А. Е. Ситун

Определенный интеграл в экономических задачах

Учебное пособие

P

P_0

Q_0 Q

Министерство образования и науки Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

А.Е. Ситун

Определенный интеграл в экономических задачах

Учебное пособие

Благовещенск
2005

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Ситун А.Е.

Определенный интеграл в экономических задачах. Учебное пособие для студентов экономических специальностей. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2005

Пособие содержит теоретические сведения по теме «Определенный интеграл в экономических задачах». Подробно рассматриваются методы решения задач по этой теме. Приводятся примеры экономических задач.

Пособие предназначено для студентов экономических специальностей.

Рецензенты: Л.В. Насонова, доц. кафедры математического анализа БГПУ, канд. физ.-мат. наук;
Т.В. Труфанова, зав. кафедрой МАиМ АмГУ, канд. техн. наук, доцент.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Интеграл – одно из основных понятий математического анализа и всей математики.

Его возникновение связано с двумя задачами:

- восстановление функции по её производной (неопределённый интеграл);

- вычислении площади, заключённой между графиком функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ и осью абсцисс (определенный интеграл).

Эти интегралы связаны между собой. Изучение свойств и вычисление их составляет основную задачу интегрального исчисления.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная, неотрицательная функция $f(x)$, график которой изображен на рис. 1.

Рассмотрим задачу: требуется определить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$.

Выполним следующие преобразования.

1. Разобьем отрезок [а, в] на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$
2. Выберем на каждом из частных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i: $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $0 < i < n$.
3. Определим значения функции $f(x)$ в этих точках: $f(\xi_i)$.
4. Составим сумму произведений

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,, \; (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)\,, \qquad (1)$$

которая называется **интегральной** суммой для функции $f(x)$ на $[a,b]$.

5. Вычислим предел интегральной суммы, если он существует при $\max \Delta x_i \to 0$

$$S_n = \lim_{\max\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{2}$$

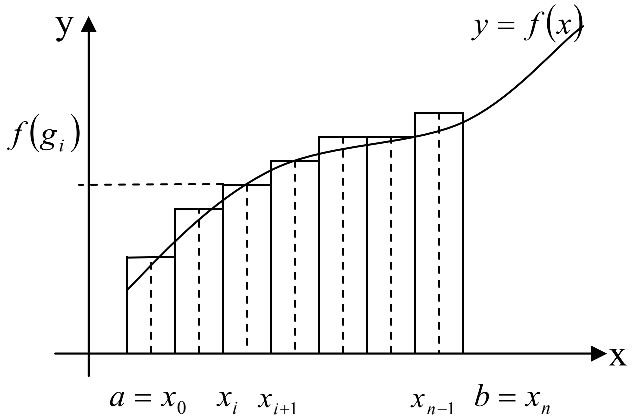

Рис. 1

<u>Определение 1.</u> Если предел интегральной суммы (1) при стремлении $\max\Delta x_i \to 0$ существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и выбора точек ξ_i, то этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{3}$$

Функция $f(x)$ в этом случаи называется интегрируемой, число a – нижним пределом, число b – верхним пределом.

Величина определенного интеграла однозначно определяется видом функции $f(x)$ и числами a и b.

Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_b^a f(z)dz . \tag{4}$$

Классы интегрируемых функций

На вопрос о существовании определенного интеграла отвечают следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.

Теорема 2. Если определенная и ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 3. Монотонная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Понятие определенного интеграла было введено для непрерывных функций французским математиком О. Коши (1823 г.). Для функций не обязательно непрерывных немецким математиком Б. Риманом (1853 г.).

Обычно предел (3) называют интегралом Римана и функцию, для которой этот предел существует, называют интегрируемой в смысле Римана.

В случаи, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то говорят, что она интегрируема в смысле Коши.

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (3) связано с трудностями – интегральные суммы имеют громоздкий вид, что затрудняет вычисление пределов.

На этом пути не удалось создать общих методов. Поэтому постановка таких задач и методы их решения носили частный характер.

Общий метод таких задач указали английский математик и физик И.Ньютон и немецкий математик Г.В.Лейбниц независимо друг от друга. Они показали, что вычисление определенного интеграла от функции может быть сведено к отысканию её первообразной (т.е. неопределенного интеграла).

Геометрический смысл интеграла

Если $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[a,b]$ рис.1, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, т.е.

$$S=\int_a^b f(x)dx\,. \tag{5}$$

Экономический смысл интеграла

Пусть функция $Z=f(t)$ описывает изменения производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объём продукции Q, произведенный за промежуток времени $[0,T]$.

Разобьем отрезок $[0,T]$ на промежутки времени точками $0=t_0<t_1<...<t_n=T$. Для величины объем продукции ΔQ, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1},t_i]$, имеем

$$\Delta Q=f(\xi_i)\Delta t_i\text{, где}$$

$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1,2,...,n.$.

Тогда $Q=\sum_{i=1}^{n}Q_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i\,.$

При стремлении $\max\Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$Q=\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i\,.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$Q = \int_0^T f(t)dt \,, \qquad (6)$$

т.е. если $f(t)$ - производительность труда в момент времени t, то $\int_0^T f(t)dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток $[0,T]$.

§2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. По определению полагаем:

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2. По определению полагаем:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

3. Для любых a, b и c имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

5.Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Данное свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Будем полагать далее, что $a < b$.

6. Если $f(x) \geq 0$ всюду на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Если $f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$$

8. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

9. Если M и m соответственно максимум и минимум функции $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

10. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется значение $g \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(g)(b-a).$$

Это свойство называется теоремой о среднем, которая утверждает, что найдется такая точка g на отрезке $[a,b]$, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ равна площади прямоугольника со сторонами $f(g)$ и $(b-a)$ (рис. 2).

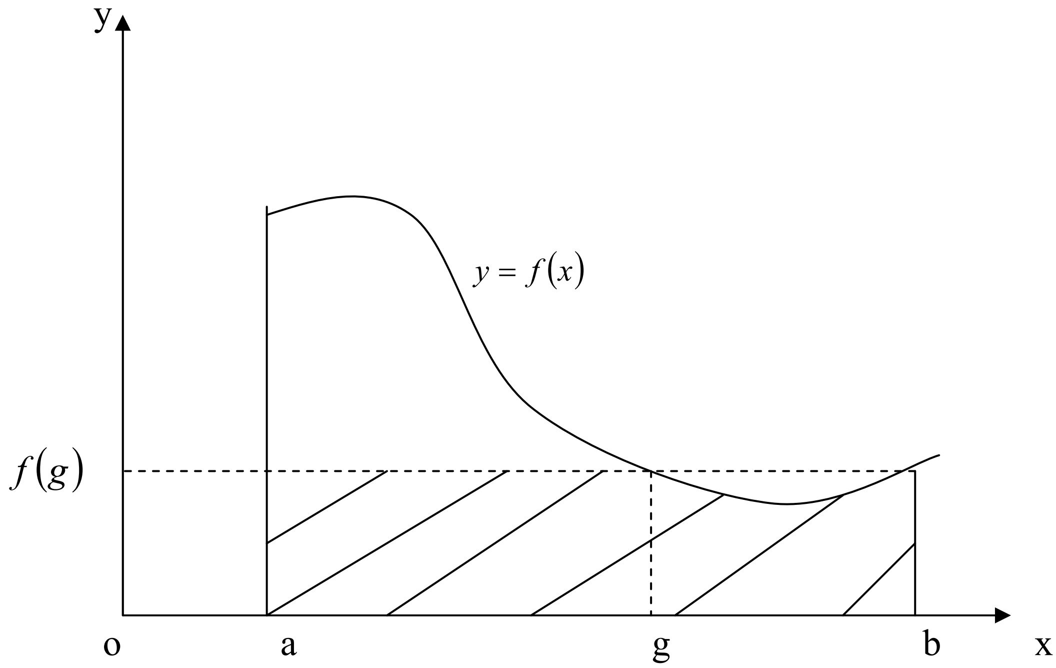

Рис.2

§3. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Основной формулой интегрального исчисления называют формулу Ньютона-Лейбница.

<u>Теорема 4.</u> Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - любая первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,. \tag{7}$$

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница (7) осуществляется в два шага.

На первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интерграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

На втором шаге применяется собственно формула Ньютона-Лейбница. Для удобства записи решений формулу преобразуют к виду

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,. \qquad (8)$$

По определению полагают $F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a)$ и т.к. используется любая первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$, то выбирают самую простую при $C = 0$.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 x^5 dx$.

Решение. Произвольная первообразная для функции $f(x) = x^5$ имеет вид $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$. Полагая $C = 0$ и применяя формулу Ньютона-Лейбница получим:

$$\int_0^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{0}{6} = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$.

Решение. $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

Пример 3. $\int_1^5 \frac{3x^2+5}{x}dx$.

Решение.

$$\int_1^5 \frac{3x^2+5}{x}dx = \int_1^5 \frac{3x^2}{x}dx + \int_1^5 \frac{5dx}{x} = 3\int_1^5 xdx + 5\int_1^5 \frac{dx}{x} = 3\frac{x^2}{2}\Big|_5^1 + 5\ln|x|\Big|_5^1 =$$

$$= \frac{3}{2}(25-1) + 5(\ln 5 - \ln 1) = 36 + 5\ln 5\,.$$

Пример 4. Вычислить $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \Big|_{-1}^{1} = arctg\ (1) - arctg\ (-1) = \frac{П}{4} - (-\frac{П}{4}) = \frac{П}{2}.$$

§4. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Замена переменной в определенном интеграле.

Теорема 5. Пусть:

1. $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a,b]$;

2. Функция $\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и множество значений функции $\varphi(t)$ является отрезок $[a,b]$;

3. $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$.

Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \tag{9}$$

Формула (9) называется **формулой замены переменной** или **подстановки** в определенном интеграле. При подстановке следует сначала найти новые пределы интегрирования, затем выполнить необходимые преобразования подынтегральной функции. Необходимо также соблюдать условия теоремы.

2. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 6. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, тогда справедлива формула:

$$\int_a^b udv = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu . \qquad (10)$$

Формула (10) называется формулой **интегрирование по частям в определенном интеграле.**

Вычислить определенные интегралы методом замены переменой или методом интегрирования по частям в следующих примерах.

Пример 5. $\int_0^1 x(1+x)^5 dx$.

Решение. Выполним подстановку $t = 1 + x$. Тогда $x = t - 1$, $dx = dt$, $t_1 = 1$ при $x = 0$ и $t_2 = 2$ при $x = 1$.

Следовательно, $\int_0^1 x(1+x)^5 dx = \int_1^2 (t-1)t^5 dt = \int_1^2 (t^6 - t^5) dt =$

$$= (\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6}) \Big|_1^2 = \frac{128}{7} - \frac{64}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{107}{14} .$$

Пример 6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Положим $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$, при $x = 0$ $t_1 = 0$ и при $x = 1$ $t_2 = 1$. Получаем:

$$\int_0^1 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_1^0 \frac{tdt}{1+t} = 2\int_1^0 \frac{(t+1)-1}{1+t} dt = 2\int_1^0 (1 - \frac{1}{(1+t)}) dt =$$

$$= 2(t - \ln(1+t)) \Big|_0^1 = 2 - 2\ln 2 .$$

Пример 7. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Применим подстановку $t = tg\frac{x}{2}$, тогда $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(arctg \frac{1}{\sqrt{3}} - arctg\ 0) = \frac{\Pi}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 8. $\int_0^1 xe^{2x}dx$.

Решение. Положим $\begin{vmatrix} u = x, dv = e^{2x}dx \\ du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix}$.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = (\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

Пример 9. $\int_1^e x \ln xdx$.

Решение. Положим $\begin{vmatrix} u = \ln x, dv = x^2dx \\ du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix}$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int_1^e x^2 \ln xdx = \frac{x^3}{3}\ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^3 \frac{dx}{x} = (\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}) \Big|_1^e = \frac{1}{9}(2e^3+1).$$

Пример 10. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx$.

Решение. Выполним подстановку $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$, $t_1 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt$, полученный интеграл будем интегрировать по частям. Положим $u = t$, $du = dt$, $dv = \sin t dt$, $v = -\cos t$.

Тогда $2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt = 2\left[-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt\right] = 2\left[-t\cos t + \sin t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

§5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей плоских фигур

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла (рис.3) площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от данной функции по данному отрезку, т.е.

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{11}$$

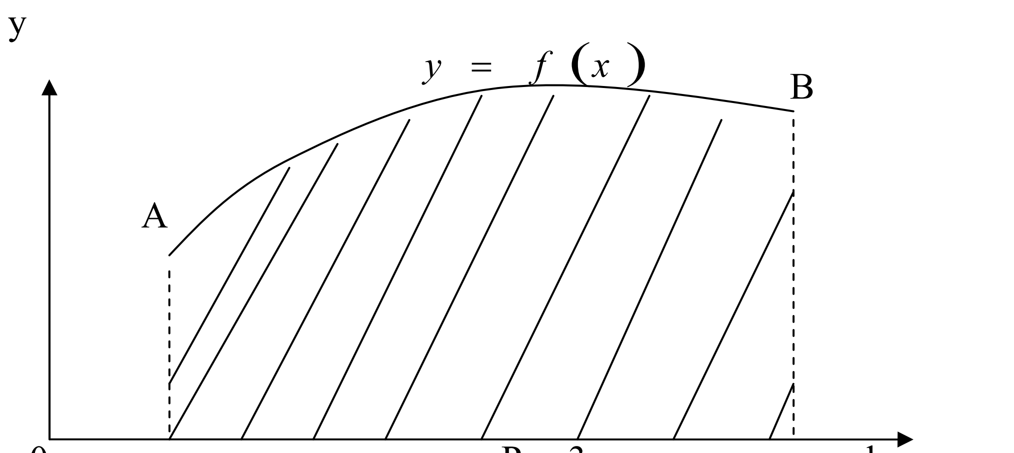

Рис.3

2. Если функция $y = f(x)$ неположительная на отрезке $[a,b]$, то площадь криволинейной трапеции (рис. 4) будет отличаться знаком от определенного интеграла взятого от данной функции по данному отрезку, т.е.

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|. \tag{12}$$

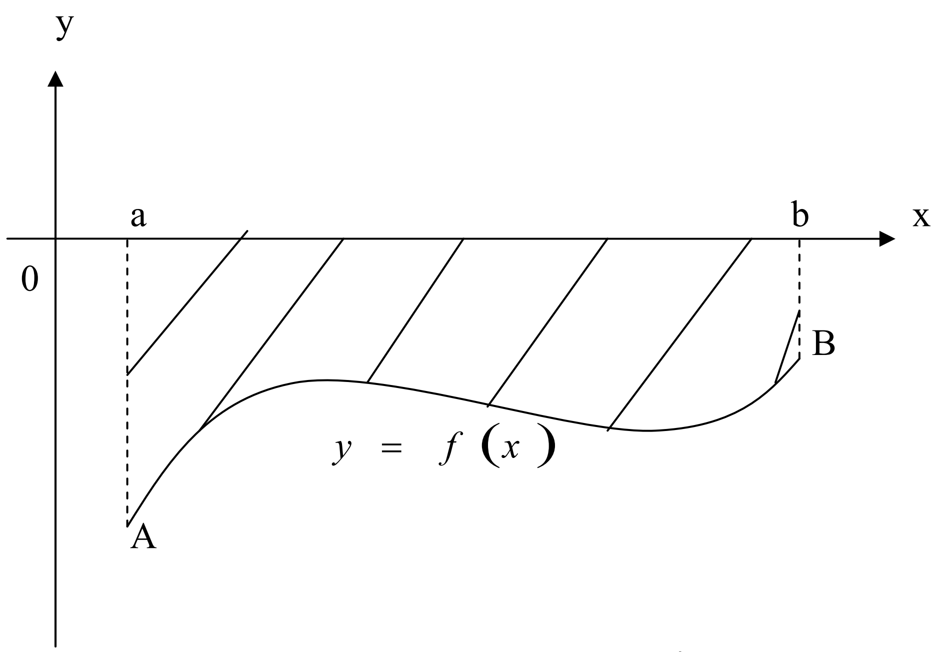

Рис.4

3. Пусть на $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ общего вида (рис.5). Исходный отрезок $[a,b]$ можно разбить точками на интервалы так, что на каждом из них функция будет иметь определенный знак. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна сумме площадей или сумме соответствующих интегралов, т.е.

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

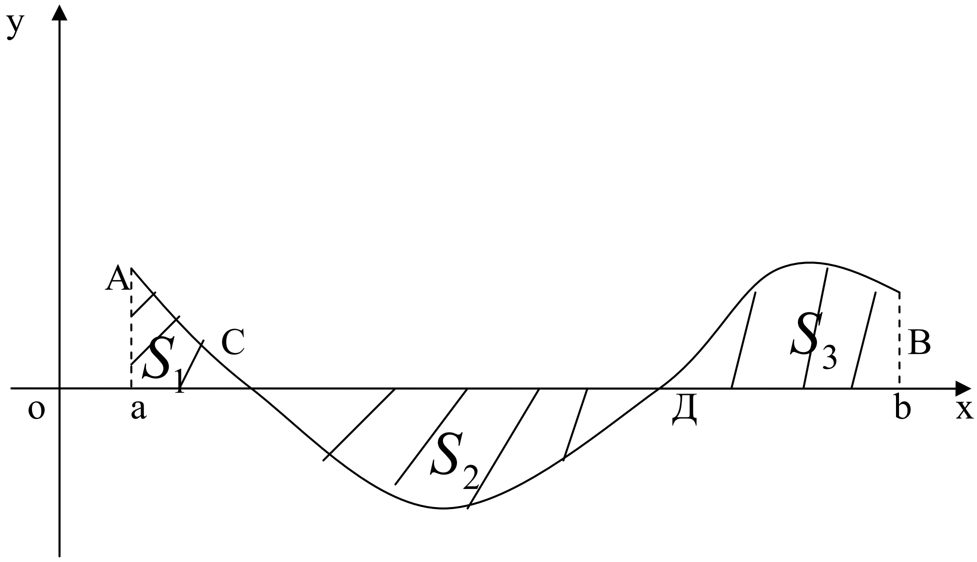

Рис. 5

4. Приведем формулу, применение которой часто упрощает решение задач на вычисление плоских фигур.

Теорема 7. Если на отрезке $[a,b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_1(x) \le f_2(x)$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a,b]$ вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx \qquad (13)$$

Проиллюстрируем теорему графически. Возможны несколько случаев расположения кривых на отрезке $[a,b]$ (рис.6).

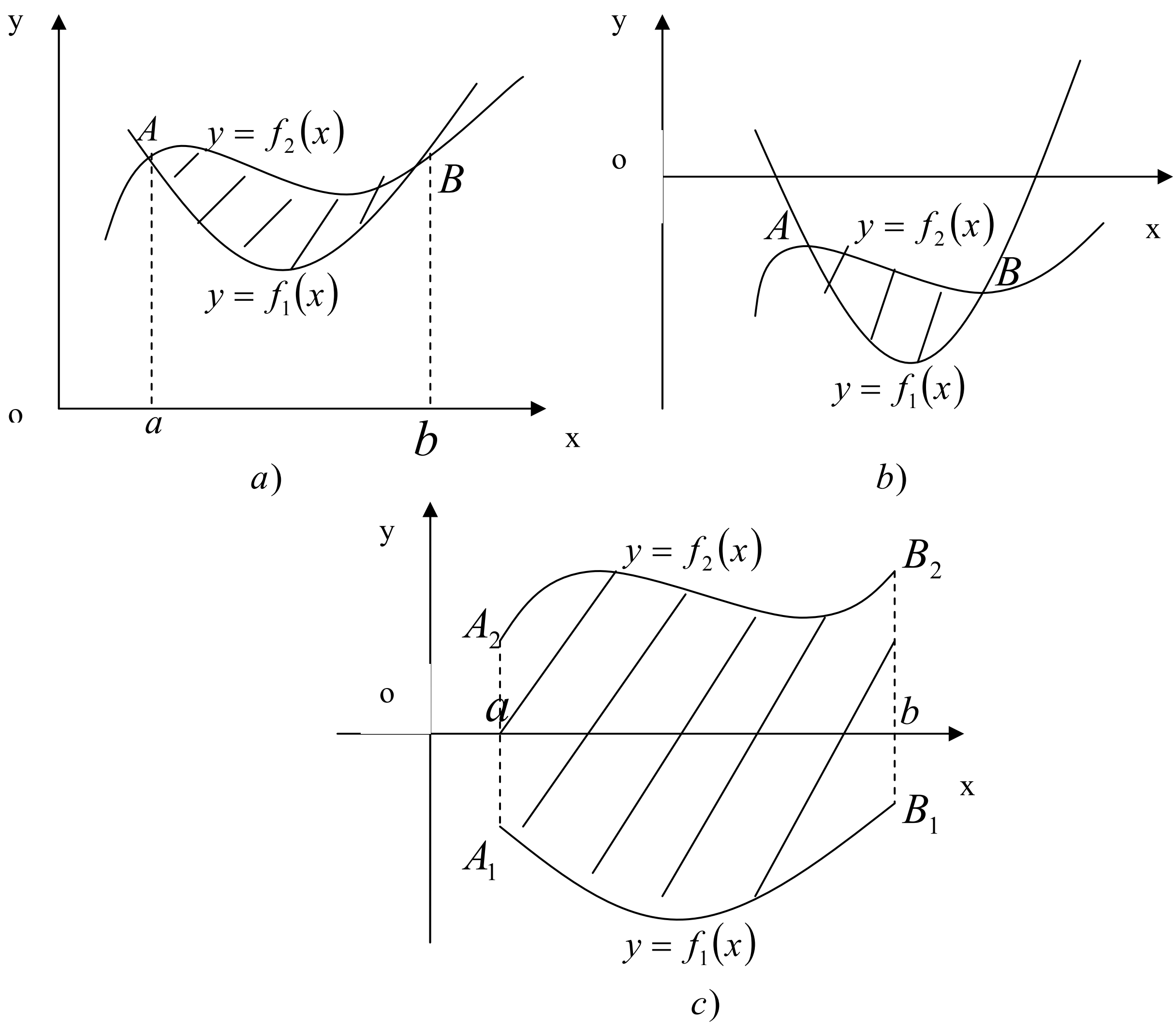

Рис. 6

Пример 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Площадь прямолинейной трапеции OAb (рис. 7) находим по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

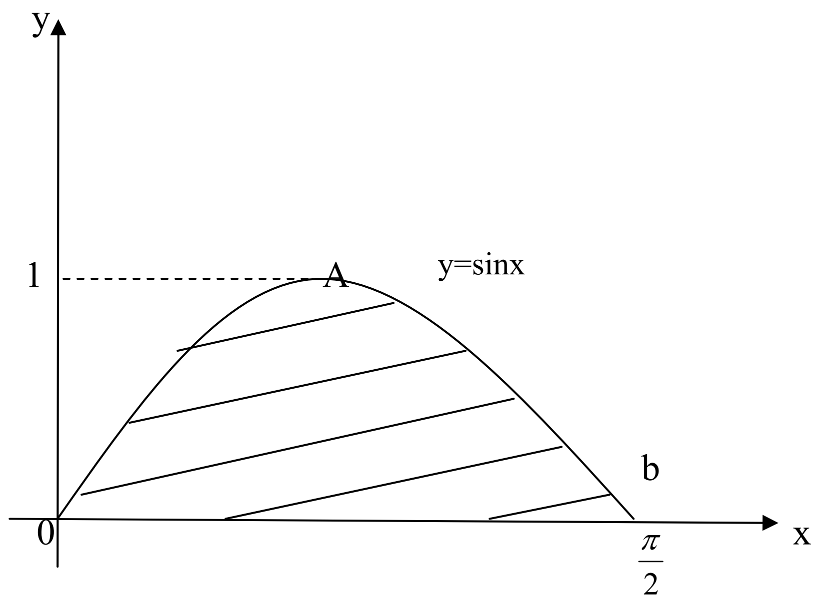

Рис. 7

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0)=1\left(ед^2\right).$$

Пример 12. Найти площадь фигуры ограниченной линиями $y=0$, $y=8x-2x^2$, $x=5$.

Решение. Построим фигуру (рис. 8) и выберем соответствующую формулу для решения.

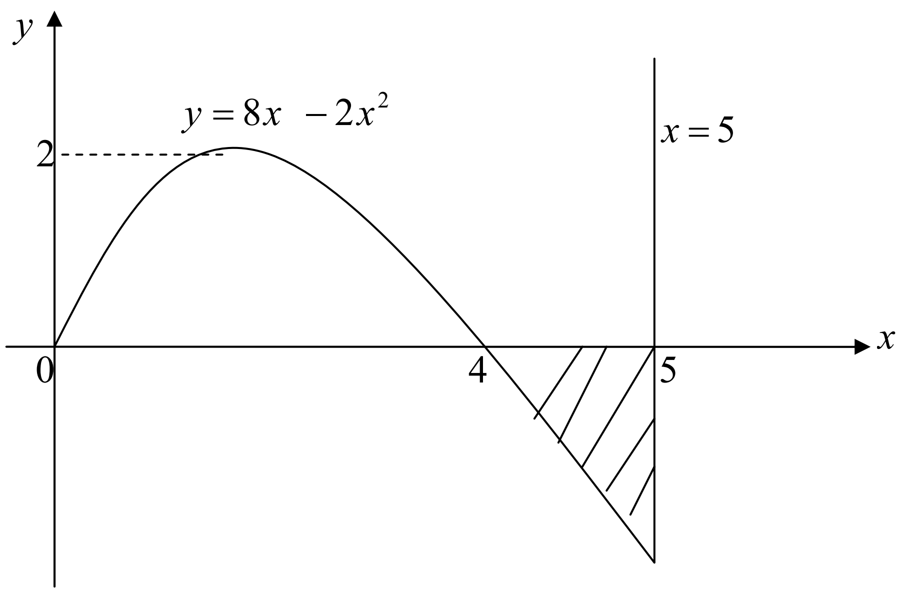

Рис. 8

Парабола пересекает ось $0x$ в двух точках $x=0$ и $x=4$. Следовательно, площадь заштрихованной фигуры:

$$S=-\int_4^5(8x-2x^2)=-(8\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3})\Big|_4^5=-(4x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_4^5=-(100-\frac{2}{3}125-64+\frac{2}{3}64)=4{,}67\ \left(ед^2\right).$$

<u>Пример 13.</u> Вычислить площадь фигуры ограниченной прямой $y=x-2$ и параболой $y=4-x^2$.

<u>Решение.</u> Построим фигуру площадь, которой нужно определить (рис. 9).

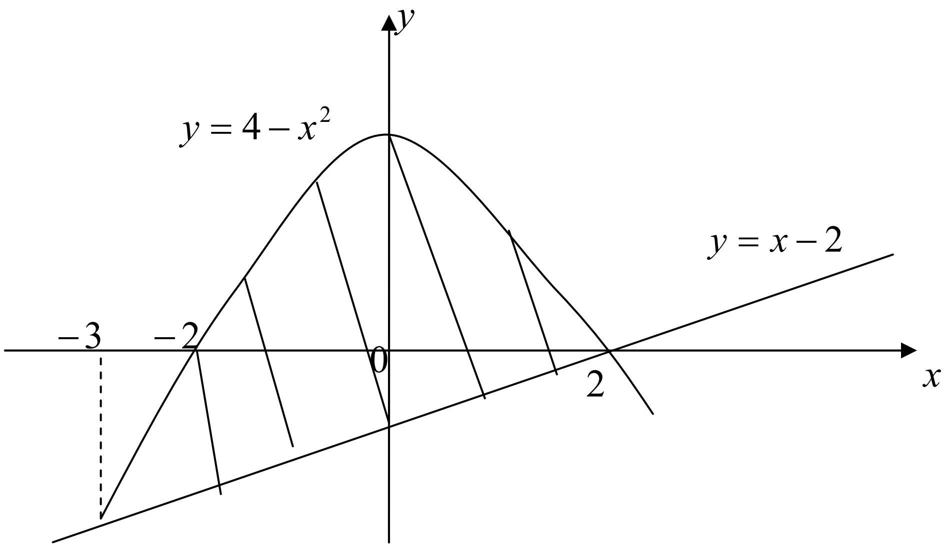

Рис. 9

Точки пересечения двух данных линий равны соответственно $x=-3$ и $x=2$. Используя формулу (13), получим

$$S=\int_{-3}^{2}\left[4-x^2-(x-2)\right]dx=\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx=6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{2}=20\frac{5}{6}\left(ед^2\right).$$

§6. ОБЪЁМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим тело, которое образуется при вращении вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции aABb, ограниченной сверху непрерывной и положительной на на отрезке $[a,b]$ функцией $f(x)$ (рис. 10). Объем этого тела вращения определяется формулой

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{14}$$

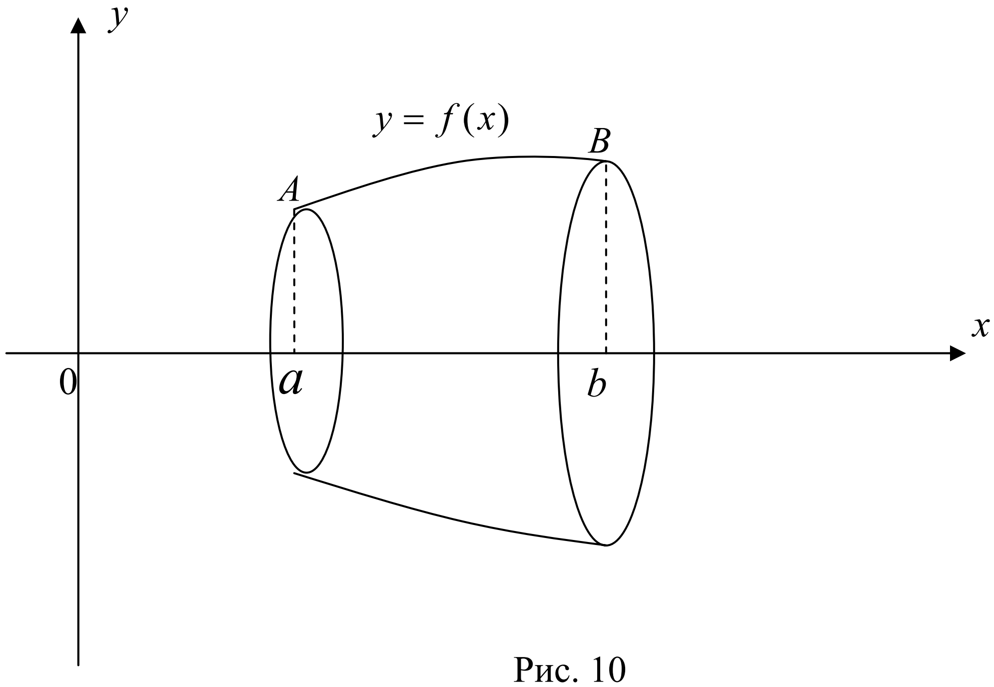

Рис. 10

Если тело образовано вращением вокруг оси $0y$, то выражая x через y, как обратную функцию, получим соответственно формулу для объема тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(y)dy. \tag{15}$$

Рассмотрим примеры вычисления объемов тел, образованных вращением фигур, ограниченных следующими линиями.

Пример 14. Прямыми $y=0$, $x=0$, $x=4$ и параболой $y=x^2$:

а) вокруг оси $0x$;

б) вокруг оси $0y$.

Решение.

а) Построим тело вращения, образованного вращения фигуры вокруг оси $0x$ (рис. 11).

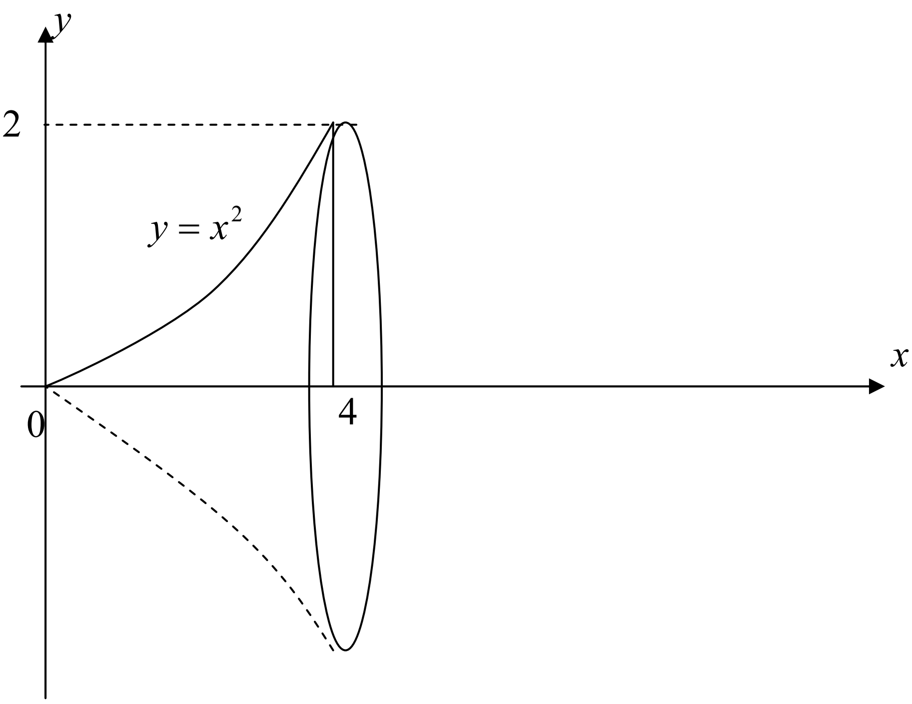

Рис. 11

По формуле (14) искомый объем:

$$V=\pi\int_0^4 (x^2)^2dx=\pi\frac{x^5}{5}=\frac{256\pi}{5}=51{,}2\pi\left(ed^3\right)$$

б) Рассмотрим тело вращения, образованного вращением криволинейной трапеции $y=0$, $x=0$, $y=2$, $x=\sqrt{y}$ вокруг оси $0y$ (рис. 12).

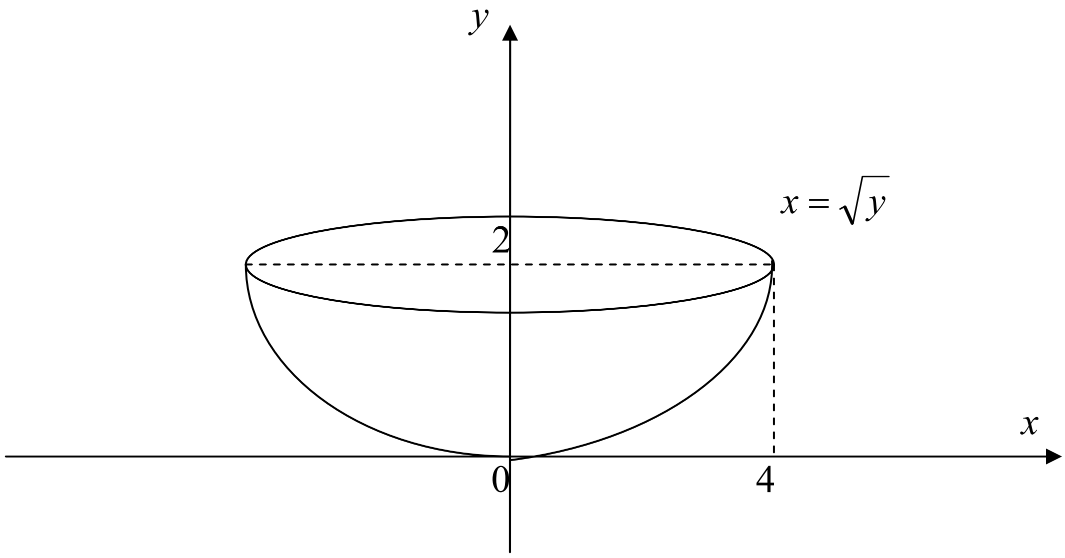

Рис. 12

По формуле (15) искомый объем:

$$V=\pi\int_0^2(\sqrt{y})^2dy=\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^2=2\pi(ed)^3.$$

<u>Пример 15.</u> Прямой $5x-8y+14=0$ и параболой $y=\frac{1}{4}x^2+2$ вокруг оси $0x$.

<u>Решение.</u> Тело образовано вращением фигуры ABCA (рис. 13) вокруг оси $0x$ (рис. 13).

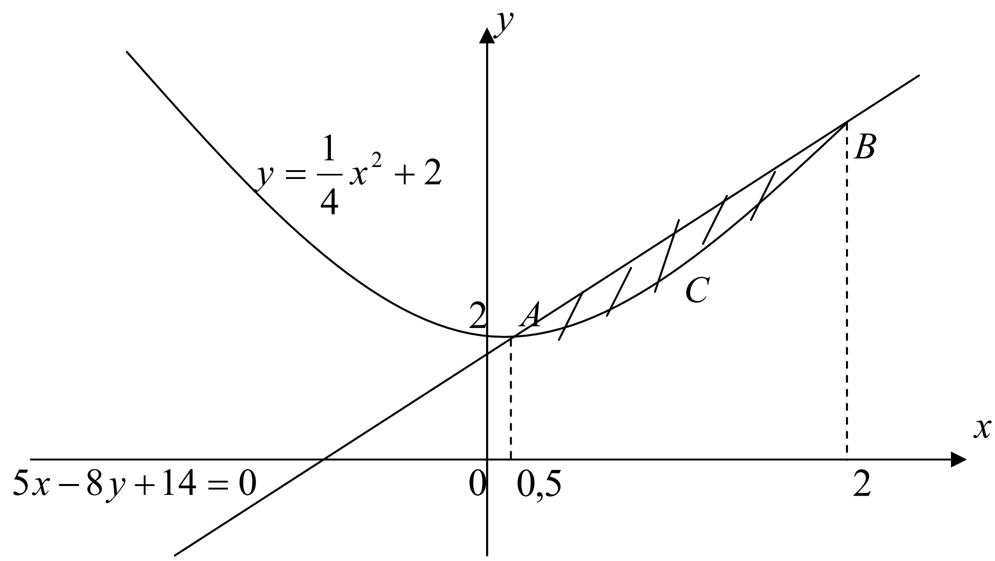

Рис. 13

Найдем точки пересечения А и В, решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2 + 2 \\ 5x - 8y + 14 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда $x_A = \dfrac{1}{2}$, $x_B = 2$. В данном случаи объем находим, как разность двух объемов образованных кривыми $y = \dfrac{5}{8}x + \dfrac{14}{8}$, $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 2$ и прямыми $x = 0{,}5$, $x = 2$.

$$V = \pi \int_{0,5}^{2} \left(\frac{1}{8^2}(5x+14)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2+2\right)^2\right)dx = \frac{891}{1280}\pi \approx 2{,}186\left(ед^3\right).$$

§7. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Пусть некоторая плоская гладкая кривая описывается функцией $y = f(x)$ и отрезку оси абсцисс $[a,b]$ отвечает дуга АВ (рис. 14).

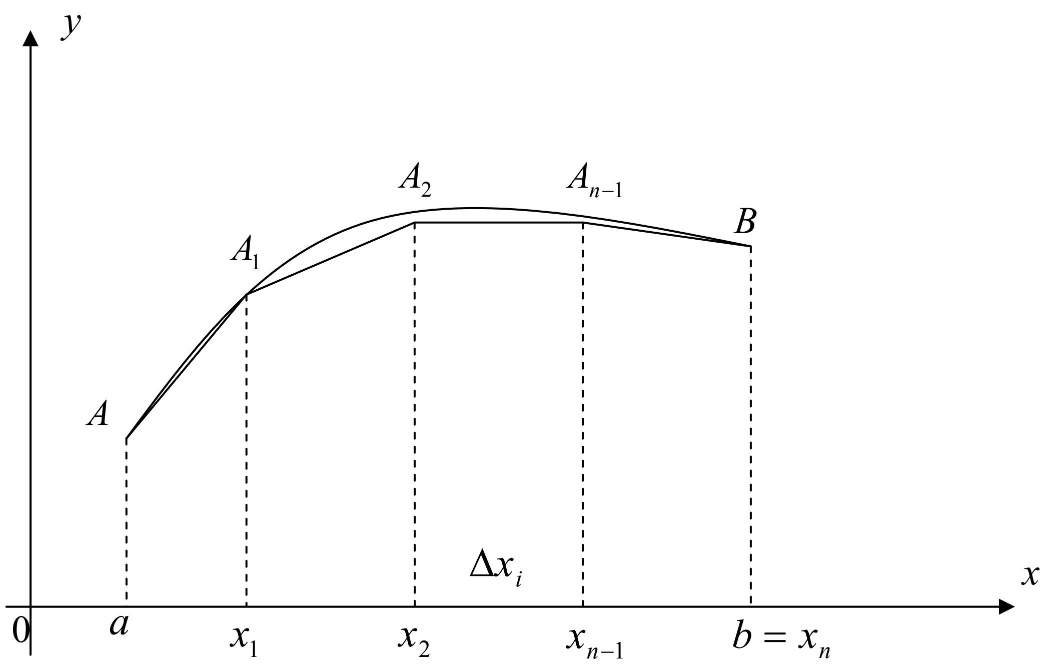

Рис. 14

Определение. Длиной дуги $L(AB)$ называется предел ломанной $AA_1A_2.....A_{n-1}B$ при $\max \Delta x_i \to 0$, если он существует

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} AA_1A_2...A_{n-1}B .$$

Длина дуги определяется формулой:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx . \qquad (16)$$

Пример 16. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$, заданной на отрезке от $x=0$ до $x=1$ ($y \geq 0$).

Решение. Дифференцируя уравнение кривой, находим $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Подставляя полученный результат в формулу (16) получим:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{2}{3}\frac{4}{9}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}(\frac{13}{4}-1) = \frac{2}{3}(ed).$$

Пример 17. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, заключенной между точками с абсциссами $x=0$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как $y' = -tgx$, то $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+tg^2 x} = \frac{1}{\cos x}$.

Следовательно,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln tg\,(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln tg\,\frac{3\pi}{8}(ed).$$

Пример 18. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью 0x.

Решение. Найдем точки пересечения параболы $y = \frac{x^2}{2} - 1$ с осью 0x:

$\frac{x^2}{2} - 1 = 0$, $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

Вычислим производную от заданной функции $y' = x$, тогда по формуле (16) и в силу симметрии графика имеем:

$$L = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right) = \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \approx 2{,}58(ед).$$

§ 8. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть на плоскости x0y гладкая кривая AB задана уравнением $y = f(x)$ (рис. 10). Поверхность, полученная в результате вращения криволинейной трапеции aABb вокруг оси 0x, называется **поверхностью вращения.** Площадь S этой поверхности находится по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (17)$$

Пример 19. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси 0x замкнутого контура $OABCO$, образованного кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис. 15).

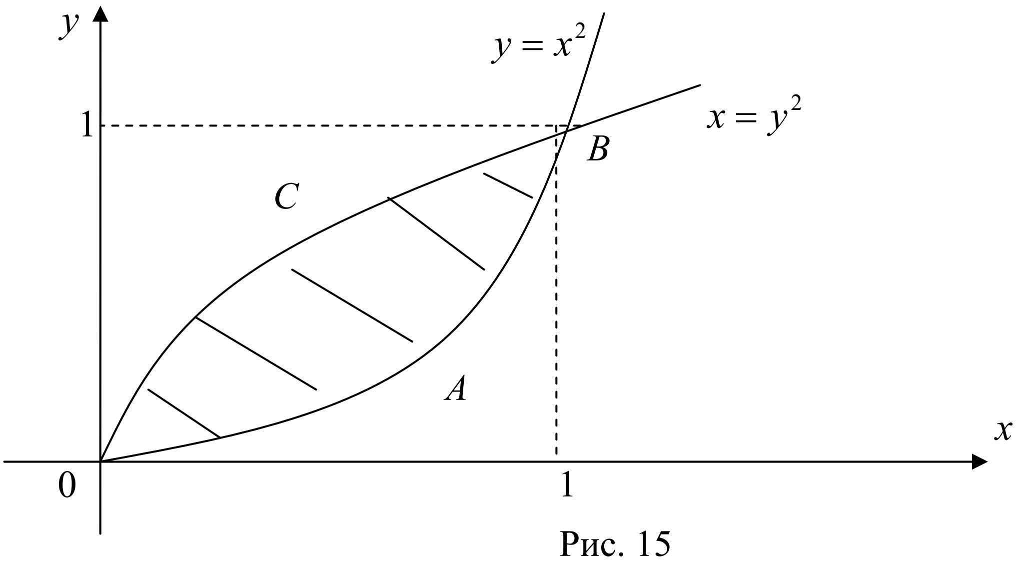

Рис. 15

Решение. Заданные параболы пересекаются в точках $O(0,0)$, $B(1,1)$.

Искомая площадь $S = S_1 + S_2$, где

S_1 - площадь, образованная вращением дуги OCB.

S_2 - площадь, образованная вращением дуги OAB.

Вычислим площадь S_1. Из уравнения $x = y^2$ получаем $y = \sqrt{x}$ и $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно,

$$S_1 = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4}x}dx = 2\pi\int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2}dx = \frac{\pi}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

Вычислим площадь S_2. Получаем $y = x^2$ и $y' = 2x$. Следовательно,

$$S_2 = 2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx$$

Замена $x = \dfrac{1}{2}sht$, $dx = \dfrac{1}{2}chtdt$.

$$S_2 = \frac{\pi}{4}\int_0^{arsh 2} sht^2 cht^2 dt = \frac{\pi}{32}(\frac{1}{4}sh4t - t)\Big|_0^{arsh 2} = \frac{9\sqrt{5}\pi}{16} - \frac{1}{32}\pi\ln(2+\sqrt{5})$$

Таким образом:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6} + \frac{9\sqrt{5}\pi}{16} - \frac{1}{32}\pi\ln(2+\sqrt{5}) \approx 16{,}52\left(ед^2\right)$$

§ 9. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Эти приложения играют большую роль в специальных дисциплинах.

1. Так, например, скорость есть интеграл от ускорения. Интегрированием ускорения по времени находят скорость движения, а последующим интегрированием скорости определяется пройденный путь.

2. С помощью определенного интеграла находятся моменты инерции, координаты центра тяжестей, массы плоских фигур.

3. На заряд q в электрическом поле напряженности E действует сила Eq. Если масса заряда m, то он то он движется с ускорением $a = \frac{Eq}{m}$. Если напряженность поля меняется, то и ускорение меняется. Движение заряда в этом случаи носит сложный характер. Для расчетов необходимо использование интегралов.

4. Пусть на складе хранится запас какого-то расходного товара (например, мука). Пусть издержки хранения одной единицы товара в течении одной единицы времени равны p. Если запас товара на складе есть функция времени $f(t)$, то издержки хранения за время от a до b составляет:

$$C = \int_a^b pf(t)dt. \qquad (18)$$

Существует много аналогичных примеров, в которых расчеты довольно сложны и решаются с помощью определенных интегралов.

§ 10. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Нахождение экономических функций по известным предельным величинам.

В курсе микроэкономики рассматриваются так называемые предельные величины, т.е. для данной величины представляемой некоторой функцией $f(x)$, рассматривают ее производную $f'(x)$. Поэтому часто приходится находить экономическую функцию (первообразную) по данной функции предельных величин (производной).

Пример 20. Задана функция предельных издержек (издержки на производство дополнительной выпускаемой единицы продукции товара) $C = 2q^2 - 14q + 250$. Найти функцию издержек $C = C(q)$ и вычислить издержки в случае производства 15 единиц товара.

Решение. Находим интегрированием издержек на изготовление 15 ед. товара

$$C = \int_0^{15} (2q^2 - 14q + 250)dq = \frac{2}{3}q^3 - \frac{14}{2}q^2 + 250q \Big|_0^{15} = 4425 \ (у.е.).$$

2. Нахождение объема продукции по известной функции производительности труда.

Экономический смысл определенного интеграла, выражающий объем произведенной продукции по известной функции производительности труда был рассмотрен раньше (см. формулу 6)

$$Q = \int_0^T f(t)dt, \qquad (19)$$

где $f(t)$ - производительность труда в момент времени t,

$[0, T]$ - рассматриваемый промежуток времени.

Пример 21. Найти объем произведенной продукции за время $t = 6$ час, если производительность труда задана функцией

$f(t) = -t^2 + 10t \left(ед / час \right)$.

Решение. Воспользуемся формулой (19).

$$Q = \int_0^T f(t)dt = \int_0^6 (-t^2 + 10t)dt = (-\frac{t^3}{3} + \frac{10t^2}{2}) \Big|_0^6 = 108 \left(y.e. \right).$$

Пример 22. Найти дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня изменяется по формуле:

$f(t) = -0,2t^2 + 1,6t + 3$, где t – время в часах.

Провести экономический анализ.

Решение. Дневную выработку найдем по формуле (19).

$$Q = \int_0^8 (-0,2t^2 + 1,6t + 3)dt = F(t) \Big|_0^8 = (-\frac{0,2}{3}t^3 + 0,8t^2 + 3t) \Big|_0^8 =$$

$= 41,06 (y.e.)$.

Построим график функции (рис. 16).

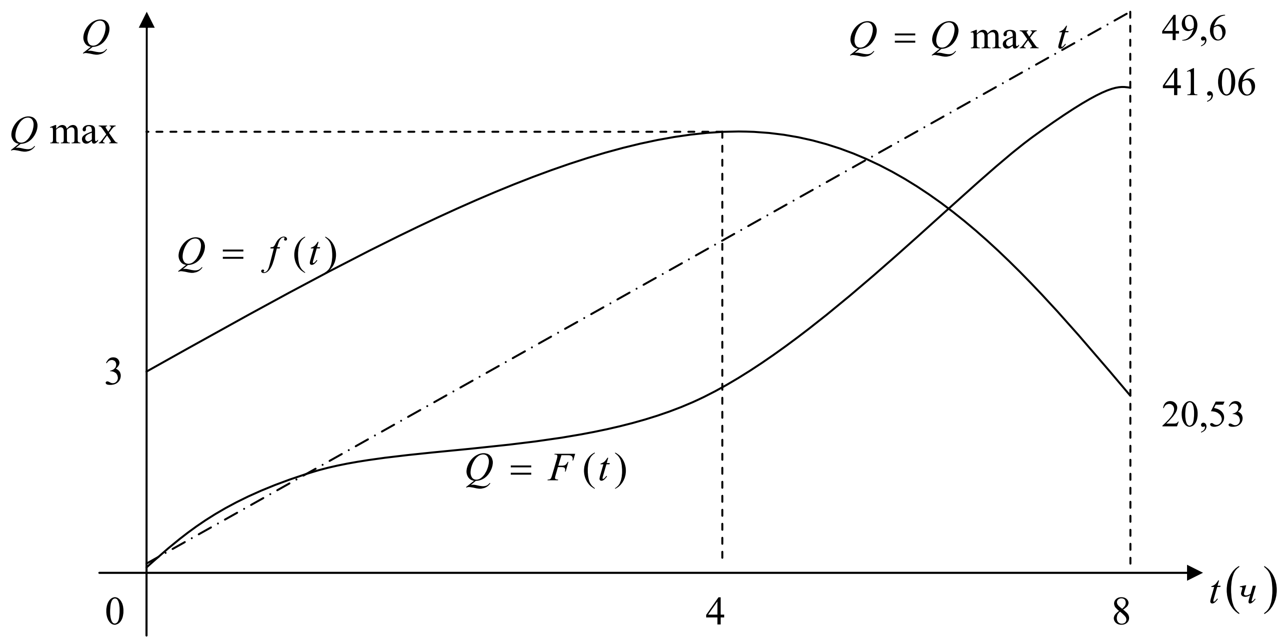

Рис. 16

Если бы в течение всего дня работа велась ритмично и с максимальной производительностью $f(t) = 6,2$, то дневная выработка составила бы $Q \max = 49,6$ или на 21% больше. На рис. 16 дневная выработка численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $f(t)$, вторая кривая $F(t)$ показывает рост выпуска продукции во времени. Значение $t = 4$ ч. соответствует точке перегиба кривой $F(t)$: в первой половине рабочего дня производительность выше, чем во второй. Прямая $Q = Q \max t$ соответствует выпуску продукции с равномерной производительностью. В этом случае объем продукции составил бы 49,6 у.е..

Пусть требуется определить выработку рабочего за x часов с момента времени $t \ (t + x \leq 8)$.

По аналогии выработка рабочего за x часов с момента времени t будет равна:

$$Q = \int_{t}^{t+x} f(t)\,dt \quad . \qquad (20)$$

Полученный интеграл носит название интеграла с переменным верхним пределом.

Пример 22. Определить выработку рабочего:

а) за весь рабочий день;

б) за третий час работы;

в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов, а $f(t) = -3t^2 + 18t$ - производительность труда;

г) провести экономический анализ задачи.

Решение. Находим общую выработку рабочего за весь день (6 часов) по формуле (19).

$$Q = \int_0^6 (-3t^2 + 18t)dt = (-\frac{3t^3}{3} + 18\frac{t^2}{2})\Big|_0^6 = (-t^3 + 9t^2)\Big|_0^6 =$$
$$= (-216 + 324) = 108\ (у.е.).$$

Определяем выработку рабочего за третий час работы по формуле (20).

$$Q = \int_2^3 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2)\Big|_2^3 = 26\ (у.е.).$$

Аналогично определяем выработку рабочего за последний час работы:

$$Q = \int_5^6 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2)\Big|_5^6 = 8(у.е.).$$

За полный рабочий день выработка составила 108 у.е. продукции. За третий час работы 26 у.е., за последний час 8 у.е.. Вероятно, что работа утомительная и требует большого напряжения, поэтому к концу смены производительность труда падает.

2. <u>Функция Кобба-Дугласа.</u>

Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба-Дугласа.

$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где A, α, β - неотрицательные константы и $\alpha + \beta \le 1$,

К – объем фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (скажем, число станков), L – объём трудовых ресурсов (число рабочих, число человеко-дней), Q – выпуск продукции в стоимостном, либо в натуральном выражении.

Если в функции Кобба-Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за время T лет составит:

$$Q = \int_{0}^{T} (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt \quad (21)$$

Пример 24. Найти объем продукции, произведенный за 5 лет, если функция Коба-Дугласа имеет вид $f(t) = (1 + t)e^{2t}$.

Решение. По формуле (21) объем произведенной продукции равен

$$Q = \int_{0}^{5} (1 + t)e^{2t} dt.$$

Используем для вычисления интеграла метод интегрирования по частям. Пусть $u = 1 + t$, $du = dt$, $dv = e^{2t} dt$, $V = \frac{1}{2} e^{2t}$. Тогда

$$Q = \frac{1}{2}(1+t)e^{2t} dt \Big|_0^5 - \frac{1}{2}\int_0^5 e^{2t} dt = \frac{1}{2}(1+t)e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} \Big|_0^5 = 75498.9 (у.е.).$$

5. Среднее время изготовления изделия.

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x - порядковый номер изделия в партии.

Тогда **среднее время** $t_{ср}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{ср} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx \quad (22)$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$ часто имеет вид

$$t = ax^{-b},$$

где a - затраты времени на первое изделия,

b - показатель производственного процесса.

Пример 25. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 50$ до $x_2 = 75$ изделий, если функция изменения затрат времени $t = 100\ x^{-\frac{1}{2}}$ (ч).

Решение. Используя формулу (22), получаем:

$$t_{cp} = \frac{1}{75-50}\int_{50}^{75} 100\,x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{100}{25}\int_{50}^{75}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\sqrt{x}\,\Big|_{50}^{75} \approx 11,2(ч).$$

6. Дисконтированная стоимость денежного потока.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t лет при годовом удельном проценте p, называется **дисконтированием.** Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной p, процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt. \qquad (23)$$

Пример 26. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 10%, если первоначальное капиталовложение составили

15 млн. руб. и намечается ежегодно капитал увеличивать на 5 млн. руб. Провести экономический анализ.

Решение. Составим функцию ежегодного дохода $f(t) = 15 + 5t$. Тогда по формуле (23) дисконтированная сумма капиталовложения

$$K = \int_0^3 (15 + 5t) e^{-0,1t} dt \, .$$

Интегрируем по частям.

Пусть $u = 15 + 5t$, $du = 5dt$, $dv = e^{0,1}tdt$, $V = -10e^{-0,1t}$.

Следовательно,

$$K = -10(15 + 5t)e^{-0,1t} \Big|_0^3 + 50\int_0^3 e^{-0,1t} dt = -72 - 500\, e^{0,1t} \Big|_0^3 =$$

$$= -72 + 130 = 58(\text{млн.руб.}) \, .$$

Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 15 до 30 млн. руб. равны одновременным первоначальным вложениям 58 млн.руб. при той же исчисляемой непрерывной процентной ставке.

7. Нахождение капитала по известным чистым инвестициям.

Чистыми инвестициями (капиталовложениями) называют общие инвестиции, производимые в экономике в течение определенного промежутка времени (чаще всего года), за вычетом инвестиций на возмещение выходящих из строя основных фондов (капитала).

Таким образом, за единицу времени капитал увеличивается на величину чистых инвестиций.

Если капитал обозначить как функцию времени $K(t)$, а чистые инвестиции - $I(t)$, сказанное выше можно записать

$$I(t) = \frac{d}{dt}K(t),$$

т.е. производная от капитала по времени t.

Часто требуется найти приращение капитала за период времени от t_1 до t_2, т.е. величину

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1).$$

Функция $K(t)$ является первообразной для функции $I(t)$, поэтому можно записать:

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1). \qquad (24)$$

Пример 27. Заданы чистые инвестиции функцией $I(t) = 500\sqrt{t}\,(y.e)$. Требуется определить приращение капитала за 2 года.

Решение. Применим формулу (24), получим

$$\Delta K = \int_0^2 500\sqrt{t}\,dt = \frac{500\,t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{500\cdot 2}{3}\sqrt{8} \approx 943{,}3(y.e.).$$

Пример 28. Задана функция чистых инвестиций $I(t) = 300\sqrt[3]{t}$.

Определить: сколько лет потребуется, чтобы приращение капитала составила 3000.

Решение. Обозначим искомый промежуток времени $[0, T]$ и, используя формулу (24), получим

$$3000=\int_0^T (300\sqrt[3]{t})dt=(\frac{4\cdot 300\sqrt[3]{t^4}}{3})\Big|_0^T=400\sqrt[3]{T^4}.$$

Запишем уравнение: $3000=400\sqrt[3]{T^4}$.

Решая его, находим: $T^{\frac{4}{3}} = 7{,}5$ или $T=\left(7{,}5^{3/4}\right)=4{,}53$.

Чтобы приращение капитала составило 3000, потребуется 4,53 года.

§ 11. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА В ОБЛАСТИ ФИНАНСОВ

1. Если начальный вклад составляет p, процентная ставка равна r, то величина вклада через промежуток времени t определяется по формуле:

$$S=pe^{\frac{rt}{100}}.$$

Рассмотрим обратную задачу для нахождения стоимости **аннуитета** (регулярных платежей) применительно к непрерывным процентам. В этом случае платежи зависят от времени t, то есть является функцией от t, что можно записать

$$p=p(t).$$

Тогда величина вклада S через T лет определяется формулой

$$S=\int_0^T p(t)e^{\frac{r(T-t)}{100}}dt \tag{25}$$

Если рассмотреть понятия **дисконтированной суммы**, связанное для непрерывных процентов с формулой

$$p=Se^{\frac{r(T-t)}{100}}.$$

Эта формула дает возможности определять величину **начального** вклада

p , если известно, что через t лет он должен составить величину S , а непрерывная процентная ставка равна r . Задача аннуитета в этом случае может быть сформулирована так: найти величину начального вклада p , если регулярные выплаты по этому вкладу должны составить S ежегодно в течение T лет.

Расчетная формула имеет вид

$$p = \int_0^T Se^{-\frac{rt}{100}}dt \, . \qquad (26)$$

<u>Пример 29.</u> Определить величину вклада через 2 года, если начальный капитал 50 000 ден. ед., процентная ставка 8%.

<u>Решение</u>. Используя формулу (25), получим общую величину вклада через 2 года:

$$S = \int_0^2 50000e^{\frac{8(2-t)}{100}} dt = 50000\int_0^2 e^{\frac{16-8t}{100}} dt = 50000(-\frac{100}{8} e^{\frac{8(2-t)}{100}}) \Big|_0^2 =$$

$$= 108437{,}5(\textit{ден.ед.}) \, .$$

<u>Пример 30.</u> Требуется определить начальный вклад, если выплаты должны составить 75 у.е. в течение трёх лет, а процентная ставка 5%.

<u>Решение.</u> Применим формулу (26), получим

$$p = \int_0^3 75e^{-\frac{5t}{100}}dt = 75(-\frac{100}{5} e^{-\frac{5t}{100}}) \Big|_0^3 \approx 206{,}25(\textit{у.е}).$$

Искомый начальный вклад составит 206,25 у.е.

2. Выпуск оборудования при постоянном темпе роста.

Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста его выпуска

$$K = \frac{y'(t)}{y(t)},$$

где K - известная постоянная величина (ежегодный темп роста), $y(t)$ - это уровень производства за единицу времени на момент времени t, $y'(t)$ - прирост выпуска оборудования за промежуток времени $t=1$.

Общее количество оборудования к моменту времени t (единицей которого является год), а в начальный момент времени $t=0$ уровень ежегодного производства оборудования составлял y_0, находится по формуле

$$Y(t) = \int_0^t y_0 e^{kt}\,dt. \tag{27}$$

Пример 31. Найти общее количество произведенного оборудования за три года, если k =7% ежегодного роста, а $y_0 = 12 у.е.$

Решение. применяя формулу (27), получим

$$Y(t) = \int_0^3 12e^{0,07t}\,dt = 12\frac{100}{7}e^{0,07t}\Big|_0^3 = \frac{1200}{7}(e^{0,21} - e^0) = \frac{1200}{7}(e^{0,21} - 1) = 39,43(у.е.).$$

Причем уровень производства за указанный период увеличится на 27,3%.

3. Вычисление коэффициента Джини.

Для анализа социально-экономического строения общества применяется так называемая «диаграмма или кривая Джини» распределение богатства в обществе.

Исследуя **кривую Лоренца** $y = f(x)$ - зависимость процента дохода от процента имеющего их население (кривую OBA, рис. 17), мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения.

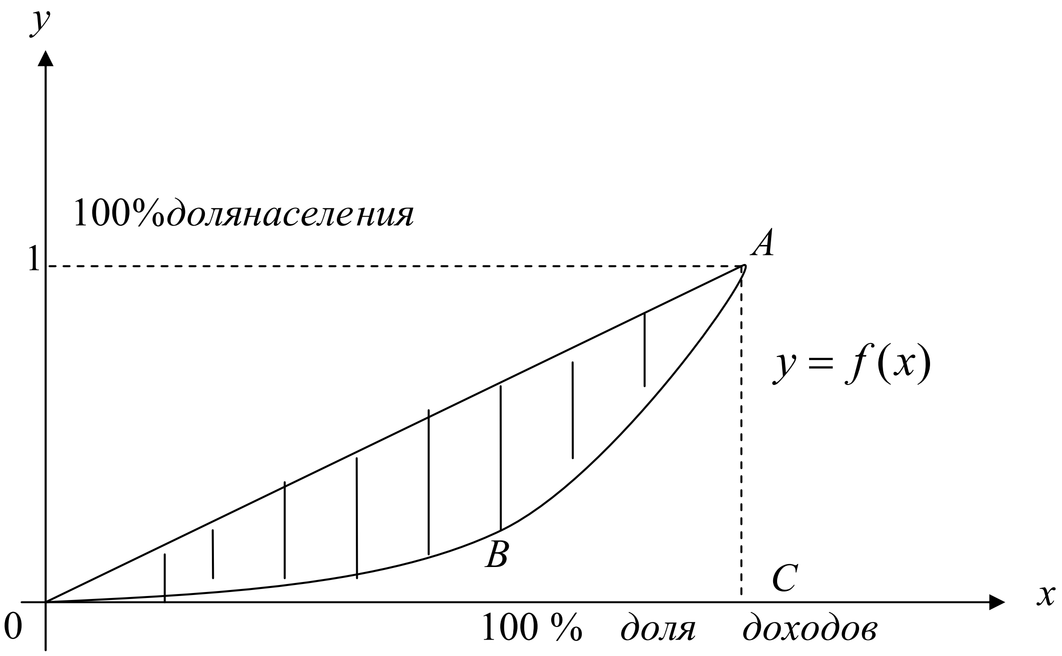

Рис. 17

При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую биссектрису *OA*.

Поэтому чем больше площадь заштрихованной части, тем неравномернее распределение богатство в обществе.

Коэффициентом Джини называют площадь фигуры *OAB*, отнесенная к площади треугольника *OAC*, т.е.

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}.$$

По определению имеем:

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{\frac{1}{2} - S_{OBAB}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx, \qquad (28)$$

где $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, $S_{OBAC} = \int\limits_0^1 f(x)dx$.

Пример 32. По данным исследованиям в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, где x – доля населения, y - доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини, провести экономический анализ.

Решение. Применяя формулу (28), получим

$$K = 1 - 2\int\limits_0^1 (1 - \sqrt[3]{x})dx = 1 - 2(x - \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}}) \Big|_0^1 = 1 - 2(1 - \frac{3}{4}) = 0{,}5.$$

Достаточно высокое значение K показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

4. Вычисление добавочной выгоды (излишек) производителя и добавочной выгоды (излишек) потребителя.

Рассмотрим кривые спроса $p = f(Q)$ и $p = \varphi(Q)$ предложения (рис. 18).

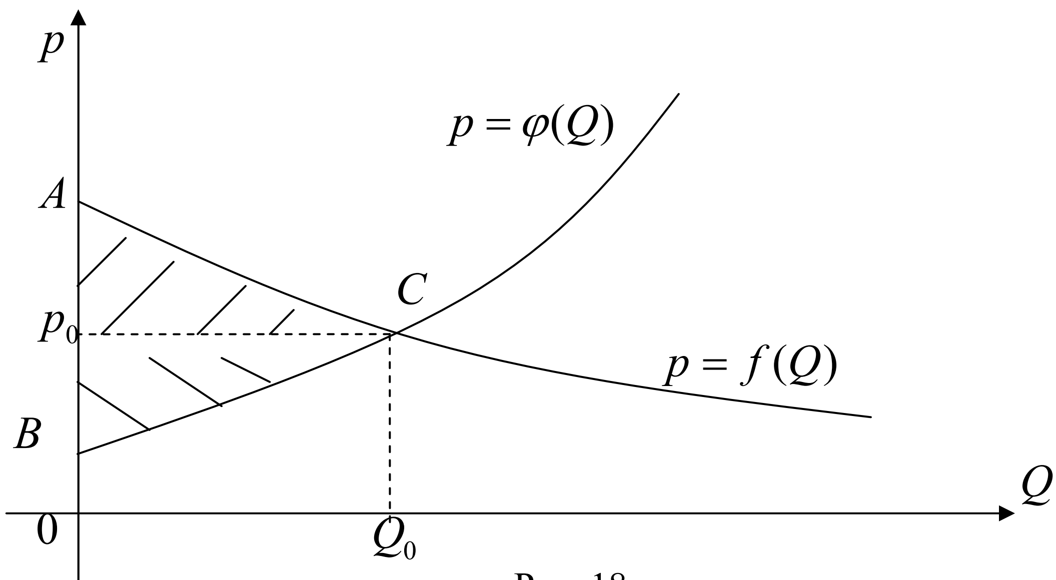

Рис. 18

Здесь p_0 - равновесная цена, Q_0 - реализуемое по этой цене количество товара. Точка равновесия находится как точка пересечения кривой спроса и кривой предложения.

Товар в количестве Q_0 не сразу весь попадает на рынок, а выбрасывается небольшими партиями, равными ΔQ . Это весьма распространенная тактика реализации товара, чтобы поддержать цену на товар выше равновесной.

Общие затраты потребителей в этом случае равны определенному интегралу:

$$\int_0^{Q_0} f(Q)dQ .$$

По определению принимается, что **<u>излишек потребителя</u>** - это разность между предполагаемыми затратами потребителей и реальными затратами в условиях рынка, равными $p_0 Q_0$. Если обозначить добавочную выгоду через CS , то

$$CS = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - p_0 Q_0. \qquad (29)$$

Геометрическая интерпретация данного определения означает площадь фигуры $p_0 AC$.

Аналогично производители стремятся поставить товар на рынок по более высокой цене. Если поставляется товар на рынок в количестве ΔQ , меньше чем Q_0 , то цена товара, согласно кривой предложения, будет соответственно ниже равновесной p_0 . Общий доход потребителя в этом случае равен определенному интегралу

$$\int_0^{Q_0} \varphi(Q)dQ .$$

По определению принимается, что **<u>излишек производителя</u>** – это разность между реальными затратами $p_0 Q_0$ и предполагаемыми. Если обозначить добавочные выгоды производителя через pS, то

$$pS = p_0 Q_0 - \int_0^{Q_0} \varphi(Q) dQ \,. \tag{30}$$

<u>Пример 33.</u> Заданы кривые предложения $P_S = 5 + 4Q^3$ и спроса $P_Д = 45 - 2Q^2$. Требуется определить добавочную выгоду производителя и добавочную выгоду потребителя.

<u>Решение.</u> Находим точку равновесия между спросом и предложением как точку пересечения кривых $P_S = P_Д$.

$5 + 4Q^3 = 45 - 2Q^2$,

$4Q^3 + 2Q^2 - 40 = 0$.

Решая полученное уравнение, найдем равновесное количество товара $Q_0 = 2$ и равновесную цену $p_0 = 37$.

Применяя формулы (29) и (30), находим излишек потребителя:

$$CS = \int_0^2 (45 - 2Q^2) dQ - 2 \cdot 37 = (45Q - \frac{2}{3}Q^3) \Big|_0^2 - 74 = 10{,}7\, у.е.$$

И соответственно излишек производителя:

$$pS = 74 - \int_0^2 (5 + 4Q^3) dQ = 74 - (5Q + Q^4) \Big|_0^2 = 74 - 10 - 16 = 48\, у.е.$$

Следовательно, если реализовать товар в количестве $Q_0 = 2$ по равновесной цене 37 у.е., то добавочная выгода покупателя составит 10,7 у.е., а добавочная выгода продавца равна 48 у.е.

Понятие определенного интеграла в экономике, бизнесе и финансах используется достаточно широко. Поэтому, рассмотренные примеры, не исчерпывают всех возможностей его применения в экономических задачах.

§ 12. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вводя понятие определенного интеграла, мы предполагаем, что отрезок интегрирование конечен, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке.

Однако возможны случаи, когда одно или оба этих условия не выполняются. В таком случае соответствующие интегралы называются **несобственными.**

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на луче $[a, \infty]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $a < b < \infty$.

Если существует предел $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$, то он называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a, \infty)$ и обозначается так:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (31)$$

В этих случаях, когда интеграл (31) существует и конечен, говорят, что он **сходится.**

Если же предел бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл **расходится.**

Наряду с интегралами (31) рассматривают также интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx, \qquad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty, a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (33)$$

Исходя из определения несобственных интегралов с бесконечными пределами, вычислить интегралы (или установить их расходимость).

Пример 34. $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$.

Решение. В силу определения (31) имеем:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^b}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По формуле (32) имеем:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}(arctg\ 0 - arctga) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится.

Пример 36. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$.

Решение. По формуле (33) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b e^{-x}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} (-e^{-x}) \Big|_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} (-e^{-b} - e^{-a}) =$$

$$= -(0-\infty) = \infty .$$

Следовательно, интеграл расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла

$\int_a^{\infty} f(x)dx \quad (f(x) \ge 0)$ заключается в следующем: это площадь бесконечной области (рис.19), ограниченной сверху неотрицательной функцией $f(x)$, снизу – осью $0x$, слева – прямой $x=a$.

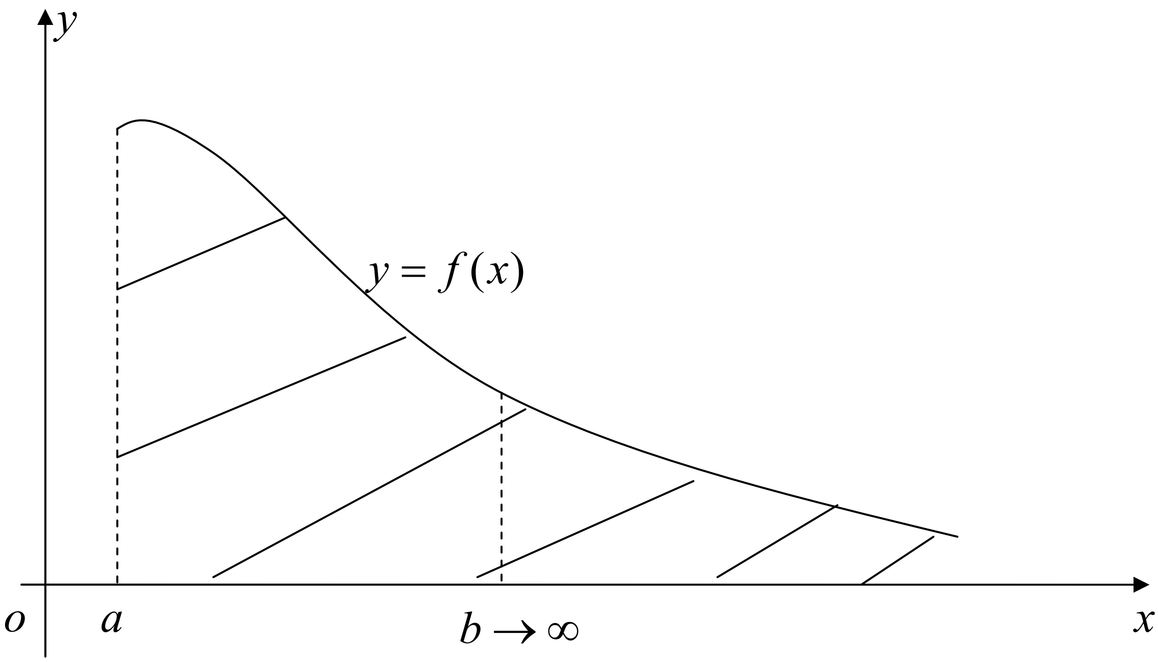

Рис. 19

Пример 37. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = e^{\frac{x}{2}}$, прямой $x = 1$ и осью $0x$.

Решение. Площадь фигуры (рис. 20) численно равна несобственному интегралу (32)

$$S = \int_{-\infty}^{1} e^{\frac{x}{2}} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{-\infty}^{1} e^{\frac{x}{2}} dx = \lim_{a \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} \Big|_{-\infty}^{1} = \lim_{a \to -\infty} 2(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{a}{2}}) =$$

$$= 2(1{,}65 - 0) = 3{,}3(ед^2).$$

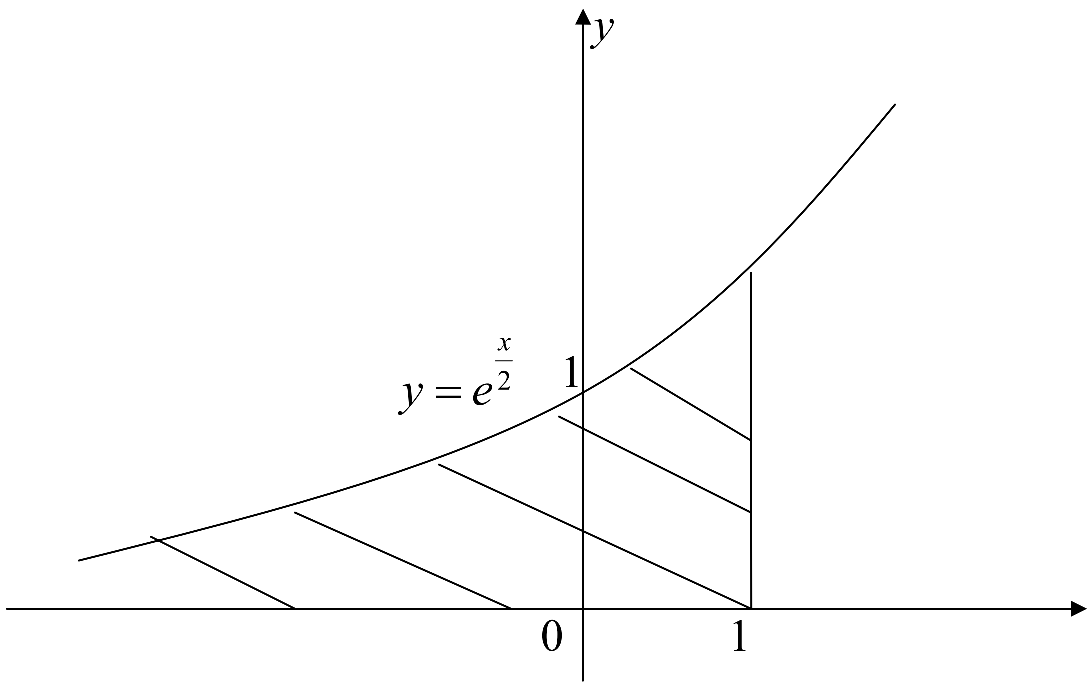

Рис. 20

Площадь заштрихованной фигуры, несмотря на своё бесконечное протяжение, все же имеет конечную площадь равную 3,3 кв. ед. (в случае сходимости несобственного интеграла).

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то полагают

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad (\varepsilon > 0). \tag{34}$$

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется **<u>сходящимся</u>**, если существует и конечен предел в правой части равенства (34), и **<u>расходящимся</u>**, если указанный предел не существует или равен бесконечности.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции, имеющий бесконечный разрыв в точке $x = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (\varepsilon > 0). \qquad (35)$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (\varepsilon > 0). \qquad (36)$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется **<u>сходящимся</u>**, если оба предела в правой части равенства (36) существуют, и **<u>расходящимся</u>**, если хотя бы один из указанных пределов не существует или равен бесконечности.

Геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченной функции аналогичен геометрическому смыслу несобственного интеграла с бесконечными пределами.

<u>Пример 38.</u> Исходя из определения несобственных интегралов от неограниченных функций, вычислить следующие интегралы или установить их расходимость:

а) $$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|x| \,\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty$$

Интеграл расходится.

б) $$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{2(1-x)^2}\right) \Big|_0^{1-\varepsilon} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) = -\infty$$

интеграл расходится;

в)

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}3\frac{x^{4/3}}{4}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}(\sqrt[3]{(-\varepsilon)^4}-\sqrt[3]{(-1)^4}+\sqrt[3]{1^4}-\sqrt[3]{\varepsilon^4})=0.$$

Следовательно, интеграл сходится.

§ 13. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Пусть задан непрекращающийся денежный поток, например, в случае эксплуатации земельного участка. Если r - это непрерывная процентная ставка, а $R(t)$ - соответствующая рента, то нахождение дисконтированной стоимости (26) земельного участка приводит к формуле, содержащий несобственный интеграл

$$P=\int_{0}^{\infty}R(t)e^{\frac{-rt}{100}}dt. \qquad (37)$$

<u>Пример 39.</u> Определить дисконтированную стоимость земельного участка, если рента, получаемая от земельного участка $R(t)=3e^{-0,6t}$, $r=12\%$. Провести экономический анализ.

<u>Решение.</u> Применяя формулу (37), получим:

$$P=\int_{0}^{\infty}3e^{-0,6t}e^{-0,12t}dt=3\int_{0}^{\infty}e^{-0,72t}dt=3\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}e^{-0,72t}dt=3\lim_{b\to\infty}(-\frac{100}{72}e^{-0,72t})\Big|_{0}^{b}=$$

$$=-\frac{300}{72}\lim_{b\to\infty}(e^{-0,72b}-1)=\frac{300}{72}=4,16(\textit{тыс.руб.}).$$

Начальная стоимость земельного участка составит 3 000 рублей. Конечная стоимость при постоянной процентной ставке будет равна 4,16 тысяч рублей.

§ 14. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

На практике часто встречаются интегралы, которые не выражаются через элементарные функции или выражаются очень сложно. Поэтому в приложениях используют так называемые **численные методы**, позволяющие найти приближенные значения искомого интеграла с требуемой точностью.

Рассмотрим некоторые из многочисленных методов приближенного вычисления определенного интеграла.

1. Метод прямоугольников

Промежуток интегрирования $[a,b]$ делим точками $x_1, x_2 ... x_{n-1}$ на n равных частей (рис. 21, 22).

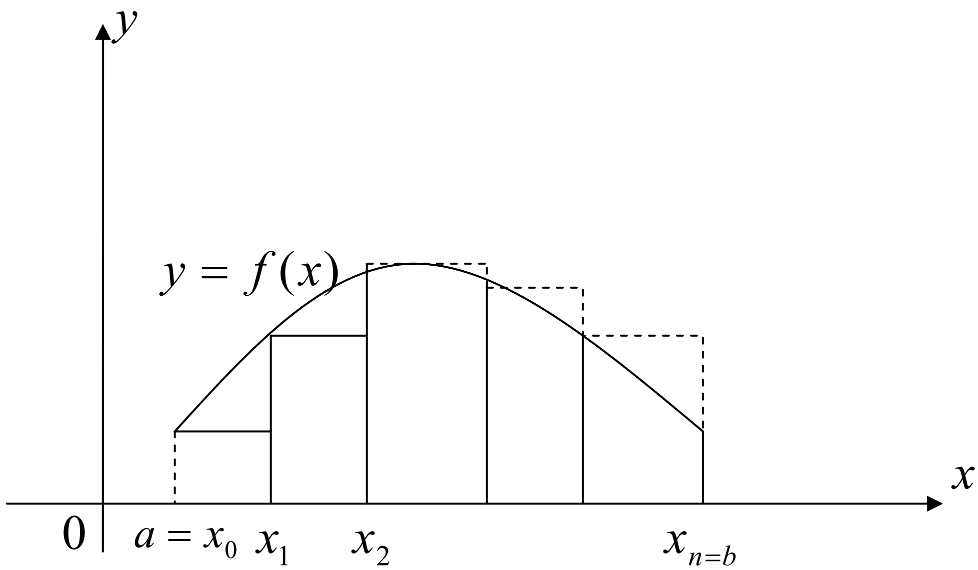

Рис. 21

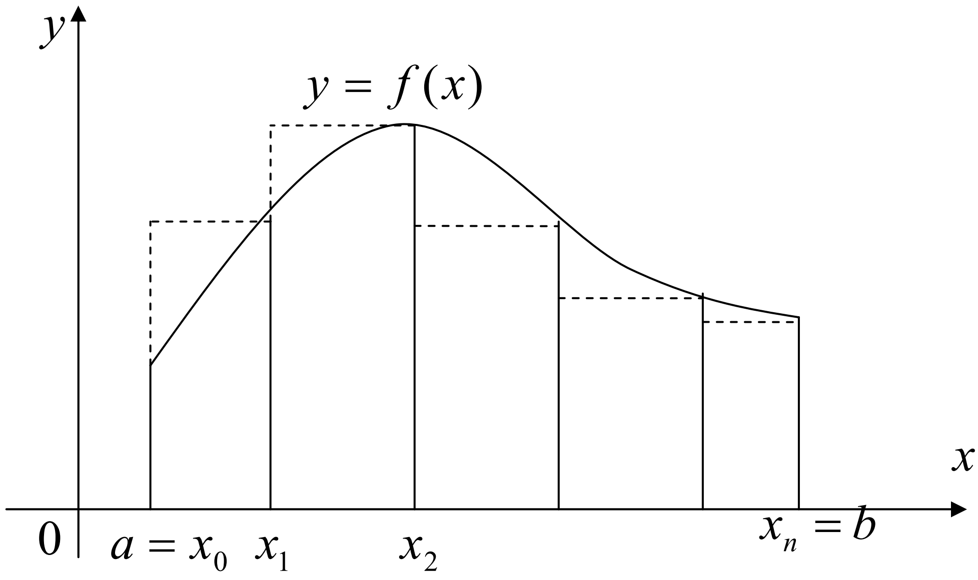

Рис.22

Длина каждой части деления $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Полагаем $a = x_0, b = x_n$.

Через $x_{1/2}, x_{3/2}, x_{5/2}, \ldots$ (рис. 23) обозначаем середины участков (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3) и т.д.

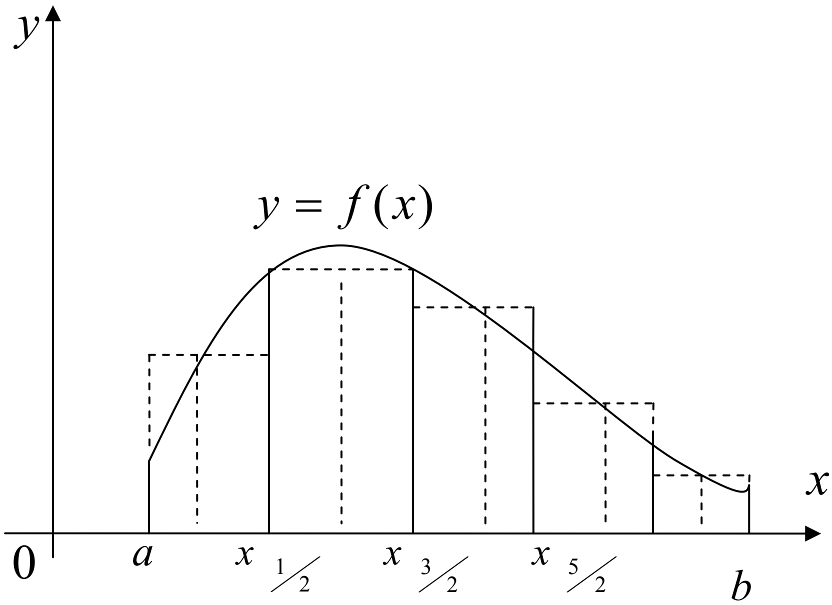

Рис. 23

Полагаем $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2 ...;$

$$f(x_{1/2}) = y_{1/2}, f(x_{3/2}) = y_{3/2}, f(x_{5/2}) = y_{5/2} ... \quad .$$

Формулами прямоугольников называются следующие приближенные равенства:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right], \tag{38}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n\right], \tag{39}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{\frac{2n-1}{1}}\right]. \tag{40}$$

Выражения (38), (39), (40) дают площади ступенчатых фигур, состоящих из прямоугольников.

С увеличением n точность данных формул возрастает.

Предельная погрешность для формул (38) и (39) составляет

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^2}{4n} M_1, \tag{41}$$

где M_1 - наибольшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Предельная погрешность для формулы (40) имеет вид

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2, \tag{42}$$

где M_2 - наибольшее значение $(f''(x))$ на отрезке $[a,b]$.

2. Метод трапеций.

Делим отрезок $[a,b]$ на n равных частей. Площадь каждой полоски, на которые разбивается криволинейная трапеция $aABb$ (рис. 24), заменяется площадью обычной прямоугольной трапеции

$$S_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2} h, \quad \text{где} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

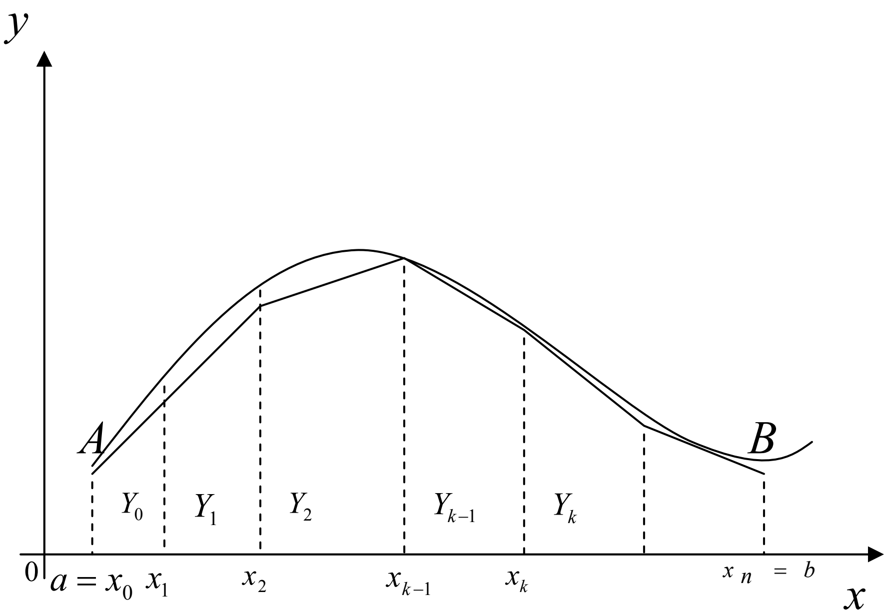

рис. 24

Складывая площади элементарных участков, получим **формулу трапеций:**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]. \qquad (43)$$

Погрешность формулы (43) оценивается неравенством

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \qquad (44)$$

где M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ в промежутке $[a,b]$.

<u>3. Формула Симпсона</u> (параболических трапеций).

Разбиваем отрезок $[a,b]$ на $2n$ равных частей точками

$x_0 =< x_1 < x_2 < ... < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$ и обозначим через

$y_0, y_1, y_2, ..., y_{2n-1}, y_{2n}$, соответствующие значения функции $y = f(x)$.

Рассматриваем двойной частичный отрезок $\left[x_{2k-2}, x_{2k}\right]$ и проводим дугу параболы через точки $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$ (рис.25).

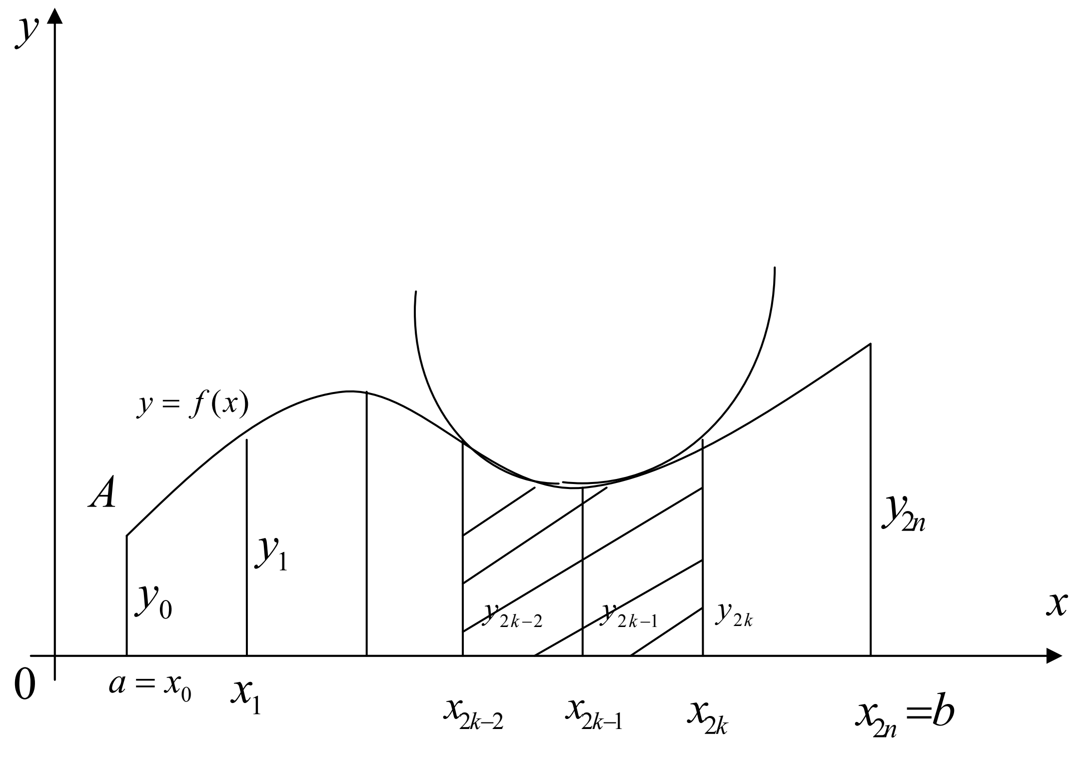

Рис. 25

Площадь заштрихованной параболической трапеции находится по формуле

$$S_k = \frac{b-a}{3(2k)}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) .$$

Складывая площади элементарных участков $S_k\,(k = \overline{1,n})$, получим **<u>формулу Симпсона</u>**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3(2n)}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})\right] \quad (45)$$

Для вычисления погрешности формулы (45) справедлива следующая оценка

$$\Delta \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \mathrm{M}_4, \quad (46)$$

где M_4 - наибольшее значение $\left|f^{IV}(x)\right|$ на отрезке $[a,b]$.

Для приближенного вычисления определенных интегралов от сложных функций применяются и другие вычислительные схемы. Например, Гаусса или Чебышева.

Пример 40. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ приближенно, деля отрезок $[0,1]$ на десять равных частей. Оценить допускаемую погрешность. Применить формулу прямоугольников и трапеций.

Решение. Обозначим точки деления $[0,1]$ через $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, …, $x_{10} = 1$ Вычислим значение подынтегральной функции $f(xi) = \sqrt{1+xi^4}, (i = 1,2,...,10)$

Табл. 1

xi	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(xi)$	1	1,0001	1,0008	1,0040	1,0127	1,0308	1,0628	1,1136	1,1873	1,2869	1,4142

Применяя формулу прямоугольников (38), получим

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{1-0}{10}(1 + 1{,}0001 + 1{,}0008 + 1{,}0040 + 1{,}0127 + 1{,}0308 + 1{,}0628 + 1{,}1136 + 1{,}1873 + 1{,}2869) \approx$$
$$\approx 1{,}0699$$

Используя квадратурную формулу трапеций (43), получим

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1+1{,}4142}{2}+1{,}0001+1{,}0008+1{,}0040+1{,}0127+1{,}0308+1{,}0628+1{,}1136+1{,}1873+1{,}2869\right) \approx$$
$$\approx 1{,}0906.$$

Вычислим погрешность формулы прямоугольников (41)

$\Delta \le \frac{b-a}{4n}\text{M}_1$, где M_1 - наибольшее значение $\left|f^I(x)\right|$ на отрезке $[0,1]$.

Находим $f^I(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ тогда $\text{M}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

Окончательно имеем: $\Delta \le \frac{1}{40} * \frac{2}{\sqrt{2}} = 0{,}0354$.

Аналогично находим погрешность для формулы трапеций (44)

$\Delta \le \frac{b-a}{12n^2}\text{M}_2$ где M_2 - наибольшее значение $\left|f^{II}(x)\right|$ на отрезке $[0,1]$.

$f^{II}(x) = \frac{2x^3(3+x^4)}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$ тогда $\text{M}_2 = 2\sqrt{2}$.

Следовательно, $\Delta \le \frac{1^3}{12*10^2}2\sqrt{2} \approx 0{,}002357$.

Приближенное значение интеграла по формуле прямоугольников равно $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \approx 1{,}0699 \pm 0{,}0354$, а по формуле трапеций $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \approx 1{,}0906 \pm 0{,}00235$.

<u>**Пример 41.**</u> Вычислить с точностью до 0,0001 по формуле Симпсона интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)dx$.

<u>**Решение**</u>. По условию задачи, допускаемая погрешность не должна превосходить 0,0001, поэтому число делений $2n$ в формуле (45) найдем, учитывая оценку (46), из неравенства $\text{M}_4 \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} < 0{,}0001$.

Вычислим $\text{M}_4 = \max\limits_{0\le x\le \frac{\pi}{4}}\left|f^{IV}(x)\right|$ для $f(x) = \sin x^2$,

$$f^{IV}(x) = -12\sin x^2 - 48x^2\cos x^2 + 16x^4\sin x^2.$$

Данная функция возрастает на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ т.к.

$$\left|f^{IV}(0)\right| = 0, \quad \left|f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 25{,}38.$$

Полагая

$$\mathrm{M}_4 = \max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}}\left|f^{IV}(x)\right| = f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 25{,}38, \text{ получим } \frac{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)^5}{180(2n)^4}\cdot 25{,}38 < 0{,}0001.$$

Откуда $n^4 > 26{,}43$. Последнее неравенство выполняется для всех $n \ge 3$.

Берем для расчета $n = 3$, делим отрезок $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ на 6 равных частей и вычисляем соответствующие значения подынтегральный функции $y = \sin x^2$.

При этом , чтобы обеспечить требуемую условием точность $(0{,}0001)$, вычисления производим с пятью знаками после запятой, округляя окончательный результат до четырёх знаков.

Табл.2

x_k	0	$7{,}5^0$	15^0	$22{,}5^0$	30^0	$37{,}5^0$	45^0
x_k^2	0	$56{,}25^0$	225^0	$506{,}25^0$	900^0	$1406{,}25^0$	2025^0
$\sin x_k^2$	0	0,82901	-0,71000	0,55923	0	-0,55923	-0,71000

Подставляя найденные значения функции в формулу (45), получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x^2)dx = \frac{3{,}14}{4*18}\left[(0-0{,}71000)+4(0{,}82901+0{,}55923-0{,}55923)+2(-0{,}71000+0)\right] =$$
$$= 0{,}05172.$$

Следовательно, интеграл приближенно равен $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x^2)dx \approx 0{,}0517$ с точностью до четвертого знака.

§15. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}dx$.

Решение Воспользуемся формулой замены переменного

Пусть $x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$.

При $x = 1$ $t_1 = 0$ и при $x = 4$ $t_2 = 2$.

Получим

$$\int_1^2 \frac{t+1}{t+2}2tdt = 2\int_1^2 \frac{t^2+t}{t+2}dt = 2\int_1^2 (t-1+\frac{2}{t+2})dt = 2\left[\frac{t^2}{2} - t + 2\ln|t+2|\right]_1^2 = 1 + 4\ln 4/3.$$

Задача 2 Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x\ln(x^5+5)dx$.

Решение Применим формулу интегрирования по частям (10)

Положим $\ln(x^2+5) = u$ $xdx = dv$

$du = \frac{2xdx}{x^2+5}$ $v = \frac{x^2}{2}$,

получим

$$\int_0^1 x\ln(x^2+5)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x^2+5)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\ln 6 + \int (x - \frac{5x}{x^2+5})dx = \frac{1}{2}\ln 6 +$$

$$+(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}\ln|x^2+5|)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 2\ln 6 + \frac{5}{2}\ln 5 \approx 0{,}75.$$

Задача 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_0^\infty \frac{x+3}{x+2}dx.$$

Решение. По условию задачи имеем несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Применяя формулу (31), получим

$$\int_0^{\infty}\frac{x+3}{x+2}dx = l\,im_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x+3}{x+2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{(x+2)+1}{x+2}dx = \lim\int_0^b (1+\frac{1}{x+2})dx = \lim(x+\ln|x+2|)\Big|_0^b = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

<u>Задача 4.</u> Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_{0+}^{4}\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx.$$

<u>Решение.</u> По условию задачи имеем несобственный интеграл от неограниченной функции в точке $x=0$. Применяя формулу (34), получим

$$\int_{0+}^{4}\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{4}\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{4}(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}})dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(x^{3/2}+4x^{1/2})\Big|_{\varepsilon}^{4} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(16-\sqrt{\varepsilon^3}-4\sqrt{\varepsilon}) = 16.$$

Следовательно, интеграл сходится.

<u>Задача5.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченную указанными линиями: $y = x^2 - 8$, $y = 2x$.

<u>Решение.</u> Построим фигуру, площадь которой нужно найти (рис. 26).

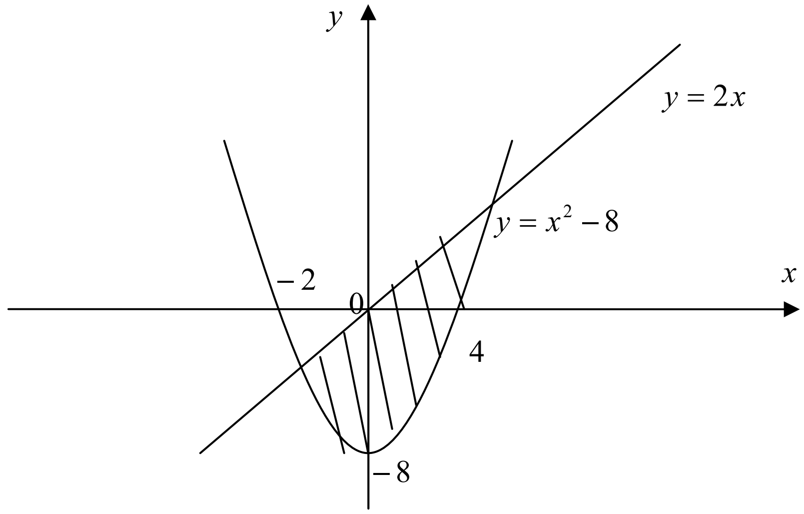

Рис. 26

Найдем точки пересечения двух данных линий

$x^2-8=2x$ или $x^2-2x-8=0$, $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm 3$ $x_1=-2$, $x_2=4$.

Точки пересечения равны соответственно $x_1=-2$ и $x_2=4$.

Используя формулу (23), получим

$$S=\int_{-2}^{4}(2x-x^2+8)dx=(2\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+8x)\Big|_{-2}^{4}=(x^2-\frac{x^3}{3}+8x)\Big|_{-2}^{4}=36(ед^2).$$

<u>Задача 6.</u> Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ по формуле трапеций при $n=10$. Оценить погрешность.

<u>Решение</u>. Составим таблицу значений подынтегральной функции, причем будем вычислять ординаты $yi(i=0,1,2,...,10)$ с четырьмя знаками после запятой.

xi	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$yi=\frac{1}{1+xi}$	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

По формуле трапеций получим

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx\frac{1}{10}(\frac{1+0,5}{2}+0,901+0,8333+0,7692+0,7143+0,6667+0,6250+0,5882+0,5556+$$

$$+0,5263)=\frac{1}{10}*6,9377\approx 0,6938.$$

Произведем оценку погрешности полученного результата по формуле (42)

$$\Delta\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}\mathrm{M}_2,$$

где M_2-наибольшее значение $\left|f^{II}(x)\right|$ в промежутке $[a,b]$.

Имеем $f^{I}(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{II}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$.

Так как $0\le x\le 1,$ то $\left|f^{II}(x)\right|\le 2.$

Следовательно, в качестве M_2 можно взять число 2. Отсюда находим оценку погрешности:

$$\Delta \le \frac{1^3}{12*10^2}*2 = \frac{1}{600} < 0{,}0017.$$

Следовательно, интеграл приближенно равен, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}6938$ а погрешность составляет 0,0017.

Задача 7. Вычислить излишек или добавочную выгоду потребителя и добавочную выгоду производителя, если кривые спроса и предложения имеют вид соответственно: $P_Д = \frac{29-2Q}{Q+3}$ и $Ps = Q+3$.

Сделать чертеж, провести экономический анализ задачи (рис. 27).

Решение. Построим кривые спроса и предложения.

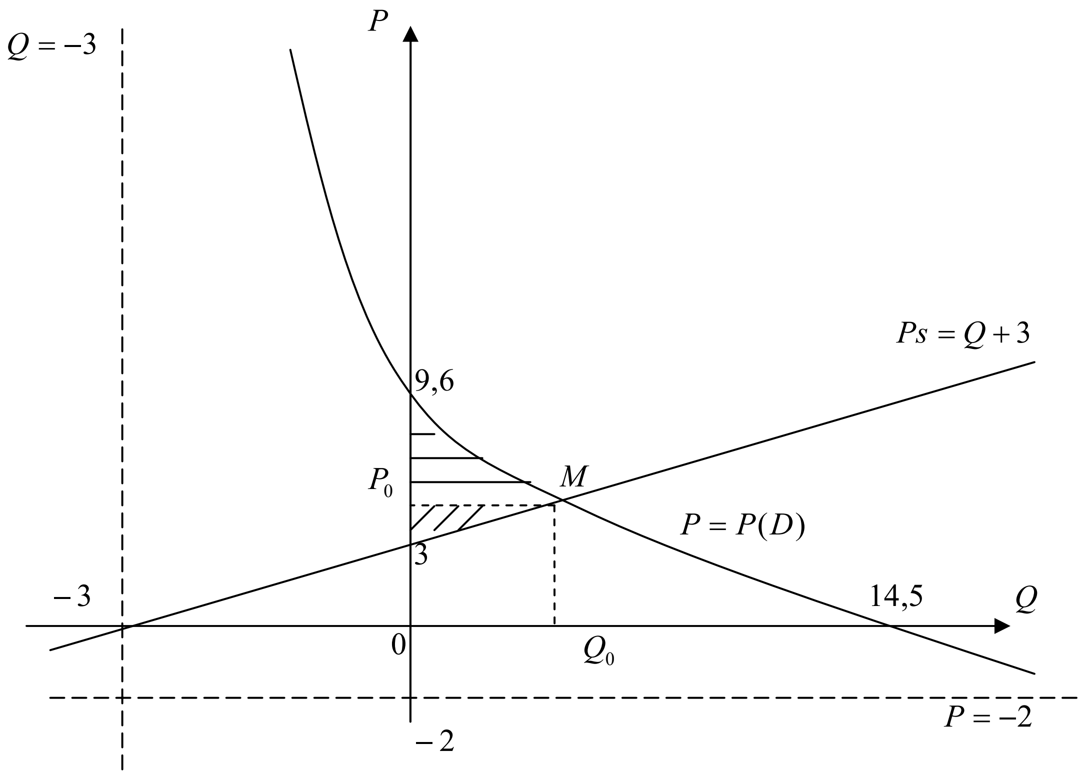

Рис. 27

Находим равновесную цену, как точку пересечения кривых

$$\frac{29-2Q}{Q+3}=Q+3\,,\qquad Q^2+8Q-20=0\,,\qquad Q_0=2\,,\qquad P_0=5\,.$$

Следовательно, равновесное количество товара $Q_0=2у.е.$ и равновесная цена $P_0=5у.е.$

Применяя соответственно формулы (29) и (30), находим излишек потребителя

$$CS=\int_0^2\frac{29-2Q}{Q+3}dQ-2*5=\int_0^2(-2+\frac{34}{Q+3})dQ-10=(-2Q+34\ln|Q+3|)\Big|_0^2-10=$$

$$=3{,}68(у.е.)\,.$$

И, соответственно, излишек производителя

$$PS=10-\int_0^2(Q+3)dQ=10-\left.\frac{(Q+3)^2}{2}\right|_0^2=2(у.е.)\,.$$

Следовательно, если реализовать товар в количестве $Q_0=2у.е.$, то добавочная выгода покупателя составит 3,68 у.е., а добавочная выгода продавца равна 2у.е. при равновесной цене $P_0=5у.е.$

Задача 8. Заданы чистые инвестиции функцией

$I(t)=150\sqrt[2]{t^2}\,(у.е)$ Требуется определить приращение капитала за 3 года и провести анализ решения.

Решение. Приращение капитала за три года определим по формуле (24)

$$\Delta K=\int_{t_1}^{t_2}I(t)dt=\int_0^3 150\sqrt[3]{t^2}\,dt=150*2\left.\frac{t^{5/2}}{5}\right|_0^3=1560(у.е.)\,.$$

Так как чистыми инвестициями называют общие инвестиции производимые в течении 1 года, за вычетом инвестиций выходящих из строя основных фондов, то за три года капитал увеличится на 1560 у.е.

Задача 9. Определить дисконтированную стоимость земельного участка $R(t) = 5e^{-0,15t}(тыс.руб/год)$, процентная ставка $r = 7\%$. Провести анализ решения.

Решение. Определим стоимость земельного участка по формуле (37)

$$P = \int_0^\infty R(t)e^{-\frac{rt}{100}}dt = \int_0^\infty 5e^{-0,15t} * e^{-0,07t}dt = 5\int_0^\infty e^{-0,22t}dt = -\frac{5}{0,22}e^{-0,22t}\Big|_0^\infty =$$
$$= -22,72\lim_{b\to\infty}(e^{-b} - e^0) = -22,72(-1) = 22,72(тыс.руб.).$$

Начальная стоимость земельного участка составит 5 тыс. руб. Конечная стоимость при постоянной процентной ставке будет равна 22,72 тыс. руб.

Задача 10. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран Кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = 1 - \frac{7}{8}\sqrt[3]{x}$, где x - доля населения, y - доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини и провести экономический анализ решения.

Решение. Вычислим коэффициент Джини по формуле (28)

$$K = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 - 2\int_0^1 (1 - \frac{7}{8}\sqrt[3]{x})dx = 1 - 2(x - \frac{7*3}{8*4} * x^{4/3})\Big|_0^1 = 0,3.$$

«Кривая или диаграмма Джини» показывает зависимость процента доходов от процента, имеющего их населения. С помощью коэффициента Джини определяют степень неравенства в распределении доходов населения. Полученный коэффициент $K = 0,3$ подтверждает о неравномерном распределении доходов.

Библиографический список

1. *Бугров Я.С.,. Никольский СМ.* Дифференциальное и интегральное
исчисление. М.: Наука, 1988.
2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М.:Наука,
1972.
3. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Кремера. Н.Ш. М: Банки и биржи, 1997.
4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в
упражнениях и задачах. Т.2. М.: Наука, 2001.
5. *Малыхин В.И.* Математика в экономике. М.: Инфра-М , 1999.
6. *Красе М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в
экономическом образовании. М.:Дело, 2001.
7. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов. М.: Банки и
биржи, 1997.
8. *Кудрявцев ПД.* Курс математического анализа. Т.1. М.:Высшая школа,
1981.
9. *Солодовников А.С, Бабайцев В.А. Браилов А.В.* Математика в экономике.
М.: Финансы и статистика, 2001.