 0,5k_2 + 1,5k_3)p + k_1 + 0,5k_2 + 0,5k_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенство полинома заданному обеспечивают следующие коэффициенты:  $k_3 = 0,5$ ,  $k_2 = 1,5$ ,  $k_1 = 0$ .

Числитель передаточной функции системы

$$\text{num}(p) = C(pE + A)^+ B. \quad (5)$$

Найдем присоединенную матрицу  $(pE - A)^+$ :

$$(pE - A)^T = \begin{pmatrix} p+1 & 0 & k_1 \\ -2 & p+0,5 & k_2 \\ 0 & -0,5 & p+k_3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$(pE - A)^+ = \begin{pmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}. \quad (7)$$

где знаком «×» помечены элементы, которые нас не интересуют с учетом структур матриц В и С.

Подставляя (7) в (5) получим

$$\text{num}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k_g \end{pmatrix} = k_g. \quad (8)$$

Таким образом, требуемый коэффициент числителя достигается выбором  $k_g = 1$ .

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, и требования к эталонной передаточной функции (распределение полюсов, среднегеометрический полюс), которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту. В качестве варианта студентам может быть предложено рассчитать систему модального регулирования скорости электропривода постоянного тока, включающую преобразователь напряжения и ДПТ с независимым возбуждением. Переменные состояния, по которым заводятся обратные связи регулятора: напряжение на выходе преобразователя, ток якоря двигателя и его угловая скорость. Исходные данные приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#).

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбирается пример решения задачи.

### ***Практическое занятие №15. Расчет системы модального управления со стационарным наблюдателем***

В работе рассчитывается стационарный наблюдатель состояния для объекта третьего порядка, заданного на практическом занятии №14.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Системы автоматического управления. Лабораторный практикум»](#), в п. [3.2. «Стационарный наблюдатель»](#)

## Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, полученные на практическом занятии №14, а также коэффициенты обратных связей регулятора, рассчитанные в ходе выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №14, которые и будут являться коэффициентами модального регулятора.

Кроме того, для всех вариантов задаются единые требования к скорости процесса идентификации: характеристический полином процесса  $\det(pE - A + GC)$  должен иметь биномиальное распределение корней и среднегеометрический полюс, вдвое превышающий таковой для характеристического полинома системы регулирования  $\det(pE - A + BK)$ .

Требуется рассчитать вектор настроек наблюдателя  $G$  и построить полную структурную схему (схему модели) системы модального управления со стационарным наблюдателем.

В качестве варианта студентам может быть предложено рассчитать стационарный наблюдатель для системы модального регулирования скорости электропривода постоянного тока, включающую преобразователь напряжения и ДПТ с независимым возбуждением. (В данной работе мы исходим из предположения, что переменные состояния объекта – напряжение на выходе преобразователя, ток якоря двигателя – не измеряются). Исходные данные приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#).

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбирается пример решения задачи.

### ***Практическое занятие №16. Расчет последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ***

В работе рассчитывается последовательное корректирующее устройство с помощью ЛАЧХ для объекта третьего порядка.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 5.3. [«Расчет корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик»](#).

#### **Пример**

Для объекта с передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{1}{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p} \quad (1)$$

с помощью ЛАЧХ рассчитать последовательное корректирующее устройство, такое, чтобы замкнутая система обладала следующими показателями:

- 1) отсутствие статической ошибки по задающему воздействию;

2) ошибка при задании, изменяющемся со скоростью 1 ед/сек не более 0,1 ед.;

3) время регулирования не более 4 сек.;

4) перерегулирование не более 20%.

При расчете воспользоваться в качестве эталонной типовой ЛАЧХ (рис.1) системы третьего порядка с передаточной функцией

$$W_{\delta\dot{\alpha}\zeta, \dot{\gamma}\delta}(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}. \quad (2)$$

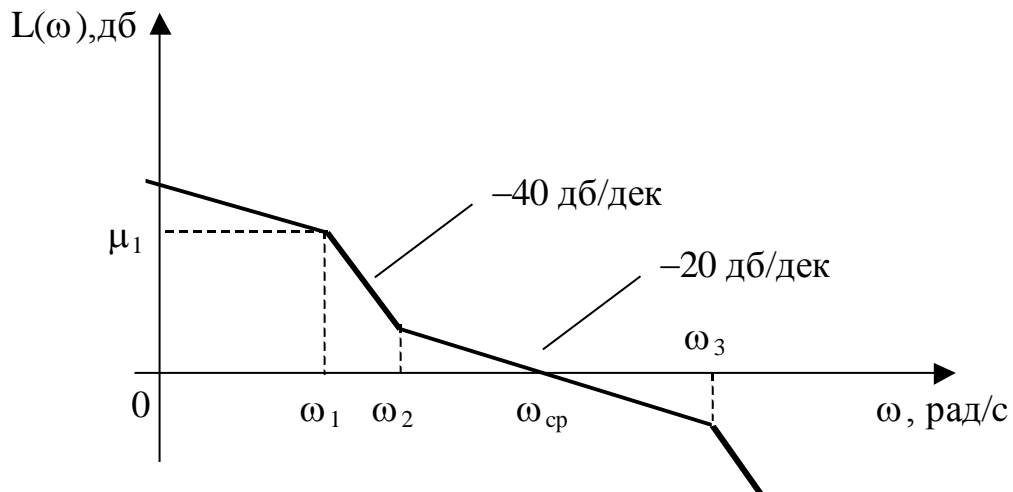


Рис.1. Типовая ЛАЧХ

1. Определим параметры типовой ЛАЧХ исходя из требований к системе.

Типовая ЛАЧХ соответствует системе с астатизмом первого порядка, следовательно, первое требование к синтезируемой системе удовлетворяется автоматически.

Для выполнения второго требования определим отношение между параметрами  $\omega_1$  и  $\mu_1$ . Эти параметры задают уровень низкочастотной асимптоты ЛАЧХ, которая определяется входящим (неявно) в структуру системы интегрирующим звеном с передаточной функцией

$$W_{\dot{\epsilon}}(p) = \frac{k'_{\delta\dot{\alpha}\zeta}}{p}, \quad (3)$$

где  $k'_{\delta\dot{\alpha}\zeta}$  – коэффициент передачи системы с передаточной функцией  $p \times W_{\text{раз}}(p)$ .

ЛАЧХ этого звена

$$L_{\dot{\epsilon}}(\omega) = 20 \lg k'_{\delta\dot{\alpha}\zeta} - 20 \lg \omega. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\mu_1 = 20 \lg k'_{\delta\dot{\alpha}\zeta} - 20 \lg \omega_1. \quad (5)$$

Величина  $k'_{\delta\dot{\alpha}\zeta}$  находится из требований к точности системы в стационарном динамическом режиме:

$$k'_{\delta\alpha\zeta} = \frac{\nu}{e} = \frac{1}{0,1} = 10, \quad (6)$$

где  $\nu$  – скорость изменения задающего сигнала,  $e$  – установившееся значение ошибки регулирования при данной скорости.

Подставляя (6) в (5), получим

$$\mu_1 = 20 - 20 \lg \omega_1. \quad (7)$$

График зависимости  $\mu_1(\omega_1)$  приведен на рис.2

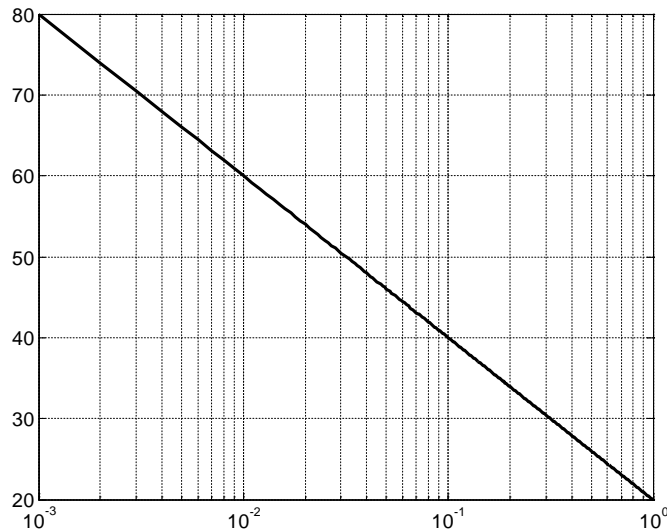


Рис.2. График зависимости  $\mu_1(\omega_1)$

Исходя из требования к быстродействию системы определим желаемую частоту среза:

$$\omega_{\tilde{\delta}} = (1 \div 2) \frac{2\pi}{t_{\delta}} = 1,57 \dots 3,14 \text{ рад/сек.} \quad (8)$$

Примем  $\omega_{\text{ср}} = 2$  рад/сек.

Далее будем искать на номограммах такое отношение  $\omega_1/\omega_{\text{ср}}$ , чтобы для  $\mu_1$ , определенного по графику, кривая при данном отношении была не выше уровня перерегулирования 20%.

В результате на номограммах для  $\omega_3/\omega_{\text{ср}} = 4$  найдем точку (см. рис.3) со следующими параметрами:  $\omega_1/\omega_{\text{ср}} = 0,05$ ,  $\omega_1 = 0,1$  рад/сек,  $\mu_1 = 40$  дБ, перерегулирование  $\sigma \approx 15\%$ .



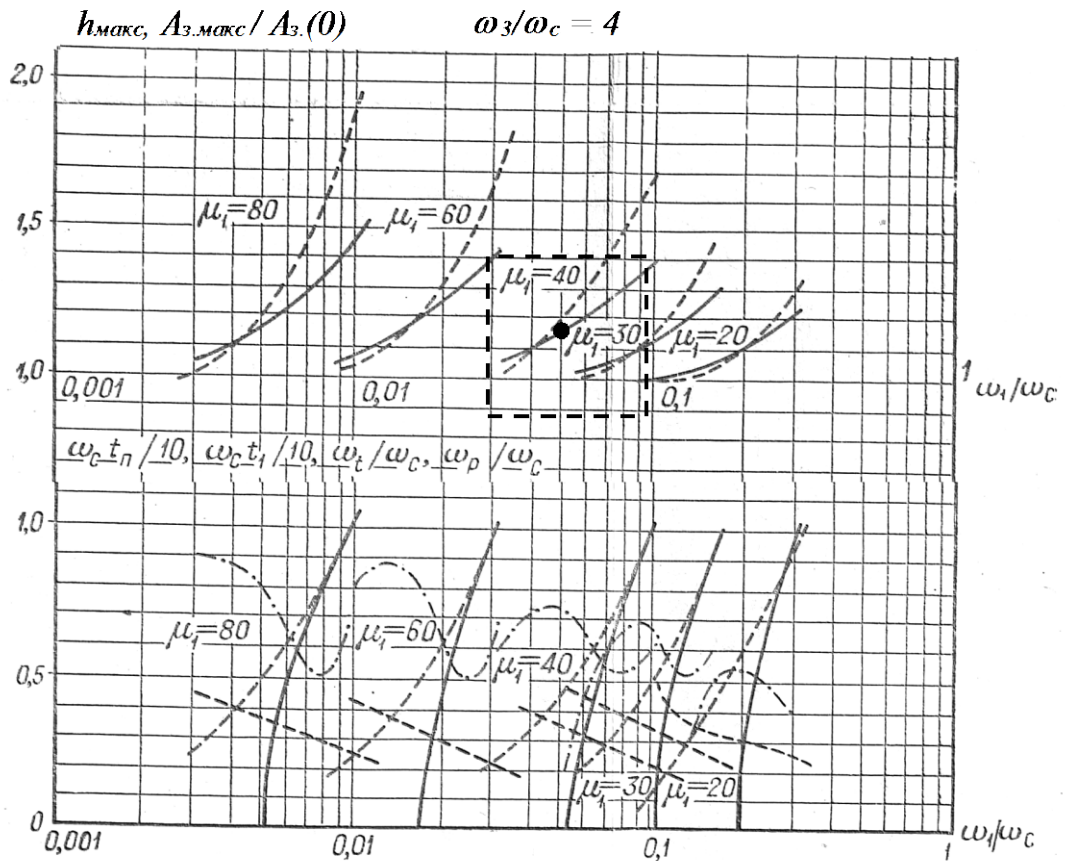


Рис. 3. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = 4$ ).

Частоту  $\omega_2 = 1/T_2$  определим через  $\mu_1$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_c$ :

$$\omega_2 = 10^{-\left[ \frac{\mu_1 + 1 \lg \frac{\omega_1^2}{\omega_c}}{20} \right]} = 10^{-\left[ 2 + \lg \frac{0,01}{2} \right]} = 0,5 \text{ д\AA\AA / н\AA\AA}. \quad (9)$$

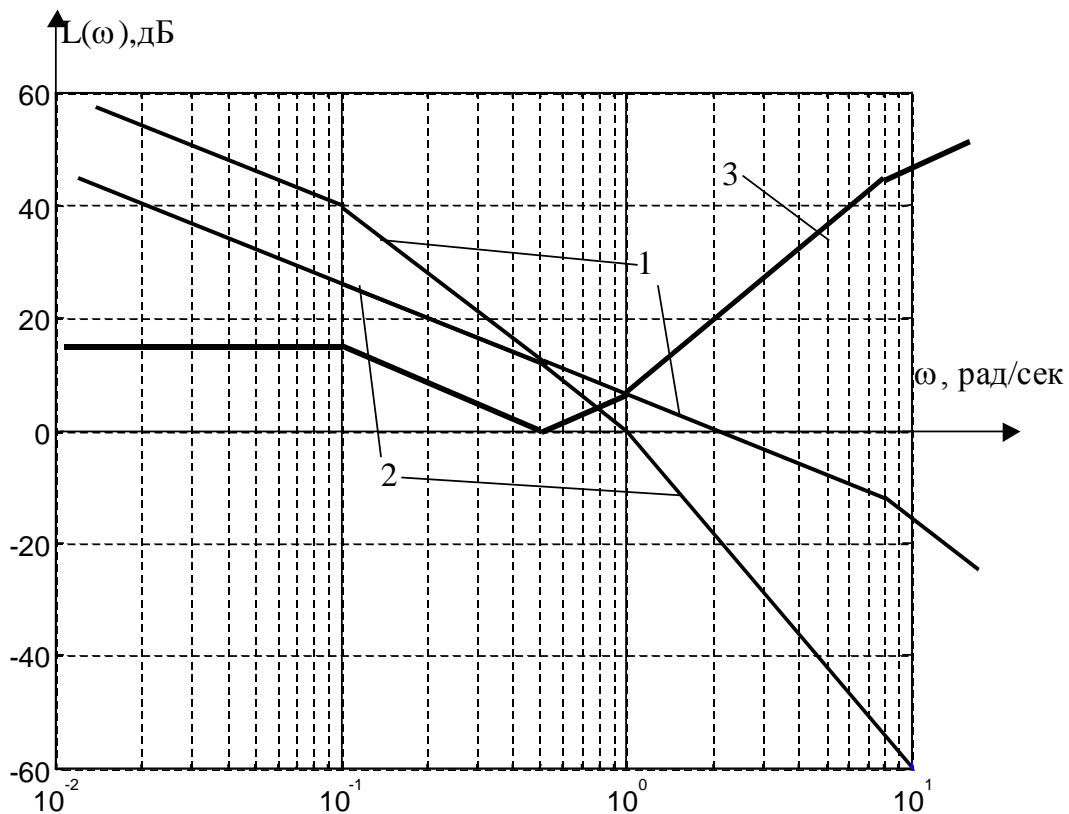
По найденным параметрам типовой ЛАЧХ восстановим эталонную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_{\text{д\AA\AA, н\AA\AA}}(p) = \frac{10(2p + 1)}{p(10p + 1)(0,125p + 1)}. \quad (10)$$

2. Построим эталонную ЛАЧХ и ЛАЧХ объекта (рис.4.).

Для построения ЛАЧХ объекта разложим его передаточную функцию на произведение передаточных функций типовых звеньев:

$$W_o(p) = \frac{1}{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p} = \frac{2}{p} \times \frac{1}{2p + 1} \times \frac{1}{p + 1}. \quad (11)$$



1 – эталонная ЛАЧХ, 2 – ЛАЧХ объекта,  
3 – ЛАЧХ корректирующего устройства

Рис. 4. Определение ЛАЧХ корректирующего устройства

3. Определим структуру и параметры корректирующего устройства.

Для этого, вычитая из эталонной ЛАЧХ ЛАЧХ объекта, найдем ЛАЧХ корректирующего устройства и по ней восстановим его передаточную функцию:

$$W_{\hat{\epsilon}\delta}(p) = \frac{k_{\hat{\epsilon}\delta} (T_{\hat{\epsilon}\delta 2} p + 1)^2 (T_{\hat{\epsilon}\delta 3} p + 1)}{(T_{\hat{\epsilon}\delta 1} p + 1)(T_{\hat{\epsilon}\delta 4} p + 1)}. \quad (12)$$

Коэффициент передачи корректирующего устройства определяется как отношение  $k'_{\delta\alpha\zeta}$  к коэффициенту передачи, определенному по передаточной функции  $p \times W_0(p)$ .

$$k_{\hat{\epsilon}\delta} = \frac{k'_{\delta\alpha\zeta}}{\lim_{p \rightarrow 0} [p W_0(p)]} = \frac{10}{2} = 5. \quad (13)$$

Постоянные времени корректирующего устройства найдем как величины, обратные частотам сопряжения асимптот ее ЛАЧХ. Получим:

$$W_{\hat{\epsilon}\delta}(p) = \frac{5(2p + 1)^2 (p + 1)}{(10p + 1)(0,125p + 1)}. \quad (14)$$

Передаточная функция (14) физически нереализуема, так как порядок ее числителя больше порядка знаменателя. Для устранения этого недостатка

введем в структуру устройства дополнительное (балластное) апериодическое звено с малой постоянной времени (которое будет выполнять также полезную функцию фильтра низких частот). Окончательно получим

$$W_{\text{св}}(p) = \frac{5(2p+1)^2(p+1)}{(10p+1)(0,125p+1)(0,1p+1)}. \quad (15)$$

### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, и требования к качеству синтезируемой системы, которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

Отчет о выполнении выполнения самостоятельного задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 8.

На занятии разбирается примере решения задачи.

### ***Практическое занятие №17. Расчет устройства компенсации возмущения в комбинированной системе управления***

Целью работы является освоение методики расчета комбинированных автоматических систем регулирования (АСР) при известных динамических характеристиках.

#### **Теоретические сведения**

При автоматизации технологического объекта управления (ТОУ) возможны случаи, когда одноконтурные АСР не обеспечивают удовлетворительного качества регулирования ни при каких настройках регулятора. Одной из причин низкого качества регулирования является воздействие на ТОУ существенных возмущений. Если имеется возможность автоматического измерения наиболее «сильного» возмущающего воздействие на ТОУ, то применяется комбинированная АСР. Действие контролируемого возмущения компенсируется специальным устройством, компенсатором, а с помощью регулятора, находящегося в контуре обратной связи, устраняется действие других (не контролируемых) возмущений. Таким образом, регулирующее воздействие формируется на основании двух принципов регулирования: по отклонению регулируемой переменной от заданного значения и по возмущению. Компенсация возмущений осуществляется путем введения дополнительного управляющего воздействия либо на вход канала регулирования ТОУ (рис. 1а), либо непосредственно на вход регулятора (рис. 2а).

Основой расчета комбинированных систем регулирования является принцип инвариантности. Применительно к рассматриваемым системам этот принцип можно сформулировать следующим образом: отклонение выходной координаты ТОУ  $y(t)$  под действием возмущения  $x(t)$  должно быть тождественно равно нулю:

$$\Delta y(t, x) = y(t) - y_0(t) \equiv 0. \quad (1)$$

Переходя к изображениям по Лапласу  $x(p)$  и  $y(p)$  сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ , условие (1) при  $y_0(t) = 0$  можно преобразовать к виду:

$$y(p) \equiv 0. \quad (2)$$

Равенство (2) используется для вывода передаточной функции компенсатора  $R_k(p)$  при заданных по каналам возмущения  $W_x(p)$  и регулирования  $W_u(p)$  характеристиках объекта. Для случая, когда сигнал от компенсатора подается на вход объекта (см. рис. 1а.), структурная схема комбинированной АСР преобразуется к последовательному соединению разомкнутой системы 1 и замкнутого контура 2 (см. рис. 1б.), передаточные функции которых соответственно равны:

$$W_{pc}^{(1)}(p) = W_x(p) + R_k(p) \cdot W_u(p) \quad (3)$$

и

$$W_{c\tilde{n}} = \frac{1}{1 - W_u(p)R(p)}. \quad (4)$$

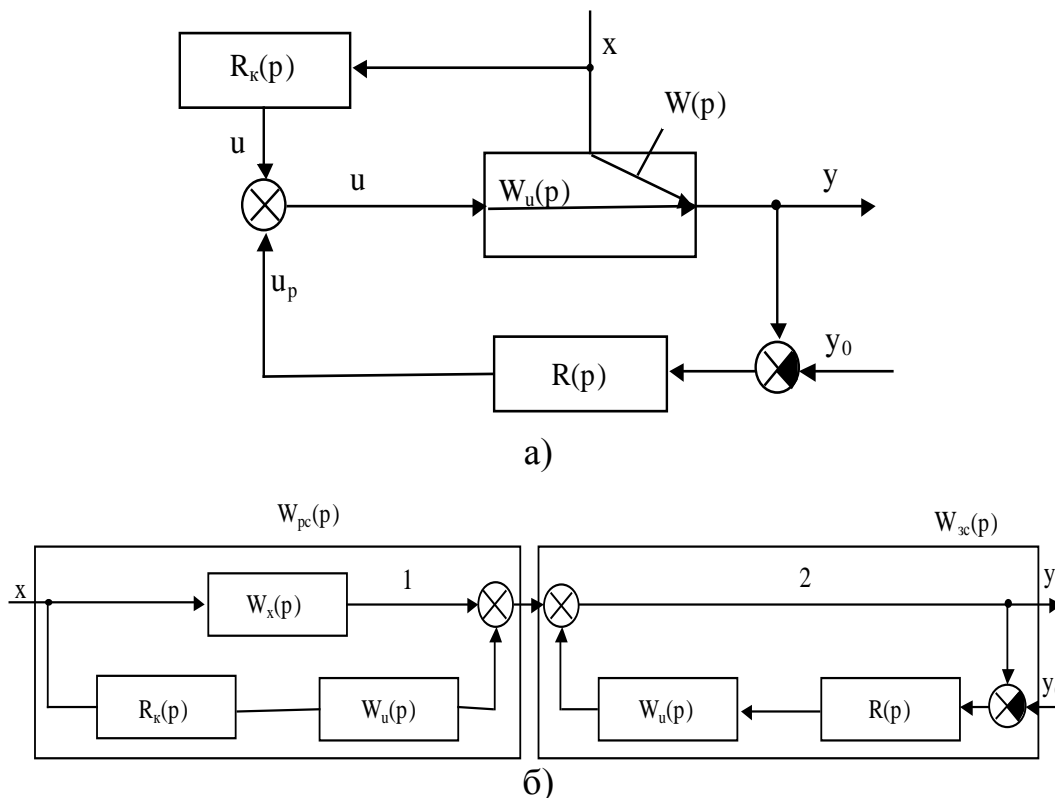


Рис. 1. Структурные схемы комбинированной АСР при подаче компенсирующего сигнала на вход объекта:  
а)- исходная; б)- преобразованная  
(1-разомкнутая система; 2-замкнутая АСР).

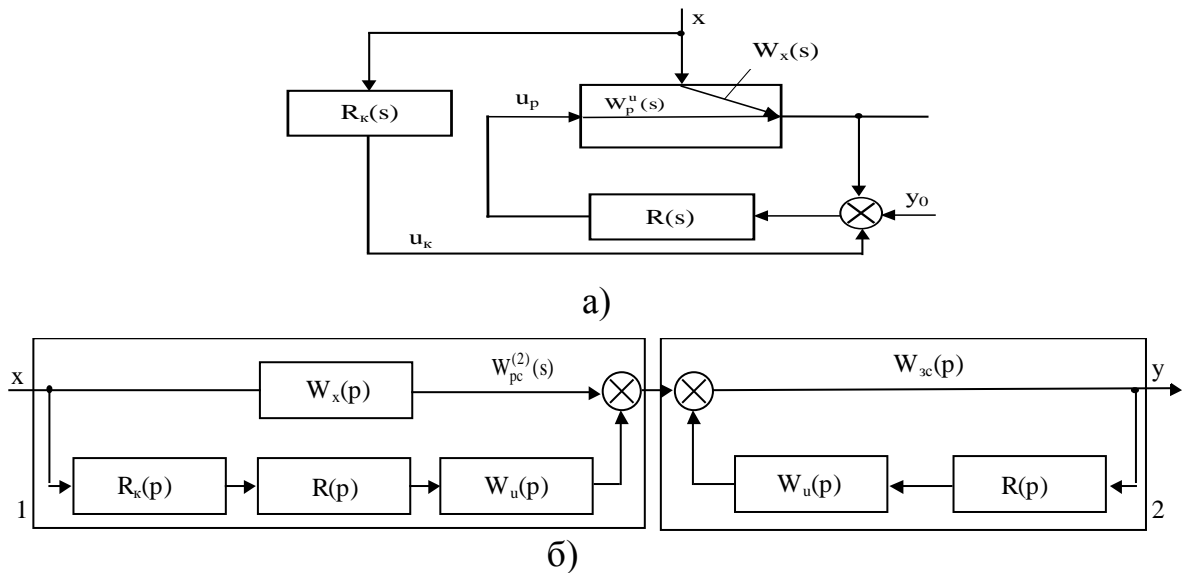


Рис. 2. Структурные схемы комбинированной АСР при подаче компенсирующего сигнала на вход регулятора:  
а)- исходная; б)- преобразованная  
(1-разомкнутая система; 2-замкнутая АСР).

При этом передаточная функция комбинированной АСР равна

$$W_{\text{кc}}^{(1)}(p) = W_{\text{pc}}^{(1)} \cdot W_{\text{cн}}^{(1)}(p) \quad (5)$$

и

$$y(p) = x(p) \cdot W_{\text{кc}}^{(1)}(p). \quad (6)$$

Подстановка выражений (5) и (6) в условие инвариантности (2) приводит к следующим соотношениям:

$$x(p) \cdot W_{\text{pc}}^{(1)}(p) \cdot W_{\text{cн}}^{(1)}(p) = 0. \quad (7)$$

Если  $x(p) \neq 0$  и  $W_{\text{cн}}^{(1)}(p) \neq 0$ , то получаем условие инвариантности в виде:

$$W_x(p) + R_k(p) \cdot W_u(p) = 0, \quad (8)$$

откуда

$$R_k(p) = -\frac{W_x(p)}{W_u(p)}. \quad (9)$$

При использовании комбинированной АСР второго типа (см. рис. 2а) аналогичный вывод условия инвариантности приводит к соотношениям вида (рис. 2б):

$$y(p) = x(p) \cdot W_{\text{кc}}^{(2)}(p), \quad (10)$$

где

$$W_{\text{кc}}^{(2)}(p) = W_{\text{pc}}^{(2)}(p) \cdot W_{\text{cн}}^{(2)}(p) \quad (11)$$

и

$$W_{\text{pc}}^{(2)}(p) = W_x(p) + R_k(p) \cdot R(p) \cdot W_u(p). \quad (12)$$

С учетом условий (2) и (9) имеем

$$x(p) \cdot W_{pc}^{(2)}(p) \cdot W_{\zeta\tilde{n}}(p) = 0, \quad (13)$$

следовательно, если  $x(p) \neq 0$  и  $W_{\zeta\tilde{n}}(p) \neq 0$ , то  $W_{pc}^{(2)}(p) = 0$ , откуда

$$R_k(p) = -\frac{W_x(p)}{W_u(p) \cdot R(p)}. \quad (14)$$

Знак минус в формулах (9) и (14) означает, что компенсирующий сигнал должен иметь знак, противоположный знаку возмущения. Одной из основных трудностей построения инвариантных систем регулирования является проблема их физической реализуемости. Можно указать два условия физической реализуемости компенсаторов:

1. Компенсатор не должен содержать звена с отрицательным чистым запаздыванием, т.е. время чистого запаздывания по каналу регулирования  $\tau_u$  должно быть меньше, чем время запаздывания по каналу возмущения  $\tau_x$ . Тогда, с учетом (9) или (14)

$$\tau_k = \tau_x - \tau_u > 0. \quad (15)$$

2. Компенсатор не должен содержать идеальные дифференцирующие звенья, т.е. в передаточной функции компенсатора степень  $m_k$  полинома в числителе не должна превышать степени  $n_k$  полинома в знаменателе. Например, если канал возмущения представляет собой апериодическое звено 1-го порядка, а канал регулирования - апериодическое звено 2-го порядка, то компенсатор окажется физически нереализуемым, так как если

$$W_x(p) = \frac{k_x}{Tp + 1} \quad (16)$$

и

$$W_u(p) = \frac{k_u}{(T_1p + 1) \cdot (T_2p + 1)}, \quad (17)$$

то

$$R_k(p) = -\frac{k_x \cdot (T_1p + 1) \cdot (T_2p + 1)}{k_u \cdot (Tp + 1)}, \quad (18)$$

т.е.  $m_k = 2$ ,  $n_k = 1$ .

При практической реализации разомкнутых и комбинированных АСР обычно добиваются приближенной инвариантности системы в определенном диапазоне частот. При этом реальный компенсатор выбирается из числа наиболее легко реализуемых динамических звеньев, параметры которых рассчитываются из условия близости частотных характеристик идеального  $R_k(i\omega)$  и реального  $\tilde{R}_k(i\omega)$  компенсаторов в заданном диапазоне частот, т.е.

$$R_k(i\omega) \approx \tilde{R}_k(i\omega), \quad \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}. \quad (19)$$

При такой постановке задачи условие приближенной инвариантности имеет вид:

$$|y(i\omega)| = 0, \quad \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}, \quad (20)$$

где

$$|y(i\omega)| = |x(i\omega)| \cdot |W_{kc}(i\omega)|^2. \quad (21)$$

Обычно выбирают такой тип компенсатора и с такими параметрами, при которых удовлетворяются следующие условия:

$$W_k(i \cdot 0) - W_k^p(i \cdot 0) = 0,$$

$$W_k(i \cdot \omega_p) - W_k^p(i \cdot \omega_p) \rightarrow \min_{a,b}$$

или

$$W_k(i \cdot 0) - W_k^p(i \cdot 0) \rightarrow \min_{a,b},$$

$$W_k(i \cdot \omega_p) - W_k^p(i \cdot \omega_p) = 0,$$

где  $W_k(i \cdot \omega)$ ,  $W_k^\delta(i \cdot \omega)$  - амплитудно-фазовая характеристика соответственно идеального и реального компенсатора;  $a$ ,  $b$  - векторы параметров выбранного типа реального компенсатора.

Условия (22) и (23), (24) и (25) выражают максимально возможное приближение АФХ идеального и реального компенсаторов на частоте  $\omega = 0$  и на резонансной (рабочей) частоте  $\omega = \omega_\delta$ . При этом компенсация возмущения на нулевой частоте обеспечивает инвариантность системы в установившихся статических режимах, если  $W_{c\bar{n}}(i\omega) \neq 0$  при  $\omega = 0$  (например, при использовании ПИ-регулятора) или повышает качество регулирования при ступенчатых возмущениях, когда  $|x(i \cdot 0)| = \infty$  при  $\omega = 0$ . Диапазон  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  зависит от частотного спектра сигнала возмущения  $|x(i \cdot \omega)|$  и частотных характеристик системы. Комбинированную АСР можно рассматривать, как двухступенчатый фильтр для сигнала возмущения, состоящий из разомкнутой системы и замкнутого контура.

Для практической реализации астатических компенсирующих и развязывающих устройств в качестве реальных часто используют реальные дифференцирующие звенья:

$$W_k^\delta = \frac{T_d p}{T_p + 1}. \quad (26)$$

Для практической реализации статических компенсирующих устройств в качестве реальных часто используют интегро - дифференцирующие звенья:

$$W_k^\delta = k \frac{T_d p + 1}{T_p + 1}. \quad (27)$$

*Расчёт оптимальных параметров компенсирующих устройств.*

*1. Устройством является реальное дифференцирующее звено.*

Рассмотрим в качестве реального компенсатора звено с передаточной функцией (26). Возможные случаи положения вектора  $W_k(i \cdot \omega_p)$  изображе-

ны на рис. 3. а,б. АФХ звена (26) имеет вид полуокружности. Уравнение окружности, построенной на АФХ, представляет собой выражение:

$$\left( \operatorname{Re}_k(\omega) - \frac{T_\partial}{2 \cdot T} \right)^2 + \operatorname{Im}_k^2(\omega) = \left( \frac{T_\partial}{2 \cdot T} \right)^2. \quad (28)$$

Уравнение направления вектора  $W_k(i \cdot \omega_p)$  имеет вид:

$$\operatorname{Im}_k(\omega) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{Re}_k(\omega), \quad (29)$$

где

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p)}. \quad (30)$$

Для случая, изображенного на рис. 3а, имеет место условие:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha > 0. \quad (31)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае

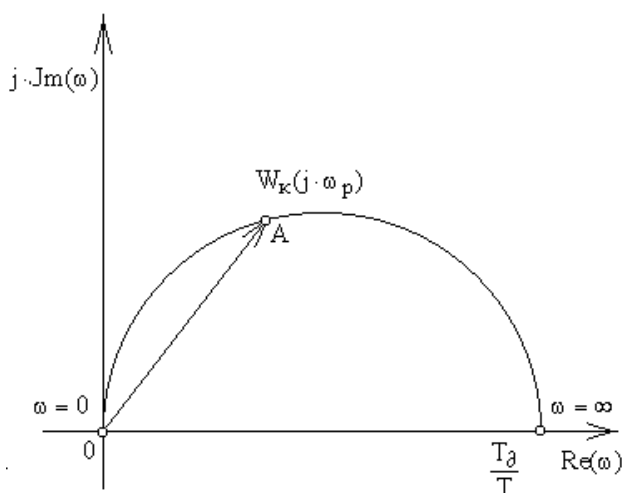
$$W_k^p = \frac{T_\partial \cdot T \cdot \omega^2}{T^2 \cdot \omega^2 + 1} + i \cdot \frac{T_\partial \cdot \omega}{T^2 \cdot \omega^2 + 1}, \quad (32)$$

с учетом (30),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{T \cdot \omega_p} \quad (33)$$

найдем

$$T = \frac{\operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\omega_p \cdot \operatorname{Im}_k(\omega_p)}. \quad (34)$$



а)



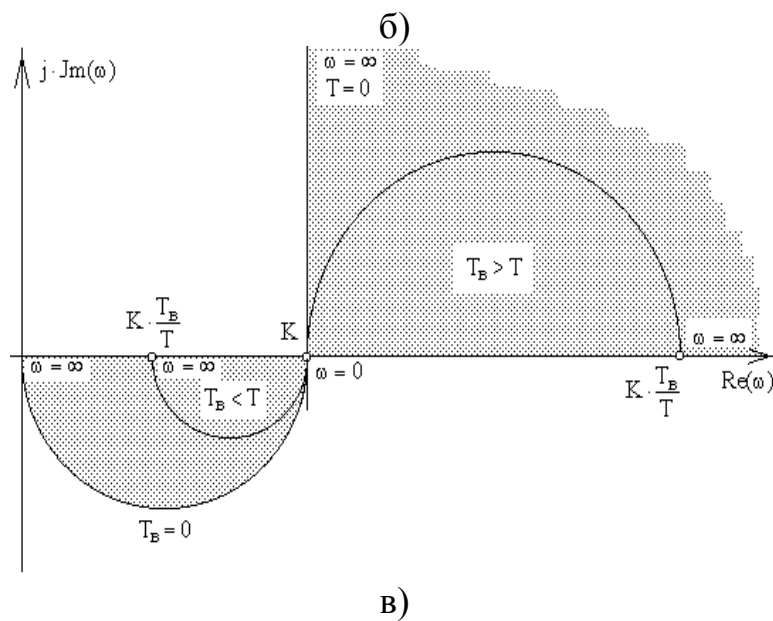
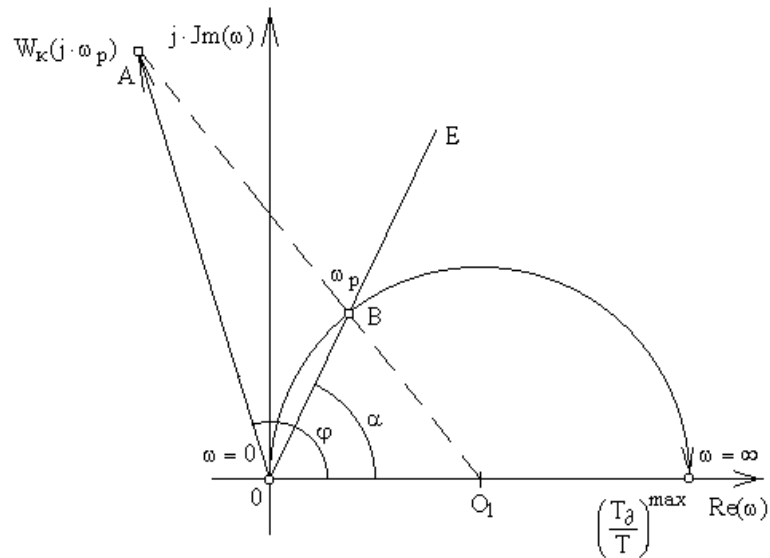


Рис.3. К определению параметров компенсатора

Подставив (34) в (28) при  $\omega = \omega_\delta$ , получим

$$T_\delta = \frac{\operatorname{Re}_k^2(\omega_p) + \operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\omega_p \cdot \operatorname{Im}(\omega_p)}. \quad (35)$$

Для случая, изображенного на рис. 3б, имеет место условие  $\operatorname{tg}\varphi < 0$ . (36)

Выберем максимально возможное отношение  $\frac{T_\delta}{T} = \left(\frac{T_\delta}{T}\right)^{\max}$  и, подставив в уравнение (28), после преобразований получим

$$\operatorname{Re}^2(\omega) - \left(\frac{T_\delta}{T}\right)^{\max} \cdot \operatorname{Re}(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega) = 0. \quad (37)$$

Запишем уравнение луча  $O_1A$ :

$$\operatorname{Im}(\omega) = \left( \operatorname{Re}(\omega) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right) \cdot \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max}} \quad (38)$$

и, решая (38) совместно с (37), получим координаты точки В:

$$\operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p) = \min \operatorname{Re}_{1,2}(\omega_p) = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}, \quad (39)$$

где

$$a = 1 + \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2}, \quad (40)$$

$$b = \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \cdot \left[ 1 + \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2} \right], \quad (41)$$

$$c = 0.25 \cdot \left( \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2}, \quad (42)$$

$$\operatorname{Im}_{\hat{A}}(\omega_p) = \operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \cdot \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max}}. \quad (43)$$

Из очевидного выражения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{Im}_{\hat{A}}(\omega_{\delta})}{\operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_{\delta})}, \quad (44)$$

с учетом (39) и (43), получим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1 - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \cdot \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p) \cdot \left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)}. \quad (45)$$

Для  $\alpha = \alpha_1$  из (33), с учетом (45), найдем

$$T = \frac{\operatorname{Re}_B(\omega_p)(\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5(\frac{T_\partial}{T})^{\max})}{\omega_p(\operatorname{Re}_B(\omega_p)(\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5(\frac{T_\partial}{T})^{\max}) - 0.5(\frac{T_\partial}{T})^{\max} \operatorname{Im}_k(\omega_p))} \quad (46)$$

а величину  $T_{\hat{A}}$  найдем по выражению

$$T_\partial = T \cdot \left(\frac{T_\partial}{T}\right)^{\max}. \quad (47)$$

2. Устройством является интегро - дифференцирующее звено первого порядка.

Рассмотрим в качестве компенсатора или развязывающего элемента звено с передаточной функцией (27). Его АФЧХ:

$$W_k^p(j \cdot \omega_p) = K_k^p \cdot \frac{1 + T_{\hat{A}} \cdot T \cdot \omega^2}{1 + T^2 \cdot \omega^2} + j \cdot K_k^p \cdot \frac{(T_{\hat{A}} - T) \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}. \quad (48)$$

имеет вид полуокружности. Уравнение окружности, построенной на АФЧХ, представляет собой выражение:

$$\left( \operatorname{Re}_k(\omega) - \frac{K_k^p}{2} \cdot \left(\frac{T_{\hat{A}}}{T} + 1\right) \right)^2 + \operatorname{Im}_k^2(\omega) = 0.25 \cdot (K_k^p)^2 \cdot \left(\frac{T_{\hat{A}}}{T} - 1\right)^2. \quad (49)$$

Заштрихованная на рис. 3в область является областью принципиально возможной реализации компенсатора или развязывающего элемента.

Пусть при  $K_k^p = W_k(0)$  конец вектора  $W_k(j \cdot \omega_p)$  лежит в заштрихованной области. При этом будут выполнены либо условия:

$$\operatorname{Im}_k(\omega_p) \geq \min \operatorname{Im}_k^p(\omega_p), \operatorname{Re}_k^p(\omega) = \operatorname{Re}_k(\omega_\delta) > 0, \operatorname{Im}_k(\omega_\delta) < 0, \quad (50)$$

если  $T_{\hat{A}} < T$ , либо условия:

$$\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0, \operatorname{Re}_k(\omega_p) > W_k(0) > 0, \quad (51)$$

если  $T_{\hat{A}} > T$ .

Значение  $\min \operatorname{Im}_k^p(\omega_p)$  в условиях (50) получают как  $\operatorname{Im}_k(\omega_p)$  из уравнения (49) при  $T_B = 0$  и  $\operatorname{Re}_k(\omega) = \operatorname{Re}_k(\omega_\delta)$ . Определим параметры  $T_{\hat{A}}$  и  $\hat{O}$  уравнения (49) при условии, что полуокружность пройдет через точки А и В (рис. 4а). Подставляя  $K_k^p = W_k(0)$ ,  $\operatorname{Re}_k(\omega) = \operatorname{Re}_k(\omega_\delta)$ ,  $\operatorname{Im}_k(\omega) = \operatorname{Im}_k(\omega_\delta)$  в уравнение (49), после преобразований получим:

$$\frac{T_{\hat{A}}}{T} \cdot W_k(0) \cdot (W_k(0) - \operatorname{Re}_k(\omega_p)) + \operatorname{Re}_k(\omega_p) \cdot (\operatorname{Re}_k(\omega_p) - W_k(0)) - W_k(0) + \operatorname{Im}^2(\omega_p) = 0. \quad (52)$$

Из (48)

$$W^p(\infty) = \operatorname{Re}^p(\infty) = W_k(0) \cdot \frac{T_{\hat{A}}}{T}. \quad (53)$$

Из (52), с учетом (53),

$$\operatorname{Re}^P(\infty) = \operatorname{Re}_k(\omega_p) - \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{W_k(0) - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}. \quad (54)$$

Теперь определим параметры  $T$  и  $T_{\hat{A}}$ , пользуясь известными выражениями:

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{AC}{CD}}, \quad (55)$$

$$T_{\hat{A}} = OD \cdot \frac{T}{K_k^P}, \quad (56)$$

где отрезки  $AC$ ,  $CD$  и  $OD$  (рис. 4.) имеют очевидные выражения.

Из (55), с учетом (53) и (54):

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{W_k(0) - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - \operatorname{Re}_k^P(\infty)}}, \quad (57)$$

а из (56):

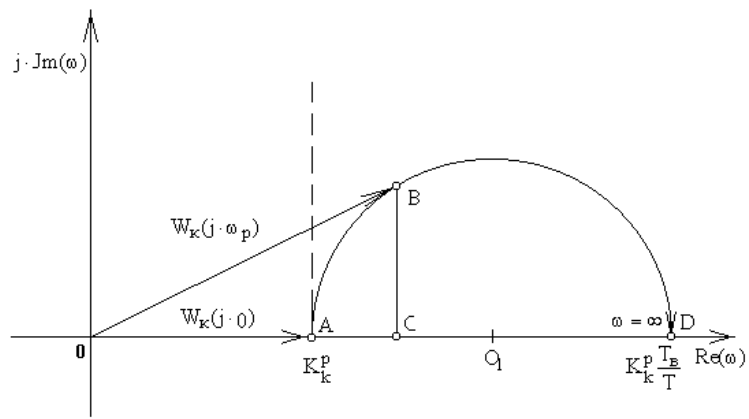
$$T_{\hat{A}} = T \cdot \frac{W_k^P(\infty)}{W_k(0)}. \quad (58)$$

Выражения (57) и (58) справедливы для определения настроечных параметров  $T$  и  $T_{\hat{A}}$  при попадании конца вектора  $W_k(j \cdot \omega_p)$  в любую точку заштрихованных областей, изображенных на рис. 3. Если конец вектора  $W_k(j \cdot \omega_p)$  не лежит в заштрихованной области, т.е. не выполняются условия (50) или (51), то ставится задача выполнения условий (22) и (23) или (24) и (25).

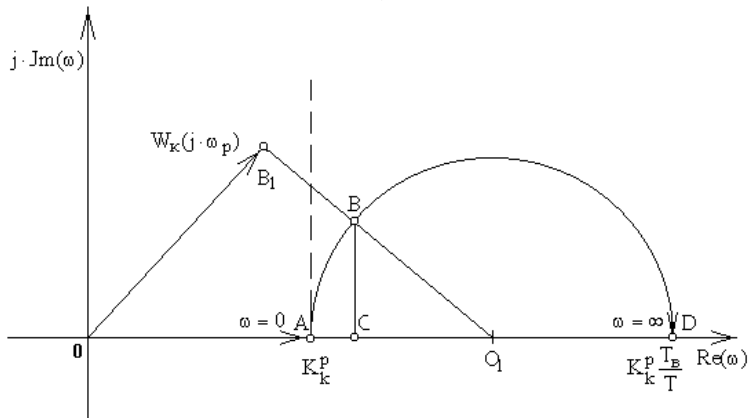
Рассмотрим случай выполнения условий (22) и (23) (рис. 4б.). Выбирается максимально возможное значение отношения  $(T_{\hat{A}}/T)^{\max}$ , если  $\operatorname{Im}(\omega_p) > 0$ , или минимально возможное отношение  $(T_{\hat{A}}/T)^{\min}$ , если  $\operatorname{Im}(\omega_p) < 0$ .

Пусть  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0$ . Найдем координаты точки  $B$  совместным решением уравнений окружности (49) и линии  $O_1B_1$ . Уравнение линии  $O_1B_1$  имеет вид:

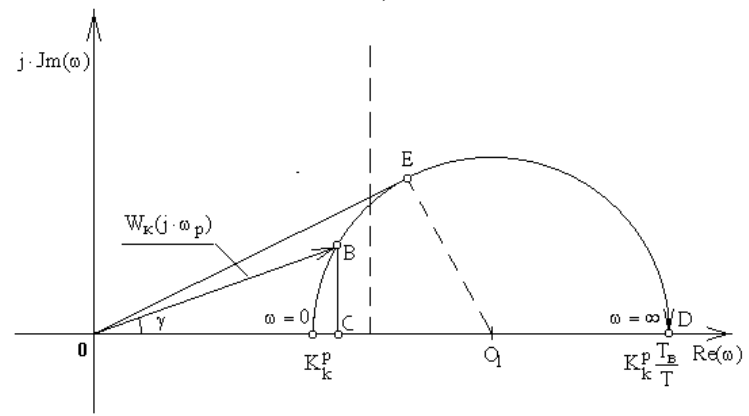
$$\operatorname{Im}(\omega) = \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p) \cdot \left( \operatorname{Re}(\omega) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot \left( 1 + (T_{\hat{A}}/T)^{\max} \right) \right)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot \left( 1 + (T_{\hat{A}}/T)^{\max} \right)}. \quad (59)$$



а)



б)



в)

Рис. 4. К определению параметров компенсатора в виде интегро - дифференцирующего звена.

Подставляя (59) в (49), получим:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}^2(\omega) \cdot \left( 1 + \left( \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_{\hat{a}}/T)^{\max})} \right)^2 \right) - \operatorname{Re}(\omega) \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_{\hat{a}}/T)^{\max}) \times \\
& \times \left( 1 + \left( \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_{\hat{a}}/T)^{\max})} \right)^2 \right) + \\
& + W_k^2(0) \cdot \left( (T_{\hat{a}}/T)^{\max} + \left( \frac{0.5 \cdot (1 + (T_{\hat{a}}/T)^{\max}) \cdot \operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_{\hat{a}}/T)^{\max})} \right)^2 \right) = 0
\end{aligned} \tag{60}$$

Решая уравнение (60), выбираем физически интерпретируемый корень, руководствуясь условиями: если  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0$ , то выбирается корень  $\operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p)$ , при котором  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0$  в (59); если  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) < 0$ , то выбирается корень  $\operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p)$ , при котором  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) < 0$  в (59).

Пользуясь выражениями (55) и (56), определим параметры  $T$  и  $T_{\hat{a}}$ :

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{W_k(0) - \operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p)}{\operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p) - W_k(0) \cdot (T_{\hat{a}}/T)^{\max}}}, \tag{61}$$

$$T_{\hat{a}} = T \cdot (T_{\hat{a}}/T)^{\max}. \tag{62}$$

Если  $T_{\hat{a}} < T$ , то выполнение условий (22) и (23) достигается при

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{W_k(0) - \operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p)}{\operatorname{Re}_{\hat{A}}(\omega_p) - W_k(0) \cdot (T_{\hat{a}}/T)^{\min}}}, \tag{63}$$

$$T_{\hat{a}} = T \cdot (T_{\hat{a}}/T)^{\min}. \tag{64}$$

Рассмотрим случай выполнения условий (24) и (25), когда  $T_{\hat{a}} > T$  (рис. 4в).). Выберем максимально возможную величину  $(T_{\hat{a}}/T)^{\max}$  и запишем уравнение окружности (49), проходящей через точку В:

$$\begin{aligned}
& \left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot K_k^p \cdot \left( (T_{\hat{a}}/T)^{\max} + 1 \right) \right)^2 + \operatorname{Im}^2(\omega_p) = \\
& = 0.25 \cdot K_k^p \cdot \left( (T_{\hat{a}}/T)^{\max} - 1 \right)^2.
\end{aligned} \tag{65}$$

Из (65) определим величину  $K_k^p$ , решая квадратное уравнение:

$$\begin{aligned}
& (T_{\hat{a}}/T)^{\max} \cdot (K_k^p)^2 - ((T_{\hat{a}}/T)^{\max}) + 1 \cdot \operatorname{Re}_k(\omega_p) \cdot K_k^p + \\
& + \operatorname{Re}_k^2(\omega_p) + \operatorname{Im}_k^2(\omega_p) = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

Выберем меньший корень  $K_k^p$ . Определим теперь параметры  $T$  и  $T_{\hat{a}}$ , пользуясь выражениями (55) и (58), с учетом (66),

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{K_k^p - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - K_k^p \cdot (T_{\hat{a}}/T)^{\max}}}, \tag{67}$$

а  $T_{\hat{a}}$  определяется по формуле (62). Если  $T_{\hat{a}} < T$ , то выполнение условий (24) и (25) достигается при

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{K_k^p - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - K_k^p \cdot (T_{\hat{a}}/T)^{\min}}}, \quad (68)$$

где  $K_k^p$  - больший корень уравнения (66) при замене  $(T_{\hat{a}}/T)^{\max}$  на  $(T_{\hat{a}}/T)^{\min}$ , а  $T_{\hat{a}}$  определяется по формуле (64).

Таким образом, расчет комбинированной АСР заключается в выборе структуры и расчете настроек регулятора и компенсатора и включает следующие этапы:

расчет настроек регулятора и определение рабочей частоты в замкнутой одноконтурной системе регулирования;

вывод передаточной функции идеального компенсатора из условия инвариантности и анализ его реализуемости;

выбор реального компенсатора и расчет его параметров из условия приближенной инвариантности в интервале частот  $[0, \omega_p]$ .

### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции объекта по каналам возмущения и регулирования, которые выдаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

При заданных передаточных функциях требуется рассчитать комбинированную АСР с динамическим компенсатором.

В ходе выполнения задания необходимо

1. Рассчитать настройки ПИ-регулятора и определить рабочую частоту в замкнутой одноконтурной системе регулирования.

2. По передаточным функциям каналов возмущения и управления (регулирования) вывести передаточную функцию идеального компенсатора из условия инвариантности  $u$  (способ подключения компенсатора задается преподавателем). Провести анализ физической реализуемости компенсатора (или сложности его технической реализации).

3. Выбрать структуру реального компенсатора и рассчитать его параметры из условия приближенной инвариантности  $u$  по отношению к возмущениям  $x_1$  на нулевой и рабочих частотах (или в диапазоне частот  $[0, \omega_p]$ ).

Отчет о выполнении выполнения самостоятельного задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 9.

На занятии разбирается пример решения задачи с применением переносного персонального компьютера и медиапроектора .

## Практическое занятие № 18. Расчет двусвязной системы автоматического регулирования

Целью работы является освоение методики выбора и расчета автоматической системы регулирования для объекта с взаимосвязанными координатами.

### Теоретические сведения

Один из основных приемов построения систем автоматизации сложных объектов состоит в разбиении их на несколько более простых с одной регулируемой переменной каждый и последующим расчетом для них обычных одноконтурных систем регулирования, работающих независимо друг от друга.

Однако большинство ТОУ имеют несколько входных и выходных переменных, взаимосвязанных между собой. На рис.1 показана структурная схема четырехканального объекта с двумя регулируемыми выходами  $y_1$ ,  $y_2$  и двумя входами  $x_1$ ,  $x_2$ , каждый из которых представляет сумму регулирующего воздействия  $U_1$  (или  $U_2$ ) и внешнего возмущения  $Z_1$  (или  $Z_2$ ). В таких объектах каналы воздействия  $x_1$  (и  $x_2$ ) на выходы  $y_1$  (и  $y_2$ ) называют прямыми, каналы воздействия  $x_1$  на  $y_2$  и  $x_2$  на  $y_1$  – перекрестными.

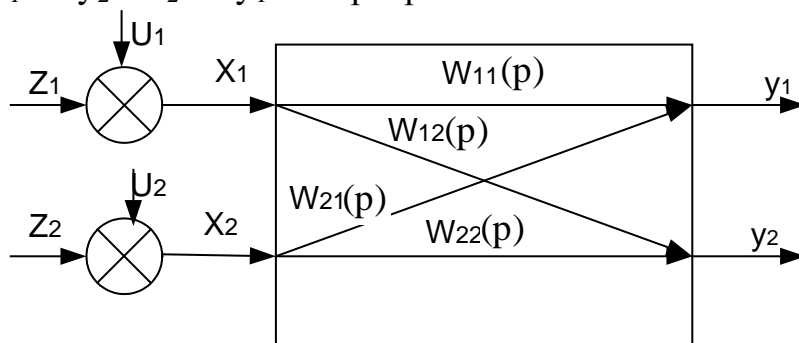


Рис.1 Структурная схема четырёхканального объекта с двумя регулируемыми переменными.

Перекрестные каналы связи, по сути, являются каналами возмущения, которые приводят к взаимному влиянию двух контуров регулирования, снижая, из запас устойчивости.

Для объектов с взаимосвязанными координатами применяют два типа автоматических систем регулирования:

- несвязанного регулирования;
- автономного регулирования.

Рассмотрим последовательно каждую из этих систем.

Структурная схема системы несвязанного регулирования приведена на рис.2. Она включает две одноконтурные замкнутые системы регулирования с регуляторами  $R_1$  и  $R_2$  в обратной связи. Оба контура влияют на работу друг друга через перекрестные связи. При этом ухудшается качество регулирования, снижается запас устойчивости и при определенных соотношениях пара-



метров основных и перекрестных каналов может наступить потеря устойчивости.

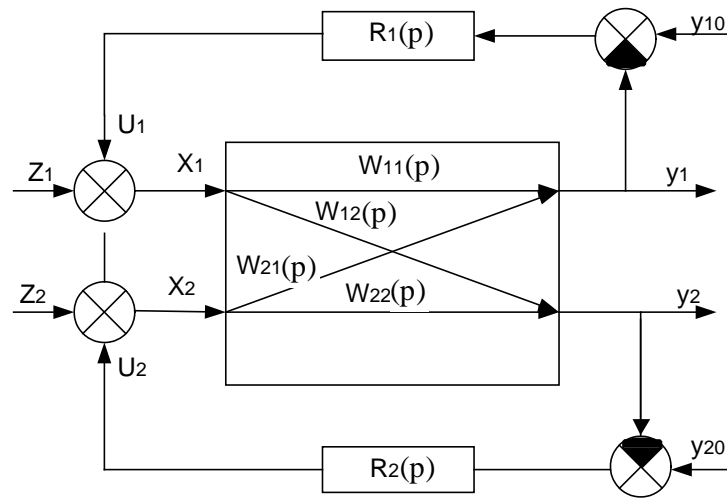


Рис.2. Структурная схема системы несвязанного регулирования.

Для уменьшения отрицательного влияния перекрестных связей при расчете настроек каждого из регуляторов должен рассматриваться эквивалентный объект, включающий все четыре канала объекта и другой регулятор.

Структурная схема эквивалентного объекта для регулятора  $R_1$  приведена на рис. 3.

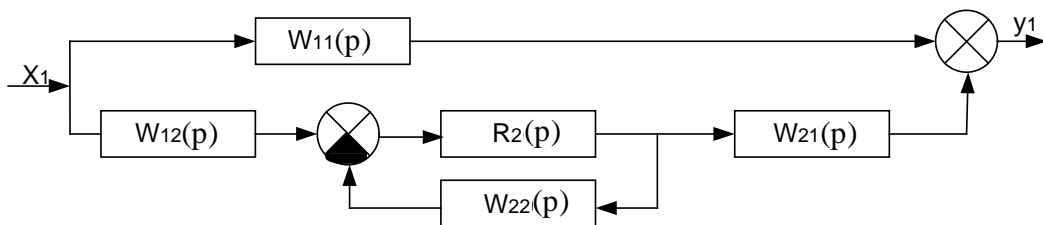


Рис.3. Структурная схема эквивалентного объекта для регулятора

Его передаточная функция определяется следующим выражением:

$$W_1(p) = W_{11}(p)[1 + k_{\text{н\grave{a}}} W_{2\text{ç\grave{a}}} (p)], \quad (1)$$

где  $K_{\text{св}}(p)$ - передаточная функция комплекса, характеризующего степень взаимной связи регулируемых переменных:

$$k_{\text{н\grave{a}}}(p) = \frac{W_{12}(p)W_{21}(p)}{W_{11}(p)W_{22}(p)}, \quad (2)$$

$W_{23}(s)$  - передаточная функция замкнутой системы регулирования второго контура по каналу задания:

$$W_{2\text{ç\grave{a}}}(p) = \frac{R_2(p)W_{22}(p)}{1 + R_2(p)W_{22}(p)}, \quad (3)$$

Передаточная функция эквивалентного объекта для второго регулятора находится аналогично.

Комплекс взаимной связи  $k_{cb}(p)$  характеризует влияние перекрестных каналов на качество регулирования. Если модуль комплекса связи на нулевой частоте близок к нулю  $k_{cb}(j0) \approx 0$ , то перекрестные связи достаточно слабы и их влиянием можно пренебречь; при этом  $W_1(p) \approx W_{11}(p)$  и  $W_2(p) \approx W_{22}(p)$ .

Если

$$k_{\hat{n}\hat{a}}(p) = \frac{W_{12}(j0)W_{21}(j0)}{W_{11}(j0)W_{22}(j0)} = \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}} > 1 \quad (4)$$

т.е. произведение коэффициентов усиления по перекрестным каналам больше, чем по основным, то  $x_1$  следует использовать в качестве регулирующего воздействия для переменной  $y_2$  и наоборот.

Расчет настроек регуляторов для системы несвязанного регулирования проводится итеративным способом. Для практических целей обычно бывает достаточно провести два этапа расчета:

Этап 1. Рассчитываются настройки регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  без учета перекрестных связей, т.е. по передаточным функциям прямых каналов объекта  $W_{11}(p)$  и  $W_{22}(p)$  для первого и второго регуляторов соответственно. Результаты этого расчета считаются первым приближением.

Этап 2. Рассчитываются настройки регулятора  $R_1$  для эквивалентного объекта, передаточная функция которого определяется выражением (1) при значениях настроек регулятора  $R_2$ , полученных в первом приближении. Если значения настроек  $R_1$ , рассчитанные в первом и втором приближениях, отличаются не более чем на 20%, то можно принять результаты второго приближения, как окончательное. В противном случае требуется продолжить расчет.

Аналогично рассчитывается второй контур регулирования.

Структурная схема системы автономного регулирования приведена на рис.4.

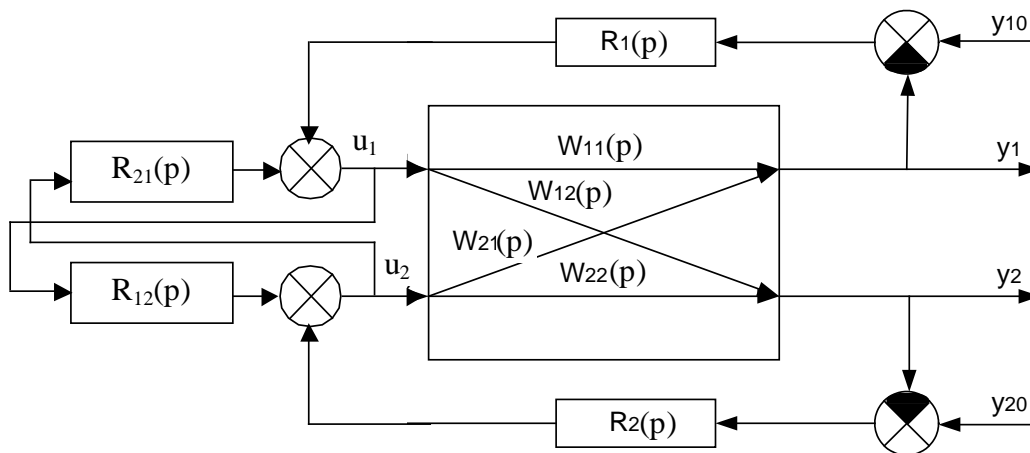


Рис.4. Структурная схема автономной АСР.

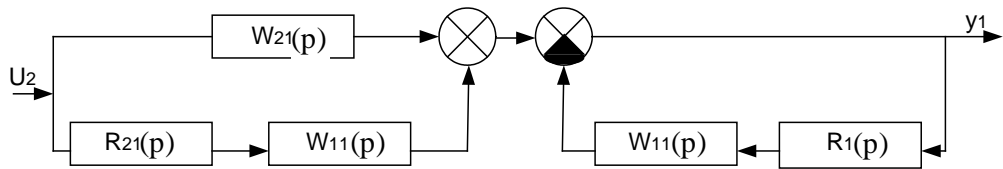


Рис.5. Эквивалентная схема автономной АСР для первого выхода.

Расчет системы основан на принципе автономности (независимости) одной регулируемой переменной  $y_1$  от другой  $y_2$ , который формулируют следующим образом: в любой момент времени отклонение  $\Delta y_1$  регулируемой координаты  $y_1$  от заданной величины  $y_{10}$  не зависит от значений другой, регулируемой переменной:

$$\Delta y_1(t, y_2) \equiv 0. \quad (5)$$

Аналогично формулируется принцип автономности по отношению ко второй регулируемой переменной:

$$\Delta y_2(t, y_1) \equiv 0. \quad (6)$$

Поскольку причиной отклонения регулируемой переменной  $y_2(t)$  являются соответствующие изменения входной  $x_2(t)$  координаты, которые по перекрестному каналу передаются на выход другого канала, то от принципа автономности целесообразно перейти к принципу инвариантности, т.е. независимости регулируемой переменной от изменения входной координаты другого канала

$$\begin{aligned} \Delta y_1(t, x_2) \equiv 0 \quad \text{или} \quad \Delta y_2(t, u_2) \equiv 0, \\ \Delta y_2(t, x_1) \equiv 0 \quad \text{или} \quad \Delta y_2(t, u_1) \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Автономность (т.е. взаимная независимость) двух контуров регулирования достигается за счет применения специальных динамических устройств (называемых динамическими компенсаторами), через которые между регуляторами осуществляются внешние связи, компенсирующие внутренние перекрестные связи в объекте. Передаточные функции компенсаторов выводятся из условия автономности. В автономной АСР изменения выходных координат объекта под действием регулирующих воздействий по перекрестным каналам описываются следующими уравнениями (см. рис.5):

$$\begin{aligned} \Delta y_1(p) = u_2(p)[W_{21}(p) + R_{21}(p)W_{11}(p)]W'_{1\zeta}(p), \\ \Delta y_2(p) = u_1(p)[W_{12}(p) + R_{12}(p)W_{22}(p)]W'_{2\zeta}(p), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$W'_{1\zeta}(p) = \frac{1}{1 + W_{11}(p)R_1(p)}, \quad W'_{2\zeta}(p) = \frac{1}{1 + W_{22}(p)R_2(p)} \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) видно, что, так как в общем случае сигналы  $u_1(p)$ ,  $u_2(p)$  и передаточные функции  $W'_{1\zeta}(p)$  и  $W'_{2\zeta}(p)$  не обращаются в нуль, то условие автономности может быть выполнено только за счет равенства нулю выражений в квадратных скобках в уравнениях (8). Отсюда получаем формулы для передаточных функций компенсаторов:

$$R_{21}(p) = -\frac{W_{21}(p)}{W_{11}(p)}, \quad R_{12}(p) = -\frac{W_{12}(p)}{W_{22}(p)}. \quad (10)$$

Рассчитанные по формулам (10) компенсаторы могут оказаться физически нереализуемыми, если характеристики прямых и перекрестных каналов таковы, что порядок полинома числителя  $R_{21}(p)$  (или  $R_{12}(p)$ ), окажется больше, чем у полинома в знаменателе. В этом случае компенсатор должен содержать идеальные дифференцирующие звенья, что физически не реализуемо.

Второй случай физической нереализуемости компенсаторов возникает тогда, когда время запаздывания по прямым каналам оказывается больше, чем по перекрестным. В этом случае в состав идеального компенсатора должно входить звено с отрицательным запаздыванием, что также физически нереализуемо.

В некоторых случаях удастся получить физически реализуемые компенсаторы, если поменять местами прямые и перекрестные каналы, используя для регулирования каналы  $x_2 \rightarrow y_1$  и  $x_1 \rightarrow y_2$ . Другой способ практической реализации автономных АСР состоит в том, что, вместо теоретически рассчитанных («идеальных») компенсаторов используются типовые динамические компенсаторы. Их параметры рассчитываются из условия приближенной автономности, которая достигается лишь в определённом диапазоне частот или на отдельных частотах. Для нахождения этих частот рассмотрим амплитудно-фазовые характеристики канала, связывающего, например, сигнал  $u_2(i\omega)$  с первой регулируемой переменной  $y_1(i\omega)$  в автономной АСР (см.рис.5). Как следует из формулы (8),

$$\Delta y_1(j\omega) = u_2(j\omega)[W_{21}(j\omega) + R_{21}(j\omega)W_{11}(j\omega)]W'_{1\zeta}(j\omega), \quad (11)$$

где

$$W'_{1\zeta}(j\omega) = \frac{1}{1 + W_{11}(j\omega)R_1(j\omega)}. \quad (12)$$

Если представить канал связи  $u_2 \rightarrow y_1$  в автономной АСР как двухступенчатый фильтр для сигнала  $u_2(j\omega)$ , то условие приближенной автономности можно сформулировать следующим образом: частотные характеристики реального компенсатора должны удовлетворить соотношению (10) в том диапазоне частот, в котором отличны от нуля  $|u_2(j\omega)|$  и  $|W'_{1\zeta}(j\omega)|$ . Особенности частотных характеристик замкнутых систем регулирования состоит в том, что модули их частотных характеристик имеют максимумы на рабочей частоте и при использовании законов регулирования с интегральной составляющей обращаются в ноль при  $\omega=0$ .

Прохождение сигнала  $u_2$  через замкнутые системы с ПИ (а) и П-регуляторами (б) и соответствующие ошибки регулирования иллюстрирует рис.6, на котором представлены модуль входного сигнала  $|u_2(j\omega)|$ , АЧХ замкнутой системы  $A_3(\omega)$  и модуль ошибки регулирования  $|\Delta y_1(i\omega)|$ .

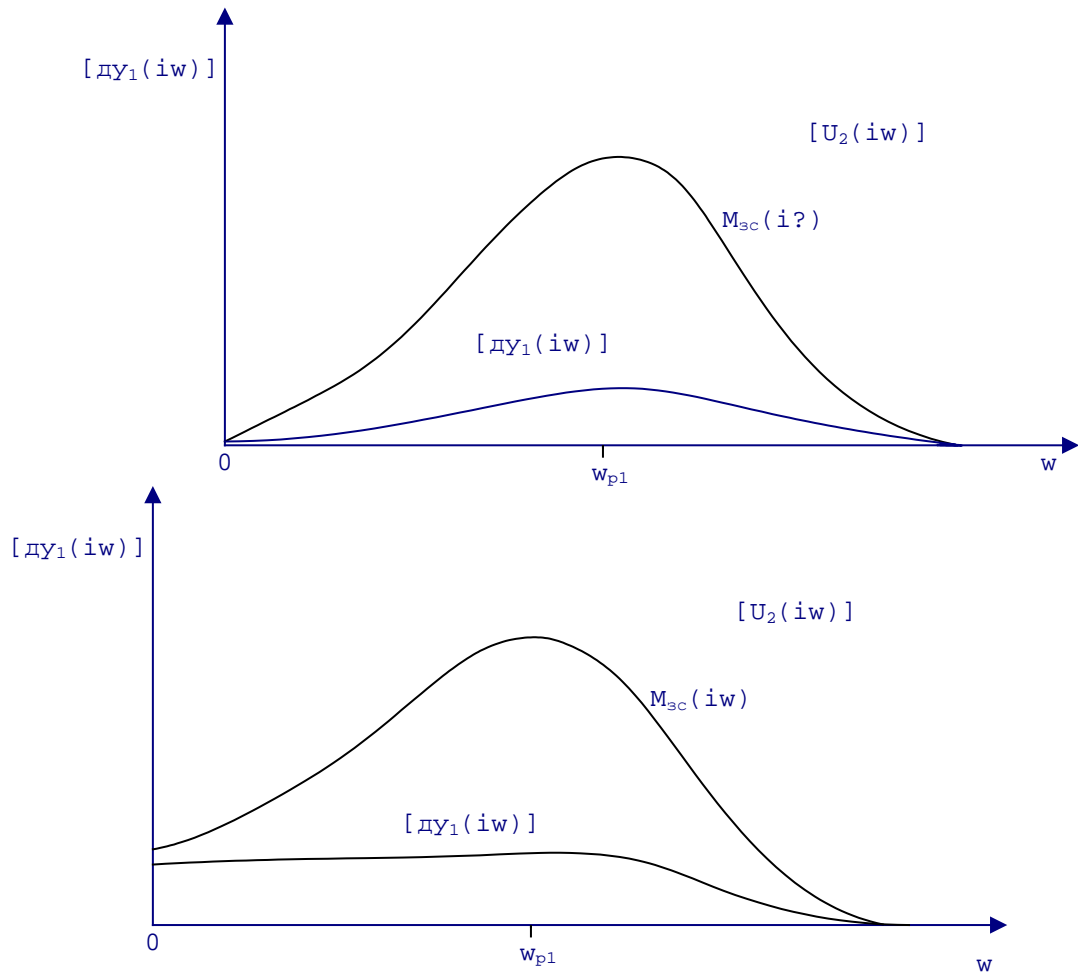


Рис.6. Частотные характеристики замкнутых АСР с ПИ(а) и П(б) регуляторами и модули сигналов и ошибки регулирования

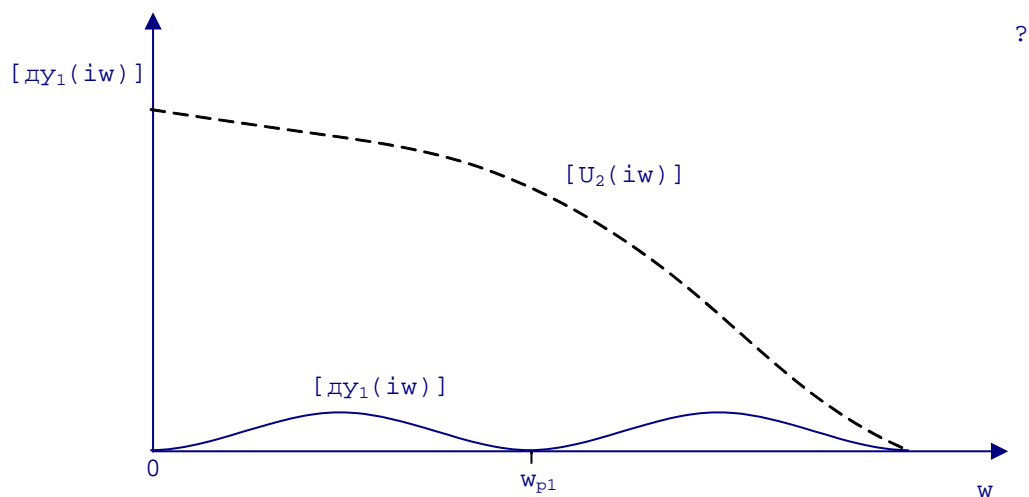


Рис.7. Модули сигналов и ошибки регулирования автономной АСР с реальным компенсатором

Если параметры компенсаторов рассчитываются из условия автономности на нулевой и рабочей частотах, то ошибка регулирования на этих частотах становится равной нулю (рис.7).

Таким образом, расчет автономной системы регулирования для четырехканального объекта включает следующие этапы:

1. Расчет настроек регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  по передаточным функциям  $W_{11}(p)$  и  $W_{22}(p)$  прямых каналов объекта и определение рабочих частот  $\omega_{p1}$  и  $\omega_{p2}$  каждого контура.

2. Вывод передаточных функций идеальных компенсаторов  $R_{21}(p)$  и  $R_{12}(p)$  из условия автономности и анализ их реализуемости.

3. Выбор реальных компенсаторов и расчет их параметров из условия приближенной автономности в интервалах частот  $[0, \omega_{p1}]$  и  $[0, \omega_{p2}]$ .

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции объекта по четырем каналам  $x_1-y_1$ ,  $x_1-y_2$ ,  $x_2-y_2$ ,  $x_2-y_1$ , два из которых принять за прямые каналы регулирования, два других – за «перекрестные» (выдаются преподавателем индивидуально каждому студенту).

Для выбранных каналов, регулирования рассчитать приближенные настройки ПИ-регуляторов и определить рабочие частоты обоих контуров регулирования (без учета перекрестных связей в объекте).

Рассчитать модуль (амплитудно-частотную характеристику) коэффициента взаимной связанности  $K_{св}(i\omega)$  двух контуров АСР на нулевой и рабочих частотах  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ .

В зависимости, от величины  $[K_{св}(i\omega)]$  проанализировать возможность и целесообразность применения трех типов АСР:

– несвязанного регулирования без учета перекрестных каналов в объекте;

– несвязанного регулирования, при условии коррекции настроек регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  по передаточным функциям эквивалентных объектов;

– автономной АСР.

Рассчитать частотные характеристики эквивалентных объектов  $W_1^*(i\omega)$  и  $W_2^*(i\omega)$  на нулевой и рабочих частотах, сравнить их (по модулю) с  $W_{11}(i\omega)$  и  $W_{22}(i\omega)$  соответственно. Рассчитать настройки регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  по  $W_1^*(i\omega)$  и  $W_2^*(i\omega)$ .

По передаточным функциям прямых и перекрестных каналов ЭИД, полученным в п.5.1, вывести передаточные функции компенсаторов из условия автономности. Провести анализ физической реализуемости компенсаторов. Оценить сложность технической реализации компенсаторов.

Выбрать структуру реальных компенсаторов  $R_{12}$  и  $R_{21}$  и рассчитать их параметры из условия приближенной автономности на нулевой и рабочих частотах:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{21}(i0) &= R_{21}(i0), & \bar{R}_{21}(i\omega_{p1}) &= R_{21}(i\omega_{p1}), \\ \bar{R}_{12}(i\omega_{p2}) &= R_{12}(i\omega_{p2}), & \bar{R}_{12}(i0) &= R_{12}(i0). \end{aligned}$$

Отчет о выполнении выполнения самостоятельного задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 9.

На занятии разбирается пример решения задачи с применением переносного персонального компьютера и медиапроектора .

### ***Практическое занятие № 19. Составление разностных уравнений, Z-изображений сигналов и передаточных функций***

В работе находится математическое описание импульсной системы автоматического регулирования в виде передаточной функции в форме z-преобразования и разностного уравнения.

#### **Теоретические сведения**

В данной работе строится модель цифровой системы автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 1.

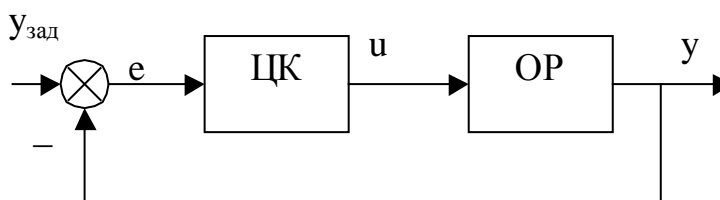


Рис. 1. Структурная схема системы

Система включает объект регулирования ОР, описываемый передаточной функцией  $W_o(p)$  и цифровой контроллер ЦК, реализующий простейший пропорциональный закон регулирования:

$$u = k_{\delta} e. \quad (1)$$

Разрядность цифрового контроллера достаточно велика, чтобы пренебречь при расчетах квантованием сигнала по уровню. С другой стороны, время цикла контроллера  $T_{ц}$  (который включает измерение входных сигналов, аналого-цифровое преобразование, вычисление управляющего воздействия и цифроаналоговое преобразование) недостаточно мало, для того чтобы пренебречь квантованием сигнала по времени. Это может быть связано, например, с тем обстоятельством, что контроллер, помимо данной системы, параллельно обслуживает еще множество других систем и процессов, что чаще всего и имеет место на практике. Таким образом, в данном случае речь идет об импульсной системе автоматического регулирования.

Требуется построить модель системы в виде разностного уравнения, или, что то же самое, передаточной функции в форме z-преобразования.

Структура цифрового пропорционального регулятора может быть представлена следующим образом (рис.2)

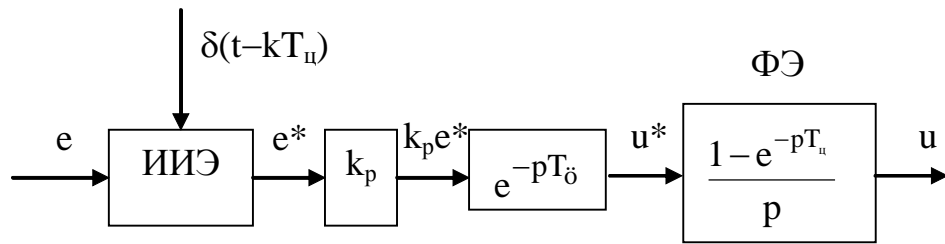


Рис. 2. Структура цифрового регулятора

Модель включает:

1) идеальный импульсный элемент ИИЭ, который производит модуляцию последовательности идеальных импульсов – дельта-функций  $\delta(t-kT_{ц})$  входным сигналом ошибки. Выходной сигнал ИИЭ – модулированная последовательность идеальных импульсов  $e^*$ , площадь каждого из которых равна значению сигнала ошибки  $e$  в момент формирования импульса;

2) блок масштабирования  $k_p$ , реализующий алгоритм регулирования;

3) блок временной задержки с передаточной функцией  $e^{-pT_{ц}}$ , который моделирует задержку реализации выходного сигнала от начала цикла на один такт контроллера;

4) формирующий элемент ФЭ, преобразующий моделированную последовательность дельта-функций в реальный сигнал на выходе контроллера. В большинстве случаев для этой цели используется *преобразователь первого порядка (zero order holder)*, выходной сигнал которого изменяется ступенчато, «удерживая» уровень между тактами контроллера (рис. 3).

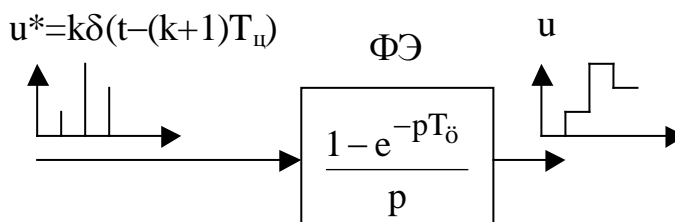


Рис. 3. Формирование выходного сигнала контроллера

На рис. 4 показана структура формирователя, поясняющая его передаточную функцию на примере формирования одного импульса (здесь нужно учитывать, что площадь дельта-функции равна единице, а площадь импульса  $u^*$ , и соответственно, высота импульса  $u - k_p e$ ).



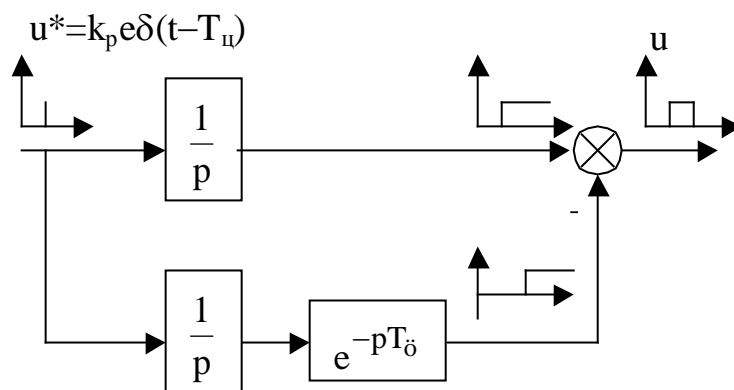


Рис. 4. Структура формирователя импульсов

При составлении дискретной модели системы рассматривается следующая структура (рис.5.)

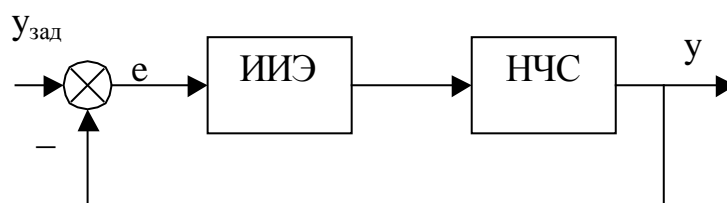


Рис. 5. Структурная схема системы

Здесь под непрерывной частью системы НЧС уже понимается не только объект управления, но и все блоки регулятора, кроме идеального импульсного элемента. Таким образом, в нашем случае передаточная функция НЧС равна

$$W_{\text{нчс}}(p) = k_p \frac{e^{-pT_u} - e^{-2pT_u}}{p} W_o(p). \quad (2)$$

В дальнейшем определяется передаточные функции НЧС и всей системы в форме z-преобразования.

Как известно, дискретная модель непрерывной системы определяется тремя факторами:

- свойствами системы, т.е. исходным ее описанием;
- шагом квантования по времени;
- формой входных импульсов (поскольку одна и та же система будет реагировать по разному на одинаковые по высоте, но разные по форме импульсы).

Исходя из структуры системы, приведенной на рис. 5, в данном случае z-преобразование производится из условия, что на входе НЧС действует моделированная последовательность дельта-функций. В таком случае передаточная функция НЧС в форме z-преобразования определяется z-преобразованием весовой функции НЧС:

$$W_{\text{нчс}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\text{нчс}}(kT) z^{-k}. \quad (3)$$

Однако в прямом применении данного преобразования обычно нет необходимости, поскольку существуют специальные таблицы, позволяющие для

простых передаточных функций получить их z-преобразования (табл.1). В более сложных случаях исходную передаточную функцию можно свести к сумме простых и далее, воспользовавшись свойством линейности z-преобразования, определить z-преобразование сложной функции как сумму z-преобразования простых.

Определив  $W_{\text{нчс}}(z)$ , систему приводят к виду (рис. 6).

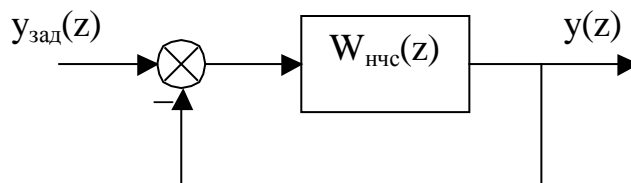


Рис.6. Структурная схема системы

При этом ИИЭ исключается из рассмотрения, поскольку передаточная функция НЧС непосредственно связывает отчеты сигналов  $y(kT_{\text{ц}})$  и  $e(kT_{\text{ц}})$  и при ее выводе учитывается, что на входе НЧС действует модулированная последовательность дельта-функций.

Передаточная функция замкнутой системы в форме z-преобразования

$$W(z) = \frac{y(z)}{y_{\text{зад}}(z)} = \frac{W_{\text{нчс}}(z)}{1 + W_{\text{нчс}}(z)}. \quad (4)$$

Определив  $W(z)$ , можно записать разностное уравнение, связывающее  $y(kT_{\text{ц}})$  и  $y(nT_{\text{ц}})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$  и с помощью него рассчитать реакцию системы на любое воздействие.

Таблица z-преобразований для передаточных функций

№	W(s)	W(z)	№	W(s)	W(z)
1	$k$	$k$	12	$\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{T_1^2}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} \frac{z}{z-e^{-T_1}} \right.$
2	$\frac{k}{s}$	$\frac{kz}{z-1}$			$- \frac{T_2^2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} \frac{z}{z-e^{-T_2}} -$
3	$\frac{k}{s^2}$	$\frac{kTz}{(z-1)^2}$			$\left. - \frac{T_3^2}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} \frac{z}{z-e^{-T_3}} \right]$
4	$\frac{k}{T_0s+1}$	$\frac{k}{T_0} \frac{z}{z-e^{-T_0}}$	13	$\frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(T_1+T_2+T_3)z}{z-1} + \frac{T_1^2}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} \right.$
5	$\frac{k}{s(T_0s+1)}$	$\frac{k(1-e^{-T_0})z}{(z-1)(z-e^{-T_0})}$			$\frac{z}{z-e^{-T_1}} + \frac{T_2^2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} \frac{z}{z-e^{-T_2}} +$
6	$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{k(e^{-T_1}-e^{-T_2})}{T_1-T_2} \frac{z}{(z-e^{-T_1})(z-e^{-T_2})}$			$\left. + \frac{T_3^2}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} \frac{z}{z-e^{-T_3}} \right]$
7	$\frac{k}{(T_0s+1)^2}$	$\frac{kT_0 e^{-T_0}}{T_0^2} \frac{z}{(z-e^{-T_0})^2}$	14	$\frac{k(T_0s+1)}{s}$	$\frac{k(T_0+1)(z - \frac{T_0}{T_0-1})}{z-1}$
8	$\frac{k}{s^2(T_0s+1)}$	$k \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_0(1-e^{-T_0})z}{(z-1)(z-e^{-T_0})} \right]$	15	$\frac{k(T_0s+1)}{s^2}$	$\frac{kT_0z(z + \frac{T_0}{T_0-1})}{(z-1)^2}$
9	$\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} + \frac{T_1}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T_1}} - \frac{T_1}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T_2}} \right]$	16	$\frac{k(T_1s+1)}{T_2s+1}$	$\frac{k}{T_2} \left[ T_1 + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \frac{z}{z-e^{-T_1}} \right]$
10	$\frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(T_1+T_2)z}{z-1} - \frac{T_1^2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T_1}} + \right.$	17	$\frac{k(T_1s+1)}{s(T_2s+1)}$	$\frac{kT_1}{T_2} \frac{z \left[ z + \frac{T_2}{T_1}(1-e^{-T_2}) - 1 \right]}{(z-1)(z-e^{-T_2})}$
			18	$\frac{k(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{k}{T_1-T_2} \left[ \frac{(1 - \frac{T_3}{T_1})z}{z-e^{-T_1}} + \frac{(\frac{T_3}{T_2}-1)z}{z-e^{-T_2}} \right]$

Продолжение прил. VIII

№	W(s)	W(z)	№	W(s)	W(z)
19	$\frac{k(T_3s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} + \frac{(T_1-T_3)z}{(T_2-T_1)(z-e^{-T_1})} + \frac{(T_2-T_3)z}{(T_1-T_2)(z-e^{-T_2})} \right]$	23	$\frac{k}{s(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - 2ze^{-\xi T_1} \sec \varphi \cos\left(\frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2} + \varphi\right)}{z^2 - 2ze^{-\xi T_1} \cos\left(\frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2} + \varphi\right) + e^{-2\xi T_1}} \right]$ где $\varphi = \arctg\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
20	$\frac{k(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$	$k \left[ \frac{T_2}{(z-1)^2} - \frac{(T_1-T_2)(1-e^{-T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T_1})} \right]$	24	$\frac{k(T_2s+1)}{T_1^2s^2+2\xi T_1s+1}$	$\frac{kT_2}{T_1^2} \frac{z \left[ z - e^{-\xi T_1} (\cos \frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2} + \frac{T_1}{T_1} \frac{\varphi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2}) \right]}{z^2 - 2ze^{-\xi T_1} \cos \frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2} + e^{-2\xi T_1}}$
21	$\frac{k(T_3s+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{T_2}{(z-1)^2} + \frac{(T_3-T_1-T_2)z}{z-1} - \frac{(T_1-T_3)z}{(T_1-1)(z-e^{-T_1})} - \frac{(T_2-T_3)z}{(T_2-1)(z-e^{-T_2})} \right]$	25	$\frac{k(T_2s+1)}{s(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - 2ze^{-\xi T_1} \sec \varphi \cos\left(\frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2} + \varphi\right)}{z^2 - 2ze^{-\xi T_1} \cos \frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2} + e^{-2\xi T_1}} \right]$ где $\varphi = \arctg \frac{T_2 - \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$
22	$\frac{k}{T_1^2s^2+2\xi T_1s+1}$	$\frac{kze^{-\xi T_1} \sin\left(\frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2}\right)}{T_1 \sqrt{1-\xi^2} \left[ z^2 - 2ze^{-\xi T_1} \cos\left(\frac{T_1}{T_1} \sqrt{1-\xi^2}\right) + e^{-2\xi T_1} \right]}$			

Таблица z-преобразований для возмущений

№	g(t)	G(s)	G(z)	№	g(t)	G(s)	G(z)
1	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	7	1 - cos ω <sub>0</sub> t	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2+\omega_0^2)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z-\cos \omega_0 T)}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$
2	t <sup>2</sup>	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	8	sh ω <sub>0</sub> t	$\frac{\omega_0^2}{s^2-\omega_0^2}$	$\frac{z \operatorname{sh} \omega_0 T}{z^2-2z \operatorname{ch} \omega_0 T+1}$
3	e <sup>-at</sup>	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$	9	ch ω <sub>0</sub> t	$\frac{s}{s^2-\omega_0^2}$	$\frac{z(z-\operatorname{ch} \omega_0 T)}{z^2-2z \operatorname{ch} \omega_0 T+1}$
4	te <sup>-at</sup>	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{Tze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$	10	e <sup>-αt</sup> - e <sup>-βt</sup>	$\frac{\beta-\alpha}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{z(e^{-\alpha T}-e^{-\beta T})}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\beta T})}$
5	sin ω <sub>0</sub> t	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$	11	a <sub>0</sub> + a <sub>1</sub> t	$\frac{a_0(s+\frac{a_1}{a_0})}{s^2}$	$\frac{a_0 z(z+\frac{a_1}{a_0} T-1)}{(z-1)^2}$
6	cos ω <sub>0</sub> t	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z(z-\cos \omega_0 T)}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$	12	a <sub>0</sub> t + a <sub>1</sub> t + a <sub>2</sub> t <sup>2</sup>	$\frac{a_2}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2a_0}{s^3}$	$\frac{a_0 z}{z-1} + \frac{a_1 T z}{(z-1)^2} + \frac{a_2 T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

### Пример

Пусть  $W_o(p) = \frac{2}{(p+1)(2p+1)}$ ,  $k_p = 1$ ,  $T_{ц} = 1$  сек. Определим  $W(z)$ .

По формуле (2) получим передаточную функцию непрерывной части системы:

$$W_{\text{нчс}}(p) = \frac{2(e^{-pT_{ц}} - e^{-2pT_{ц}})}{p(p+1)(2p+1)}. \quad (5)$$

Согласно основному свойству  $z$ -преобразования  $e^{-pT_{ц}} \Rightarrow z^{-1}$ ,  $e^{-2pT_{ц}} \Rightarrow z^{-2}$ , откуда

$$W_{\text{нчс}}(z) = (z^{-1} - z^{-2})Z\left[\frac{2}{p(p+1)(2p+1)}\right]. \quad (6)$$

Пользуясь табл. 1, п.9, запишем

$$W_{\text{нчс}}(z) = 2(z^{-1} - z^{-2})\left[\frac{z}{z-1} + 0,5\frac{z}{z-e^{-1}} - 0,5\frac{z}{z-e^{-0,5}}\right]. \quad (7)$$

После преобразований, получим

$$W_{\text{нчс}}(z) = \frac{0,3096z + 0,1878}{z^3 - 0,9744z^2 + 0,2231z}. \quad (8)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W(z) = \frac{W_{\text{нчс}}(z)}{1 + W_{\text{нчс}}(z)} = \frac{0,3096z + 0,1878}{z^3 - 0,9744z^2 + 0,5328z + 0,1878}. \quad (9)$$

Перепишем (9) в виде

$$W(z) = \frac{0,3096z^{-2} + 0,1878z^{-3}}{1 - 0,9744z^{-1} + 0,5328z^{-2} + 0,1878z^{-3}} \quad (10)$$

и составим разностное уравнение

$$y(kT_{ц}) = 0,3096y_{\text{зад}}((k-2)T_{ц}) + 0,1878y_{\text{зад}}((k-3)T_{ц}) + \\ + 0,9744y((k-1)T_{ц}) - 0,5328y((k-2)T_{ц}) - 0,1878y((k-3)T_{ц}). \quad (11)$$

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточная функция объекта регулирования, коэффициент передачи регулятора и время цикла цифрового контроллера, которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

Студенты самостоятельно определяют передаточную функцию в форме  $z$ -преобразования и разностное уравнение системы. Эти данные будут служить исходными для выполнения лабораторной работы №10. Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №10.

На занятии разбирается пример решения задачи.

## *Практическое занятие № 20. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений и их систем*

В работе проводится линеаризация математического описания нелинейных уравнений и систем, а также исследование их устойчивости «в малом» с применением первого метода Ляпунова.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. [6.1. Математическое описание и устойчивость нелинейных САУ](#)

### **Пример 1.**

Получить линеаризованное описание системы, описываемой в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \sqrt{x_1}; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad (1)$$

в окрестности точки покоя при  $u=1$ . Определить устойчивость статического режима по Ляпунову.

1. Определим значение координат системы в статике  $x_{10}, x_{20}$ , положив в (1) производные координат системы равными нулю:

$$\begin{cases} x_{20} - \sqrt{x_{10}} = 0; \\ -x_{10} + u = -x_{10} + 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решив систему (2), найдем:  $x_{10}=x_{20} = 1$ .

2. Разлагая уравнения системы (1) в ряд Тейлора в окрестности точки установившегося режима и отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости, получим:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 - \frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} \Delta x_1; \\ \Delta \dot{x}_2 = -\Delta x_1 + \Delta u, \end{cases} \quad (3)$$

3. Отметим, что в нашем случае  $\Delta u=0$ , поскольку рассматривается устойчивость статического режима. Составим матрицу состояния линеаризованной системы

$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

и найдем ее характеристический полином

$$\det(pE - A) = \det \begin{pmatrix} p + 0,5 & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix} = p^2 + 0,5p + 1. \quad (5)$$

Характеристический полином имеет второй порядок, все его коэффициенты положительны. Следовательно, статический режим устойчив.

### **Пример 2.**

Получить линеаризованное описание системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y \frac{dy}{dt} + y^2 = u \quad (6)$$

в окрестности точки покоя при  $u=1$ . Определить устойчивость статического режима по Ляпунову.

1. Определим значение переменной  $y$  в статике, положив в (6) производные равными нулю:  $y_0 = 1$ .

2. Разлагая уравнение в ряд Тейлора в окрестности точки установившегося режима и отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости, получим:

$$\frac{d^2\Delta y}{dt^2} + 2y_0 \frac{d\Delta y}{dt} + \left( 2 \frac{dy}{dt} \Big|_0 + 2y_0 \right) \Delta y = \Delta u, \quad (7)$$

$$\frac{d^2\Delta y}{dt^2} + 2 \frac{d\Delta y}{dt} + 2\Delta y = \Delta u, \quad (8)$$

3. Как и в предыдущем примере,  $\Delta u = 0$ . Линейное дифференциальное уравнение имеет второй порядок, все его коэффициенты положительны. Следовательно, оно соответствует устойчивой системе. Исходная нелинейная система будет устойчива при малых отклонениях.

### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются: 1) система нелинейных дифференциальных уравнений, 2) нелинейное дифференциальное уравнение высокого порядка 2) величины управляющих сигналов в статике.

Студенты определяют значение всех координат в статике, линеаризованное описание систем и их устойчивость.

Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №11.

На занятии разбираются примеры решения задачи.

### ***Практическое занятие №21. Исследование нелинейных САР на фазовой плоскости***

В работе производится построение фазового портрета нелинейной системы регулирования.

#### **Теоретические сведения**

Метод фазовых траекторий представляет собой графо-аналитический способ исследования нелинейных систем. Сущность метода заключается в описании поведения систем при помощи наглядных геометрических представлений – фазовых портретов.

Свободное движение нелинейной динамической системы управления с одной управляемой величиной  $x(t)$  в общем случае можно описать с помощью  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j[x_1(t), x_2(t), \dots; x_j(t), \dots, x_n(t)], \quad (j = 1; 2; \dots; n), \quad (1)$$

где  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t), \dots$ ,  $x_{j+1}(t) = \dot{x}_j(t)$  – фазовые переменные состояния.

Мгновенное состояние системы и ее дальнейшее поведение однозначно определены, если в данный момент времени  $t = t_1$  известны значения всех  $n$  переменных  $X_j$ . Эти значения можно рассматривать как координаты точки  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  в  $n$ -мерном пространстве, которое называется фазовым пространством (здесь термин «фаза» имеет тот же смысл, что и слово «стадия»).

Точку с координатами  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  называют *изображающей точкой*, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния системы – *фазовой траекторией*.

Как известно, конкретной группе начальных условий  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$ ; ...;  $x_n(0) = x_{n0}$  соответствует единственное решение системы (1) – определенная совокупность искомых функций времени  $x_1(t)$ ;  $x_2(t)$ ; ...;  $x_n(t)$ . Поэтому каждой группе начальных условий соответствует только одна начальная точка и единственная фазовая траектория, а множеству групп начальных условий соответствует целое семейство траекторий, которое называется *фазовым портретом* системы.

Метод фазового пространства наиболее удобен для анализа систем второго порядка, так как их фазовые траектории располагаются в одной плоскости - в фазовой плоскости переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Фазовый портрет этих систем можно построить непосредственно по дифференциальному уравнению, не решая его.

Пусть описание системы представлено в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} dx_1 / dt = f_1(x_1, x_2); \\ dx_2 / dt = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1 = x$  – отклонение выходной величины или сигнала ошибки от установившегося значения.

Если в качестве второй переменной состояния  $x_2$  принята производная переменной  $x_1 = x$ , т. е. Если  $x_2 = \dot{x}$ , то всегда функция  $f_1(x_1, x_2) = x_2$ .

Разделив второе уравнение системы (2) на первое, можно получить уравнение фазовых траекторий в дифференциальной форме

$$dx_2 / dx_1 = f_2(x_1, x_2) / x_2, \quad (3)$$

в котором независимой переменной является величина  $x_1$ , а зависимой –  $x_2$ .

Разделяя далее переменные  $x_1$  и  $x_2$  и интегрируя уравнение (3), можно получить уравнение фазовых траекторий в явном виде

$$x_2 = F(x_1) + C_0, \quad (4)$$

где  $C_0$  - постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.



Рассмотрим характерные фазовые траектории (рис. 1, б, г, е) системы второго порядка, соответствующие затухающему (рис. 1, а), расходящемуся (рис. 1, в) и незатухающему (рис. 1, д) колебательным процессам. Моменты времени  $t_1, t_3, t_5$ , когда кривые  $x(t)$  достигают своих максимумов и минимумов, соответствуют пересечению фазовыми траекториями оси  $x_1 = x$ , а моменты прохождения кривыми  $x(t)$  через нуль ( $t_2, t_4$ ) — пересечению оси  $x_2 = \dot{x}$ .

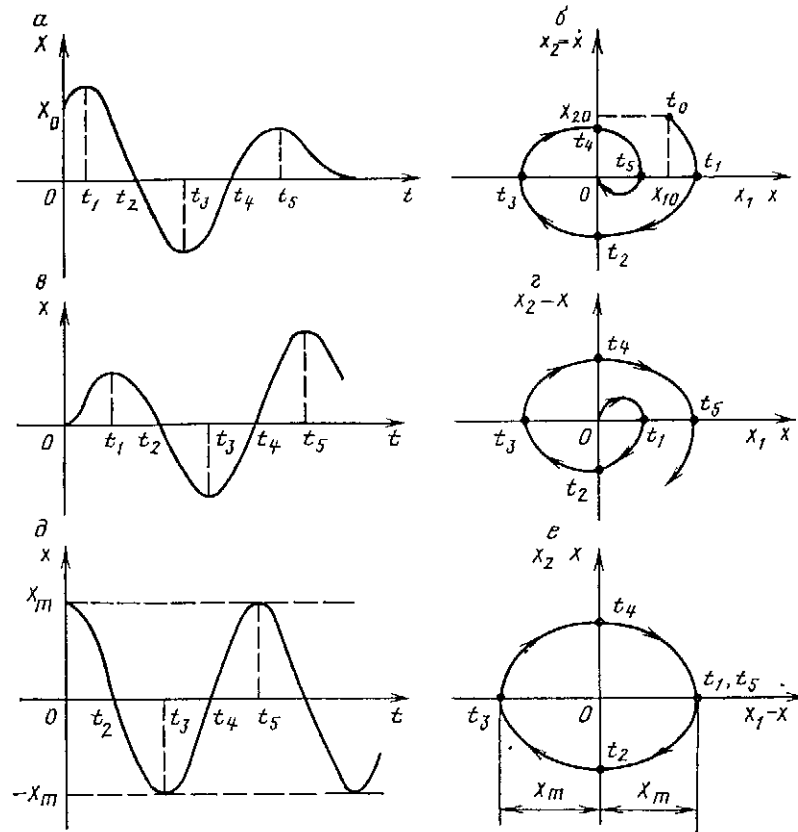


Рис. 1. Переходные процессы и фазовые траектории нелинейной системы а, б — устойчивой; в, г — неустойчивой; д, е — на границе устойчивости

Построение фазовых траекторий значительно облегчается, если учитывать их следующие общие свойства, вытекающие из анализа выражений (2) и (3).

В верхних квадрантах фазовой плоскости изображающая точка движется всегда слева направо, а в нижних — справа налево. Это объясняется тем, что при  $x_2 = \dot{x} > 0$  переменная  $x_1 = x$  возрастает, а при  $x_2 = \dot{x} < 0$  переменная  $x_1 = x$  убывает.

В любой точке фазовой плоскости, где переменная  $x_2$  и функция  $f_2$  не равны нулю, фазовая траектория имеет только одно определенное направление, соответствующее значению производной  $dx_2/dx_1$  в данной точке. Из этого следует, что фазовые траектории в таких точках не пересекаются.

Согласно выражению (3) при  $x_2=0$  производная  $dx_2/dx_1=\infty$  т. е. фазовые траектории пересекают ось  $x_1$  под прямым углом, а переменная  $x_1=x$  достигает своего максимума. Если при  $x_2=0$  одновременно равна нулю функция  $f_2$ , то фазовая траектория в таких особых точках плоскости не имеет определенного направления, а обе производные  $x_1$  и  $x_2$  согласно уравнениям (2) равны нулю. Последнее означает, что изображающая точка неподвижна, а исследуемая система управления находится в состоянии равновесия.

Особые точки могут быть обособленными или образовывать целые особые отрезки на оси  $x_1$ . Такие отрезки называются отрезками покоя. У систем с релейными характеристиками длина отрезка покоя равна зоне нечувствительности.

Самые важные для анализа нелинейных систем свойства фазовых траекторий заключаются в следующем:

1. Затухающему (устойчивому) переходному процессу соответствует фазовая траектория, сходящаяся к началу координат или к отрезку покоя.
2. Неустойчивому процессу соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат.
3. Периодическому процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, называемая предельным циклом.

Предельный цикл может быть устойчивым или неустойчивым. Если все соседние фазовые траектории стягиваются к предельному циклу, то он является устойчивым и соответствует автоколебаниям. Если же соседние траектории отходят от цикла, то он является неустойчивым.

Фазовый портрет нелинейной системы, обладающей кусочно-линейной или разрывной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями.

Линии, отделяющие на плоскости одну область от другой, называются *линиями переключения*.

В точках пересечения фазовыми траекториями линии переключения происходит излом траекторий. Это происходит из-за смены правой части уравнения (3).

### Порядок выполнения работы

В работе исследуется система, структурная схема которой представлена на рис.1.

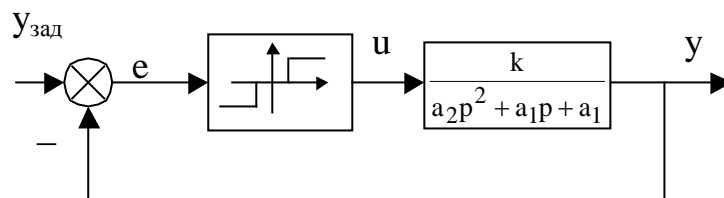


Рис. 2. Структурная схема системы

Параметры системы (коэффициенты передаточной функции, зона нечувствительности и уровень выходного сигнала релейного элемента) задаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

Необходимо построить фазовый портрет системы при нулевых начальных условиях и единичном задании.

Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 12.

На занятии решается пример.

### ***Практическое занятие № 22. Определение устойчивости нелинейной системы с помощью второго метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости Попова***

В данной работе решаются две задачи:

1) с помощью второго (прямого) метода Ляпунова определить устойчивость и область устойчивости нелинейной системы второго порядка, заданной в пространстве состояний;

2) аналитически и графически определить область абсолютной устойчивости системы третьего порядка с нелинейной обратной связью (определить границы сектора, в котором должна лежать характеристика нелинейного элемента).

#### **Теоретические сведения**

##### **Второй метод Ляпунова**

Второй (прямой) метод Ляпунова является общим методом исследования устойчивости любых нелинейных систем. Он дает достаточные условия устойчивости, т.е. определяет часть области устойчивости. Формулировка достаточного условия устойчивости следующая:

*Если можно указать такую знакоопределенную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  координат системы (функцию Ляпунова), производная которой по времени  $dV/dt$ , согласно дифференциальным уравнениям системы, тоже является знакоопределенной функцией, но противоположного знака, то возмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Знакоопределенной функцией называется функция, которая при всех значениях переменных имеет один знак, а в начале координат обращается в нуль.

Часто в качестве функций Ляпунова и их производных выступают квадратичные формы координат системы. В матричном виде они записываются следующим образом:

$$Q(X) = X^T P X, \quad (1)$$

где  $X$  – вектор столбец координат системы,  $P$  – квадратная матрица коэффициентов квадратичной формы.

Согласно *критерию Сильвестра*, для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  (определители вдоль главной диагонали) матрицы  $P$  были положительны:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (2)$$

Достаточное условие отрицательной определенности квадратичной формы имеет вид

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, \quad (3)$$

т.е. определители должны последовательно чередовать знак, причем знак первого определителя должен быть отрицательным.

**Пример 1.**

Пусть имеется система, описываемая уравнениями в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3. \end{cases} \quad (4)$$

Найдем область устойчивости системы.

Составим функцию Ляпунова в виде

$$V(x_1, x_2) = \alpha x_1^4 + \frac{1}{2}(\beta x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + x_2^2). \quad (5)$$

При  $\alpha > 0$  первое слагаемое в (5), очевидно, положительно определено. Второе слагаемое представляет квадратичную форму координат системы. Оно может быть представлено в матричном виде следующим образом

$$(x_1 \quad x_2) \times \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма будет положительно определенной, если все диагональные миноры ее матрицы положительны.

В нашем случае имеем

$$\Delta_1 = \beta, \quad \Delta_2 = \beta - \beta^2. \quad (7)$$

Из (7) следует, что квадратичная форма (6), а, следовательно, и функция (5) будут положительно определены при условии

$$0 < \beta < 1. \quad (8)$$

Найдем производную функции Ляпунова по времени в силу дифференциальных уравнений системы:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\alpha x_1^3 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_1 + \beta x_2 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_2 + x_2 \dot{x}_2 = \\ &= 4\alpha x_1^3 x_2 + \beta x_1 x_2 + \beta x_2^2 - \beta x_1 x_2 - \beta x_1^4 - x_2^2 - x_1^3 x_2 = \\ &= -\beta x_1^4 - (1 - \beta)x_2^2 + (4\alpha - 1)x_1^3 x_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Выбирая  $\alpha = 1/4$ , получим

$$\frac{dV}{dt} = -\beta x_1^4 - (1 - \beta)x_2^2. \quad (10)$$

С учетом неравенства (8), очевидно, что производная функции Ляпунова отрицательно определена при любых значениях  $x_1$  и  $x_2$ , что означает устойчивость системы в целом.

Для общности рассуждений, заметим, что выражение (10) представляет собой квадратичную форму относительно  $x_1^2$  и  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -(1-\beta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Диагональные миноры матрицы квадратичной формы

$$\Delta_1 = -\beta < 0, \quad \Delta_2 = \beta - \beta^2 > 0, \quad (12)$$

удовлетворяют достаточному условию Сильвестра для отрицательно определенной квадратичной формы. Далее, поскольку форма (11) отрицательно определена относительно  $x_1^2$  и  $x_2$ , она также отрицательно определена относительно и для  $x_1$  и  $x_2$ .

Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова

Абсолютной устойчивостью называют асимптотическую устойчивость свободного движения динамической системы при произвольных начальных условиях относительно положения равновесия вне зависимости от конкретной формы нелинейности.

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями вида

$$\begin{cases} y(t) = W(p)u(t); \\ u(t) = -\varphi(y(t)), \end{cases} \quad (13)$$

где  $W(p)$  – передаточная функция линейной части системы,  $\varphi(y)$  – непрерывная однозначная функция, удовлетворяющая при  $y \neq 0$  условию

$$0 < \frac{\varphi(y)}{y} < k \leq +\infty. \quad (14)$$

Условие (14) означает, что график функции  $\varphi(y)$  должен находиться в секторе, ограниченном осью  $y$  и прямой с коэффициентом наклона, равном  $k$  (рис.1).

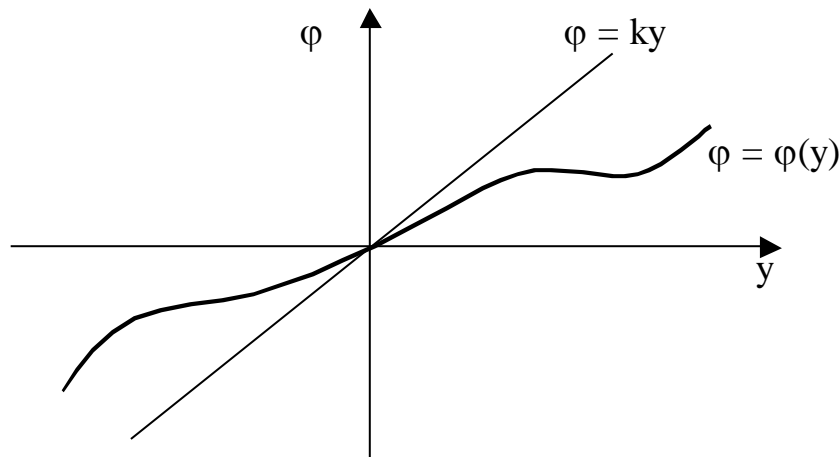


Рис.1. Статическая характеристика нелинейности

Таким образом, уравнения (13) описывают систему, состоящую из линейной части, охваченной отрицательной нелинейной обратной связью.

Сформулируем критерий абсолютной устойчивости Попова для случая, когда  $W(p)$  имеет только левые полюса (линейная часть устойчива):

*Если существует, такое вещественное число  $q$ , что при всех  $\omega \geq 0$  выполнено условие*

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] \geq 0, \quad (15)$$

то система абсолютно устойчива.

Критерий допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Так как  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , то условие (15) равносильно неравенству

$$\frac{1}{k} + P(\omega) - q\omega Q(\omega) \geq 0, \quad (16)$$

Построим модифицированную частотную характеристику, изображающая точка которой определяется координатами  $P(\omega)$ ,  $\omega Q(\omega)$  (рис. 2). Условие (16) означает, что на плоскости  $P$ ,  $Q$  должна существовать прямая  $\frac{1}{k} + P - q\omega Q \geq 0$  (прямая Попова), проходящая через точку  $(-1/k, 0)$  и лежащая левее модифицированной частотной характеристики. Угол наклона этой прямой определяется параметром  $q$  (рис. 2).

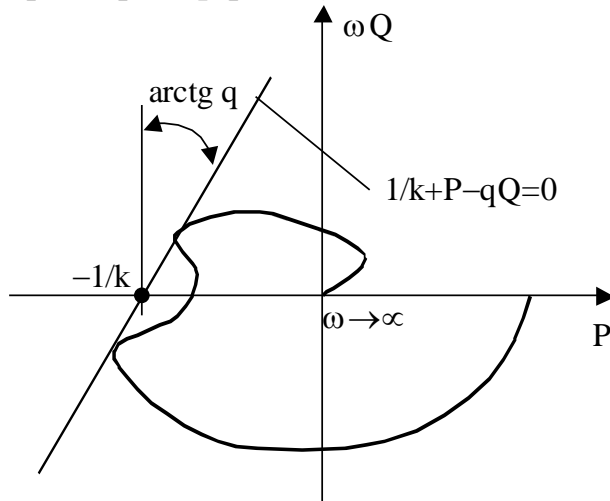


Рис. 2. Графическая интерпретация критерия абсолютной устойчивости

### Пример 2

Определить границы сектора, в котором должна лежать статическая характеристика нелинейного элемента, чтобы система, имеющая линейную часть с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} \quad (17)$$

была абсолютно устойчивой.

Передаточная функция (17) имеет только левые полюса:  $p_1 = p_2 = p_3 = -1$ , поэтому мы вправе применить для решения данной задачи критерий Попова.

Частотная характеристика линейной части системы

$$W(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{1 - 3\omega^2 - j\omega(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}. \quad (18)$$

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] = \frac{1 - 3\omega^2 + q\omega^2(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}. \quad (19)$$

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] = \frac{\omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1}{k \left[ (1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2 \right]}. \quad (20)$$

Для того чтобы при всех  $\omega \geq 0$  выполнялось условие  $\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] \geq 0$ , необходимо, чтобы при всех  $\omega \geq 0$

$$\omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1 \geq 0. \quad (21)$$

Простейший путь обеспечить неравенство (21) – потребовать выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} -kq + 3 \leq 0; \\ -3k + 3kq + 3 \geq 0, \end{cases} \quad (22)$$

откуда приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} q \leq \frac{3}{k}; \\ q \geq 1 - \frac{1}{k}. \end{cases} \quad (23)$$

Решение системы (23) существует при  $k \leq 4$ .

Таким образом, здесь доказано, что система абсолютно устойчива, если  $0 < \frac{\varphi(y)}{y} < 4$ . Однако, это не является решением задачи, поскольку неравенство (21) может выполняться и в случае отрицательных коэффициентов при степенях  $\omega$ . Поэтому вполне вероятно, что существует более общее решение, и предельное значение  $k$  может быть больше четырех.

Предельное значение  $k$  соответствует случаю, когда при некотором значении  $\omega$  неравенство (21) обращается в равенство, а его левая часть достигает минимума. Поэтому решение может быть найдено из системы уравнений:

$$\begin{cases} \omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1 = 0; \\ 6\omega^5 + 4(-kq + 3)\omega^3 + 2(-3k + 3kq + 3)\omega = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Решение системы (24) затруднительно, поэтому перейдем к графическому решению задачи.

Пользуясь (18), получим уравнение модифицированной частотной характеристики линейной части:

$$\begin{aligned} W^*(j\omega) &= P(\omega) + j\omega Q(\omega) = \\ &= \frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2} + j \frac{-\omega^2(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

По (25) построим модифицированный годограф и прямую Попова (рис.3). Прямая касается годографа в точке  $(-0,125, 0)$  и имеет угол наклона  $45^\circ$ . Следовательно, предельное значение  $k = 1/0,125 = 8$ , при этом  $q = 1$ .

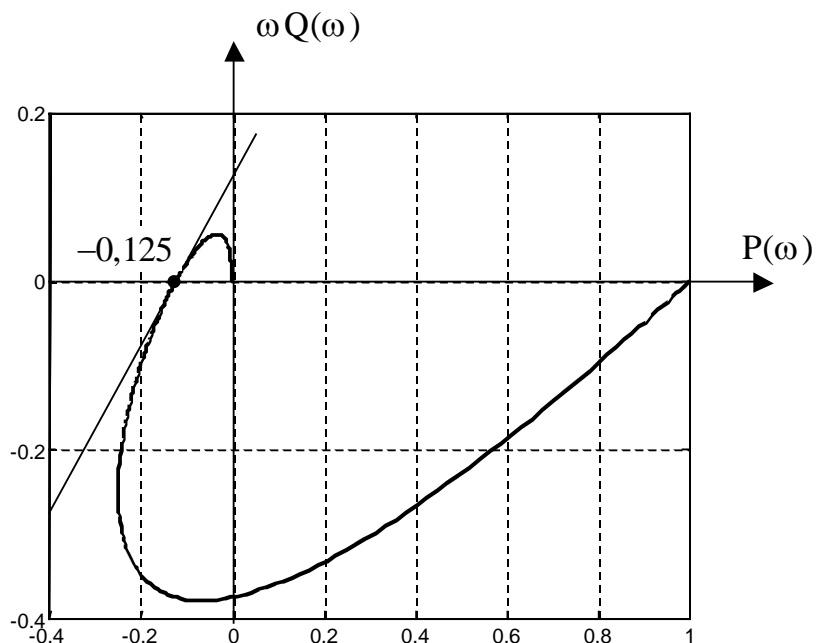


Рис. 3. Построение прямой Попова

Проверим полученные результаты, подставив найденные значения  $k$  и  $q$  в (20) и построив график функции  $\frac{1}{k} + \text{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)]$  (рис. 4).

Как видно из графика, наше предположение о характере изменения данной функции подтвердилось.

$$\frac{1}{k} + \text{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)]$$

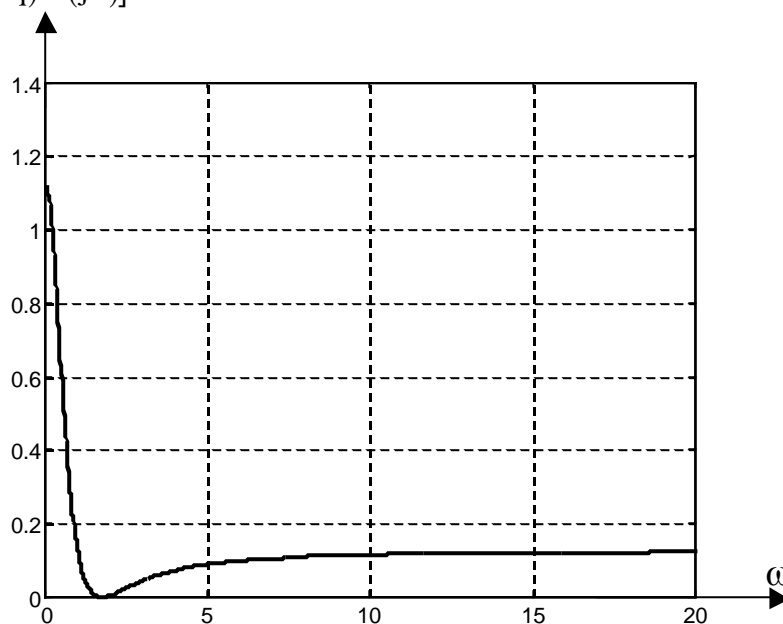




Рис. 4. График функции  $\frac{1}{k} + \text{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)]$

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются:

- 1) система из двух нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши для анализа устойчивости по Ляпунову;
- 2) передаточная функция третьего порядка для анализа абсолютной устойчивости по Попову.

Исходные данные выдаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

На занятии разбираются примеры решения задач. Отчет о выполнении практического задания строится по форме примеров, разобранных выше.

### *Практическое занятие № 23. Расчет параметров автоколебаний в релейной системе с помощью метода гармонического баланса*

В данной работе с помощью метода гармонического баланса определяются параметры автоколебаний (амплитуда и частота) в релейной системе, структурная схема которой приведена на рис. 1

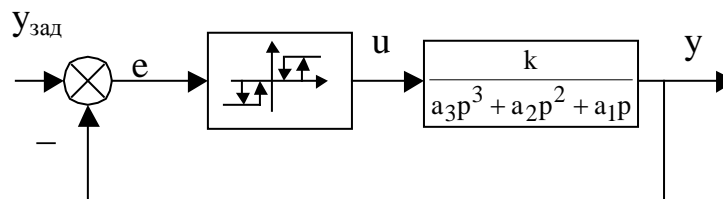


Рис. 1. Структурная схема системы

### Теоретические сведения

Теоретические сведения приведены в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в пунктах [6.3 «Особенности динамики релейных систем»](#) и [6.4 «Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации»](#).

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются параметры релейного элемента и передаточной функции линейной части системы.

Исходные данные выдаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

На занятии разбирается пример решения задач. Как частный случай рассматривается вариант, когда характеристика релейного элемента однозначна (идеальное трехпозиционное реле). Отчет о выполнении практического задания включается в отчет о выполнении лабораторных работ 13, 14.

***Практическое занятие № 24. Решение задачи оптимального управления методом классического вариационного исчисления***

Теоретические сведения и задания к практической и самостоятельной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления с помощью вариационного исчисления»](#).

***Практическое занятие № 25. Решение задачи на максимальное быстроедействие методом максимума***

Теоретические сведения и задания к практической и самостоятельной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума»](#).

***Практическое занятие № 26. Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования***

Теоретические сведения и задания к практической и самостоятельной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления методом динамического программирования»](#).

# ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ

## *Лабораторная работа № 1. Моделирование линейной системы*

### **Цель работы:**

- изучить возможности MatLab по созданию и преобразованию моделей линейных систем;
- получить практические навыки по созданию и преобразованию моделей линейных систем;
- получить практические навыки по определению реакции типовых звеньев на типовые воздействия.

### **Теоретические сведения**

#### *Общие характеристики пакета Control System Toolbox (CST)*

Исследование систем автоматического управления начинается с создания математической модели. В пакете CST линейные модели могут быть представлены в четырех формах:

- передаточная функция (tf);
- нули, полюса и коэффициент усиления (zpk);
- пространство состояния (ss);
- частотные характеристики (frd).

Задать модель системы в форме tf – это задать вектор коэффициентов числителя и знаменателя. Например, если в форме tf требуется представить модели системы, передаточная функция которой известна

$$W(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 10},$$

то в m-файле (или в окне команд) требуется записать следующую команду

```
h1=tf([1,0], [1,2,10])
```

Для создания модели системы в форме zpk, требуется знание нулей (корней числителя), полюсов  $p$  (корней знаменателя) и коэффициента усиления. Например, если модель задана в форме zpk

$$W(p) = \frac{2p}{(p-2)(p^2-2p+2)}$$

то в m-файле ей будет соответствовать следующие команды:

```
z = 0; p = [2, 1+j, 1-j]; k = 2;
```

```
H = zpk(z, p, k)
```

Модель системы в пространстве состояния задается системой матричных уравнений

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX + DU,$$

где  $X$  – вектор состояния;  $U$  и  $Y$  – векторы входа и выхода системы;  $A$  – матрица состояния,  $B$  – матрица управления,  $C$  – матрица выхода,  $D$  – матрица, характеризующая связь входного сигнала с выходным (матрица прямого обхода).

В частном случае, характеризующем простые системы, выход является скалярной величиной. В этом случае матрица  $C$  – это вектор строка, а матрица  $X$  – вектор столбец и их произведение дает скалярную величину.

Пусть, например, система описывается уравнениями

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

В пакете CST имеется команда `ss`, позволяющая создать модель системы в пространстве состояния

```
A = [0 1;-1 -1]; B = [0;1]; C = [1 0]; D = 0;
```

```
H = ss(A,B,C,D)
```

Модель в форме `frd` характеризует систему в частотной области. Исходными данными для создания формы `frd` являются модели, представленные формами: `tf`, `zpk` или `ss`. Для снятия частотных характеристик на вход системы подается ряд частот и команда `frd` определяет стационарную реакцию на эти возмущения. Для работы с моделью в форме `frd` в `m`-файле следует записать следующую программу, из которой следует, что исходная модель задана в форме `tf`, а тестовые сигналы задаются вектором `Fred`:

```
H=tf(num,den); %Исходные данные
```

```
Fred=[1,2,5,10]; %Входные воздействия
```

```
H1=frd(H,fred). %Реакция на входные воздействия
```

На рис.1 представлена схема, показывающая связи между математическими моделями, представленными в пакете CST.

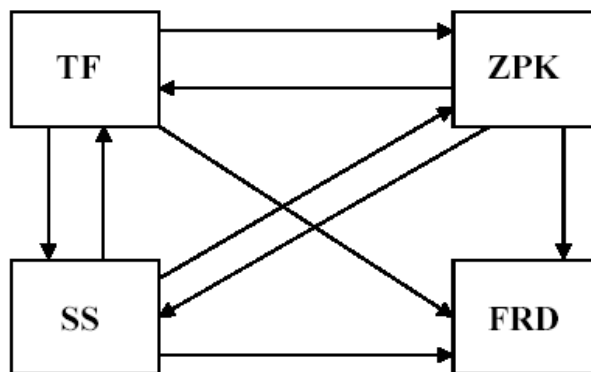


Рис.1. Схема преобразования моделей в пакете CST

Из схемы рис.1 видно, что модели, заданные в форме `tf`, `zpk` и `ss`, взаимно преобразуемы. Переход от формы `ss` к форме `tf` и `zpk` задается командами:

```
h1=ss(A,B,C,D) %Задание модели в форме ss
```

```
h2=tf(h1) %Переход от формы ss к форме tf
```

```
h3=zpk(h1) %Переход от формы ss к форме zpk
```

```
h3=zpk(h2) %Переход от формы tf к форме zpk
```

Аналогично можно записать команды, преобразующие модель формы `zpk` к другим формам представления:

```

h3=zpk(Z,P,K) %Задание модели в форме zpk
h2=tf(h3) %Переход от формы zpk к форме tf
h1=ss(h3) %Переход от формы zpk к форме ss
Модель, заданная в форме tf, может быть преобразована к формам ss и

```

zpk:

```

h2=tf(num,den) %Исходные данные, заданные вектором
                    %полинома числителя и знаменателя
h1=ss(h2) %Преобразование модели от формы tf к ss
h3=zpk(h2) %Преобразование модели от формы tf к zpk
Преобразование моделей к форме frd осуществляется из tf, ss и zpk и ну-

```

ждается в векторе входного тестового сигнала:

```

h1=tf(num,den)
h1=ss(h1)
h1=zpk(h1) .
fred=(1;10;20;40)
h2=frd(h1,fred) .

```

В пакете CST имеются команды, позволяющие получать математическое описание сложных систем по их структурным схемам.

Структурная схема последовательного соединения представлена на рис.2.

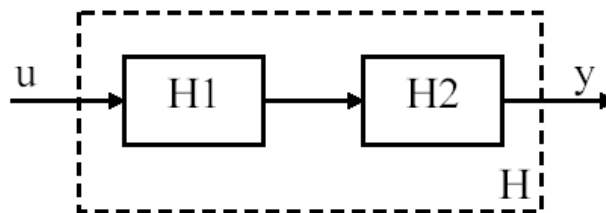


Рис.2. Структурная схема последовательного соединения звеньев

Передаточная функция этого соединения  $H$  определяется следующими командами:

```

H=series(H1,H2) ,

```

или

```

H=H2*H1

```

При определении передаточных функций последовательно соединенных звеньев следует учитывать обратный порядок сомножителей в операции умножения и на структурной схеме.

Параллельное соединение звеньев показано на рис.3.

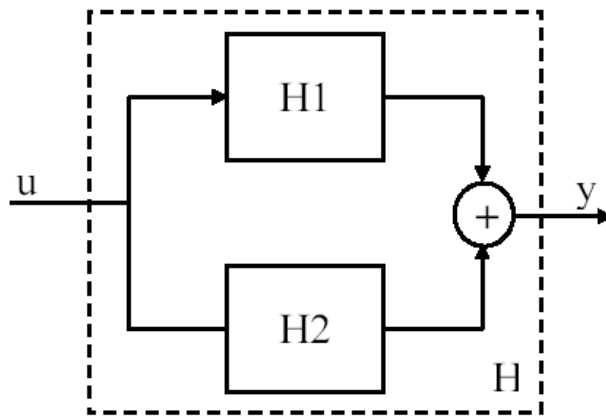


Рис.3. Структурная схема параллельного соединения

Передаточная функция  $H$  этой структуры включает следующие команды:

$$H = \text{parallel}(H1, H2),$$

или

$$H = H2 + H1$$

При охвате звена  $H1$  обратной связью структура системы принимает вид (рис. 4).

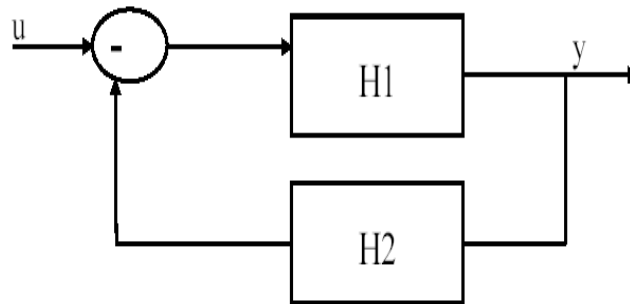


Рис.4.Обобщенная структурная схема замкнутой системы регулирования

Передаточная функция замкнутой системы определяется выражением:

$$H = \text{feedback}(H1, H2)$$

При положительной обратной связи команда определения  $H$  изменяется:

$$H = \text{feedback}(H1, H2, +1)$$

Два звена могут иметь разные входы (горизонтальной конкатенации) – рис.5.

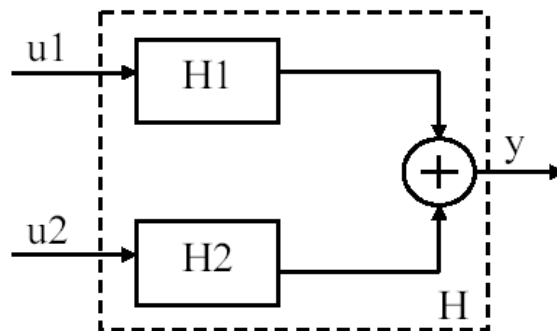


Рис.5. Структурная схема горизонтальной конкатенации

Выходная величина для горизонтальной конкатенации определяется выражением

$$y = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Передаточная функция, соответствующая структуре рис.5, определяется командой:

$$H = [H_1, H_2]$$

Если два звена имеют общий вход, но разные выходы, то такое соединение образует вертикальную конкатенацию (рис.6).

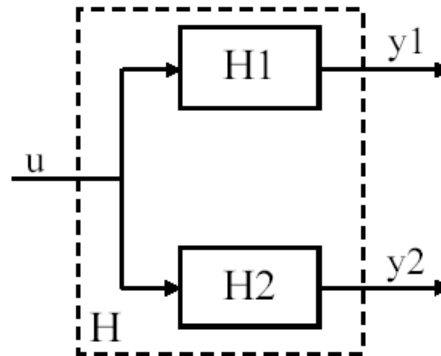


Рис.6. Структурная схема вертикальной конкатенации

Выходная величина для вертикальной конкатенации соответствует соотношению:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} u,$$

а в пакете CST этому соединению соответствует команда:

$$H = [H_1; H_2]$$

При описании моделей систем регулирования в пространстве состояния возникает необходимость компактного описания соединений блоков, представленных на рис.7.

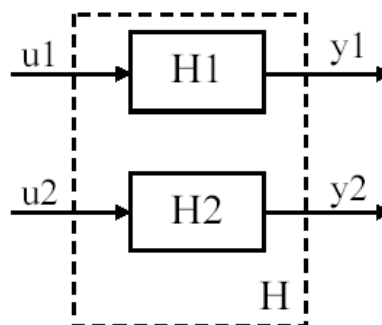


Рис.7. Структурная схема соединения блоков, формирующую результирующую (агрегативную) модель

Математическая запись структурной схемы рис.7 соответствует формированию диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

В пакете CST этому преобразованию соответствует команда:

$H = \text{append}(H_1, H_2)$

### **Задание**

С помощью методов пакета CST выполнить следующее:

- 1) определить передаточные функции системы по передаточным функциям входящих в нее звеньев;
- 2) определить модели звеньев в пространстве состояний и, проведя необходимые вычисления, построить модель системы в пространстве состояний;
- 3) определить передаточные функции системы, используя в качестве исходной модель в пространстве состояний.

### **Исходные данные**

Исходные данные в виде структурной схемы системы и передаточных функций ее элементов выдаются студенту преподавателем на практическом занятии №2. Результаты самостоятельной работы по теме практического занятия и результаты лабораторной работы должны соответствовать друг другу.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) исходную структурную схему системы и передаточные функции ее элементов;
- 2) результаты самостоятельной работы по теме практического занятия №2;
- 3) код, промежуточные и окончательные результаты, достигнутые в ходе компьютерного моделирования.

### **Контрольные вопросы:**

1. Какие исходные данные требуются для формирования модели в форме  $tf$ ?
2. Какие исходные данные требуются для формирования модели в форме  $zpk$ ?
3. Какие исходные данные требуются для формирования модели в форме  $ss$ ?
4. Как сформировать выходные сигналы модели, заданной в форме  $frd$ ?
5. Как записать модель в форме  $ss$  если исходные данные заданы в форме  $tf$ ?
6. Как записать модель в форме  $ss$  если исходные данные заданы в форме  $zpk$ ?
7. Какой командой определяется последовательное соединение звеньев?
8. Какой командой определяется параллельное соединение звеньев?
9. Какой командой определяется соединение звеньев, образующих горизонтальную конкатенацию?



10. Какой командой определяется соединение звеньев, образующих вертикальную конкатенацию?

11. Как определить передаточную функцию замкнутой системы (обратная связь отрицательная)?

12. Как определить передаточную функцию замкнутой системы (обратная связь положительная)?

13. Как, имея матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , записать дифференциальные уравнения системы?

14. Как, используя матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , представить структурную схему системы?

### ***Лабораторная работа №2. Исследование влияния коэффициента передачи на динамические свойства и устойчивость линейной системы***

#### **Цель работы:**

- изучить возможности программы SisoTool;
- получить практические навыки исследования систем в программе;
- выявить основные закономерности, связанные с влиянием коэффициента передачи на динамические свойства системы регулирования.

#### **Теоретические сведения**

##### **Программа SisoTool**

В состав пакета Control Systems, наряду с «низкоуровневыми» средствами представления и исследования линейных объектов и систем, входит программа SisoTool, представляющая собой достаточно мощный инструмент анализа и синтеза одномерных линейных систем с типовыми структурами. Программа написана на языке Matlab, что демонстрирует не только «вычислительные» возможности языка, но и его возможности в плане построения полноценного пользовательского интерфейса. Запустить программу можно, введя в командном окне:

```
sisotool
```

Внешний вид главного окна программы показан на рис. 1.

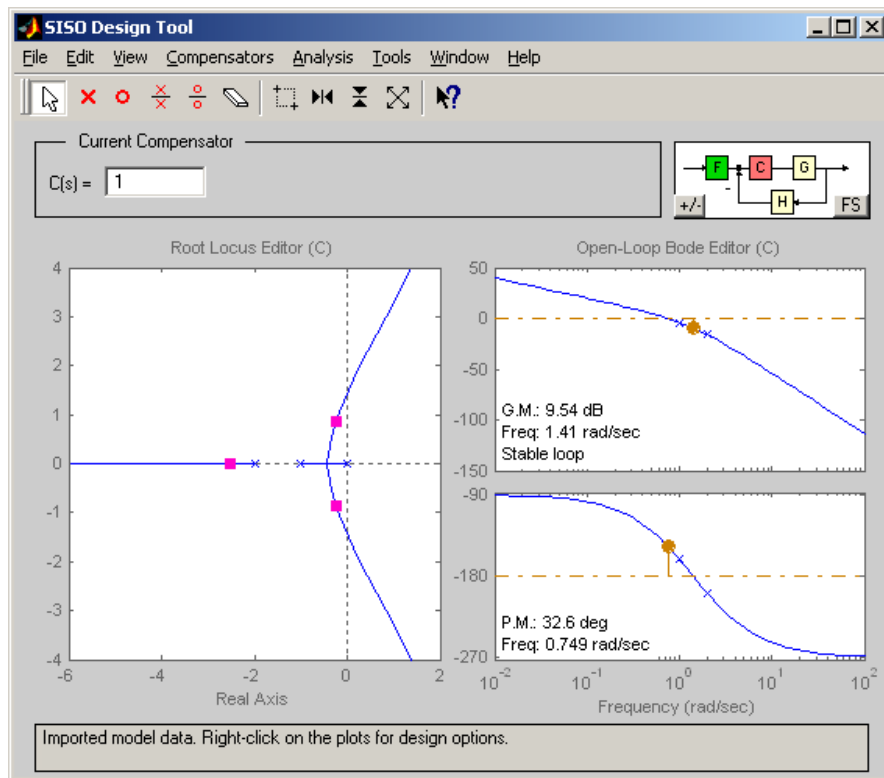


Рис. 1. Окно программы SisoTool

Программа позволяет анализировать четыре типовые структуры линейных систем. Структура исследуемой системы показана в верхней правой части окна. Изменение структуры производится с помощью кнопки FS (см. рис. 1). Четыре блока, формирующие структуру системы, имеют следующее назначение:  $G$  – объект регулирования (в широком понимании этого термина);  $H$  – датчик обратной связи;  $F$  – предварительный фильтр;  $C$  – компенсатор (регулятор, корректирующее устройство и т.д.). Математическое описание этих блоков может быть представлено в виде SISO-объектов классов *ss*, *tf*, *zpk*. Объекты загружаются в программу из рабочей области (*WorkSpace*) *Matlab*, *MAT*-файла, или *Simulink*-диаграммы с помощью функции *Import* меню *File*. Особое место среди блоков занимают блоки  $F$  и  $C$ : после предварительной загрузки их математическое описание можно редактировать путем изменения, добавления и удаления полюсов и нулей передаточных функций, а также изменения коэффициентов. Это можно сделать с помощью меню *Compensators* или двойного щелчка мыши непосредственно на блоках. Кроме того, параметры компенсатора  $C$  выводятся в области *Current Compensator* главного окна программы. Для задания коэффициента компенсатора эта область имеет поле ввода. Нули и полюса компенсатора можно добавлять и удалять с помощью панели инструментов.

По умолчанию в главном окне программы *SisoTool* располагаются редактор размещения полюсов замкнутой системы и редактор частотных характеристик разомкнутой системы.

Редактор размещения полюсов представляет собой карту нулей и полюсов компенсатора (красные «кружочки» и «крестики») и полюсов замкнутой

системы (красные «квадратики»). С помощью мыши можно изменять положение нулей и полюсов компенсатора, одновременно наблюдая изменение полюсов замкнутой системы. На карте также показаны траектории движения последних при изменении коэффициента компенсатора. Передвигая по ним полюса, можно наблюдать изменение текущего значения этого коэффициента.

Редактор частотных характеристик разомкнутой системы включает ее ЛАЧХ и ФЧХ, на которых «кружочками» и «крестиками» отмечены частоты, соответствующие нулям и полюсам. «Кружочки» и «крестики», относящиеся к компенсатору, выделены красным, их положение можно изменять с помощью мыши. Кроме отображения характеристик, редактор предоставляет информацию об устойчивости системы, выдавая значения запасов устойчивости по амплитуде и фазе.

Изменить содержание главного окна программы можно с помощью меню View.

Меню Analysis предоставляет широкие возможности по анализу САР путем построения различных временных и частотных ее характеристик в отдельных окнах. Следует отметить, что временные характеристики могут быть построены не только по каналу задание – выход, но и по другим каналам, связывающим входные воздействия с «промежуточными» величинами системы (см. пункт меню Other Loop Responses). При этом изменение параметров системы в главном окне ведет к автоматическому пересчету характеристик во всех открытых окнах. Таким образом, можно, например, изменяя нули и полюса системы или компенсатора, наблюдать за изменением переходной характеристики системы.

Меню Tools предлагает дополнительные инструменты, в частности для построения Simulink-модели системы.

Результаты работы в программе SisoTool в виде передаточных функций компенсатора, предварительного фильтра и системы в целом могут быть сохранены как в рабочей области Matlab (пункт Export меню File), так и в MAT-файле (пункт Save Session).

### **Задание**

С помощью программы SisoTool выполнить следующее:

- 1) построить корневой годограф системы при изменении коэффициента передачи  $k_p$ ;
- 2) определить значения коэффициента передачи, соответствующие
  - максимальному быстродействию при апериодическом характере переходной характеристики (зафиксировать время переходного процесса);
  - максимальному быстродействию системы (зафиксировать время переходного процесса);
  - перерегулированию 20% (зафиксировать время переходного процесса);
  - перерегулированию 60% (зафиксировать время переходного процесса);

3) построить переходные характеристики, АФЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы и ЛАЧХ замкнутой системы для всех четырех вариантов  $k_p$ .

### **Исходные данные**

Исходные данные в виде структурной схемы системы и передаточных функций ее элементов выдаются студенту преподавателем на практическом занятии №4. Результаты самостоятельной работы по теме практического занятия и результаты лабораторной работы должны соответствовать друг другу.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) исходную структурную схему системы и передаточные функции ее элементов;
- 2) результаты самостоятельной работы по теме практического занятия №3;
- 3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы в программе SisoTool (см. Задание).

### **Контрольные вопросы:**

1. При каком коэффициенте передачи полюса замкнутой системы совпадают с полюсами разомкнутой?
2. Что можно сказать о полюсах замкнутой системы, обеспечивающих максимальное быстродействие?
3. Что можно сказать о полюсах замкнутой системы, находящейся на границе устойчивости?
4. Как по значениям полюсов определить частоту колебаний в замкнутой системе?
5. Как влияют нули передаточной функции замкнутой системы на ее устойчивость?
6. Как по значениям полюсов оценить быстродействие замкнутой системы?

### ***Лабораторная работа №3. «Экспериментальное» определение запасов устойчивости замкнутой системы с помощью имитационного моделирования***

#### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования динамических систем при гармонических воздействиях;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов устойчивости по темам практического занятия №6.

#### **Теоретические сведения**

При оценке устойчивости систем одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо еще оценивать величину запаса устойчивости, т. е. степени удаленности системы от границы устойчивости. В случае применения

критерия Найквиста запас устойчивости оценивают следующими показателями.

*Запас устойчивости по амплитуде* определяется величиной  $\Delta A$  допустимого увеличения значения коэффициента передачи по амплитуде, при котором система окажется на границе устойчивости.

*Запас устойчивости по фазе* определяется величиной  $\Delta\varphi$ , на которую должно увеличиться запаздывание по фазе, чтобы система оказалась на границе устойчивости.

В данной работе эти показатели определяются «экспериментально» с помощью виртуальной лабораторной установки, вид которой показан на рис. 1.

Установка представляет собой Simulink-модель замкнутой системы регулирования. Блок Transfer Fcn моделирует передаточную функцию «исходной» разомкнутой системы. Кроме него в систему «искусственно» введены блок «K» (типа Slider Gain) – для изменения коэффициента передачи разомкнутой системы и блок «Variable Transfer Delay» (переменное запаздывание) – для введения дополнительного фазового сдвига в систему. Величина запаздывания блока «Variable Transfer Delay» может регулироваться с помощью блока «tau» (типа Slider Gain). Блоки «K» и «tau» позволяют изменять свои коэффициенты передачи непосредственно в ходе выполнения сеанса имитационного моделирования (без остановки процедуры расчета). Их окна с настроечными ползунками показаны в верхнем правом углу экрана.

Кроме того, виртуальная установка содержит переключатель (типа Manual Switch), с помощью которого можно «замыкать» и «размыкать» систему регулирования.

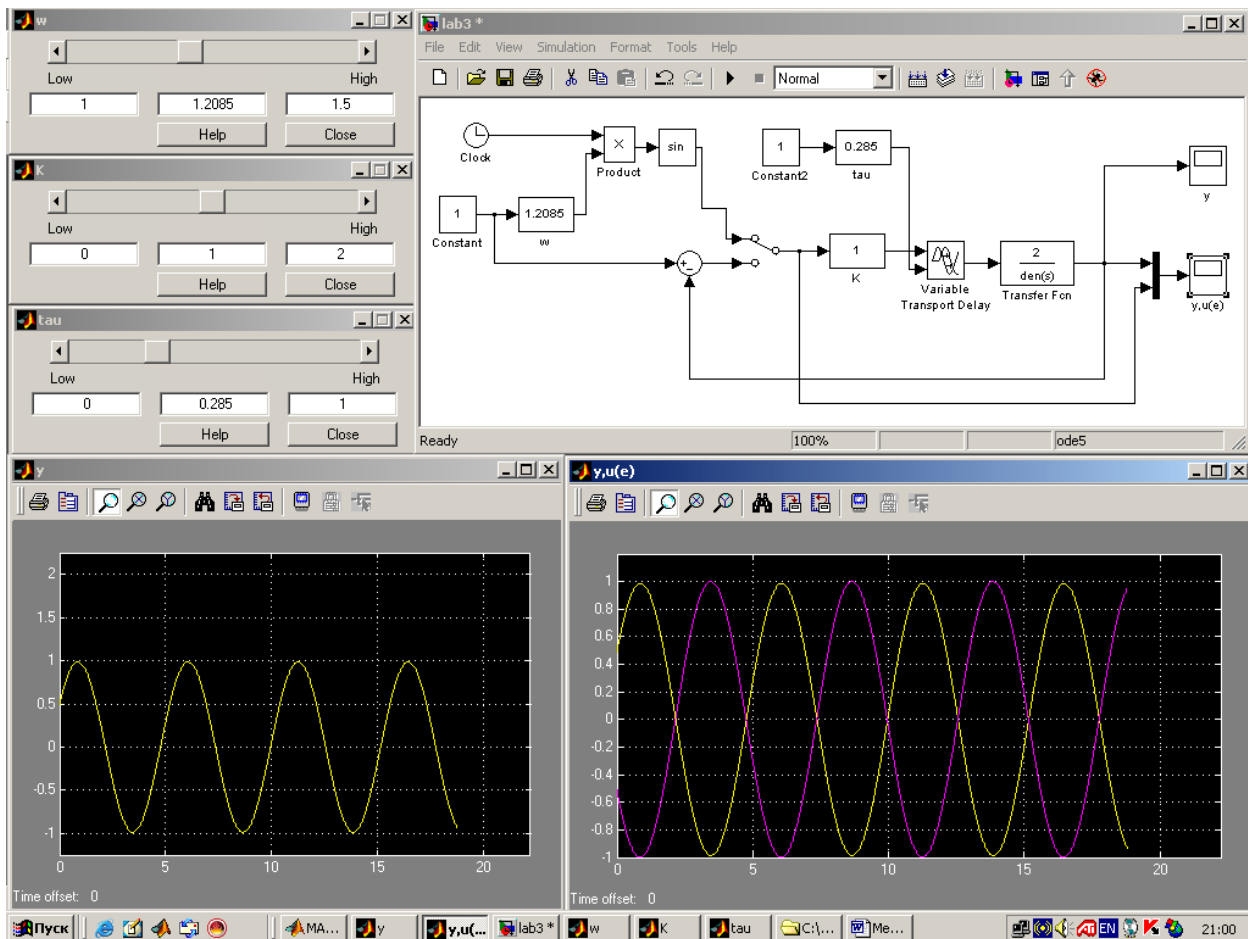


Рис. 1. Виртуальная экспериментальная установка

В разомкнутом состоянии на систему подается гармонический сигнал с единичной амплитудой. Частоту сигнала можно настраивать с помощью блока «w» (типа Slider Gain). Входной сигнал и реакция на него системы контролируются блоком «y,u(e)» (типа Scope). Все это позволяет исследовать частотные характеристики разомкнутой системы.

В замкнутом состоянии на вход системы подается единичный сигнал. Реакцию на него можно контролировать с помощью блока «y» (типа Scope) или с помощью блока «y,u(e)» (тогда кроме выходного сигнала в окне будет выводиться также сигнал ошибки регулирования).

При построении виртуальной установки следует придерживаться следующих рекомендаций:

1) все окна модели для наглядности лучше разместить так, чтобы они не перекрывали друг друга;

2) для расчета модели лучше использовать метод с постоянным шагом, например, ode5. Время расчета желательно установить очень большим, чтобы в ходе выполнения работы не отвлекаться на его перезапуск. Расчетный шаг нужно подобрать таким образом, чтобы графики в окнах Scope перерисовывались не очень быстро и не очень медленно. При этом в настройках блоков Scope лучше оставить ограничение на максимальное количество запоминаемых точек (Limit data point to last), а временной диапазон блоков выбрать таким, чтобы он вмещал не менее 3 – 4 периодов колебаний на всех частотах.

При расчете запасов устойчивости система поочередно выводится на границу устойчивости либо путем изменения дополнительного коэффициента передачи, либо путем изменения дополнительного запаздывания. В первом случае рассчитывается запас устойчивости по амплитуде, во втором – по фазе.

Так, если на частоте  $\omega^*$ , соответствующей фазовому сдвигу  $-180^\circ$  вывести систему на границу устойчивости, введя дополнительный коэффициент передачи  $k$  (при нулевом дополнительном запаздывании), то согласно критерию Найквиста

$$k A(\omega^*) = 1, \quad (1)$$

где  $A(\omega^*)$  – значение АЧХ «исходной» разомкнутой системы на частоте  $\omega^*$ .

Отсюда

$$A(\omega^*) = 1/k, \quad (2)$$

и, следовательно, запас устойчивости по амплитуде можно определить как

$$\Delta A = 1 - A(\omega^*) = 1 - 1/k. \quad (3)$$

Если на частоте  $\omega^{**}$ , при которой значение АЧХ «исходной» разомкнутой системы равно единице (частоте среза), вывести систему на границу устойчивости, введя дополнительное запаздывание (при  $k=1$ ), то запас устойчивости по фазе можно определить следующим образом

$$\Delta\varphi = \tau\omega^{**}, \quad (4)$$

где  $\tau$  – величина дополнительного запаздывания.

Если анализируется поведение замкнутой системы, о ее нахождении на границе устойчивости свидетельствуют незатухающие колебания на выходе (с постоянной амплитудой). Если эксперимент проводится над разомкнутой системой, ее выходные колебания должны происходить с амплитудой, равной амплитуде входных колебаний, и отставать от них по фазе на  $180^\circ$ . Другими словами, выходные колебания должны находиться в противофазе по отношению к входным.

### **Задание**

1. Построить виртуальную экспериментальную установку. Для этого использовать передаточную функцию разомкнутой системы, структура и параметры которой заданы преподавателем на практическом занятии №5.

2. Провести эксперимент по определению запасов устойчивости над разомкнутой системой по критерию Найквиста, для чего

2.1. Разомкнуть систему ручным переключателем, установить  $k = 1$ ,  $\tau = 0$  и запустить процедуру расчета.

2.2. Изменяя частоту входных колебаний, добиться, чтобы выходные колебания отставали от входных на  $180^\circ$  (т.е. найти частоту  $\omega^*$ ).

2.3. Изменяя коэффициент  $k$ , вывести систему на границу устойчивости (т.е. добиться равенства амплитуд).

2.4. Определить запас по амплитуде по формуле (3).

2.5. Вновь установить  $k = 1$ ,  $\tau = 0$ . Изменяя частоту входных колебаний, добиться, чтобы амплитуда выходных колебаний была равна амплитуде входных (т.е. найти частоту среза  $\omega^{**}$ ).

2.6. Изменяя запаздывание  $\tau$ , вывести систему на границу устойчивости (т.е. добиться, чтобы колебания находились в противофазе).

2.7. Определить запас по фазе по формуле (4).

3. Провести эксперимент по определению запасов устойчивости над замкнутой системой, для чего

3.1. Замкнуть систему ручным переключателем, установить  $k = 1$ ,  $\tau = 0$  и запустить процедуру расчета.

3.2. Изменяя коэффициент  $k$ , вывести систему на границу устойчивости (т.е. добиться автоколебаний на выходе).

3.3. Определить запас по амплитуде по формуле (3).

3.4. Вновь установить  $k = 1$ . Изменяя запаздывание  $\tau$ , вывести систему на границу устойчивости.

3.5. Определить запас по фазе по формуле (4).

### **Исходные данные**

Структура и параметры системы регулирования, заданные преподавателем на практическом занятии №5.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) схему виртуальной лабораторной установки;  
2) результаты самостоятельной работы по темам практических занятий №5 и №6;

3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы путем имитационного моделирования, а также результаты их обработки.

### **Контрольные вопросы:**

1. Что понимается под устойчивостью системы автоматического регулирования.

2. Условие устойчивости линейной системы автоматического регулирования.

3. Необходимый критерий устойчивости Стодолы.

4. Методика применения критерия устойчивости Гурвица.

5. Критерий устойчивости Михайлова.

6. Критерий устойчивости Найквиста (для систем устойчивых в разомкнутом состоянии).

7. Определение запасов устойчивости по критерию Найквиста.

8. Сущность методики определения запаса устойчивости по амплитуде, применяемой в лабораторной работе.

9. Сущность методики определения запаса устойчивости по фазе, применяемой в лабораторной работе.

## ***Лабораторная работа №4. Определение точности системы в статических и стационарных динамических режимах путем имитационного моделирования***

### **Цель работы:**



– получение навыков моделирования динамических систем в статических и стационарных динамических режимах;

– «экспериментальная» проверка результатов расчетов статических и стационарных динамических режимах, полученных при выполнении практических заданий №7,8.

### Теоретические сведения

Точность системы в статическом и стационарном динамическом режимах оценивается величиной ошибки регулирования, т.е. разности между заданным и текущим значениями регулируемой величины.

Пусть, например, рассматривается система, структура которой приведена на рис.1.

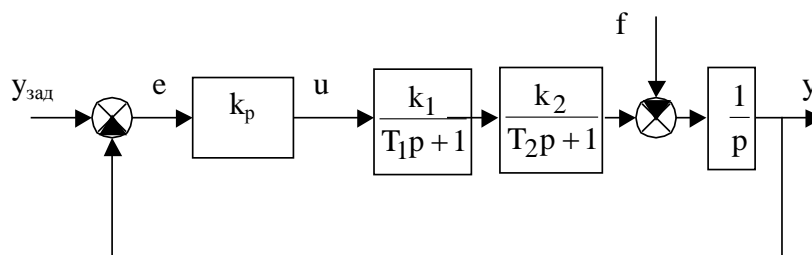


Рис.1. Структура системы автоматического регулирования

В указаниях к практическим работам № 7,8 исследовалась точность данной системы при постоянных воздействиях и при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной.

Для случая  $k_1 = k_2 = 1$  было определено уравнение статического режима системы в виде

$$y = y_{\text{зад}} - \frac{f}{k_{\delta}}. \quad (1)$$

Из (1) следует уравнение ошибки

$$e = y_{\text{зад}} - y = \frac{f}{k_{\delta}}. \quad (2)$$

В результате исследования стационарных динамических режимов системы при воздействиях с постоянной производной было выяснено, что

1) при изменении задающего сигнала с постоянной скоростью ошибка регулирования постоянна и равна

$$e = \frac{\lambda}{k_{\delta}}. \quad (3)$$

где  $\lambda$  – скорость изменения задания.

Отметим, что выражение (3) получено при условии  $f = 0$ . В общем случае для стационарного динамического режима в присутствии возмущения суммарная ошибка может быть найдено сложением (2) и (3):

$$e = \frac{f + \lambda}{k_{\delta}}. \quad (4)$$

2) при изменении возмущения с постоянной скоростью ошибка системы неограниченно увеличивается. То же самое наблюдается при изменении задающего сигнала с постоянным ускорением.

Для «экспериментального» подтверждения полученных результатов может использоваться Simulink-модель системы, представленная на рис. 2.

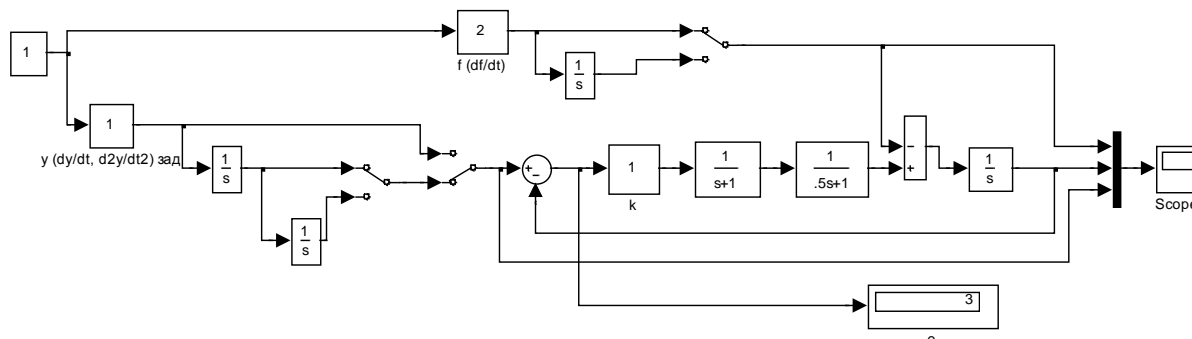


Рис. 2. Simulink-модель системы

Модель включает контур регулирования и вспомогательные цепи, предназначенные для формирования входных воздействий разного вида.

С помощью переключателей задающий сигнал можно сформировать в виде постоянного воздействия, а также воздействий, изменяющихся с постоянной скоростью и постоянным ускорением. При этом значение постоянного сигнала, скорость и ускорение задания можно изменять непосредственно при выполнении процедуры расчета с помощью блока «y (dy/dt, d2y/dt2) зад» типа «Slider Gain».

Возмущающий сигнал может быть сформирован либо как постоянное воздействие, либо как воздействие с постоянной скоростью. Значение или скорость возмущения изменяется с помощью блока «f (df/dt)» типа «Slider Gain».

Кроме того, модель содержит «переменный» коэффициент передачи «k».

С помощью блока «Scope» контролируются выходной и задающий сигналы, а также сигнал возмущения. Величина ошибки регулирования выводится на блок «e» типа «Display».

Для того, чтобы проводить исследования, не отвлекаясь на перезапуск расчета, использован метод с постоянным шагом (ode5), расчетное время поставлено достаточно большим (3000 сек.), а шаг – достаточно малым (0,01 сек.). В режимах с установившейся ошибкой это позволяет наблюдать изменения ошибки по блоку «e», настраивая коэффициенты модели с помощью блоков типа «Slider Gain». В режимах, когда ошибка неограниченно возрастает процедуру расчета можно остановить, не ожидая истечения расчетного времени. При этом изменение ошибки можно контролировать с помощью блока «Scope».

### **Задание**

1. Построить Simulink-модель исследуемой системы с вспомогательными цепями для формирования входных воздействий разного вида. Виды воздействий должны соответствовать случаям, когда ошибка нулевая (если это возможно), постоянная, отличная от нуля и неограниченно возрастающая.

2. Исследовать реакцию системы на каждое воздействие в отдельности, а также зависимость этой реакции от переменного коэффициента и построить соответствующие графики (в виде зависимости ошибки от величины воздействия или ее производной при различных значениях коэффициента). В случае неограниченно возрастающей ошибки зафиксировать график изменения ошибки со временем.

3. Исследовать реакцию системы на некоторую комбинацию воздействий, зависимость этой реакции от переменного коэффициента и построить соответствующие графики.

### **Исходные данные**

Структура и параметры системы регулирования, заданные преподавателем на практическом занятии №7.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) схему виртуальной лабораторной установки;
- 2) результаты самостоятельной работы по темам практических занятий №7 и №8;
- 3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы путем имитационного моделирования, а также результаты их обработки.

### **Контрольные вопросы:**

1. Что такое порядок астатизма системы и как он влияет на статическую ошибку регулирования по задающему воздействию?
2. Что такое порядок воздействия?
3. Чем определяется статическая ошибка регулирования в системе с нулевым порядком астатизма?
4. Каково условие отсутствия статической ошибки по возмущающему воздействию?

### ***Лабораторная работа №5. Определение характеристик случайных сигналов на входе и выходе системы с помощью имитационной модели***

#### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования динамических систем при случайных воздействиях;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по темам практических занятий №9 и №10.

## **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующих разделах указаний к выполнению практических работ №9 и №10.

При выполнении работы требуется построить модель системы, заданной преподавателем перед выполнением практического задания №10, в Simulink и исследовать реакцию системы на случайное возмущение, сформированное преподавателем на практическом занятии №9 в виде числовой последовательности с постоянным шагом. Последовательность сохраняется в переменной – двумерном массиве, состоящем из двух столбцов. Первый столбец содержит отчеты времени, второй – значения случайного сигнала. Массив сохраняется в mat-файле. Для его загрузки в рабочую область Matlab необходимо использовать команду load.

Для «подсоединения» случайного сигнала к Simulink-модели системы применяется блок «From Workspace» из раздела «Sources» (источники сигналов).

Можно также непосредственно считывать случайное воздействие из mat-файла в Simulink-модель (не загружая его содержимое в рабочую область Matlab), используя блок «From File». При этом mat-файл должен содержать матрицу, первая строка которой содержит отчеты по времени, вторая – значения случайного воздействия. При этом, естественно, требуется предварительное преобразование формата mat-файла.

При расчете реакции системы на случайное воздействие, необходимо использовать метод с постоянным шагом, причем шаг интегрирования должен быть равен шагу изменения случайного воздействия, а время расчета – максимальному значению отчета времени воздействия.

### **Задание**

1) построить Simulink-модель системы, подать на ее вход (в точке, указанной преподавателем перед выполнением практической работы №10) случайное воздействие, сформированное и выданное преподавателем перед выполнением практической работы №9 в виде mat-файла;

2) провести имитационное моделирование и получить реакцию системы на случайное воздействие. Сохранить реакцию системы в рабочей области Matlab (см. указания к практической работе №9);

3) обработать результаты эксперимента, получив значения математического ожидания, графиков корреляционной функции и спектральной плотности, а также значения дисперсии выходного сигнала по методике, предложенной в указаниях к практической работе №9;

4) сравнить полученные результаты с результатами теоретических расчетов по программе практического занятия №10. В случае положительного результата составить отчет о выполнении практических работ № 9, 10 и лабораторной работы №5.

### **Исходные данные**

1) mat-файл, содержащий случайную последовательность для входного случайного сигнала, сформированный и выданный преподавателем перед выполнением практической работы №9;

2) структурная схема системы регулирования с указанием передаточных функций звеньев и места приложения случайного воздействия, выданная преподавателем перед выполнением практического задания №10.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) исходную структурную схему системы и передаточные функции ее элементов;

2) результаты самостоятельной работы по темам практических занятий №9 и №10;

3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы путем имитационного моделирования, а также результаты их обработки.

### **Контрольные вопросы:**

1. Дать определение математического ожидания случайной величины.  
2. Дать определение дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины.

3. Пояснить сущность гипотезы эргодичности.

4. Дать определение корреляционной функции. Указать предельные значения корреляционной функции.

5. Дать определение спектральной плотности. Указать предельные значения спектральной плотности.

6. Привести формулы для определения корреляционной функции выходного сигнала линейной системы по корреляционной функции случайного входного воздействия.

7. Привести формулы для определения спектральной плотности выходного сигнала линейной системы по спектральной плотности случайного входного воздействия.

8. Пояснить метод приближенного численного определения корреляционной функции по случайной последовательности.

9. Пояснить метод приближенного численного определения спектральной плотности по корреляционной функции.

10. Привести формулы для определения дисперсии сигнала по случайной последовательности, корреляционной функции и спектральной плотности центрированной случайной величины.

### ***Лабораторная работа №6. Определение частотных показателей качества с помощью имитационных моделей***

#### **Цель работы:**

изучение влияния коэффициента передачи на прямые и косвенные (частотные) показатели качества переходных процессов, изучение связи между

прямыми и косвенными (частотными) показателями качества переходных процессов;

### Теоретические сведения

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 4.2.3. [«Показатели качества переходных процессов»](#).

### «Лабораторная установка»

Пусть требуется выполнить программу работы для системы, структурная схема которой представлена на рис.1.

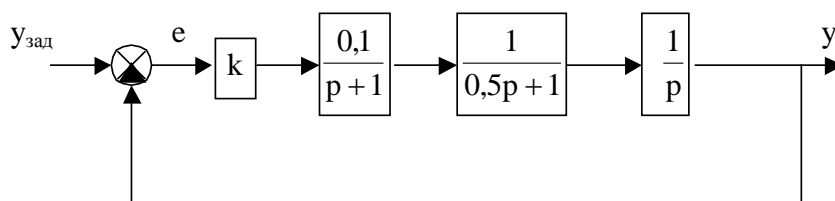


Рис. 1. Структурная схема САР

Для изучения влияния коэффициента  $k$  на переходную характеристику построим Simulink-модель (рис.2)

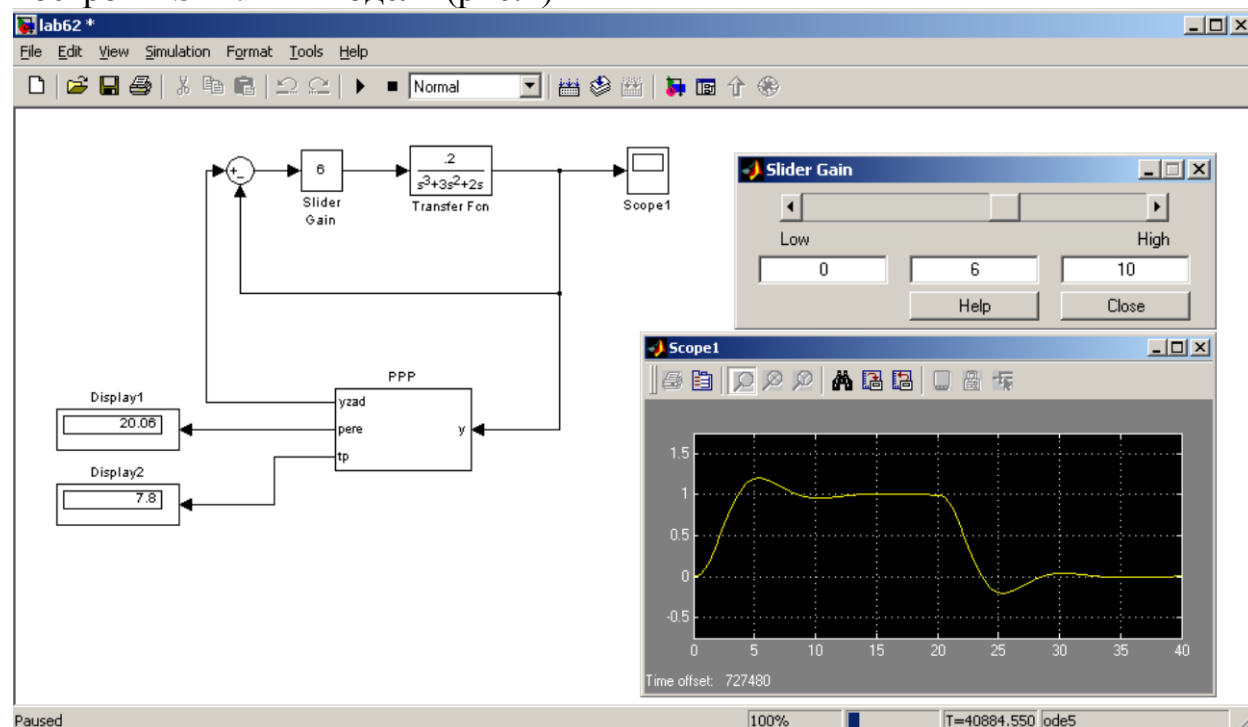


Рис.2. Simulink-модель системы для изучения влияния коэффициента  $k$  на временные характеристики

Подсистема PPP подает на вход модели САР прямоугольные импульсы единичной амплитуды, длительность которых достаточна для завершения переходного процесса. В блоке Scope 1 параметр Time range установлен равным периоду следования импульсов, поэтому имеется возможность наблюдать переходной процесс в «режиме осциллографа». Коэффициент  $k$  изменяется «вручную» с помощью блока Slider Gain непосредственно в ходе расчета

модели. Чтобы не тратить время на перезапуск, установлены следующие параметры расчета (Simulation Parameters): очень большое значение Stop time (в нашем случае 4000000 сек. или 100000 циклов); решатель с постоянным шагом ode5; малый шаг по времени (Fixed step size) 0,05 сек. Блоки Display 1 и Display 2 отражают «текущие» значения перерегулирования и времени регулирования.

На рис. 3 приведена подсистема PPP.

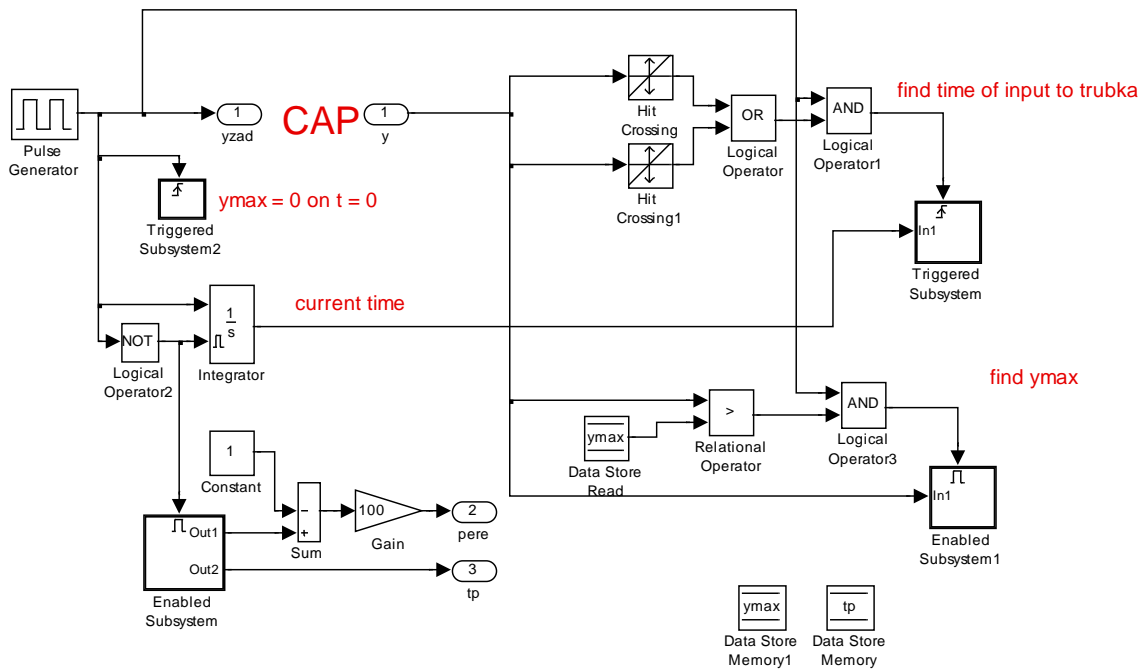


Рис.3. Подсистема PPP

В состав подсистемы входит блок Pulse generator, выдающий последовательность прямоугольных импульсов заданной длительности.

Для сохранения значений времени переходного процесса и максимума выходного сигнала CAP используются локальные переменные tp и ymax. Они «объявлены» с помощью блоков Data Store memory и Data Store memory1. В начале каждого периода следования импульсов переменная ymax обнуляется с помощью блока Triggered Subsystem 2 (рис. 4).

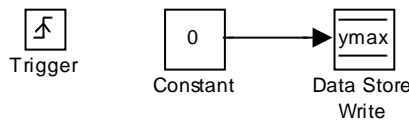


Рис. 4. Triggered Subsystem 2

Интегратор Integrator со сбросом по уровню вырабатывает сигнал времени с момента начала импульса, необходимый для расчета длительности переходного процесса.

С помощью блоков Hit Crossing и Hit Crossing 1 фиксируются моменты пересечения кривой переходного процесса значений 0,95 и 1,05 («трубка допуска»). Если это имеет место при наличии импульса (блок Logical Operator1 AND), приводится в действие блок Triggered Subsystem, который заносит время пересечения в переменную tp (рис. 5). Таким образом, к моменту снятия импульса в переменной tp будет записана длительность переходного процесса.

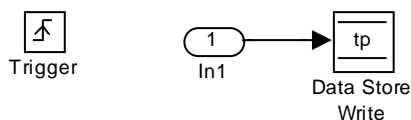


Рис. 5. Triggered Subsystem

С помощью блоков Data Store Read и Relation Operator (>) определяется максимальное значение выходного сигнала САР. Если во время действия импульса (блок Logical Operator1 AND) текущее значение «у» больше ранее записанного уmax, считанного блоком Data Store Read, подсистема Enabled Subsystem 1 заносит его в переменную уmax (рис. 6). Таким образом, к моменту снятия импульса в переменной уmax будет записано максимальное значение выхода системы в переходном процессе.

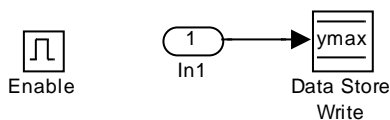


Рис.6. Enabled Subsystem 1

Расчет и вывод значений перерегулирования и времени регулирования осуществляется с помощью блоков Enabled Subsystem, Constant, Sum, Gain, pere и tp. Подсистема Enabled Subsystem активизируется только при отсутствии импульса (блок Logical Operator2 NOT) и выполняет считывание ранее полученных значений из переменных уmax и tp (рис.7). Таким образом, выходная информация обновляется только после снятия импульса, что обеспечивает ее достоверность.



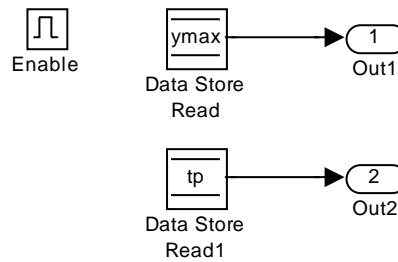


Рис.7. Enabled Subsystem

Для изучения влияния коэффициента  $k$  на запасы устойчивости построим Simulink-модель (рис.8)

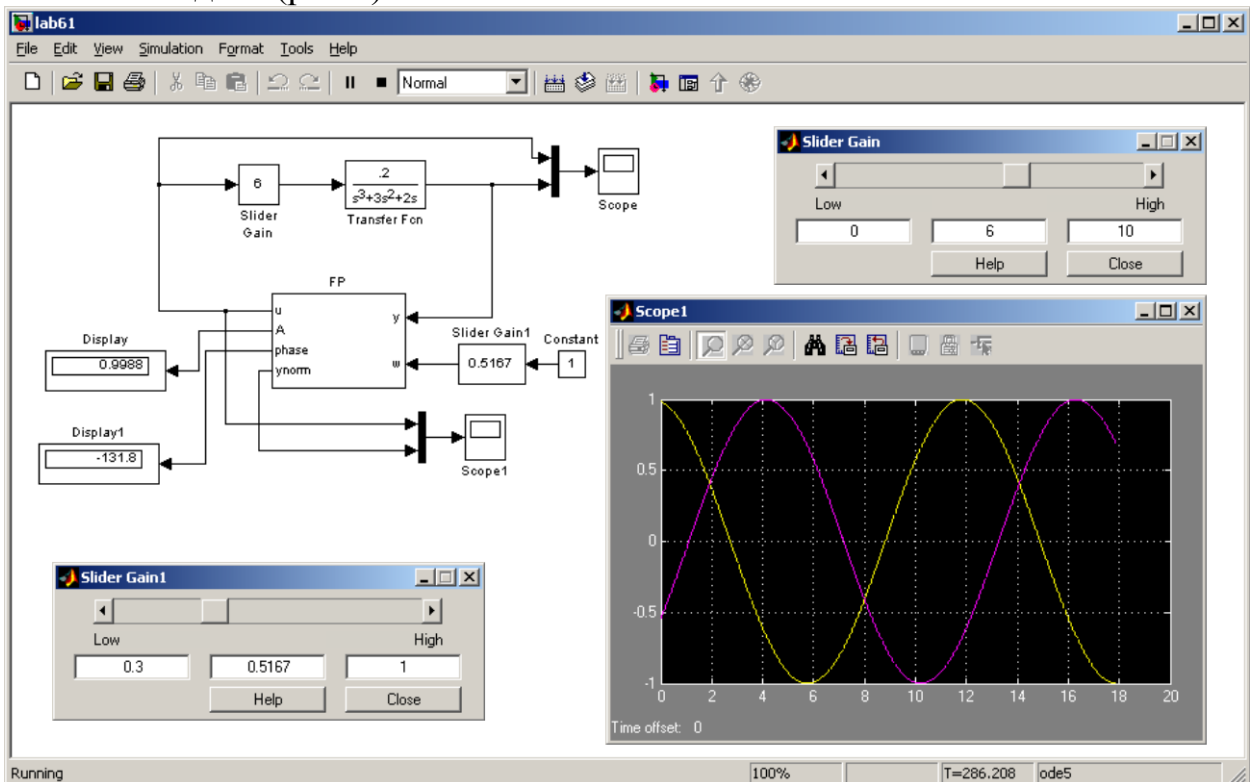


Рис.8. Simulink-модель системы для изучения влияния коэффициента  $k$  на запасы устойчивости

На вход модели разомкнутой системы подсистема FP подает синусоидальный сигнал с единичной амплитудой. Частота сигнала настраивается с помощью блока Slider Gain 1. Коэффициент передачи системы изменяется с помощью блока Slider Gain. Блоки Display и Display 1 отражают текущие значения амплитуды и фазового сдвига выходного сигнала. Блок Scope выводит графики колебаний на входе и выходе системы. То же самое делает и блок Scope1, но с дополнительной «привязкой» выходных колебаний к нулевой оси.

Чтобы не тратить время на перезапуск, установлены следующие параметры расчета (Simulation Parameters): очень большое значение Stop time (в нашем случае 30000 сек.); решатель с постоянным шагом ode5; малый шаг по времени (Fixed step size) 0,001 сек.

На рис. 9 приведена подсистема FP.

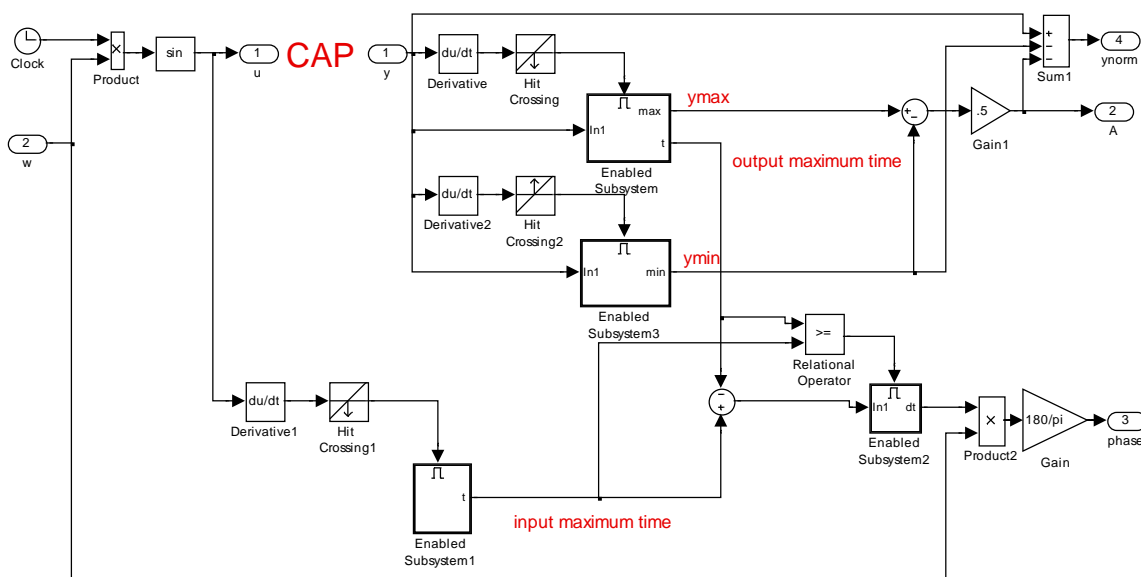


Рис. 9. Подсистема FP

Подсистема включает генератор синусоидального сигнала переменной частоты, построенный на блоках Clock, Product и sin, схем фиксации максимумов входного и выходного сигнала, а также минимума выходного сигнала и схему расчета сдвига фаз.

Максимальное значение выходного сигнала и соответствующее время фиксируются с помощью блоков Derivative, Hit Crossing и Enabled Subsystem. Подсистема Enabled Subsystem включается в работу в момент перехода производной выходного сигнала через нуль в сторону уменьшения и выдает на выход текущие значения выходного сигнала (максимальное) и время (рис. 10). Все остальные выходы системы «заморожены».



Рис. 10. Подсистема Enabled Subsystem

Аналогично работает схема фиксации минимума выходного сигнала, построенная на блоках Derivative 2, Hit Crossing 2 и Enabled Subsystem 3, только здесь фиксируется момент перехода производной нуля в положительном направлении.

Для входного сигнала фиксируется только время его максимума (блок Enabled Subsystem 1, рис. 11).

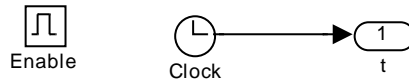


Рис. 11. Подсистема Enabled Subsystem 1

Полученные значения времен максимумов входного и выходного сигнала используются в схеме определения сдвига фазы. Подсистема Enabled Subsystem 2 (рис. 12) фиксирует разность между временем максимума входа и временем максимума выхода, если последнее больше, либо равно первому (для исключения сравнения времен не соседних максимумов).

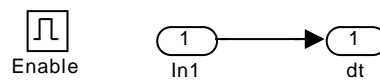


Рис. 12. Подсистема Enabled Subsystem 2

Далее, помощью блоков Product 2 и Gain вычисляется фазовый сдвиг:  $\Delta\varphi = 180\omega\Delta t/\pi$ .

Определение амплитуды выходного сигнала производится по формуле  $A = (y_{\max} - y_{\min})/2$ .

Кроме того, подсистема FP включает также схему «нормализации» выходного сигнала, работающую по формуле  $y_{\text{norm}} = y - A - y_{\min}$ .

Вынужденные колебания разомкнутых систем, содержащих звенья интегрирования, содержат постоянную составляющую, зависящую от начальных условий. Поскольку эти условия мы изменяем непосредственно в ходе расчета, изменяя частоту входного сигнала, постоянная составляющая будет меняться при каждом изменении частоты. Это мешает наглядности графиков, на которых выходные колебания совмещены с входными (см. Scope). Для устранения данного недостатка и используется данная схема.

#### Задание

С помощью подсистем PPP и FP провести исследования влияния коэффициента передачи системы на следующие показатели качества переходных процессов:

- перерегулирование и время регулирования;
- запасы устойчивости по амплитуде и фазе, частоту среза;
- частотный показатель колебательности и резонансную частоту системы.

мы.

Заполнить следующую таблицу:

k	$\sigma$ , %	$t_p$ , сек	$\Delta A$	$\Delta\varphi$ , град	$\omega_{cp}$ , рад/сек	M	$\omega_p$ , рад/сек
	Макс. быстрый астатический процесс						
	20						
	40						
	60						

Для определения запаса устойчивости по амплитуде необходимо, изменяя частоту колебаний, вывести систему в режим  $\Delta\varphi = -180$  град.

Для определения запаса устойчивости по фазе и частоты среза необходимо, изменяя частоту колебаний, вывести систему в режим  $A = 1$ .

Для определения частотного показателя колебательности и резонансной частоты следует исследовать модель замкнутой системы. Изменяя частоту, необходимо найти такое ее значение, чтобы амплитуда выходных колебаний была максимальной.

### Исходные данные

1) структурная схема системы и передаточные функции ее элементов, полученные на практическом занятии №11;

2) подсистемы PPP и FP, предоставляемые преподавателем.

### Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №11;

2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по заданию, изложенному выше.

### Контрольные вопросы:

1. Дать определение понятию «перерегулирование».
2. Дать определение понятию «время регулирования».
3. Дать определение понятию «запас устойчивости по фазе».
4. Дать определение понятию «запас устойчивости по амплитуде».
5. Дать определение понятию «частота среза».
6. Дать определение понятию «резонансная частота».
7. Дать определение понятию «частотный показатель колебательности».
8. Какова качественная связь между частотным показателем колебательности M и перерегулированием в системе?
9. Какой характер имеет переходная характеристика в случаях, когда  $M = 0$ ,  $M \rightarrow \infty$ ?
10. Какие минимальные значения запасов устойчивости по фазе и амплитуде считаются удовлетворительными?

## ***Лабораторная работа №7. Исследование моделей, заданных эталонными передаточными функциями***

### **Цель работы:**

- 1) изучение временных и частотных характеристик систем с эталонными передаточными функциями;
- 2) экспериментальная проверка результатов выполнения самостоятельной работы по теме практических работ №№13,14.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения к выполнению работы в основном приведены в указаниях к выполнению практических работ №№13,14. Недостающие сведения будут изложены в задании.

### **Задание**

1. Получить передаточные функции низкочастотных фильтров 2– 4 порядков с распределением полюсов:

- по Баттерворту;
- биномиальным;
- полученным методом стандартных коэффициентов.

Величину  $\omega_0$  взять из задания к выполнению практических работ №№14,15.

2. Построить переходные характеристики по всем передаточным функциям, используя функцию «step» Matlab. Характеристики сгруппировать по порядку передаточных функций: на одном графике привести характеристики систем второго порядка, на втором – третьего, на третьем – четвертого. Сравнить динамические характеристики систем с точки зрения показателей качества переходных процессов.

3. Построить ЛАЧХ всех фильтров, используя функцию «bode» Matlab.

Сравнить частотные характеристики по степени их приближения к частотным характеристикам идеального низкочастотного фильтра. При этом привести сравнение как систем одного порядка с различными распределениями полюсов, так и систем разных порядков с одним и тем же распределением полюсов.

4. Получить передаточную функцию замкнутой системы с регулятором, рассчитанным методом динамической компенсации в результате выполнения самостоятельной работы по теме практической работе №13 (функции Matlab «tf» и «feedback»). Получить «минимальную реализацию» этой передаточной функции (с использованием функции «minreal»). Сравнить результат с заданием к практической работе №13.

5. Получить передаточную функцию замкнутой системы с регулятором, рассчитанным с помощью уравнений синтеза. Сравнить его характеристический полином с заданным в практической работе №13. Построить переходную характеристику и ЛАЧХ системы. Выявить влияние числителя передаточной функции, сравнив полученные характеристики с характеристиками системы «без числителя» (пункты задания 2,4).

6. Ввести матрицы описания в пространстве состояний системы, синтезированной в ходе выполнения практической работы № 14 (функция «ss»). По данному описанию получить передаточную функцию системы и сравнить ее с заданной.

#### **Исходные данные**

1) передаточная функция объекта регулирования, требования к эталонной передаточной функции системы, полученные на практических занятиях №13,14;

2) передаточные функции регуляторов, полученные в результате выполнения задания по темам практических занятий №13,14.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) результаты выполнения самостоятельных заданий по темам практических занятий №№13,14;

2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по заданию, изложенному выше.

#### **Контрольные вопросы:**

1. Почему «хорошая» замкнутая система должна по своим свойствам приближаться к идеальному низкочастотному фильтру?

2. Покажите АЧХ идеального низкочастотного фильтра.

3. Какое распределение полюсов замкнутой системы обеспечивает наилучшее приближение свойств системы к свойствам идеального низкочастотного фильтра?

4. Приведите общий вид передаточной функции, используемой в качестве эталона при синтезе систем (выраженной через среднегеометрический корень  $\omega_0$ ).

5. Приведите общий вид передаточной функции низкочастотного фильтра с биномиальным распределением полюсов.

6. Как расположены на комплексной плоскости полюса систем, распределенные по Баттерворту?

7. Как изменяется быстродействие системы при увеличении среднегеометрического корня  $\omega_0$ , если остальные параметры передаточной функции остаются неизменными?

8. Приведите выражение для передаточной функции регулятора согласно методу динамической компенсации.

9. Приведите структуру регулятора (общий вид его передаточной функции), рассчитываемого с помощью уравнений синтеза.

10. Какова цель расчета регулятора с помощью уравнений синтеза?

11. Какова цель расчета регулятора в виде обратных связей по переменным состояниям объекта?

## *Лабораторная работа №8. Моделирование системы с последовательным корректирующим устройством*

### **Цель работы:**

«Экспериментальная» проверка результатов расчета последовательного корректирующего устройства, проведенного в рамках выполнения практической работы №16.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 5.3. [«Расчет корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик»](#). В результате выполнения практической работы №16 получена передаточная функция последовательного корректирующего устройства.

### **Задание**

1. Получить передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем автоматического регулирования с последовательным корректирующим устройством без учета балластного звена, входящего в его структуру, определенным в результате выполнения практического задания №16 (применяемые функции Matlab: tf, feedback).

2. Получить «минимальную реализацию» передаточной функции разомкнутой системы с помощью функции minreal (производящей необходимые сокращения полиномов числителя и знаменателя). Сравнить полученную передаточную функцию с эталонной передаточной функцией разомкнутой системы.

3. Построить переходную характеристику замкнутой системы (используя функцию Matlab step) и определить показатели качества переходного процесса: время регулирования и перерегулирование. Сравнить полученные показатели с заданными в практическом задании №16.

4. Построить Simulink-модель системы с учетом балластного звена, входящего в состав передаточной функции корректирующего устройства.

С помощью модели найти максимальное значение постоянной времени балластного звена, при котором показатели качества переходного процесса удовлетворяют заданию (использовать в качестве генератора входного сигнала блок «Step»).

Подать на вход модели линейно возрастающий со скоростью 1 ед/сек сигнал (использовать в качестве генератора входного сигнала блок «Ramp»). Получить график зависимости ошибки регулирования от времени. Определить установившееся значение ошибки и сравнить его с заданным.

### **Исходные данные**

1) передаточная функция объекта регулирования, требования к показателям качества системы, полученные на практическом занятии №16;

2) передаточная функция корректирующего устройства, полученная в результате выполнения задания по теме практического занятия №16.

## **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №16;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по заданию, изложенному выше.

### **Контрольные вопросы:**

1. Свойства каких линейных систем целиком и полностью определяются их ЛАЧХ?
2. Приведите в асимптотическом виде ЛАЧХ интегрирующего, апериодического и форсирующего первого порядка звеньев.
3. Как определяется ЛАЧХ последовательного соединения звеньев?
4. Какими показателями качества проектируемой системы определяются требования к низкочастотной асимптоте ее ЛАЧХ?
5. Какими показателями качества проектируемой системы определяются требования к среднечастотной части ее ЛАЧХ?
6. Какова зависимость между временем регулирования и частотой среза?
7. Какой наклон должна иметь асимптота ЛАЧХ разомкнутой системы, проходящая через частоту среза и какой должна быть «длина» этой асимптоты, чтобы система обладала приемлемыми показателями качества переходных процессов?
8. Из каких соображений строится низкочастотная асимптота желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы?
9. Из каких соображений строится высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы?
10. Каково условие физической реализуемости корректирующего устройства?

## ***Лабораторная работа № 9. Моделирование комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования***

### **Цель работы:**

«Экспериментальная» проверка результатов расчетов комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования, проведенных в рамках выполнения практических работ №17,18.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующих разделах руководства к практическим работам №17,18.

В результате выполнения практической работы №17 получены передаточные функции регулятора и компенсирующего устройства для комбинированной системы



В результате выполнения практической работы №18 получены передаточные функции регуляторов и компенсирующих устройств для автономной системы двусвязного регулирования.

#### **Задание**

1. Построить Simulink-модели систем регулирования без компенсации возмущения и с компенсацией возмущения.

2. Провести сравнительную оценку качества регулирования в рассматриваемых системах.

3. Построить Simulink-модели системы несвязного управления и автономной системы.

4. Провести сравнительную оценку качества регулирования в рассматриваемых системах.

#### **Исходные данные**

1) передаточные функции объекта по каналам регулирования и возмущения, полученные на практическом занятии №17;

2) передаточные функции регулятора и компенсирующего устройства, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №17;

3) передаточные функции двусвязного объекта по четырем каналам, полученные на практическом занятии №18;

4) передаточные функции регуляторов и компенсирующих устройств, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №18.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1. Результаты выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №17, в том числе

– передаточные функции ТОО по каналам возмущения и управления (регулирования);

– структурную схему комбинированной АСР;

– расчётные формулы и результаты расчёта настроек регулятора и компенсатора;

– графики амплитудно-фазовых характеристик идеального и реального компенсаторов в частотном диапазоне  $(0, \infty)$ .

2. Результаты моделирования комбинированной системы

– графики переходных процессов в одноконтурной и в комбинированной системах управления;

– выводы по качеству управления в одноконтурной и в комбинированной системах управления с представлением значений: степени затухания  $\psi$ , величины перерегулирования  $\sigma$ , времени регулирования  $t_{\delta}$ .

3. Результаты выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №18, в том числе

– передаточные функции прямых и перекрестных каналов объекта;

– структурные схемы несвязанной и автономной АСР;

- результаты расчета настроек регуляторов и компенсаторов;
- графики частотных характеристик идеальных и реальных компенсаторов.

#### 4. Результаты моделирования автономной системы

- графики переходных процессов в системе несвязного регулирования и в автономной системе управления;
- выводы по качеству управления в системе несвязного регулирования и в автономной системе управления с представлением значений: степени затухания  $\psi$ , величины перерегулирования  $\sigma$ , времени регулирования  $t_{\delta}$ .

#### **Контрольные вопросы:**

1. Как изображаются структурные схемы комбинированных АСР двух типов?
2. Как формулируется условие абсолютной инвариантности для случая, когда  $y_0(t) = 0$ ?
3. В чём заключаются условия физической реализуемости инвариантных АСР?
4. В каких случаях для реального физического объекта компенсатор оказывается физически нереализуемым звеном?
5. Сформулируйте принцип и условие автономности для системы регулирования четырехканального объекта с двумя входами и двумя выходами.
6. Сформулируйте условия физической реализуемости автономной АСР.
7. Приведите примеры передаточных функций четырехканального объекта, когда применение «перекрестного» регулирования позволит получить физически реализуемую автономную АСР.
8. При каких условиях автономная АСР окажется физически нереализуемой при любом выборе каналов регулирования?
9. Изобразите структурную схему системы несвязного регулирования.
10. Изобразите структурную схему автономной АСР.
11. Сформулируйте условия выбора системы несвязного регулирования и автономной АСР в зависимости от величины коэффициента взаимной связи.

### ***Лабораторная работа № 10. Моделирование линейной импульсной системы автоматического регулирования***

#### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования и расчета импульсных систем;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №19.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующем разделе указаний к выполнению практической работы №19. В результате ее

выполнения получена передаточная системы в форме z-преобразования и разностное уравнение, связывающее вход и выход системы. Проведем дальнейшие исследования, программа которых и будет положена в основу выполнения данной лабораторной работы.

Конечная цель исследований – выяснить, как цифровая реализация будет влиять на качество переходной характеристики системы. Поэтому построим переходную характеристику «идеальной» системы. Ее передаточная функция

$$W(p) = \frac{k_{\delta} W_o(p)}{1 + k_{\delta} W_o(p)}. \quad (1)$$

В нашем случае имеем  $W_o(p) = \frac{2}{2p^2 + 3p + 1}$ ,  $k_p = 1$ . Подставив  $W_o(p)$  и

$k_p$  в (1), получим

$$W(p) = \frac{2}{2p^2 + 3p + 3}. \quad (2)$$

С помощью следующего кода Matlab построим переходную характеристику системы (рис.1):

```
W = tf(2,[2 3 3]);
step(W)
```

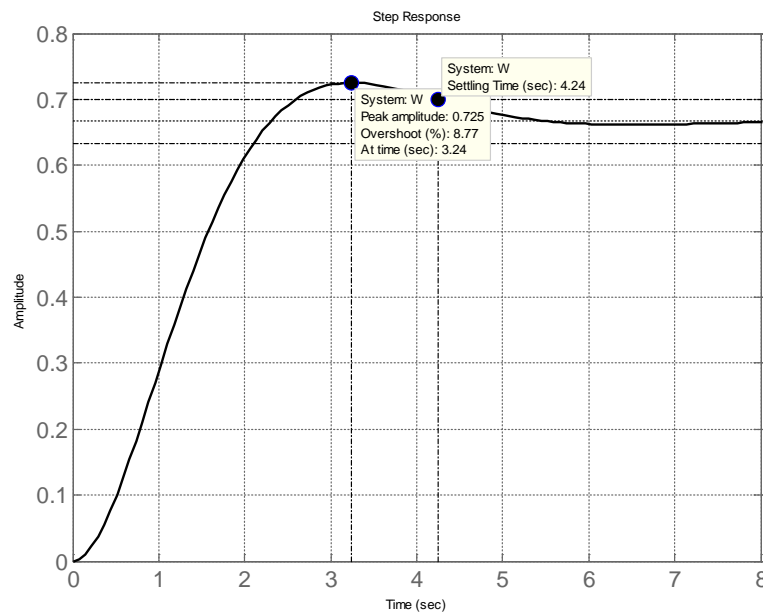


Рис. 1. Переходная характеристика «идеальной» системы  
Далее в Simulink построим модель импульсной системы (рис. 2).

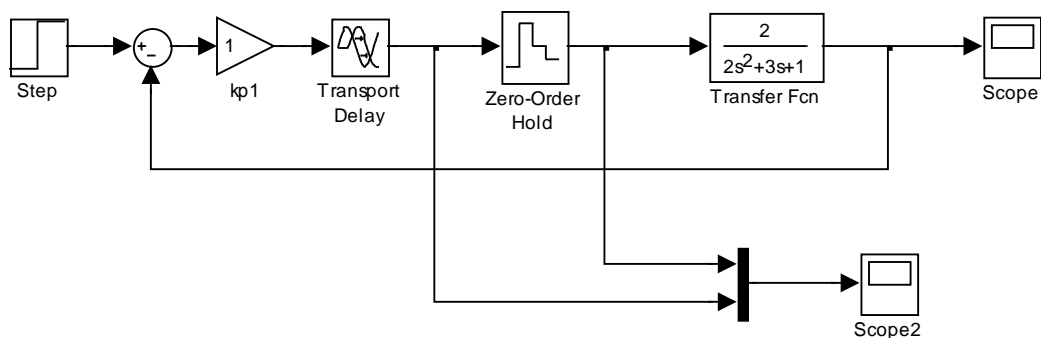


Рис.2. Модель импульсной системы в Simulink

Модель включает передаточную функцию объекта и все элементы цифрового регулятора (см. указания к практической работе №19): масштабный коэффициент, транспортное запаздывание (на один такт контроллера), равное 1 сек., преобразователь первого порядка, имитирующий работу ЦАП. Результаты моделирования приведены на рис. 3,4.

На рис. 3 показана переходная характеристика системы. Сравнив ее с переходной характеристикой «идеальной» системы, видим значительное ухудшение динамических свойств системы. Очевидно, это обусловлено слишком большим временем цикла контроллера.

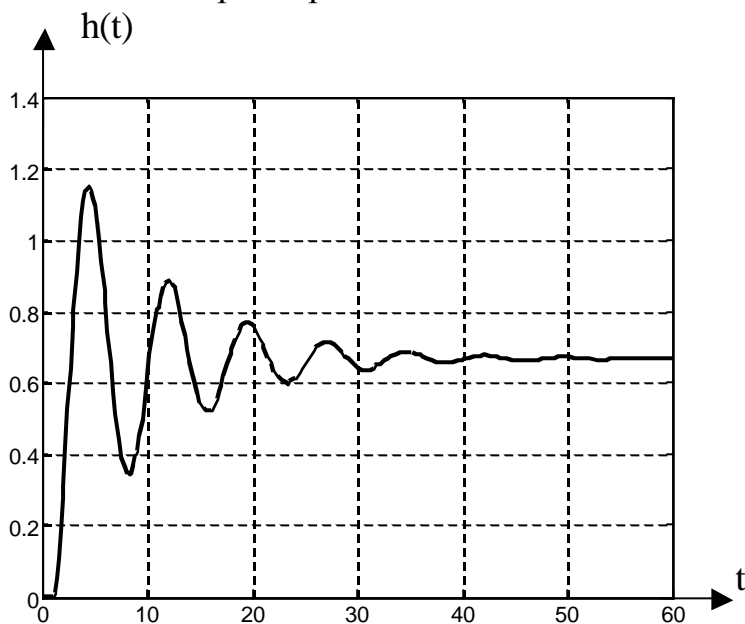


Рис.3. Переходная характеристика системы по результатам моделирования

На рис. 4 показан процесс формирования управляющего сигнала, «снятый» при помощи блока Scope2, демонстрирующий принцип работы преобразователя первого порядка.

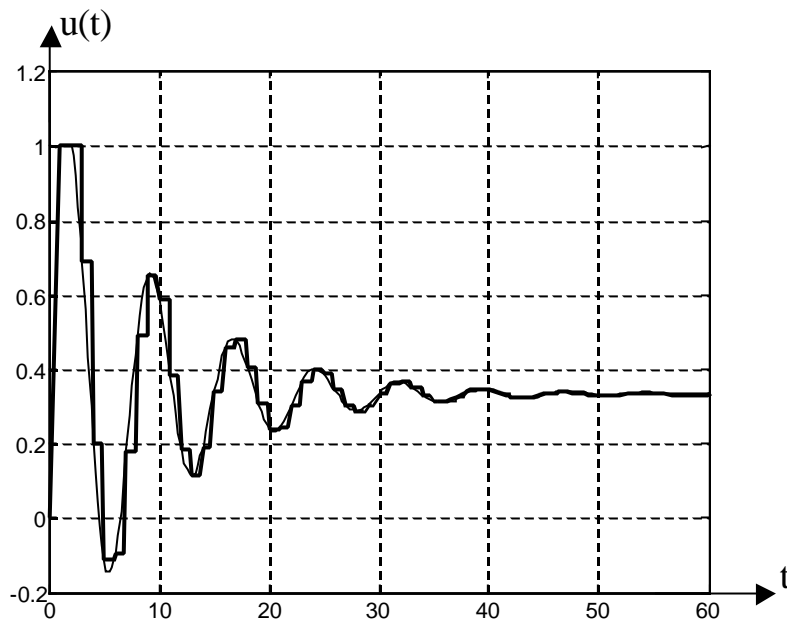


Рис. 4. Процесс формирования управляющего сигнала

Далее проверим правильность полученных на практическом занятии №19 передаточной функции системы в форме  $z$ -преобразования и разностного уравнения системы.

Построим переходную характеристику дискретной системы двумя способами:

1) по передаточной функции (рис. 5):

```
Wz = tf([.3096 .1878],[1 -.9744 .5328 .1878],1);
step(Wz)
```

2) решая разностное уравнение (рис. 6)

```
t = -3:60;
yzad = [0 0 0, ones(1,61)]; % единичное ст. возд.
y = zeros(size(yzad));
for i=4:64
    y(i) = .3096*yzad(i-2) + .1878*yzad(i-3) + ...
           .9744*y(i-1) - .5328*y(i-2) - .1878*y(i-3);
end
plot(t,y), grid
```

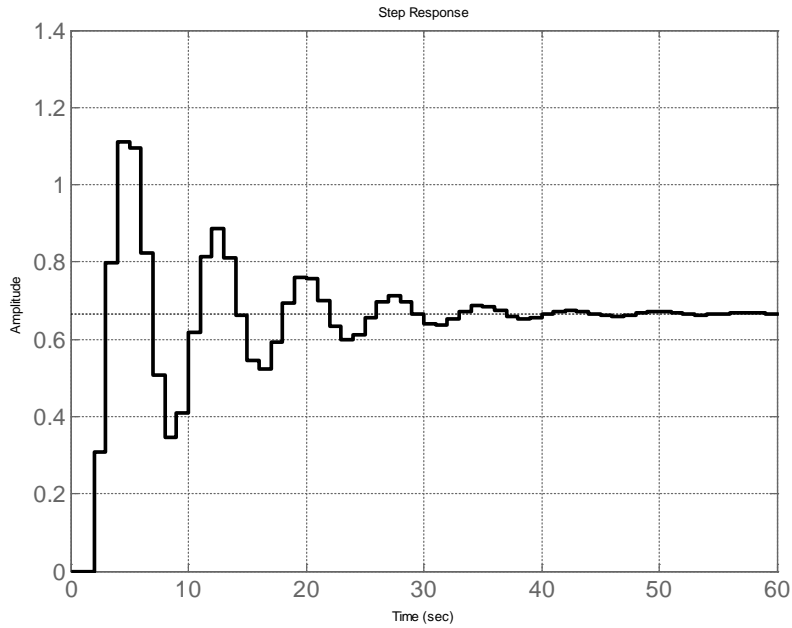


Рис. 5. Переходная характеристика дискретной системы, построенная по передаточной функции

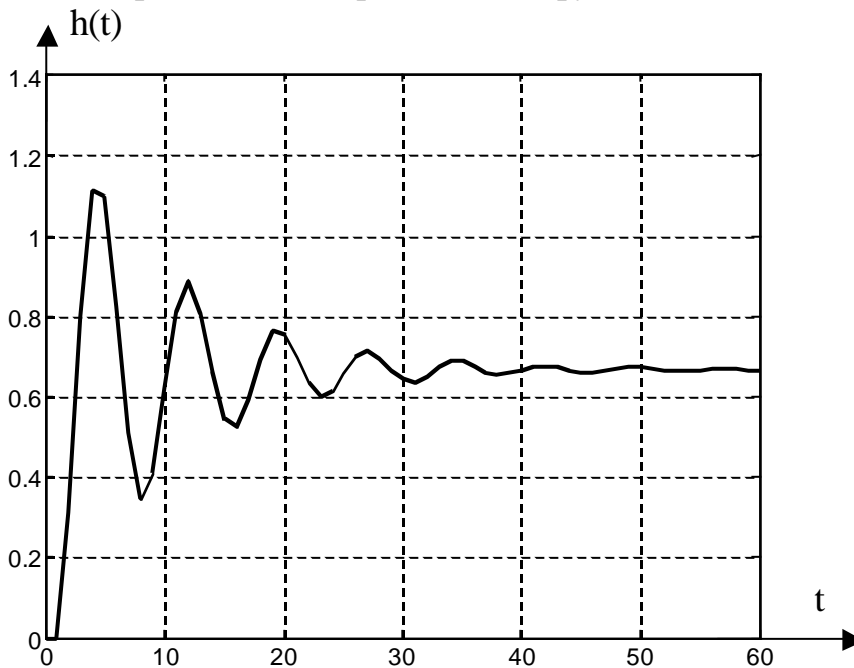


Рис. 6. Переходная характеристика дискретной системы, построенная решением разностного уравнения

Сравнив, переходные характеристики, приведенные на рис. 3,5 и 6, приходим к выводу, что они совпадают во всех расчетных точках (следующих с интервалом в 1 сек.). Это хорошо видно на фрагменте их совмещения (рис. 7).

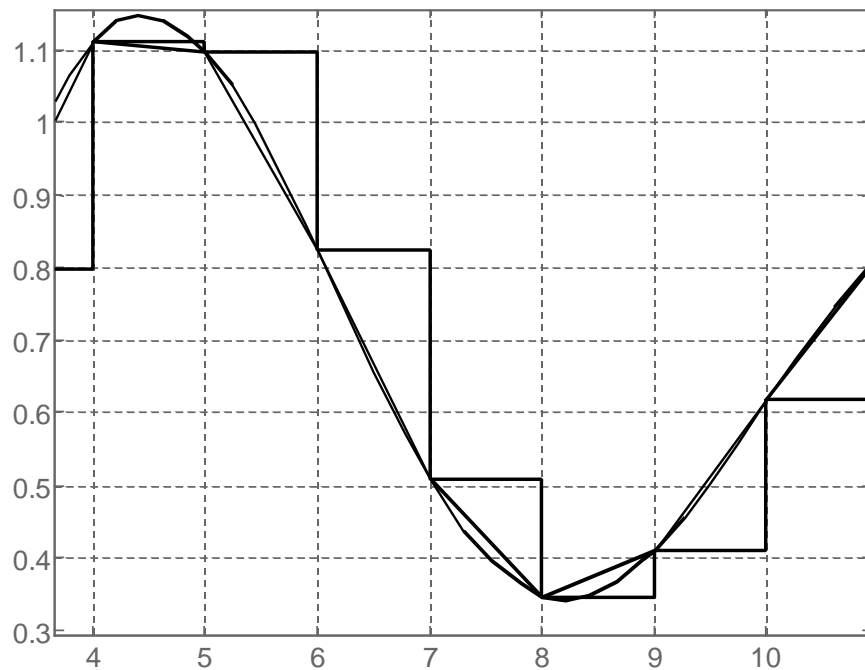


Рис. 7. Фрагмент совмещения характеристик, приведенных на рис. 3,5 и 6

Таким образом, правильность полученных на практическом занятии №19 моделей подтверждена моделированием.

#### **Задание**

Провести исследование систем и моделей, полученных в результате выполнения задания по теме практического занятия №19 по программе, изложенной выше.

#### **Исходные данные**

- 1) передаточная функция объекта регулирования, коэффициент регулятора и время цикла контроллера, полученные на практическом занятии №19;
- 2) передаточная функция системы в форме z-преобразования и разностное уравнение системы, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №19.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №19;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше.

#### **Контрольные вопросы:**

1. Дать определение импульсной системе автоматического регулирования.
2. Дать определение цифровой системы автоматического регулирования.
3. Какую функцию выполняет идеальный импульсный элемент?
4. Какую функцию выполняет формирующий элемент?
5. Опишите принцип работы преобразователя первого порядка.

6. Какое реальное устройство выполняет функцию преобразователя первого порядка?

7. Как в модели цифровой системы учитывается задержка реализации управляющего воздействия относительно момента измерения входных величин на один такт контроллера?

8. От каких факторов зависит результат дискретизации непрерывной модели?

9. Как, зная «непрерывную» передаточную функцию системы получить ее «дискретную» передаточную функцию (в форме z-преобразования), если на входе системы действует модулированная последовательность дельта-функций?

10.  $y(z)$  – изображение сигнала  $y(t)$ . Чему равен оригинал изображения  $z^{-1}y(z)$ , если  $T_c = 0,5$  сек.?

### **Лабораторная работа № 11. Моделирование линеаризованных «в малом» систем**

#### **Цель работы:**

– получение навыков имитационного моделирования нелинейных систем;

– «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №20.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. [6.1. «Математическое описание и устойчивость нелинейных САУ»](#)

В лабораторной работе создаются и исследуются имитационные модели линеаризованных систем, полученные в результате выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №20. Ниже приведем продолжение исследований по примерам из практической работы №20.

Пример 1.

Достигнутые при выполнении задания результаты:

математическое описание исходной (нелинейной) системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \sqrt{x_1}; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad (1)$$

уравнения первого приближения в точке  $u = 1, x_{10} = x_{20} = 1$ :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 + 0,5 \Delta x_1; \\ \Delta \dot{x}_2 = -\Delta x_1 + \Delta u, \end{cases} \quad (2)$$

статический режим при  $u=1$  устойчив «в малом».

Построим Simulink-модели исходной и линеаризованной систем (рис.1).



Настройка параметров блоков моделей показана на рис.2,3 для следующих отклонений координат систем от статического режима:  $x_{10} = 1,5$  ( $\Delta x_{10} = 0,5$ ),  $x_{20} = 0,5$  ( $\Delta x_{20} = -0,5$ ).

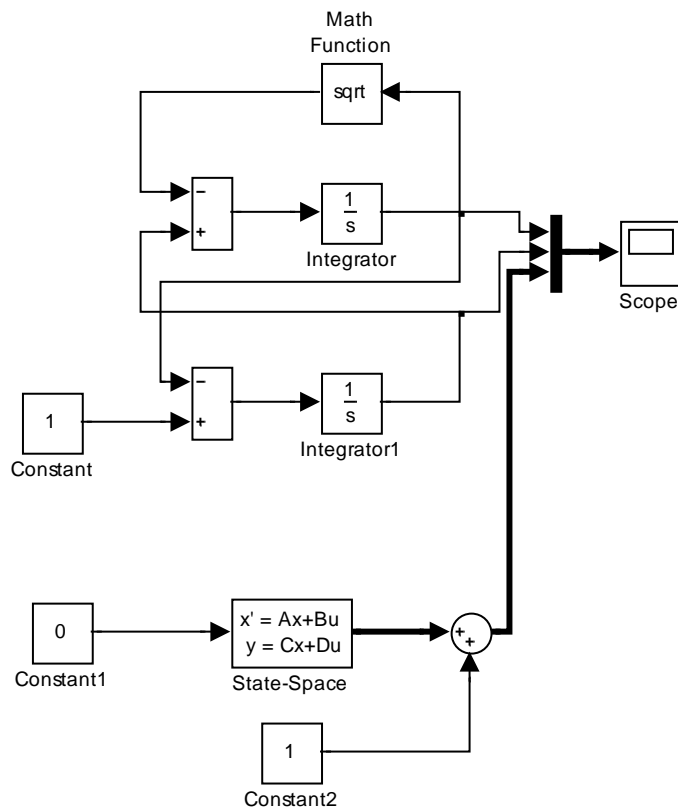


Рис. 1. Simulink-модели исходной и линеаризированной систем

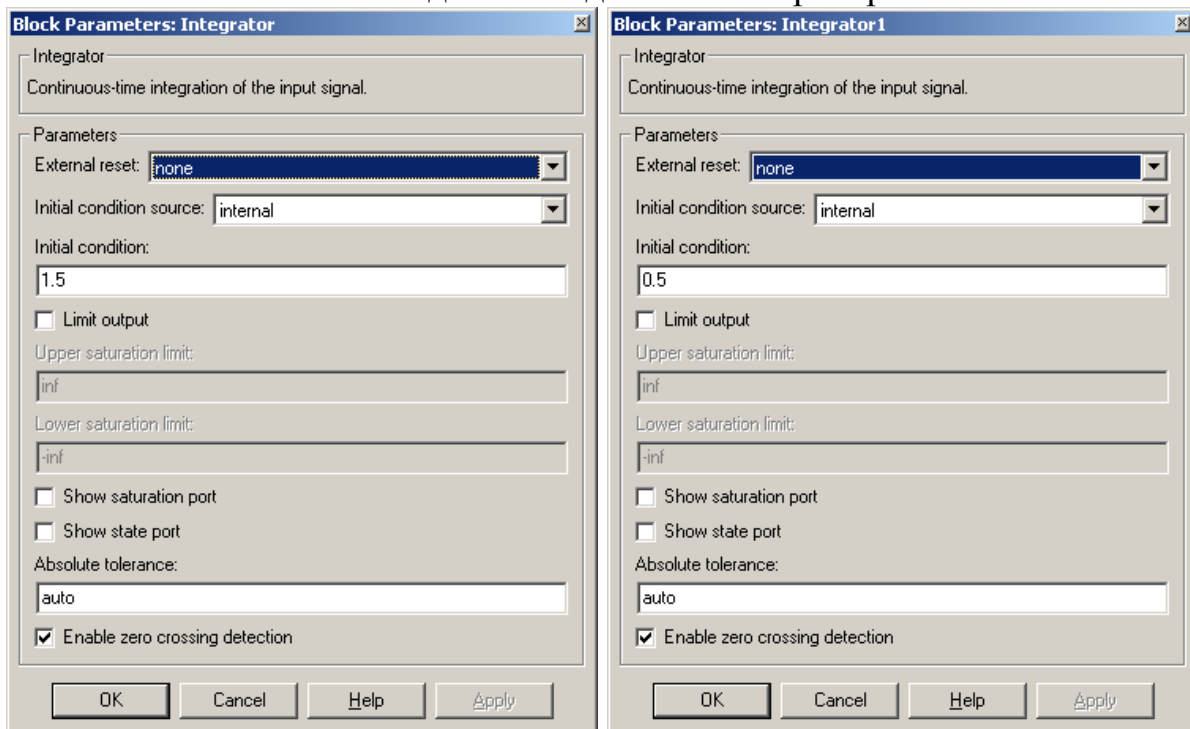


Рис. 2. Настройка блоков Integrator и Integrator1

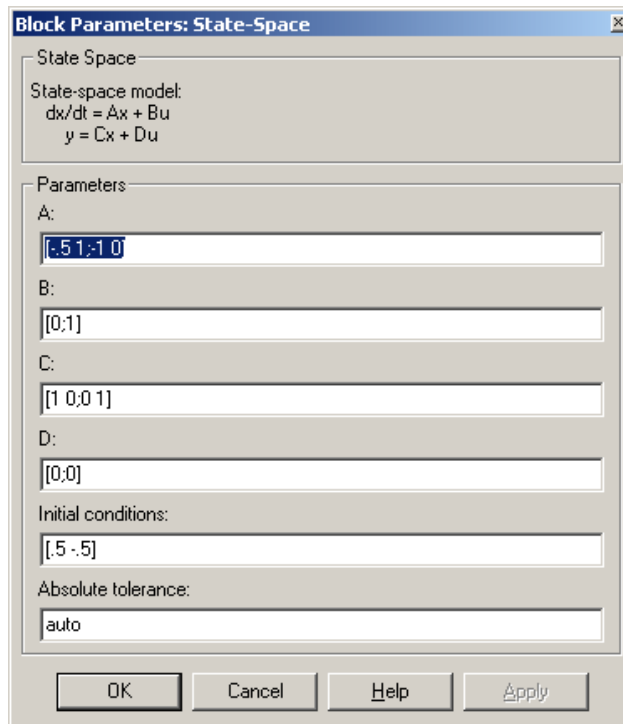


Рис.3. Настройка блока State-Space

Выходы линейной модели в отклонениях  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  (блока State-Space) искусственно смещены на единицу для совмещения графиков  $\Delta x_1(t)$ ,  $\Delta x_2(t)$  с графиками  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .

Результаты расчета имитационной модели приведены на рис. 4.

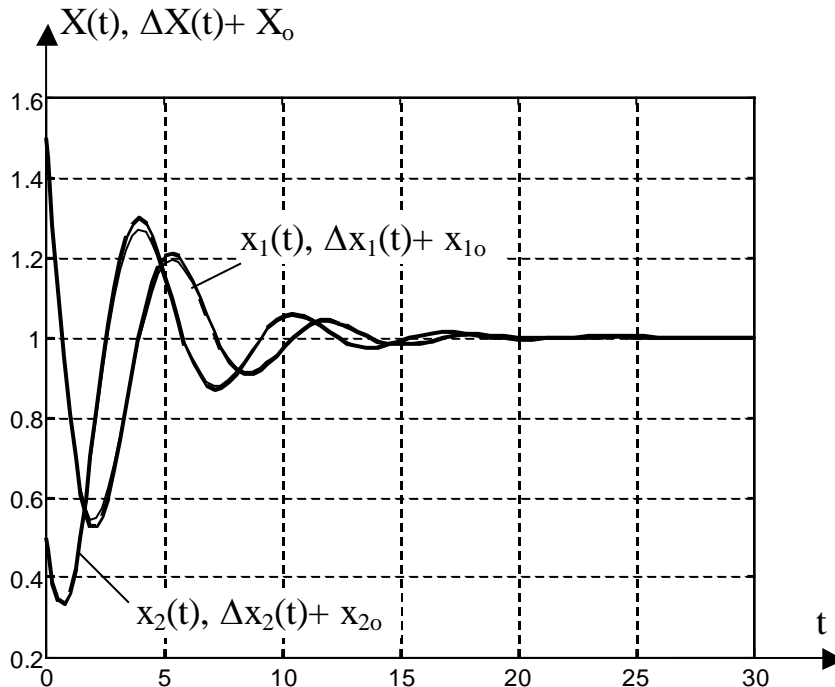


Рис.4. Результаты расчета моделей

Результаты расчета подтверждают как правильность результатов линеаризации, так и правильность вывода об устойчивости нелинейной системы «в малом».

Увеличивая начальные отклонения координат системы, наблюдаем все большее расхождение между поведением нелинейной системы и поведением линеаризованной системы. Так, при  $x_{1o} = 2$  ( $\Delta x_{1o} = 1$ ),  $x_{2o} = 0$  ( $\Delta x_{2o} = -1$ ) разница между соответствующими графиками уже достаточно заметна.

Пример 2.

Достигнутые при выполнении задания результаты:  
дифференциальное уравнение исходной системы:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2y \frac{dy}{dt} + y^2 = u, \quad (3)$$

линейное дифференциальное уравнение в отклонениях от статического режима при  $u = 1$  ( $y = 1$ ):

$$\frac{d^2 \Delta y}{dt^2} + 2 \frac{d\Delta y}{dt} + 2\Delta y = \Delta u, \quad (4)$$

статический режим при  $u=1$  устойчив «в малом».

Для исследования нелинейной и линейной систем построим их модели в пространстве состояний, приняв  $x_1 = y$ ,  $x_2 = dy/dt$ ,  $\Delta x_1 = \Delta y$ ,  $\Delta x_2 = d\Delta y/dt$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u - 2x_1 x_2 - x_1^2, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2; \\ \Delta \dot{x}_2 = \Delta u - 2\Delta x_1 - 2\Delta x_2. \end{cases} \quad (6)$$

По уравнениям (5) и (6) построим Simulink-модели (рис. 5).

Изменяя начальные условия интеграторов, наблюдаем отклонение поведения линеаризованной модели от поведения исходной нелинейной.

На рис.6,7 показана настройка параметров блоков моделей для следующих отклонений координат систем от статического режима:  $y = x_{1o} = 1,5$  ( $\Delta y = \Delta x_{1o} = 0,5$ ),  $(dy/dt)_o = x_{2o} = 0,5$  ( $(d\Delta y/dt)_o = \Delta x_{2o} = -0,5$ ).

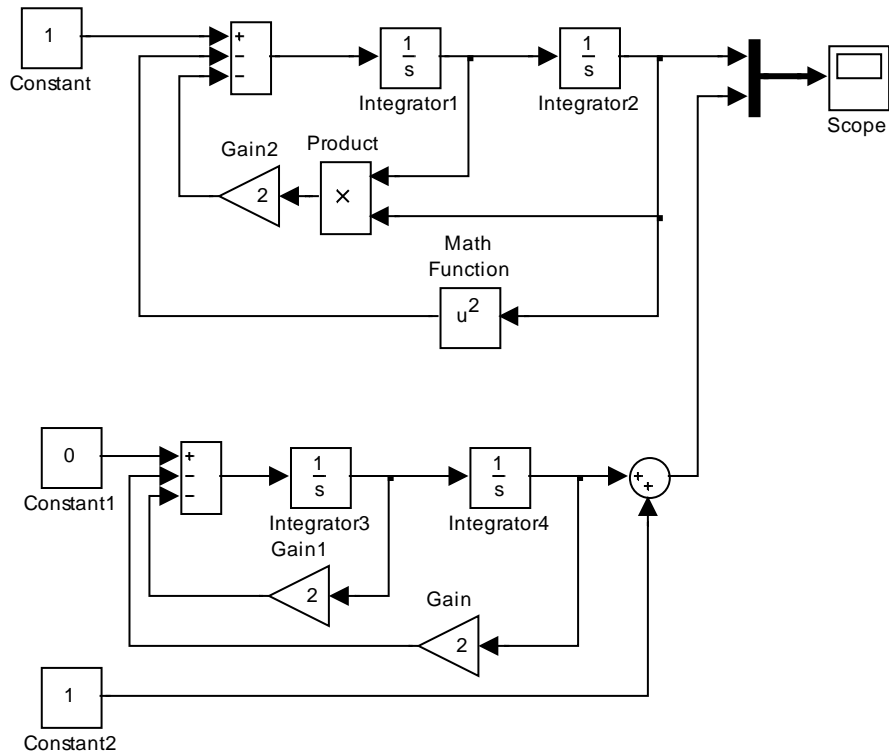


Рис. 5. Simulink-модели исходной и линеаризованной систем

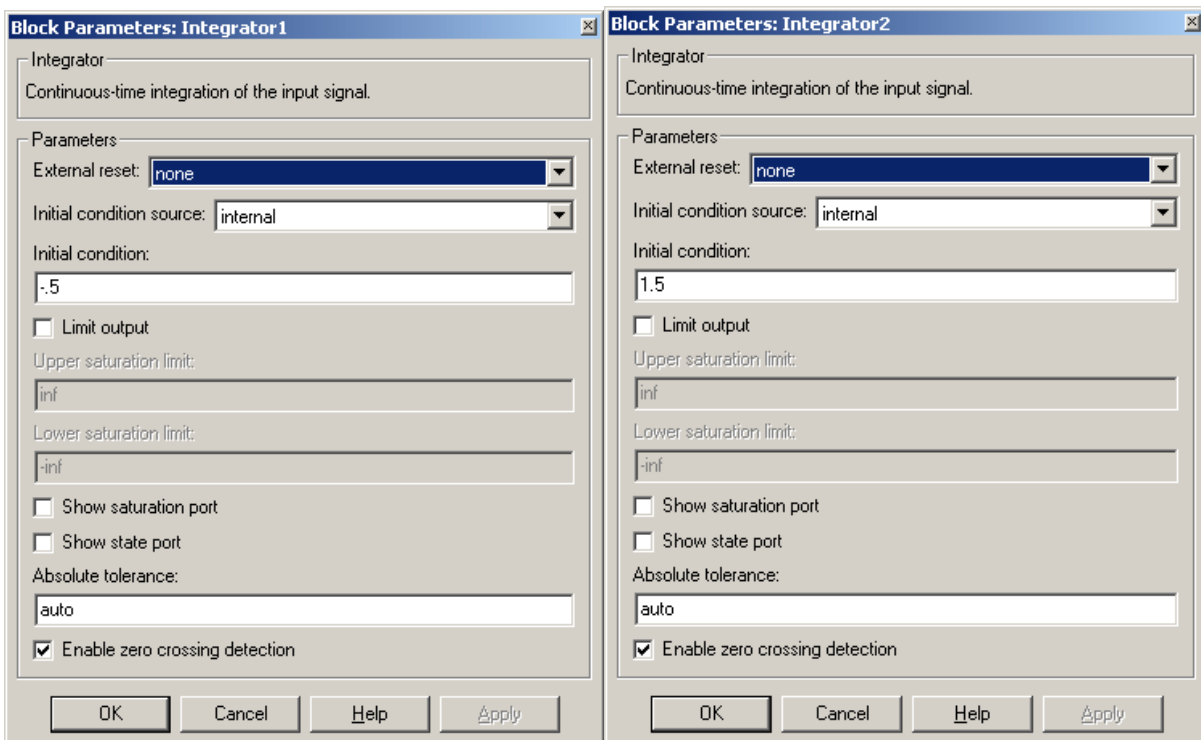


Рис. 6. Настройка блоков Integrator1 и Integrator2

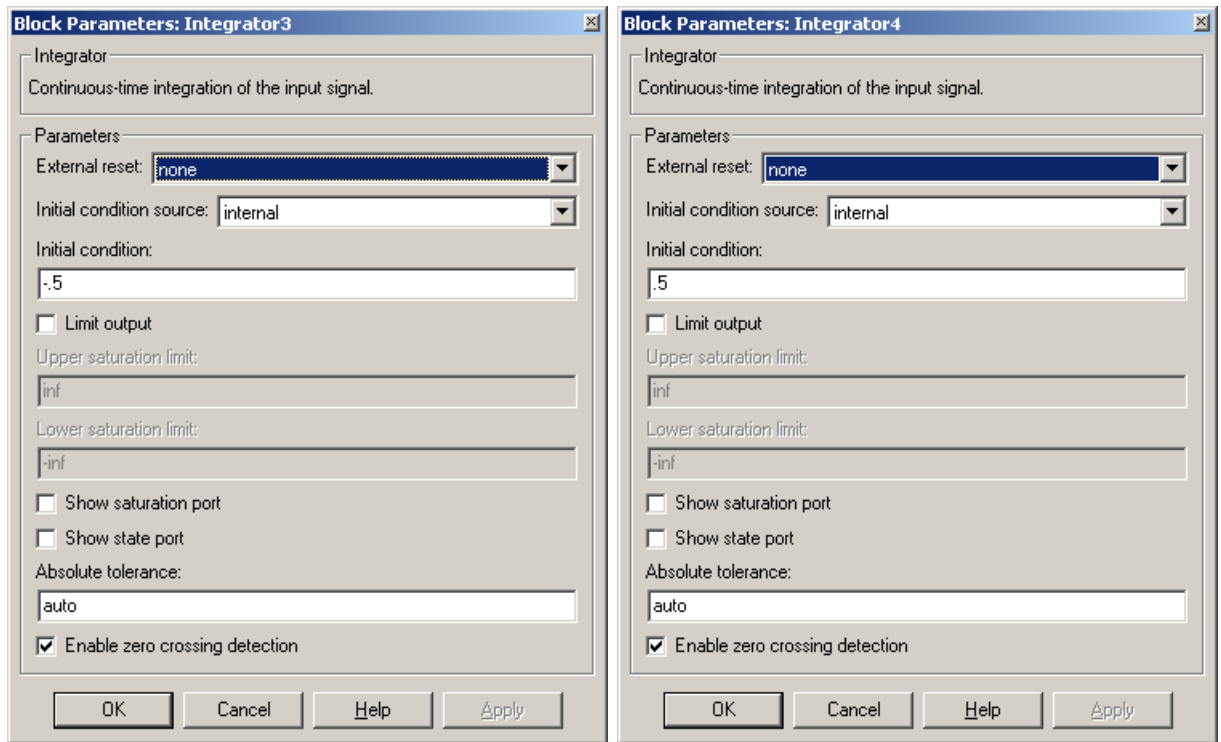


Рис. 7. Настройка блоков Integrator3 и Integrator4  
 Результаты расчета имитационной модели приведены на рис. 8.

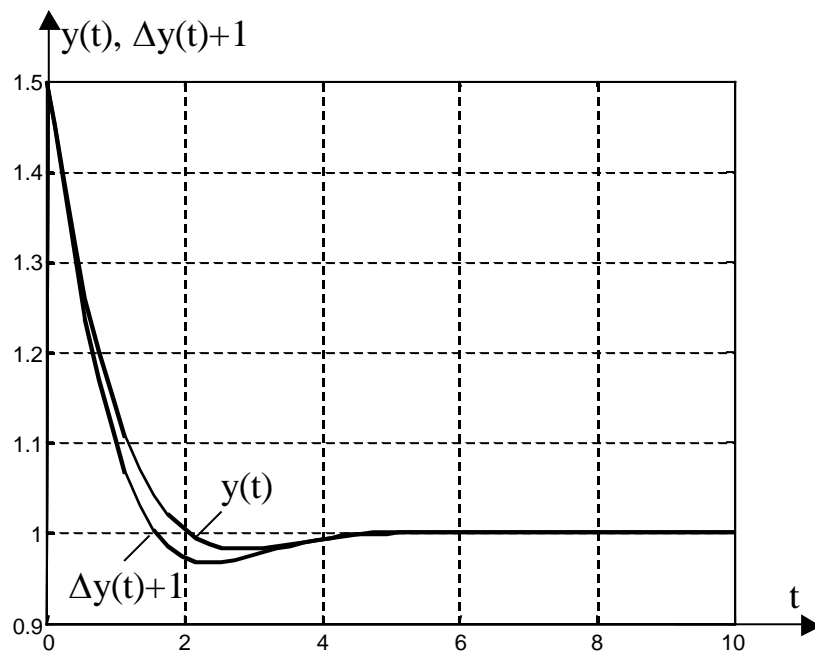


Рис.4. Результаты расчета моделей

Результаты показывают заметное расхождение между поведением линеаризованной системы и поведением исходной при данных отклонениях. Уменьшая отклонения, наблюдаем снижение расхождения, что подтверждает правильность сделанных ранее построений и выводов.

### **Задание**

Провести исследование систем и моделей, полученных в результате выполнения задания по теме практического занятия №20 по программе, изложенной выше.

### **Исходные данные**

- 1) описания нелинейных систем в пространстве состояний и в виде дифференциального уравнения, полученные на практическом занятии №20;
- 2) описания линеаризованных систем, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №20.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №20;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше. В отчете обязательно должно быть отражено влияние начальных отклонений на поведение линеаризованной модели (графики для «малых» и «больших» отклонений).

### **Контрольные вопросы:**

1. Для какого класса нелинейностей допустима линеаризация «в малом»?
2. Сформулируйте положение первого метода Ляпунова.
3. Что можно сказать об устойчивости «в малом» нелинейной системы, если линеаризованная система находится на границе устойчивости?
4. Как влияет величина начальных отклонений на «адекватность» линеаризованной модели?
5. Для исследования какого типа систем автоматического регулирования допустимо использовать линеаризованные модели?

## ***Лабораторная работа № 12. Построение фазовых портретов с помощью имитационного моделирования***

### **Цель работы:**

- получение навыков построения фазовых портретов с помощью имитационного моделирования;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №21.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующем разделе указаний к выполнению практической работы №21. В результате ее выполнения рассчитан фазовый портрет релейной системы.

### **Задание**

1. Построить Simulink-модель системы, рассчитанной в ходе выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №21. В модель включить блок XY Graph для построения фазовых портретов. Построив фа-

зовый портрет для заданных параметров системы, «экспериментально» проверить правильность расчетов.

2. С помощью модели построить фазовые портреты и графики переходных процессов при следующих условиях:

2.1. нелинейный элемент – идеальное двухпозиционное реле;

2.2. нелинейный элемент – реальное двухпозиционное реле с зоной неоднозначности равной половине зоны нечувствительности, заданной на практическом занятии №21;

2.3. нелинейный элемент – реальное трехпозиционное реле с зоной неоднозначности равной половине зоны нечувствительности, заданной на практическом занятии №21.

Методика моделирования релейных элементов приведена в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в пункте [7.4.3. «Моделирование ограничений и релейных характеристик»](#).

Проанализировав полученные графики, установить соответствие между фазовыми портретами и графиками переходных процессов – на фазовых портретах отметить моменты времени в характерных точках (пересечение осей и линий переключения).

#### **Исходные данные**

Параметры передаточной функции и релейного элемента, полученные на практическом занятии №21.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №21;

2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы согласно заданию к лабораторной работе.

#### **Контрольные вопросы:**

1. Сущность метода фазовых траекторий.

2. Свойства фазовых траекторий.

3. Фазовый портрет системы.

4. Как влияют параметры нелинейного элемента на фазовые траектории?

5. Линии переключения.

6. Предельный цикл, устойчивый и неустойчивый.

### ***Лабораторная работа № 13. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.1***

#### **Цель работы:**

– получение навыков моделирования и расчета релейных систем;

– «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №23.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в пунктах [6.3 «Особенности динамики релейных систем»](#) и [6.4 «Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации»](#). Основой для выполнения данной работы являются результаты самостоятельной работы по теме практического задания №23.

### Пример

Проведем исследования на следующем примере:

– передаточная функция линейной части системы

$$W_{\dot{e}}(p) = \frac{2}{p^3 + p^2 + p}; \quad (1)$$

– статическая характеристика релейного элемента приведена на рис.1.

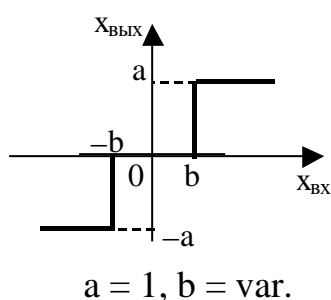


Рис. 1. Статическая характеристика релейного элемента

Конечная цель исследований – выяснить влияние зоны нечувствительности релейного элемента на амплитуду и частоту автоколебаний системы.

Коэффициенты гармонической линеаризации релейного элемента определяются следующим образом:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b, \quad k_2(A) = 0. \quad (2)$$

Обратная инверсная характеристика релейного элемента:

$$-\frac{1}{W_{\dot{y}}(j\omega, A)} = -\frac{1}{k_1(A)}. \quad (3)$$

Поскольку в нашем случае статическая характеристика реле однозначна и  $k_2(A)=0$ , точка пересечения АФЧХ линейной части и обратной инверсной характеристики лежит на отрицательной вещественной полуоси комплексной плоскости и, следовательно, частота колебаний не зависит от зоны нечувствительности и определяется только АФЧХ линейной части системы.

Построим АФЧХ линейной части

```
W = tf(2,[1 1 1 0]);
w = .5:.01:20;
[re,im] = nyquist(W,w); re = re(:); im = im(:);
figure (1), plot(re,im), grid
```



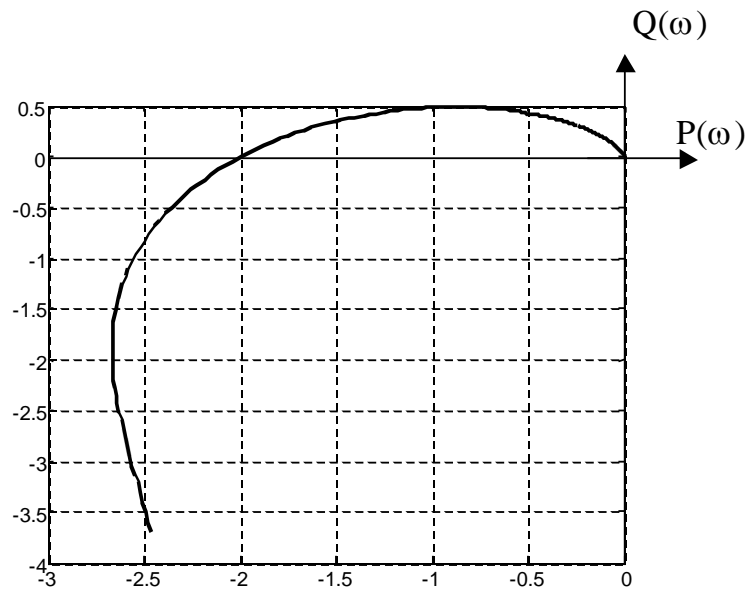


Рис.2. АФЧХ линейной части системы в диапазоне частот  $\omega = 0,5 \dots 20$

По графику определим координаты пересечения АФЧХ с отрицательной вещественной полуосью:  $\{-2, 0\}$ .

Частоту автоколебаний для всех значений зоны нечувствительности найдем из графика, построенного при помощи кода

```
figure (2)
plot(w,im), grid,
```

Увеличив масштаб графика в области  $Q(\omega) = 0$ , определим  $\omega = 1$  рад/сек.

Для определения влияния зоны нечувствительности реле на амплитуду колебаний, рассчитаем ряд обратных инверсных характеристик при различных значениях зоны нечувствительности и диапазонах изменения амплитуды:

- 1) для  $b = 0,1$  при  $A = 0,1 \dots 3$ ;
- 2) для  $b = 0,7$  при  $A = 0,7 \dots 3$ ;
- 3) для  $b = 1$  при  $A = 1 \dots 3$ .

Расчеты выполним с помощью кода:

```
hold on, grid on
b = .1
A = .1:.01:3;
k1 = 4/pi./A.*(sqrt(1-b^2./(A.^2)));
Wi = -1./k1;
plot(A,Wi),

b = .7
A = .7:.01:3;
k1 = 4/pi./A.*(sqrt(1-b^2./(A.^2)));
Wi = -1./k1;
plot(A,Wi),

b = 1
```

```

A = 1:.01:3;
k1 = 4/pi./A.*(sqrt(1-b^2./(A.^2)));
Wi = -1./k1;
plot(A,Wi),

hold off

```

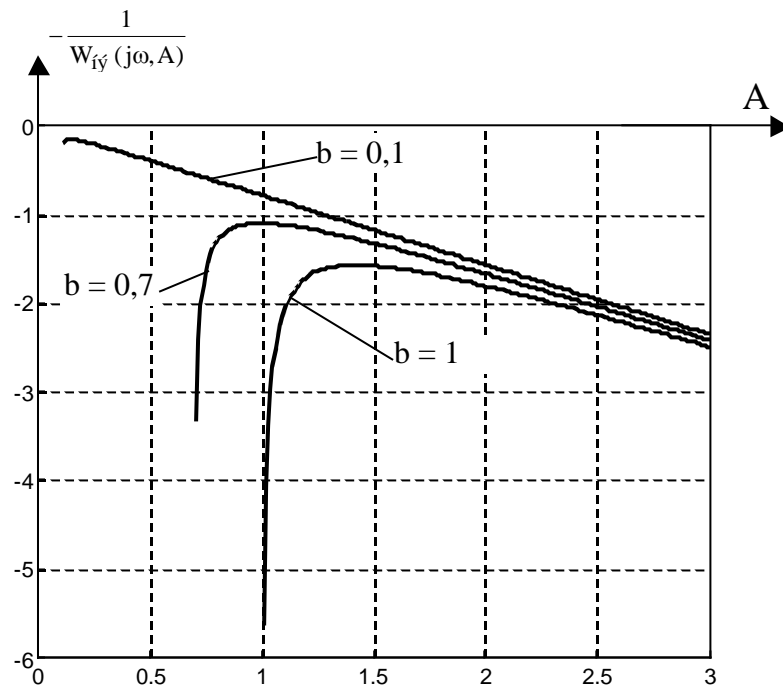


Рис. 3. Обратная инверсная характеристика релейного элемента

Увеличивая масштаб в окрестности  $-\frac{1}{W_{iy}(j\omega, A)} = -2$ , получим:

при  $b = 0,1$   $A = 2,545$ ;  
при  $b = 0,7$   $A = 2,44$ ;  
при  $b = 1$   $A = 2,291$ .

Таким образом, увеличение зоны нечувствительности приводит к снижению амплитуды колебаний при неизменной их частоте.

Проверим правильность расчетов при помощи имитационной модели (рис.4).

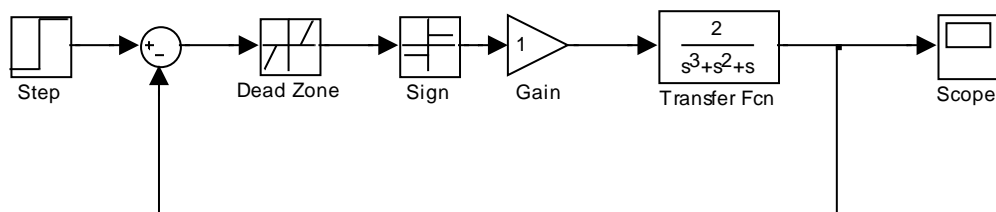


Рис.4. Имитационная модель системы

Релейный элемент в модели реализуется тремя блоками:

- 1) «Dead zone» (зона нечувствительности), в настройки входят значения  $b$  и  $-b$ ;
- 2) «Sign» (сигнум-реле) с возможными значениями на выходе 1, 0,  $-1$ ;
- 3) «Gain» (масштабный коэффициент) для задания уровня выходного сигнала реле, в нашем случае, равного единице.

В результате расчетов получены следующие значения амплитуд и частот колебаний:

при  $b = 0,1$   $A = 2,545$ ,  $\omega = 0,993$  рад/сек;

при  $b = 0,7$   $A = 2,451$ ,  $\omega = 0,997$  рад/сек;

при  $b = 1$   $A = 2,295$ ,  $\omega = 1,001$  рад/сек.

Сравнив полученные результаты с результатами расчетов по методу гармонической линеаризации, сделаем вывод об их достаточной близости, что подтверждает достоверность расчетов.

### **Задание**

Провести исследование релейной системы с однозначной статической характеристикой релейного элемента по программе, изложенной выше. Расчеты выполнить для трех значений зоны нечувствительности, среднее из которых, а также все остальные параметры системы заданы преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Исходные данные**

Передаточная функция объекта регулирования, параметры статической характеристики релейного элемента, заданные преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №23;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше.

### **Контрольные вопросы**

Контрольные вопросы приведены в указаниях для лабораторной работы №14.

## ***Лабораторная работа № 14. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.2***

### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования и расчета релейных систем;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №23.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в

пунктах [6.3 «Особенности динамики релейных систем»](#) и [6.4 «Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации»](#). Основой для выполнения данной работы являются результаты самостоятельной работы по теме практического задания №23, а также результаты, достигнутые в ходе выполнения лабораторной работы №13.

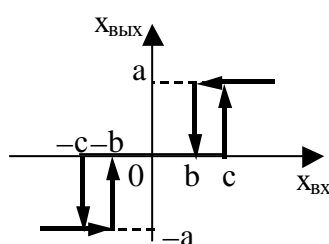
Пример

Проведем исследования на следующем примере:

– передаточная функция линейной части системы

$$W_{\ddot{e}}(p) = \frac{2}{p^3 + p^2 + p}; \quad (1)$$

– статическая характеристика релейного элемента приведена на рис.1.



$$a = 1, b = 0,7, c = \text{var.}$$

Рис. 1. Статическая характеристика релейного элемента

Конечная цель исследований – выяснить влияние зоны неоднозначности релейного элемента на амплитуду и частоту автоколебаний системы.

Коэффициенты гармонической линеаризации релейного элемента при наличии зоны неоднозначности определяются следующим образом:

$$k_1(A) = \frac{2a}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} \right] \text{ при } A \geq c, \quad (2)$$

$$k_2(A) = -\frac{2ac}{\pi A^2} \left( 1 - \frac{b}{c} \right) \text{ при } A \geq c. \quad (3)$$

Обратная инверсная характеристика релейного элемента:

$$-\frac{1}{W_{iy}(j\omega, A)} = -\frac{1}{k_1(A) + jk_2(A)} = \frac{-k_1(A) + jk_2(A)}{k_1^2(A) + k_2^2(A)}. \quad (4)$$

С помощью следующего кода рассчитаем и построим АФЧХ линейной части, а также обратные инверсные характеристики релейного элемента при  $c = 1, 1,3, 1,6$  (рис. 2).

```
W = tf(2,[1 1 1 0]);
w = .8:.01:5;
[re,im] = nyquist(W,w); re = re(:); im = im(:);
a = 1; b = .7;
j = sqrt(-1);
c = 1;
```

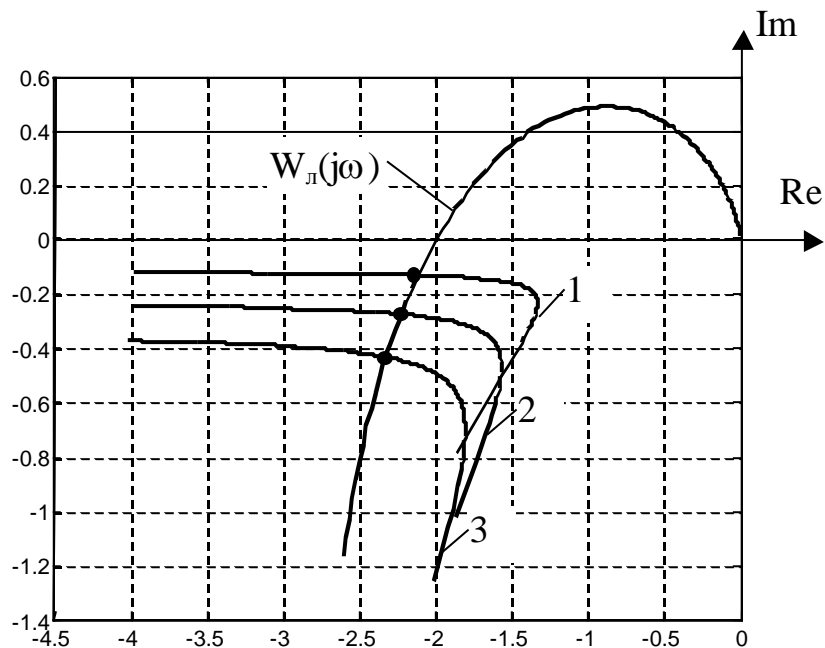
```

A1 = c:.01:5;
k1=2*a/pi./A1.*(sqrt(1-(b.^2)./(A1.^2))+...
    sqrt(1-(c.^2)./(A1.^2)));
k2 = -2*a*c/pi./A1./A1*(1-b/c);
Wi1 = (-k1+j*k2)./(k1.^2+k2.^2);

c = 1.3;
A2 = c:.01:5;
k1=2*a/pi./A2.*(sqrt(1-(b.^2)./(A2.^2))+...
    sqrt(1-(c.^2)./(A2.^2)));
k2 = -2*a*c/pi./A2./A2*(1-b/c);
Wi2 = (-k1+j*k2)./(k1.^2+k2.^2);

c = 1.6;
A3 = c:.01:5;
k1=2*a/pi./A3.*(sqrt(1-(b.^2)./(A3.^2))+...
    sqrt(1-(c.^2)./(A3.^2)));
k2 = -2*a*c/pi./A3./A3*(1-b/c);
Wi3 = (-k1+j*k2)./(k1.^2+k2.^2);
plot(real(Wi1),imag(Wi1),real(Wi2),imag(Wi2),real(Wi3),...
    imag(Wi3),re,im);grid

```



1 – обратная инверсная характеристика реле при  $c = 1$ ;  
 2 – то же при  $c = 1,3$ ; 3 – то же при  $c = 1,6$ .

Рис. 2. Определение параметров автоколебаний

Найдя координаты точек пересечения (достаточно значения по одной из осей, например, вещественной) можно определить амплитуду и частоту колебаний. Для этого достаточно построить «обращенные» характеристики вида

$$\omega = \omega(\text{Re}[W_n(j\omega)], \quad A = A\left(\text{Re}\left[-\frac{1}{W_{iy}(j\omega, A)}\right]\right), \quad (5)$$

с помощью кода (здесь приведен только для  $c = 1$ )

```
figure
subplot(2,1,1)
plot(real(Wil),A1), grid
subplot(2,1,2)
plot(re,w), grid
```

Увеличивая полученные графики около интересующей нас точки, найдем искомые параметры автоколебаний.

В результате проведенных вычислений получены следующие значения:

- 1)  $c = 1$ :  $A = 2,55$ ,  $\omega = 0,969$  рад/сек.;
- 2)  $c = 1,3$ :  $A = 2,644$ ,  $\omega = 0,94$  рад/сек.;
- 3)  $c = 1,6$ :  $A = 2,722$ ,  $\omega = 0,911$  рад/сек.

Таким образом, при увеличении зоны неоднозначности наблюдается увеличение амплитуды и уменьшение частоты автоколебаний.

Проверим правильность расчетов при помощи имитационной модели (рис.4).

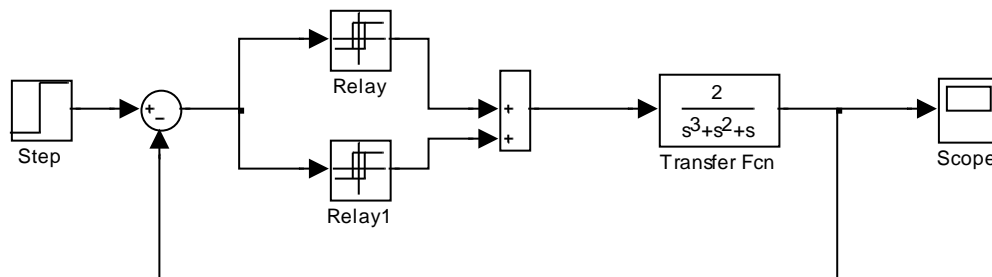


Рис.3. Имитационная модель системы

Релейный элемент в модели реализуется двумя блоками Relay, настроенными соответствующим образом. Ниже на рис. 4 показан вариант настройки блоков при  $c=1$ .

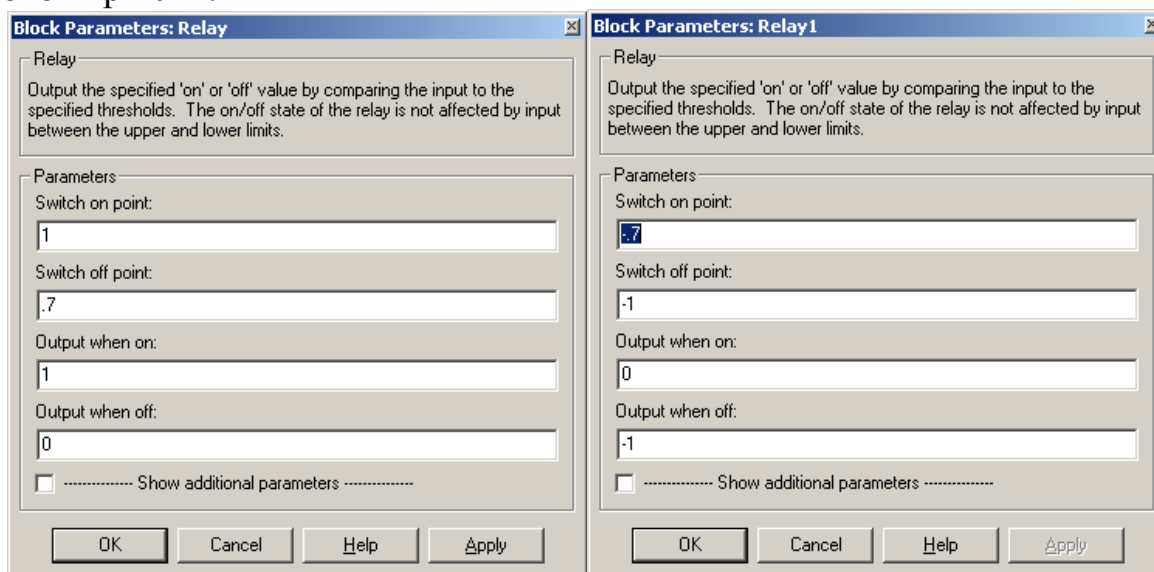


Рис. 4. Настройка блоков Relay и Relay1

В результате расчетов получены следующие значения амплитуд и частот колебаний:

- 1)  $c = 1$ :  $A = 2,562$ ,  $\omega = 0,967$  рад/сек.;
- 2)  $c = 1,3$ :  $A = 2,655$ ,  $\omega = 0,939$  рад/сек.;
- 3)  $c = 1,6$ :  $A = 2,728$ ,  $\omega = 0,91$  рад/сек.

Сравнив полученные результаты с результатами расчетов по методу гармонической линеаризации, сделаем вывод об их достаточной близости, что подтверждает достоверность расчетов.

### **Задание**

Провести исследование релейной системы с неоднозначной статической характеристикой релейного элемента по программе, изложенной выше. Расчеты выполнить для трех значений зоны неоднозначности, среднее из которых, а также все остальные параметры системы заданы преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Исходные данные**

Передаточная функция объекта регулирования, параметры статической характеристики релейного элемента, заданные преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №23;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше.

### **Контрольные вопросы**

1. Назовите основное допущение метода гармонической линеаризации;
2. При каких условиях в замкнутой системе наступает гармонический баланс?
3. Для каких нелинейных элементов один из коэффициентов гармонической линеаризации равен нулю?
4. Какой критерий используется для нахождения параметров автоколебаний методом гармонического баланса?
5. Приведите выражение для обратной инверсной характеристики нелинейного элемента?
6. Функцией какого параметра является обратная инверсная характеристика нелинейного элемента?
7. Как решается вопрос об устойчивости автоколебаний, параметры которых найдены методом гармонического баланса?

## ***Лабораторная работа № 15. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – классическое вариационное исчисление)***

Теоретические сведения и задания к лабораторной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оп-](#)

[тимальные системы», в главе «Решение задач оптимального управления с помощью вариационного исчисления».](#)

***Лабораторная работа № 16. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – принцип максимума)***

Теоретические сведения и задания к лабораторной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума»](#).

***Лабораторная работа №17. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – динамическое программирование)***

Теоретические сведения и задания к лабораторной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления методом динамического программирования»](#).