Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра математического анализа и моделирования

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ**

**ИНФОРМАТИКА**

Модуль: Численные методы и математическое моделирование

Основной образовательной программы по специальности 010701.65 – Физика

Благовещенск 2011 г.

УМКД разработан канд. физ.-мат. наук, доцентом Масловской Анной Геннадьевной

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от «___» ___________ 201_ г. №___

Зав. кафедрой _______________ / В.В.Сельвинский /

**УТВЕРЖДЕН**

Протокол заседания УМСС 010701.65 – Физика

от «___» ___________ 201_ г. №___

Председатель УМСС _______________ / Е.А. Ванина /

# СОДЕРЖАНИЕ

## 1 Рабочая программа учебной дисциплины

### 1.1 Цели и задачи освоения дисциплины

Численные методы занимают важное место в системе прикладного математического образования. Целью преподавания дисциплины является изучение численных методов решения задач алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений, а также освоение методов построения, классификации и анализа математических моделей.

Задачи изучения курса составляют следующие вопросы: численные методы построения, решения и исследования различных задач, разработка и выбор оптимального алгоритма решения конкретных задач, обработка и анализ полученных результатов, корректировка способа решения при наличии особенностей задачи, анализ вопроса устойчивости и сходимости метода решения, оценка границ применимости построенной математической модели.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать и уметь:** применять на практике методы численного анализа; иметь четкое представление о видах математических моделей, основанных на численных методах, о способах их построений, о численных методах реализации математических моделей; разрабатывать алгоритм применяемого метода решения; реализовать численный алгоритм программно с помощью инструментальных средств и прикладных программ; анализировать полученные результаты; оценивать погрешность вычислений.

**владеть:** методологией и навыками применения численных методов для решения прикладных задач, самостоятельно осуществлять выбор методики решения и построения алгоритма той или иной задачи, давать полный анализ результатов решения и оценивать границы применимости выбранного метода.

Данный курс базируется на ранее изученных дисциплинах: «Математический анализ», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», связан с дисциплинами: «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики» и дает основу для реализации изученных методов в виде программных алгоритмов на занятиях по курсу: «Вычислительная физика».

### 1.2 Место дисциплины в структуре ООП ВПО

Дисциплина «Численные методы и математическое моделирование» является дисциплиной, входящей в блок естественно-научных дисциплин федерального компонента в качестве составного модуля дисциплины «Информатика» для специальности 010701 – «Физика». Государственный стандарт – ЕН.Ф.04.03. Государственный стандарт предусматривает следующее тематическое содержание курса. Приближенные числа, погрешности. Вычисление значений простейших функций. Интерполяция и приближение функций. Интерполяционные полиномы. Наилучшее приближение. Среднеквадратичное приближение. Равномерное приближение. Ортогональные многочлены. Сплайн интерполяция. Поиск корней нелинейных уравнений. Итерационные методы. Метод Ньютона. Отделение корней. Комплексные корни. Решение систем уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые и итерационные процессы. Задачи на собственные значения. Численное дифференцирование. Численное интегрирование. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций. Многомерные интегралы. Метод Монте-Карло. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование уравнений второго и высшего порядков. Численные методы решения краевой задачи и задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычислительные методы решения краевых задач математической физики. Разностные схемы. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость. Вариационно-разностные методы, метод конечных элементов. Численные методы решения интегральных уравнений. Поиск экстремума, одномерная и многомерная оптимизация. Методы математического программирования. Вычисление псевдообратных матриц и псевдообратных решений. Сингулярное разложение. Обработка экспериментальных данных.

### 1.3 Структура и содержание дисциплины «Численные методы и математическое моделирование»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 74 часа.

| № п/п | Раздел дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Введение в предмет «Численные методы и математическое моделирование» | 4 | 1 | Лекция (2 час.) | |
| 2 | Точность вычислительного эксперимента | 4 | 2 | Лекция (2 час.), практическая работа «Теория погрешностей» (2 час.) | Устный опрос по теме практической работы, зачет практической работы |
| 3 | Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений | 4 | 3-5 | Лекция (6 час.), лабораторная работа «Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений» (2 час.) | Устный опрос по теме практической работы, зачет практической работы |
| 4 | Численные методы линейной алгебры | 4 | 6-7 | Лекция (4 час.), лабораторная работа «Численное решение систем линейных уравнений. Численные методы линейной алгебры» (2 час.) | Устный опрос по теме практической работы, зачет практической работы |
| 5 | Численное решение сис- | 4 | 8 | Лекция (2 час.), лабораторная работа «Чис- | Устный опрос по темам практических работ, зачет практических работ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | тем нелинейных уравнений | | | ленное решение систем нелинейных уравнений» (2 час.), самостоятельная работа по темам практических занятий (2 час.) | |
| 6 | Аппроксимация функций и обработка экспериментальных данных | 4 | 9-11 | Лекция (6 час.), лабораторная работа «Интерполирование функций» (2 час.), лабораторная работа «Обработка экспериментальных данных» (2 час.), самостоятельная работа по темам практических занятий (3 час.) | Устный опрос по темам практических работ, зачет практических работ |
| 7 | Численное дифференцирование и численное интегрирование | 4 | 12 | Лекция (2 час.), лабораторная работа «Численное дифференцирование и интегрирование» (2 час.) | Устный опрос по темам практических работ, зачет практических работ |
| 8 | Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. | 4 | 13-14 | Лекция (4 час.), лабораторная работа «Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений» (2 час.), самостоятельная работа по теме лабораторной работы (5 час.) | Устный опрос по теме лабораторной работы, зачет лабораторной работы |
| 9 | Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений | 4 | 15-16 | Лекция (4 час.), лабораторная работа «Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений» (2 час.), самостоятельная работа по теме лабораторной работы (2 час.), подготовка к зачету (3 час.) | Устный опрос по теме лабораторной работы, зачет лабораторной работы |
| 10 | Численное решение уравнений с частными производными и интегральных уравнений | 4 | 17-18 | Лекция (4 час.), лабораторная работа «Численное решение уравнений с частными производными» (2 час.), подготовка к зачету и контрольному тестированию (5 час.) | Устный опрос по теме лабораторной работы, зачет лабораторной работы, контрольное тестирование |
| | | | | | Зачет |

### 1.4 Содержание разделов и тем дисциплины

***Тема №1. Введение в предмет «Численные методы и математическое моделирование» - 2.***

Предмет вычислительной математики. Методы вычислительной математики. Численные методы как раздел вычислительной математики. Общие сведения о моделировании. Применение численных методов в математическом моделировании. Классификация математических моделей и основные этапы моделирования.

***Тема №2. Точность вычислительного эксперимента – 2.***

Правила приближенных вычислений и элементы теории погрешностей. Приближенные числа, абсолютные и относительные погрешности. Арифметические действия над приближенными числами. Виды и источники погрешностей. Устойчивость. Корректность. Сходимость.

***Тема №3. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений – 6 .***

Метод половинного деления. Метод хорд. Метод Ньютона. Метод простых итераций. Метод релаксаций. Метод Чебышева третьего порядка. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.

***Тема №4. Численные методы линейной алгебры – 4.***

Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Прямые и итерационные методы. Метод Гаусса. Схема Гаусса с выбором главного элемента. Метод прогонки для решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод выражений. Компактная схема метода Гаусса или схема Халецкого. Применение метода Гаусса к вычислению определителей и к обращению матриц. Метод квадратных корней. Метод LU-разложения. Метод простой итерации. Метод Якоби и метод Зейделя. Вычисление определителей. Задачи на собственные значения. Метод Крылова для нахождения собственных чисел и векторов матриц. Нормы и обусловленность матриц. Теорема о достаточном условии сходимости. Теорема о достаточном условии сходимости методов Якоби и метода Зейделя.

***Тема №5. Численное решение систем нелинейных уравнений – 2.***

Метод Ньютона. Метод простой итерации. Метод градиентного спуска. Варианты итерационных схем.

***Тема №6. Аппроксимация функций и обработка экспериментальных данных – 6.***

Постановка задачи аппроксимации функций. Виды аппроксимаций. Использование рядов. Многочлены Чебышева и наилучшие равномерные приближения. Интерполирование функций. Постановка задачи интерполяции. Линейная и квадратичная интерполяции. Интерполяционные сплайны. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Схема Эйткена. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя. Обратное интерполирование. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования. Подбор эмпирических формул. Поиск параметров формул. Подбор эмпирических формул. Эмпирические формулы. Определение параметров эмпирической зависимости. Метод наименьших квадратов. Локальное сглаживание данных. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратичного трехчлена. Аппроксимация функцией произвольного вида.

***Тема №7. Численное дифференцирование и интегрирование – 2.***

Аппроксимация производных. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании. Выбор оптимального шага. Аппроксимация производных интерполяционными многочленами с постоянным и переменным шагом. Метод неопределенных коэффициентов. Улучшение аппроксимации методом Рунге. Аппроксимация частных производных.

Квадратурные формулы. Выбор шага интегрирования. Интегрирование с помощью степенных рядов. Интегралы от разрывных функций. Метод Гаусса. Интегралы с бесконечными пределами. Кратные интегралы. Метод повторного интегрирования. Метод Диткина. Метод Монте-Карло. Вычисление интегралов в нерегулярных случаях.

***Тема №8. Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений – 4.***

Основные понятия и методы решения. Задача Коши. Одношаговые методы. Метод последовательных приближений. Метод Эйлера. Модификации метода Эйлера. Метод Рунге-Кутта. Многошаговые методы. Метод Адамса. Метод Милна. Аппроксимация, устойчивость, сходимость численного решения задач для дифференциального уравнения.

***Тема №9. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений – 4.***

Постановка задачи. Метод конечных разностей для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод прогонки. Метод Галеркина. Метод коллокации.

***Тема №10. Численное решение уравнений с частными производными и интегральных уравнений – 4***

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Метод сеток для уравнений эллиптического типа. Метод сеток для уравнений параболического и гиперболического типа.

Основные виды линейных интегральных уравнений. Уравнения Вольтера и Фредгольма. Метод последовательных приближений. Метод конечных сумм. Метод коллокации. Метод наименьших квадратов.

При выполнении лабораторных работ по данному курсу студенты должны продемонстрировать умение решать прикладные задачи, как с использованием возможностей математических прикладных программ, так и реализуя численные алгоритмы математических моделей. При прохождении практикума на ЭВМ рекомендован ППП Matlab 8.0.

### 1.5 Самостоятельная работа

Самостоятельная работа – 20 час. По данному курсу в рамках самостоятельной работы студента предполагается подготовка к устной защите лабораторных работ, текущая подготовка по темам лекционных занятий, подготовка к контрольному тестированию и итоговому контролю в конце семестра.

### 1.6 Образовательные технологии

При преподавании дисциплины «Численные методы и математическое моделирование» используются как традиционные (лекция, лекция-семинар), так и инновационные технологии (применение мультимедийного проектора, использование ресурсов сети Internet и электронных учебников).

### 1.7 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся.

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения лабораторных занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки отчетов по лабораторным работам и индивидуальным заданиям. Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде анализа итоговых тестов. Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде зачета.

Зачет сдается в конце семестра. Форма сдачи зачета – устная. Необходимым условием допуска на зачет является сдача всех лабораторных работ и трех расчетных работ. В предлагаемый билет входят два вопроса: основной и дополнительный. Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос, и краткий – на дополнительный. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале, краткий ответ – основных теоретических моментов: понятий и терминологии. При выполнении указанных требований ставится отметка «зачтено».

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов: основная и дополнительная литература, официальные ресурсы сети Internet, установленное в вузе программное обеспечение.

### 1.8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Численные методы и математическое моделирование»

а) Перечень обязательной (основной) литературы

1.8.1 Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - 6-е изд. - М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2008. - 637 с.

1.8.2 Самарский А.А. Введение в численные методы : учеб. пособие/ А. А. Самарский. -3-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2005. -288 с.

1.8.3 Формалев В.Ф. Численные методы : учеб. пособие: рек. НМС Мин. обр. РФ/ В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников ; под ред. А. И. Кибзуна. -2-е изд., испр. и доп.. -М.: Физматлит, 2006. -399 с.

б) Перечень дополнительной литературы

1.8.4 Вержбицкий, В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): учеб. пособие для вузов: рек. Мин. обр. РФ / В. М. Вержбицкий. - М. : Высш. шк., 2000. - 268 с.

1.8.5 Вержбицкий, В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. - М. : Высш. шк., 2001. - 382с.

1.8.6 Волков Е.А. Численные методы : учеб. пособие/ Е. А. Волков. -4-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2007. -249 с.

1.8.7 Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации : учеб. пособие: рек. УМС/ А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. -2-е изд., перераб. и доп.. -М.: Физматлит, 2008. -320 с.

1.8.8 Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах : учеб. пособие : рек. УМО/ В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. -3-е изд., стер.. -М.: Высш. шк., 2008. -480 с.

1.8.9 Лапчик М.П. Численные методы : учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ/ М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер ; под ред. М. П. Лапчика. -2-е изд., стер.. -М.: Академия, 2005. -384 с.

1.8.10 Масловская, А. Г. Методы вычислений: реализация алгоритмов в MATLAB: практикум / А. Г. Масловская , Т. К. Барабаш, Л. В. Чепак ; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2010. - 204 с.

1.8.11 Масловская, А. Г. Основные принципы работы и конструирование интерфейса в MATLAB: практикум / А. Г. Масловская, А. В. Рыженко ; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2008. - 103 с.

1.8.12 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: учеб. пособие / Г.И. Марчук. – 4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 608 с.

1.8.13 Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам : [учеб. пособие] / М. А. Ольшанский. -М.: Физматлит, 2005. -168 с.

1.8.14 Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учеб. пособие / В.А. Охорзин. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 349 с.

1.8.15 Плохотников К.Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде Matlab : курс лекций: учеб. Пособие: рек. УМО / К.Э. Плохотников. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 496 с.

1.8.16 Ракитин В.И. Руководство по методам вычислений и приложения MATHCAD : учеб. пособие: доп. УМО/ В. И. Ракитин. -М.: Физматлит, 2005. -264 с.

1.8.17 Ращиков В.И. Численные методы решения физических задач : учеб. пособие/ В. И. Ращиков, А. С. Рошаль. -СПб.: Лань, 2005. -206 с.

1.8.18 Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов : метод. пособие/ Н. Н. Рено. -М.: Книжный дом Университет, 2007. -24 с.

1.8.19 Рено Н.Н. Численные методы : учеб. пособие/ Н. Н. Рено. -М.: Книжный дом Университет, 2007. -100 с.

в) Периодические издания

1.8.20 Журнал “Russian journal of numerical analysis and mathematical modeling”

1.8.21 Журнал «Математическое моделирование»

1.8.22 Журнал «Вычислительные технологии»

г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

| **№** | **Наименование ресурса** | **Краткая характеристика** |
|---|---|---|
| 1 | http://www.iqlib.ru | Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам, отдельным темам и отраслям знания |
| 2 | http://exponenta.ru/ | Имеются ресурсы: Internet-класс по Высшей Математике; работа с примерами, решенными в средах ППП; банк решенных студенческих задач; обсуждение на форуме. |

**1.9 Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Лекции проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин, включая мультимедиа-проектор.

Для проведения практических и лабораторных работ необходим компьютерный класс на 10-13 посадочных рабочих мест пользователей. В классе должен быть установлен пакет прикладных программ Matlab.

## 2 Краткое изложение программного материала

**Семестр обучения: 4**

***Лекция 1***

Название темы: «Введение в предмет «Численные методы и математическое моделирование» (тема №1).

План лекции. Предмет вычислительной математики. Методы вычислительной математики. Численные методы как раздел вычислительной математики. Общие сведения о моделировании. Применение численных методов в математическом моделировании. Классификация математических моделей и основные этапы моделирования.

Цели, задачи: Ввести студентов в дисциплину «Численные методы и математическое моделирование», обозначить структуру курса, содержание практического и лабораторного практикума по основным разделам, предусмотренным Государственным образовательным стандартом, озвучить междисциплинарные связи, правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине.

Ключевые вопросы: 1) сформулируйте схему вычислительного эксперимента, 2) какое место занимают вычислительные методы среди методов решения прикладных задач? 3) привести примеры задач, которые не могут быть решены аналитическими методами.

Ссылки на литературные источники:

1.8.1, 1.8.9-1.8.12, 1.8.20-1.8.20

Выводы по теме: Численные методы занимают важное место в системе прикладного математического образования. Этот курс тесно связан с основными математическими дисциплинами: линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, алгоритмические языки, практикум на ЭВМ. Разделы, изучение которых предусмотрено Государственным образовательным стандартом, – основы теории погрешностей, численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, систем линейных уравнений, теория интерполирования, численное дифференцирование и интегрирование, применение численных методов для обработки экспериментальных данных, численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Одним из основных направлений дисциплины является обретение навыков: определения верного подхода к решению поставленной задачи, алгоритмизация и программирование численных методов, оценка границ применимости метода и погрешности найденного решения.

***Лекции 2***

Тема №2.

Название темы: «Точность вычислительного эксперимента».

План лекции.

Общая формула для оценки главной части погрешности. Погрешность задачи. Погрешность метода (устранимая или условная). Погрешность округлений (погрешность действий). Полная погрешность результата решения задачи. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности. Предельные погрешности. Сложение и вычитание приближенных чисел. Умножение и деление приближенных чисел. Погрешности вычисления значения функции. Функции одной переменной. Функции нескольких переменных. Определение допустимой погрешности аргументов по допустимой погрешности функции. Примеры.

Статистический и технический подходы к учету погрешностей действий. Статистические законы формирования погрешностей результатов действий. правило Чеботарева. Принцип Л. Н. Крылова.

Понятие о погрешностях машинной арифметики. Два способа для представления вещественных чисел в ЭВМ: с фиксированной и с плавающей запятой (точкой). Оценки абсолютных и относительных погрешностей.

Устойчивость. Корректность. Примеры неустойчивых задач.

Обусловленной линейных алгебраических задач. Число (мера) обусловленности матрицы. Спектральный радиус матрицы.

Цели, задачи: дать обучающимся целостные и взаимосвязанные знания по темам «Правила приближенных вычислений», «Устойчивость. Корректность», обеспечить творческую работу студентов совместно с преподавателем.

Ключевые вопросы: 1) Какая погрешность считается неустранимой и почему? 2) Как определить верные знаки числа по его абсолютной и относительной погрешностям? 3) В чем заключается особенность определения погрешности результата сложения или вычитания приближенных чисел? 4) Какова особенность определения погрешности результата операций деления или умножения приближенных чисел? 5) Как определяется относительная погрешность вычисления значения функции? 6) Дайте понятие корректно-поставленной задачи.

Ссылки на литературные источники:

1.8.1, 1.8.2, 1.8.4, 1.8.8-1.8.10

Выводы по теме: методики приближенных вычислений, понимание проблем точности расчетов, способы и подходы к оценке погрешностей машинной арифметики, а также методы анализа задач на предмет корректности постановки являются важными компонентами решения практически любой прикладной задачи и требуют качественного теоретического и практического освоения.

***Лекции 3-5***

Тема №3.

Название темы: «Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений».

План лекции.

Постановка задачи нахождения корня нелинейного скалярного уравнения.

Локализация корней. Графический способ локализации корней. Аналитический способ отделения корней. Примеры. Метод перебора организации машинной процедуры отделения корней.

Методы дихотомии. Метод половинного деления. Метод хорд. Сходимость итерационных последовательностей. Геометрические интерпретации методов.

Линейно сходящийся итерационный процесс, итерационный процесс, сходящийся с порядком *p*. Локально и глобально сходящиеся итерационные методы. Скорость сходимости итерационного процесса.

Метод Ньютона. Алгоритм нахождение корня методом касательных. Геометрическая интерпретация метода. Теорема об априорной и апостериорной оценках погрешностей метода Ньютона. Модификации метода Ньютона. Метод Ньютона-Шредера. Упрощенный метод Ньютона. Разностный метод Ньютона. методом Стеффенсена. Двушаговый метод Ньютона. Метод Чебышева.

Метод простой итерации. Пример сходящейся последовательности. Пример расходящейся последовательности. Достаточное условие построения сходящейся итерационной последовательности для решения нелинейного уравнения методом простой итерации. Примеры.

Цели, задачи: глубокое разъяснение и системное изложение учебного материала по теме «Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений».

Ключевые вопросы: 1) В чем заключается задача изоляции корней? 2) В чем суть графического метода отделения корней? 3) Какие свойства функции одной переменной используются для проверки правильности локализации корня и его единственности на отрезке? 4) Поясните геометрический смысл методов: половинного деления, секущих, касательных. 5) Назовите основную сущность итерационных методов. 6) Какова последовательность действий при решении уравнения методом простых итераций? 7) Почему в методе касательных начальное приближение $x_0 \in [a,b]$ целесообразно выбирать из условия $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$? 8) Чему равны порядки сходимости рассмотренных методов? 9) Поясните, почему метод секущих можно считать частным случаем метода Ньютона, а метод Ньютона – частным случаем метода Чебышева?

Ссылки на литературные источники:

1.8.1-1.8.3, 1.8.4, 1.8.7-1.8.9, 1.8.15

Выводы по теме: Практическое решение задач в постановке нелинейных одномерных скалярных уравнений требует оптимального выбора метода реализации, алгоритмизации численного метода решения задачи, а также оценки погрешности получаемого решения.

***Лекции 6-7***

Тема №4.

Название темы: «Численные методы линейной алгебры».

План лекции.

Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Постановка задачи и основные понятия. Прямые и итерационные методы.

Метод Гаусса. Схема Гаусса с выбором главного элемента. Метод прогонки для решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод выражений. Компактная схема метода Гаусса или схема Халецкого. Применение метода Гаусса к вычислению определителей и к обращению матриц. Метод квадратных корней. Метод LU-разложения. Итерационное уточнение корней уравнений. Численные примеры.

Метод простой итерации. Метод Якоби и метод Зейделя. Численные примеры.

Вычисление определителей. Задачи на собственные значения. Метод Крылова для нахождения собственных чисел и векторов матриц. Нормы и обусловленность матриц. Теорема о достаточном условии сходимости. Теорема о достаточном условии сходимости методов Якоби и метода Зейделя.

Цели, задачи: системное изложение теоретических и практических аспектов темы «Численные методы линейной алгебры».

Ключевые вопросы: 1) В чем заключается основное преимущество метода Гаусса с выбором главного элемента? 2) Почему схемы Гаусса с выбором главного элемента дают более точный результат, нежели простая схема Гаусса? 3) Для каких специфических систем линейных алгебраических уравнений применим метод прогонки? 4) На чем основана более высокая эффективность метода прогонки по сравнению с методом Гаусса? 5) В чем заключаются этапы прямой и обратной прогонки? 6) Какие существуют способы приведения исходной матрицы к виду, пригодному для решения методом простой итерации? 7) Каким образом может быть выбран вектор начальных приближений? 8) Назовите достаточное условие сходимости итерационных методов. 9) В чем заключается преимущество метода Зейделя при программировании?

Ссылки на литературные источники:

1.8.1-1.8.3, 1.8.4, 1.8.10, 1.8.18-1.8.19

Выводы по теме: Вычислительный аппарат линейной алгебры включает широкий спектр методов применительно к решению различных практических задач: решению систем линейных алгебраических уравнений, вычислению определителей, обращению матриц, решению задач на собственные значения.

***Лекции 8***

Тема №5.

Название темы: «Численное решение систем нелинейных уравнений».

План лекции.

Постановка задачи нахождения решения системы нелинейных уравнений. Задача в векторной форме о нулях нелинейного отображения $F : R_n \mapsto R_n$. Метод простых итераций. Метод покоординатных итераций.

Метод Ньютона и его модификации. Явная и неявная формулы метода Ньютона. Матрица Якоби. Модифицированный метод Ньютона. Рекурсивный метод Ньютона. Модификация в виде двухступенчатого процесса метода Ньютона. Разностный метод Ньютона. Численные примеры.

Расчетные формулы метода Брауна в двумерном случае. Сходимость метода Брауна.

Метод скорейшего спуска. Метод градиентного спуска. Направление минимизации. Условие релаксации. Геометрическая интерпретация метода. Сходимость метода скорейшего спуска. Комбинации итерационных схем.

Цели, задачи: формирование ориентировочной основы для последующего усвоения и практического применения математического аппарата по теме «Численное решение систем нелинейных уравнений».

Ключевые вопросы: 1) Как выбор начального приближения влияет на сходимость метода Ньютона? 2) Почему рассмотренные методы являются итерационными? 3) Каким образом выбираются начальные приближения в рассмотренных методах? 4) Поясните геометрический смысл методов спуска. Что произойдет, если в окрестности решения нелинейной системы функция будет иметь несколько минимумов? 5) В каком случае целесообразным представляется применение метода Брауна для решения систем нелинейных уравнений.

Ссылки на литературные источники:

1.8.1-1.8.3, 1.8.4, 1.8.6-1.8.10

Выводы по теме: В настоящее время разработан широкий ряд методик, направленных на решение задач в постановке систем нелинейных уравнений. Общий подход к решению таких задач на основе идей, применяемых для решения СЛАУ, оказывается непригодным. Качественное решение задачи требует тщательного анализа постановки задачи, комплексного подхода, состоящего в использовании комбинированных методов (обеспечивающих глобальную быструю сходимость решения и локальное уточнение в направлении оптимального поиска).

***Лекции 9-11***

Тема №6.

Название темы: «Аппроксимация функций и обработка экспериментальных данных».

План лекции.

Постановка задачи аппроксимации функций. Виды аппроксимаций. Использование рядов. Многочлены Чебышева и наилучшие равномерные приближения.

Интерполирование функций. Постановка задачи интерполяции. Линейная и квадратичная интерполяции. Интерполяционные сплайны. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Схема Эйткена. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя. Обратное интерполирование. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования.

Подбор эмпирических формул. Поиск параметров формул. Подбор эмпирических формул. Эмпирические формулы. Определение параметров эмпирической зависимости. Метод наименьших квадратов. Локальное сглаживание данных. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратичного трехчлена. Аппроксимация функцией произвольного вида.

Цели, задачи: Формирование устойчивых знаний по теме «Аппроксимация функций и обработка экспериментальных данных», мотивация студентов к самостоятельной работе по практическим вопросам применения данной темы к обработке экспериментальных данных.

Ключевые вопросы: 1) В каких практических случаях может потребоваться аппроксимация функции? 2) В какой форме строится интерполяционный многочлен Лагранжа? 3) Как используется при выводе формулы Лагранжа требование совпадения его значений со значениями исходной функции в узлах? 4) Какие точки называются узлами интерполяции? Какие узлы называются равноотстоящими? 5) При решении каких задач используются интерполяционные формулы Ньютона, Гаусса, Бесселя, Стирлинга? 6) В каких случаях применяется сплайн-интерполяция? Какой недостаток «кусочно-непрервыного» интерполирования с помощью многочленов Лагранжа или Ньютона устраняется при интерполяции сплайнами? 7) В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов? 8) Чем этот метод отличается от метода интерполяции? 9) Какие элементарные функции чаще всего используются в качестве приближающих? 10) Как можно добиться повышения качества приближения? 11) Какая ошибка является среднеквадратической? 12) Какое из двух приближений одной и той же таблично заданной функции считается лучшим? 13) Каким образом построение приближающих функций в виде различных элементарных функций сводится к случаю линейной функции? 14) За счет чего возникает полиномиальное раскачивание?

Ссылки на литературные источники:

1.8.1-1.8.3, 1.8.4-1.8.6, 1.8.10, 1.8.16-1.8.18

Выводы по теме: Многие практические задачи обработки данных вычислительного и физического экспериментов требуют применения методов аппроксимации. Успех аппроксимации определяется, во многом, детальным анализом постановки задачи, выбором подходящей методики и умением использовать современные программные средства для решения прикладных задач.

***Лекции 12***

Тема №7.

Название темы: «Численное дифференцирование и интегрирование».

План лекции.

Аппроксимация производных. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании. Выбор оптимального шага.

Аппроксимация производных интерполяционными многочленами с постоянным и переменным шагом. Пример численной реализации.

Метод неопределенных коэффициентов. Улучшение аппроксимации методом Рунге.

Аппроксимация частных производных.

Квадратурные формулы. Выбор шага интегрирования. Интегрирование с помощью степенных рядов. Интегралы от разрывных функций. Примеры численных реализаций.

Метод Гаусса. Пример численной реализации.

Интегралы с бесконечными пределами. Кратные интегралы. Метод повторного интегрирования. Метод Диткина.

Метод Монте-Карло.

Вычисление интегралов в нерегулярных случаях.

Цели, задачи: рассмотреть базовые подходы к построению формул численного дифференцирования и интегрирвоания, сформировать четкие знания у студентов по этой теме, нацелить на решение практических задач.

Ключевые вопросы: 1) Каким образом можно повысить точность численного дифференцирования? 2) В чем заключается особенность построения формул численной аппроксимации частных производных? 3) Дайте геометрическую интерпретацию аппроксимации формул производной первого порядка от функции одной переменной. 4) В чем основные преимущества формулы трапеций по сравнению с методом прямоугольников? 5) Как выбирается шаг интегрирования? 6) Чему равен порядок погрешности формулы Симпсона для двумерной подынтегральной функции? 7) Какие условия обязательно должны выполняться в методе трех восьмых и почему? 8) В чем состоит суть метода Монте-Карло для численного интегрирования. Сформулируйте, в чем заключается его преимущество и недостаток по сравнению с квадратурными формулами численного интегрирования.

Ссылки на литературные источники:

1.8.1-1.8.3, 1.8.6-1.8.11

Выводы по теме: Вопросы численной аппроксимации производной играют важную роль в формировании прикладных математических знаний у студентов, в частности, при рассмотрении одного из базовых приемов математического моделирования – переходе от непрерывной, континуальной, постановки задачи к дискретной. Задачи интегрирования функций, первообразные которых не вычисляются в квадратурах, требуют применения численных алгоритмов, детальный выбор которого определяется требуемой точностью, размерностью задачи, техническими возможностями проведения высокоточных вычислений.

***Лекции 13-14***

Тема №8.

Название темы: «Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений».

План лекции.

Постановка задачи и классификация приближенных методов решения задач Коши.

Одношаговые методы. Метод последовательных приближений (метод Пикара). Вывод итерационной формулы. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности метода. Пример численной реализации.

Метод Эйлера. Явный и неявный методы Эйлера. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности метода. Пример. Распространение метода Эйлера на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Пример численной реализации.

Модификации метода Эйлера. Усовершенствованный метод Эйлера-Коши. Метод Эйлера с итерационной обработкой. Метод 2-го порядка точности – исправленный метод Эйлера.

Метод Рунге-Кутта. Идея построения явных методов Рунге-Кутты $p$-го порядка. Построение методов Рунге-Кутты для $p = 2$ (метод Хойна, метод средней точки). Форма конструирования методов Рунге-Кутты произвольного порядка $p$. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Практические подходы к учету погрешности метода: схема двойного пересчета. Пример численной реализации.

Линейные многошаговые методы. Экстраполяционные формулы Адамса (методы Адамса-Башфорта первого, второго, третьего порядка точности). Интерполяционные формулы Адамса-Моултона (методы Адамса-Моултона первого, второго, третьего порядка точности). Предикт-корректорные методы Адамса. Метод Милна.

Аппроксимация, устойчивость, сходимость численного решения задач для дифференциального уравнения.

Цели, задачи: формирование фундаментальных и прикладных знаний по методам вычислительной математики для решения задач Коши в постановке обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые вопросы: 1) В чем заключается основная особенность метода Пикара? 2) Поясните геометрический смысл метода Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. 3) Что можно сказать о динамике погрешности в пошаговом методе Эйлера? 4) Как определяется порядок точности метода Рунге-Кутты? 5) В чем состоят принципиальные различия между одношаговыми и многошаговыми методами? 6) Чем отличаются явные и неявные многошаговые методы? 7) Каким образом можно организовать начальный этап работы при использовании многошаговых методов?

Ссылки на литературные источники:

1.8.1-1.8.3, 1.8.5, 1.8.7-1.8.12

Выводы по теме: Практически важная область вычислительной математики – методы решения задач Коши для ОДУ, требует детального изучения как с точки зрения теории (алгоритмы, оценки погрешностей), так и с практической стороны (выбор метода решения, выбор шага интегрирования дифференциального уравнения, особенности программной реализации и т.д.).

***Лекции 15-16***

Тема №9.

Название темы: «Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений».

План лекции.

Постановка задачи и классификация приближенных методов решения краевых задач для ОДУ.

Методы сведения краевых задач к задачам Коши: метод пристрелки, метод редукции. Пример численной реализации.

Метод конечных разностей для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Типичные конечно-разностные аппроксимации. Решение СЛАУ методом прогонки. Пример численной реализации.

Метод коллокации. Приближенно-аналитический подход, выбор базисных функций. Пример численной реализации.

Метод Галеркина. Проекционный подход. Пример численной реализации.

Цели, задачи: Формирование устойчивых знаний по теме «Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений», мотивация студентов к самостоятельной работе по практическим вопросам применения данной темы к решению прикладных задач.

Ключевые вопросы: 1) Какое ограничение в применении имеют методы сведения краевых задач к задачам Коши? 2) В чем заключается суть метода конечных разностей? 3) В чем состоит особенность подбора коэффициентов $c_i$ в методе коллокации? 4) Почему метод Галеркина относится к группе проекционных методов?

Ссылки на литературные источники:

1.8.1-1.8.3, 1.8.5-1.8.6, 1.8.10, 1.8.16

Выводы по теме: Аналитическое решение краевых задач вызывает большие трудности по сравнению с решением задачи Коши. Большое разнообразие развитых численных методов решения таких задач требует выбора оптимального, в каждом из случаев, метода решения. Методы решения краевых задач в постановке ОДУ занимают особое место в широком классе прикладных задач, описываемых детерминированными математическими моделями.

***Лекции 17-18***

Тема №10.

Название темы: «Численное решение уравнений с частными производным и интегральных уравнений».

План лекции.

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Классификация приближенных методов решения задач в постановке УЧП.

Краевая задача для уравнения эллиптического типа. Первая краевая задача, вторая краевая задача, третья краевая задача. Уравнения Лапласа и Пуассона. Задача Дирихле. Задача Неймана.

Решение уравнений эллиптического типа методом конечных разностей. Конечно-разностные аппроксимации частных производных, КР-аппроксимация оператора Лапласа.

Погрешность аппроксимации оператора Лапласа. Конечно-разностные шаблоны. Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа методом сеток. Решение краевых задач для криволинейных областей. Процесс Либмана. Примеры.

Метод сеток для уравнений параболического типа. Решение уравнения теплопроводности. Явная конечно-разностная схема. Условие устойчивости схемы. Неявная схема, схема Кранка-Николсона. Примеры.

Метод сеток для уравнений гиперболического типа. Уравнение свободных колебаний однородной ограниченной струны. Конечно-разностный шаблон, используемый для аппроксимации уравнения гиперболического типа. Примеры.

Использование метода Монте-Карло для решения уравнений математической физики. Решение задачи Дирихле методом Монте-Карло. Пример.

Постановка задачи. Классификация интегральных уравнений. Уравнения Вольтера и Фредгольма. Корректные и некорректные задачи.

Квадратурный метод решения интегральных уравнений Фредгольма. Квадратурный метод решения интегральных уравнений Вольтера. Примеры.

<u>Цели, задачи</u>: дать обучающимся целостные и взаимосвязанные знания по численным методам решения задач математической физики в постановке уравнений в частных производных, а также обеспечить творческую работу студентов совместно с преподавателем. Системное изложение теоретических и практических аспектов темы «Численное решение интегральных уравнений».

<u>Ключевые вопросы</u>: 1) Какие узлы называются граничными узлами первого и второго рода? 2) Из чего складывается погрешность приближенного решения, полученного разностным методом? 3) Выполнение какого условия необходимо для устойчивости явной разностной схемы для уравнений параболического типа? 4) В чем состоит особенность применения метода сеток для уравнений гиперболического типа? 5) Для какого класса интегральных уравнений применим метод квадратур? 6) От каких факторов зависит точность численного решения интегрального уравнения? 7) В чем заключается принцип контроля точности численного решения – принцип Рунге?

<u>Ссылки на литературные источники</u>:

1.8.3, 1.8.5, 1.8.8-1.8.10, 1.8.12-1.8.15

<u>Выводы по теме</u>: методики построения приближенных решений уравнений с частными производными, особенности программных реализаций изучаемых алгоритмов, способы и подходы к оценке погрешностей полученного решения являются важными компонентами реализации широкого класса детерминированных математических моделей и требуют качественного теоретического и практического освоения. Интегральные уравнения широко ис-

пользуются в моделях, рассматриваемых в теории упругости, газовой динамике, электродинамике, экологии и других областях физики, в которых они являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии. Решение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера I-го рода прямыми методами затруднено и требует привлечения частных процедур. Поэтому создание базиса фундаментальных знаний относительно численных подходов к реализации математических моделей в постановке интегральных уравнений является важной задачей в системе прикладного математического образования.

## 3. Методические указания

### 3.1 Методические указания по изучению дисциплины

Для оптимальной организации изучения дисциплины студентам рекомендуется следовать следующим методическим указаниям.

Студенты очной формы обучения обязаны присутствовать на занятиях и выполнять все предусмотренные учебно-методическим комплексом дисциплины формы учебной работы; проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит лабораторных работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи зачета и экзамена в предлагаемой преподавателем форме.

Дисциплина «Информатика. Численные методы и математическое моделирование» изучается студентами в 4 семестре обучения . Семестр включает 36 часов лекционных занятий, 18 часов лабораторных занятий и заканчивается итоговым экзаменом. На самостоятельную работу студентов отводится 20 час.

Теоретическая часть курса включает следующие темы (в скобках указан объем каждой лекции в часах).

4 семестр:

Тема №1. Введение в предмет «Численные методы и математическое моделирование» (2).

Тема №2. Точность вычислительного эксперимента (2).

Тема №3. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений (6).

Тема №4. Численные методы линейной алгебры (4).

Тема №5. Численное решение систем нелинейных уравнений (2).

Тема №6. Аппроксимация функций и обработка экспериментальных данных (6).

Тема №7. Численное дифференцирование и интегрирование (2).

Тема №8. Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (4).

Тема №9. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (4).

Тема №10. Численное решение уравнений с частными производными и интегральных уравнений (4)

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено государственным образовательным стандартом дисциплины, а также некоторые дополнительные главы, необходимые для дальнейшего изучения прикладных дисциплин. В дополнение к лекционному материалу, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в п.1.8.

Студенты в рамках аудиторных занятий должны, в целом, владеть понятийным аппаратом, основанном на ранее изученных дисциплинах, воспринимать теоретический материал основного содержания лекции, видеть причинно-логические связи в лекции, понимать схему решения примеров, приводимых в лекции. Для освоения темы каждой лекции на более глубоком уровне требуется дополнительная работа с теоретическим материалом в форме прочтения и изучения основной и дополнительной литературы, самостоятельной работы с лекцией.

Лабораторные работы направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию алгоритмов численных методов по вариантам индивидуальных заданий. Допускается работа в подгруппах, состоящих из 2 студентов, с выполнением одного варианта. Отчет в этом случае оформляется каждым студентом отдельно. Опрос проводится независимо от личного вклада в результат выполнения работы. Для выполнения лабораторной работы необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, составить блок-схему реализации задачи, выполнить программную реализацию, протестировать задачу на примере, для которого известно аналитическое решение, оценить погрешность результата, оформить отчет по работе. При возникновении проблемных ситуаций в ходе решения практических задач (неясен алгоритм, непонятна ошибка программной среды при реализации метода, появились затруднения, связанные с тестированием алгоритма и пр.) или освоения теоретического материала преподавателем приветствуется любой диалог или дискуссия (возможно, с участием других студентов), направленные на решение проблемы, при необходимости отведения дополнительного и/или индивидуального времени – в рамках консультаций во внеаудиторное время.

### 3.2 Методические указания к лабораторным занятиям

Практический курс предусматривает лабораторные занятия по следующим темам (в скобках указан объем в часах, отводимый на выполнение каждой работы).

1. Элементы теории погрешностей (расчетная работа)
2. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений (2)

3. Численное решение систем линейных уравнений. Численные методы линейной алгебры (по вариантам) (2)

4. Численное решение систем нелинейных уравнений (2)

5. Интерполирование функций (2)

6. Численное дифференцирование и интегрирование (2)

7. Обработка экспериментальных данных (2)

8. Приближенное решение задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (2)

9. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (2)

10. Численное решение уравнений с частными производными (2)

Практическая часть курса методически поддержана пособием, указанным в п.1.8.10. В практикуме, ориентированном на ППП Matlab, изложены методы численного анализа: элементы теории погрешностей, численные методы решения нелинейных уравнений и систем, систем линейных уравнений, теория интерполирования, численное дифференцирование и интегрирование, использование численных методов для обработки экспериментальных данных, численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, интегральных уравнений. Все методы иллюстрируются примерами, в которых используются программы, реализованные в пакете Matlab. Приводятся варианты индивидуальных заданий к лабораторному практикуму на ЭВМ.

Кроме методического пособия, студентам рекомендуется использовать также основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в п.1.8, при этом обращая внимание на практические аспекты использования алгоритмов и реализацию методов.

Индивидуальное задание (типовой расчет или лабораторная работа) выполняется строго в соответствии с выданным преподавателем заданием и вариантом. Оформлять работу следует четко и аккуратно, придерживаясь основных правил оформления отчетных работ: титульный лист (содержит: ФИО, №группы, курс, дисциплина, тема расчета и т. д.), лист задания (содержит перечень предложенных заданий), раздел, содержащий теоретические основы соответствующего раздела курса (включая подробный алгоритм основного метода), раздел, содержащий описание программной реализации (листинг программного блока и описание интерфейса программы, если таковой имеется, может быть вынесен в приложении, предлагаемый ППП – Matlab), раздел, содержащий расчеты 2-3 итераций каждого из реализуемых методов.

Типовой расчет считается выполненным с дифференцированной оценкой, если:

1) работа выполнена полностью и в соответствии с заданием;

2) студент отвечает на основные теоретические вопросы по соответствующему разделу;

3) работа оформлена в соответствии с указанными требованиями.

Лабораторная работа считается выполненной с отметкой «зачтено», если:

1. Программная реализация соответствует заданию.
2. Студент отвечает на основные теоретические вопросы по соответствующему разделу.
3. Работа оформлена в соответствии с указанными требованиями.

Допускается упрощенный вариант сдачи лабораторных работ в форме расчетных (с заменой блоков программ на однократно исполняемые модули с записью результатов). В этом случае, оценка, на которую может претендовать студент при итоговой аттестации – не выше «удовлетворительно».

Сроки сдачи работ ограничены отведенным на выполнение практикума аудиторным временем – 18 час. лабораторных занятий. Рекомендуется выполнять и сдавать на проверку отчеты по лабораторным работам по мере изложения лекционного материала и выдачи заданий преподавателем. Необходимым условием допуска студента на зачет является сдача всех лабораторных работ.

### 3.3 Методические по самостоятельной работе студентов

На самостоятельную работу студента по дисциплине «Информатика. Численные методы и математическое моделирование » отводится 20 часов.

Схема самостоятельной работы студентов, перечень тем, рекомендации по работе с литературой, рекомендации по подготовке к аттестации:

| **Семестр 4** | | |
|---|---|---|
| Неделя семестра | Тема и/или форма самостоятельной работы, рекомендация по работе с литературой | Кол-во часов, отведенных на самостоятельную работу |
| 8 | Численное решение систем нелинейных уравнений. Самостоятельная работа по темам практических занятий (программная реализация модификаций метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений, программная реализация метода Брауна для решения систем нелинейных уравнений). Изучение теоретических основ метода и алгоритма рекомендуется с использованием лекций по этой теме и литературных источников 1.8.1, 1.8.2, 1.8.4, 1.8.9, 1.8.19, указанных в перечне основной и дополнительной литературы. Вопросы практической реализации методов рекомендуется рассматривать с помощью литературных источников 1.8.9, 1.8.10. | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 9-11 | Аппроксимация функций и обработка экспериментальных данных. Самостоятельная работа по темам практических занятий (программная реализация сплайн-интерполяции в ППП Matlab, использование возможностей пакета Matlab для обработки данных методом наименьших квадратов). Изучение теоретических основ метода и алгоритма рекомендуется с использованием лекций по этой теме и литературных источников 1.8.1, 1.8.2, 1.8.4, 1.8.6, 1.8.12, указанных в перечне основной и дополнительной литературы. Вопросы практической реализации методов рекомендуется рассматривать с помощью литературных источников 1.8.9, 1.8.10. | 3 |
| 13-14 | Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Самостоятельная работа по теме лабораторной работы (программная реализация предиктор-корректорной схемы метода Адамса, неявных методов для решения задач Коши для ОДУ). Изучение теоретических основ метода и алгоритма рекомендуется с использованием лекций по этой теме и литературных источников 1.8.1-1.8.3, 1.8.5, 1.8.6, 1.8.12, указанных в перечне основной и дополнительной литературы. Вопросы практической реализации методов рекомендуется рассматривать с помощью литературных источников 1.8.9, 1.8.10. | 5 |
| 15-16 | Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Самостоятельная работа по теме лабораторной работы (программная реализация метода коллокации и метода Галеркина для решения краевых задач для ОДУ). Изучение теоретических основ метода и алгоритма рекомендуется с использованием лекций по этой теме и литературных источников 1.8.1-1.8.3, 1.8.5, 1.8.6, 1.8.16-1.8.19, указанных в перечне основной и дополнительной литературы. Вопросы практической реализации методов рекомендуется рассматривать с помощью литературных источников 1.8.9, 1.8.10.<br>Подготовка к зачету (повторение и закрепление теоретического материала по всему курсу, решение тест-задач). | 5 |
| 17-18 | Подготовка к итоговому тестированию. | 5 |

## 4 Контроль знаний

### 4.1 Текущий контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся.

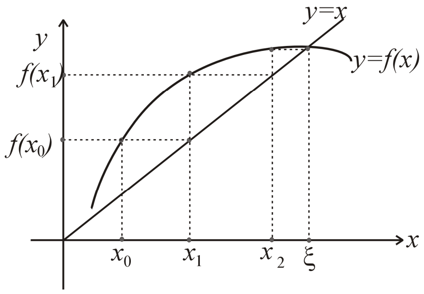
Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения лабораторных занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки отчетов по практическим и лабораторным работам. Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде анализа итоговых отчетов на аттестационные вопросы. Для заключительной аттестации студентов в конце первого семестра обучения проводится контрольное тестирование по вариантам (которое является составной частью зачета по практической части курса).

Пример теста.

1. Определить число верных знаков $a = 16.9631$, если $\Delta_a = 0.3469$ (1 балл)
   1) 1
   2) 3
   3) 4
   4) 2
2. Определить количество верных цифр в числе $x = 592.8$, если известна его относительная погрешность $\delta x = 2\%$… (1 балл)
   1) 4
   2) 3
   3) 2
   4) 1
3. В некоторую вычислительную машину можно ввести числа только с тремя значащими числами. С какой точностью можно ввести число $g$. ($g = 9.81564$) (1 балл)
   1) 0.0057%   2) 0.057%
   3) 0.000065%   4) 0.0065%
4. Относительная погрешность дифференциальной функции от $n$-переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, вызываемая достаточно малыми погрешностями аргумента определяется выражением: (1 балл)
   1) $\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$,   2) $\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$,
   3) $\delta_y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|f|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$   4) $\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f|} \left| \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right| \Delta x_i$.
5. Вычислить абсолютную погрешность функции одной переменной $y = x^a$ (1 балл)
   1) $\Delta_y = x^{a-1} \Delta x$,   2) $\Delta_y = x^{a-1} \Delta x \frac{1}{a}$,
   3) $\Delta_y = a x^{a-1} \Delta a$   4) $\Delta_y = a x^{a-1} \Delta x$.
6. Условия выбора начального приближения $x_0$ в методе Ньютона (2 балла):
   1) $f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$   2) $f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$
   3) $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$   4) $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$
7. Геометрическая иллюстрация процедуры решения нелинейного уравнения методом Ньютона…(1 балл):
   1) Приближения к корню $X_*$ производится по абсциссам точек пересечения касательных к графику функции $f(x)$, проводимых в точках, соответствующих предыдущим приближениям
   2) Приближения к корню $X_*$ производится по абсциссам точек пересечения касательной $f'(x_0)$ к графику функции $f(x)$, проводимых в точках предыдущих приближений
   3) Приближения к корню $X_*$ производится по абсциссам точек пересечения хорд графика функции $f(x)$, проводимых через точки $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_{k-1}))$
   4) Приближения к корню $X_*$ производится по абсциссам точек пересечения секущих графика функции $f(x)$, проводимых через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_k, f(x_k))$
8. Уравнение $10x^3 - x^2 + x - 0.9 = 0$ привести к виду, потенциально пригодному для реализа-

ции метода простой итерации уточнения корня, принадлежащего отрезку [0, 1],записать схему метода решения (3 балла):

9. На рисунке изображена геометрическая интерпретация метода (1 балл):




1) Ньютона
2) хорд
3) Стеффенсена
4) упрощенный Ньютона
5) простой итерации
6) Чебышева

10. Порядок локальной сходимости метода Ньютона для решения нелинейных уравнений $p=\ldots$(1 балл)

1) $p=1$
2) $p=2$
3) $p=3$
4) $1\le p\le 2$

11. Привести соотношения для вычисления числа итераций $k$ в методе половинного деления при нахождении корня с заданной точностью $\varepsilon$ нелинейного уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[a,b]$ (2 балла)

1) $(b-a)2^k<\varepsilon$
2) $\dfrac{b-a}{2^k}<\varepsilon$
3) $\dfrac{b-a}{2^{k+1}}\le\varepsilon$
4) $\dfrac{b-a}{2^{k-1}}\le\varepsilon$

12. При решении некоторой СЛАУ итерационным методом получено два последовательных приближения $x^k=\begin{pmatrix}0.1251\\0.5618\end{pmatrix}$ и $x^{k+1}=\begin{pmatrix}0.1252\\0.5619\end{pmatrix}$. Удовлетворяет ли найденное решение точности $\varepsilon=10^{-3}$ и почему? (1 балл)

13. Первое приближение, найденное методом Якоби

$$\begin{cases}10x_1+x_2=1\\-x_1+10x_2=2\end{cases}$$

при начальном приближении $x^0=\begin{pmatrix}0.1\\0.2\end{pmatrix}$ равно (3 балла):

1) $x^1=\begin{pmatrix}0.080\\0.208\end{pmatrix}$
3) $x^1=\begin{pmatrix}0.778\\0.209\end{pmatrix}$
2) $x^1=\begin{pmatrix}0.080\\0.210\end{pmatrix}$
4) $x^1=\begin{pmatrix}0.778\\0.211\end{pmatrix}$

14. Каким условиям должны удовлетворять элементы матрицы, чтобы процесс простых итераций сходился к точному решению системы $x=Cx+f$, при любом начальном векторе $x^{(0)}$ (1 балл):

1) $\sum\limits_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|\le\alpha<1,\ \ i=1,2...n$
2) $\sum\limits_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|\le\alpha<0,\ \ i=1,2...n$

3) $\sum_{i=1}^{n}\left|c_{ij}\right| \le \beta < 1, \quad j = 1,2...n$ 4) $\sum_{i=1}^{n}\left|c_{ij}\right| \le \beta < 0, \quad j = 1,2...n$

15. Укажите, какой из следующих видов преобразований системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 9, \\ 10x_1 - 3x_2 + 0.5x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 = 5 \end{cases}$$

будет верным для реализации метода Якоби (2 балла):

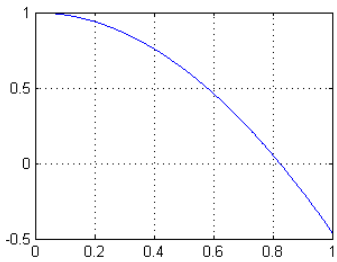
1) $\begin{cases} x_1^k = -10x_2^{k-1} - 2x_3^{k-1} + 9, \\ x_2^k = \frac{10}{3}x_1^{k-1} + \frac{1}{6}x_3^{k-1} - \frac{4}{3}, \\ x_3^k = -0.3x_1^{k-1} + 0.1x_2^{k-1} + 0.5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_2^k = -0.1x_1^{k-1} - 0.2x_3^{k-1} + 0.9, \\ x_1^k = 0.3x_2^{k-1} - 0.05x_3^{k-1} + 0.4, \\ x_3^k = -0.3x_1^{k-1} + 0.1x_2^{k-1} + 0.5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_2^k = -\frac{1}{9}x_1^{k-1} - \frac{1}{9}x_2^{k-1} - \frac{2}{9}x_3^{k-1} + 1, \\ x_1^k = -\frac{1}{9}x_1^{k-1} + \frac{1}{3}x_2^{k-1} - \frac{1}{18}x_3^{k-1} + \frac{4}{9}, \\ x_3^k = -\frac{3}{9}x_1^{k-1} + \frac{1}{9}x_2^{k-1} - \frac{1}{9}x_3^{k-1} + \frac{5}{9} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_2^k = -\frac{1}{9}x_1^{k-1} - \frac{1}{9}x_2^{k-1} - \frac{2}{9}x_3^{k-1} + 1, \\ x_1^k = -\frac{1}{9}x_1^{k} + \frac{1}{3}x_2^{k-1} - \frac{1}{18}x_3^{k-1} + \frac{4}{9}, \\ x_3^k = -\frac{3}{9}x_1^{k} + \frac{1}{9}x_2^{k} - \frac{1}{9}x_3^{k-1} + \frac{5}{9} \end{cases}$

16-17. Выполнить графическую локализацию корней системы нелинейных уравнений (4 балла), укажите каким методом можно решить предложенную систему (запишите общую схему метода):

$$\begin{cases} y - e^x = 0.5 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

18. Выполнить 2 итерации метода Ньютона для решения уравнения $\cos(x) - x^2 = 0$ с выполненной локализацией корня, приведенной на рисунке. Проверить, достигается ли точность $\varepsilon = 10^{-2}$ (3 балла).




| Кол-во баллов | Оценка |
|---|---|
| 26-29 | 5 |
| 21-25 | 4 |
| 15-20 | 3 |
| <=14 | 2 |

## 4.2 Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде зачета.

Зачет сдается в конце семестра. Форма сдачи зачета – устная. Необходимым условием допуска на зачет является сдача всех работ. В предлагаемый билет входят два вопроса: основной и дополнительный. Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос, и краткий – на дополнительный. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале, краткий ответ – основных теоретических моментов: понятий и терминологии. При выполнении указанных требований ставится отметка «зачтено».

Перечень теоретических вопросов к зачету по курсу: «Информатика. Численные методы и математическое моделирование»:

1. Классификация погрешностей. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности. Верные знаки числа. Арифметические действия над приближенными числами.
2. Правила приближенных вычислений. Погрешности вычисления значений функции.
3. Устойчивость. Корректность. Сходимость итерационных последовательностей.
4. ЧМ решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Методы Дихотомии.
5. ЧМ решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Метод Ньютона. Теорема об оценках погрешности метода Ньютона.
6. ЧМ решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Модификации метода Ньютона.
7. ЧМ решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Метод простой итерации.
8. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод Гаусса. Схема Гаусса с выбором главного элемента.
9. Метод прогонки. Контроль точности при реализации прямых методов решения СЛАУ.
10. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы. Метод простой итерации. Метод Зейделя. Теорема об оценках погрешностей.
11. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы. Метод Якоби и модификация. Теорема об оценках погрешностей.
12. ЧМ решения систем нелинейных уравнений. МПИ.
13. ЧМ решения систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона и его модификации.
14. ЧМ решения систем нелинейных уравнений. Метод Брауна.
15. ЧМ решения систем нелинейных уравнений. Метод градиентного спуска.

16. Аппроксимация функций. Интерполирование функций. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов.

17. Аппроксимация функций. Интерполирование функций. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционные формулы Гаусса, Бесселя и Стирлинга для интерполирования в середине таблицы.

18. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

19. Аппроксимация функций. Подбор эмпирических формул. Метод наименьших квадратов.

20. Численное дифференцирование. Аппроксимация производных. Использование интерполяционных формул.

21. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Выбор шага интегрирования.

22. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Гаусса.

23. Численное интегрирование. Метод Монте-Карло.

24. Численные методы решения начальных задач для ОДУ. Постановка задачи. Классификация методов. Метод Пикара.

25. Численные методы решения начальных задач для ОДУ. Метод Эйлера и его модификации.

26. Численные методы решения начальных задач для ОДУ. Семейство методов Рунге-Кутты.

27. Линейные многошаговые методы решения задач Коши для ОДУ. Метода Адамса-Башфорта.

28. Линейные многошаговые методы решения задач Коши для ОДУ. Методы Адамса-Моултона.

29. Линейные многошаговые методы решения задач Коши для ОДУ. Предиктор-корректорные схемы метода Адамса.

30. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Постановка краевой задачи. Классификация методов.

31. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Методы сведения краевой задачи к задаче Коши.

32. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод конечных разностей.

33. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод коллокации.

34. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод Галеркина.

35. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача.

36. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Конечно-разностные аппроксимации производных. Метод сеток для решения задач эллиптического типа.

37. Метод сеток для решения задач эллиптического типа. Решение задач для криволинейных областей. Аппроксимация производных.

38. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. ЧМ решения задач параболического типа.

39. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. ЧМ решения задач гиперболического типа.

40. ЧМ решения интегральных уравнений. Классификация интегральных уравнений. Метод квадратур для решений уравнений Вольтерра и Фредгольма II рода.

## 5 Интерактивные технологии и инновационные методы, используемые в образовательном процессе

При преподавании дисциплины «Численные методы и математическое моделирование» используются следующие инновационные технологии и методы: применение мультимедийного проектора при чтении лекций, использование ресурсов сети Internet при самостоятельной работе студентов, дискуссии в обсуждении проблемных ситуаций при программировании алгоритмов и обсуждении результатов расчетов.