Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«Экономико-математические методы и модели»
(специальные главы: факультатив)

Основной образовательной программы по специальности 080504.65 – государственное и муниципальное управление.

Благовещенск 2012

УМКД разработан: старший преподаватель Лебедь О.А.,

ассистент Попова А.М.

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от «____» ___________________ 201___ г. №___

Зав. кафедрой ___________________ / __________________________________ /

(подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМСС по специальности 080504.65 - государственное и муниципальное управление

от «________» ______________________________ 201______ г. № _________

Председатель УМСС ________________ / _______________________________ /

(подпись) (И.О.Фамилия)

СОДЕРЖАНИЕ

I. Рабочая программа.

1.1. Цели курса.

Успешная реализация достижений научно-технического прогресса в нашей стране тесным образом связана с использованием математических методов и средств вычислительной техники при решении задач из различных областей человеческой деятельности. Исключительно важное значение приобретает использование указанных методов и средств и при решении экономических задач. В связи с этим для студентов экономических специальностей вузов необходимо как знание возможностей применения математических методов и ЭВМ, так и понимание тех проблем, которые возникают при их использовании.

Математическое программирование представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением оптимизационных задач и разработкой методов их решения. Все оптимизационные задачи можно разделить на задачи линейного и нелинейного программирования.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения оптимизационных задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов и алгоритмов. Отдельными классами оптимизационных задач математического программирования являются задачи целочисленного и дробно-линейного программирования.

Цель курса математики в системе подготовки специалиста экономического профиля – освоение необходимого математического аппарата, позволяющего моделировать, решать и анализировать прикладные экономические задачи, с применением, в случае необходимости, компьютера.

1.2 Задачи курса.

Задачами преподавания математики как фундаментальной дисциплины являются:
- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- выработка умения моделировать реальные экономические процессы;
- освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач;
- овладение численными методами решения и их реализацией на компьютере.

Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование – важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

1.3. Требования к уровню освоения дисциплины.

В результате изучения дисциплины будущий специалист должен:
- иметь представление о математике как особом способе познания мира, об общности и универсальности ее понятий и представлений;
- уметь использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- иметь представление о математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и доказательствах;
- знать методы и приемы обработки информации;
- владеть способами наглядного графического представления результатов исследования;
- иметь навыки исследования моделей и оценки пределов применимости полученных результатов.

Программа курса включает в себя 1 раздел, 8 тем.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Предлагаемая дисциплина относится к базовой части математического и естественнонаучного цикла ООП. Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование – важная составляющая в системе подготовки социального работника.

3. ПРОГРАММА КУРСА

Тема 1. Классические методы оптимизации: экстремумы функций одного переменного; наибольшее и наименьшее значение функции одного переменного (на числовом отрезке и на интервале); экстремум функций двух и более переменных; наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных.

Тема 2. Линейное программирование: графический метод задач линейного программирования; симплексный метод линейного программирования; реализация симплекс-метода с помощью пакета «Поиск решения».

Тема 3. Двойственная задача: симметричные двойственные задачи; несимметричные двойственные задачи; смешанные двойственные задачи; анализ оптимального решения на чувствительность в MS Excel; отчеты по результатам и устойчивости.

Тема 4. Транспортная задача: метод северо-западного угла; метод минимального элемента; метод аппроксимации Фогеля; определение оптимального плана методом потенциалов; решение транспортной задачи с помощью MS Excel.

Тема 5. Целочисленное линейное программирование: метод Гомори; метод ветвей и границ; решение задач с помощью пакета «Поиск решения» в MS Excel.

Тема 6. Дробно-линейное программирование: графический метод; метод множителей Лагранжа.

Тема 7. Динамическое программирование: графический метод решения задач.

Тема 8. Теория игр: матричные игры; кооперативные игры; игры с природой; плоские графы; эйлеровы графы; сетевые графики.

4. УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тема	Кол-во часов
4 семестр	
Классические методы оптимизации	2
Линейное программирование	2
Двойственная задача	2
Транспортная задача	2
Целочисленное программирование	2
Дробно-линейное программирование	2
Динамическое программирование	2
Теория игр	4
ВСЕГО	**18**

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Тема	Кол-во часов
Экстремумы функций одной переменной	2
Экстремумы функций нескольких переменных	2
Графический метод решения задач линейного программирования	2
Метод искусственного базиса, М-метод	2
Алгоритм нахождения оптимального плана методом потенциалов	2
Графический метод решения задач целочисленного программирования	2
Графический метод решения задач дробно-линейного	2

программирования	
Графический метод решения задач динамического программирования	2
Сведение задач теории игр к линейному программированию	2
ВСЕГО	**18**

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ФОРМЫ

При освоении дисциплины используются следующие сочетания видов учебной работы с методами и формами активизации познавательной деятельности бакалавров для достижения запланированных результатов обучения.

На лабораторных занятиях используются активные и интерактивные формы проведения занятий (анализ конкретных ситуаций, задачный метод, математический тренинг).

При работе используется диалоговая форма с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении лабораторных занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении лабораторного занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Формы контроля знаний студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает опрос студентов на лабораторных занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, зачёт. Каждое лабораторное занятие рекомендуется начинать с краткого (10-15 мин.) опроса студентов по теоретическому материалу, проверки домашнего задания и выяснения вопросов по текущим заданиям. На лабораторных занятиях рекомендуется проведение мини-контрольных работ. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами. Данная программа предусматривает проведение в течение семестра двух рубежных контрольных работ.

Требования к знаниям студентов, предъявляемым на зачете.

Для получения «зачет» студенту необходимо выполнить не менее 50% предложенного материала зачетного билета, т.е. он должен ответить на 2 теоретических вопроса и выполнить одно практическое задание или ответить на 1 теоретический вопрос и выполнить два практических задания.

«Незачет» выставляется за незнанием студентом хотя бы одного из теоретических вопросов и невыполнении хотя бы одного из предложенных задач на ПК. Дополнительные вопросы остаются без ответа.

Варианты контрольных работ.

Контрольная работа №1 (охватывает темы: 1, 2, 3, 4).

Задание 1. Решить задачу.

Фирма реализует часть товара на внутреннем рынке, а другую поставляет на экспорт. Связь цены товара p_1 и его количества Q_1, проданного на внутреннем рынке, описывается кривой спроса: $3p_1 + 5Q_1 = 620$. Аналогично для экспорта кривая спроса имеет вид: $2p_2 + 3Q_2 = 840$. Суммарные затраты заданы функцией $C = 5000 + 30(Q_1 + Q_2)$. Определить, какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальной.

Задание 2. Составить экономико-математическую модель задачи линейного программирования

Для изготовления трех видов продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ используется три вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Запас ресурсов составляет соответственно A, B, C. На изготовление единицы продукции $П_1$ затрачивается a_1 ед. ресурса S_1, b_1 ед. S_2, c_1 ед. S_3. На производство единицы $П_2$ затрачивается соответственно a_2, b_2, c_2. На производство единицы $П_3$ соответственно a_3, b_3, c_3. Прибыль, получаемая от реализации продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ составляет соответственно P_1, P_2, P_3 денежных единиц за одно изделие. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной, если A=90; B=100; C=120; p_1=50; p_2=40; p_3=30; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 3. Двойственная задача.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Известны запасы ресурсов и число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции (числа условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции.	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	0	1
S_4	21	3	0

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3 рубля. Найти такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной. Сформулировать экономически и математически для данной задачи двойственную. Найти решение двойственной задачи, используя основные теоремы двойственности. Провести анализ устойчивости двойственных оценок.

Задание 4. Решить транспортную задачу.

Есть три поставщика товаров с соответствующими запасами M_1, M_2, M_3 и три потребителя со спросами N_1, N_2, N_3 соответственно. Даны коэффициенты затрат на доставку единицы товара для каждой пары «поставщик-потребитель» a_{ij}. Найти оптимальное распределение поставок, соответствующее минимальным затратам на перевозку.

Данные	**M**	**M**	**M**	**N**	**N**	**N**	**a_1**	**a_1**	**a_1**	**a_2**	**a_2**	**a_2**	**a_3**	**a_3**	**a_3**
	1	1	1	9	1	1	2	1	3	4	2	6	3	5	2

Контрольная работа №2 (охватывает темы: 5, 6, 7, 8).

Задание 1. Решить задачу целочисленного программирования.

Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет a усл. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей b м^2.

Фермер может заказать оборудование двух видов: мене мощные машины A стоимостью c_1 усл. ед., требующие производственной площади d_1 м^2 (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену k_1 т. зерна, и более мощные машины В стоимостью c_2 усл. ед., занимающие площадь d_2 м^2 и обеспечивающие за смену сортировку k_2 т. зерна.

Определить оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий фермеру при данных ограничениях максимум общей производительности сортировки, если он может приобрести не более 8 машин типа В.

Данные	Параметры							
	a	b	c_1	c_2	d_1	d_2	k_1	k_2
1	34	60	3	4	3	5	2	3

Задание 2. Решить задачу дробно-линейного программирования.

Цена 1 м тканей первого типа 2 у. е., второго типа – 2 у. е. В 1 м ткани первого типа содержится 2 ед. натуральных и 2 ед. искусственных волокон. В 1 м ткани второго типа содержится 2 ед. натуральных и 2ед. искусственных волокон. На производство тканей должно быть израсходовано не менее *3* тыс.ед. натуральных и не более *2* тыс.ед. искусственных волокон. Определить план производства тканей с общей минимальной себестоимостью.

Задание 3. Решить задачу методом динамического программирования.

Для двух предприятий выделено 1000 единиц средств. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от х единиц средств, вложенных в первое предприятие, равен 3х, а доход от у единиц средств, вложенных во второе предприятие, равен 2у. Остаток средств к концу года составляет 0,1х для первого предприятия и 0,5у для второго предприятия.

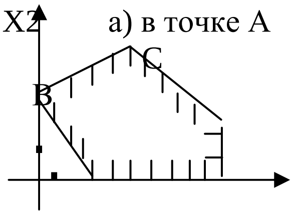
Задание 4. Решить задачу о стратегии игроков.

Найти стратегии игроков А, В и цену игры, заданной матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Зачетные задания.

Теоретическая часть:

1. В какой точке множества допустимых решений достигается минимум целевой функции $z(x) = -2x_1 + 3x_2$,



а) в точке А

б) в точке В

в) в точке С

D г) в точке E

A E д) в точке Д

II. Определить, какая из задач линейного программирования записана в канонической форме?

а) $z(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

б) $z(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

в) $z(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

III. Платежная матрица не имеет седловой точки, если:

а) $\alpha < \beta$ б) $\alpha = \beta$ с) $\alpha > \beta$

Практическая часть:

Задача 1: решить задачу линейного программирования, используя пакет MS Excel «Поиск решения».

Фирма выпускает два вида древесно-стружечных плит – обычные и улучшенные. При этом производятся две основные операции – прессование и отделка.

Затраты	Партия из 100 плит		Имеющиеся ресурсы на месяц
	обычных	улучшенных	
Материал, кг	20	40	4000
Время на прессование, ч	4	6	900
Время на отделку, ч	4	4	600
Средства, у. е.	30	50	6000

Требуется определить, какое количество плит каждого типа можно изготовить в течение месяца так, чтобы обеспечить максимальную прибыль при имеющихся ограничениях на ресурсы (материал, время, затраты).

Задача 2: решить транспортную задачу, используя пакет MS Excel «Поиск решения».

Из трех холодильников A_1, A_2 и A_3, вмещающих мороженную рыбу в количествах 320, 280 и 350 т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 в количествах 140, 110, 230, 150 и 220 т. Известны стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника в магазин.

Холодильники	Магазины				
	1	2	3	4	5
1	20	23	20	15	24
2	29	15	16	19	29
3	6	11	10	9	8

Составить план перевозок, при котором их общая стоимость была минимальной.

Задача 3: решить транспортную задачу, используя пакет MS Excel «Поиск решения».

Компания планирует производство некоторой продукции на трех станках, которой должно быть изготовлено не менее 2000 единиц. Минимальная производительность любого станка равна 500 единиц. Следующая таблица содержит необходимую информацию для рассматриваемой задачи.

Станок	Расходы на переналадку	Затраты на производство единицы продукции	Производительность (в единицах продукции)

1	300	2	600
2	100	10	800

Найти оптимальное решение задачи.

8. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ

Раздел 1. Экономико-математические методы.

1. Понятие модели и моделирование.
2. Элементы и этапы процесса моделирования.
3. Формы моделирования.
4. Особенности математического моделирования экономических объектов.
5. Производственно-технологический и социально-экономический уровни
6. экономико-математического моделирования.
7. Случайность и неопределённость в экономико-математическом моделировании.
8. Классификация моделей в экономике. Признаки классификации.
9. Теоретико-аналитические и прикладные модели.
10. Детерминистские и стохастические модели.
11. Статистические и динамические модели.
12. Открытые и замкнутые модели.
13. Макро и микроэкономические модели.
14. Задача математического программирования в общем виде.
15. Виды ограничений и множеств допустимых значений.
16. Целевая функция задачи математического программирования.
17. Классификация задач математического программирования.
18. Функция Лагранжа. Седловая точка функции Лагранжа.
19. Задача оптимизации плана выпуска готовой продукции.
20. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования
21. Стандартная и каноническая формы представления задач линейного программирования.
22. Геометрическая интерпретация Симплекс – метод. Симплексные таблицы.
23. Экономическая интерпретация элементов симплексной таблицы.
24. Двойственные задачи и методы.
25. Экономическая интерпретация и свойства двойственных оценок в производственных задачах.
26. Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи.
27. Потенциалы, их экономический смысл.
28. Метод потенциалов.
29. Основные способы построения начального опорного решения.
30. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.
31. Примеры целочисленных моделей.
32. Метод Гомори.
33. Метод ветвей и границ.
34. Постановка задачи о коммивояжере. Решение её методом ветвей и границ
35. Понятие динамического программирования.
36. Принцип поэтапного построения оптимального управления.
37. Простейшие экономические задачи, решаемые методом динамического программирования.
38. Дробно-линейное программирование.
39. Решение игр вида $(2\times n)$ и $(m\times 2)$.
40. Сведение матричной игры к модели линейного программирования.
41. Определение производственной программы предприятия в условиях риска и неопределенности с использованием матричных игр.

42. «Дерево» решений.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1) Бродецкий, Геннадий Леонидович. Экономико-математические методы и модели в логистике: потоки событий и системы обслуживания : учеб. пособие : рек. УМО / Г.Л. Бродецкий. - М. : Академия, 2009. - 267 с.
2) Ильченко, Ангелина Николаевна. Экономико-математические методы : учеб. пособие: рек. УМО / А. Н. Ильченко. - М. : Финансы и статистика, 2006. - 288 с.
3) Экономико- математическое моделирование : учебник: Рек. УМО вузов / Ред. И.Н. Дрогобыцкий. - М. : Экзамен, 2004. - 799 с.

б) дополнительная литература:

1) Карманов, В. Г. Математическое программирование : учеб. пособие / В.Г. Карманов. - 5-е изд., стер. - М. : Филин : Рилант, 2001. - 264 с.
2) Лугинин, Олег Евгеньевич. Экономико-математические методы и модели: теория и практика с решением задач: учеб. пособие / О.Е. Лугинин, В.Н. Фомишина. - Ростов н/Д : Феникс, 2009. - 441 с
3) Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие : рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002, 2003, 2004. - 424 с.
4) Экономико-математические методы и модели в маркетинге: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / В.В. Федосеев, Н.Д. Эриашвили; Ред. В.В. Федосеев. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. - 160 с .
5) Экономико-математические методы и модели: метод. пособие для экон. спец. / АмГУ, Эк. ф. ; сост. С. И. Королева, Г. П. Вохминцева, Г. Н. Торопчина. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2001. - 28 с.
6) Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие: рек. УМО / под ред. С. И. Макарова. - М. : КноРус, 2007. - 226 с. - Библиогр.: с. 225
7) Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ / Под ред. В.В. Федосеева. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002, 2001. - 392 с.
8) Экономико-математический энциклопедический словарь / гл. ред. В. И. Данилов-Данильян. - М. : Большая Рос. энцикл.: ИНФРА-М, 2003. - 688 с.

в) журналы:

1) Экономика и математические методы.
2) Экономист.

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http://iqlib.ru	Интернет -библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам, отдельным темам и отраслям знаний.
2	Электронная библиотечная система «Университетская библиотека - online»	ЭБС по тематике охватывает всю область гуманитарных знаний и предназначена для использования в процессе обучения в высшей школе.

II. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ

1. Методические рекомендации по проведению лабораторных работ.

На лабораторных занятиях формируется и совершенствуется практический уровень владения информационными процессами, основывающийся на применении теоретических знаний. Для проведения лабораторных занятий со студентами используются компьютерные классы. Занятия в компьютерном классе предполагают индивидуальную или парно-групповую формы организации обучения.

Этапы проведения лабораторной работы следующие:

- Контрольный опрос студентов для проверки готовности к выполнению лабораторной работы (до 10 мин).
- Выдача индивидуального задания и пояснения о порядке выполнения индивидуального задания (до 5 мин).
- Выполнение индивидуального задания (около 1 ч.)
- Оформление результатов работы. Сдача выполненной работы преподавателю (до 10 мин).
- Получение домашнего задания (1-2 мин.)
- Приведение в порядок рабочего места, в том числе закрытие всех рабочий окон и уничтожение созданных на винчестере индивидуальных файлов (3-4 мин).

Индивидуальные задания для лабораторных работ должны быть представлены конкретно-практическими и творческими задачами.

На первой ступени изучения темы выполняются конкретно-практические задачи, при решении которых формируется минимальный набор умений. Преподаватель опосредованно руководит самостоятельной познавательной деятельностью студентов, консультирует студентов при возникновении непосильных затруднений в ходе решения задачи, обращает внимание группы на «опасные» места решения. Отработка минимального набора навыков завершается во внеаудиторное время при выполнении домашней работы. Принимая во внимание сложность доступа некоторыми студентами к компьютерной техники во внеаудиторное время, домашние задания должны носит большей части моделирующий характер.

Вторая ступень изучения темы дифференцируется в зависимости от степени усвоения его обязательного уровня. Студенты, овладев основами теории и усвоив содержание типовых методов и приемов решения задач, приступают к решению творческих задач. Если уровень знаний и умений, демонстрируемых студентом при контрольном обследовании, не соответствует установленным требованиям, студент вновь возвращается к стандартным упражнениям, но под более пристальным наблюдением преподавателя.

По завершению изучения отдельной темы курса по результатам выполнения лабораторных работ каждый студент получает оценку.

Студенты, пропустившие лабораторные занятия, должны их выполнить во внеаудиторное время и отчитаться до начала зачетно-экзаменационной сессии.

2. Методические рекомендации по организации контроля знаний студентов

В университете качество освоения образовательных программ оценивается путем осуществления текущего контроля успеваемости, проведения промежуточных аттестаций и итогового контроля по окончании семестра.

На первом занятии до сведения студентов доводятся требования и критерии оценки знаний по дисциплине.

Целью текущего контроля успеваемости является оценка качества освоения студентами образовательных программ в течение всего периода обучения. К главной задаче текущего контроля относится повышение мотивации студентов к регулярной учебной работе, самостоятельной работе, углублению знаний, дифференциации итоговой оценки знаний.

Текущий контроль успеваемости осуществляется систематически и, как правило, преподавателем, ведущим лабораторные занятия. Формами текущего контроля являются письменные опросы, автоматизированное тестирование, аудиторные контрольные работы, отчеты по лабораторным работам, домашние задания. В течение семестра преподавателем должно быть проведено не менее 7-ми контрольных проверок знаний по каждому студенту из учебной группы.

Результаты текущего контроля служат основанием для прохождения студентом промежуточной аттестации.

Итоговый контроль (зачет или экзамен) преследуют цель оценить работу студентов за курс, полученные теоретические знания, их прочность, развитие творческого мышления, навыки самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их при решении практических задач. Задания итогового контроля состоят из двух частей: письменного теоретического опроса (от 6 до 12 вопросов) и практических заданий (от 1 до 3), выполняемых на компьютере.

Во время проведения итогового контроля (зачета или экзамена) студентам не разрешается пользоваться вспомогательными материалами. Их использование, а также попытки общения с другими студентами или иными лицами, в том числе с применением электронных средств связи, перемещения без разрешения экзаменатора и т.д., являются основанием для удаления студента из аудитории с последующим выставлением в ведомость неудовлетворительной оценки.

Критериями оценки знаний (ОЗ) студента являются:

- ТМ – уровень освоения теоретического материала, предусмотренного программой курса;
- ПЗ – умение использовать теоретические знания при решении практических задач;
- СХ – социальные характеристики: посещаемость занятий; корректное общение с преподавателем; прилежание и трудолюбие; общая эрудиция; активность на занятиях;
- ТК – результаты текущего контроля.

Каждый критерий и итоговая оценка знаний студентов оценивается в баллах («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»).

Итоговая оценка знаний студентов рассчитывается:

ОЗ = 0,25*ТМ+0,25*ПЗ+0,1*СХ+0,4*ТК

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Задачей преподавателя при проведении лабораторных работ является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение студентов к самостоятельной работе, определения места изучаемой дисциплины в дальнейшей профессиональной работе будущего специалиста.

Цель лабораторной работы – научить студентов самостоятельно производить необходимые действия для достижения желаемого результата.

Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы, студенту необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующим данной теме.

Выполнение лабораторной работы целесообразно разделить на несколько этапов:

- формулировка и обоснование цели работы;
- определение теоретического аппарата, применительно к данной теме;
- выполнение заданий;
- анализ результата;
- выводы.

Тема 1. Классические методы организации.

Цель изучения темы: научиться формулировать и решать оптимизационные задачи средствами MS Excel «Поиск решения», «Сценарии», «Подбор параметра».

При изучении данной темы необходимо:

- понимать особенности математических моделей задач оптимизации;
- иметь понятия об операции, цели операции, стратегии, критерии эффективности, целевой функции управления;
- иметь представление о методе решения задач оптимизации;
- уметь использовать программу «Поиск решения» для решения задач оптимизации в экономике.

Вопросы для самоконтроля по теме 1:

- Дайте характеристику области применения множителей Лагранжа маркетинге?
- Для чего предназначена функция Лагранжа?
- Какова экономическая интерпретация множителей Лагранжа?
- Назовите основные характеристики программы «Поиск решения» пакета Excel?
- Опишите алгоритм решения различных задач оптимизации с помощью программы «Поиск решения»?

Тема 2. Линейное программирование.

Цель изучения темы: овладеть практическими навыками решения задач линейного программирования с помощью надстройки «Поиск решения».

При изучении данной темы необходимо:

- иметь представление об основных экономических задачах, решаемых методами линейного программирования;
- знать основные особенности математической модели линейного программирования;
- знать понятия «допустимый» и «оптимальный» планы линейного программирования;
- уметь преобразовать модель ЗЛП к различным формам;
- знать структуру математической модели математического программирования;
- знать классификацию методов математического программирования.

Вопросы для самоконтроля по теме 2:

- Что такое задача линейного программирования?
- Назовите несколько задач из области менеджмента, которые можно решить методами
- линейного программирования?
- Сформулируйте признак оптимальности опорного плана ЗЛП?
- Укажите условия, при которых ЗЛП не имеет решения?

- Какое значение имеет целевая функция задачи математического программирования?

Тема 3. Двойственные задачи.

Цель изучения темы: научиться составлять двойственную задачу для любой задачи линейного программирования, находить решение пары двойственных задач средствами Excel и давать на основе полученных результатов рекомендации по решению производственных задач.

При изучении данной темы необходимо:

- уметь строить модель двойственной ЗЛП, если известна модель прямой задачи;
- понимать экономический смысл основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач ЛП;
- знать математические формулировки основных теорем теории двойственности и их экономический смысл;
- уметь решить двойственную задачу линейного программирования средствами Excel;
- приобрести навыки решения различных двойственных пар задач линейного программирования;
- уметь объяснить полученные решения двойственной пары задач линейного программирования и дать на основе их рекомендации по планированию экономического процесса.

Вопросы для самоконтроля по теме 3:

1. Сформулируйте правила, на основании которых можно составить модель одной из двойственных задач, если известна модель другой задачи.
2. Дайте формулировки основных теорем теории двойственности. Каково их экономическое содержание?
3. Какими способами можно получить оптимальное решение одной из пары двойственных задач, если получено оптимальное решение другой задачи?
4. Каким способом можно определить диапазон рыночных цен на продукцию предприятия, при котором сохраняется прежний ассортимент выпускаемой продукции?
5. Как можно определить, выгодно ли предприятию выпустить новый вид продукции на прежней ресурсной базе?

Тема 4. Транспортная задача.

Цель изучения темы:

При изучении данной темы необходимо:

- знать экономическую постановку транспортной задачи (ТЗ) по критерию стоимости перевозок;
- уметь построить математическую модель ТЗ;
- уметь преобразовать закрытую (несбалансированную) модель ТЗ в закрытую (сбалансированную);
- знать, что такое допустимый и опорный планы ТЗ, уметь строить опорный план ТЗ;
- знать, что такое распределительная таблица ТЗ и цикл перевозок.
- знать алгоритм метода потенциалов решения ТЗ и понимать экономический смысл данного метода;
- иметь представление о том, как использовать программу «Поиск решения» для решения транспортной задачи.

Вопросы для самоконтроля по теме 4:

1. Сформулируйте математическую модель ТЗ.
2. Какая модель ТЗ называется закрытой, а какая - открытой?
3. Каковы правила приведения открытой модели ТЗ к закрытой?
4. Что называется опорным планом ТЗ?
5. Каковы требования, предъявляемые к опорному плану ТЗ?

6. Что такое цикл и каковы правила его построения в распределительной таблице?
7. Опишите алгоритм решения ТЗ методом потенциалов.
8. Сформулируйте экономическое содержание и математическую модель задачи о назначениях.
9. Каковы особенности математической модели задачи о назначениях?
10. Как решить транспортную задачу методами Excel?
11. В каком виде должна быть записана числовая информация при решении задачи методами Excel?
12. В каком виде выводится решение транспортной задачи при использовании методов Excel?
13. Какой численный метод используется при решении транспортной задачи в Excel?
14. Возможно ли зацикливание при решении транспортной задачи в Excel?
15. Как решить в Excel транспортную задачу открытого типа?
16. Можно ли указать полученный вырожденный план при решении транспортной задачи в Excel?

Тема 5. Целочисленное линейное программирование.

Цель изучения темы: научиться составлять математическую модель экономической задачи в виде задачи целочисленного программирования и находить решение её средствами Excel.
При изучении данной темы необходимо:

- уметь составить математическую модель экономической задачи в виде задачи целочисленного программирования;
- уметь решить задачу целочисленного программирования методом Гомори;
- уметь решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ;
- уметь решить задачу целочисленного программирования средствами Excel;
- приобрести навыки решения различных задач целочисленного программирования.

Вопросы для самоконтроля по теме 5:

1. Какая задача называется задачей целочисленного программирования?
2. Какие методы существуют для решения задач целочисленного программирования?
3. Сформулируйте алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом ветвей.
4. Как составить неравенство Гомори по строке симплексной таблицы?
5. Какие решения могут быть потеряны при применении метода Гомори?
6. Какие решения считаются оптимальными для задач целочисленного программирования?
7. Выполняются ли критерии оптимальности линейного программирования для оптимальных решений задач целочисленного программирования?
8. Как найти решение задачи целочисленного программирования средствами Excel?

Тема 6. Дробно-линейное программирование.

Цель изучения темы: научиться составлять математическую модель экономической задачи в виде задачи дробно-линейного программирования и находить решение её средствами Excel.

При изучении данной темы необходимо:

- уметь составить математическую модель экономической задачи в виде задачи дробно-линейного программирования;
- уметь решить задачу дробно-линейного программирования с помощью функции Лагранжа;
- уметь решить задачу дробно-линейного программирования средствами Excel.

Вопросы для самоконтроля по теме 6:

1. Дайте характеристику области применения множителей Лагранжа в маркетинге?
2. Для чего предназначена функция Лагранжа?
3. Какова экономическая интепритация множителей Лагранжа?

Тема 7. Динамическое программирование.

Цель изучения темы: овладеть практическими навыками формулирования задач поиска оптимального пути, их решения и анализа на основе принципа оптимальности Беллмана.

При изучении данной темы необходимо:

- находить критический путь и критический срок сетевого графика;
- знать экономический смысл критического срока;
- понимать смысл оптимизации сетевого графика;
- знать виды и цеди оптимизации.

Вопросы для самоконтроля по теме 7:

1. Понятие динамического программирования.
2. Принцип поэтапного построения оптимального управления.
3. Простейшие экономические задачи, решаемые методом динамического программирования.

Тема 8. Теория игр.

Цель изучения темы: научиться составлять матрицы платежей для различных игр с нулевой суммой, определять границы изменения цены игры, составлять математическую модель задачи теории игр в виде задачи линейного программирования и находить их решение средствами Excel.

При изучении данной темы необходимо:

- уметь составить матрицу игры с нулевой суммой по её описанию;
- уметь определять нижнюю и верхнюю цену игры, седловую точку матрицы игры;
- уметь решить задачу теории игр средствами Excel;
- приобрести навыки решения задач теории игр в "чистых" стратегиях;
- уметь составить математическую модель задачи теории игр в виде задачи линейного программирования;
- уметь решить двойственную пару задач линейного программирования средствами Excel;
- уметь записать найденные оптимальные решения пары двойственных задач линейного программирования.

Вопросы для самоконтроля по теме 8:

1. Что называется конфликтной ситуацией? Приведите примеры конфликтных ситуаций в экономике.
2. Что такое игра, игрока, платёжная функция игры, чистая стратегия игрока?
3. Опишите классификацию игр по различным критериям.
4. В чём особенности парной матричной игры с нулевой суммой?
5. Каковы принципы выбора игроками своих наиболее выгодных чистых стратегий в парной матричной игры с нулевой суммой?
6. Что такое принципы «максимина» и «минимакса» в парной матричной игры с нулевой суммой?
7. Что такое смешанная стратегия игрока в парной матричной игры с нулевой суммой?
8. Каковы принципы выбора игроками своих наиболее выгодных смешанных стратегий в парной матричной игры с нулевой суммой?
9. Сформулируйте основные теоремы теории парной матричной игры с нулевой суммой.
10. Каким образом можно упростить решение парной матричной игры с нулевой суммой при наличии в платёжной матрице доминирующих, доминируемых и дублирующих стратегий?
11. Каким образом можно связать решение парной матричной игры с нулевой суммой с решением пары симметричных двойственных задач?
12. В чём состоят отличия статистической игры от парной матричной игры с нулевой суммой?

13. Назовите четыре основных персонифицированных критерия выбора оптимальной чистой стратегии статистика в статистической игре.
14. Как можно получить решение статистической игры в смешанных стратегиях статистика?
15. Приведите примеры применения теории игр и статистических решений в экономике и менеджменте.
16. Что называется кооперативной игрой? Приведите примеры из экономики?
17. Что называется множеством Парето решений кооперативной игры?
18. Что такое точка равновесия в кооперативной игре?

IV. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Внеаудиторная работа по информатике включает в себя:

– совершенствование и закрепление теоретических знаний, полученных на лабораторных занятиях. Каждая тема курса включает вопросы входного контроля знаний (минимальный теоретический уровень), освоение которых необходимо для решения учебных задач, формирования умений и навыков темы.

– формирование навыков практической работы - доведение умений до автоматизма путем решения упражнений - заданий, требующее повторного выполнения действий с целью его усвоения.

– выполнение творческих работ, предусмотренных рабочей программой (см. пункт самостоятельная работа студентов).

При выполнении домашней работы студенты могут использовать различные источники приобретения информации: конспекты лабораторных занятий, учебно-методические материалы курса, ссылки на научную литературу в информационном пространстве Интернета и др.

V. ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование	Год выпуска, разработчик	Примечание
Microsoft Office (MS Excel)	2003, Microsoft	Пакет прикладных программ

VI. КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Тема 1. Классические методы оптимизации.

1.1. Поиск решения как средство решения задач оптимизации.

Процедура Поиск решения представляет собой мощный инструмент для выполнения сложных вычислений. Она позволяет находить значения переменных, удовлетворяющих указанным критериям оптимальности, при условии выполнения заданных ограничений. Наилучшие результаты она позволяет получить для задач выпуклого программирования при условии отсутствия ограничений типа «равно». Поиск решения можно использовать и для решения задач математического программирования других типов, но в этом случае процедура поиска часто заканчивается неудачей, а при благоприятном исходе находят лишь один из локальных оптимумов. Поэтому решение таких задач с помощью данной процедуры следует предварять их аналитическим исследованием на предмет свойств области допустимых решений, чтобы выбрать подходящие начальные значения и сделать правильное заключение о качестве и практической применимости полученного решения.

Результаты оптимизации оформляются в виде отчетов трех типов:

- **Результаты.** Отражаются исходное (до оптимизации) и оптимальное значения целевой функции, значения переменных до и после оптимизации, а также формулы ограничений и дополнительные сведения об ограничениях.
- **Устойчивость.** Содержит сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле целевой функции или в формулах ограничений. Отчет не создается для моделей, значения переменных в которых ограничены множеством целых чисел.
- **Пределы** (Ограничения)**.** Состоит из верхнего и нижнего значения целевой функции и списка переменных, влияющих на нее, их нижних и верхних границ. Отчет не создается для моделей, значения переменных в которых ограничены множеством целых чисел. Нижней границей является наименьшее значение, которое может принимать переменная (влияющая ячейка) при условии, что значения других переменных (влияющих ячеек) фиксированы и удовлетворяют заданным ограничениям.

Для решения задачи оптимизации необходимо:

1. На рабочем листе Excel создать таблицу исходных данных, в которой должны отображаться формулы. Для этого необходимо дать команду **Сервис→Параметры**, выбрать вкладку **Вид** и установит флажок **Формулы**.
2. Запустить процедуру поиска решения, дав команду **Сервис→Поиск решения**, и в появившемся диалоговом окне *Поиск решения* заполнить поля:
   - Установить целевую ячейку;
   - Изменяя ячейки;
   - Ограничения;

Целевая ячейка – ячейка на рабочем листе с таблицей исходных данных, куда занесена формула целевой функции.

Изменяемые ячейки – ячейки из таблицы исходных данных, отражающие значения переменных, которые необходимо найти в результате оптимизации. Ячейки не должны содержать формулы, их значения должны влиять на значение целевой ячейки.

Ограничения – задаются посредством кнопки **Добавить** и отражают связь формул ограничений с их свободными членами. Ограничения могут быть как скалярными, так и векторными.

3. Получить отчеты оптимизации и провести их анализ.

Задача 1.1 (линейная модель).

Продукцией молочного завода является молоко, кефир и сметана. На производство 1 т. молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1,01; 1,01; 9,45 т молока. Затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,17 и 0,18 машино-час. Расфасовка 1 т сметаны на специальном автомате занимает 3,15 час. Всего за сутки молочный завод может переработать 140 т молока. Основное оборудование может быть занято течение 21,0 машино-час, а автомат по расфасовке сметаны – в течение 16 час. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равны 31, 23 и 137 руб. завод должен производить ежедневно не менее 90 т молока в сутки.

Требуется:

1. Определить объемы выпуска молочной продукции каждого вида, позволяющие получить наибольшую прибыль;
2. Проанализировать, как изменится прибыль, если автомат по разливу сметаны будет работать на 4 часа меньше, а основное оборудование - на 1 машино-час больше;
3. Определить, как изменится оптимальное решение, если установить задание по выпуску кефира в объеме не менее 10 т.

Порядок выполнения:

1. Составить математическую модель задачи: целевую функцию и ограничения.
2. Загрузить MS Excel.
3. Сформулировать на рабочем листе таблицу, описывающую модель задачи. Внести в ячейку необходимые формулы.

Таблицу для удобства можно разделить на 5 зон (рис.1).

	A	B	C
1	**Переменные**		
2	Молоко	0	
3	Кефир	0	
4	Сметана	0	
5			
6	**Целевая функция**	=31*молоко+23*кефир+137*сметана	
7			
8	**Ограничения**	**Формула**	**Константа**
9	Затраты молока	=1.01*молоко+1.01*кефир+9.45*сметана	140
10	Затраты рабочего времени	=0.17*молоко+0.18*кефир	21
11	Затраты раб.вр.сметану	=3.15*сметана	16
12	Молока не менее	=молоко	90
13	Кефира не менее	=кефир	10

Рис.1 Рабочий лист Excel с записью таблицы исходных данных для модели оптимизации

1 – **переменные** – определяется перечень переменных и в смежных колонках вводятся сначала названия переменных, затем их начальные значения (до оптимизации). Присвоение названий ячейкам с первоначальными значениями производится посредством выделения смежных колонок с названиями и значениями, затем выбрать команду **Вставка→Имя→ Создать**. В диалоговом окне *Создать имена* установить флажок **в столбце слева** нажать кнопку **ОК**.

2 – **целевая функция** – под переменными ввести название Целевая функция и в соседней ячейке задать формулу целевой функции.

3 – **ограничения** – даются краткие названия используемых ограничений.

4 – **формула** – задаются формулы, описывающие ограничения.

5 – **константа** (свободный член) – значение, набранное в этом столбце, показывает максимальное или минимальное значение, которое может принимать формула.

4. Дать команду **Сервис→Поиск решения.**

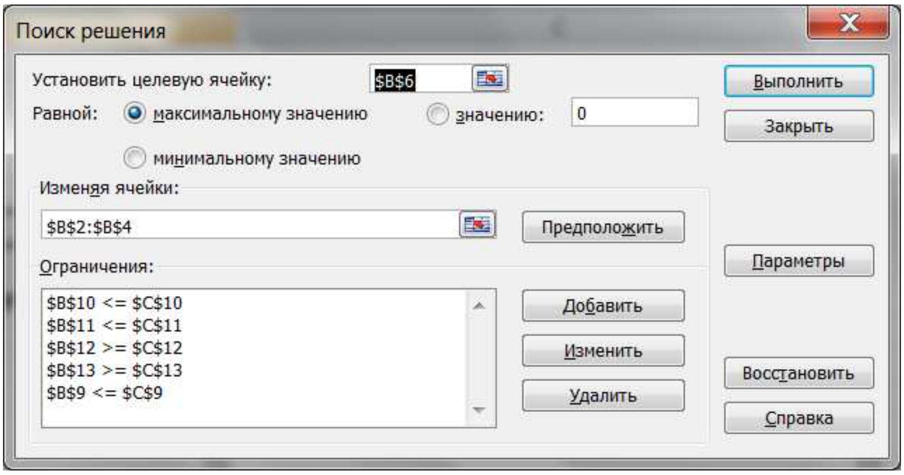


Рис.2 Диалоговое окно Поиск решения.

В диалоговом окне *Поиск решения* (рис.2) в поле **Установить целевую** ввести адрес ячейки, содержащей формулу целевой функции.

5. Установить переключатель **Равной: максимальному значению**.
6. В поле **Изменяя ячейки**: ввести диапазон ячеек, отражающий первоначальные значения переменных.
7. Используя кнопку **Добавить**, ввести в поле **Ограничения**: все ограничения, предусмотренные задачей. В диалоговом окне *Добавление ограничения* в поле **Ссылка на ячейку**: указать ячейку, содержащую формулу ограничения, затем в следующем окне из раскрывающегося списка выбрать логический оператор, отражающий отношение между формулой и свободным членом и в поле **Ограничение:** ввести ссылку на ячейку со свободным членом данного ограничения.
8. В диалоговом окне *Поиск решения* нажать кнопку **Параметры**, установить флажок **Линейная модель** (это ускоряет поиск решения) и задать условия неотрицательности переменных, установив флажок **Неотрицательные значения** в диалоговом окне *Параметры поиска решения* (рис.3). Нажать кнопку **ОК** и перейти в диалоговое окно *Поиск решения*.

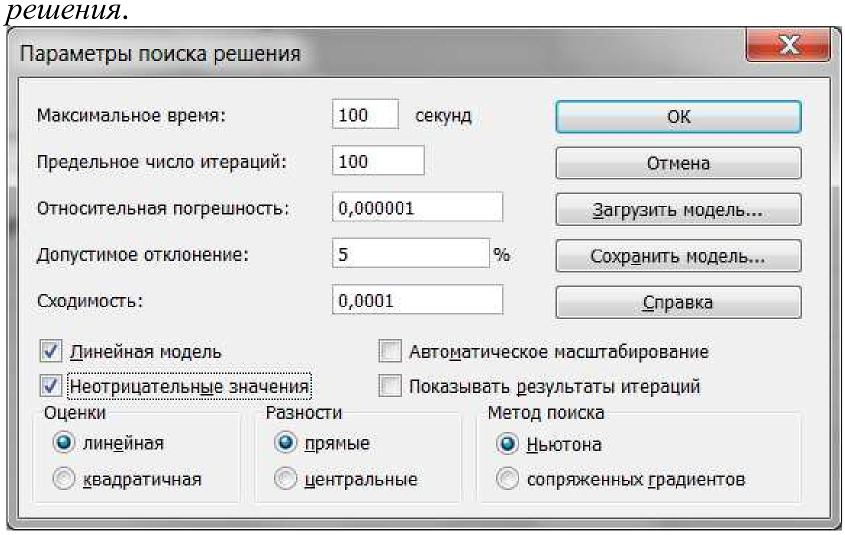


Рис.3 Диалоговое окно Параметры поиска решения.

9. В диалоговом окне *Поиск решения* нажать кнопку **Выполнить**.
10. В диалоговом окне *Результаты поиска решения* (рис.4) установить переключатель **Сохранить найденное решение**, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку **ОК**.
11. Проанализировать полученные отчеты.

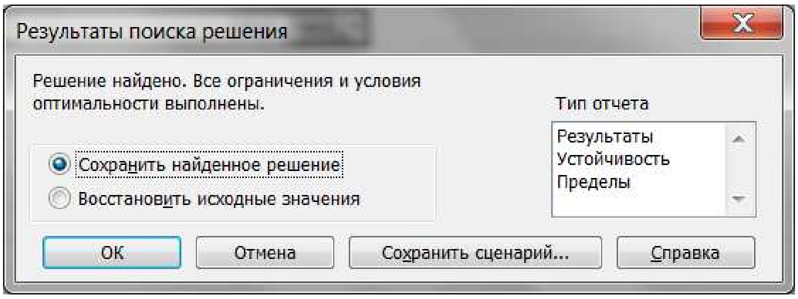


Рис.4 Диалоговое окно Результаты поиска решения.

Анализируя полученное решение, следует принимать во внимание факторы, влияющие на целевую функцию и соответственно снижающие или увеличивающие ее значение. Мощность молокозавода за смену может использовать полностью или недоиспользоваться по ряду причин (нехватка рабочего персонала, недостаток упаковочного материала, отсутствие каналов реализации продукции, задержка поставок молока на переработку партнерами).

Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости

Рабочий лист: [Книга1]Лист1

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение
$B$2	молоко	112,9411765	0	31	1E+30
$B$3	кефир	10	0	23	8,962215997
$B$4	сметана	1,675070028	0	137	153,0495049

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение
$B$9	Затраты молока формула	140	14,4973545	140	32,17058823
$B$10	Затраты рабочего времени формула	21	96,22159975	21	2,664356436
$B$11	Затраты раб.вр.сметану формула	5,276470588	0	16	1E+30
$B$12	Молока не менее формула	112,9411765	0	90	22,94117647
$B$13	Кефира не менее формула	10	-8,962215997	10	21,66666667

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам

Рабочий лист: [Книга1]Лист1

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$6	целевая функция	0	3960,661064

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	молоко	0	112,9411765
$B$3	кефир	0	10
$B$4	сметана	0	1,675070028

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Ст
$B$9	Затраты молока формула	140	$B$9<=$C$9	связа
$B$10	Затраты рабочего времени формула	21	$B$10<=$C$10	связа
$B$11	Затраты раб.вр.сметану формула	5,276470588	$B$11<=$C$11	не с
$B$12	Молока не менее формула	112,9411765	$B$12>=$C$12	не с

\$B\$13	Кефира не менее формула	10	\$B\$13>=\$C\$13	связ

З а м е ч а н и е . Математические методы, используемые средством «поиск решения», предъявляют требования к решаемым с их помощью задачам линейного программирования, которые не всегда выполнимы. В частности, решение может быть не найдено вовсе или существенно отличаться от оптимального, если в задаче имеются ограничения типа «равно» или если порядок матрицы задачи математического программирования велик.

Задача 1.2 (нелинейная модель).

Сохраняя условие задачи 1, предположим, что расход молока на производство сметаны сокращается с увеличением объема ее производства из-за сокращения доли технологических потерь в общем объеме затрат молочного сырья. С помощью экономико-математических методов установлена следующая зависимость затрат молока от объема производства сметаны: $9.5 - 0.21x^{0.13}$, где x – объем производства сметаны.

Порядок выполнения остается прежним, со следующими отличиями:

- в ячейку B9 записывается формула

1.01*молоко+1.01*кефир+(9.45−0.21*сметана$^{0.13}$)*сметана;

- переключатель «Линейная модель» не устанавливается;
- рекомендуется установить переключатель «Оценки» в положение «квадратичные».

1.2. Подбор параметра как средство прогнозирования результата.

При обработке табличных данных часто возникает необходимость в прогнозировании результата на основе известных исходных данных, или наоборот, в определении того, какими должны быть исходные значения, позволяющие получить указанный результат. При использовании средств **Подбор параметра** необходимо, чтобы ячейка с целевым значением содержала ссылку на ячейку с изменяемым значением.

I. В соответствии с поставленной задачей создадим таблицу в MS Excel для анализа влияния отдельных параметров на значение целевой функции (рис.6) и определим значение прибыли с учетом следующих условий:

1. молока должно производиться 90 т в сутки;
2. общий объем переработанного в сутки молока не должен превышать 140 т.

<u>Для решения поставленной задачи необходимо:</u>

1. На отдельном рабочем листе с именем *Подбор параметра* создать таблицу и заполнить ячейки кроме (D8 и D12) согласно рис.6.
2. В ячейку D8 ввести формулу: $= D2 \cdot D3 + D4 \cdot D5 + D6 \cdot D7$
3. В ячейку D12 ввести формулу: $= D9 \cdot D4 + D10 \cdot D2 + D11 \cdot D7$
4. Выполнить команду **Сервис→Подбор параметра**.
5. В диалоговом окне *Подбор параметра* в поле **Установить в ячейке** указать ячейку D12, в поле **Значение** ввести 140, в поле **Изменяя значение ячейки** указать ячейку D3. Нажать кнопку **ОК**.
6. Результат вычисления отобразится в диалоговом окне *Результат подбора параметра*. После нажатия кнопки **ОК** результаты вычисления будут вставлены в таблицу.

	A	B	C	D
1	**Прибыль**	**Параметры**	**Ед.изм.**	**Значения**
2		Прибыль от 1 т кефира	руб.	23
3		Производство кефира в сутки	Т	
4		Прибыль от 1 т молока	руб.	31
5		Производство молока в сутки	Т	90
6		Прибыль от 1 т сметаны	руб.	137
7		Производство сметаны в сутки	Т	1
8		**Прибыль всего**	руб.	2927
9		Расход молока на 1 т молока	Т	1.01

10		Расход молока на 1 т кефира	Т	1.01
11		Расход молока на 1 т сметаны	Т	9.45
12		**Расход молока всего за сутки**	Т	100.35

Рис.6 Таблица поиска параметров (исходные данные).

II. Самостоятельно проанализируйте влияние на прибыль такого изменения производства (а) молока; (б) кефира, при котором загрузка основного оборудования увеличивается на 2 машино-часа.

1.3. Сценарий как средство поиска решения.

Сценарий представляет собой множество исходных значений, на основе которых программа создает отчет. Отчет содержит как исходные, так и итоговые значения, что позволяет прослеживаться зависимости между данными в таблице. Сценарии можно сохранять, редактировать и удалять.

Внимание: для того, чтобы сохранить исходные данные на рабочем листе, <u>перед созданием сценария следует сделать копию листа</u>.

Применительно к нашей задаче с помощью анализа сценариев можно определить основные показатели функционирования молочного завода при различных объемах выпуска продукции. При этом не гарантируется выполнение ограничений, предусмотренных условием задачи.

Создание сценария.

1. Выбрать команду **Сервис→Сценарии**.
2. В диалоговом окне *Диспетчер сценариев* нажать кнопку **Добавить**.
3. В диалоговом окне *Добавление сценария* ввести название сценария – Прибыль 1. Указать адреса изменяемых ячеек – D3, D5, D7. В поле Примечания ввести фамилию и номер группы. Нажать кнопку **ОК**.
4. В диалоговом окне *Значения ячеек сценария* ввести значение изменяемой ячейки или ячеек: 10, 100. Значение последней ячейки не вводить: это означает, что в данном сценарии значение ячейки D7 (последней из трех) не будет меняться. Нажать кнопку **ОК**. В диалоговом окне *Значения ячеек сценария* можно вводить поля не только числовые значения, но и формулы, текстовые значения.
5. Повторить пп. 3, 4 создав еще три сценария с названиями Прибыль 2, Прибыль 3, Прибыль 4 и изменяя значения ячеек D3, D5, D7 так, чтобы **Расход молока за сутки** приблизился к 140т.
6. В диалоговом окне *Диспетчер сценариев* нажать кнопку **Отчет**.
7. В диалоговом окне *Отчет по сценарию* указать тип отчета – *структура*. Ввести адрес ячейки результата расчетов (значение ячеек, на которые влияет производство молока, кефира и сметаны) – D8, D12. Нажать кнопку **ОК**.
8. Просмотреть отчет по сценариям на рабочем листе *Структура сценария*.
9. Сохранить полученный результат в виде файла рабочей книги.

Редактирование сценария.

1. Выбрать команду **Сервис→Сценарии**.
2. В диалоговом окне *Диспетчер сценариев* нажать кнопку **Изменить**.
3. Появится диалоговое окно *Изменение сценария*, в котором можно поменять адреса изменяемых ячеек, а также их значения.

Объединение сценариев.

1. Выбрать команду **Сервис→Сценарии**.
2. В диалоговом окне *Диспетчер сценариев* нажать кнопку **Объединить**.
3. Появится диалоговое окно *Объединение сценария*, в котором программа информирует пользователя о количестве созданных сценариев для каждого листа рабочей книги.
4. Выбрать лист с интересующими сценариями.
5. Нажать кнопку **ОК**, после чего сценарии выбранного листа будут вставлены в текущий лист.

Тема 2. Линейное программирование.

Задача 2.1 Решить задачу линейного программирования:

$$L = 5x_1 - 2x_3 \to \min$$

$$\text{при ограничениях: } \begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 \le 5, \\ -3x_1 + 5x_4 \le 7, \end{cases}$$

Для решения подобных задач в MS EXCEL предназначена команда **Поиск решения** из меню **Сервис**.

Пусть значения $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4}$ хранятся в ячейки **A1:A4**, а значение функции **L** - в ячейке **C1**. Введем ограничения:

C2 = -5*A1 - A2 + 2*A3

C3 = -A1 +A3 + A4

C4 = -3*A1 + 5*A4.

Таким образом, было задано условие исходной задачи линейного программирования. Выполним команду из главного меню **Сервис** ⟶**Поиск решения** (рис. 7).

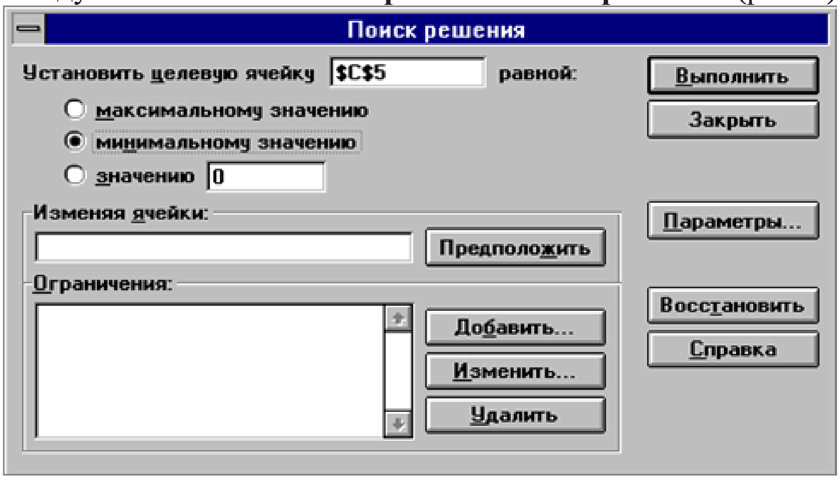


Рис. 7 Диалоговое окно Поиск решения (незаполненное).

Устремим целевую функцию в ячейке **C1** к минимуму. Для этого введем в поле **Установить целевую функцию** значение **C1** и установим опцию **"равной минимальному значению"**.

В поле **Изменяя ячейки** необходимо указать адреса ячеек, в которых хранятся изменяемые значения. В нашем случае это ячейки **A1:A4**.

Для добавления ограничений необходимо щелкнуть по кнопке **Добавить**, появится диалоговое окно **Добавить ограничение** (рис.8).

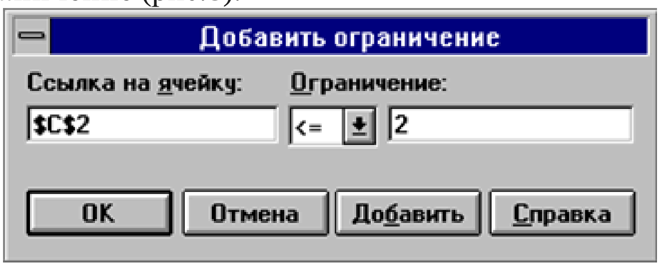


Рис. 8 Диалоговое окно Добавить ограничение

В поле ввода **Ссылка на ячейку** необходимо ввести адрес ячейки, где хранится ограничение, затем, щелкнув по стрелке, выбрать знак и ввести значение ограничения в поле **Ограничение**.

Щелчок по кнопке **OK** означает ввод очередного ограничения и возврат к диалоговому окну **Поиск решения**.

Щелчок по кнопке **Добавить** вводит очередное ограничение, находясь в окне **Добавить ограничение**.

В нашем случае окно будет иметь вид, изображенный на рис. 9. Щелчок по кнопке **Выполнить** начнет процесс решения задачи, завершится который появлением диалогового окна, изображенного на рис. 10.

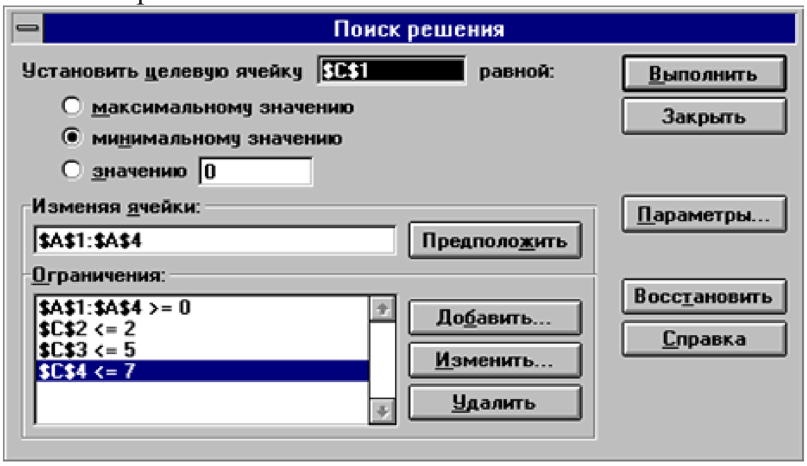


Рис. 9 Диалоговое окно Поиск решения (заполненное).

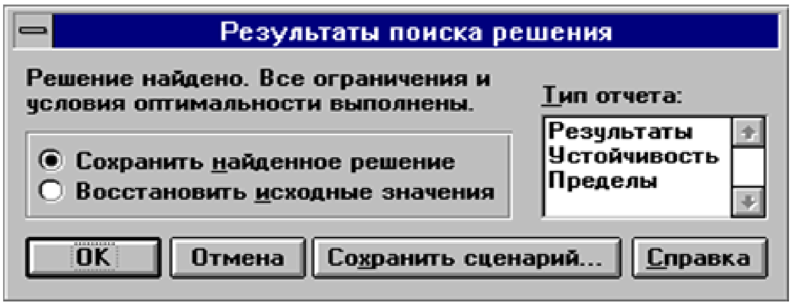


Рис. 10 Диалоговое окно Результат поиска решения.

Щелчок по кнопке **OK** приведет к появлению в ячейке **C1** значения целевой функции **L**, а в ячейках **A1:A4** - значений переменных x_1-x_4, при которых целевая функция достигает минимального значения.

Если задача не имеет решения или неверно были заданы исходные данные, в окне **Результаты поиска решения** может появиться сообщение о том, что решение не найдено.

Итак, назначение основных кнопок и окон диалогового окна **Поиск решения**:

- Поле **Установить целевую ячейку** - определяет целевую ячейку, значение которой необходимо максимизировать или минимизировать, или сделать равным конкретному значению.
- Опции "**минимальному значению**", "**максимальному значению**" и "**значению**", определяют, что необходимо сделать со значением целевой ячейки - максимизировать, минимизировать или сделать равным конкретному значению.
- Поле **Изменяя ячейки** определяет изменяемые ячейки. Изменяемая ячейка - это ячейка, которая может быть изменена в процессе поиска решения для достижения нужного результата в ячейке из окна **Установить целевую ячейку** с удовлетворением поставленных ограничений.
- Кнопка **Предположить** отыскивает все неформульные ячейки, прямо или непрямо зависящие от формулы в окне **Установить целевую ячейку**, и помещает их ссылки в окно **Изменяя ячейки**.
- Окно **Ограничения** перечисляет текущие ограничения в данной задаче. Ограничение есть условие, которое должно удовлетворяться решением; ограничения перечисляются в виде ячеек или интервалов ячеек, обычно содержащих формулу, которая зависит от одной или нескольких изменяемых ячеек, чье значение должно попадать внутрь определенных границ или удовлетворять равенству.
- кнопки **Добавить, Изменить, Удалить** позволяют добавить, изменить или удалить

ограничение.
- Кнопка **Выполнить** запускает процесс решения определенной задачи.
- Кнопка **Закрыть** закрывает окно диалога, не решая проблемы. Сохраняются лишь изменения, сделанные при помощи кнопок **Параметры, Добавить, Изменить** и **Удалить**. Не сохраняются изменения, произведенные после использования данных кнопок.
- Кнопка **Параметры** выводит окно диалога **Параметры поиска решения**, в котором можно контролировать различные аспекты процесса отыскания решения, а также загрузить или сохранить некоторые параметры, такие, как выделение ячеек и ограничений, для какой-то конкретной задачи на рабочем листе.
- Кнопка **Сбросить** очищает все текущие установки задачи и возвращает все параметры к их значениям по умолчанию.

С помощью решающего блока можно решить множество различный оптимизационных задач (задач на максимум и минимум) с ограничениями любого типа. При решении задачи целочисленного программирования необходимо добавить ограничение, показывающее, что переменные целочисленные. При решении других оптимизационных задач вводят целевую функцию и ограничения.

В задачах линейного программирования всегда необходимо найти минимум (или максимум) линейной функции многих переменных при **линейных** ограничениях в виде равенств или неравенств.

$$
\begin{aligned}
&L = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \to \min \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\vdots \\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots a_{kn}x_n \le b_k \\
&x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

В задачи целочисленного программирования добавляется ограничение, что все $\mathbf{x_i}$ должны быть **целыми**.

Задача 2.2. Решить экономическую задачу линейного программирования:

Для изготовления различных изделий А, В и С предприятие использует три различных вида сырья. Изделия А, В и С могут производиться в любых соотношения (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг)			Выделенное количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия	9	10	16	

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий А обозначим x_1, изделий В – через x_2, изделий С – через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств.

$$F(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Для того чтобы воспользоваться надстройкой *Поиск решения* необходимо ввести исходные данные и формулы в электронную таблицу (рис. 11).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные	A	B	C	Общее количество сырья	Выделенное кол-во сырья
2	I		18	15	12	=$B$2*C2+D2*$B$3+E2*$B$4	360
3	II		6	4	8	=$B$2*C3+D3*$B$3+E3*$B$4	192
4	III		5	3	3	=$B$2*C4+D4*$B$3+E4*$B$4	180
5	Цена одного изделия		9	10	16		
6	Прибыль		=C5*$B$2+D5*$B$3+E5*$B$4				

Рис. 11. Таблица с данными и расчетными формулами.

Далее вызывается диалоговое окно *Поиск решения* (рис. 9).
Сначала заполняется поле *Установить целевую ячейку* – C6. Затем устанавливается переключатель *Равной: максимальному значению*. Определяются данные поля *Изменяя ячейки* выделением ячеек B2:B4.

На следующем этапе определяются ограничения. Для этого необходимо нажать кнопку *Добавить*. Появится диалоговое окно *Добавление ограничения* (рис. 12).

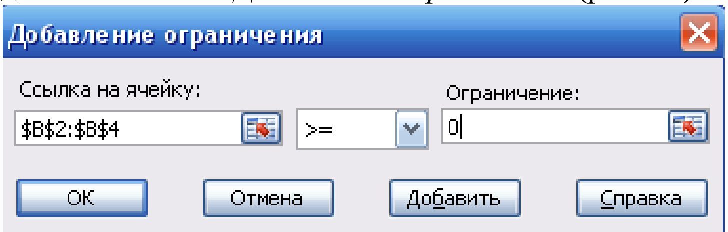


Рис. 12. Диалоговое окно Добавление ограничения.

Необходимо ввести ограничения на неотрицательность переменных $B$2:$B$4>=0, а также ограничения на количество используемого сырья: $F$2<=$G$2, $F$3<=$G$3, $F$4<=$G$4 (рис. 13).

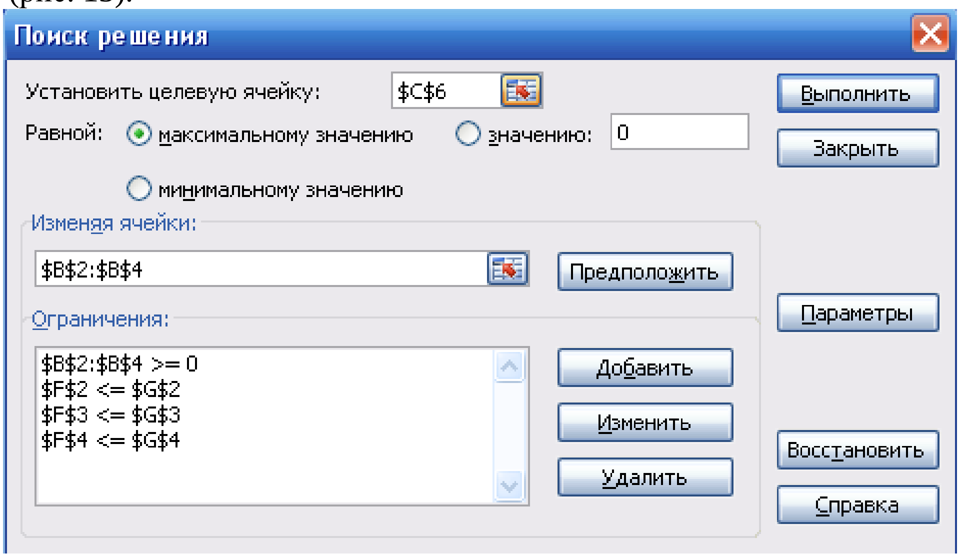


Рис. 13. Заполненное диалоговое окно Поиск решения.

В диалоговом окне *Параметры поиска решений* указать *Линейная модель*.
Для начала процесса решения задачи нажимается кнопка *Выполнить*. На экране появится диалоговое окно *Результаты поиска решения* (рис. 14).

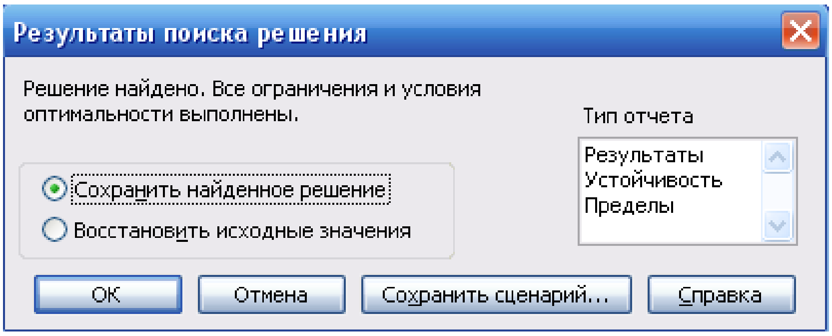


Рис. 14. Диалоговое окно Результаты поиска решения.

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* можно указать тип отчета о поиске решения. Отчеты бывают трех типов:

отчет типа *Результаты* – содержит окончательные значения параметров задачи целевой функции и ограничений;

отчет типа *Устойчивость* – показывает результаты малых изменений параметров поиска решений;

отчет типа *Пределы* – показывает изменения решения при поочередной максимизации и минимизации каждой переменной при неизменных других переменных.

Для вывода решения в диалоговом окне *Результаты поиска решения* необходимо установить переключатель *Сохранить найденное решение* и нажать кнопку *ОК*. В итоге получиться требуемое решение (рис. 15).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные	A	B	C	Общее количество сырья	Выделенное кол-во сырья
2	I	0	18	15	12	360	360
3	II	8	6	4	8	192	192
4	III	20	5	3	3	84	180
5	Цена одного изделия		9	10	16		
6	Прибыль		400				

Рис. 15. Результаты поиска решений.

Поиск решения нашел максимальное значение функции F=400, при оптимальных значениях x: x_1=0, x_2=8, x_3=20.

<u>Задания для самостоятельного выполнения.</u>

ЗАДАНИЕ 1. Решить задачу линейного программирования:

1	$W = 2x_1 - x_2 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \ge 3 \end{cases}$	2	$W = 3 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5 \end{cases}$
3	$W = x_3 + 3x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \ge -3 \\ x_1 \ge 1 \end{cases}$	4	$W = x_1 - x_2 - 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 2 \\ x_1 - x_4 \ge 1 \\ x_2 + x_3 \le 1 \end{cases}$

5	$W = -x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 2 \\ x_2 - 2x_3 \le -1 \\ 4x_3 - x_4 \le 3 \\ 5x_1 + x_4 \ge 6 \end{cases}$	6	$W = -4 - 2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge -10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 2. Решить следующие задачи линейного программирования, используя пакет MS Excel «Поиск решения».

1. Предприятие выпускает продукцию четырех видов $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$, для изготовления которой используются ресурсы трех видов: трудовые, сырье и оборудование. Известны нормы расхода каждого вида ресурса на изготовление единицы каждого вида продукции.

Ресурс	Вид продукции				Объем ресурса
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Трудовой	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100

Прибыль, получаемая от реализации единицы продукции, равна: для продукции $П_1$ – 60 у. е., для $П_2$ – 70 у. е., для $П_3$ – 120 у. е. и для $П_4$ – 130 у. е. Определить оптимальный план производства каждого вида продукции, максимизирующий прибыль данного предприятия.

2. Магазин реализует три вида продукции $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Для этого используются два ограничения ресурса: полезная площадь помещений, которая с учетом коэффициента оборачиваемости составляет 450 м^2, и рабочее время работников магазина – 600 человекочасов. Товарооборот должен быть не менее 240000 у. е. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющего максимум прибыли.

Ресурсы	Затраты ресурсов на реализацию, тыс. у. е.			Объем ресурсов
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Полезная площадь, м^2	1,5	2	3	450
Рабочее время, чел.-ч	3	2	1,5	600
Прибыль, тыс. у. е.	50	65	70	

3. Исходя из специализации и своих технологических возможностей, предприятие может выпускать четыре вида продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Известны общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и цена, полученная за единицу продукции.

Ресурсы	Выпускаемая продукция				Объем ресурсов
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	4	2	2	8	4800
Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2400
Станочное оборудование, станк.-ч	1	0	2	1	1500
Прибыль, у. е.	65	70	60	120	

Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум выручки.

4. Для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3 и P_4 на предприятии используют

три вида сырья C_1, C_2 и C_3. Известны объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции.

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
C_1	35	4	2	2	3
C_2	30	1	1	2	3
C_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль предприятия.

5. Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго вида и 60 м – третьего вида. Суточные ресурсы составляют: 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии. Известен расход ресурсов на один метр тканей.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за 1 м ткани вида I равна 80 у. е., II – 70 у. е., III – 60 у. е. Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Тема 3. Двойственная задача.

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Эти две задачи взаимосвязаны между собой и образуют пару задач, называемую в линейном программировании двойственной парой.

Количество переменных двойственной задаче линейного программирования равно количеству ограничений стандартной задачи, а количество ограничений двойственной задачи равно количеству переменных стандартной задачи линейного программирования. При этом, если исходная задача формулируется как задача максимизации целевой функции, то двойственная − как задача минимизации и наоборот. Аналогично изменяются и знаки ограничений двойственной задачи по отношению к исходной задаче линейного программирования.

Существует важная взаимосвязь между двойственной и стандартной задачами линейного программирования. А именно, если одна из задач имеет оптимальное решение, то и двойственная ей задача линейного программирования имеет оптимальное решение, при этом оптимальные значения соответствующих целевых функций двойственных задач имеют равные значения. Если же для одной из задач целевая функция не ограничена на допустимом множестве альтернатив, то соответствующая ей двойственная задача линейного программирования не имеет решения, т.е. имеет множество допустимых альтернатив. Наконец, если одна из задач имеет пустое множество допустимых альтернатив, то соответствующая ей двойственная задача линейного программирования либо имеет неограниченную целевую функцию, либо пустое множество допустимых альтернатив.

В общем случае совместное рассмотрение пары двойственных задач линейного программирования позволяет не только выполнить качественный анализ их решения, но и практически использовать найденное решение одной из них для более простого решения другой задачи. Хотя данное свойство оказывается полезным, главным образом, при выполнении ручных расчетов, далее рассмотрим процесс решения двойственных задач линейного программирования с помощью программы MS Excel.

Задача 3.1. Предприятие может выпускать четыре вида продукции, используя для этого три вида ресурсов. Известна технологическая матрица А затрат каждого из ресурсов на единицу каждой продукции, вектор b объемов ресурсов и вектор c удельной прибыли на единицу каждой продукции: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 208 \\ 107 \\ 181 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 36 & 14 & 25 & 50 \end{pmatrix}$

Требуется определить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую прибыль при имеющихся ограниченных ресурсах.

Решение. Математическая модель задачи такова:
максимальная прибыль составит: $z = 36x_1 + 14x_2 + 25x_3 + 50x_4$

при ограничениях по ресурсам: $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 208, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_4 \le 107, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 181, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$

Получили задачу на условный экстремум. Среди всех решений системы уравнений, удовлетворяющих условию неотрицательности нужно найти то решение, при котором целевая функция примет наибольшее значение. Двойственные оценки представляют собой оптимальное решение задачи, двойственной к исходной задаче планирования производства: это такие внутренние цены y_1, y_2, y_3, что суммарная внутренняя стоимость всех имеющихся ресурсов минимальна при условии, что внутренняя стоимость ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукции каждого вида, не меньше той цены, по которой единицу соответствующей продукции можно продать на рынке.

Для производства единицы продукции первого вида мы должны затратить, как видно из матрицы А, 4 единицы ресурса первого вида, 2 единицы ресурса второго вида и 3 единицы третьего (элементы первого столбца матрицы). В ценах y_1 , y_2, y_3 наши затраты составят $4y_1 + 2y_2 + 3y_3$. На рынке за единицу первой продукции мы получили бы прибыль 36 руб. Следовательно, $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 36$. Аналогичные условия должны выполняться и для всех остальных видов продукции.

При этом суммарная оценка всех имеющихся ресурсов $208y_1 + 107y_2 + 181y_3$ должна быть минимальной.

Окончательно двойственная задача формулируется так: требуется найти вектор двойственных оценок $y(y_1, y_2, y_3)$, минимизирующий общую оценку всех ресурсов $f = 208y_1 + 107y_2 + 181y_3$ при условии, что по каждому виду продукции суммарная оценка всех ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции, не меньше прибыли, получаемой от реализации единицы этой продукции:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 36, \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 14, \\ 4y_1 + 2y_3 \ge 25, \\ 5y_1 + 2y_2 + 5y_3 \ge 50, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}.$$

Найдем решение исходной и двойственной задач в пакете Microsoft Excel. Введем исходные данные в рабочий лист Microsoft Excel как показано на рис.16: в ячейки B6:E8 введем элементы технологической матрицы A, в ячейки B3:E3 — элементы вектора удельной прибыли c, в в ячейки G6:G8 — запасы ресурсов (элементы ветора b). Ячейки

B11:E11 отведем под компоненты плана производства X(x_1, x_2, x_3, x_4), а в ячейках G3 и G6:G8 рассчитаем значения целевой функции $z=\sum_{j=1}^{4} c_j x_j$ и расходов ресурсов $\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j$ соответственно (формулы Microsoft Excel приведены на рис.16 справа от тех ячеек, в которые должны быть введены).

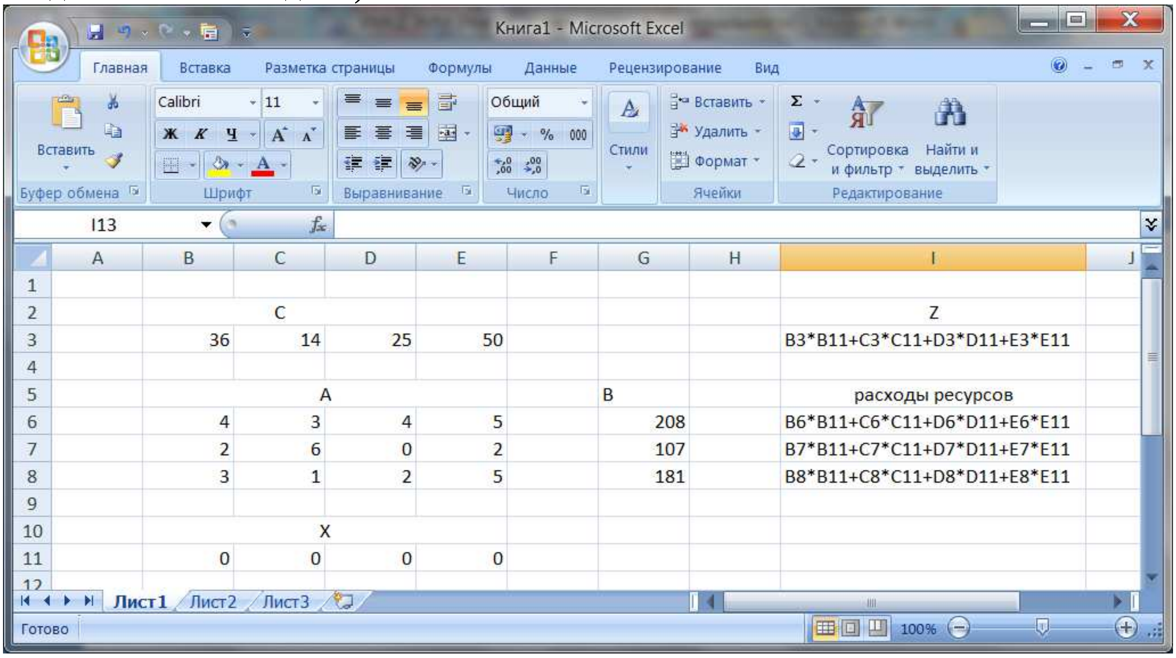


Рис.16 Рабочий лист.

Запустим надстройку «Поиск решения» пакета Microsoft Excel (меню «Сервис→Поиск решения»; если такой пункт в меню Microsoft Excel отсутствует, то это означает, что надстройка «Поиск решения» не установлена. Чтобы ее установить, необходимо отметить флажок «Поиск решения» в списке надстроек пакета Microsoft Excel, который вызывается с помощью выбора пункта меню «Сервис→Надстройки».).

В появившемся диалоговом окне (рис.17) укажем, что целевая функция рассчитывается в ячейке $I$3, переменные задачи находятся в ячейках $B$11:$E$11. С помощью кнопки «Добавить» добавим ограничения, состоящие в том, что расходы ресурсов не могут быть больше их запасов ($I$6<=$G$6; $I$8<=$G$8; $I$8<=$G$8).

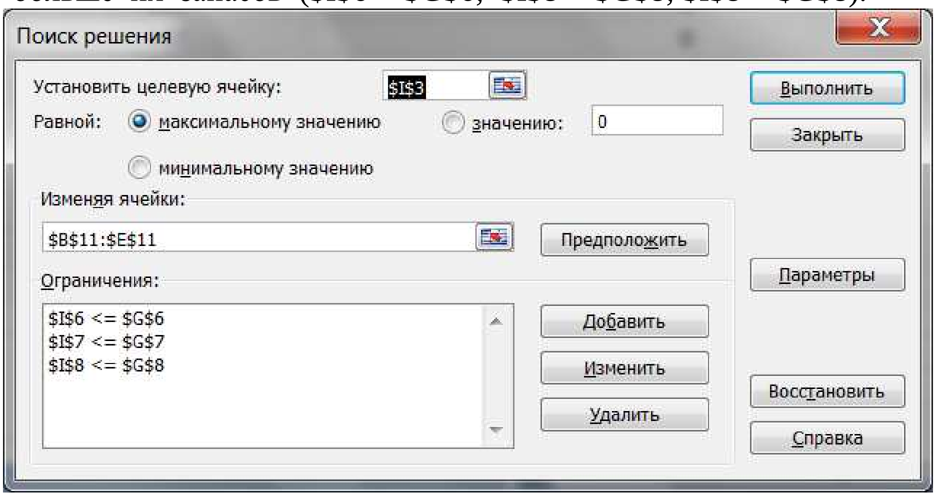


Рис.17 Диалоговое окно Поиск решения (заполненное).

Здесь можно указывать не только любые ограничения вида «равно», «больше либо равно», «меньше либо равно», но также условия целочисленности или двоичности переменных (нуль или единица).

Надстройка «Поиск решения» позволяет решать не только задачи линейного программирования, но и другие задачи математического программирования с произвольным видом целевой функции и системы ограничений. Алгоритмы решения различных задач отличаются, и при больших размерностях задачи линейного программирования требуют для решения существенно меньше машинного времени, чем задачи нелинейного программирования. Для указания того, что модель является линейной, необходимо войти в диалоговое окно «Параметры поиска решения» (нажав соответствующую кнопку) и установить флажок «Линейная модель». В этом же окне укажем, что переменные задачи неотрицательны, установив флажок «Неотрицательные значения» (рис.18).

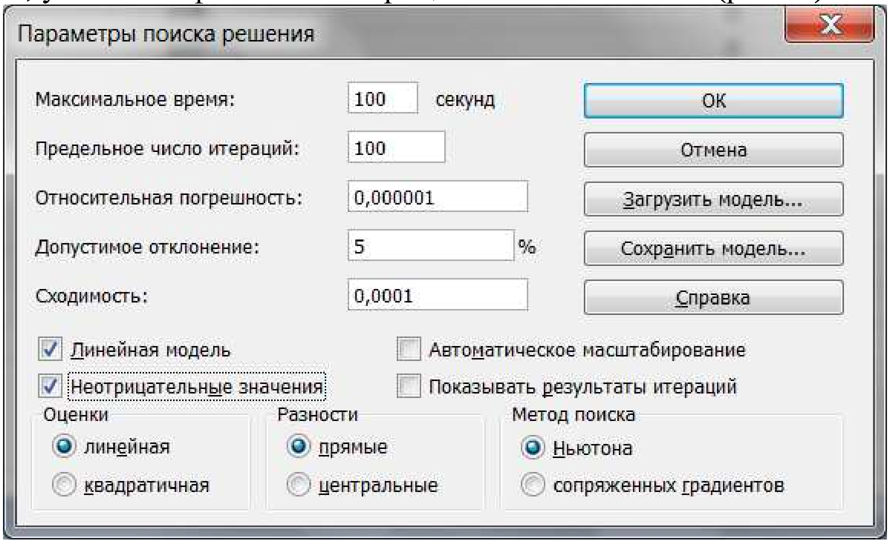


Рис.18 Диалоговое окно Параметры поиска решения.

В результате работы программы (рис.19) в соответствующих ячейках будут рассчитаны: оптимальный план производства $x_1 = 27$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 20$, максимальная прибыль $z_{max} = 1972$ и расходы ресурсов 208, 94, 181.

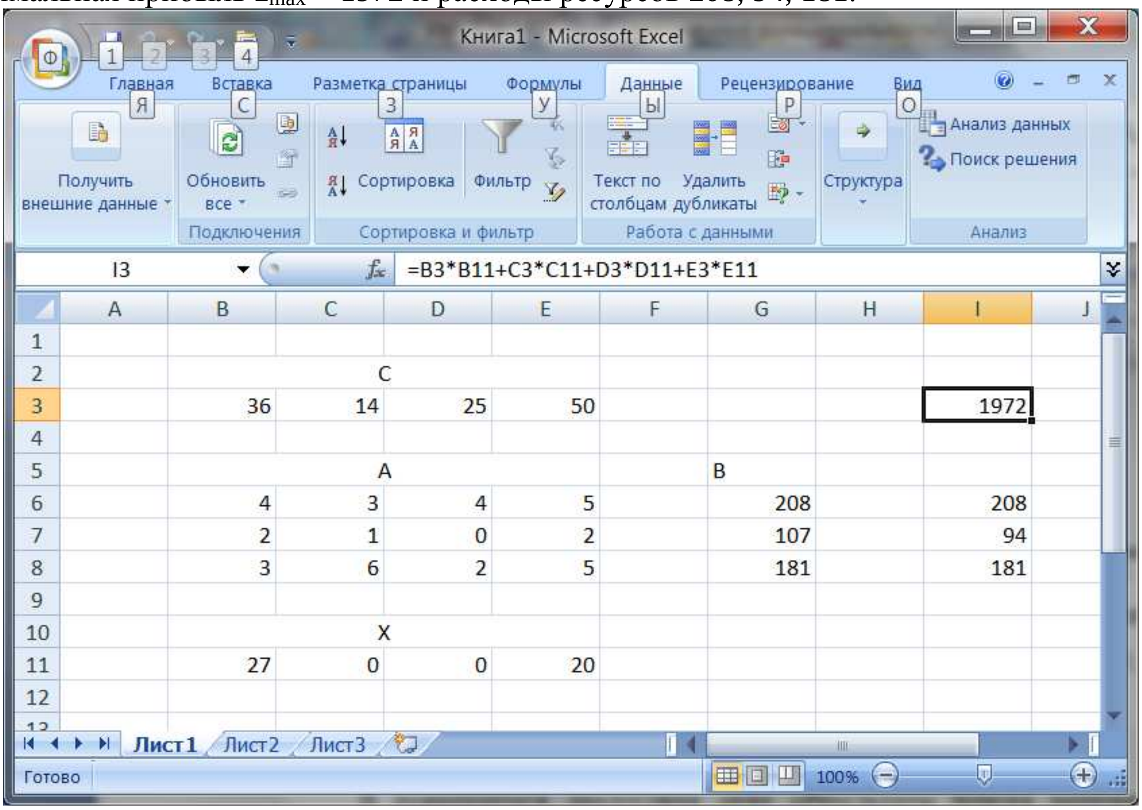


Рис.19. Результаты решения задачи.

В появившемся диалоговом окне «Результаты поиска решения» следует указать необходимость вывода отчетов по результатам и по устойчивости.

После этого в рабочей книге появятся два новых листа: «Отчет по результатам» (рис.20) и «Отчет по устойчивости» (рис.21). В первом из этих отчетов сохраняются результаты работы программы. Во втором отчете в столбце «Теневая цена» приводятся двойственные оценки ресурсов: $y_1 = 6$, $y_2 = 0$, $y_3 = 4$.

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам

Рабочий лист: [Книга1]Лист1

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$I$3		1972	1972

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$10		27	27
$C$10		0	0
$D$10		0	0
$E$10		20	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$I$6		208	$I$6<=$G$6	связанное	0
$I$7		94	$I$7<=$G$7	не связан.	13
$I$8		181	$I$8<=$G$8	связанное	0

Рис.20. Отчет по результатам.

Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости

Рабочий лист: [Книга1]Лист1

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$10		27	0	36	4	3,5
$C$10		0	-7,999999998	14	7,999999998	1E+30
$D$10		0	-7,000000001	25	7,000000001	1E+30
$E$10		20	0	50	7,999999999	5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$I$6		208	6	208	16,25	27
$I$7		94	0	107	1E+30	13
$I$8		181	4	181	27	25

Рис.20. Отчет по устойчивости.

Кроме того, столбцы «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение» в «Отчете по устойчивости» (рис.21) показывают, насколько можно увеличить или уменьшить коэффициенты целевой функции (т. е. цены продукции) и правые части ограничений (т.е. запасы ресурсов), чтобы структура оптимального плана производства не изменилась, т. е. чтобы в оптимальный план входили те же виды продукции, что и в данном решении (в нашем случае — первый и четвертый виды). При этом, например, число 1E+30 означает ($+\infty$), т. е. цены не выпускающейся продукции второго и третьего вида можно сколь угодно уменьшать, а запас второго избыточного ресурса сколь угодно увеличивать, при этом оптимальный план производства не изменится.

Тема 4. Транспортная задача

Транспортная задача является наиболее популярной задачей линейного программирования и широко освещена в учебниках и справочниках. Популярнейшим методом аналитического решения является метод потенциалов. Справочная система Excel содержит описание решения, но на наш взгляд она освещена крайне плохо, и не является простой в понимании, осмыслении сделанного и увиденного. Мы предлагаем свою методику решения.

Целью решения транспортной задачи является нахождение плана грузоперевозок, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными. Транспортные задачи очень просто можно решать с помощью MS Excel.

Задача 4.1. Рассмотрим следующую транспортную задачу. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовить 100, 150 и 50 условных единиц кирпича (предложение поставщиков). Потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов ежедневно составляют 75, 80, 60 и 85 условных единиц (спрос потребителей). Тарифы перевозок одной условной единицы кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов задаются матрицей транспортных расходов С.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

В левом верхнем углу произвольной (i,j) клетки стоит коэффициент затрат – затраты на перевозку единицы груза от *i –го* поставщика к *j-му* потребителю. Задача формулируется следующим образом: найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик - потребитель» так, чтобы: мощности всех поставщиков были реализованы, спросы всех потребителей были удовлетворены, суммарные затраты на перевозку были бы минимальны. Обозначим через x_{ij} объем перевозки от *i –го* поставщика к *j-му* потребителю. Заданные мощности поставщиков и спросы потребителей накладывают ограничения на значения неизвестных x_{ij}. Чтобы мощность каждого из поставщиков была реализована, необходимо составить уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \end{cases}$$

Аналогично, чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворен, подобные уравнения баланса составляются для каждого столбца таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85, \end{cases}$$

Очевидно, что объем перевозимого груза не может быть отрицательным, поэтому следует ввести ограничение не отрицательности переменных: $x_{ij} \geq 0$.

Суммарные затраты F на перевозку выражаются через коэффициенты затрат следующим образом: $F = 6x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 6x_{24} + 8x_{31} + 10x_{32} + 20x_{33} + x_{34}$

Для математической постановки транспортной задачи в общей постановке обозначим через c_{ij} коэффициенты затрат, через M_i – мощности поставщиков, через N_j – мощности потребителей, *(i=1,2,…,m).*, *(j=1,2,…,n)*, *m* – число поставщиков, *n* – число потребителей. Тогда система ограничений примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j. \qquad (1)$$

Система (1) включает в себя уравнения баланса по строкам и по столбцам.
При этом суммарная мощность поставщиков равна суммарной мощности потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j.$$

Целевая функция в данном случае следующая:

$$F = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \qquad (2)$$

Таким образом, на множестве неотрицательных решений системы ограничений (1) найти такое решение, при котором значение целевой функции (2) будет минимально.
Рабочий лист EXCEL с введенными исходными данными для решения транспортной задачи показан на рис 22.

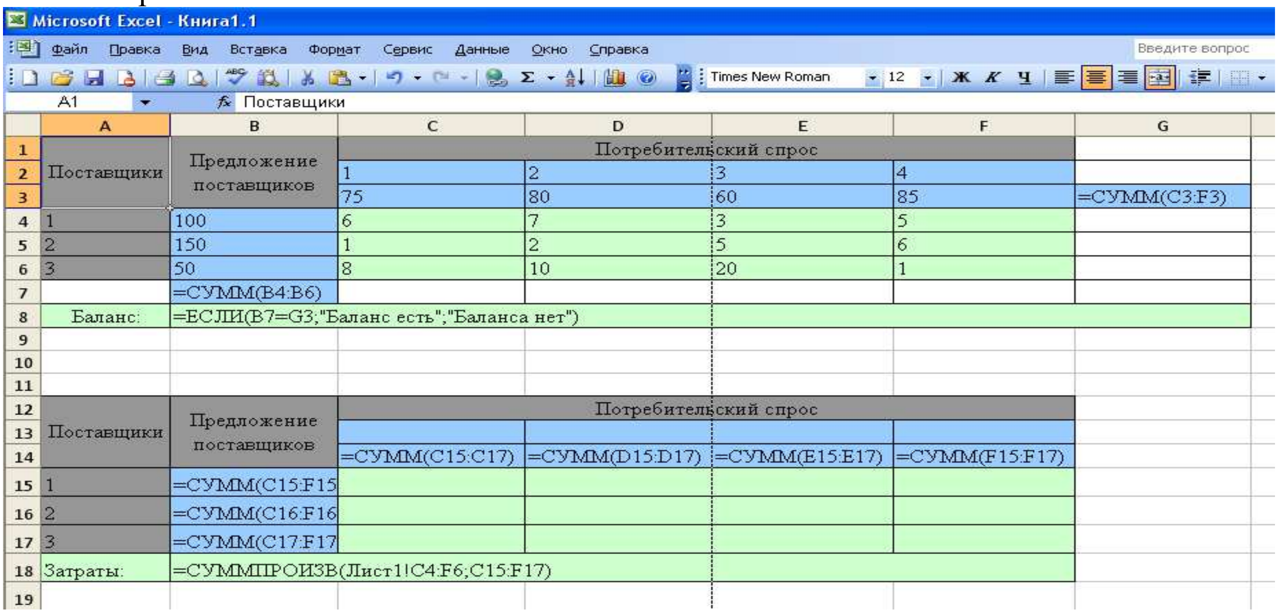


Рис.22 Рабочий лист с исходными данными.

Затем настраиваем программу «Поиск решения» как показано на рис. 23.

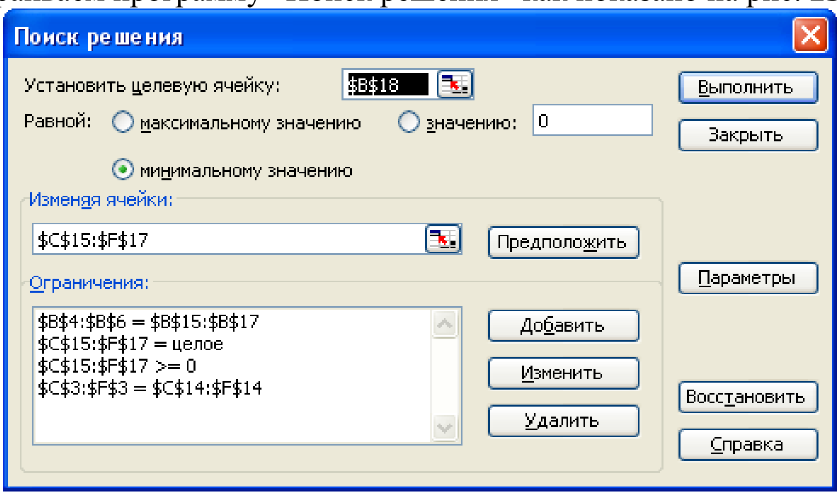


Рис.23 Диалоговое окно Поиск решения (заполненное).

В появившемся окне "Поиск решения" установите курсор на кнопку "Выполнить" и щелкните левой клавишей мыши.

После того как на рабочем листе появилось решение (рис.24) в появившемся диалоговом окне "Результаты поиска решения" (рис.25) установите курсор на переключатель "Восстановить исходные значения" и щелкните левой клавишей мыши. Для завершения расчетов щелкните на кнопке ОК.

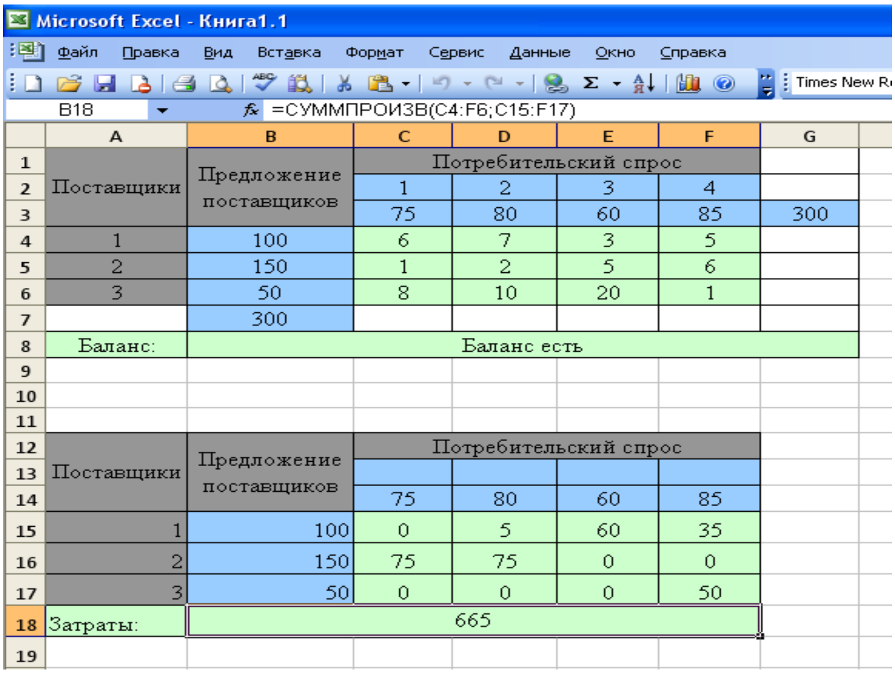


Рис.24 Результат решения задачи

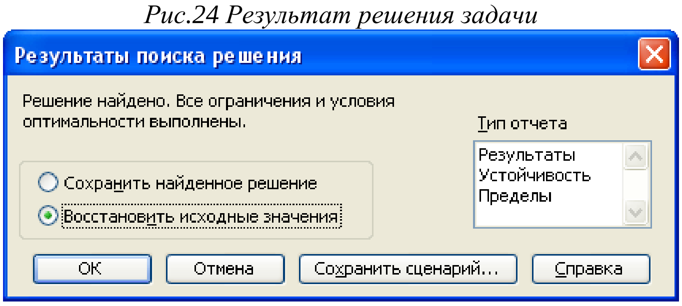


Рис.25 Диалоговое окно Результаты поиска решения.

Таким образом, мы нашли решение рассматриваемой транспортной задачи.

В современном обществе методы оптимизации применяются повсеместно, принося существенную экономическую выгоду и предупреждая финансовые крахи. Они позволяют принимать разнообразные управленческие решения в условиях риска и неопределенности. Правда, уже при помощи более мощных программных комплексов, работающих на основе генетических алгоритмов, нечеткой логики и нейронных сетей.

Задача 4.2. Производство продукции осуществляется на четырех предприятиях, а затем развозится в 5 пунктов потребления. Предприятия могут выпускать в день 235, 175, 185 и 175 единиц продукции. Пункты потребления готовы принимать ежедневно 125, 160, 60, 250 и 175 единиц продукции.

Хранение на предприятии единицы продукции обходится в 2 у. е. в день, штраф за недопоставленную продукцию – 3,5 у. е. в день. Стоимость перевозки единицы продукции (в у. е.) с предприятий в пункты потребления приведена в таблице.

Необходимо минимизировать суммарные расходы по перевозке продукции.

Таблица транспортных расходов

Предприятия	Пункты потребления				
	1	2	3	4	5
1	3,2	3	2,35	4	3,65
2	3	2,85	2,5	3,9	3,55
3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4

4	4	2	2,1	4,1	3,4

<u>Решение.</u>

1. Необходимо провести проверку сбалансированности задачи.

$$235+175+185+175=125+160+60+250+175=770$$

Следовательно, модель является сбалансированной, т.к. суммарный объем производимой продукции в день равен суммарному объему потребности в ней. Поэтому при решении задачи не будут учитываться издержки, связанные со складированием и недопоставкой продукции.

2.Построим математическую модель задачи. Неизвестными в задаче являются объемы перевозок.

Пусть x_{ij} – объем перевозок с i-го предприятия в j-ый пункт потребления, c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i-го предприятия в j-ый пункт потребления.

Неизвестные задачи должны удовлетворять следующим ограничениям:
объемы перевозок не могут быть отрицательными;
поскольку модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятий, а потребности всех пунктов потребления должны быть полностью удовлетворены.

Таким образом, условие задачи примет вид: найти минимум функции

$$F(x)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{4}x_{ij}=b_j,\ j\in[1;5],$$

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i,\ i\in[1;4],$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i\in[1;4],\ j\in[1;5],$$

где a_i – объем производства на i-м предприятии, b_j – спрос в j-м пункте потребления.

3. Для решения задачи с помощью *Поиска решения* необходимо подготовить рабочий лист электронной таблицы (рис. 27).

Далее необходимо вызвать диалоговое окно Поиск решения (рис. 9).
Поскольку в качестве критерия оптимизации суммарных транспортных расходов, то в поле *Установить целевую ячейку* необходимо ввести ссылку на ячейку, содержащую формулу расчета общего объема транспортных расходов – ячейка $B$19. Для минимизации значения конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек необходимо установить переключатель в положение *минимальному значению*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Транспортная задача				
2		Пункты потребления						
3		Стоимость перевозок						
4	Предприятия	1	2	3	4	5		
5	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
6	2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
7	3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
8	4	4	2	2,1	4,1	3,4		
9		Объемы перевоз						Объемы производства
10		1	2	3	4	5	Ограничения 2	
11	1						=СУММ(B11:F11)	235
12	2						=СУММ(B12:F12)	175
13	3						=СУММ(B13:F13)	185
14	4						=СУММ(B14:F14)	175
15	Ограничения 1	=СУММ(B11:B14)	=СУММ(C11:C14)	=СУММ(D11:D14)	=СУММ(E11:E14)	=СУММ(F11:F14)		
16		Потребность в пр						
17		125	160	60	250	175		
18								
19	Целевая функция	=СУММПРОИЗВ(B5:F8;B11:F14)						

Рис. 27. Исходные данные и формулы для расчета для решения транспортной задачи.

В поле *Изменяя ячейки* вводятся ссылки на изменяемые ячейки – $B$11:$F$14. Это означает, что для достижения минимального значения суммарных транспортных расходов будут меняться значения в ячейках с B11 по F14, то есть будут изменяться объемы перевозок.

В группе полей *Ограничения* необходимо добавить ограничения на количество продукции, выпускаемой предприятиями и количество продукции, принимаемой пунктами потребления, а также ограничения на объемы перевозок.

По окончании ввода всех ограничений диалоговое окно *Поиск решения* примет вид, представленный на рис 28.

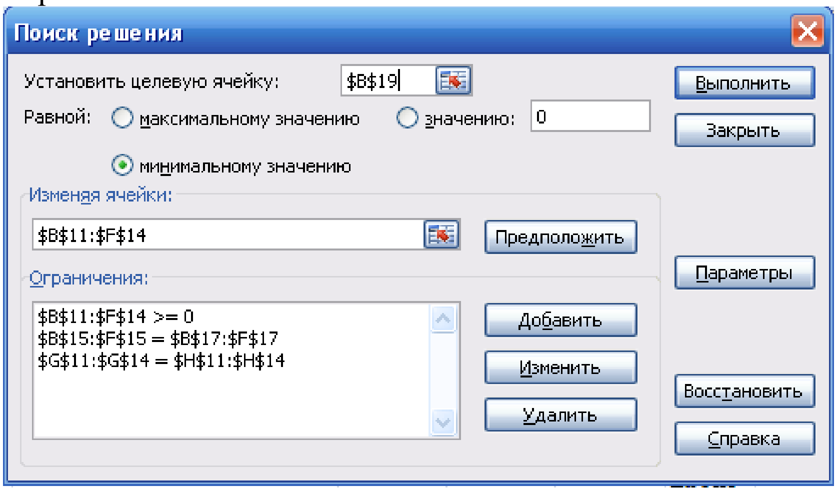


Рис. 28. Диалоговое окно Поиск решения с заполненными полями.

Необходимо также указать на линейность модели в диалоговом окне *Параметры поиска решения*. При нажатии на кнопку *ОК* получим оптимальное решение транспортной задачи (рис. 29).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Транспортная задача						
2		Пункты потребления						
3		Стоимость перевозок						
4	Предприятия	1	2	3	4	5		
5	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
6	2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
7	3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
8	4	4	2	2,1	4,1	3,4		
9		Объемы перевозок						Объемы производства
10		1	2	3	4	5	Ограничения 2	
11	1	0	0	60	65	110	235	235
12	2	125	0	0	0	50	175	175
13	3	0	0	0	185	0	185	185
14	4	0	160	0	0	15	175	175
15	Ограничения 1	125	160	60	250	175		
16		Потребность в продукции						
17		125	160	60	250	175		
18								
19	Целевая функция	2373,5						

Рис. 29. Оптимальное решение транспортной задачи.

Минимальные суммарные транспортные расходы при соблюдении всех условий составят 2373,5 у. е.

Задача 4.3. (задача о назначениях). В конкурсе на занятие пяти вакансий (V1, V2, V3, V4, V5) участвуют семь претендентов (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7). Результаты тестирования каждого претендента, на соответствующие вакансии, даны в виде матрицы - C (тестирование производилось по десятибалльной системе).

Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, причем так, чтобы сумма баллов всех претендентов оказалась максимальной.

$$C = \begin{array}{cccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ P_1 & 7 & 5 & 7 & 6 & 7 \\ P_2 & 6 & 4 & 8 & 4 & 9 \\ P_3 & 8 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ P_4 & 7 & 7 & 8 & 5 & 7 \\ P_5 & 5 & 9 & 7 & 9 & 5 \\ P_6 & 6 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ P_7 & 7 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{array}$$

Рис.30

Решение: Составим математическую модель задачи.

1) Переменные задачи.

Ведем переменные x_{ij} принимающие два значения:

$x_{ij}=0$, если *i*-й претендент (P_i) не принимается на *j*-ю вакансию (V_j),

$x_{ij}=1$, если *i*-й претендент (P_i) принимается на вакансию (V_j), где i=1,2,...7; j=1,2,...5.

2) Ограничения на переменные задачи.

Очевидно, что все переменные задачи неотрицательные и целые числа: $x_{ij} \geq 0$ и x_{ij} - целые. Кроме того, так как каждый претендент может занять только одну вакансию и все вакансии должны быть заняты, должны удовлетворяться следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1 \text{, j=1,2,...7 ,}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \text{, i=1,2,...5 ,}$$

другими словами в матрице (x_{ij}) суммы элементов по каждой строке и суммы элементов по каждому столбцу должны быть равны единицам. Это условие означает, что выбор претендентов должен быть таким, чтобы в матрице (x_{ij}), представляющей решение задачи, было бы по одной единице в каждой строке и по одной единице в каждом столбце, остальные элементы матрицы должны равняться нулю.

3) Целевая функция в задаче о назначениях.

Необходимо выбрать претендентов так, чтобы суммарное число очков, набранное ими было бы максимальным. Суммарное число набранных очков вычисляется по формуле:

$$Z = \sum_{i-1}^{7} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} c_{ij} \ ;$$

$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+...+c_{75}x_{75}=7x_{11}+5x_{12}+...+4x_{75}$;

Окончательная математическая модель задачи записывается так:

найти max $Z = \sum_{i-1}^{7} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} c_{ij}$;

при ограничениях:

$x_{ij} \geq 0$ и x_{ij} - целые числа, i=1,2,...7; j=1,2,...5;

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1 \text{, j=1,2,...7 ;}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \text{, i=1,2,...5 .}$$

Таким образом, задача о назначениях есть частный случай транспортной задачи.

Решение задачи о назначениях в процедуре EXCEL «Поиск решения»

1) <u>Ввод данных.</u> Переносим данные задачи в EXCEL, при этом нужно ввести 2 столбца (6-ой и 7-ой) с нулевыми значениями для сбалансирования задачи. Результаты заполнения таблицы EXCEL можно увидеть на рис.31:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Баллы						
2	Претенденты			Вакансии						Сумма балов
3		1	2	3	4	5	6	7		0
4	1	7	5	7	6	7	0	0		
5	2	6	4	8	4	9	0	0		
6	3	8	6	4	3	8	0	0		
7	4	7	7	8	5	7	0	0		
8	5	5	9	7	9	5	0	0		
9	6	6	8	6	4	7	0	0		
10	7	7	7	8	6	4	0	0		
11										
12										
13		1	2	3	4	5	6	7		
14	1								0	
15	2								0	
16	3								0	
17	4								0	
18	5								0	
19	6								0	
20	7								0	
21		0	0	0	0	0	0	0		

Рис.31 Рабочий лист заполнения таблицы.

В ячейках B4 : F10 введены результаты тестирования претендентов, а в ячейках G4 : H10 введены нули, что соответствует фиктивным вакансиям.

Ячейки B14 : F20 являются изменяемыми ячейками для нашей процедуры.

В ячейках B21 : H21 находятся суммы значений соответствующих столбцов изменяемых ячеек. Так в ячейке B21 находится сумма ячеек B14 : B20. Аналогично в ячейках :

в C21 находится сумма ячеек C14 : C20;

в D21 находится сумма ячеек D14 : D20;

в E21 находится сумма ячеек E14 : E20;

в F21 находится сумма ячеек F14 : F20.

в G21 находится сумма ячеек G14 : G20;

в H21 находится сумма ячеек H14 : H20.

В ячейках I14 : I20 находятся суммы значений соответствующих строк изменяемых ячеек. Так в ячейке I14 находится сумма ячеек B14 : H14. Аналогично в ячейках:

в I15 находится сумма ячеек B15 : H15;

в I16 находится сумма ячеек B16 : H16;

в I17 находится сумма ячеек B17 : H17;

в I18 находится сумма ячеек B18 : H18;

в I19 находится сумма ячеек B19 : H19;

в I20 находится сумма ячеек B20 : H20.

Целевая функция заносится в ячейку J3 и вычисляется по формуле «СУММПРОИЗВ(B4:H10;B14:H20)».

2) <u>Заполнение окна процедуры «Поиск решения»</u>:

целевая функция : J3;

значение целевой функции : max;

изменяемые ячейки : B14 : H20;

ограничения задачи :

B21 : H21 =1 и I14 : I20 = 1(все свободные рабочие места должны быть заняты);

B14 : F20 $\geq$ 0 (изменяемые ячейки должны иметь положительные значения).

В окне «Параметры» установить «Линейная модель», что соответствует решению задачи симплекс-методом. Результаты заполнения окна показаны на рис.32:

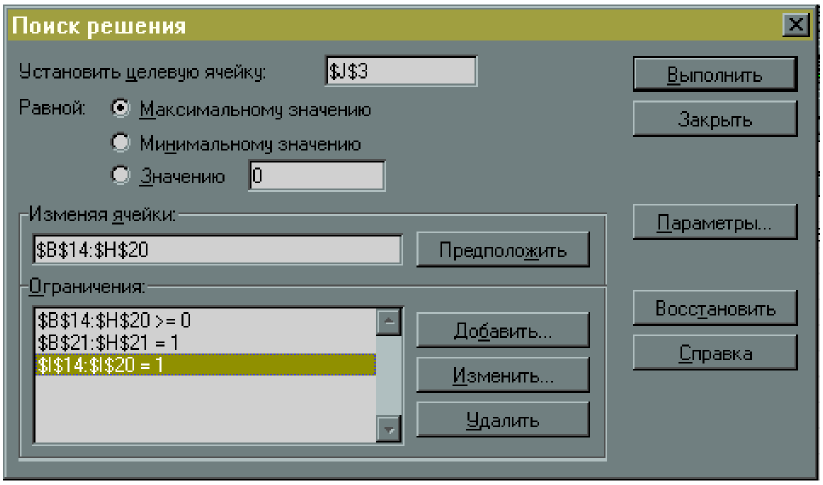


Рис.32. Диалоговое окно Поиска решения (заполненное.)

3) Выполнив процедуру «Поиск решения» мы получили в первоначальной таблице следующие результаты (рис.33):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Баллы						
2	Претенденты			Вакансии						Сумма балов
3		1	2	3	4	5	6	7		42
4	1	7	5	7	6	7	0	0		
5	2	6	4	8	4	9	0	0		
6	3	8	6	4	3	8	0	0		
7	4	7	7	8	5	7	0	0		
8	5	5	9	7	9	5	0	0		
9	6	6	8	6	4	7	0	0		
10	7	7	7	8	6	4	0	0		
11										
12										
13		1	2	3	4	5	6	7		
14	1	0	0	0	0	0	1	0	1	
15	2	0	0	0	0	1	0	0	1	
16	3	1	0	0	0	0	0	0	1	
17	4	0	0	1	0	0	0	0	1	
18	5	0	0	0	1	0	0	0	1	
19	6	0	1	0	0	0	0	0	1	
20	7	0	0	0	0	0	0	1	1	
21		1	1	1	1	1	1	1		

Рис.33. Результат решения задачи.

Получим: решением задачи о назначениях является матрица:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 5: Целочисленное линейное программирование

Значительная часть задач по смыслу может иметь решения только в целых числах: например, число турбин, судов, животных может быть только целым числом. Такие задачи решаются методами целочисленного программирования. Общая постановка задачи линейного программирования дополняется требованиями о том, чтобы найденные переменные в оптимальном плане были целыми.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: а) методы отсечения; б) комбинированные методы; в) приближенные методы.

Методы отсечения используют оптимальные решения, найденные для задач линейного программирования. Сужая область допустимых планов до целочисленных границ, т.е. отсекая нецелочисленные допустимые планы, методами отсечения получают решения задач целочисленного программирования.

Комбинаторные методы достигают решений задач целочисленного программирования, рассматривая возможные варианты целочисленных ограничений для задачи оптимизации.

Приближённые методы опираются на приближённые методы нахождения экстремумов функций нескольких переменных и используют различные способы округления полученных нецелочисленных решений до целых значений. Особенно удобно применять приближённые методы в случае решения задачи целочисленного программирования относительно двух переменных.

Метод Гомори

Метод Гомори решения задач целочисленного программирования является методом отсечения. Сущность его состоит в том, что сначала задача решается как задача линейного программирования без учета условия целочисленности переменных. Если полученное решение задачи линейного программирования является целочисленным, задача целочисленного программирования также решена и найденное решение является оптимальным и для неё. Если же в найденном решении задачи линейного программирования одна или большее число переменных не целые, то для отыскания целочисленного решения задачи добавляется новое ограничение. Это ограничение линейное, и при продолжении решения дополненной задачи симплексным методом с учетом этого ограничения получается целочисленный план.

Для нахождения целочисленного решения задачи методом Гомори используется следующий алгоритм:

1) если в результате решения задачи линейного программирования в полученном оптимальном плане $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ переменная x_i^* − нецелая, то следует найти её дробную часть $\{x_i^*\}$ и дробные части всех коэффициентов при переменных i -й строки системы ограничений $\{a_{ij}\}$, j=1, 2, …, n. Под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число {a} такое, что разность между ним и a есть целое число;

2)составить неравенство Гомори $\{x_i^*\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\}$, где $x_j \le 0$ и включить его в систему ограничений исходной задачи.

3) решить, используя двойственный симплексный и симплексный методы, расширенную задачу.

Если нецелых переменных несколько, то для составления неравенства Гомори выбирается та, у которой целая часть наибольшая. Если решение расширенной задачи нецелое, то нужно повторять алгоритм метода Гомори вплоть до получения целочисленного решения.

Оценки найденного целочисленного решения могут не удовлетворять критерию оптимальности симплексного метода.

Задача 5.1. Найти целочисленное решение задачи методом Гомори.

$$Z(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{целые}$$

<u>Решение.</u> Решаем задачу симплексным методом до получения оптимального решения, не обращая внимания на условие целочисленности переменных.

C баз	Баз 1	План x	3	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	2	3	1	0
0	x_4	3	**2**	-3	0	1
Z_j		0	0	0	0	0
Δ_j			**-3**	-1	0	0

C баз	Баз 2	План X	3	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	3	0	**6**	1	-1
3	x_1	1,5	1	-1,5	0	0,5
Z_j		4,5	3	-4,5	0	1,5
Δ_j			0	**-5,5**	0	1,5

C баз	Баз 3	План X	3	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_2	**0,5**	0	1	1/6	-1/6
3	x_1	**2,25**	1	0	0,25	0,25
Z_j		**7,25**	3	1	11/12	7/12
Δ_j			0	0	11/12	**7/12**

Получен оптимальный нецелочисленный план X=(2,25; 0,5) с $L(X)$=7,25.

Берем первое уравнение (согласно наибольшей дробной части компоненты плана) и строим дополнительное ограничение:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x_3+\frac{5}{6}x_4-s_1, s_1\geq 0 .$$

Определяем вектор, подлежащий вводу в базис опорного плана расширенной задачи, согласно минимуму отношений Δ_j к значениям f_{kj}: $\min\left(\frac{11/12}{1/6},\frac{7/12}{5/6}\right)$.

Так как минимум соответствует x_4, то определяем, из какого уравнения выражать x_4 по обычному правилу нахождения оценки θ. Поскольку минимальное значение θ соответствует третьему (дополнительному) уравнению, то стандартным способом пересчитаем симплексную таблицу.

C баз	Баз 4	План X	3	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
1	x_2	0,6	0	1	0,2	0	-1/5
3	x_1	2,1	1	0	0,2	0	0,3
0	x_4	0,6	0	0	0,2	1	-6/5
Z_j		**6,9**	3	1	0,8	0	0,7
Δ_j			0	0	0,8	0	**0,7**

Получаем оптимальный план расширенной задачи X=(2,1; 0,6).

Полученный план не удовлетворяет условию целочисленности.

По первому уравнению строим очередное дополнительное ограничение:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}s_1 - s_2, s_2 \geq 0 .$$

Из $\min\left(\frac{4/5}{1/5}, \frac{7/10}{4/5}\right)$ определяем, что вводу в базис новой задачи (с четырьмя уравнениями) подлежит переменная s_1.

Так как $\theta = \min\left(-, \frac{2,1}{0,3}, -, \frac{3/5}{4/5}\right)$ соответствует четвертому (очередному дополнительному) уравнению, то пересчитаем симплексную таблицу.

С баз	Баз 5	План X	3	1	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
1	x_2	3/4	0	1	1/4	0	0	-1/4
3	x_1	15/8	1	0	1/8	0	0	3/8
0	x_4	3/2	0	0	1/2	1	0	-3/2
0	s_1	3/4	0	0	1/4	0	1	-5/4
Z_j		**51/8**	3	1	5/8	0	0	7/8
Δ_j			0	0	5/8	0	0	**7/8**

Получаем оптимальный нецелочисленный план $X=(\frac{15}{8};\frac{3}{4})$.

По второму уравнению строим очередное дополнительное ограничение:

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}s_2 - s_3, s_3 \geq 0 .$$

Из минимума отношений Δ_j к значениям f_{kj} определяем, что вводу в базис новой задачи (с четырьмя уравнениями) подлежит переменная S_2.

С баз	Баз 6	План X	3	1	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
1	x_2	4/3	0	1	1/3	0	0	0	-2/3
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	x_4	5	0	0	1	0	0	0	-4
0	s_1	11/3	0	0	2/3	1	1	0	-10/3
0	s_2	7/3	0	0	1/3	0	0	1	-8/3
Z_j		**13/3**	3	1	1/3	0	0	0	7/3
Δ_j			0	0	**1/3**	0	0	0	7/3

Так как выбор *Θ* определяется дополнительным уравнением, то получаем оптимальный нецелочисленный план $X = (1;\frac{4}{3})$.

По четвертому уравнению строим новое ограничение:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}s_3 - s_4, s_4 \geq 0 .$$

Видим необходимость ввода в базис переменной x_3 на основе последнего уравнения.

C баз	Баз 7	План X	3	1	0	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
1	x_2	1	0	1	0	0	0	0	-1	1/2
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	x_4	4	0	0	0	1	0	0	-5	3/2
0	s_1	3	0	0	0	0	1	0	-4	1
0	s_2	2	0	0	0	0	0	1	-3	1/2
0	x_3	1	0	0	1	0	0	0	1	-
Z_j		4	3	1	0	0	0	0	2	1/2
Δ_j			0	0	0	0	0	0	2	1/2

Получаем оптимальный целочисленный план X=(1;1).

Таким образом, $Z_{\max} = 4$ при $X_{îïò} = (1;1)$.

Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ − один из комбинаторных методов. Его суть заключается в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определённым признакам полезными для нахождения оптимального решения.

Метод ветвей и границ состоит в следующем: множество допустимых нецелочисленных решений (планов) некоторым способом разбивается на подмножества, для каждого из которых решается новая задача линейного программирования с целью получения целочисленного решения. При каждом ветвлении получается две новые задачи.

Очевидно, что возможен один из следующих четырёх случаев.

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нём и дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматриваем вторую задачу и в её оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи на новых ограничениях по этой переменной, полученных разделением её ближайших к решению целочисленных значений.

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Для определённости здесь и далее полагаем, что решается задача о максимуме целевой функции. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и вместе со значением целевой функции на нём дает искомое решение. Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, произвести ветвление по дробной переменной и построить две новые задачи.

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой

является дробным числом, и производим ветвление на две новые задачи, разбивая область изменения этой переменной на две, ограниченные целыми числами справа и слева соответственно.

Задача 5.2. Найти методом ветвей и границ решение задачи целочисленного программирования

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

при ограничениях: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 - \textit{целые}$

Решение. Находим оптимальный план сформулированной задачи симплексным методом без учёта требуемой в ограничениях целочисленности переменных, а именно решаем задачу 1.

Задача 1.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 - \textit{целые}$$

Оптимальный план задачи 1 линейного программирования $X^* = \left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}; 0; 0; 34\right)$, $F_{\max} = \frac{39}{4}$.

Для исходной задачи, с учётом целочисленности переменных, полученное решение не является оптимальным. Для поиска целочисленного оптимального решения разделим интервал изменения переменной x_1 на две области, а именно $x_1 \in (0;9)$ и $x_1 = 10$, и разобьём заданную задачу на две новые задачи.

Задача 2

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \\ 0 \le x_1 \le 9 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Задача 3

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \\ 10 \le x_1 \le 10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Список задач: 2 и 3. Нижняя граница линейной функции не изменилась: $F_0 = 0$. Решаем одну из задач списка, например задачу 3, симплексным методом. Получаем, что условия задачи противоречивы. Решаем задачу 2 симплексным методом. Получаем оптимальный целочисленный план поставленной задачи 2, который является также оптимальным планом задачи 1: $X^* = (9;4;0;1;32)$, $F_{\max} = 35$.

Таким образом, в результате одного ветвления задачи было найдено её оптимальное решение.

При решении задач целочисленного программирования с помощью надстройки *Поиск решения* в MS Excel алгоритм заполнения таблиц аналогичен решению задач линейного программирования с учетом целочисленного ограничения. В диалоговом окне «Добавление ограничений» (рис.8) следует указать целочисленное ограничение для каждой переменной задачи.

Пример 5.3. Решить задачу целочисленного программирования с помощью надстройки *Поиска решения* в MS Excel.

$Z = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 \to \max$ – функция прибыли

при ограничениях по запасу сырья

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 55 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 \le 40 \\ 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 65 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 52 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0, \text{ целые} \end{cases}$$

Решение. Вводим исходные данные и формулы в электронную таблицу (рис. 34).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		переменные	A	B	C	D	общее кол-во сырья	запас сырья
2	I	6	4	2	5	2	=$B$2*C2+$B$3*D2+$B$4*E2+$B$5*F2	55
3	II	0	3	0	3	1	=$B$2*C3+$B$3*D3+$B$4*E3+$B$5*F3	40
4	III	2	0	5	2	6	=$B$2*C4+$B$3*D4+$B$4*E4+$B$5*F4	65
5	IV	10	4	1	3	2	=$B$2*C5+$B$3*D5+$B$4*E5+$B$5*F5	52
6	Цена одного изделия		4	5	7	9		
7	Прибыль						=$B$2*C6+$B$3*D6+$B$4*E6+$B$5*F6	

Рис. 34. Исходные данные и формулы расчета.

Заполняем соответствующим образом диалоговое окно *Поиска решений* (рис.36) добавив в него целочисленные ограничения переменных (рис.35).

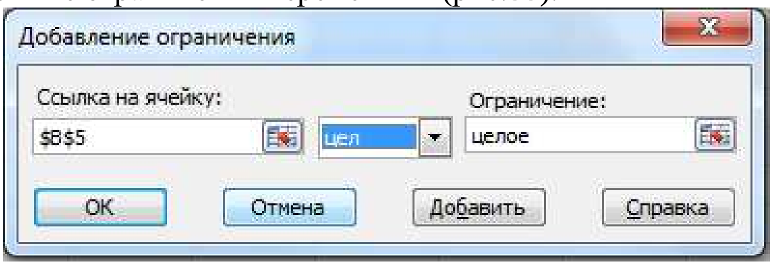


Рис.35. Добавление целочисленных ограничений.

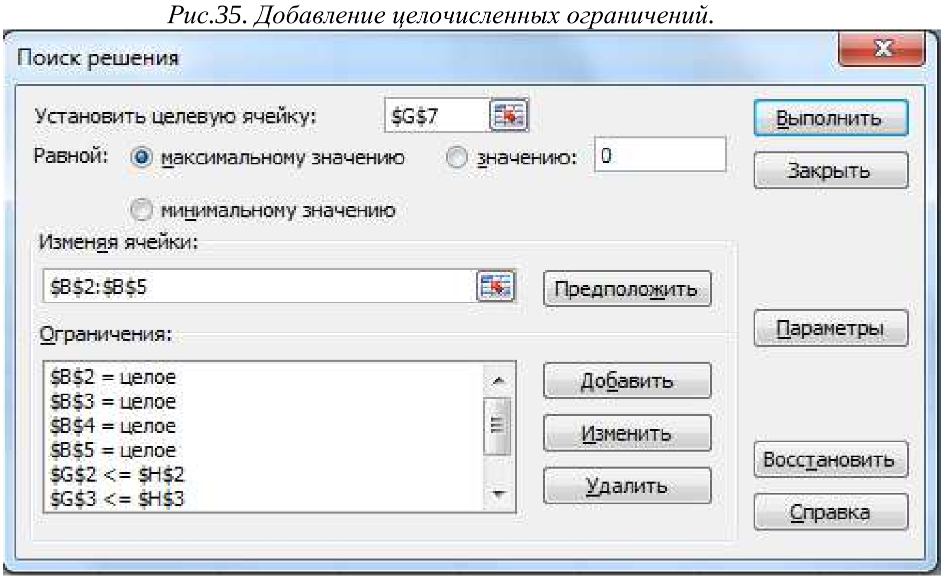


Рис. 36. Итоговое окно поиска решений

После сохранения найденного решения получаем итоговый целочисленный оптимальный план.

	Переменные	A	B	C	D	Общее кол-во сырья	Запас сырья
I	6	4	2	5	2	54	55

II	0	3	0	3	1	34	40
III	2	0	5	2	6	64	65
IV	10	4	1	3	2	50	52
Цена одного изделия		4	5	7	9		
Прибыль						128	

Ответ: максимальная прибыль $Z_{\max} = 128$ ден.ед. при $X_{опт} = (6;\ 0;\ 2;\ 10)$.

Тема 6: Дробно-линейное программирование

Дробно-линейное программирование относится к нелинейному программированию, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде.

Задача дробно-линейного программирования в общем виде записывается следующим образом:

$$L = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j}{d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_jx_j} \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j \le b_i \end{cases},$$

$$x_j \ge 0,\ i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} – постоянные коэффициенты и $d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n \ne 0$.

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования

$$L = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0, i = \overline{1,m}$$

Будем считать, что $d_1x_1 + d_2x_2 \ne 0$.

Для решения этой задачи находят область допустимых решений. Линии уровня проходят через начало координат. При некотором фиксированном L прямая займет определенное положение. При изменении значений L прямая будет поворачиваться вокруг начала координат (рис.37).

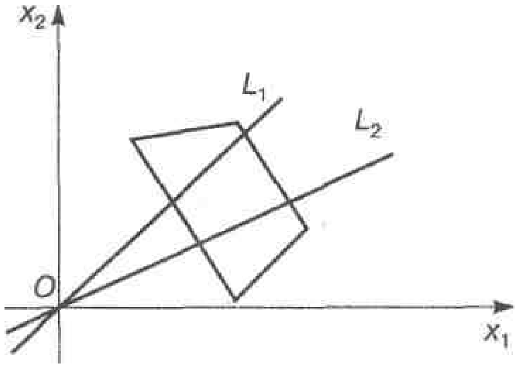


Рис. 37. Поворот линий уровня вокруг начала координат.

Находим вершины многогранника, в которых функция принимает max (min) значение путем пересчета значений целевой функции в каждой из угловых точек области и выбора среди найденных значений максимального (минимального), либо устанавливаем неограниченность задачи.

При этом возможны следующие случаи (рис.38).

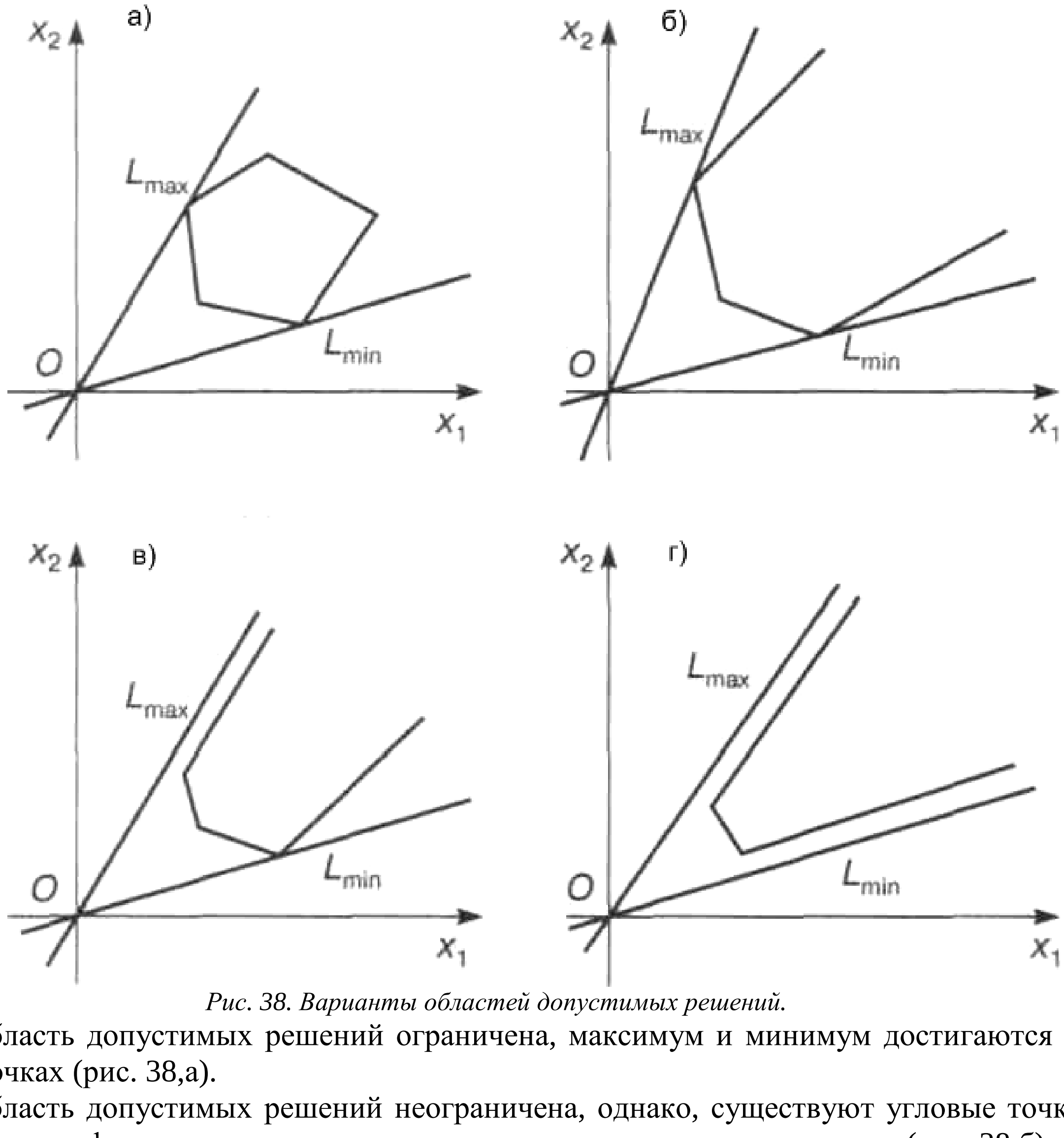


Рис. 38. Варианты областей допустимых решений.

1. Область допустимых решений ограничена, максимум и минимум достигаются в ее угловых точках (рис. 38,а).

2. Область допустимых решений неограничена, однако, существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения (рис. 38,б).

3. Область допустимых решений неограничена, имеется один из экстремумов. Например, минимум достигается в одной из вершин области и имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 38,в).

4. Область допустимых решений неограничена. Максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 38,г).

Рассмотрим частный случай общей задачи дробно-линейного программирования (1), (2), предполагая, что система ограничений (2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и функции f и g_i – непрерывные вместе со своими частными производными

max(min) $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$; (1)

$g_i(x_1, x_2,\dots, x_n)=b_i(i=1,\dots,m)$. (2)

В курсе математического анализа задачу (1), (2) называют задачей на условный экстремум или классической задачей оптимизации.

Чтобы найти решение такой задачи, вводят набор переменных λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_m, называемых множителями Лагранжа, и составляют функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2,..., x_n, \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m) = f(x_1, x_2,..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot [b_i - g_i(x_1, x_2,..., x_n)], \qquad (3)$$

находят частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(j=1,...,n)$ и $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}(i=1,...,m)$, рассматривая систему n+m уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = b_i - g_i(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

с n+m неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Всякое решение системы (4) определяет точка $x = (x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$. Следовательно, решив систему (4), получают все точки, в которых функция (1) может иметь экстремальные значения.

Задача 6.1. Известен рыночный спрос на определенное изделие в количестве 180 штук. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями одного концерна по различным технологиям. При производстве x_1 изделий первым предприятием его затраты составят $4x_1+x_1^2$ руб., а при изготовлении x^2 изделий вторым предприятием они составляют $8x_2+x_2^2$ руб.

Определить, сколько изделий, изготовленных по каждой технологии, может предложить концерн, чтобы общие издержки его производства были минимальными.

<u>Решение:</u> задача запишется в виде:

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 180 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Для нахождения минимального значения функции при заданных условиях (5), т.е. без учета требования неотрицательности переменных, составляется функция Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

вычисляются ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравниваются к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0$$

Отсюда $4+2x_1=8+2x_2$ или $x_1+x_2=2$. Решая это уравнение совместно с $x_1+x_2=180$, находим $x_1^0=91$, $x_2^0=89$, т.е. получаем координаты точки, подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в этой точке функция f имеет условный минимум.

Таким образом, если из уравнения связи $x_1+x_2=180$ найти $x_2=180-x_1$ и подставить это выражение в целевую функцию, то получится функция одной переменной x_1: $f_1=4x_1+x_1^2+8(180-x_1)+(180-x_1)^2$. Далее из уравнения $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=4+2x_1-8-2(180-x_1)=0$ или $4x_1-364=0$, откуда $x_1^0=91$, $x_2^0=180-91=89$. Используя вторые частные производные, устанавливаем, что в данной точке функция f имеет минимальное значение.

Теперь решим данную задачу в Excel. Для решения задачи подготовим исходные данные.

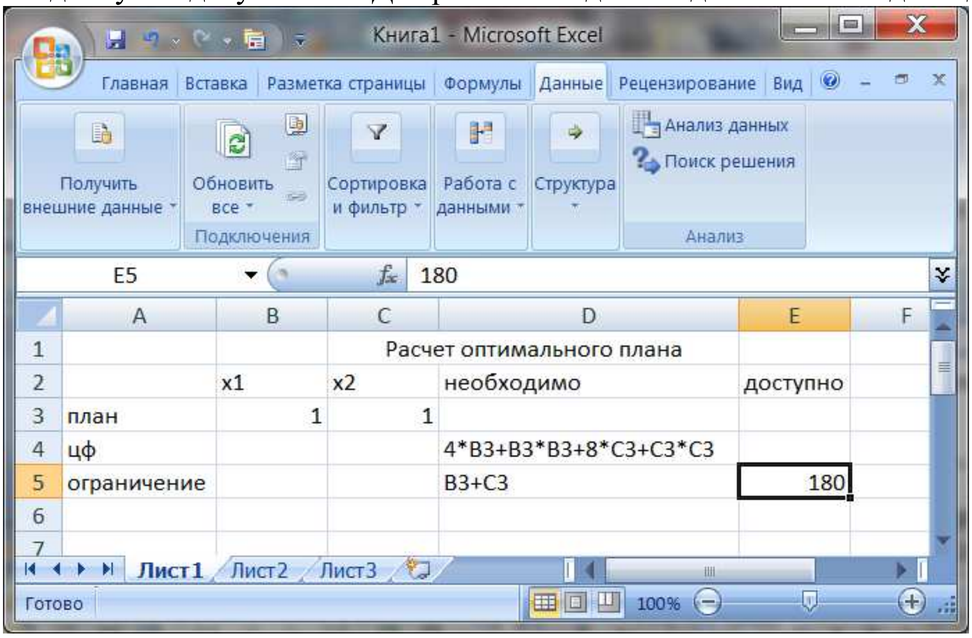


Рис.39. Рабочий лист заполнения таблицы.

Назначим начальные значения искомых переменных, так чтобы целевая функция не была равна 0, например: $x_1=1$, $x_2=1$. Вызвать процедуру **Поиск решения** и задать целевую функцию на минимум, изменяемые ячейки $B$3:$C$3, ограничение $D$5=$E$5. В диалоговом окне *Параметры* поиска решения не надо вводить *линейная модель*. После команды *Выполнить* на экране появятся результаты поиска решения. Получено решение $x_1=92$, $x_2=89$, целевая функция 17278.

Отчеты по результатам, устойчивости и пределам аналогичны таким же отчетам для задач линейного программирования.

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам

Рабочий лист: [Книга1]Лист1

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$4	цф необходимо	14	17278,00019

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	план x1	1	91,0000005
$C$3	план x2	1	89,0000005

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница

$D$5	ограничение необходимо	180,000001	$D$5=$E$5	не связан.	0

Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости

Рабочий лист: [Книга1]Лист1

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
$B$3	план x1	91,0000005	0
$C$3	план x2	89,0000005	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
$D$5	ограничение необходимо	180,000001	186,0000916

Тема 7: Динамическое программирование.

До сих пор рассматривались такие задачи оптимизации, в которых принятие решения осуществлялось в один этап. Зависимость рассматриваемого этапа от прошлого и его влияние на будущее не учитывается. В реальных задачах управления приходится принимать и реализовывать решения по нескольким этапам. Такие задачи многоэтапной оптимизации называют задачами динамического программирования (ДП), в том числе:

- распределение ресурсов, например, ограниченного объема капиталовложений между возможными направлениями их использования по объему и времени;
- разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения и размер пополняемого запаса;
- выбор транспортных маршрутов или технологических способов изготовления изделий;
- разработка принципов календарного планирования производства.

Задача 7.1. Определить наикратчайший путь между вершиной 1 и вершиной 7 на графе с циклами представленном на рис.40.

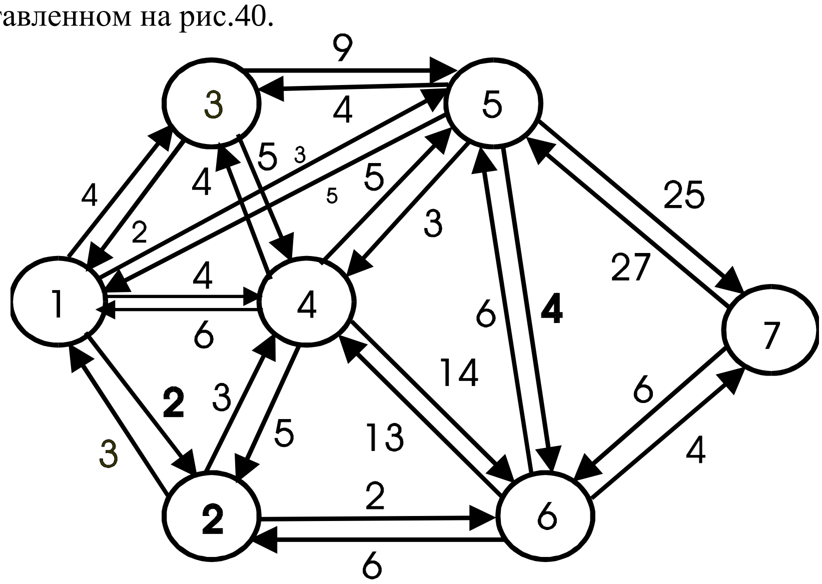


Рис.40.

<u>Решение:</u> Для решения данной задачи в процедуре EXCEL «Поиск решения», представим ее как транспортную задачу с промежуточными пунктами. Будем считать, что транспортные расходы при перевозке одной единицы груза равны (в условных единицах) расстояниям между вершинами. Одна единица груза отправляется из вершины 1 (исходный пункт) и должна прибыть в вершину 7 (пункт назначения). Вершины 2, 3, 4, 5, 6

рассматриваются как промежуточные пункты, которые являются одновременно и исходными пунктами и пунктами назначения.

Требуется определить такую последовательность вершин, по которым должна перемещаться единица груза, отправленная из вершины 1, при которой стоимость транспортных расходов будет минимальна и груз попадет в вершину 7.

Так как транспортные расходы при перемещении груза из одной вершины в другую равны расстоянию между вершинами, то последовательность вершин при которой транспортные расходы будут минимальными определяет наикратчайший путь из вершину 1 в вершину 7. Матрица транспортных расходов, соответствующая данному графу представлена на рис.41.

Исход. пункты	Пункты назначения						Количество груза отправ. из пункта
	2	3	4	5	6	7	
1	2	4	4	3	M	M	1
2	0	M	3	M	2	M	0
3	M	0	5	9	M	M	0
4	5	4	0	5	14	M	0
5	M	4	3	0	4	25	0
6	6	M	13	6	0	4	0
Колич. Груза прибыв.в пункт	0	0	0	0	0	1	

Рис.41

Буквой М обозначается случай, когда между соответствующими вершинами нет пути. В качестве М берут число, значительно большее самого большего пути

Решение задачи в процедуре EXCEL «Поиск решения»

1) <u>Ввод данных.</u> Переносим данные задачи в EXCEL. Результаты заполнения таблицы EXCEL можно увидеть на рис.42:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	исход. пункты			Пункты назначения					Длина
3		2	3	4	5	6	7		0
4	1	2	4	4	3	50	50		
5	2	0	50	3	50	2	50		
6	3	50	0	5	9	50	50		
7	4	5	4	0	5	14	50		
8	5	50	4	3	0	4	25		
9	6	6	50	13	6	0	4		
10									
11									
12	1							0	
13	2							0	
14	3							0	
15	4							0	
16	5							0	
17	6							0	
18		0	0	0	0	0	0		

Рис.42. Рабочий лист заполнения таблицы.

В ячейках B4 : G9 введены длины путей из исходных пунктов в пункты назначения. Ячейки B12 : G17 являются изменяемыми ячейками для нашей процедуры.

В ячейках B18 : G18 находятся суммы значений соответствующих столбцов изменяемых ячеек. Так в ячейке B18 находится сумма ячеек B12 : B17. Аналогично в ячейках :

в C18 находится сумма ячеек C12 : C17;

в D18 находится сумма ячеек D12 : D17;

в E18 находится сумма ячеек E12 : E17;

в F18 находится сумма ячеек F12 : F17;

в G18 находится сумма ячеек G12 : G17.

В ячейках H12 : H17 находятся суммы значений соответствующих строк изменяемых ячеек. Так в ячейке H12 находится сумма ячеек B12 : G12. Аналогично в ячейках:
в H13 находится сумма ячеек B13 : G13;
в H14 находится сумма ячеек B14 : G14;
в H15 находится сумма ячеек B15 : G15;
в H16 находится сумма ячеек B16 : G16;
в H17 находится сумма ячеек B17 : G17.

Целевая функция заносится в ячейку I3 и вычисляется по формуле «СУММПРОИЗВ (B4:G9 ; B12:G17)».

2) <u>Заполнение окна процедуры «Поиск решения».</u>
целевая функция : I3;
значение целевой функции : min;
изменяемые ячейки : B12 : G17;
ограничения задачи :
B18 : G18 = 1 и H12 : H17 = 1;
B12 : G17 $\geq$ 0 (ячейки должны иметь положительные значения).

В окне «Параметры» установить «Линейная модель», что соответствует решению задачи симплекс-методом. Результаты заполнения окна показаны на рис.43:

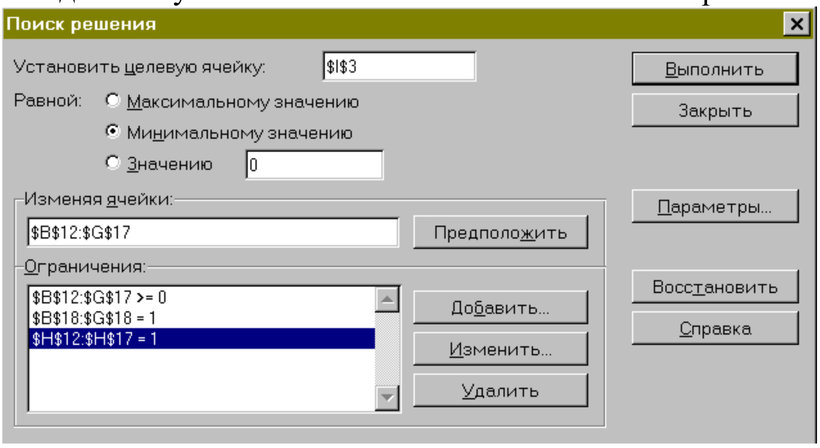
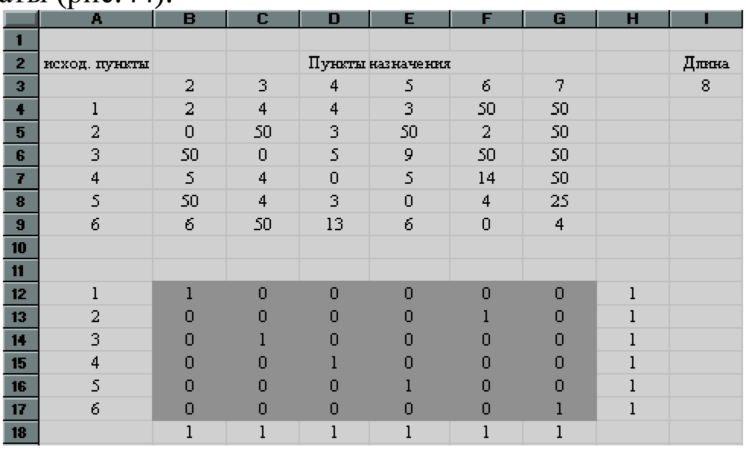


Рис.43. Диалоговое окно Поиска решения.

3) Выполнив процедуру «Поиск решения» в первоначальной таблице получим следующие результаты (рис.44):



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	исход. пункты			Пункты назначения					Длина
3		2	3	4	5	6	7		8
4	1	2	4	4	3	50	50		
5	2	0	50	3	50	2	50		
6	3	50	0	5	9	50	50		
7	4	5	4	0	5	14	50		
8	5	50	4	3	0	4	25		
9	6	6	50	13	6	0	4		
10									
11									
12	1	1	0	0	0	0	0	1	
13	2	0	0	0	0	1	0	1	
14	3	0	1	0	0	0	0	1	
15	4	0	0	1	0	0	0	1	
16	5	0	0	0	1	0	0	1	
17	6	0	0	0	0	0	1	1	
18		1	1	1	1	1	1		

Рис. 44. Результат решения задачи.

Получили длину и стоимость кратчайшего пути: 1 →2→ 6→7 , длина = 8.

Тема 8: Теория игр.

Пусть игра m×n задана платёжной матрицей $C = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Игрок A применяет стратегии $A_1, A_2,..., A_m$, а игрок В − стратегии $B_1, B_2,..., B_n$.

Смешанными стратегиями игроков А и В называют векторы $P = (p_1, p_2,..., p_m)$ и $Q = (q_1, q_2,..., q_m)$, координаты которых равны вероятностям применения игроками своих чистых стратегий $A_1, A_2,..., A_m$ и $B_1, B_2,..., B_n$ соответственно.

События, состоящие в том, что игроки применяют какую-либо из своих чистых стратегий, образуют для каждого игрока полную группу событий. Следовательно, сумма координат векторов P и Q равна единице:
$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1;$$
$$q_1 + q_2 + ... + q_m = 1.$$

Кроме того, по свойству вероятности, для координат смешанных стратегий выполняются неравенства:
$$0 \le p_i \le 1, i = \overline{1, m};$$
$$0 \le q_j \le 1, i = \overline{1, n}.$$

Оптимальная стратегия P^* обеспечивает игроку А средний выигрыш, не меньший цены игры ν, при любой стратегии игрока В и выигрыш, равный цене игры ν, при оптимальной стратегии Q^* игрока В.

Без ограничения общности полагаем далее, что $\nu>0$. Применяя оптимальную стратегию P^* против любой чистой стратегии Q_j игрока В, игрок А получает средний выигрыш или математическое ожидание выигрыша $a_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m \ge \nu$.

Таким образом, вычисляя средние выигрыши игрока А для каждой из чистых стратегий игрока В, получаем систему неравенств
$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \ge \nu \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \ge \nu \\ .... \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m \ge \nu \end{cases}$$

Разделив каждое из неравенств на цену игры ν и вводя новые переменные $x_1 = \frac{p_1}{\nu},\ x_2 = \frac{p_2}{\nu},\ \dots,\ x_m = \frac{p_m}{\nu}$, получим систему
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m \ge 1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{m2} x_m \ge 1 \\ .... \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... + a_{mn} x_m \ge 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Целевую функцию для игрока А найдём, учитывая, что он стремится получить максимальный выигрыш в игре. Разделив равенство $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$ на цену игры ν, получим равенство $x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{\nu}$, которое будет иметь наименьшее значение при достижении игроком А максимального выигрыша. Поэтому в качестве целевой функции можно взять функцию $F(x) = x_1 + x_2 + ... + x_m$ (2) и задачу линейного программирования сформулировать следующим образом: определить значения переменных $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$ так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (1) и при этом целевая функция (2) имела минимальное значение.

Решая задачу (1) − (2), получаем оптимальную стратегию задачи линейного программирования $X^* = \left(x_1^*, x_2^*,..., x_m^*\right)$, для которой значение целевой функции равно $F(X^*) = \min F(X)$. Находим цену игры $\nu = \frac{1}{F(X^*)}$. Вычисляем координаты смешанной оптимальной стратегии P* игрока A: $p_i = \nu x_i$, $i = \overline{1,m}$. Чтобы найти оптимальную стратегию игрока B , составляем двойственную к (1) − (2) задачу и решаем ее. Получаем оптимальную стратегию $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*\right)$ и вычисляем координаты оптимальной смешанной стратегии Q* игрока B: $q_j = \nu y_j$, $j = \overline{1,n}$. В ходе решения двойственной задачи определяется максимальное значение целевой функции $G(Y^*) = \max G(Y)$, и цена игры может быть определена из равенства $\nu = \dfrac{1}{G(Y^*)}$. Таким образом, найдено оптимальное решение для игры.

Решение матричных игр в смешанных стратегиях с помощью Excel.

Любая парная игра с нулевой суммой может быть сведена к решению задачи линейной оптимизации. Используя значение функции и неизвестных взаимно двойственных задач линейной оптимизации, легко найти цену игры и вероятности применения стратегий каждым из игроков.

Задача 8.1. Найти решение парной игры с платежной матрицей

I \ II	1	2	3	4
1	24	20	18	21
2	19	22	24	20
3	14	16	20	25

Решение: Для данной задачи $\alpha \neq \beta$ (седловая точка отсутствует). Запишем пару двойственных задач линейной оптимизации для решения игры.

Задача 1

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 24x_1 + 19x_2 + 14x_3 \geq 1, \\ 20x_1 + 22x_2 + 16x_3 \geq 1, \\ 18x_1 + 24x_2 + 20x_3 \geq 1, \\ 21x_1 + 20x_2 + 25x_3 \geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 2

$$Z = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 24u_1 + 20u_2 + 18u_3 + 21u_4 \leq 1, \\ 19u_1 + 22u_2 + 24u_3 + 20u_4 \leq 1, \\ 14u_1 + 16u_2 + 20u_3 + 25u_4 \leq 1, \\ u_1, u_{2,} u_3, u_4 \geq 0 \end{cases}$$

Решим исходную и двойственную задачи с помощью Excel. Внесем данные на рабочий лист в соответствии с Рис.45.

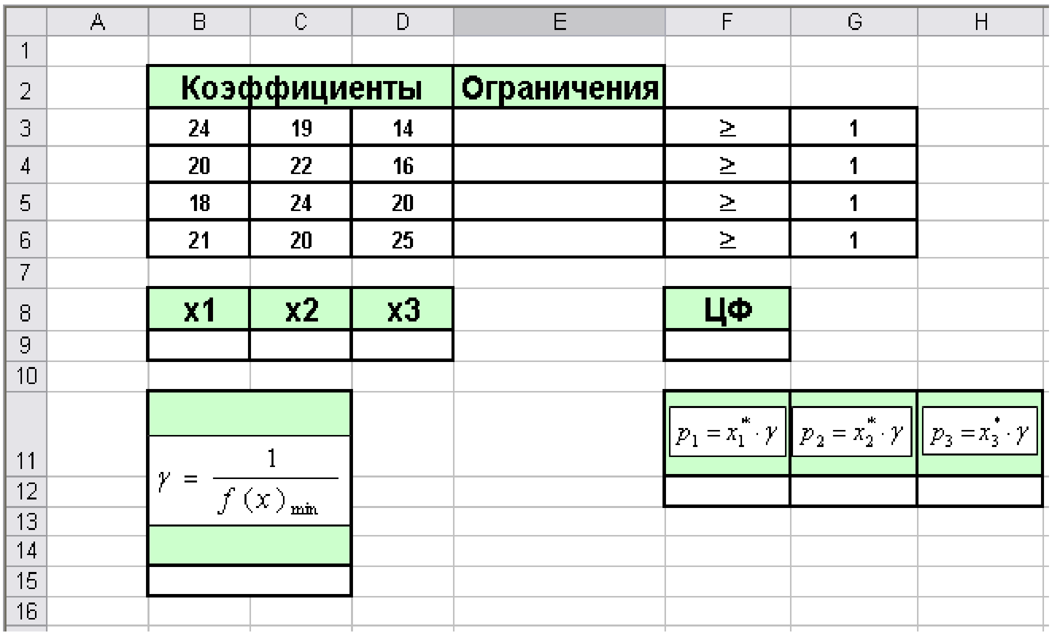


Рис.45. Данные для решения исходной задачи 1.

В ячейки E3:E6 введем формулы для расчета функций – ограничений, ячейки B9:D9 отведем для переменных x_j, ячейку B15 – для расчетного значения цены игры γ, диапазон ячеек F12:H12 – для расчетных значений вероятностей применения стратегий игроком I, и, наконец, ячейку F9 – для расчета целевой функции. Введем все необходимые формулы в соответствующие ячейки. Установим все необходимые ограничения исходной задачи перед запуском Поиска решения. С помощью Поиска решения получим следующий ответ:

X_1	**X_2**	**X_3**	**ЦФ**		
0,020182	**0,02474**	**0,003255**	**0,048177**		
			P1	**P2**	**P3**
			0,4189	**0,5135**	**0,0676**
γ					
20,75676					

$$p_I^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (0{,}4189; 0{,}5135; 0{,}0676)$$

Решим двойственную задачу. Во избежание возможных ошибок расположим данные для ее решения на отдельном рабочем листе Excel (Рис.46.).

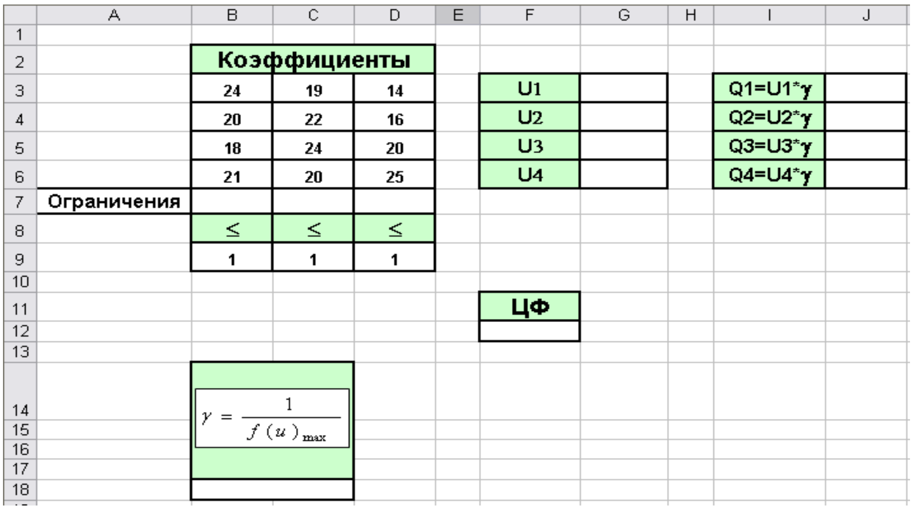


Рис.46. Данные для решения двойственной задачи 2

Ввод данных и формул производится аналогично предыдущему случаю. Поиск решения дает ответ:

U_1	0,0026	$Q_1=U_1*\gamma$	0,0541	ЦФ
U_2	0,0195	$Q_2=U_2*\gamma$	0,4054	0,048177
U_3	0,0000	$Q_3=U_3*\gamma$	0,0000	-
U_4	0,0260	$Q_4=U_4*\gamma$	0,5405	20,75676

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока II есть

$$q_{II}^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*) = (0{,}0541; 0{,}4054; 0; 0{,}5405).$$

Игры с природой

В рассматриваемых ранее стратегических играх принимают участие противоборствующие стороны. Однако имеется обширный класс задач, в которых неопределенность, сопровождающая любое действие, не связана с сознательным противодействием противника, а зависит от некой, не известной игроку I объективной действительности (природы). Такого рода ситуации принято называть играми с природой. Природа (игрок II) рассматривается при этом как некая незаинтересованная инстанция, которая не выбирает для себя оптимальных стратегий. Возможные состояния природы (ее стратегии) реализуются случайным образом. Часто задачи такого рода называют задачами теории статистических решений.

Задача 8.2. Имеется три участка земли, отличающихся по степени влажности. Возможные стратегии сельскохозяйственного предприятия состоят в том, что оно может высаживать некоторую культуру на участках 1, 2 или 3. Урожайность на любом из трех участков, естественно, зависит от количества осадков, выпавших в период вегетации. Обозначим возможные варианты погодных условий (стратегии природы) через П1, П2 и П3, где П1 – соответствует выпадению осадков ниже нормы, П2 – нормальному количеству осадков, и П3 – количеству осадков ниже нормы.

Выигрыш сельскохозяйственного предприятия естественно ассоциировать с урожайностью культуры с 1 гектара. Платежная матрица, т.е. совокупность значений урожайности для каждой стратегии предприятия и природы, приведена ниже.

Платежная матрица

	П1	П2	П3
А1	220	200	110
А2	200	230	150
А3	130	240	260

Пусть на основе обработки многолетних статистических данных о погодных условиях в данном регионе получены следующие значения вероятностей засушливого, нормального по количеству осадков и дождливого сезонов $q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0{,}42$; $q_3 = 0{,}33$.

Требуется выбрать стратегию, обеспечивающую максимальный средний выигрыш (максимальный средний урожай).

Решение: Введем данные на рабочий лист в соответствии с Рис.47.

	A	B	C	D	E
1		Погодные условия			
2	Стратегия сельскохозяйственного предприятия	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Средний выигрыш (средняя урожайность)
3	A_1	220	200	110	
4	A_2	200	230	150	
5	A_3	130	240	260	
6		Максимальный средний выигрыш			
7		Оптимальная стратегия			
8					
9					
10					
11		Вероятность $П_1$ (меньше нормы)	Вероятность $П_2$ (норма)	Вероятность $П_3$ (больше нормы)	
12		q_1	q_2	q_3	
13		0,25	0,42	0,33	

Рис.47. Данные для решения.

В ячейку E3 введем формулу для определения среднего выигрыша =СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$13:$D$13)и скопируем ее в ячейки E4, E5. В ячейку E6 введем формулу для определения максимального среднего выигрыша =МАКС(E3:E5); наконец, в ячейку E7 введем логическую функцию, с помощью которой будет автоматически определяться оптимальная стратегия поведения предприятия:

=ЕСЛИ(И(E3>E4;E3>E5);A3;ЕСЛИ(И(E4>E3;E4>E5);A4;A5))

В результате получим следующее решение задачи

Стратегия сельскохозяйственного предприятия	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Средний выигрыш (средняя урожайность)
A_1	220	200	110	175,3
A_2	200	230	150	196,1
A_3	130	240	260	219,1
	Максимальный средний выигрыш			219,1
	Оптимальная стратегия			A3

В условиях полной неопределенности, в отличие от только что рассмотренного случая, используется ряд критериев, не требующих знания вероятностей состояний природы. Наиболее широко используемыми являются при этом критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Критерий Вальда. Данный критерий базируется на принципе наибольшей осторожности и использует выбор наилучшей из наихудших стратегий (в связи с чем его относят к группе критериев крайнего пессимизма).

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат представляет собой потери ЛПР, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий. В этом случае для определения оптимальной стратегии необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент, а затем выбирается действие (строка), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов.

Наоборот, если в исходной матрице по условию задачи результат представляет выигрыш, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий. Иначе говоря, в качестве оптимальной *рекомендуется выбирать ту стратегию, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш,* $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$.

Следует отметить, что критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам вследствие своей чрезмерной "пессимистичности", в связи с чем, часто при решении аналогичных задач используется близкий по смыслу критерий Сэвиджа.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Данный критерий использует матрицу рисков. При использовании критерия Сэвиджа рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях величина риска принимает наименьшее значение:

$r = \min_i \max_j a_{ij}$ (8.1.). Иначе говоря, данный критерий *рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).*

Критерий Гурвица. Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем введения некоторых весовых коэффициентов λ и $1-\lambda$, где $0 \le \lambda \le 1$. При этом предполагается, что природа может находиться в самом невыгодном для ЛПР состоянии с вероятностью λ и в самом выгодном – с вероятностью $1-\lambda$. Этот критерий называют еще принципом пессимизма - оптимизма. Он может быть выражен в виде соотношения:

$S = \max_i \left[\lambda \min_i a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij}\right]$, где $0 \le \lambda \le 1$ (8.2.)

Очевидно, что при $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ - в критерий крайнего оптимизма. Значение λ выбирается в зависимости от склонности ЛПР к пессимизму или оптимизму, а также на основании опыта, здравого смысла и т.д.

Задача 8.2. Торговое предприятие планирует продажу сезонных товаров с учетом возможных вариантов поведения покупательского спроса $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Предприятием разработано три хозяйственных стратегии продажи товаров $А_1$, $А_2$, $А_3$. Требуется найти оптимальное поведение торгового предприятия, пользуясь критериями Вальда, Гурвица (при $\lambda = 0{,}4$) и Сэвиджа, если товарооборот, зависящий от стратегий предприятия и покупательского спроса представлен в виде следующей платежной матрицы.

Платежная матрица

$П_j$ / A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
А1	280	140	210	245
А2	420	560	140	280
А3	245	315	350	490

<u>Решение:</u> Введем данные на рабочий лист в соответствии с Рис.47.
Рассмотрим вначале поиск оптимальных стратегий по критериям Вальда и Гурвица.

Критерий Вальда. Введем в ячейку F5 формулу для нахождения минимального значения строки 5 (=МИН(B5:E5)) и скопируем данную функцию в ячейки F6, F7. В ячейку F8 введем формулу для нахождения максимального из значений ячеек F5:F7 (=МАКС(F5:F7)). В ячейку F9 введем логическую функцию, позволяющую автоматизировать процесс поиска оптимальной стратегии по методу Вальда:

=ЕСЛИ(И(F5>F6;F5>F7);A5;ЕСЛИ(И(F6>F5;F6>F7);A6;A7))

Критерий Гурвица. Введем в ячейку F15 формулу для нахождения произведения минимального из значений строки 15 на параметр λ (=МИН(B15:E15)*$A$22) и скопируем ее в ячейки F16, F17. В ячейку G15 введем формулу для расчета произведения максимального из значений ячеек строки 15 на $(1-\lambda)$ (=МАКС(B15:E15)*$B$22) и скопируем эту формулу в ячейки G16:G17.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Критерий Вальда**							
2								
3	Стратегии	Покупательский спрос				$\min_j a_{ij}$		
4		П1	П2	П3	П4			
5	А1	280	140	210	245			
6	А2	420	560	140	280			
7	А3	245	315	350	490			
8			Выигрыш					
9			Оптимальная стратегия					
10								
11	**Критерий Гурвица**							
12								
13	Стратегии	Покупательский спрос				$S_1 = \lambda \cdot \min_j a_{ij}$	$S_2 = (1-\lambda)\cdot \max_j a_{ij}$	$S = S_1 + S_2$
14		П1	П2	П3	П4			
15	А1	280	140	210	245			
16	А2	420	560	140	280			
17	А3	245	315	350	490			
18							Выигрыш	
19						Оптимальная стратегия		
20								
21	λ=	$1-\lambda$=						
22	0,4	0,6						

Рис. 47. Данные для решения примера (критерии Вальда и Гурвица)

В ячейке H15 разместим формулу для суммы значений, находящихся в ячейках F15, G15 и скопируем ее в ячейки H16:H17. В ячейку H18 введем формулу для нахождения наибольшего из значений в ячейках H15:H17 (=МАКС(H15:H17)). В ячейку H19 введем логическую функцию

=ЕСЛИ(И(H15>H16;H15>H17);A15;ЕСЛИ(И(H16>H15;H16>H17);A16;A17)).

Критерий Сэвиджа. Введем данные в соответствии с Рис.48.

Вначале рассчитаем и разместим в ячейках B38:E40 матрицу рисков. В ячейку B32 введем формулу =МАКС(B29:B31) и скопируем ее в ячейки C32:E32. Введем в ячейку B38 формулу =B$32-B29 и скопируем эту формулу в диапазон ячеек B38:E40. В ячейку F38 введем формулу =МАКС(B38:E38) и скопируем ее в ячейки F39:F40.

	A	B	C	D	E	F
24	**Критерий Сэвиджа**					
25						
26						
27	**Стратегии**	**Покупательский спрос**				
28		**П1**	**П2**	**П3**	**П4**	
29	**А1**	**280**	**140**	**210**	**245**	
30	**А2**	**420**	**560**	**140**	**280**	
31	**А3**	**245**	**315**	**350**	**490**	
32	β_j					
33						
34						
35						
36	**Стратегии**	**Покупательский спрос**				r_i
37		**П1**	**П2**	**П3**	**П4**	
38	**А1**					
39	**А2**					
40	**А3**					
41			**Риск предприятия r =**			
42			**Оптимальная стратегия**			

Рис.48. Данные для решения задачи (критерий Сэвиджа)

В ячейку 41 введем формулу для расчета минимального риска =МИН(F38:F40), а в ячейку F42 – логическую функцию, имеющую следующий вид:

=ЕСЛИ(И(F38<F39;F38<F40);A38;ЕСЛИ(И(F39<F38;F39<F40);A39;A40)

Очевидно, данная логическая функция позволяет автоматизировать процесс выбора оптимальной стратегии при применении рассматриваемого критерия.

Результат поиска оптимальных стратегий по всем трем критериям приводится на следующей странице.

Характерной особенностью игровых методов теории принятия решений является относительная простота нахождения оптимальных стратегий выбора. Применительно к информационным технологиям на базе Excel это выражается в отсутствии необходимости использования пакета Поиск решения.

Критерий Вальда							
Стратегии	Покупательский спрос						
	П1	П2	П3	П4			
А1	280	140	210	245	140		
А2	420	560	140	280	140		
А3	245	315	350	490	245		
		Выигрыш			245		
		Оптимальная стратегия			А3		
Критерий Гурвица							
Стратегии	Покупательский спрос						
	П1	П2	П3	П4			
А1	280	140	210	245	56	168	224
А2	420	560	140	280	56	336	392
А3	245	315	350	490	98	294	392
						Выигр	392

					Оптимальная стратегия		А3
$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$						
Критерий Сэвиджа							
Стратегии	Покупательский спрос						
	П1	П2	П3	П4			
А1	280	140	210	245			
А2	420	560	140	280			
А3	245	315	350	490			
r_j	420	560	350	490			
Стратегии	Покупательский спрос						
	П1	П2	П3	П4			
А1	140	420	140	245	420		
А2	0	0	210	210	210		
А3	175	245	0	0	245		
		Риск предприятия r =			210		
		Оптимальная стратегия			А2		

VII. КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1 (охватывает темы: 1, 2, 3, 4).

Задание 1. Решить задачу.

Фирма реализует часть товара на внутреннем рынке, а другую поставляет на экспорт. Связь цены товара p_1 и его количества Q_1, проданного на внутреннем рынке, описывается кривой спроса: $3p_1 + 5Q_1 = 620$. Аналогично для экспорта кривая спроса имеет вид: $2p_2 + 3Q_2 = 840$. Суммарные затраты заданы функцией $C = 5000 + 30(Q_1 + Q_2)$. Определить, какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальной.

Задание 2. Составить экономико-математическую модель задачи линейного программирования

Для изготовления трех видов продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ используется три вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Запас ресурсов составляет соответственно А, В, С. На изготовление единицы продукции $П_1$ затрачивается a_1 ед. ресурса S_1, b_1 ед. S_2, c_1 ед. S_3. На производство единицы $П_2$ затрачивается соответственно a_2, b_2, c_2. На производство единицы $П_3$ соответственно a_3, b_3, c_3. Прибыль, получаемая от реализации продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ составляет соответственно P_1, P_2, P_3 денежных единиц за одно изделие. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной, если A=90; B=100; C=120; p_1=50; p_2=40; p_3=30; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 3. Двойственная задача.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Известны запасы ресурсов и число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции (числа условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции.	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	0	1
S_4	21	3	0

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3 рубля. Найти такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной. Сформулировать экономически и математически для данной задачи двойственную. Найти решение двойственной задачи, используя основные теоремы двойственности. Провести анализ устойчивости двойственных оценок.

Задание 4. Решить транспортную задачу.

Есть три поставщика товаров с соответствующими запасами M_1, M_2, M_3 и три потребителя со спросами N_1, N_2, N_3 соответственно. Даны коэффициенты затрат на доставку единицы товара для каждой пары «поставщик-потребитель» a_{ij}. Найти оптимальное распределение поставок, соответствующее минимальным затратам на перевозку.

Данные	**M_1**	**M_2**	**M_3**	**N_1**	**N_2**	**N_3**	**a_{11}**	**a_{12}**	**a_{13}**	**a_{21}**	**a_{22}**	**a_{23}**	**a_{31}**	**a_{32}**	**a_{33}**
	1	1	1	9	1	1	2	1	3	4	2	6	3	5	2

Контрольная работа №2 (охватывает темы: 5, 6, 7, 8).

Задание 1. Решить задачу целочисленного программирования.

Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет a усл. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей b м^2.
Фермер может заказать оборудование двух видов: мене мощные машины A стоимостью c_1 усл. ед., требующие производственной площади d_1 м^2 (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену k_1 т. зерна, и более мощные машины B стоимостью c_2 усл. ед., занимающие площадь d_2 м^2 и обеспечивающие за смену сортировку k_2 т. зерна.

Определить оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий фермеру при данных ограничениях максимум общей производительности сортировки, если он может приобрести не более 8 машин типа B.

Данные	Параметры							
	a	b	c_1	c_2	d_1	d_2	k_1	k_2
1	34	60	3	4	3	5	2	3

Задание 2. Решить задачу дробно-линейного программирования.

Цена 1 м тканей первого типа 2 у. е., второго типа – 2 у. е. В 1 м ткани первого типа содержится 2 ед. натуральных и 2 ед. искусственных волокон. В 1 м ткани второго типа содержится 2 ед. натуральных и 2ед. искусственных волокон. На производство тканей должно быть израсходовано не менее *3* тыс.ед. натуральных и не более *2* тыс.ед. искусственных волокон. Определить план производства тканей с общей минимальной себестоимостью.

Задание 3. Решить задачу методом динамического программирования.

Для двух предприятий выделено 1000 единиц средств. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от х единиц средств, вложенных в первое предприятие, равен 3х, а доход от у единиц средств, вложенных во второе предприятие, равен 2у. Остаток средств к концу года составляет 0,1х для первого предприятия и 0,5у для второго предприятия.

Задание 4. Решить задачу о стратегии игроков.

Найти стратегии игроков А, В и цену игры, заданной матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

VIII. ТЕСТЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ

1. Задача линейного программирования

$$z = x_1 + 4x_2 - 13x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 17, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \end{cases} .$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

записана: а) в общей форме б) в стандартной форме в) в канонической форме

2. По итоговой симплексной таблице оптимальное решение ЗЛП равно:

БП	X_1	X_2	X_3	X_4	B_i
X_3	-2	3	1	0	6

X_4	-1	4	0	1	4
F	-1	3	0	0	0

А) $X_{опт} = (6, 4, 0, 0)$. Б) $X_{опт}$ не существует. В) $X_{опт} = (0, 0, 6, 4)$.

3. В каких формах ЗЛП обязательно условие неотрицательности переменных?

А) общей; Б) стандартной; В) канонической.

4. Методом Жордана-Гаусса найдено базисное решение $X = (x_1, x_2, 0)$:

БП	X_1	X_2	X_3	b_i
	2	-3	4	3
	3	-4	6	5

а) $X = (3, 1, 0)$, б) $X = (1, 3, 0)$, в) $X = (-1, 1, 0)$, г) $X = (2, 1, 0)$.

5. Согласно симплексным преобразованиям для улучшения опорного плана за разрешающий элемент нужно взять:

БП	X_1	X_2	X_3	X_4	B_i	CO
X_3	1	0	1	2	12	
X_4	1	1	0	3	4	
F	-2	0	0	-4	0	

А) a_{24} Б) a_{12} В) a_{21} Г) a_{13} Д) a_{14}

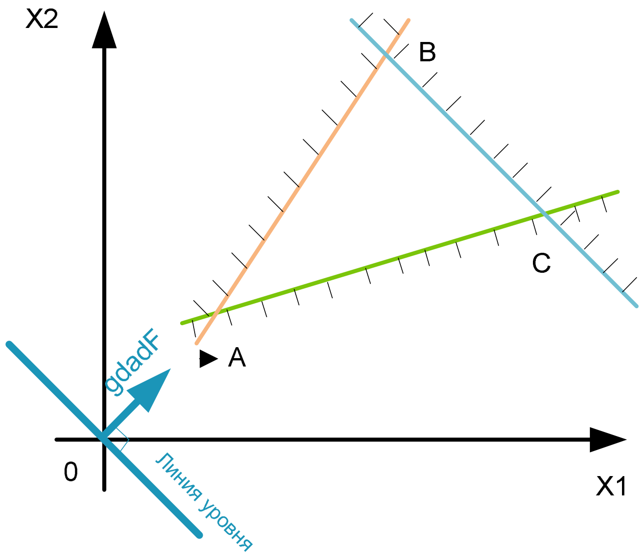
6. Оптимальным решением ЗЛП (мах) является

БП	X_1	X_2	X_3	X_4	B_i	CO
	7	2	1	0	14	
	5	6	0	1	30	
F	2	-5	0	0	12	

А) $X_{опт} = (0, 5, 4, 0)$, $F_{\max} = 37$. Б) $X_{опт} = (14, 30, 0, 0)$, $F_{\max} = 12$.

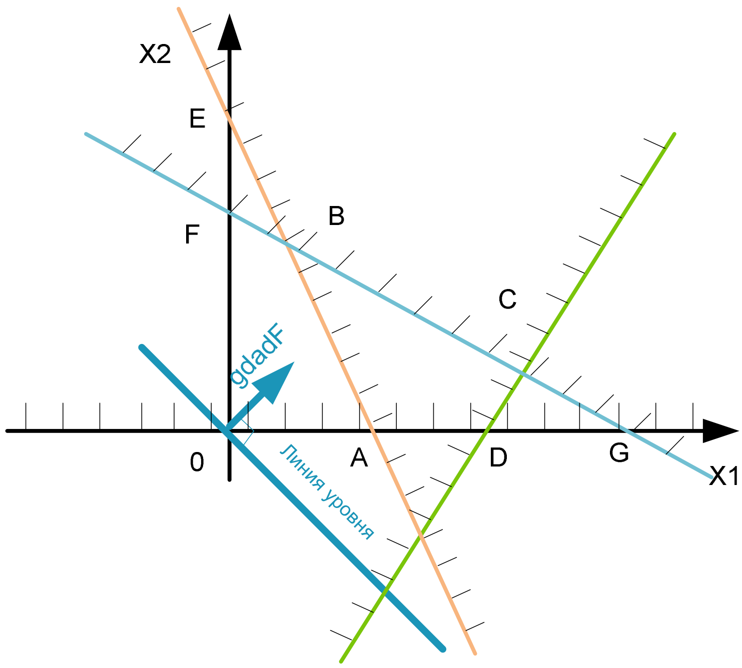
В) $X_{опт} = (0, 6, 4, 0)$, $F_{\max} = 42$.

7. Укажите в какой угловой точке ОДР целевая функция достигнет максимума?



А) в точке А. Б) в точке В. В) в точке С. Г) задача не имеет решения.

8. Используя графический метод, укажите $f_{\max}$, $f_{\min}$



А) $f_{\max} = f(C)$.

Б) $f_{\max} = f(B)$.

В) $f_{\max} = \infty$.

Г) $f_{\min} = f(A)$.

Д) $f_{\min} = f(B)$.

Е) $f_{\min} = -\infty$.

9. Перечислите формы ЗЛП:

А) линейная;

Б) общая;

В) полная;

Г) стандартная;

Д) каноническая;

Е) динамическая.

10. Установить соответствие между записями и названиями форм ЗЛП:

1. $$z = 2x_1 - x_2 \to \min,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}\quad x_1, x_2 \ge 0$$

2. $$F = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

3. $$f = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

а) каноническая

б) общая

в) стандартная

11. Методом Жордана-Гаусса найдено базисное решение $X = (x_1, x_2, 0)$**:**

БП	X_1	X_2	X_3	b_i
	2	-3	4	3
	3	4	6	5

А) $X=(-1,1,0)$, В) $X=(3,1,0)$,

Б) $X=(1,3,0)$, Г) $X=(2,1,0)$.

12. Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=6, \\ 3x_1-4x_2+6x_3=5 \end{cases}$$

базисное решение со свободной переменной x_1 **равно**:

а) $X=(0,1,3/2)$, в) $X=(0,-5,1)$,

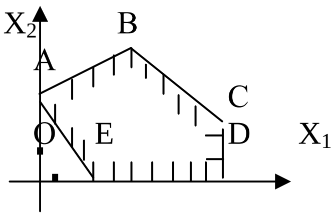
б) $X=(0,2,1)$, г) $X=(0,3/2,1)$.

IX. КОМПЛЕКТ ЗАЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ

Зачетные задания.

Теоретическая часть:

1. В какой точке множества допустимых решений достигается минимум целевой функции $z(x)=-2x_1+3x_2$,



а) в точке А

б) в точке В

в) в точке С

г) в точке Е

д) в точке Д

2.Определить, какая из задач линейного программирования записана в канонической форме?

а) $z(x)=3x_1+2x_2-x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3\le 2 \\ 2x_1+x_2-3x_3\ge 3 \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

б) $z(x)=3x_1+2x_2-x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3\ge 2 \\ 2x_1+x_2-3x_3\ge 3 \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

в) $z(x)=3x_1+2x_2-x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=3 \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

Платежная матрица не имеет седловой точки, если:

а) $\alpha<\beta$ б) $\alpha=\beta$ с) $\alpha>\beta$

Практическая часть:

Задача 1: Решить задачу линейного программирования, используя пакет MS Excel «Поиск решения».

Фирма выпускает два вида древесно-стружечных плит – обычные и улучшенные. При этом производятся две основные операции – прессование и отделка.

Затраты	Партия из 100 плит		Имеющиеся ресурсы на месяц
	обычных	улучшенных	
Материал, кг	20	40	4000
Время на прессование, ч	4	6	900
Время на отделку, ч	4	4	600
Средства, у. е.	30	50	6000

Требуется определить, какое количество плит каждого типа можно изготовить в течение месяца так, чтобы обеспечить максимальную прибыль при имеющихся ограничениях на ресурсы (материал, время, затраты).

Задача 2: Решить транспортную задачу, используя пакет MS Excel «Поиск решения».

Из трех холодильников A_1, A_2 и A_3, вмещающих мороженную рыбу в количествах 320, 280 и 350 т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 в количествах 140, 110, 230, 150 и 220 т. Известны стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника в магазин.

Холодильники	Магазины				
	1	2	3	4	5
1	20	23	20	15	24
2	29	15	16	19	29
3	6	11	10	9	8

Составить план перевозок, при котором их общая стоимость была минимальной.

Задача 3: решить транспортную задачу, используя пакет MS Excel «Поиск решения».

Компания планирует производство некоторой продукции на трех станках, которой должно быть изготовлено не менее 2000 единиц. Минимальная производительность любого станка равна 500 единиц. Следующая таблица содержит необходимую информацию для рассматриваемой задачи.

Станок	Расходы на переналадку	Затраты на производство единицы продукции	Производительность (в единицах продукции)
1	300	2	600
2	100	10	800

Найти оптимальное решение задачи.

X. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Ф.И.О. должность	Ученая степень и ученое звание	Вид занятия
Попова А.М. ассистент		Лабораторная работа