Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.А. Луганцева

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Учебное пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2012

ББК 22.21 я73
Л 74

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензенты:
Ларченко Н.М., доцент кафедры общетехнических дисциплин Амурского филиала Морского государственного университета, канд. техн. наук;

Труфанова Т.В., доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, канд. техн. наук

Луганцева, Т.А.
Л74 Плоскопараллельное движение : учебное пособие. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2012. – 104 с.

Учебное пособие предназначено для активизации самостоятельного изучения темы «Плоскопараллельное движение», выполнения расчетно-графических и курсовых работ по дисциплине «Теоретическая механика».

Пособие включает краткие теоретические сведения по теме и методические рекомендации к практическим занятиям. Практические занятия снабжены методическими материалами, обеспечивающими самостоятельное изучение дисциплины, рассмотрены примеры решения типовых задач, приведены вопросы для самоконтроля, номера задач для самостоятельной работы и тесты для проверки знаний.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения в университете, изучающих курс теоретической механики.

ББК 22.21 я73

Плоскопараллельное (плоское) движение – распространенный вид движения твердого тела. Это движение имеет широкое применение в технике, поскольку звенья большинства механизмов и машин совершают плоское движение. Например, звенья многих рычажных механизмов (кривошипно-коромысловых, кривошипно-ползунных, кривошипно-кулисных и др.), а также колесо, катящееся по прямолинейной направляющей, совершают плоское движение.

1. **Основные понятия и определения плоскопараллельного движения**

а) **Определение:**

Плоскопараллельным (плоским) движением называется движение, при котором каждая точка тела движется в одной и той же плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости, при этом расстояние от любой его точки до данной неподвижной плоскости не изменяется (Рис.1). Описание плоского движения тела сводится к описанию движения одного сечения тела относительно неподвижной плоскости. Такое сечение принято называть плоской фигурой.

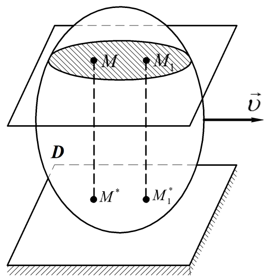
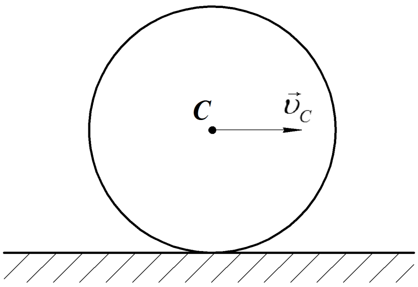


Рис.1

Примерами плоскопараллельного движения являются качение катка по горизонтальной поверхности (Рис.2), движение звена АВ (шатун) кривошипно-ползунного механизма (Рис. 3), движение звена АВ (шатун) кривошипно-коромыслового механизма (Рис. 4), движение звеньев АВ и ВД (шатуны) многозвенного механизма (Рис. 5).



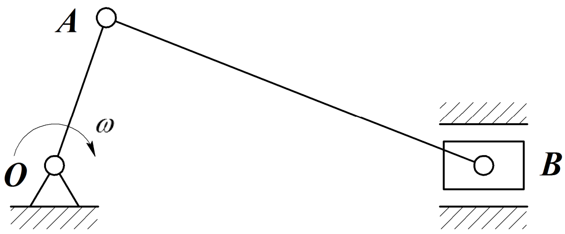
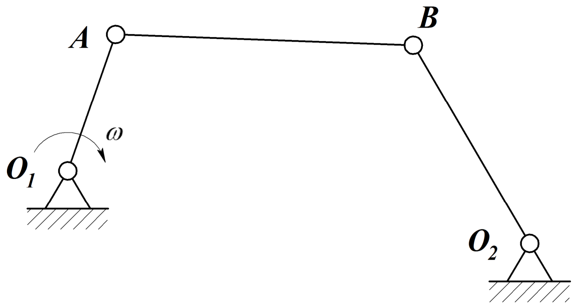


Рис. 2 Рис. 3



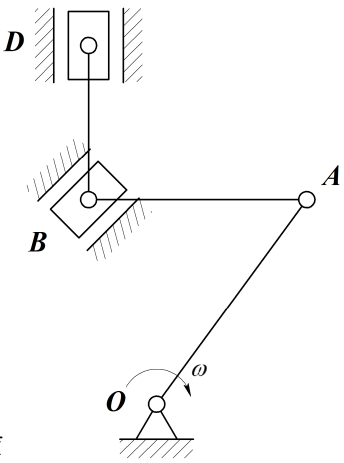


Рис. 4 Рис. 5

б) **Теорема о разложении плоскопараллельного движения на поступательное движение и вращательное.**

Покажем, что любое движение плоской фигуры в плоскости ее движения является составным.

Любое перемещение плоской фигуры из одного положения в другое при плоскопараллельном движении, можно осуществить только двумя перемещениями: поступательным вместе с произвольной точкой, называемой полюсом и вращательным вокруг этого полюса.

Рассмотрим два положения плоской фигуры в плоскости ее движения (Рис.6). Тело *ABCD* из положения *I* в положение *II* можно переместить двумя способами: переместить его поступательно вместе с точкой *B*, (пусть точка *B* – полюс) при этом тело займет положение I^*, а затем повернуть его вокруг точки B_1 на угол φ , при этом тело займет положение II ($A_1B_1C_1D_1$). Поступательное движение определяется выбором полюса, так как при плоском движении сам полюс, неизменно связанный с плоской фигурой, является подвижным. В соответствии с теорией вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, вектор угловой скорости тела $\vec{\omega}$ направлен по оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоскости подвижной плоской фигуры. Будучи жестко связанной с движущимся телом, ось вращения в процессе движения перемещается параллельно самой себе. Следовательно, направление и модуль угла поворота не зависят от выбора полюса, а значит и угловая скорость не зависит от выбора полюса ни по величине, ни по направлению.

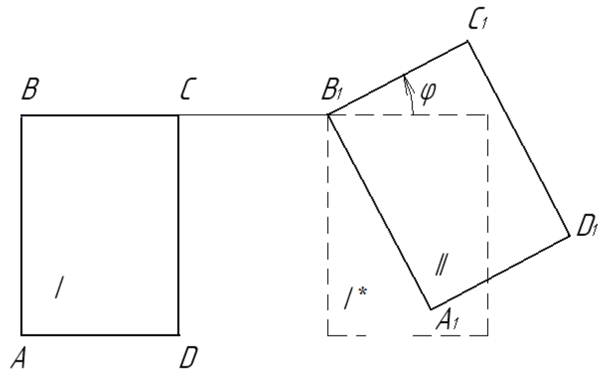


Рис. 6

Таким образом, плоское движение можно представить как совокупность двух движений: поступательного и вращательного, которые происходят одновременно.

в) **Число степеней свободы.**

По теореме о разложении плоского движения оно состоит из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как и полюс, и вращательного движения вокруг полюса.

Поступательное движение имеет два независимых движения по оси “X” и по оси “Y”. Вращательное - одно независимое движение – поворот вокруг оси “Z”. Поэтому тело при плоском движении имеет три независимых движения, а значит три степени свободы.

г) **Уравнения плоского движения.**

Уравнения движения это зависимость координат от времени. Так как при плоском движении три степени свободы, значит для описания плоскопараллельного движения необходимо три уравнения движения.

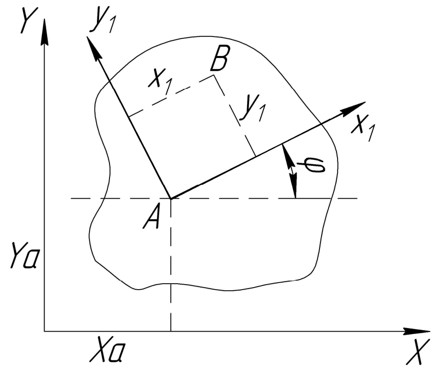


Рис.7

Точка *A* (Рис.7), при помощи которой определяется положение тела, называется полюсом. За полюс может быть принята любая точка тела, но обычно выбираются характерные точки (центр тяжести, конец отрезка и т.п.).

$\left.\begin{array}{l} X_A = f_1(t) \\ Y_A = f_2(t) \end{array}\right\}$ - координаты точки, принятой за полюс;

$\varphi = f_3(t)$ - угол между неподвижной осью *X* и осью AX_1, неизменно связанной с полюсом

Первые два уравнения определяют поступательное движение, которое совершала бы фигура при $\varphi = const$. При этом все точки фигуры будут двигаться так же как полюс *A,* то есть такое движение будет поступательным. Третье из уравнений определяет движение, которое совершала бы фигура при неподвижном полюсе *A*, (т.е. когда $X_A = const; Y_A = const,$)- то есть вращение фигуры вокруг полюса *A*.

Кинематическими характеристиками поступательного движения являются скорость и ускорение полюса *A* - $\vec{\upsilon}_A = \dot{\vec{r}}_A$; $\vec{a}_A = \dot{\vec{\upsilon}}_A = \ddot{\vec{r}}_A$; а вращательного движения – угловая скорость и угловое ускорение фигуры $\omega = \dot{\varphi}$; $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$

2. **Определение скоростей точек при плоскопараллельном движении твердого тела.**

2.1. **Общий метод вычисления скоростей через полюс.**

Теорема: **Скорость любой произвольной точки плоской фигуры при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости точки при её вращательном движении вместе с телом вокруг этого полюса.**

При вычислении скоростей за полюс выбирается точка, скорость которой известна или легко может быть определена из условия задачи. Пусть точка A – полюс. Тогда в соответствии с теоремой для произвольной точки можно записать:

$$\vec{\upsilon}_{\hat{A}} = \vec{\upsilon}_{\grave{A}} + \vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth.}_{\hat{A}/\grave{A}}. \qquad (1)$$

Графическая форма представления:

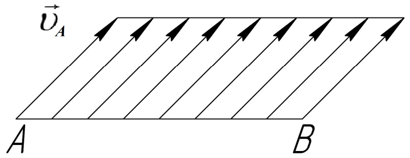


Рис. 8 Поступательное движение вместе с полюсом A

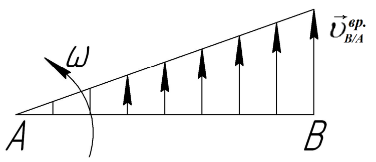


Рис. 9 Вращательное движение вокруг полюса A

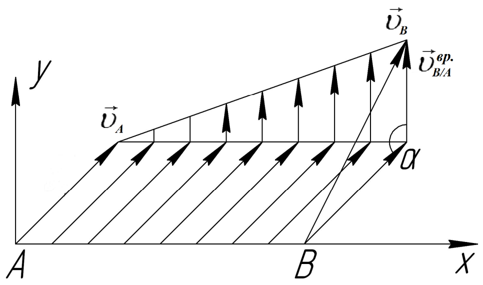


Рис. 10 Плоское движение

где $\vec{\upsilon}_A$ - скорость полюса A; $\vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth.}_{\hat{A}/\grave{A}}$ - скорость точки B при вращении вокруг полюса A.

Вектор $\vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth.}_{\hat{A}/\grave{A}}$ направлен перпендикулярно звену *AB* в сторону вращения тела. При вращательном движении линейная скорость точки определяется формулой Эйлера:

$$\vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth.}_{\hat{A}/\grave{A}} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}_{\grave{A}\hat{A}}\right] \tag{2}$$

Численное значение скорости $\vec{\upsilon}_B$ можно найти по теореме косинусов:

$$\upsilon_{\hat{A}} = \sqrt{\upsilon^2_{\grave{A}} + \upsilon^2_{\hat{A}/\grave{A}} - 2 \cdot \upsilon_{\grave{A}} \cdot \upsilon^{\hat{a}\eth.}_{\hat{A}/\grave{A}} \cdot \cos\alpha} \tag{3}$$

Пользуясь уравнением (1) можно найти скорость любой точки, если известны: $\vec{\upsilon}$ - вектор скорости одной из точек тела, принимаемой за полюс (по модулю и по направлению), ω - угловая скорость вращения тела или звена (по модулю и по направлению), и расстояние от точки до полюса

Пусть точка *O* – полюс, тогда на основании (1):

$$\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}^{\,вр}_{M/O},$$

где $\vec{\upsilon}_0$ - скорость полюса;

$\vec{\upsilon}^{\hat{A}\ETH}_{M/O} = [\vec{\omega}_{OM} \times \vec{r}_{OM}]$ - скорость при вращательном движении вокруг полюса *O*, которая направлена перпендикулярно звену *OM* в сторону угловой скорости звена ω (Рис. 11).

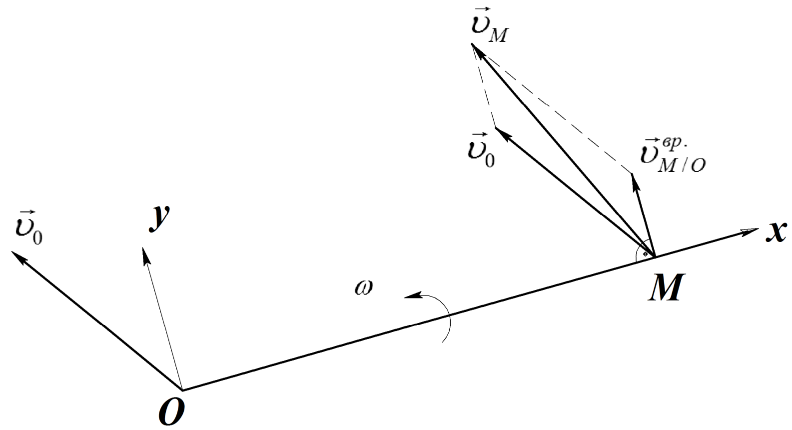


Рис. 11

Модуль скорости любой точки можно также вычислить с помощью проекций векторного равенства на две взаимно перпендикулярные оси *X,Y* которые можно выбирать произвольно (удобнее одну ось направить по звену, вторую перпендикулярно звену). (Рис.11.):

Спроектировав векторное равенство $\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}^{\,вр}_{M/O}$ на оси координат, получим:

$$\upsilon_{MX} = \upsilon_{OX} + (\upsilon^{\text{ÂÐ}}_{M/O})_X$$

$$\upsilon_{MY} = \upsilon_{OY} + (\upsilon^{\text{ÂÐ}}_{M/O})_Y$$

$$\left|\upsilon_M\right| = \sqrt{\upsilon^2_{MX} + \upsilon^2_{MY}} \qquad (4)$$

Пример 1

Муфта *A* (Рис.12.) скользит по вертикальным направляющим со скоростью $\upsilon_{\text{Â}}$ =2 *см/с*. Стержень *AB* длиной 2 *см* вращается вокруг точки *A* с угловой скоростью ω =2 c^{-1}. Найти скорость точки *B* в тот момент времени, когда угол $\alpha = 30^0$.

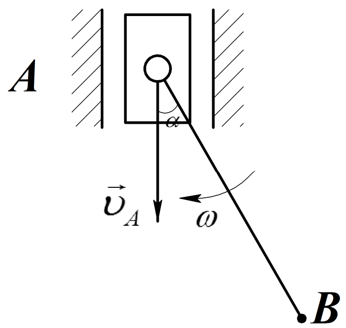


Рис. 12

Решение:

Примем точку *A* за полюс. Используем векторное равенство (1): $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}^{\,вр}_{B/A}$.

Модуль скорости при вращательном движении точки *B* вокруг полюса *A* определим по формуле:

$$\upsilon^{\text{âð.}}_{B/A} = \omega \cdot AB .$$

Подставив значения, получим:

$$\upsilon^{\text{âð.}}{}_{\text{Â/À}} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ см/с}$$

Вектор скорости точки *B* при вращательном движении вокруг точки *A* перпендикулярен звену *AB* ($\vec{\upsilon}_{B/A} \perp AB$) и направлен в сторону угловой скорости ω (Рис.13.). Модуль скорости точки *B* определим двумя способами:

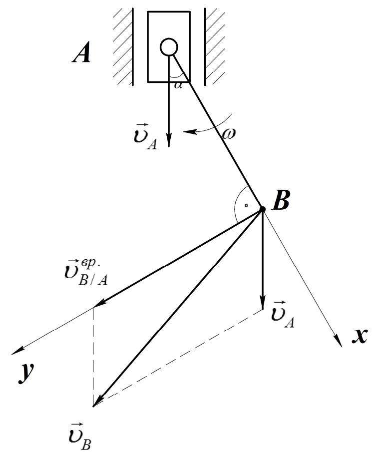


Рис. 13

1) по теореме косинусов

$$\upsilon_{\hat{A}} = \sqrt{\upsilon_{\hat{A}}^2 + (\upsilon_{\hat{A}/\grave{A}}^{\hat{a}\eth.})^2 - 2\cdot\upsilon_{\grave{A}}\cdot\upsilon_{\hat{A}/\grave{A}}^{\hat{a}\eth.}\cdot\cos 120^{\acute{i}}} = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot(-\frac{1}{2})} = \sqrt{28} = 5{,}3 \ \textit{см/с}$$

2) методом проекций (ось *X* направим по звену *AB*, ось *Y* перпендикулярно звену *AB*, то есть по $\vec{\upsilon}_{\hat{A}/\grave{A}}^{\hat{a}\eth.}$);

Проектируем равенство (6) на оси *X* и *Y*:

$$\upsilon_{BX} = \upsilon_A \cdot \cos 30^o = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\tilde{n}\grave{i}\ /\ \tilde{n}$$
$$\upsilon_{BY} = \upsilon_A \cdot \cos 60^o + \upsilon_{B/A} = 1 + 4 = 5\tilde{n}\grave{i}\ /\ \tilde{n}$$
$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{BX}^{\ 2} + \upsilon_{BY}^2} = \sqrt{3+25} = 5{,}3\tilde{n}\grave{i}\ /\ \tilde{n}$$

2.2. **Следствие 1 - Теорема о проекциях**

Формулировка: **проекции скоростей двух точек плоской фигуры при плоскопараллельном движении на прямую, соединяющую эти точки равны по величине и одинаковы по направлению.**

Рис. 14

Доказательство:

Пусть точка A – полюс, тогда по теореме о разложении плоского движения и в соответствии с векторным равенством (1) можно записать:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}^{BP}_{B/A}$$

Введем координатную ось X, совместив ее с прямой AB. Спроектируем почленно уравнение (1) на ось X (то есть на прямую AB). Получим:

$$(\vec{\upsilon}_B)_{AB} = (\vec{\upsilon}_A)_{AB} + (\vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth.}_{B/A})_{AB}$$

Учитывая, что вектор $\vec{\upsilon}^{BP}_{B/A} \perp AB$ и проекция $\vec{\upsilon}^{\hat{A}\text{Ð}}_{B/A}$ на прямую AB равна нулю получим:

$$\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_{\hat{A}} \cos\alpha \; ; \qquad (5)$$

Теорема о проекциях – это один из самых простых способов вычисления скоростей при плоском движении.

Чтобы вычислить скорость по теореме о проекциях, необходимо знать скорость одной из точек, а также направление этих скоростей.

Пример 2 (16.11 [9])

Стержень AB длины 0,5 *м* движется в плоскости чертежа (Рис.15). Скорость $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ ($\upsilon_{\hat{A}}$= 2 *м/с*) образует угол 45^0 с осью, совмещенной со стержнем AB. Скорость $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ точки B образует угол 60^0 со стержнем AB. Найти модуль скорости точки B и угловую скорость стержня ω.

Рис.15

Решение:

Для определения модуля скорости точки *B* используем теорему о проекциях, согласно которой: $\upsilon_{\hat{A}} \cdot \cos 45^0 = \upsilon_{\hat{A}} \cdot \cos 60^0$.

Отсюда:

$$\upsilon_B = \frac{\upsilon_A \cdot \cos 45^0}{\cos 60^0} = \frac{2 \cdot 0,707}{0,5} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,82 \ \text{м/с}.$$

Чтобы найти угловую скорость стержня ω, примем точку *A* за полюс и запишем в соответствии с (1) векторное равенство:

$$\vec{\upsilon}_{\hat{A}} = \vec{\upsilon}_{\grave{A}} + \vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth.}_{\hat{A}/\grave{A}}.$$

Спроектируем это векторное равенство на ось, перпендикулярную стержню *AB*, получим:

$$\upsilon_{\hat{A}} \cdot \sin 60^0 = \upsilon_A \cdot \sin 45^0 + \upsilon^{\hat{a}\eth.}_{B/A}$$

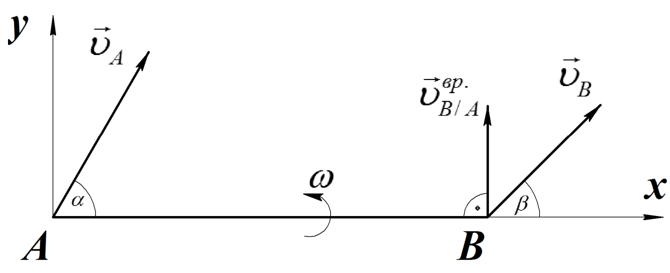


Рис.16

Отсюда:

$$\upsilon^{\hat{a}\eth.}_{B/A} = \upsilon_{\hat{A}} \cdot \sin 60^0 - \upsilon_A \cdot \sin 45^0,$$

где: $\upsilon^{\hat{a}\eth.}_{B/A} = \omega \cdot \grave{A}\hat{A}$ - скорость точки *B* при вращательном движении вокруг полюса *A*, направленная перпендикулярно звену *AB* в сторону угловой скорости звена $\omega_{\grave{A}\hat{A}}$.

Подставив значения, получим:

$$\upsilon^{\hat{a}\eth}_{\hat{A}/\grave{A}} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}028 \ \text{м/с}$$

Отсюда:

$$\omega = \frac{\upsilon^{\hat{a}\eth}_{\hat{A}/\grave{A}}}{\grave{A}\hat{A}} = \frac{1{,}028}{0{,}5} = 2{,}07 \ c^{-1}$$

2.3. **Следствие 2. Вычисление скоростей через мгновенный центр скоростей**

Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.

Пример 3

По условию задачи, рассмотренной в примере 2, найти скорость точки C, делящий отрезок AB на части $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$ (Рис.17)

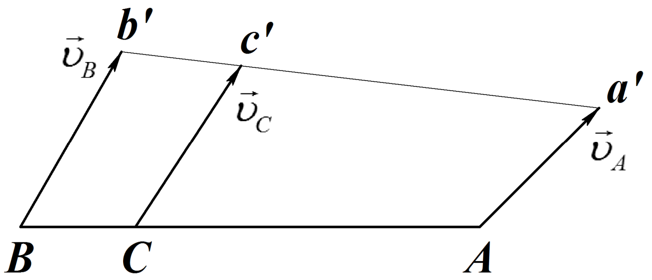


Рис.17

Решение представим графически. Отложим значения $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ в масштабе скоростей 10 мм=1 *м/с*. Соединим концы векторов $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ отрезком прямой $a'в'$. Разделим эту прямую согласно условию на части: $\frac{a'c'}{a'в'} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$.

Соединим точки С и с' вектором $\vec{\upsilon}_C$. Измерим его с помощью выбранного масштаба: получим модуль вектора $\upsilon_{\tilde{N}} = 2{,}5$ *м/с.*

Пример 4

Зная скорости точек А и В, по модулю и по направлению, определить скорость шарнира С механизма в указанном положении (Рис.18).

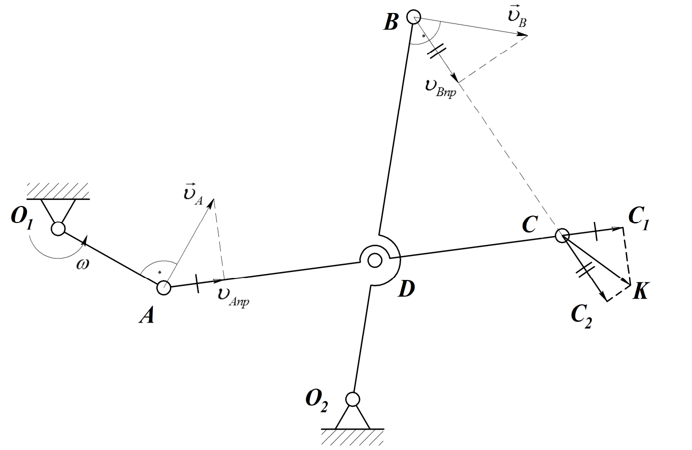


Рис.18

Решение:

Скорость точки A направлена перпендикулярно звену O_1A в сторону угловой скорости вращения звена O_1A. Скорость точки B направлена перпендикулярно звену O_2B в сторону угловой скорости вращения звена O_2B.

Находим проекцию скорости точки A на направление AC ($\upsilon_{Àïð}$) и откладываем из точки C отрезок CC_1=$\upsilon_{Àïð}$, аналогично находим проекцию скорости точки B на направление BC ($\upsilon_{Âïð}$.) и откладываем отрезок CC_2=$\upsilon_{Âïð}$.

Затем восстанавливаем в точках C_1 и C_2 перпендикуляры к направлениям AC и BC. Точка «K» пересечения этих перпендикуляров определяет собой конец вектора $\vec{\upsilon}_C$, то есть $\vec{\upsilon}_C = \overrightarrow{CK}$.

2.4. **Вычисление скоростей через мгновенный центр скоростей (МЦС)**

а) **Определение:**

Для тела, движущегося плоскопараллельно, в каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в данный момент равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей (МЦС).

Обозначается МЦС - Р. $\upsilon_P = 0$. Очевидно, что эта точка единственная, так как при наличии второй точки с нулевой скоростью фигура в данный момент была бы неподвижна и скорости всех ее точек равнялись бы нулю. Использование МЦС упрощает процедуру определения скоростей точек плоской фигуры.

б) **Определение линейных скоростей точек через МЦС**

Если положение МЦС найдено, то скорость любой точки плоской фигуры может быть определена посредством выбора полюса в МЦС. Для произвольной точки, например, A можно записать:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_P + \vec{\upsilon}_{A/P}^{BP}\ ; \tag{6}$$

Так как $\upsilon_P = 0$, то можно записывать это равенство без векторов, то есть в этом случае векторное выражение теоремы о сложении скоростей вырождается в известную зависимость от расстояния до центра вращения:

$$\begin{aligned} &\upsilon_A = \upsilon_{A/P}^{\text{ÂÐ}}; \\ &\upsilon_A = \omega_{AP} AP \end{aligned} \tag{7}$$

Для произвольной точки B получим:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_P + \vec{\upsilon}_{B/P}^{BP};$$

$$\begin{aligned} &\upsilon_B = \upsilon_{B/P}^{\text{ÂÐ}}; \\ &\upsilon_B = \omega_{BP} \cdot BP \end{aligned}; \tag{8}$$

Учитывая, что для одного и того же тела (или звена), угловая скорость $\omega_{AP} = \omega_{BP} = \omega_{\text{ÑÐ}} = \omega$, получим:

$$\begin{aligned} &\upsilon_A = \omega \cdot AP \\ &\upsilon_B = \omega \cdot BP \\ &\upsilon_C = \omega \cdot CP \end{aligned} \tag{9}$$

Поле скоростей точек плоской фигуры в этом случае представляет собой поле вращательных скоростей относительно мгновенного центра скоростей. (Рис.19)

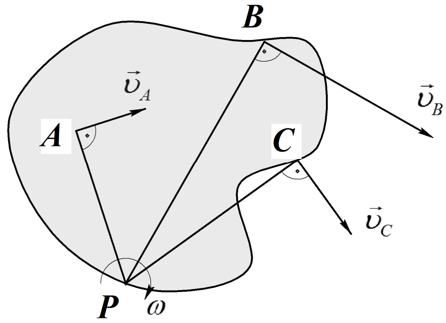


Рис.19

в). **Общий метод вычисления скоростей через мгновенный центр скоростей**

Чтобы определить положение мгновенного центра скоростей (P), необходимо знать направление скоростей двух точек, например, A и B и модуль скорости одной из точек.

Пусть известна скорость точки A по модулю и по направлению, и известна скорость точки B по направлению. Известно, что эти скорости не параллельны друг другу. Восстанавливаем в точке A перпендикуляр к скорости точки A и в точке B перпендикуляр к направлению скорости точки B.

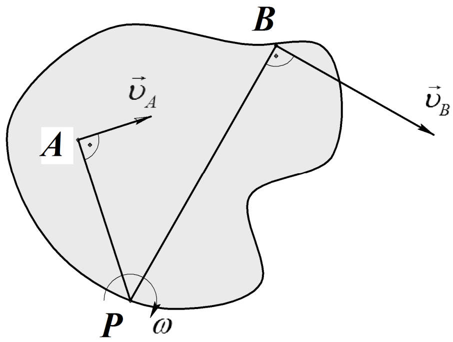


Рис.20

Мгновенный центр скоростей (P) находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям, восстановленных в точках A и B (Рис.20). Направление скоростей: $\vec{\upsilon}_A \perp \overrightarrow{PA}$ и $\vec{\upsilon}_B \perp \overrightarrow{PB}$.

Правило:

Чтобы вычислить линейную скорость какой-либо точки тела через мгновенный центр скоростей, необходимо, угловую скорость тела умножить на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центом скоростей. Скорость точки направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону угловой скорости вращения тела (Рис.20).

Модули скоростей точек пропорциональны их расстояниям до МЦС, а это значит, чем дальше от МЦС точка, тем больше у неё скорость. Отсюда следует, что при вычислении скоростей, тело при плоском движении не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС.

МЦС применяется только при вычислении скоростей и не применяется при вычислении ускорений, так как ускорение мгновенного центра скоростей не равно нулю.

г) **Вычисление угловой скорости через мгновенный центр скоростей**

Как следует из формул (9) пункта «б» угловую скорость вращения плоской фигуры ω, легко найти, зная линейную скорость какой-либо точки и длину отрезка от точки до мгновенного центра скоростей. Отношение линейной скорости точки тела к ее расстоянию до мгновенного центра скоростей есть величина постоянная для всех точек тела, равная его угловой скорости, то есть:

$$\omega = \frac{\upsilon_M}{MP} = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP} = \ldots \tag{10}$$

Правило:

Для того чтобы определить угловую скорость тела (или звена) необходимо линейную скорость какой-либо точки тела разделить на длину отрезка, соединяющего эту точку с мгновенным центром скоростей. Направление угловой скорости (направление дуговой стрелки угловой скорости) определяется направлением вектора линейной скорости этой точки по отношению к МЦС (Рис.21).

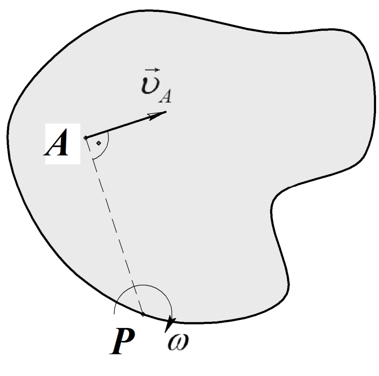


Рис.21

Пример 5 (16.11 [9])

Стержень *AB* длины 0,5 *м* движется в плоскости чертежа (Рис.22.). Скорость $\vec{\upsilon}_{\grave{A}}$ ($\upsilon_{\grave{A}}$= 2 *м/с*) образует угол 45^0 с осью, совмещенной со стержнем *AB*. Скорость $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ точки *B* образует угол 60^0 со стержнем *AB*. Найти модуль скорости точки *B* и угловую скорость стержня ω .

Рис.22

Решение:

Для определения скорости точки *B* - $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ и угловой скорости стержня ω, построим мгновенный центр скоростей стержня *AB*. Для этого из точек *A* и *B* восстанавливаем перпендикуляры к векторам скоростей $\vec{\upsilon}_{\grave{A}}$ и $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ до их пересечения в точке *P*, являющейся мгновенным центром скоростей звена *AB* (Рис.23).

Учитывая, что $\angle \grave{A}PB$ =180^0 – (30^0+135^0)=15^0, определяем по теореме синусов расстояние от точки *A* до мгновенного центра скоростей *P*:

$$\frac{AP}{\sin 30^0} = \frac{AB}{\sin 15^0};$$

Отсюда: $AP = \dfrac{AB \cdot \sin 30^0}{\sin 15^0} = \dfrac{0,5 \cdot 0,5}{0,26} \approx 0,966$ *м*.

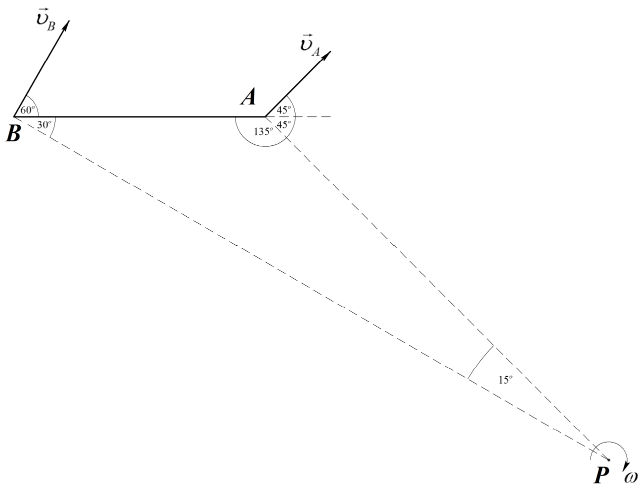


Рис.23

По известным значениям скорости точки A и отрезка AP подсчитываем значение угловой скорости стержня ω:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{2}{0,966} = 2,07\ \text{с}^{-1}.$$

Для определения скорости точки B определим по теореме косинусов отрезок BP, соединяющий точку B и мгновенный центр скоростей звена AB – точку P:

$$BP = \sqrt{(AB)^2 + (AP)^2 - 2 \cdot AB \cdot AP \cdot \cos 135^0} = \sqrt{0,5^2 + 0,966^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,966 \cdot (-0,707)}$$

$=1,366$ *м*.

Модуль скорости точки B:

$$\upsilon_B = \omega \cdot BP = 2,07 \cdot 1,366 = 2,83\,м/с$$

Полученные результаты совпадают со значениями, полученными в примере *2*.

д) **Частные случаи нахождения мгновенного центра скоростей**

1) Общий метод.

Чтобы определить положение мгновенного центра скоростей, необходимо знать направления скоростей двух точек.

Пусть известны скорости двух точек плоской фигуры, не параллельные друг другу (Рис.24). Мгновенный центр скоростей лежит на пересечении перпендикуляров восстановленных из точек A и B к направлениям векторов их скоростей. При этом может быть определена угловая скорость тела или звена:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP};$$

Примечание: для нахождения только положения МЦС достаточно знать лишь *направления* скоростей двух точек.

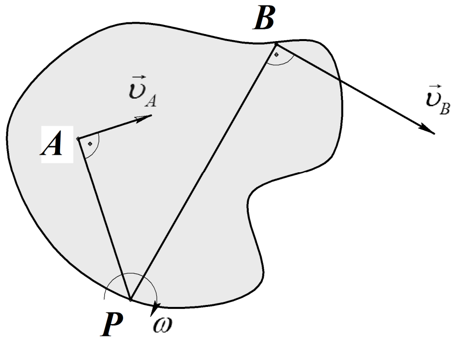


Рис. 24

Пример 6

Определить положение мгновенного центра скоростей звена *AB* кривошипно-коромыслового механизма (Рис.25).

Решение:

Рассмотрим последовательно движение каждого звена механизма, начиная от кривошипа O_1A. Звено O_1A совершает вращательное движение относительно оси O_1 с заданной угловой скоростью ω. (Так как точка O_1 неподвижна, то она является мгновенным центром скоростей звена O_1A). Точка *A* кривошипа движется по окружности радиуса O_1A со скоростью $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$, поэтому вектор скорости точки *A* перпендикулярен звену O_1A ($\vec{\upsilon}_A \perp \overrightarrow{O_1A}$). Звено O_2B совершает вращательное движение относительно оси O_2, (так как точка O_2 неподвижна, то она является мгновенным центром скоростей звена O_2B), поэтому вектор скорости точки *B* ($\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$) перпендикулярен звену O_2B ($\vec{\upsilon}_B \perp \overrightarrow{O_2B}$). Движение шатуна *AB* является плоским (шатун движется в плоскости чертежа). Для того чтобы определить положение МЦС звена *AB* необходимо знать направление скоростей двух его точек. МЦС находим как точку пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей точек *A* и *B*, то есть продолжаем O_1A и O_2B до взаимного пересечения, получим P_{AB} – мгновенный центр скоростей звена АВ (Рис.25).

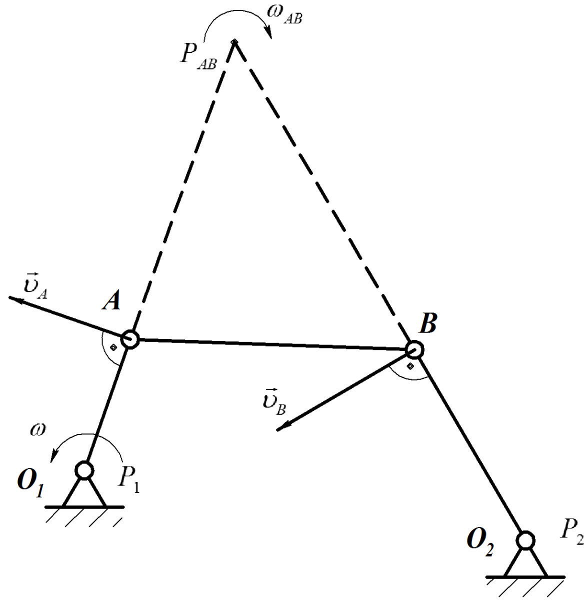


Рис.25

Пример 7

Определить положение МЦС кривошипно-ползунного механизма.

Решение:

Рассмотрим последовательно движение каждого звена механизма, начиная с кривошипа O_1A.

Звено O_1A совершает вращательное движение относительно точки O_1 с заданной угловой скоростью $\omega_{ÎÀ}$, поэтому вектор скорости точки A перпендикулярен звену O_1A ($\vec{\upsilon}_A \perp \overrightarrow{O_1A}$). вектор скорости точки B направлен по горизонтали, так как ползун совершает поступательное движение по горизонтальным направляющим. Движение шатуна AB является плоским (шатун движется в плоскости чертежа). Для того чтобы определить положение МЦС звена AB необходимо знать направление скоростей двух его точек. МЦС находим как точку пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей точек A и B, то есть восстанавливая из точки A перпендикуляр к скорости $\vec{\upsilon}_{À}$ и из точки B перпендикуляр к скорости $\vec{\upsilon}_{Â}$ получим мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB (Рис.26).

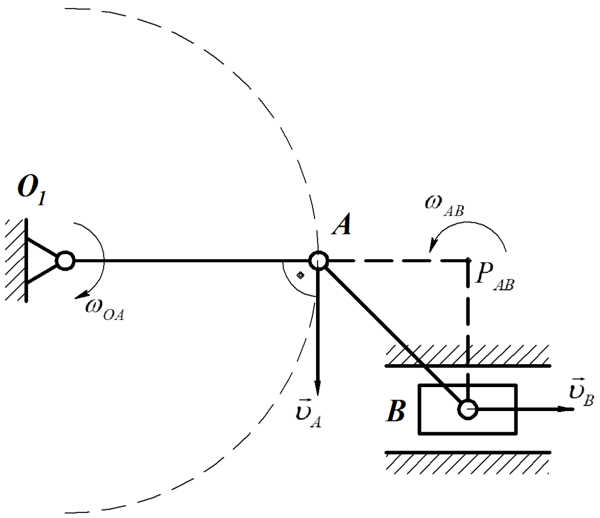


Рис.26

2) Определение МЦС в случае, если скорости двух точек параллельны ($\vec{\upsilon}_A \square \vec{\upsilon}_B$), направлены в разные стороны и эти точки лежат на общем перпендикуляре к их скоростям (Рис.27).

В этом случае МЦС находится как точка пересечения общего перпендикуляра (отрезка AB) с прямой, соединяющей концы векторов скоростей.

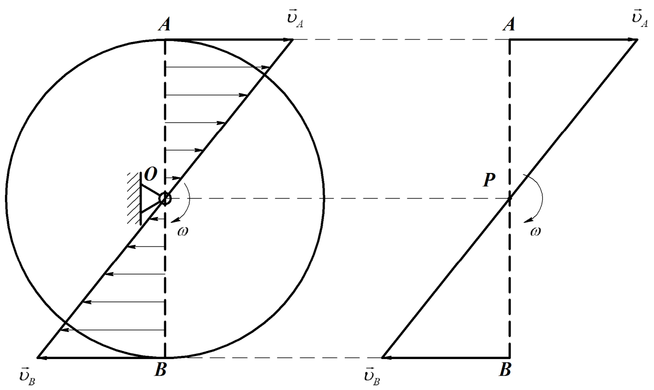


Рис. 27

3) Определение МЦС в случае, если скорости двух точек параллельны ($\vec{\upsilon}_A \square \vec{\upsilon}_B$), направлены в одну сторону и эти точки лежат на общем перпендикуляре к их скоростям (Рис.28).

В этом случае МЦС находится как точка пересечения общего перпендикуляра (отрезка AB) с прямой, соединяющей концы векторов скоростей.

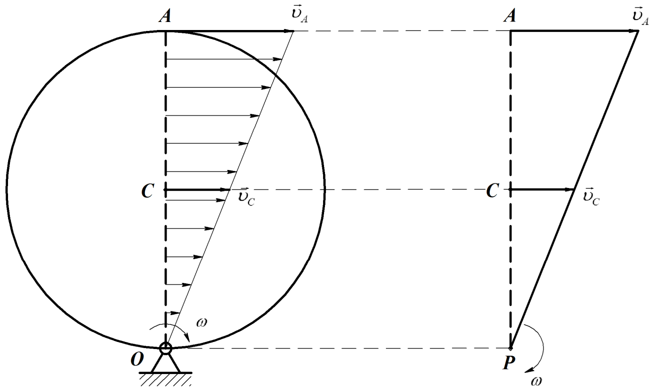


Рис. 28

Пример 8 (16,32 [9])

На рис.29 изображен суммирующий механизм, в котором две параллельные рейки движутся в одну сторону с постоянными скоростями $\vec{\upsilon}_{\grave{A}}$.и $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$. Между рейками зажат диск *2* радиуса *R,* катящийся по рейкам без скольжения. Определить скорость центра диска υ_0 и его угловую скорость ω. Показать, что скорость центра диска равна полусумме скоростей реек.

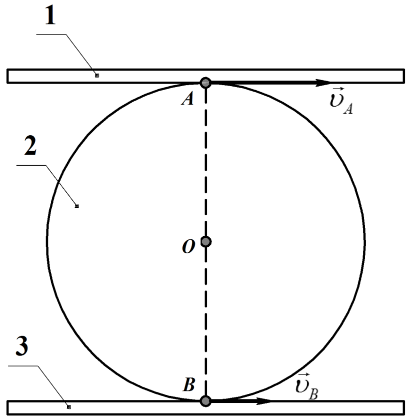


Рис. 29

Решение

Диск суммирующего механизма совершает плоское движение (движется в плоскости чертежа). Рейки механизма движутся поступательно и имеют общие точки с диском - точки *A* и *B* касания реек с диском. Поэтому заданные условием задачи скорости $\vec{\upsilon}_{\grave{A}}$ и $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ равны скоростям точек *A* и *B* принадлежащим диску.

Для определения угловой скорости диска и линейной скорости его центра *O* построим мгновенный центр скоростей диска.

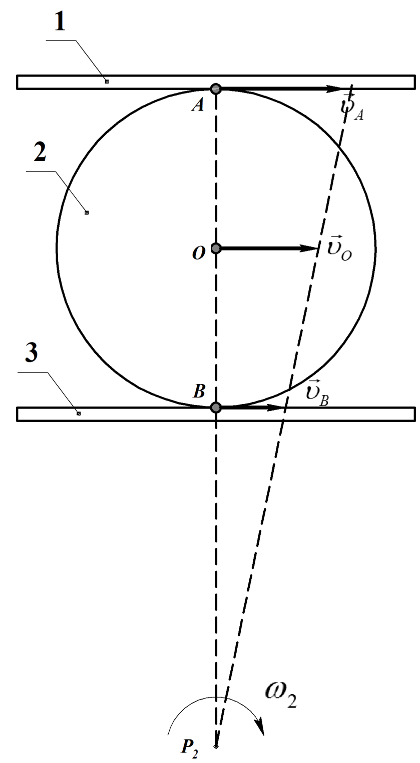


Рис. 30

В данном случае векторы $\vec{\upsilon}_A, \vec{\upsilon}_B$ и $\vec{\upsilon}_0$ параллельны и лежат на общем перпендикуляре к их скоростям, следовательно, на этом перпендикуляре находится и мгновенный центр скоростей диска. Причем, так как векторы $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ направлены в одну сторону, мгновенный центр скоростей расположен с внешней стороны отрезка, соединяющего точки *A* и *B* (Рис.30).

Угловая скорость диска:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}.$$

Из чертежа (Рис.30) видно, что *AP=BP+2R*, тогда:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_A}{BP + 2R} = \frac{\upsilon_B}{BP}.$$

Преобразовав, получим:

$$BP = \frac{2R \cdot \upsilon_B}{\upsilon_A - \upsilon_B};$$

то есть угловая скорость диска:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{2R}.$$

Скорость центра диска О:

$\upsilon_O = \omega \cdot OP;$

где OP – расстояние от центра диска до мгновенного центра скоростей:

$$OP = R + BP = \frac{(\upsilon_A + \upsilon_B) \cdot R}{\upsilon_A - \upsilon_B};$$

Тогда:

$$\upsilon_O = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{2R} \cdot \frac{(\upsilon_A + \upsilon_B) \cdot R}{\upsilon_A - \upsilon_B} = \frac{(\upsilon_A + \upsilon_B)}{2};$$

то есть скорость центра диска равна полусумме скоростей реек.

Пример 9

Планетарный механизм состоит из кривошипа *OA* вращающегося вокруг неподвижной оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка с угловой скоростью ω_{OA}. На его конец насажена шестерня *2*, радиуса r_2, находящаяся в зацеплении с колесом *1,* радиуса r_1 вращающимся с угловой скоростью ω_1. Определить угловую скорость вращения ω_2 шестерни *2* (Рис.31).

Решение:

Рассмотрим движение кривошипа *OA* и по исходным данным задачи найдем скорость точки *A*. Кривошип вращается вокруг неподвижной оси *O*. Поэтому его точка *A* движется по окружности радиуса ОА со скоростью, вектор которой перпендикулярен радиусу *OA*. Положение МЦС для звена *OA* известно - (точка *O* – стойка, и её скорость равна нулю). Поэтому, линейная скорость точки *A* может быть определена по формуле Эйлера: $\upsilon_A = \omega_{OA} \cdot OA$.

Колесо *1* вращается вокруг той же неподвижной оси *O*, зная угловую скорость вращения колеса *1* определим скорость точки *B*: $\upsilon_B = \omega_1 \cdot r_1$.

Точка *B* - это точка касания колес *1* и *2*, а так как колеса вращаются без проскальзывания, то окружные скорости на поверхности соприкасающихся колес будут одинаковы, то есть $\upsilon_{B1} = \upsilon_{B2} = \upsilon_B$.

Мгновенный центр скоростей звена *2* точка P_2 находится как точка пересечения общего перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов скоростей.

Угловая скорость вращения шестерни *2*:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_A}{AP_2} = \frac{\upsilon_B}{BP_2},$$

учитывая, что: $BP_2 = (r - AP_2)$;

получим: $AP_2 = \dfrac{\upsilon_A}{(\upsilon_B + \upsilon_A)} \cdot r_2$,

отсюда: $\omega_2 = \dfrac{\upsilon_A}{AP_2} = \dfrac{\upsilon_A + \upsilon_B}{r}$.

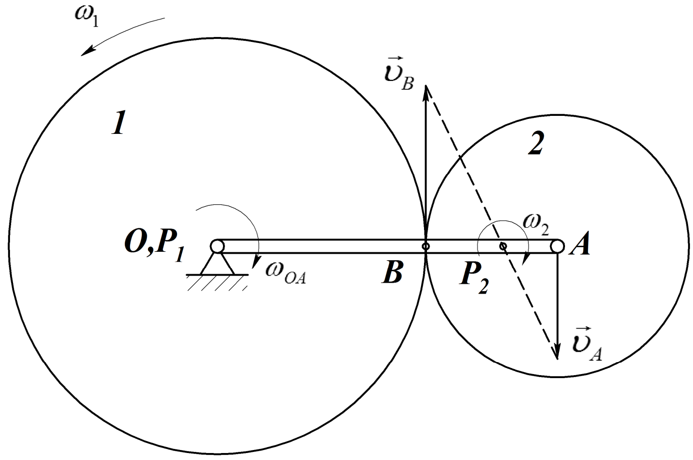


Рис.31

4) Скорости двух точек параллельны ($\vec{\upsilon}_A \parallel \vec{\upsilon}_B$), и эти точки не лежат на общем перпендикуляре к их скоростям (Рис.32).

Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения общего перпендикуляра к скоростям и прямой, соединяющей концы векторов скоростей. В этом случае точка пересечения перпендикуляров *не существует* или, другими словами, *находится в бесконечности*, т.е. расстояния PA = PB = ∞. Отсюда следует, что угловая скорость тела в данный момент обращается в нуль: $\omega = \dfrac{\upsilon_A}{AP} = \dfrac{\upsilon_B}{BP} = 0$, а значит, движение является мгновенно-поступательным. По определению поступательного движения скорости всех точек тела в данный момент одинаковы по величине и по направлению: $\left|\vec{\upsilon}_B\right| = \left|\vec{\upsilon}_A\right|$

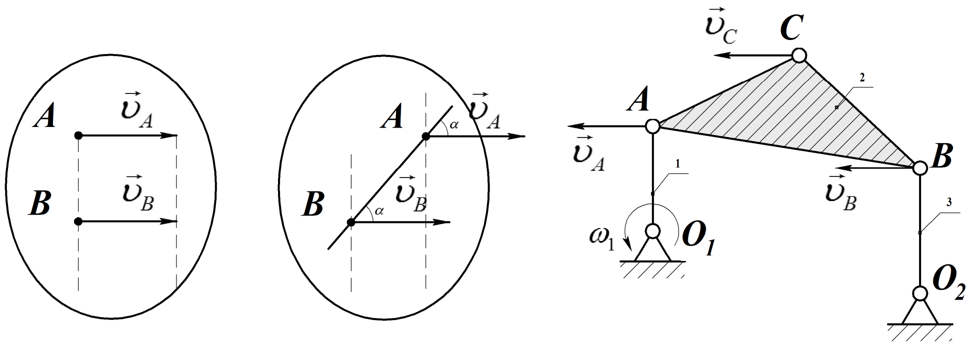


Рис. 32

Пример 10

В кривошипно-ползунном механизме кривошип вращается с угловой скоростью ω_1. Длина кривошипа *OA* равна *r*, длина шатуна *AB* равна *2r*. Определить угловую скорость шатуна *AB*, скорость точек *B* и *C* в положении, указанном на рис. 33 и рис.34.

Решение:

Последовательно рассмотрим движение каждого звена. Кривошип *OA* вращается вокруг неподвижной оси *O* с известной угловой скоростью ω_1. Точка *A* движется по окружности радиуса *r* со скоростью $\vec{\upsilon}_A$, вектор которой перпендикулярен звену *OA*. Модуль вектора $\vec{\upsilon}_A$ определяется по формуле Эйлера: $\upsilon_A = \omega_1 \cdot r$.

Движение следующего звена механизма (шатуна *AB*) плоское (шатун движется в плоскости чертежа). Угловую скорость шатуна найдем с помощью мгновенного центра скоростей шатуна. Для построения мгновенного центра скоростей плоской фигуры достаточно знать линии действия скоростей двух ее точек. В данном случае известны линии действия векторов скорости точек *A* и *B* (ползун *B* движется поступательно и скорость его точки *B* направлена вдоль прямолинейной траектории движения ползуна).

Скорости точек *A* и *B* направлены параллельны друг другу и перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности, то есть мгновенный центр скоростей шатуна *AB* находится в бесконечности и угловая скорость шатуна равна нулю $\omega_{\grave{A}\hat{A}} = \frac{\upsilon_{\grave{A}}}{\infty} = 0$. Следовательно, в этих положениях шатун *AB* кривошипно-ползунного механизма совершает мгновенное поступательное движение, поэтому, скорости всех точек шатуна в данный момент времени одинаковы по величине и направлению и равны скорости точки *A*: $\vec{\upsilon}_{\grave{A}} = \vec{\upsilon}_{\hat{A}} = \vec{\upsilon}_C = \ldots$

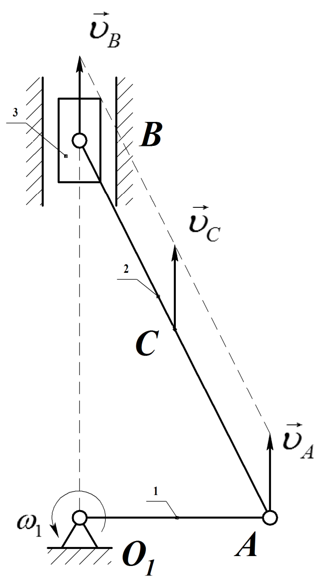


Рис. 33

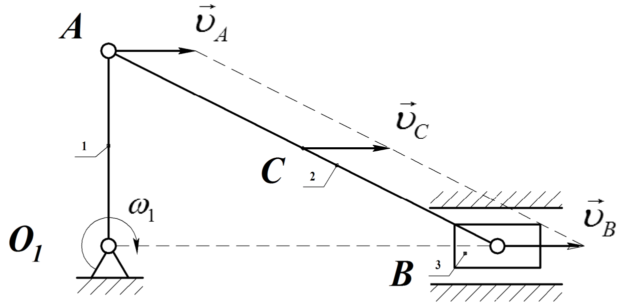


Рис.34

Пример 11

Кривошип *OA* эпициклического механизма (Рис.35.) вращается с угловой скоростью ω_{OA} вокруг неподвижной оси *O*. Колесо *1*, вращается вокруг той же оси с угловой скоростью ω_1. Определить угловую скорость шестерни *2*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна *2* рад./сек., угловая скорость колеса *1* равна *3* рад./сек., радиус первого колеса $r_1 = OB = 20$ *см.*, радиус шестерни *2* $r_2 = AB = 10$ *см.*

Решение:

Определяем линейную скорость точек *A* и *B*, учитывая, что точка *O* – мгновенный центр скоростей колеса 1 и кривошипа ОА:

$$\upsilon_{\grave{A}} = \omega_{0A} \cdot OA;$$
$$\upsilon_{\hat{A}} = \omega_1 \cdot OB;$$

Точка *B* (Рис. 35) - это точка касания колес *1* и *2*, а так как колеса вращаются без проскальзывания, то окружные скорости на поверхности соприкасающихся колес будут одинаковы, то есть $\upsilon_{B1} = \upsilon_{B2} = \upsilon_B$.

Определим положение мгновенного центра скоростей шестерни *2*. В этом случае мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения общего перпендикуляра к скоростям и прямой, соединяющей концы векторов скоростей. Подставив значения, получим:

$$\upsilon_{\grave{A}} = 2 \cdot 30 = 60\tilde{n}\grave{i}\ /\tilde{n}$$
$$\upsilon_{\hat{A}} = 3 \cdot 20 = 60\tilde{n}\grave{i}\ /\tilde{n}$$

Скорости точек *A* и *B* одинаковы по модулю и по направлению - $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B$, то есть в этом случае точка пересечения перпендикуляров находится в бесконечности, т.е. расстояния $PA = PB = \infty$, поэтому мгновенный центр скоростей шестерни *2* - P_2 лежит в бесконечности, и она совершает мгновенное поступательное движение.

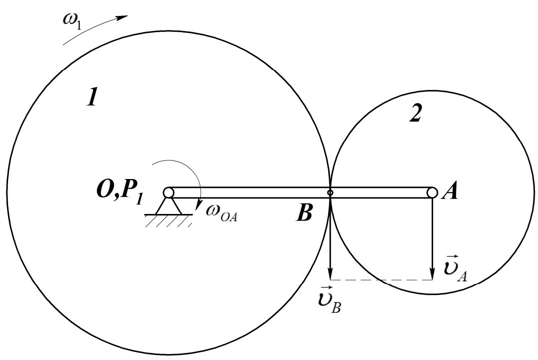


Рис.35

5) Качение тела по неподвижной поверхности.

5.1 Качение без скольжения тела по неподвижной поверхности.

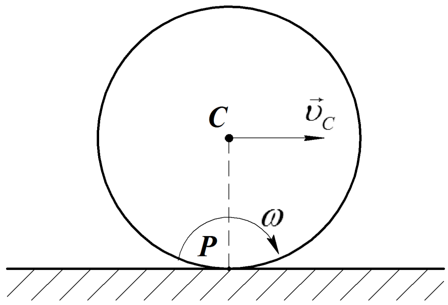


Рис. 36

Пусть колесо катится без скольжения и буксования (Рис.36). Скорость центра колеса - $\vec{\upsilon}_{Ñ}$. Колесо совершает плоскопараллельное движение, состоящее из поступательного движения, когда все точки движутся со скоростью полюса $\vec{\upsilon}_{Ñ}$, и вращательного движения вокруг полюса С. Точка контакта с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей Р. Угловая скорость колеса:

$$\omega = \frac{\upsilon_{Ñ}}{ÑÐ} = \frac{\upsilon_{Ñ}}{R},$$

то есть движение колеса можно представить как вращение в данный момент вокруг мгновенного центра скоростей P с угловой скоростью ω.

5.2 Движение со скольжением тела по неподвижной поверхности

Пусть колесо катится со скольжением. Скорость центра колеса - $\vec{\upsilon}_{Ñ}$. Точка контакта с неподвижной поверхностью не является в этом случае мгновенным центром скоростей. Возможны три случая.

а) Пусть скорость точки контакта O - $\upsilon_O < \upsilon_C$. В данном случае векторы $\vec{\upsilon}_C$ и $\vec{\upsilon}_0$ параллельны и лежат на общем перпендикуляре к их скоростям, следовательно, на этом перпендикуляре находится и мгновенный центр скоростей диска. Причем, так как векторы $\vec{\upsilon}_C$ и $\vec{\upsilon}_O$ направлены в одну сторону, мгновенный центр скоростей расположен с внешней стороны отрезка, соединяющего точки C и O (Рис.37).

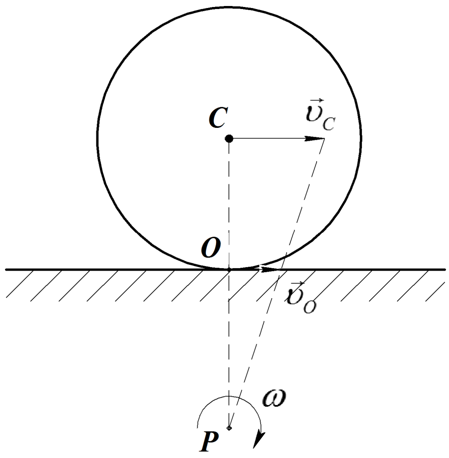


Рис.37

Угловая скорость колеса:

$$\omega = \frac{\upsilon_{\tilde{N}}}{\tilde{N}Đ} = \frac{\upsilon_O}{OP}$$

Учитывая, что *CP=OP+R*, после преобразования получим:

$$CP = \frac{\upsilon_C \cdot R}{\upsilon_C - \upsilon_O}, \text{ отсюда:}$$

$$\omega = \frac{\upsilon_{\tilde{N}} - \upsilon_O}{R}$$

Примечание: так же происходит движение колеса при его экстренном торможении, когда оно, не вращаясь, скользит по рельсу (движение колеса «юзом», при этом происходит потеря сцепления колеса с рельсом).

б) Пусть скорость точки контакта *O* - $\upsilon_O > \upsilon_C$, при этих условиях мгновенный центр скоростей будет расположен выше центра колеса (Рис.38).

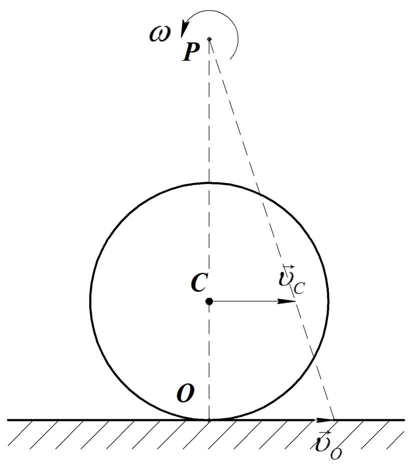


Рис.38.

Угловая скорость колеса:

$$\omega = \frac{\upsilon_{\text{Ñ}}}{\text{ÑĐ}} = \frac{\upsilon_O}{OP}$$

Учитывая, что *OP*=*CP*+*R*, после преобразования получим:

$$CP = \frac{\upsilon_C \cdot R}{\upsilon_O - \upsilon_C}\text{, отсюда:}$$

$$\omega = \frac{\upsilon_O - \upsilon_C}{R}$$

в) Пусть скорость точки контакта *O* - $\upsilon_O = \upsilon_C$, при этих условиях мгновенный центр скоростей будет находиться в бесконечности, колесо будет совершать мгновенное поступательное движение, при котором угловая скорость ω равна нулю. (Рис.39).

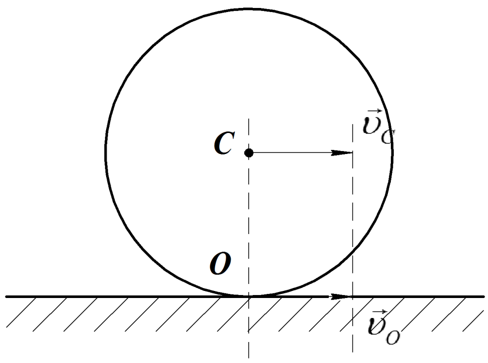


Рис.39

5.2 Движение с буксованием тела по неподвижной поверхности

Пусть колесо движется с буксованием. Скорость центра колеса - $\vec{\upsilon}_{\text{Ñ}}$. Скорость точки контакта $\vec{\upsilon}_O$ направлена в противоположную сторону скорости центра $\vec{\upsilon}_{\text{Ñ}}$. Скорости двух точек параллельны, и эти точки лежат на общем перпендикуляре к их скоростям. В этих случаях МЦС находится как точка пересечения общего перпендикуляра с прямой соединяющей концы векторов скоростей (Рис.40).

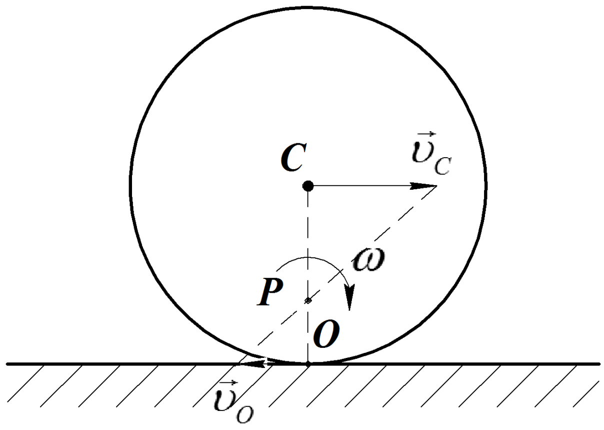


Рис.40

Угловая скорость

$$\omega=\frac{\upsilon_{\tilde{N}}}{\tilde{N}\text{Ð}}=\frac{\upsilon_O}{OP}$$

Учитывая, что $OP=R - CP$, после преобразования получим:

$$CP=\frac{\upsilon_C\cdot R}{\upsilon_C+\upsilon_O},$$

отсюда:

$$\omega=\frac{\upsilon_O+\upsilon_C}{R}$$

Пример.12 (16.31 [9])

Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному участку пути (рис.41); скорость его центра постоянна и равна $\vec{\upsilon}_C$.

Определить скорости точек *A, B, K, D*, принадлежащих ободу колеса, по величине и по направлению и его угловую скорость.

Решение:

Колесо совершает плоское движение (движется в плоскости рисунка). Скорости точек найдем с помощью мгновенного центра скоростей. Мгновенный центр скоростей это такая точка на плоскости чертежа, через которую проходит мгновенная ось вращения колеса, ее скорость равна нулю и она находится в точке P. По заданной скорости точки C, используя формулу Эйлера, определим угловую скорость колеса: $\omega=\frac{\upsilon_C}{R}$.

Учтем, что точки *A, B, K, D* описывают окружности вокруг мгновенного центра скоростей со скоростями, векторы которых перпендикулярны отрезкам, соединяющим точку и мгновенный центр скоростей, и, модуль скорости точки равен произведению угловой скорости колеса, умноженной на длину отрезка от точки до мгновенного центра скоростей, находим:

- скорость точки *A*:

$$\upsilon_A = \omega \cdot 2R = 2\upsilon_C \text{ ;}$$

- скорости точек *B* и *D* одинаковы, так как они находятся на одинаковом расстоянии от МЦС. Отрезок *BP*=*DP*: определим по теореме Пифагора:

$$BP=DP=\sqrt{R^2+R^2}=R\ \sqrt{2}\text{ ;}$$

Скорость точек *B* и *D*:

$$\upsilon_B = \omega \cdot \sqrt{R^2+R^2} = \omega \cdot \sqrt{2}R = \frac{\upsilon_C}{R} \cdot \sqrt{2} \cdot R = \sqrt{2} \cdot \upsilon_C = \upsilon_D$$

- скорость точки *K*:

$\upsilon_K = \omega \cdot KP$; где отрезок *KP* определим по теореме косинусов:

$$\upsilon_{\hat{E}} = \omega \cdot \sqrt{R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\alpha}$$

Учитывая направление скорости $\vec{\upsilon}_C$, приходим к выводу, что направление скоростей точек будут такими как показано на рис.42.

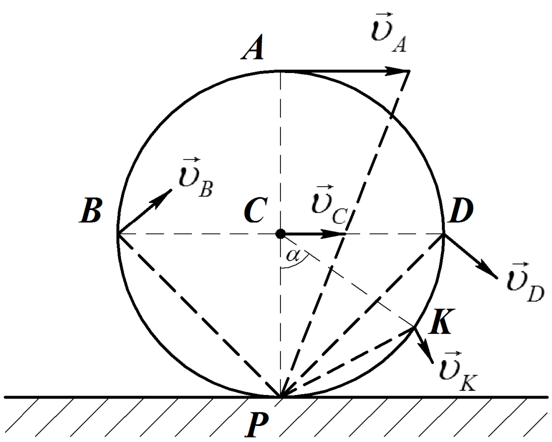


Рис. 41

Пример 13. Определить положение мгновенного центра скоростей звена *AB* механизма, представленного на рис.42.

Мгновенный центр скоростей колеса *1* находится в точке P_1, поэтому скорость точки *A* направлена перпендикулярно отрезку P_1A ($\vec{\upsilon}_A \perp \overrightarrow{P_1A}$). Мгновенный центр скоростей колеса *2* находится в точке P_2, поэтому скорость точки *B* направлена перпендикулярно отрезку P_2A ($\vec{\upsilon}_B \perp \overrightarrow{P_2B}$). Продолжив P_1A и P_2B до взаимного пересечения, получим P_3 (Рис.43) – мгновенный центр скоростей звена *AB*.

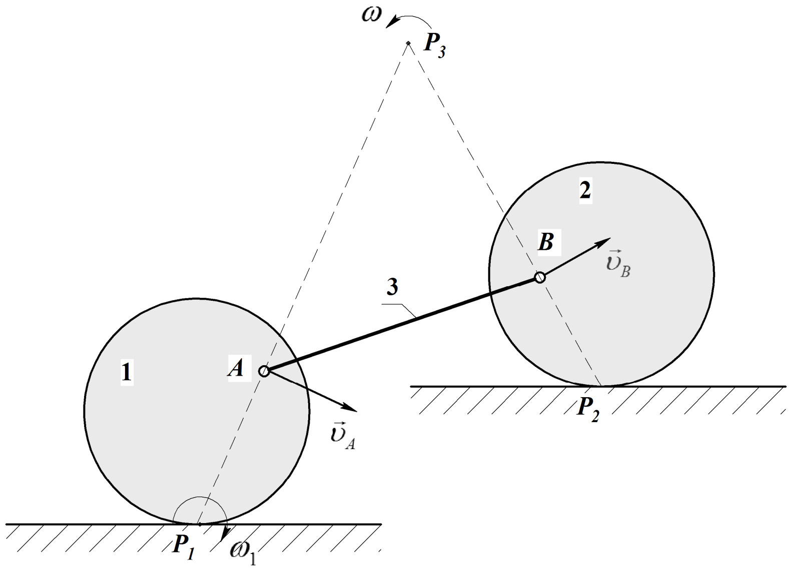


Рис.42

Пример 14.

Вал *1* вращается вокруг неподвижной оси *O* с угловой скоростью ω_1 и опирается при помощи роликов на обойму подшипника. Радиус вала *1* равен *R*, радиус ролика равен *r*. Определить скорость центра ролика, его угловую скорость и направление вращения.

Решение:

Обозначим точку соприкосновения вала с роликом через *A*, модуль её скорости: $\upsilon_A = R \cdot \omega_1$. Точка касания ролика с неподвижной обоймой есть мгновенный центр скоростей (*P*) ролика. Угловая скорость ролика: $\omega_2 = \dfrac{\upsilon_A}{2r}$.

Модуль скорости центра *C* ролика: $\upsilon_C = \omega_2 \cdot r = \dfrac{\upsilon_A}{2}$;

Ролик вращается вокруг своего центра против хода часовой стрелки и бегает вокруг вала по ходу часовой стрелки (Рис.43.).

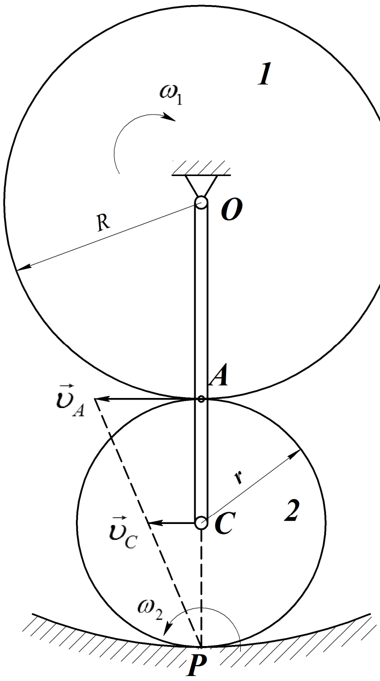


Рис.43

Пример 15 (16.34[9])

Груз *1*, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой *2*, опускается вертикально вниз по закону $x=t^2$ *м*. При этом катушка *2* катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу (Рис.44). Определить скорости точек *C*, *A*, *B*, *O* и *E* катушки в момент времени $t = 1$ *с* в положении, указанном на рис. 45, а также угловую скорость катушки, если $AD \perp CE$, $CD=2OC=0{,}2$ *м*.

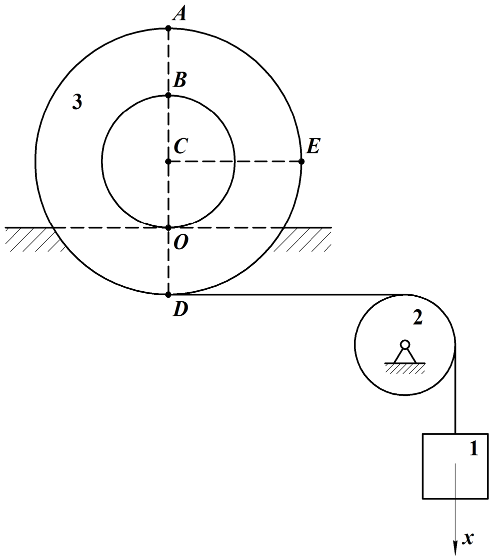


Рис.44

Решение

По заданному закону движения груза *1* определяем его скорость

$$\upsilon_1 = \frac{dx}{dt} = 2t \ м/с$$

При $t = 1$ *с,* получим: $\upsilon_1 = 2$ *м/с*

Скорость точки *D*, общей для нити и катушки, направлена вдоль нити и, поскольку нить считается нерастяжимой, имеет модуль, равный модулю скорости груза: $\upsilon_1 = \upsilon_D$

Движение катушки плоское (катушка движется в плоскости рисунка). Скорости точек *C*, *A*, *B*, *O*, и *E* катушки определим с помощью ее мгновенного центра скоростей, который находится в точке касания катушки и неподвижного рельса (то есть в точке *O*), так как по условию задачи катушка катится без скольжения, а значит υ_O=0. Установив положение мгновенного центра скоростей, по известной скорости точки *D* находим угловую скорость катушки:

$$\omega = \frac{\upsilon_D}{DP} = \frac{2}{0{,}1} = 20 \ c^{-1}$$

Учитывая, что точки *A*, *B*, *C*, и *E* описывают окружности вокруг мгновенного центра скоростей *P* со скоростями, векторы которых $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{\upsilon}_B$, $\vec{\upsilon}_C$, и $\vec{\upsilon}_E$

перпендикулярны радиусам этих окружностей *AP, BP, C*P и *EP* определяем линейные скорости точек (Рис.45):

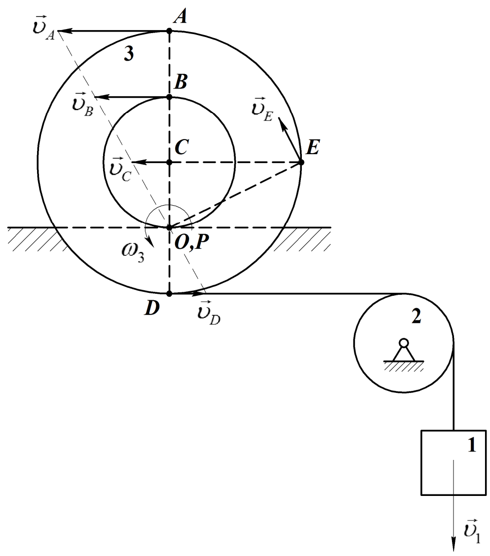


Рис.45

$\upsilon_{\tilde{N}} = \omega \cdot CP = 20 \cdot 0,1 = 2$ *м/с*;

$\upsilon_A = \omega \cdot AP = 20 \cdot 0,3 = 6$ *м/с*;

$\upsilon_B = \omega \cdot BP = 20 \cdot 0,2 = 4$ *м/с*;

$\upsilon_E = \omega \cdot EP = \omega \cdot \sqrt{r^2 + R^2} = 20 \cdot \sqrt{0,1^2 + 0,2^2} = 4,47$ *м/с*;

е). **Алгоритм решения задач на тему: «Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей».**

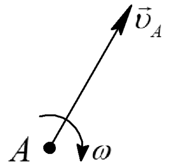
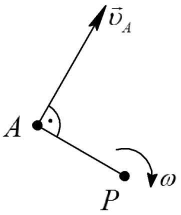
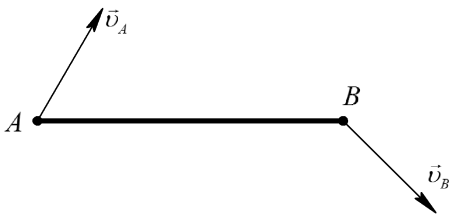
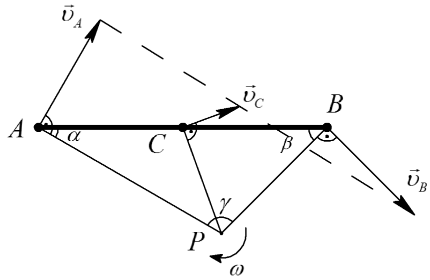
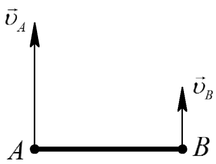
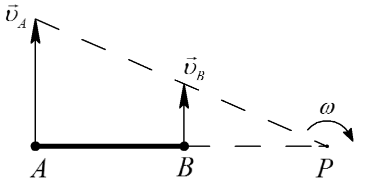
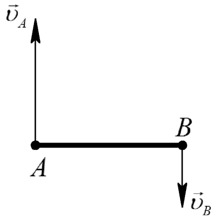
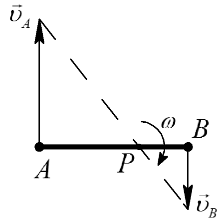
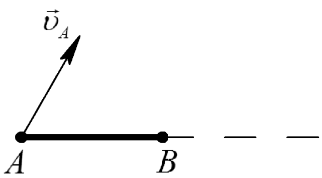
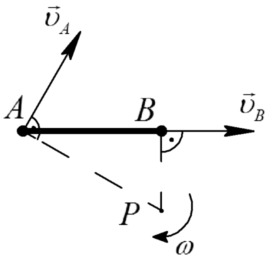
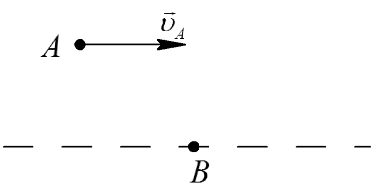
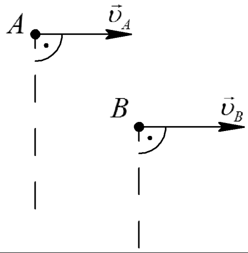
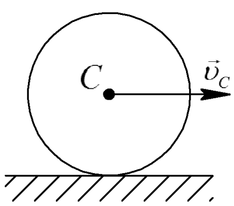
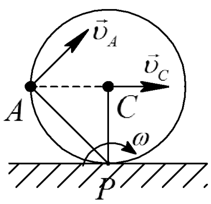
1. Если дан плоский механизм, состоящий из нескольких звеньев, то при решении задачи рассматривают последовательно движение отдельных звеньев механизма, начиная от того звена, движение которого задано.

2. При переходе от одного звена к другому определяют скорости тех точек, которые являются общими для этих двух звеньев механизма.

3. Следует подчеркнуть, что мгновенный центр скоростей можно находить только для каждого звена в отдельности, то же относится и к угловым скоростям.

4. Рекомендуется: МЦС и угловые скорости звеньев обозначать $P_1, P_2, P_3, \ldots$ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, где индексы 1,2,3 соответствуют номеру звена.

Таблица 1. Различные способы определения положения МЦС

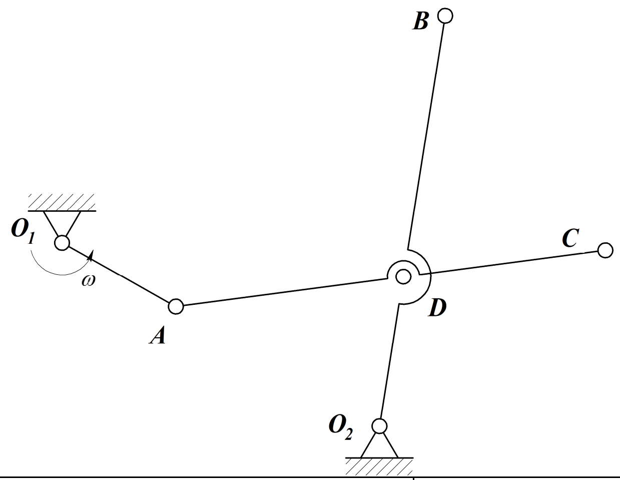
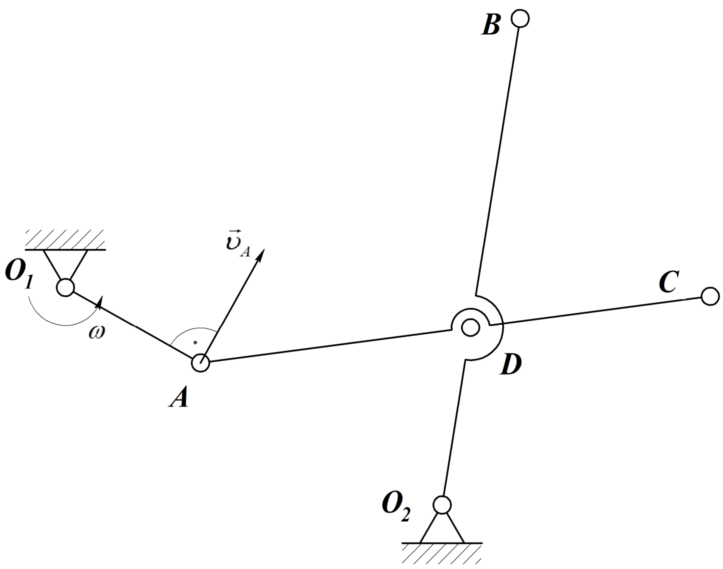
Дано	Исходная схема	Построение МЦС	Можно определить
$\vec{\upsilon}_A, \omega$			$AP = \dfrac{\upsilon_A}{\omega}$; $\omega = \dfrac{\upsilon_A}{AP}$
$\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$			$AP = AB\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\omega = \dfrac{\upsilon_A}{AP}$; $\upsilon_C = \omega \cdot CP$
			AP, BP; $\omega = \dfrac{\upsilon_A}{AP}$; $\upsilon_B = \omega \cdot BP$
			AP, BP; $\omega = \dfrac{\upsilon_A}{AP}$; $\upsilon_B = \omega \cdot BP$
$\vec{\upsilon}_A$ и линия действия $\vec{\upsilon}_B$			$\omega = \dfrac{\upsilon_A}{AP}$; $\upsilon_B = \omega \cdot BP$
			$AP = BP = \infty$; $\omega = 0$; $\upsilon_A = \upsilon_B$
Качение без скольжения			$\omega = \dfrac{\upsilon_C}{CP}$; $\upsilon_A = \omega \cdot AP$

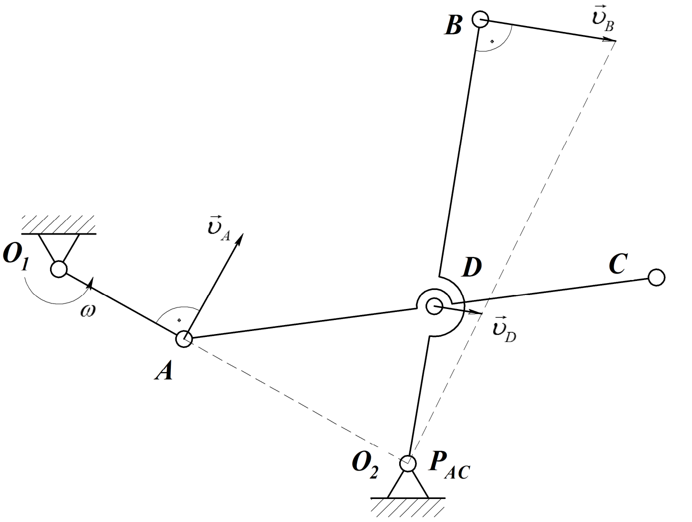
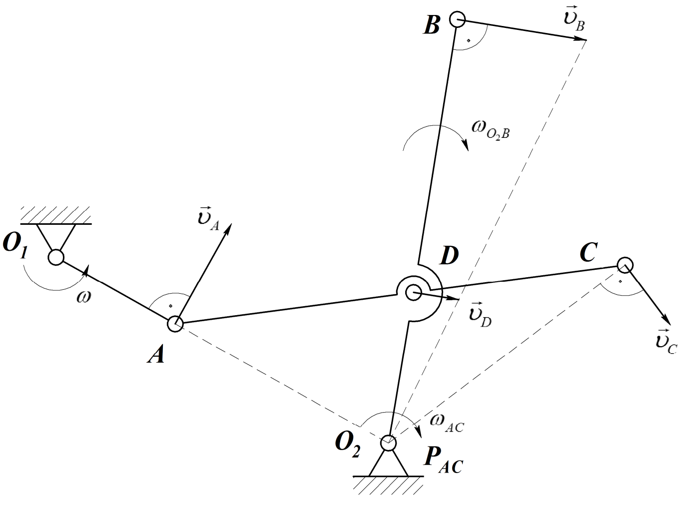
и). ***Упражнения и консультации***

Примечание:

Консультацией пользуйтесь в том случае, когда затрудняетесь ответить на вопросы или хотите проверить правильность своего ответа.

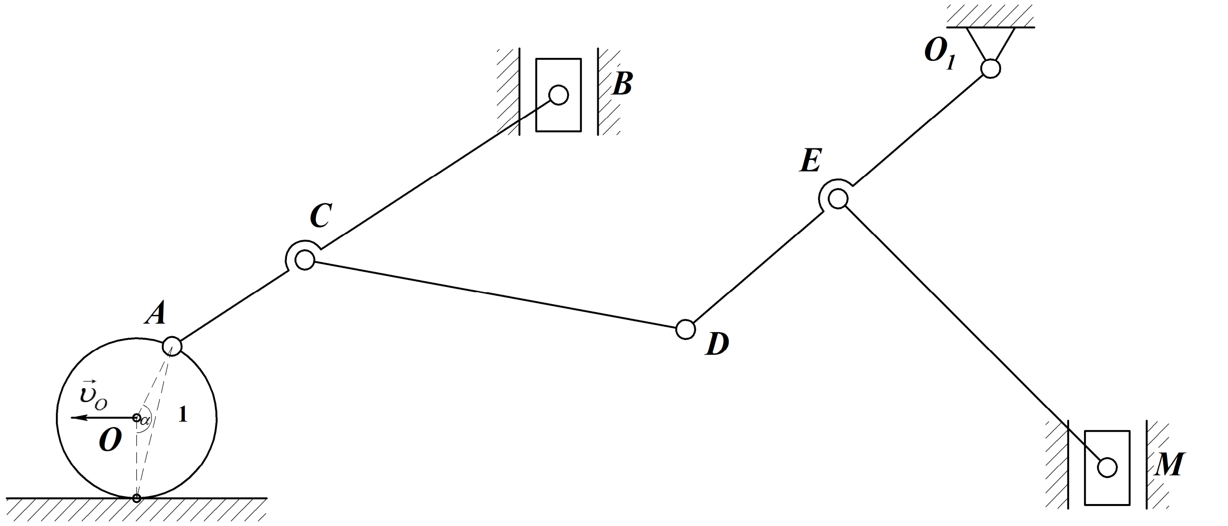
Задание **Консультация**

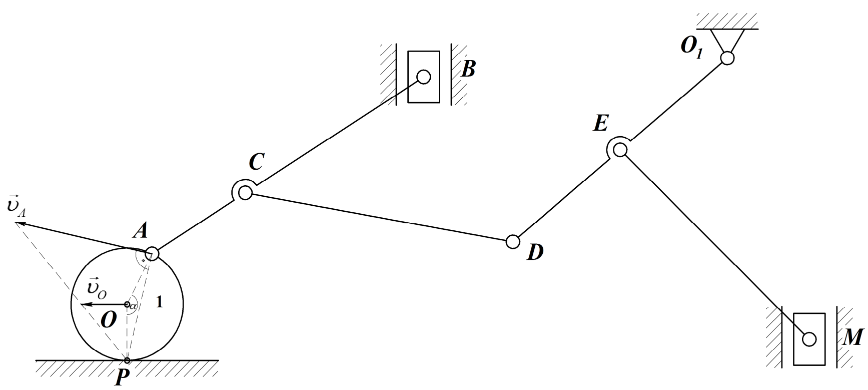
<table>
<tr><td colspan="2">Зная угловую скорость звена O_1A и размеры звеньев кривошипно-коромыслового механизма, определить линейную скорость точек А, Д, С, В, угловые скорости звеньев АС и O_2B и положение МЦС звена АС механизма в указанном положении.

</td></tr>
<tr><td>1.

</td><td>1. Последовательно рассмотрим движение каждого звена. Кривошип ОА вращается вокруг неподвижной оси O_1 с известной угловой скоростью ω. Мгновенный центр скоростей звена O_1A находится в точке O_1 так как это стойка. Точка А движется по окружности радиуса O_1A со скоростью $\vec{\upsilon}_A$, вектор которой перпендикулярен звену O_1A. Модуль вектора $\vec{\upsilon}_A$ определяется по формуле Эйлера, учитывая, что точка O_1 - мгновенный центр скоростей кривошипа O_1A получим: $\upsilon_A = \omega \cdot O_1A.$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>2. Коромысло O_2B вращается вокруг неподвижной оси O_2. Точка В движется по окружности радиуса</td></tr>
</table>

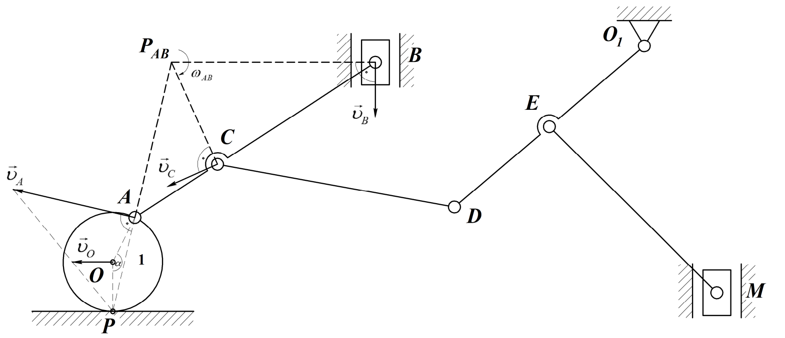
	O_2B со скоростью $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$, вектор которой перпендикулярен звену O_2B. Точка *Д* движется по окружности радиуса $O_2Д$ со скоростью $\vec{\upsilon}_D$, вектор которой перпендикулярен звену O_2B. Показываем на схеме линии действия скоростей $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ и $\vec{\upsilon}_D$ направляя их перпендикулярно коромыслу в любую сторону, так как направление угловой скорости звена O_2B нам не известно.
 **3.**	**3.** Определяем положение МЦС звена *АС*. Мгновенный центр скоростей звена *АС* находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек *A* и *D* к скоростям $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_D$. Из чертежа видно, что МЦС совпадает с точкой O_2 Определяем угловую скорость звена *АС*. $\omega_{AC} = \dfrac{\upsilon_A}{AO_2}$. Отрезок AO_2 можно определить по теореме косинусов. Линейные скорости точек *D* и *B* определяем по формуле Эйлера: $\upsilon_D = \omega_{AC} \cdot O_2D$; $\upsilon_{\hat{A}} = \omega_{AC} \cdot O_2B$.
 **4.**	**4.** Для определения линейной скорости точки *С*, которая принадлежит звену *АС*, соединяем точку *С* с мгновенным центром скоростей звена *АС* – точкой O_2. Скорость очки *С* будет направлена перпендикулярно отрезку, O_2C в сторону угловой скорости ω_{AC}. Модуль скорости точки *С*: $\upsilon_C = \omega_{AC} \cdot O_2C$. Отрезок O_2C можно определить по теореме косинусов.

Задание **Консультация**

Зная линейную скорость центра колеса *1* - $\vec{\upsilon}_O$ по модулю и направлению (колесо катится по неподвижной плоскости без проскальзывания) и размеры звеньев многозвенного механизма, определить линейную скорость точек: *A, B, C*, *D*, *E, M,* угловые скорости звеньев *AB*, *O_1D, CD, EM* и положение МЦС звеньев механизма в указанном положении.

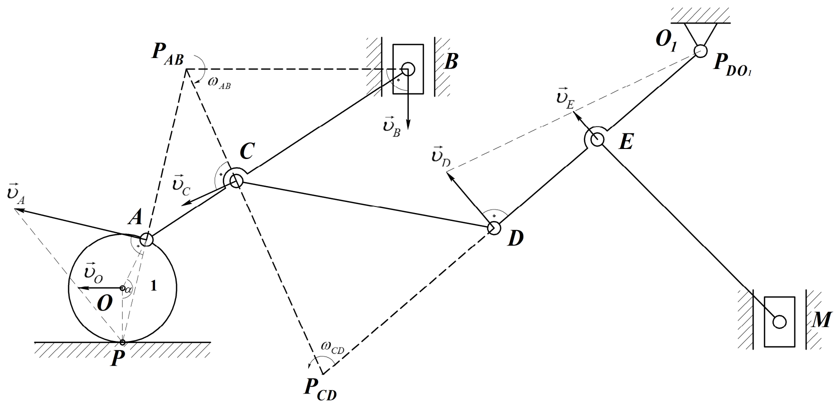


1. 	**1.**Определяем положение МЦС колеса – точка соприкосновения с неподвижной плоскостью *P* Определяем угловую скорость колеса *1*: $\omega_1 = \dfrac{\upsilon_0}{\text{ÎÐ}}$. Определяем линейную скорость точки *A*: $\upsilon_{\text{À}} = \omega_1 \cdot \text{ÀÐ}$. Скорость $\vec{\upsilon}_A$ направлена перпендикулярно отрезку, который соединяет точку А и *Ð* в сторону. угловой скорости колеса ω_1. Длину отрезка АР определяем по теореме косинусов.
2.	2. Ползун *B* совершает поступательное движение

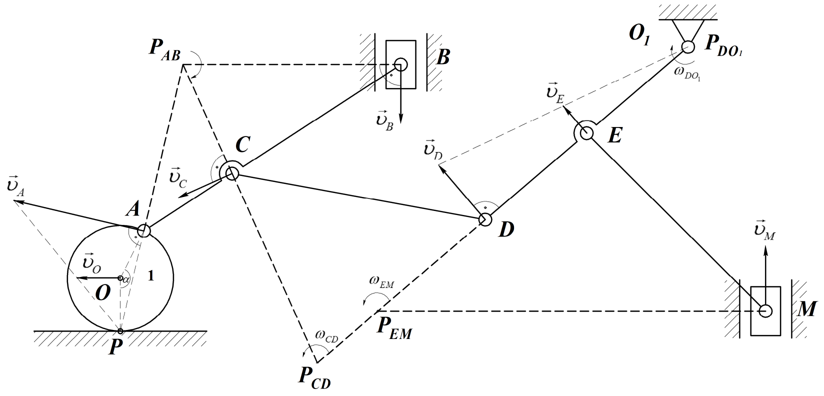


по вертикальным направляющим. Скорость ползуна B известна по линии действия. Направляем скорость $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ по вертикали. Определяем положение МЦС звена AB – P_{AB}, который находится на пересечении перпендикуляров восстановленных в точках A и B к скоростям $\vec{\upsilon}_{A}$ и $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$. Определяем угловую скорость звена AB: $\omega_2 = \dfrac{\upsilon_{\grave{A}}}{\grave{A}\text{Ð}_{\grave{A}\hat{A}}}$. Ее направление определяется направлением линейной скорости точки A (по часовой стрелке). Определяем линейную скорость точки B по модулю: $\upsilon_{\hat{A}} = \omega_2 \cdot \hat{A}\text{Ð}_{AB}$; и проверяем направление скорости $\vec{\upsilon}_{\hat{A}}$ (перпендикулярно отрезку BP_{AB} в сторону угловой скорости звена ω_2). Точка C принадлежит звену AB, поэтому ее скорость можно определить $\upsilon_C = \omega_{AB} \cdot CP_{\grave{A}\hat{A}}$.

3.



3. Для определения угловой скорости звена *CD* определим положение мгновенного центра скоростей этого звена - $Đ_{ÑD}$. Точка *D* находится на звене *DO₁* и для него МЦС находится в точке *O₁*. Скорость точки *D* направлена перпендикулярно звену *DO₁*. Восстанавливаем перпендикуляры в точках *C* и *D* к скоростям $\vec{\upsilon}_C$ и $\vec{\upsilon}_D$ на пересечении получаем МЦС звена *CD* точку $Đ_{CD}$. Определяем угловую скорость звена *CD* по модулю: $\omega_{CD} = \dfrac{\upsilon_{Ñ}}{ÑĐ_{ÑÂ}}$ и по направлению – против часовой стрелки. Определяем скорость точки *D* по модулю: $\upsilon_D = \omega_{CD} \cdot DP_{ÑD}$ и проверяем направление – в сторону угловой скорости вращения звена *CD* - ω_{CD}. Определяем угловую скорость звена *DO₁*: $\omega_{DO_1} = \dfrac{\upsilon_D}{DP_{DO_1}}$. Угловая скорость звена направлена по часовой стрелке. Скорость точки *E* можно определить так как положение МЦС звена DO_1 известно: $\upsilon_E = \omega_{DO_1} \cdot EP_{DO_1}$

4 	**4.** Ползун M совершает поступательное движение по вертикали, то есть его скорость по линии действия известна. Для определения МЦС звена *EM* восстанавливаем перпендикуляры к скоростям $\vec{\upsilon}_E$ и $\vec{\upsilon}_M$ двух известных точек *E* и *M*. На пересечении получаем точку P_{EM} -МЦС звена *EM*. Определяем угловую скорость звена *EM*: $\omega_{EM} = \dfrac{\upsilon_E}{EP_{EM}}$. Угловая скорость звена направлена против часовой стрелки. Определяем скорость точки *M* по модулю и по направлению: $\upsilon_M = \omega_{EM} \cdot MP_{EM}$. Схема будет иметь вид, представленный на чертеже в пункте 4 таблицы.

3. **Определение ускорений при плоскопараллельном движении**

3.1. Вычисление ускорений через полюс.

а) **Определение:**

Полюсом при вычислении ускорений может считаться любая точка, ускорение которой в данный момент известно (или его можно легко найти).

б) **Основные формулы:**

По теореме о разложении плоского движения оно является совокупностью поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса, поэтому:

ускорение любой точки плоской фигуры геометрически складывается из ускорения поступательного движения какой-либо точки, принимаемой за полюс и ускорения этой точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.

Ускорение вращательного движения точки при вращении плоской фигуры вокруг полюса состоит из нормального (центростремительного) ускорения и касательного (тангенциального) ускорения. Примем точку A за полюс, тогда можно записать:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^{\text{âð}}, \qquad (11)$$

или, учитывая, что

$$\vec{a}_{B/\grave{A}}^{\text{âð.}} = \vec{a}_{B/A}^{n} + \vec{a}_{B/A}^{\tau}$$

получим:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^{n} + \vec{a}_{B/A}^{\tau}; \qquad (12)$$

Формула (12) называется **формулой Ривальса,** которая вместе с формулой (1) составляет математическую основу модели плоскопараллельного движения твердого тела.

Для любой другой точки аналогично:

$$\vec{a}_K = \vec{a}_A + \vec{a}_{K/A}^{\text{âð}}$$

$$\vec{a}_K = \vec{a}_A + \vec{a}_{K/A}^{n} + \vec{a}_{K/A}^{\tau} \qquad (13)$$

где нормальное ускорение всегда известно по модулю и по направлению (направлено по звену к полюсу A). Модули нормального ускорения:

$$\left|\vec{a}_{B/A}^{n}\right| = \omega_{AB}^2 AB; \ \left|\vec{a}_{K/A}^{n}\right| = \omega_{AB}^2 AK; \qquad (14)$$

Если известно угловое ускорение звена по величине и направлению, то касательное ускорение точки направлено перпендикулярно нормальному ускорению в сторону углового ускорения ε.

$$\left|\vec{a}^{\tau}_{B/A}\right| = \varepsilon_{AB} AB\,; \quad \left|\vec{a}^{\tau}_{K/A}\right| = \varepsilon_{AB} AK\,. \qquad (15)$$

Так как угловая скорость ω и угловое ускорение ε звена известны, то для точки C аналогично:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{C/A} + \vec{a}^{\tau}_{C/A}\,,$$

где:

$$\left|\vec{a}^{n}_{C/A}\right| = \omega^2_{AB} AC\,; \left|\vec{a}^{\tau}_{C/A}\right| = \varepsilon_{AB} AC$$

Модуль и направление ускорения точек B, K и C можно найти геометрически построением соответствующего параллелограмма.

Проиллюстрируем полученные равенства (Рис.46):

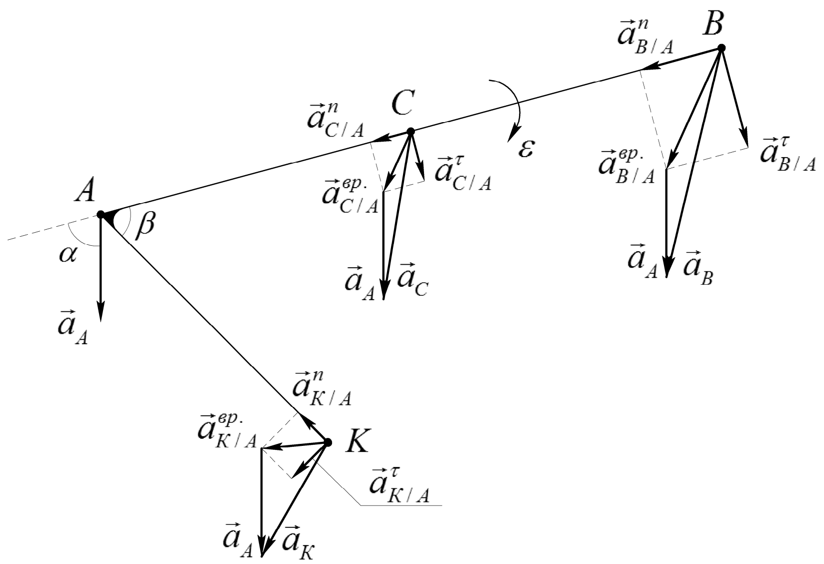


Рис. 46

3.2. **Вычисление ускорения точек методом двукратного проектирования**

Ускорение любой точки можно определить аналитически почленным проектированием уравнений (12), (13) на две взаимно перпендикулярные оси координат. Удобно одну ось направлять по звену (так как нормальное ускорение направлено по звену к полюсу), другую перпендикулярно звену (по линии действия касательного ускорения).

Пусть известно линейное ускорение полюса по величине и по направлению. Будем считать, что известна угловая скорость тела или звена $\omega_{çâ.}$, угловое ускорение тела или звена $\varepsilon_{\text{çâ.}}$ (то есть известны нормальные и касательные ускорения по величине и по направлению). Ускорение искомой точки, не известно ни по величине, ни по направлению, тогда, спроектировав (12), на оси координат «*x*» и «*y*» получим (Рис.47):

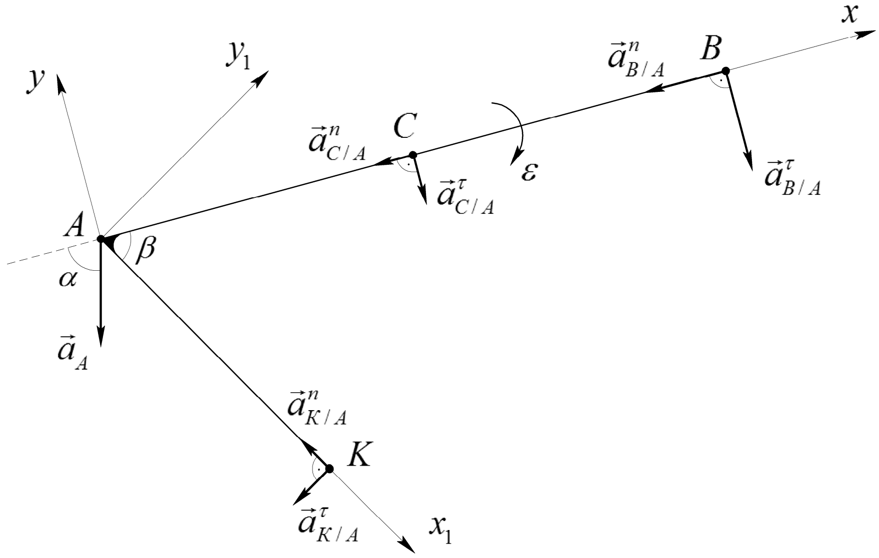


Рис.47

$$a_{BX} = a_{AX} + (a^n_{B/A})_X + (a^\tau_{B/A})_X = -a_A \cos\alpha - a^n_{B/A};$$

$$a_{BY} = a_{AY} + (a^n{}_{B/A})_Y + (a^\tau{}_{B/A})_Y = -a_A \sin\alpha - a^\tau{}_{B/A};$$

$$a_B = \sqrt{a^2_{BX} + a^2_{BY}}$$

Направление вектора ускорения найдем по направляющим косинусам:

$$\cos(\vec{a}_B \wedge OX) = \frac{a_{BX}}{a_B};\ \cos(\vec{a}_B \wedge OY) = \frac{a_{BY}}{a_B};$$

Для определения ускорения точки *K*, введем новые координатные оси X_1 и Y_1 (Рис.47). Спроектировав уравнение (13) на эти оси координат получим:

$$a_{KX_1} = a_{AX_1} + (a^n_{K/A})_{X_1} + (a^\tau_{K/A})_{X_1} = a_A \cos(90^0 - \alpha) - a^n_{K/A};$$

$$a_{KY_1} = a_{AY_1} + (a^n{}_{K/A})_{Y_1} + (a^\tau{}_{K/A})_{Y_1} = -a_A sin(90^0 - \alpha) - a^\tau{}_{K/A};$$

$$a_K = \sqrt{a^2_{KX_1} + a^2_{KY_1}}$$

Направление вектора ускорения найдем по направляющим косинусам:

$$\cos(\vec{a}_K \wedge OX_1) = \frac{a_{KX_1}}{a_K}; \;\; \cos(\vec{a}_K \wedge OY_1) = \frac{a_{KY_1}}{a_B};$$

Для любой другой точки, (например, *C*) аналогично (Рис.47): Спроектировав уравнение (16) почленно на две взаимно перпендикулярные оси координат, получим:

$$a_{\tilde{N}X} = a_{AX} + (a^n_{\tilde{N}/A})_X + (a^\tau_{\tilde{N}/A})_X = -a_A \cos\alpha - a^n_{\tilde{N}/A};;$$

$$a_{CY} = a_{AY} + (a^n{}_{C/A})_Y + (a^\tau{}_{C/A})_Y = -a_A \sin\alpha - a^\tau{}_{\tilde{N}/A};;$$

$$a_{\tilde{N}} = \sqrt{a^2_{CX} + a^2_{CY}}\,.$$

3.3. **Вычисление ускорений методом однократного проектирования.**

Этот метод применяется, в том случае, когда известно направление линейного ускорения точки, а также известна угловая скорость тела (или звена) - $\omega_{зв.}$, но не известно угловое ускорение звена - $\varepsilon_{\c{c}\hat{a}.}$ (Рис.48).

Тогда:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{B/A} + \vec{a}^\tau_{B/A}$$

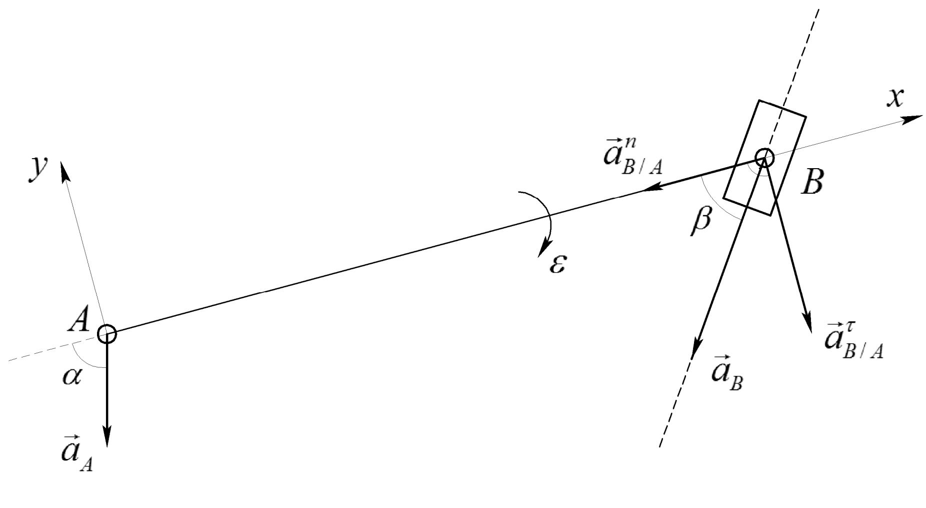


Рис. 48

Ускорение точки *B* известно по направлению (вектор $\vec{a}_B$ направляем произвольно по линии движения ползуна, истинное направление покажут расчёты).

Будем проектировать векторное уравнение (12) на ось перпендикулярную касательному ускорению $\vec{a}^{\tau}_{B/A}$ (т.е. на ось «x», совпадающую со звеном AB). Получим:

$$-a_B \cos\beta = -a_A \cos\alpha - a^n_{B/A} + 0,$$

отсюда: $a_B = \dfrac{1}{\cos\beta}\left(a_A \cos\alpha + a^n_{B/A}\right)$

Если при вычислениях получен в ответе знак «минус», то это означает, что ускорение точки B - $\vec{a}_B$ направлено в сторону противоположную обозначенному направлению на чертеже.

3.4. **Вычисление углового ускорения, если направление и модуль углового ускорения тела или звена неизвестно.**

Для определения углового ускорения, спроектируем уравнение (12)на ось «y» (Рис. 48) получим:

$$-a_B \sin\beta = -a_A \sin\alpha + 0 - a^{\tau}_{B/A}.$$

Отсюда:

$$a^{\tau}_{B/A} = a_B \sin\beta - a_A \sin\alpha.$$

Зная алгебраическое значение $a^{\tau}_{B/A}$, определим угловое ускорение звена AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a^{\tau}_{B/A}}{AB}.$$

Если при подстановке численных значений касательное ускорение $a^{\tau}_{B/A}$ получилось со знаком минус, то оно направлено в сторону, противоположную обозначенному направлению на чертеже.

Если требуется найти ускорения нескольких точек, то за полюс необходимо брать одну и ту же точку.

Пример 16

Линейка AB длиной l=*40 см*. движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени ускорение точки A $\grave{a}_{\hat{A}}$=*40 см/с*^{2} и совпадает с направлением AB. Определить ускорение точки B, если ω=*1 рад/с*; ε =*0,5 рад/с*^{2}.

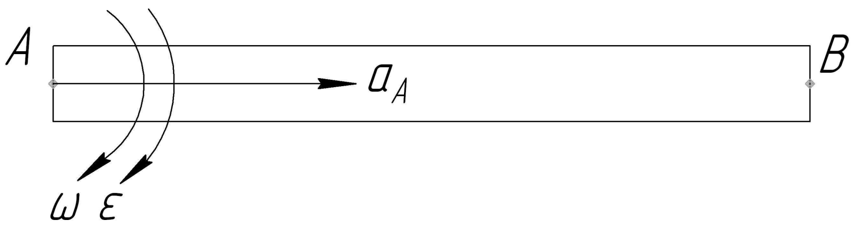


Рис.49

Решение:

Выбираем за полюс точку A, тогда: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{BP}_{B/A}$,

учитывая, что $\vec{a}^{BP}_{B/A} = \vec{a}^{n}_{B/A} + \vec{a}^{\tau}_{B/A}$, получим $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{B/A} + \vec{a}^{\tau}_{B/A}$.

Нормальное ускорение всегда известно по модулю и направлению (направлено к полюсу, т.е. к точке A) и по модулю равно:

$a^{n}_{B/A} = \omega^2 \cdot AB$=$1 \cdot 40$=40 см/с^2.

Касательное ускорение направлено в сторону углового ускорения, перпендикулярно нормальному ускорению и по модулю равно: $a^{\tau}_{B/A} = \varepsilon \cdot AB$=$0,5 \cdot 40$=20 см/с^2;

Введём координатные оси и покажем направления ускорений (Рис.50):

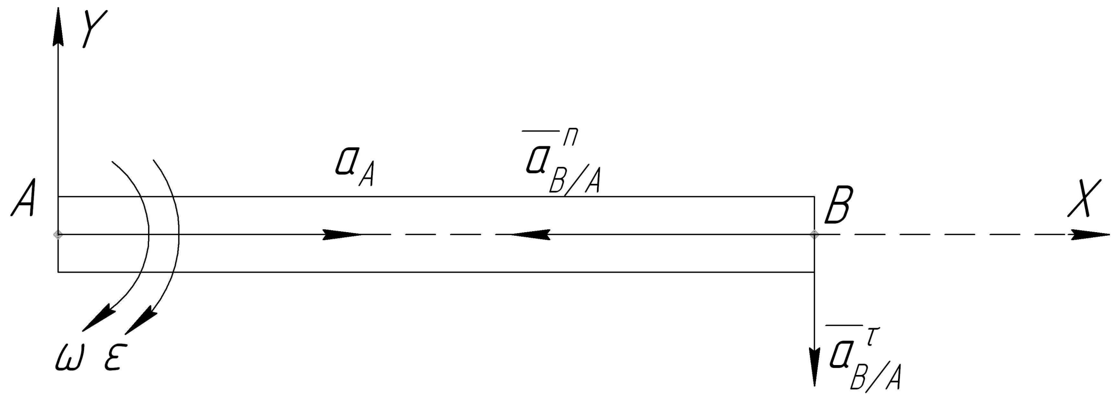


Рис.50

Спроектируем векторное равенство на координатные оси X и Y:

$$a_{BX} = a_A - a^{n}_{B/A} = 40 - 40 = 0 см/c^2$$

$$a_{BY} = -a^{\tau}_{B/A} = -20 см/c^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{BX}^{\ 2} + a_{BY}^{\ 2}} = 20 см/c^2$$

Пример 17 (18.26[9])

Груз *1*, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой *2*, опускается вертикально вниз по закону $x=t^2$ *м*. При этом катушка *2* катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить скорости точек *C*, *A*, *B*, *O* и *E* катушки в момент времени $t = 1$ *с* в положении, указанном на рис. 44, а также угловую скорость катушки, если $AD \perp CE$, $CD=2OC=0,2$ *м*.

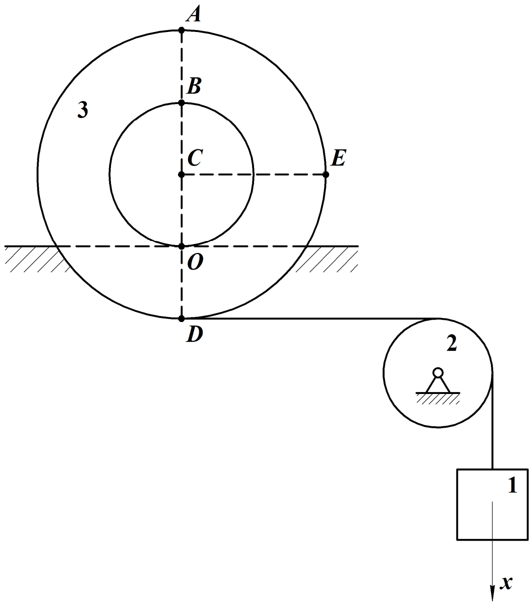


Рис.51

Решение:

По заданному условием задачи закону движения груза *1*, определяем его скорость (см. пример 15, Рис. 44).

$$\upsilon_1 = \frac{dx}{dt} = 2t \ \textit{м/с}$$

Скорость точки *D*, общей для нити и катушки, направлена вдоль нити и, поскольку нить считается нерастяжимой, имеет модуль, равный модулю скорости груза

$$\upsilon_1 = \upsilon_D$$

Движение катушки плоское (катушка движется в плоскости рисунка). По условию задачи катушка катится без скольжения. Установив положение мгновенного центра скоростей, который находится в точке касания катушки и неподвижного рельса (то есть, в точке O) по известной скорости точки D находим угловую скорость и угловое ускорение катушки:

$$\omega = \frac{\upsilon_D}{DP} = \frac{2t}{0,1} = 20t \ c^{-1}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(20t)}{dt} = 20 \ c^{-2}$$

Отсюда при $t = 1\ c$ получим:

$$\omega = 20 \ c^{-1}$$

В качестве полюса выберем центр катушки C, который движется по прямолинейной траектории. Скорость центра катушки:

$$\upsilon_C = \omega \cdot CP = 20t \cdot r = 20t \cdot 0,1 = 2t \ м/с$$

Вектор ускорения точки C направлен вдоль этой траектории (Рис.52), а его модуль определяем с помощью выражения:

$$a_C = \frac{d\upsilon_C}{dt} = 2 \ м/с^2.$$

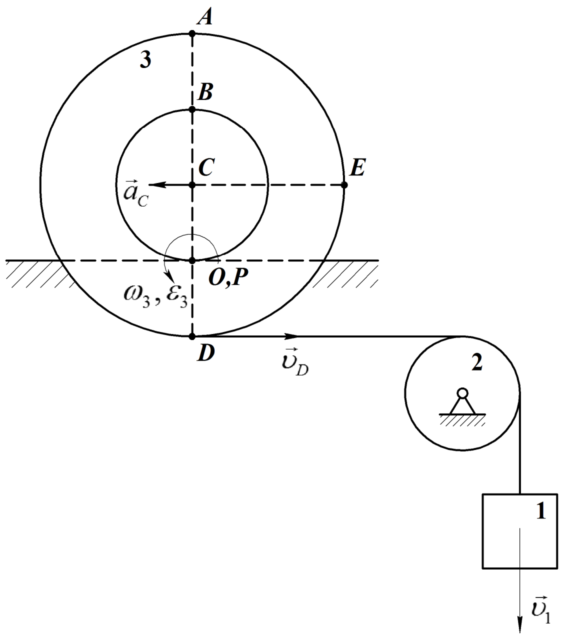


Рис.52

Ускорения точек A, B, D, O и E определим с помощью общей формулы ускорений. Для ускорения точки A запишем:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{n}_{A/C} + \vec{a}^{\tau}_{A/C}.$$

Учитывая полученные значения угловой скорости и углового ускорения катушки, находим значения нормального и касательного ускорений:

$$a^n_{A/C} = \omega^2 \cdot R = 20^2 \cdot 0,2 = 80 \text{ м/с}^2; \; a^\tau_{A/C} = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 0,2 = 4 \text{ м/с}^2.$$

Спроектировав векторное равенство на координатные оси x и y, получим (Рис.53):

$$a_{AX} = -a_C - a^\tau_{A/C} = -2 - 4 = -6 \text{ м/с}^2$$

$$a_{AY} = -a^n_{A/C} = -80 \text{ м/с}^2$$

$$a_A = \sqrt{{a_{AX}}^2 + {a_{AY}}^2} = 80,22 \text{ м/с}^2$$

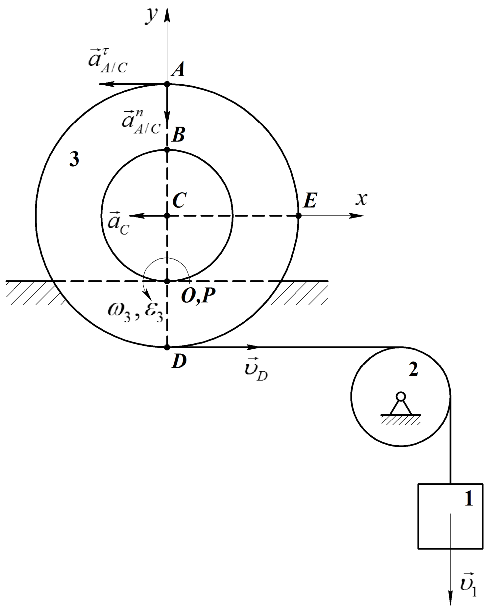


Рис.53

Повторяя описанное решение для точек *B, E, O* и *D* будем иметь

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{B/A} + \vec{a}^\tau_{B/A},$$

где:

$$a^n_{B/C} = \omega^2 \cdot r = 20^2 \cdot 0,1 = 40 \text{ м/с}^2$$

$$a^\tau_{B/C} = \varepsilon \cdot r = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ м/с}^2$$

Проекции на координатные оси (Рис.54):

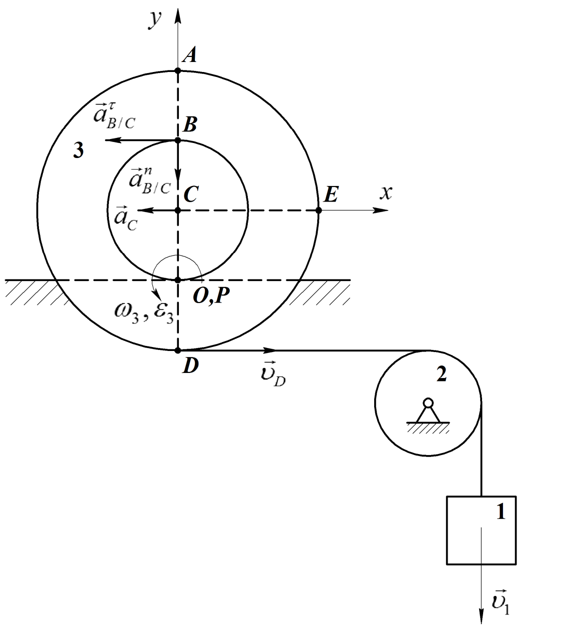


Рис.54

$$a_{BX} = -a_{\tilde{N}} - a^{\tau}_{B/\tilde{N}} = -2-2 = -4\grave{i}\ /\tilde{n}^2$$

$$a_{BY} = -a^{n}_{B/C} = -40\grave{i}\ /\tilde{n}^2$$

$$\grave{a}_B = \sqrt{{a_{BX}}^2 + {a_{BY}}^2} = 40,2\grave{i}\ /\tilde{n}^2$$

Для точки *E* (Рис.55):

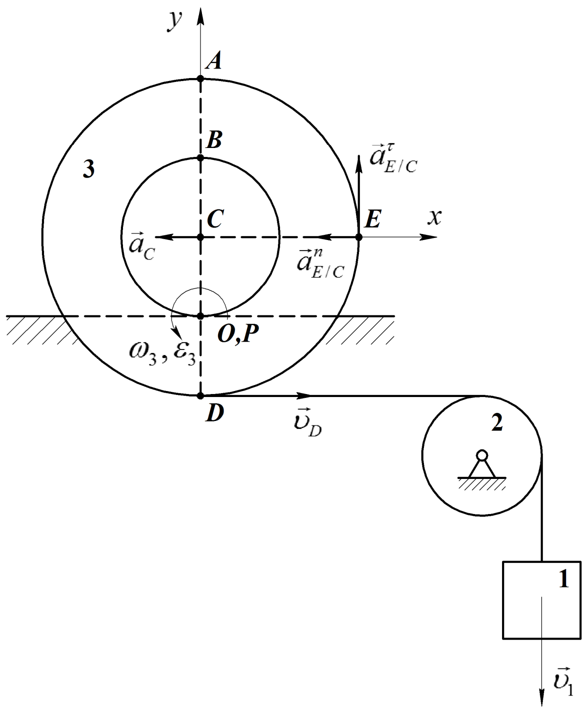


Рис.55

$\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}^{\ddot{i}}_{E/C} + \vec{a}^{\tau}_{E/C}$

где:

$$a^n_{E/C} = \omega^2 \cdot R = 20^2 \cdot 0,2 = 80 \ м/с^2$$

$$a^\tau_{E/C} = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 0,2 = 4 \ м/с^2$$

Проекции на оси координат:

$$a_{EX} = -a_{\tilde{N}} - a^n_{E/\tilde{N}} = -2 - 80 = -82\grave{\imath}\ /\tilde{n}^2$$

$$a_{EY} = a^\tau_{E/C} = 4\grave{\imath}\ /\tilde{n}^2$$

$$\grave{a}_E = \sqrt{a_{AX}{}^2 + a_{AY}{}^2} = 82,1\grave{\imath}\ /\tilde{n}^2$$

Для точки O, совпадающей с мгновенным центром скоростей катушки (Рис.56):

$\vec{a}_O = \vec{a}_C + \vec{a}^{\ddot{\imath}}_{O/C} + \vec{a}^\tau_{O/C}$,

где:

$$a^n_{O/C} = \omega^2 \cdot r = 20^2 \cdot 0,1 = 40 \ м/с^2$$

$$a^\tau_{O/C} = \varepsilon \cdot r = 20 \cdot 0,1 = 2 \ м/с^2$$

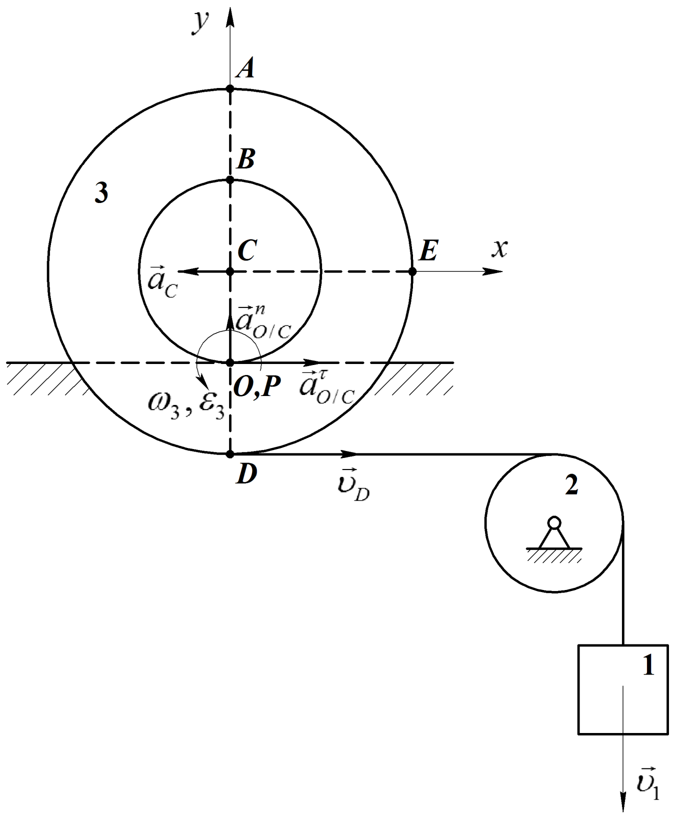


Рис.56

Проекции на оси координат:

$$a_{OX} = a_{\tilde{N}} - a^{\tau}_{O/\tilde{N}} = 2 - 2 = 0\grave{\imath}\ \ /\tilde{n}^2$$
$$a_{OY} = a^{n}_{O/C} = 40\grave{\imath}\ \ /\tilde{n}^2$$
$$\grave{a}_O = \sqrt{{a_{OX}}^2 + {a_{OY}}^2} = 40\grave{\imath}\ \ /\tilde{n}^2$$

Для точки D:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\ddot{\imath}}_{D/C} + \vec{a}^{\,\tau}_{D/C}$$

где:

$$a^{n}_{D/C} = \omega^2 \cdot R = 20^2 \cdot 0,2 = 80\ \text{м/с}^2$$
$$a^{\tau}_{D/C} = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 0,2 = 4\ \text{м/с}^2$$

Проекции на оси координат (Рис.57):

$$a_{DX} = -a_{\tilde{N}} + a^{\tau}_{D/\tilde{N}} = -2 + 4 = 2\grave{\imath}\ \ /\tilde{n}^2$$
$$a_{DY} = a^{n}_{D/C} = 80\grave{\imath}\ \ /\tilde{n}^2$$
$$\grave{a}_D = \sqrt{{a_{DX}}^2 + {a_{DY}}^2} = 80,1\grave{\imath}\ \ /\tilde{n}^2$$

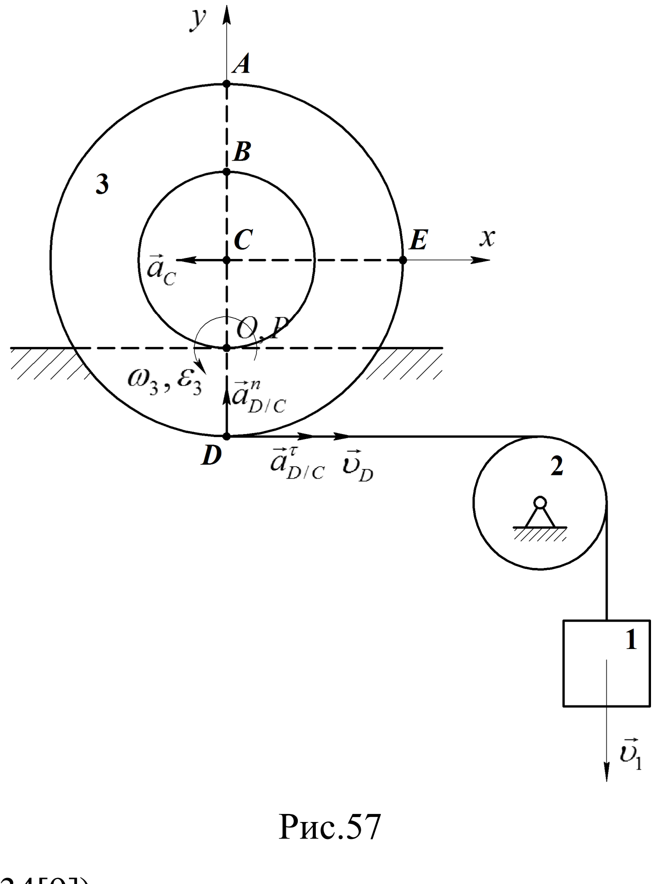


Рис.57

Пример 18 (18.34[9])

Ускорения концов однородного стержня *AB* длины *12 см*, совершающего плоскопараллельное движение, перпендикулярны *AB* и направлены в одну сторону, причем a_A=*24 см/с^2*, a_B=*12 см/с^2*. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня, а также ускорение его центра тяжести *С*.

Решение:

Для решения задачи используем общую формулу плоского поля ускорений.

Выбираем за полюс точку *А*, тогда: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{BP}_{B/A}$, учитывая, что,

$\vec{a}^{BP}_{B/A} = \vec{a}^{n}_{B/A} + \vec{a}^{\tau}_{B/A}$

получим:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{B/A} + \vec{a}^{\tau}_{B/A}.$$

Нормальное (центростремительное) ускорение направлено к полюсу, т.е. к точке *А* и по модулю равно: $a^{n}_{B/A} = \omega^2 \cdot AB$;

где ω - мгновенная угловая скорость стержня.

Касательное ускорение направлено в сторону углового ускорения Е, перпендикулярно нормальному ускорению и по модулю равно: $a^{\tau}_{B/A} = \varepsilon \cdot AB$.

Введём координатные оси и покажем направления ускорений, (так как направление углового ускорения нам не известно, то вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{\hat{A}/\grave{A}}$ направляем перпендикулярно нормальному ускорению в любую сторону) (Рис.58):

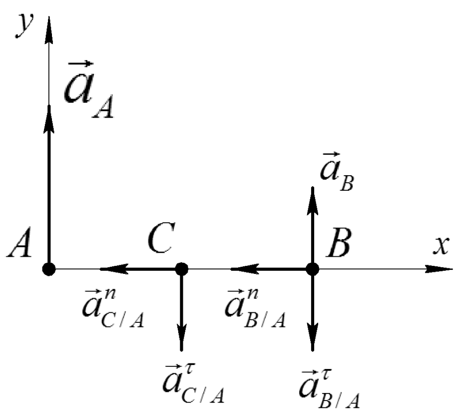


Рис.58

Спроектировав векторное уравнение на оси координат *x* и *y*, получим:

$$x: 0 = -a^{n}_{B/A};$$

$$y: a_B = a_A - a^{\tau}_{B/A}.$$

В результате:

$$\omega = 0; \;\; a^{\tau}_{B/A} = a_A - a_B = 24 - 12 = 12 \;\; см/с^2.$$

Зная касательное ускорение, определяем угловое ускорение звена AB:

$$\varepsilon = \frac{a^{\tau}_{B/A}}{AB} = \frac{12}{12} = 1 \;\; c^{-2}.$$

По известным значениям угловой скорости и углового ускорения стержня можно найти ускорение любой его точки. Записываем общую формулу плоского поля ускорений для ускорения точки C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{C/A} + \vec{a}^{\,\tau}_{C/A},$$

где: нормальное ускорение при вращательном движении точки C вокруг точки A $a^n_{C/A} = 0$, так как угловая скорость звена AB равна нулю. Касательное ускорение при вращательном движении точки C вокруг точки A $a^{\tau}_{C/A} = \varepsilon \cdot AB = 1 \cdot 6 = 6 \;\; см/с^2$.

Проектируя равенство (26) на координатные оси, получим:

$a_{Cx} = -a^n_{C/A} = 0$;

$a_{Cy} = a_A - a^{\tau}_{C/A} = 24 - 6 = 18 \;\; см/с^2$.

Получили ускорение точки C:

$a_C = \sqrt{a^2_{Cx} + a^2_{Cy}}$

$a_C = 18 \; см/с^2$.

Направление можно определить по направляющим косинусам.

3.5. **Вычисление ускорений через мгновенный центр ускорений (МЦУ)**

а) **Определение:**

При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений (МЦУ). Обозначается МЦУ – Q.

б) **Основные формулы:**

Пусть точка Q – полюс. Тогда, записав теорему о сложении ускорений при плоском движении, получим (Рис.59):

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}^n_{M/Q} + \vec{a}^\tau_{M/Q}; \tag{16}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}^n_{A/Q} + \vec{a}^\tau_{A/Q}; \tag{17}$$

где:

$$a^n_{M/Q} = \omega^2 \cdot QM \,;\; a^\tau_{M/Q} = \varepsilon \cdot QM \,; \tag{18}$$

$$a^n_{A/Q} = \omega^2 \cdot AQ;\; a^\tau_{A/Q} = \varepsilon \cdot AQ; \tag{19}$$

В формулах (18) и (19) ω - мгновенная угловая скорость плоской фигуры; Е - мгновенное угловое ускорение плоской фигуры.

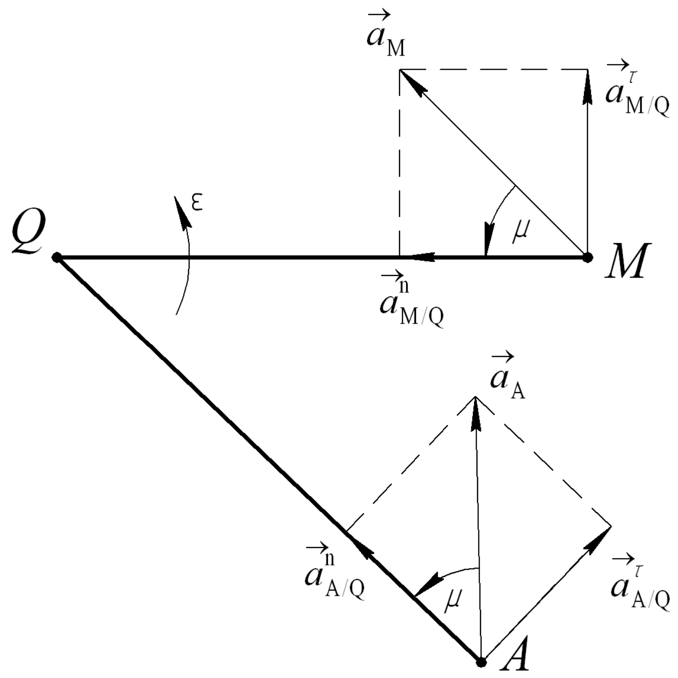


Рис. 59

Так как. по определению ускорение мгновенного центра ускорений $a_Q = 0$, то ускорение точек A и M можно определить по теореме Пифагора:

$$|a_M| = \sqrt{\left(a^n_{M/Q}\right)^2 + \left(a^\tau_{M/Q}\right)^2} = \sqrt{\omega^4 \cdot QM^2 + \varepsilon^2 \cdot QM^2} = QM \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,; \tag{20}$$

$$|a_A| = \sqrt{\left(a^n_{A/Q}\right)^2 + \left(a^\tau_{A/Q}\right)^2} = \sqrt{\omega^4 \cdot QA^2 + \varepsilon^2 \cdot QA^2} = QA \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,; \tag{21}$$

Для любой другой точки тела или звена получим аналогичные равенства.

Выводы:

1. **Ускорение любой точки плоской фигуры можно определить как сумму двух векторов: нормального и касательного, которая представляет собой ускорение плоской фигуры во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений. Ускорение любых точек тела прямо пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений.**

Для произвольной точки M:

$$\vec{a}_M = \vec{a}^{n}_{M/Q} + \vec{a}^{\tau}_{M/Q},$$

Модуль ускорения:

$$a_M = QM \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2};$$

Для произвольной точки A:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A/Q} + \vec{a}^{\tau}_{A/Q};$$

Модуль ускорения:

$$a_A = QA \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

2. **Отношения модулей ускорений любых точек тела к их расстояниям до мгновенного центра ускорений одинаковы для всех точек тела:**

$$\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = \frac{|a_A|}{QA} = \frac{|a_M|}{QM} = \ldots \tag{22}$$

3. **Угол наклона вектора абсолютного ускорения точки к расстоянию от этой точки до МЦУ не зависит от выбора точки тела, т.е. все ускорения точек одинаково наклонены к расстоянию от точки до МЦУ.**

$$tg\,\mu = \frac{|a^{\tau}_{M/Q}|}{|a^{n}_{M/Q}|} = \frac{|a^{\tau}_{A/Q}|}{|a^{n}_{A/Q}|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{23}$$

в) **Методы определения МЦУ.**

1. Если $\omega = 0$, а $\varepsilon \neq 0$, это означает, что $a^n = 0$, а $a^\tau \neq 0$ и ускорение $a = a^\tau$, то МЦУ будет лежать на пересечении перпендикуляров к ускорениям двух точек (Рис.60).

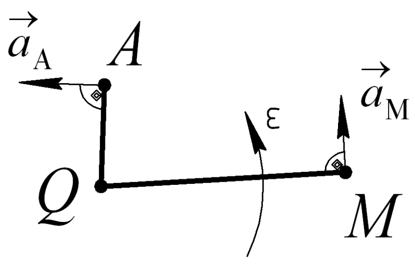


Рис. 60

2. Если $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$, то $a^{\tau} = 0$ $a^{n} \neq 0$ и абсолютное ускорение $a = a^{n}$, то ускорения всех точек плоской фигуры направлены к мгновенному центру ускорений и МЦУ будет лежать на пересечении самих ускорений двух точек (Рис.61).

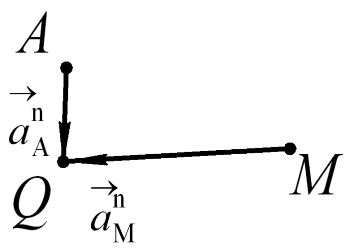


Рис. 61

Если $\varepsilon \neq 0$, $\omega \neq 0$, то $a^{\tau} \neq 0$ $a^{n} \neq 0$, то, кроме угловой скорости ω и углового ускорения Е должны быть известны направления ускорений точек *A* и *M* – $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_M$, а также угол наклона вектора абсолютного ускорения точки к расстоянию от этой точки до МЦУ - $tg\mu = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ или $\mu = arctg\left(\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\right)$; тогда МЦУ лежит на пересечении прямых проведенных под углом $\boldsymbol{\mu}$ к ускорениям (Рис.62).

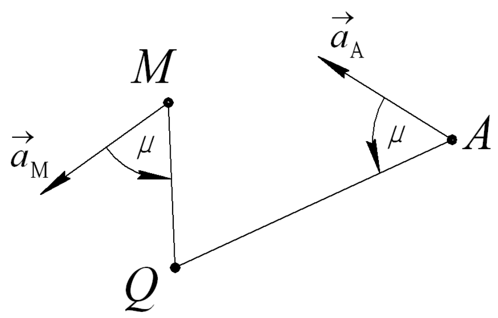


Рис. 62

4. Пусть известно ускорение какой-нибудь точки и по величине и по направлению (например точки А - $\vec{a}_A$), а также известно, что $\varepsilon \neq 0$, $\omega \neq 0$. Оп-

ределим $tg\mu = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ и расстояние $QA = \dfrac{|a_A|}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$; то есть МЦУ находится на расстоянии QA от точки A под углом μ к ускорению $\vec{a}_A$ (Рис.63).

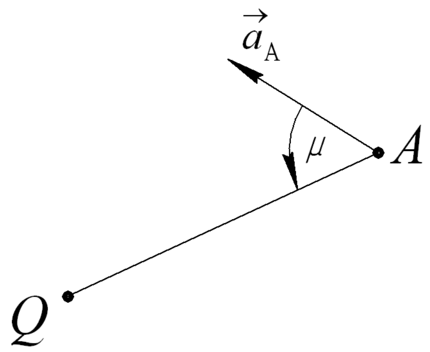


Рис. 63

5. Общий случай.

Известны ускорения двух точек A и M по величине и по направлению, известна длина отрезка AM, но не известны угловая скорость ω и угловое ускорение ε. Необходимо определить положение мгновенного центра ускорений, а также угловую скорость и угловое ускорение звена AB.

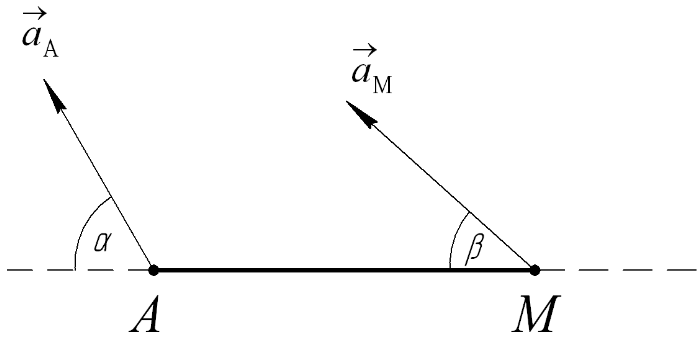


Рис. 64

Любую точку (A или M) берем за полюс. Будем считать, что точка A полюс. Тогда, ускорение точки M может быть определено с помощью формулы распределения ускорений (Рис.64):

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{M/A} + \vec{a}^{\,\tau}_{M/A};$$

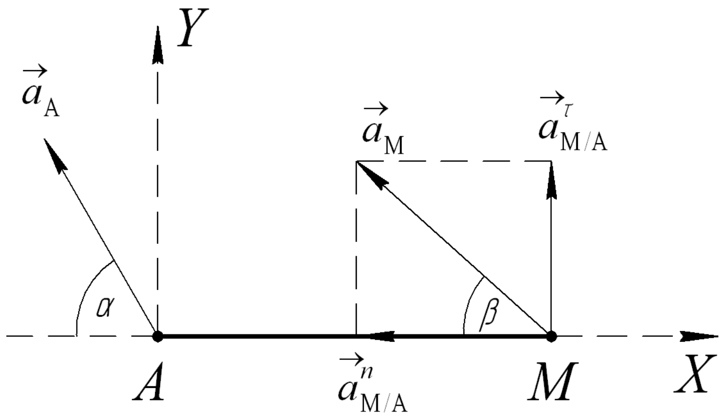


Рис. 65

Спроектируем это векторное равенство на координатные оси X и Y (Рис.65).

Получим:

- проекция на ось X:

$$X: -a_M \cdot \cos\beta = -a_A \cdot \cos\alpha - a^n_{M/A};$$

Отсюда:

$$a^n_{M/A} = a_M \cdot \cos\beta - a_A \cdot \cos\alpha;$$

Из этого выражения определим угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{a^n_{M/A}}{AM}}.$$

- проекция на ось Y:

$$Y: a_M \cdot \sin\beta = a_A \cdot \sin\alpha + a^\tau_{M/A};$$

Отсюда:

$$a^\tau_{M/A} = a_M \cdot \sin\beta - a_A \cdot \sin\alpha;$$

Из этого выражения определим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{a^\tau_{M/A}}{AM},$$

а значит определяем $tg\mu = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Откладываем под углом μ отрезки к направлениям ускорений $\vec{a}_M$ и $\vec{a}_A$. Пересечение этих прямых и является мгновенным центром ускорений Q (Рис.66).

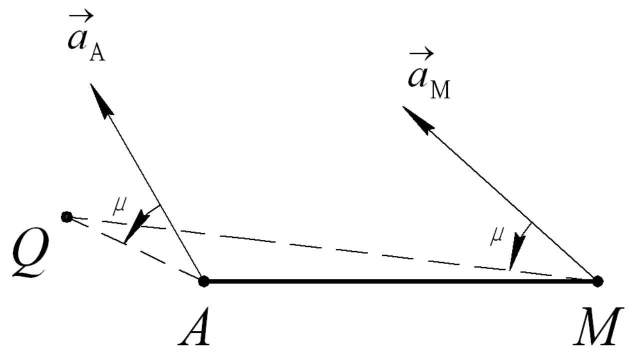


Рис. 66

6. Определение положения мгновенного центра ускорений в случае, когда ускорения точек плоской фигуры параллельны между собой.

Положение мгновенного центра ускорений – Q определяется в этом случае на основании следующего:

- ускорения точек пропорциональны длинам отрезков, соединяющих точки с МЦУ, то есть:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}.$$

- ускорения точек составляют с отрезками, соединяющими точки один и тот же угол:

$$\mu = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Возможны несколько случаев:

1. Известны угловая скорость $\omega \neq 0$, угловое ускорение $\varepsilon \neq 0$, угол наклона вектора абсолютного ускорения точки к расстоянию от этой точки до МЦУ острый, то есть изменяется в пределах $0 < \mu < 90^0$.

Положение МЦУ в этом случае определяется построением, приведенным на рис 67 и рис.68:

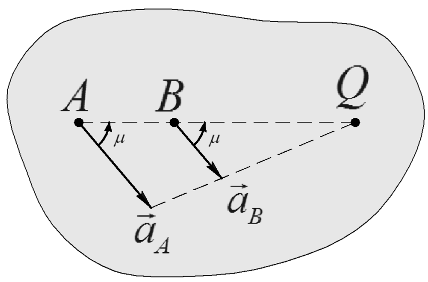


Рис. 67

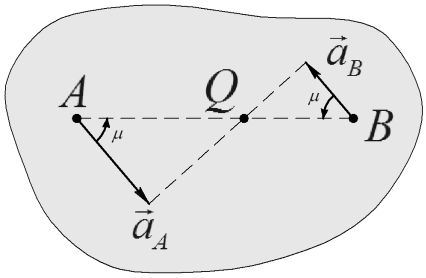


Рис.68

2. Известны угловая скорость $\omega = 0$, угловое ускорение $\varepsilon \neq 0$, угол наклона вектора абсолютного ускорения точки к расстоянию от этой точки до МЦУ прямой, то есть $\mu = 90^0$, тогда: $tg\mu = \infty$

Положение МЦУ в этом случае определяется построением, приведенным на рис 69 и рис.70:

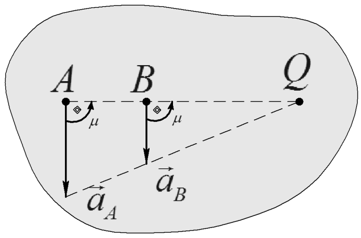


Рис. 69

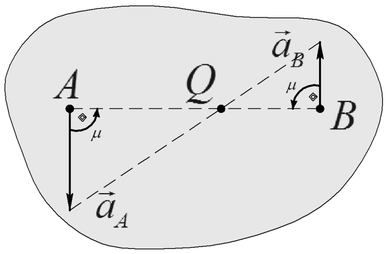


Рис.70

3. Известны ускорения двух точек *A* и *B* равные по модулю и одинаковые по направлению. Положение МЦУ в этом случае определяется построением, приведенным на рис.73. В этом случае МЦУ находится в бесконечности. Распределение ускорений будет таким же, как при поступательном движении.

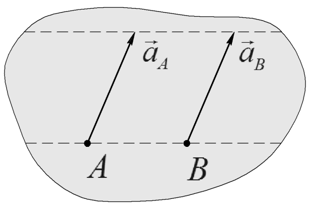


Рис.71

Пример 19 (18.34[9])

Ускорения концов однородного стержня *AB* длины 12 *см*, совершающего плоскопараллельное движение, перпендикулярны *AB* и направлены в одну сторону, причем a_A*=24 см/с*^{2}, a_B*=12 см/с*^{2}. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня, положение мгновенного центра ускорений, а также ускорение его центра тяжести *С*.

Решение:

Находим положение мгновенного центра ускорений, который находится на продолжении отрезка *AB* за точкой *B* (Рис.72).

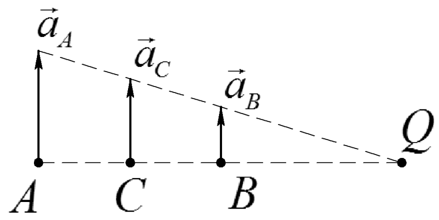


Рис.72

Составим отношение:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}.$$

Подставив значения, получим:

$$\frac{24}{12} = \frac{12 + BQ}{BQ}.$$

Длина отрезка от точки В до МЦУ - *BQ*=12 *см*.

Длина отрезка от точки *A* до МЦУ - *AQ*=24 *см*.

Так как угол наклона вектора абсолютного ускорения точки к расстоянию от этой точки до МЦУ прямой, то $\mu = 90^0$, и $tg\mu = \infty$. Учитывая, что

$\mu = arctg\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, получаем $\omega = 0$.

Используя формулу: $a_A = QA \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, или: $a_A = QA \cdot \varepsilon$.

Определяем угловое ускорение: $\varepsilon = \dfrac{a_A}{QA} = \dfrac{24}{24} = 1\,c^{-1}$.

Для определения ускорения средней точки *C* стержня *AB* находим расстояние от точки *C* до МЦУ. Оно равно: *AC+BC=6+12=18 см*.

Ускорение точки *C*:

$$a_C = QC \cdot \varepsilon$$

$$a_A = 18 \cdot 1 = 18\ см/с^2.$$

***Примечание*:** применение мгновенного центра ускорений связано с трудоемкими методами нахождения его положения, поэтому определение ускорений точек плоской фигуры проще выполнять через полюс.

4. **Практическое занятие по теме «Плоскопараллельное движение».**

Задачей практических занятий является изучение методов расчета типовых задач, а также практическое осмысление основных теоретических положений курса. При решении задач обращается внимание на логику решения, на физическую сущность используемых величин, их размерность. Далее проводится анализ полученного решения, результат сопоставляется с реальными объектами, что вырабатывает у студентов инженерную интуицию.

Под умением применять законы и уравнения при анализе и расчете движений звеньев механизма понимаются следующие умения:

- умение определить вид движения тела ;
- умение по виду движения тел и данным поставленной задачи определить закон (теорему, уравнение, принцип), с помощью которого задачу можно решить.

Перед практическим занятием необходимо разобрать материал, изложенный на лекции и выполнить самостоятельную работу, предусмотренную рабочим планом. Для этого используются: конспект лекций, соответствующие разделы печатных и электронных учебников, ответы на вопросы для самоконтроля знаний. После практического занятия самостоятельно решить рекомендованные задачи и расчетно-графические работы.

Решение любой задачи включает в себя четыре принципиально важных этапа:

- изучение (анализ) содержания задачи, краткая запись условий и требований;
- поиск способа (принципа) решения и составление плана решения;

- осуществление решения, проверка правильности и его оформление;

- обсуждение (анализ) проведенного решения, отбор информации, полезной для дальнейшей работы.

Решить учебную задачу по теоретической механике – значит найти последовательность общих положений механики (законов, формул, определений, правил), использование которых позволяет получить то, что требуется в задаче, - ее ответ.

При решении задач следует:

- определить к какому разделу теоретической механики относится рассматриваемая задача;

- усвоить теоретический материал на изучаемую тему;

- выписать предложенные на лекциях, рекомендованных учебниках и учебных пособиях алгоритмы решения задач на данную тему;

- разобрать задачи, рассмотренные на практических занятиях и имеющиеся в учебниках и пособиях примеры решения задач;

- записать краткое условие задачи;

- определиться с методом решения задачи;

- выписать математическое выражение выбранного метода;

- сделать четкий рисунок в выбранном масштабе, соответствующий условию задачи и методу решения;

- запись уравнений и их решение приводить в буквенном виде, численные значения подставлять в конечные выражения;

- привести таблицу ответов, полученных величин.

В сборниках задач по теоретической механике ([9]) приводятся задачи двух видов: на усвоение учебного материала (стандартные задачи) и активное использование изученного материала. Основная учебная функция упражнений по решению стандартных задач - перевод знаний, усвоенных на уровне воспроизведения, на уровень знаний – умений. Для таких задач имеются способы решения, одни из которых описаны в самих задачниках, другие анализируются на практических занятиях. Решение задач на активное использование изученного материала – нестандартных или проблемных, поисковых, творческих, олимпиадных задач это исследовательская работа студента первокурсника.

4.1. Цель занятия:

-знать разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное;

- уметь определять закон движения какой-либо точки и ее траекторию;

-знать способы определения мгновенного центра скоростей;

-знать определение угловой скорости тела и линейной скорости точек через МЦС;

-знать определение ускорений через полюс;

-знать способы определения мгновенного центра ускорений.

4.2. Вопросы для подготовки к практическому занятию:

1. Задание положения и движения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости. Уравнения движения.

2. Разложение плоскопараллельного движения на составляющие.

3. Кинематические характеристики плоского движения:

3.1. Скорость точки

3.1.1. Теорема о проекциях скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки;

3.1.2. Мгновенный центр скоростей: определение, способы нахождения; нахождение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

3.2. Ускорение точки

3.2.1. Вычисление ускорения через полюс.

3.2.2 Мгновенный центр ускорений: определение, способы нахождения; нахождение ускорений через мгновенный центр ускорений.

4.3. Методические рекомендации к решению задач по теме плоское движение твердого тела.

4.3.1. **Задачи на определение различных кинематических параметров при плоском движении с помощью формулы распределения скоростей ($\vec{\upsilon}_{\hat{A}} = \vec{\upsilon}_{\grave{A}} + \vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth}_{\hat{A}/\grave{A}}$) рекомендуется решать в следующем порядке:**

1) анализируется движение всех звеньев механизма, и определяются те из них, которые совершают плоское движение;

2) выбираем полюс – такую точку плоской фигуры, скорость которой известна или ее можно найти по условию задачи;

3) находим вектор скорости полюса ($\vec{\upsilon}_{\grave{A}}$);

4) изображаем вектор скорости полюса $\vec{\upsilon}_{\grave{A}}$, приложив его в той точке, скорость которой нужно найти по условию задачи;

5) находим скорость искомой точки, получившейся при вращении плоской фигуры вокруг полюса $\vec{\upsilon}^{\hat{a}\eth}_{\hat{A}/\grave{A}}$, который направлен перпендикулярно звену АВ в сторону угловой скорости вращения плоской фигуры;

6) находим величину и направление скорости данной точки либо по теореме косинусов, либо спроектировав векторное равенство формулы распределения скоростей на две взаимно ортогональные оси координат.

4.3.2. **Задачи на определение различных кинематических параметров при плоском движении с помощью нахождения мгновенного центра скоростей рекомендуется решать в следующем порядке (см. пример 20):**

1) анализируется движение всех звеньев механизма, и определяются те из них, которые совершают плоское движение;

2) находится положение мгновенного центра скоростей (МЦС) на пересечении перпендикуляра к скоростям двух известных точек;

3) определяется мгновенная угловая скорость плоской фигуры (звена, совершающего плоское движение);

4) определяются скорости всех точек плоской фигуры как произведение угловой скорости на расстояние от точки до МЦС; (алгоритм решения задач на определение скоростей приведен в пункте 2.4.е) данного пособия).

Пример 20

Тема: **Определение скоростей точек твердого тела при плоском движении.**

Для заданного положения механизма определить скорости точек *A, B, C* и угловые скорости всех его звеньев, если известна угловая скорость кривошипа ω_{OA}.

Дано:

OA = 20 см; AB = 25 см; AD = 50 см: BC = 35 см; ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, $\angle OAD=120^0$, $\angle DOA=45^0$

Найти: υ_A; υ_B; υ_C; υ_D; ω_{AB}; ω_{BC}.

1. Строим схему:

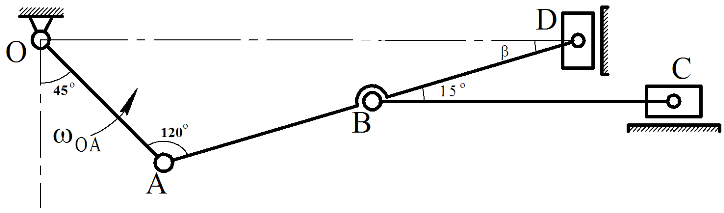


Рис. 73

2. Определяем скорость точки *A*:

$$\upsilon_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с}.$$

3. Определяем мгновенный центр скоростей звена *AD* на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_D$ (Рис.74).

Угол β = 180° – 120° – 45° = 15°.

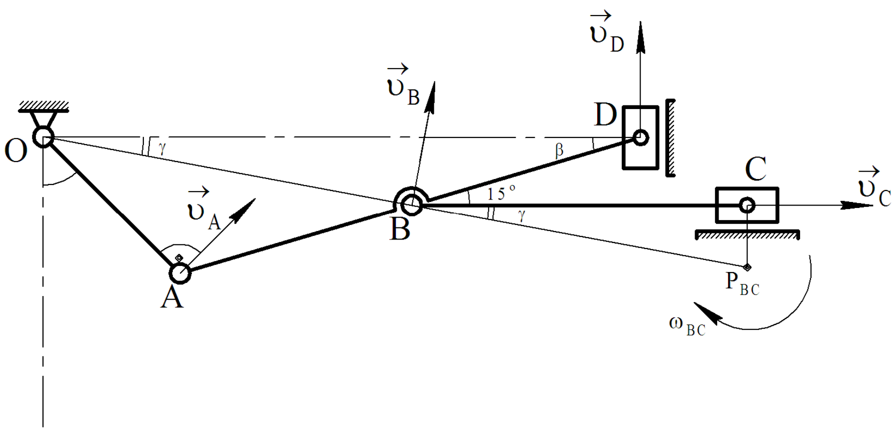


Рис.74

Отрезок *DP* найдем по теореме косинусов:

$$DP_{AD} = \sqrt{OA^2 + AD^2 - 2 \cdot OA \cdot AD \cdot \cos 120^o}\ ;$$

$$DP_{AD} = \sqrt{20^2 + 50^2 - 2 \cdot 20 \cdot 50 \cdot \cos 120^o} = \sqrt{3900} = 62{,}45\,см.$$

Так как получили, что мгновенный центр скоростей звена AD совпадает с точкой O, то угловая скорость звена AD:

$$\omega_{AD} = \frac{\upsilon_A}{OA} = \frac{40}{20} = 2\,c^{-1};$$

Скорость точки D:

$$\upsilon_D = \omega_{AD} \cdot DP_{AD} = 2 \cdot 62{,}45 = 124{,}9 \;\; см/с.$$

Скорость точки B:

$$\upsilon_B = \omega_{AD} \cdot BP_{AD}\,.$$

Определим расстояние BP_{AD} по теореме косинусов:

$$BP_{AD} = \sqrt{OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos 120^o}\;;$$

$$BP_{AD} = \sqrt{20^2 + 25^2 - 2 \cdot 20 \cdot 25 \cdot (-0{,}5)} = \sqrt{1525} = 39{,}05\,\text{см}.$$

$$\upsilon_B = 2 \cdot 39{,}05 = 78{,}1\;\text{см/с}.$$

Определим угол γ по теореме косинусов:

$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2 \cdot OB \cdot OD \cdot \cos\gamma\,;$$

$$\cos\gamma = \frac{OB^2 + OD^2 - BD^2}{2 \cdot OD \cdot OB} = \frac{39{,}05^2 + 62{,}45^2 - 25^2}{2 \cdot 62{,}45 \cdot 39{,}05} = 0{,}984 \Rightarrow \gamma = 10{,}3^o\,.$$

Находим мгновенный центр скоростей звена BC – на пересечении перпендикуляров к скоростям точек B и C. Определяем длину отрезка BP_{BC}, учитывая, что треугольник С BP_{BC} прямоугольный:

$$\frac{BC}{BP_{BC}} = \cos\gamma\,;\, BP_{BC} = \frac{BC}{\cos\gamma} = \frac{35}{0{,}984} = 35{,}6\,\text{см}.$$

Угловая скорость звена BC:

$$\omega_{BC} = \frac{\upsilon_B}{BP_{BC}} = \frac{78{,}1}{35{,}6} = 2{,}19\,\text{с}^{-1}.$$

Скорость точки C:

$$\upsilon_C = \omega_{BC} \cdot CP\,;$$

$$\frac{CP}{BP_{BC}} = \sin\gamma\,;\, CP = BP_{BC} \cdot \sin 10{,}3^o = 35{,}6 \cdot 0{,}179 = 6{,}37\,\text{см};$$

$$\upsilon_C = 2{,}19 \cdot 6{,}37 = 13{,}94\,\text{см/с}.$$

Таблица ответов:

$\upsilon_A = 40\ \frac{\text{cì}}{\text{ñ}}$	$\omega_{AD} = 2\ \frac{1}{\text{ñ}}$	$\upsilon_D = 124{,}9\ \frac{\text{cì}}{\text{ñ}}$	$\upsilon_B = 78{,}1\ \frac{\text{cì}}{\text{ñ}}$	$\omega_{BC} = 2{,}19\ \frac{1}{\text{ñ}}$	$\upsilon_C = 13{,}94\ \frac{\text{cì}}{\text{ñ}}$

4.3.3. **Задачи на определение ускорений при плоском движении с помощью формулы распределения ускорений рекомендуется решать в следующем порядке:**

1) выбирается полюс – такая точка плоской фигуры, ускорение которой известно или его можно найти по условию задачи;

2) определяется вектор ускорения полюса;

5) определяется ускорение всех точек, для этого записывается векторное равенство исходя из того, что ускорение любой точки можно определить как ускорение полюса плюс ускорение точки при вращательном движении вокруг полюса;

6) записываются проекции этого векторного равенства на две взаимно ортогональные оси координат;

7) определяется угловое ускорение плоской фигуры.

Задачи на определение ускорений точек плоской фигуры можно разделить на четыре основных типа.

4.3.4. Задачи первого типа.

Известны (или могут быть найдены по условиям задачи) ускорение какой-нибудь точки, например, А и мгновенная угловая скорость ω тела в любой момент времени, Требуется определить мгновенное угловое ускорение Е и ускорение любой другой точки В плоской фигуры.

К задачам такого типа относятся задачи качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого.

Поскольку известна зависимость угловой скорости ω от времени *t*, то угловое ускорение Е находят путем дифференцирования ω. Величины неизвестных составляющих искомого вектора $\vec{a}$ находят согласно уравнениям

(12). Величину $\vec{a}$ удобнее всего находить путем проектирования на две взаимно перпендикулярные оси.

4.3.5. Задачи второго типа.

В некоторый момент времени известна величина и направление ускорения какой-либо точки A (полюса) плоской фигуры, (или ее можно легко найти), мгновенная угловая скорость ω и прямая, вдоль которой направлено ускорение другой точки, (например, точки B). Необходимо определить угловое ускорение фигуры и ускорение точки B, (а затем и любой другой точки фигуры) в рассматриваемый момент времени. (см. пример 16 и 21).

Пример 21

Тема: **Определение скоростей и ускорений твердого тела при плоском движении.**

Кривошип OA кривошипно-ползунного механизма вращаясь вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}, приводит в движение шатун AB, соединенный с ним шарнирно в точке A. Ползун B перемещается в направляющих по горизонтали.

Определить скорости и ускорения точек A, B и C, для данного положения механизма, а также угловую скорость и ускорение шатуна AB (Рис.77).

Дано:

$OA = 25$ *см*; $AB = 50$ *см*; $AC = CB$; $\alpha = 45^{\circ}$; $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$; $\varepsilon_{OA} = 1\ c^{-2}$.

Найти: υ_A, a_A, υ_B, a_B, υ_C, a_C, ω_{AB}, ε_{AB}.

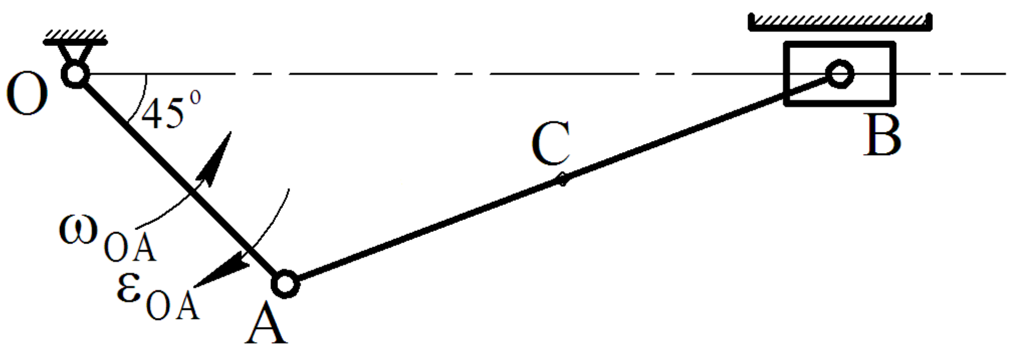


Рис. 75

Решение

1. Механизм состоит из трех подвижных звеньев: кривошипа *OA*, шатуна *AB* и ползуна *B*. Кривошип вращается вокруг неподвижной оси с заданной угловой скоростью ω_{OA}. Точка *A* во время движения будет описывать окружность радиус которой *OA* с центром в точке *O*. Скорость точки *A* - $\vec{\upsilon}_{A}$ направлена по касательной к этой окружности, то есть перпендикулярно звену *OA* в соответствии с заданным направлением вращения угловой скорости ω_{OA} кривошипа *OA*. Модуль скорости точки *A* определяется по формуле Эйлера:

$$\upsilon_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 25 = 50\,\text{см/с}.$$

Вектор скорости ползуна *B* направлен вдоль горизонтали, так как ползун совершает поступательное движение по горизонтальным направляющим (Рис.77).

Для дальнейших расчетов определим углы, образованные кривошипом и шатуном (угол γ), а также угол между шатуном *AB* и линией движения ползуна *B* (угол B).

По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin 45^o} = \frac{OA}{\sin\beta};$$

Отсюда:

$$\sin\beta = \sin 45^o \cdot \frac{OA}{AB};\ \sin\beta = 0,707 \cdot \frac{25}{50} = 0,3536;\ \ \beta = 21^o.$$

Угол $\gamma = 180^o - 45^o - 21^o = 114^o$.

Определим длину отрезка *OB*:

$$\frac{OB}{\sin\gamma} = \frac{AB}{\sin 45^o};\ OB = AB \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin 45^o} = 50 \cdot \frac{0,914}{0,707} = 64,64\ \text{см}.$$

2. Движение шатуна *AB* плоское. Для определения угловой скорости шатуна ω_{AB} построим мгновенный центр скоростей звена *AB*. Как известно, для построения мгновенного центра скоростей плоской фигуры достаточно знать линии действия векторов двух ее точек. В данном случае известны скорость точки *A* по модулю и направлению и направление скорости точки *B*.

Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\bar{\upsilon}_A$ из точки A и $\bar{\upsilon}_B$ из точки B, на их пересечении получаем точку P_{AB} - МЦС звена AB (Рис.76).

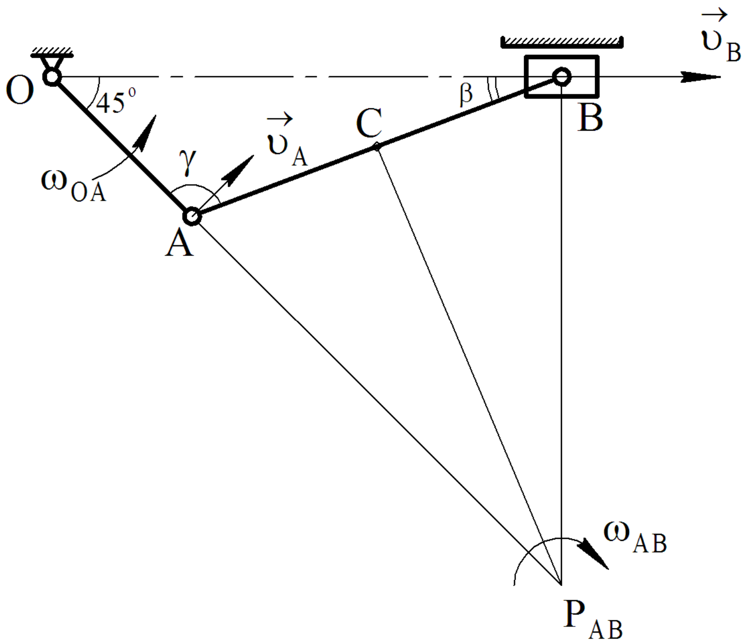


Рис. 76

Определяем расстояние от точек A и B до МЦС. Отрезок OP_{AB}:

$$\frac{OB}{OP_{AB}} = \cos 45^o\,;\ \hat{I}\,Ð_{\grave{A}\hat{A}} = \frac{\hat{I}\,\hat{A}}{\cos 45^o} = \frac{64,64}{0,707} = 91,43\,\text{см}.$$

$$AÐ_{\grave{A}\hat{A}} = \hat{I}\,Ð_{\grave{A}\hat{A}} - OA = 91,43 - 25 = 66,43\ \text{см}.$$

Определим длину отрезка BP_{AB}: $\frac{\hat{A}Ð_{\grave{A}\hat{A}}}{\hat{I}\,\hat{A}} = tg45^o$, т.е. $BP_{AB} = OB = 64,64$ см.

Определим угловую скорость звена AB:

$$\omega_{\grave{A}\hat{A}} = \frac{\upsilon_{\hat{A}}}{\grave{A}Ð_{\grave{A}\hat{A}}} = \frac{50}{66,43} = 0,753\ \text{с}^{-1}.$$

Определим скорость точки B:

$$\upsilon_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}\,;$$

$$\upsilon_{\hat{A}} = 0,753 \cdot 64,64 = 48,7\,\text{см/с}.$$

Проверяем полученный результат по теореме о проекциях. Для этого спроектируем скорость точек A и B на шатун AB, соединяющий эти точки. Получим:

$$\upsilon_{\grave{A}} \cdot \tilde{n}\hat{\imath}\,s(\gamma - 90^0) = \upsilon_B \tilde{n}\hat{\imath}\,s\beta\,.$$

Отсюда:

$$\upsilon_B = \frac{\upsilon_{\grave{A}} \cdot \tilde{n}\hat{\imath}\, s(\gamma - 90^0)}{\tilde{n}\hat{\imath}\, s\beta}.$$

Подставив значения, получим:

$$\upsilon_B = \frac{50 \cdot \tilde{n}\hat{\imath}\, s(114^0 - 90^0)}{\tilde{n}\hat{\imath}\, s21^0} = \frac{50 \cdot \tilde{n}\hat{\imath}\, s24^0}{\tilde{n}\hat{\imath}\, s21^0} = \frac{50 \cdot 0,914}{0,934} = 48,9 \text{ см/с.}$$

Разницу в 0,2 см/с можно объяснить погрешностью округления величин.

Скорость точки *C,* которая является средней точкой шатуна *AB*:

$$\upsilon_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB};$$

Расстояние от точки с до МЦС - CP_{AB} найдем по теореме косинусов:

$$CP_{AB} = \sqrt{AC^2 + AP_{AB}^2 - 2AC \cdot AP_{AB} \cdot \cos\left(180^o - \gamma\right)};$$

$$\tilde{N}\text{Ð}_{\grave{A}\hat{A}} = \sqrt{25^2 + 66,43^2 - 2 \cdot 25 \cdot 66,43 \cdot \cos 66^o} = \sqrt{3686,09} = 60,7 \text{ см.}$$

$$\upsilon_{\tilde{N}} = 0,753 \cdot 60,71 = 45,72 \text{ см/с.}$$

3. Определяем ускорения точек и угловое ускорение звена AB:

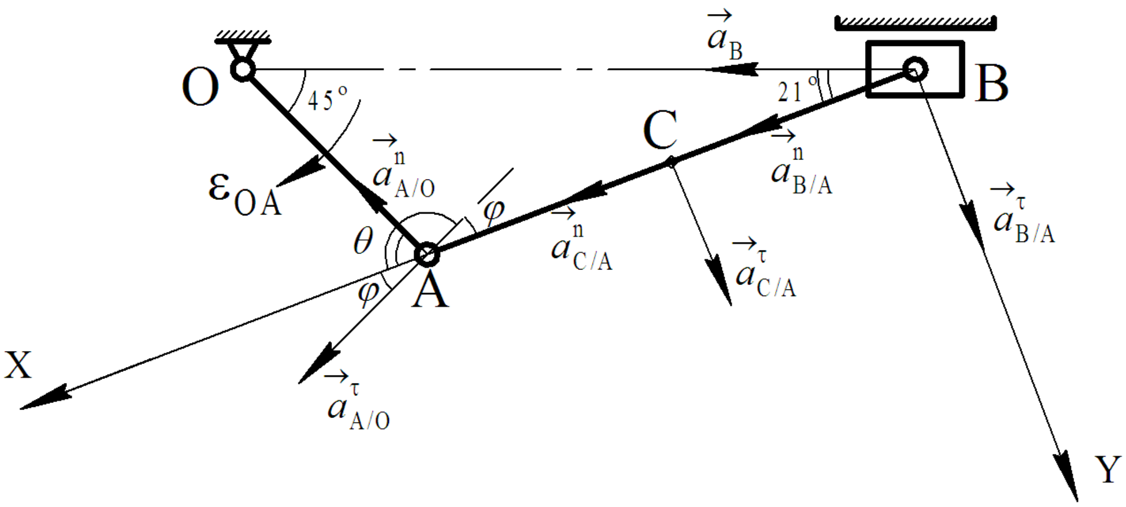


Рис.77

Определяем ускорения через полюс. Для звена *OA* полюсом является точка *O,* так как точка *O* – неподвижное звено (стойка) то ее ускорение равно нулю. Точка *A* вращается вместе с кривошипом *OA* вокруг точки *O*. Поэтому для точки *A* можно записать векторное уравнение:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}^n_{A/O} + \vec{a}^\tau_{A/O};$$

где: a_o=0; нормальное (центростремительное)ускорение точки A при вращении вокруг полюса O:

$$a^{n}_{A/O} = \omega^{2}_{\hat{I}\grave{A}} \cdot \hat{I}\grave{A} = 2^{2} \cdot 25 = 100\ \text{см/с}^{2};$$

касательное ускорение точки A при вращении вокруг полюса O:

$$a^{\tau}_{A/O} = \varepsilon_{\hat{I}\grave{A}} \cdot \hat{I}\grave{A} = 1 \cdot 25 = 25\ \text{см/с}^{2};$$

Модуль ускорения точки A определяем по теореме Пифагора, так как векторы нормального и касательного ускорения перпендикулярны друг другу.

$$a_{A} = \sqrt{\left(\grave{a}^{\ddot{i}}_{\hat{A}/\hat{I}}\right)^{2} + \left(\grave{a}^{\tau}_{\hat{A}/\hat{I}}\right)^{2}} = \sqrt{100^{2} + 25^{2}} = 103{,}1\ \text{см/с}^{2}.$$

Полагая теперь, что точка A принадлежит шатуну AB, выберем для звена AB точку A в качестве полюса так как ее ускорение известно (Рис.77).

Для точки B можно записать:

$$\vec{a}_{B} = \vec{a}_{A} + \vec{a}^{\,вр}_{B/A};$$

$$\vec{a}_{B} = \vec{a}^{\,n}_{A/O} + \vec{a}^{\,\tau}_{A/O} + \vec{a}^{\,n}_{B/A} + \vec{a}^{\,\tau}_{B/A}$$

где: нормальное ускорение при вращательном движении точки B относительно точки A:

$$a^{\ddot{i}}_{\hat{A}/\grave{A}} = \omega^{2}_{\grave{A}\hat{A}} \cdot \grave{A}\hat{A} = 0{,}753^{2} \cdot 50 = 28{,}35\ \text{см/с}^{2};$$

касательное ускорение при вращательном движении точки B относительно точки A:

$$a^{\tau}_{\hat{A}/\grave{A}} = \varepsilon_{\grave{A}\hat{A}} \cdot \grave{A}\hat{A}.$$

При плоском движении формула $\omega_{\grave{A}\hat{A}} = \dfrac{\upsilon_{\grave{A}}}{\grave{A}\text{Ð}_{\grave{A}\hat{A}}}$ определяет угловую скорость ползуна только в данный момент времени, соответствующий рассматриваемому положению механизма, поэтому угловое ускорение Е не может быть получено дифференцированием по времени угловой скорости $\omega_{\grave{A}\hat{A}}$.

Угловое ускорение звена AB - $\varepsilon_{\grave{A}\hat{A}}$ неизвестно ни по величине, ни по направлению, но известно, что линия действия вектора касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{\hat{A}/\grave{A}}$ перпендикулярна вектору нормального ускорения - $\vec{a}^{\,\ddot{i}}_{\hat{A}/\grave{A}}$

Найдем угол φ: и θ: (Рис.79): $\varphi = \gamma - 90^{\circ} = 24^{\circ}$; $\theta = 90^{\circ} - \varphi = 66^{\circ}$;

Вводим координатные оси – ось «x» по звену AB; ось «y» перпендикулярно звену AB. Спроектировав векторное уравнение на координатные оси:

$$\tilde{o}: a_B \cdot \cos 21^o = a^n_{A/O} \cdot \cos\theta + a^\tau_{A/O} \cdot \cos\varphi + a^n_{B/A}$$
$$\acute{o}: -a_B \cdot \sin 21^o = -a^n_{A/O} \cdot \sin\theta + a^\tau_{A/O} \cdot \sin\varphi + a^\tau_{B/A}$$

Из уравнения проекций на ось x определим ускорение точки B - a_{B}:

$$a_B = \frac{1}{\cos 21^o}\left(a^n_{A/O} \cdot \cos 66^o + a^\tau_{A/O} \cdot \cos 24^{\hat{\imath}} + a^n_{B/A}\right);$$

Подставив значения, получим:

$$a_B = \frac{1}{0,934}\left(100 \cdot 0,407 + 25 \cdot 0,914 + 28,35\right) = 98,4 \ \text{\textit{см/с}}^2;$$

Из проекций на ось y определим касательное ускорение $\grave{a}^\tau_{\hat{A}/\grave{A}}$

$$a^\tau_{B/A} = -\grave{a}_{\hat{A}} \cdot \sin 21^o + a^n_{A/O} \cdot \sin 66^o - a^\tau_{A/O} \cdot \sin 24^o;$$

Подставив значения, получим:

$$a^\tau_{B/A} = -98,4 \cdot 0,358 + 100 \cdot 0,914 - 25 \cdot 0,407 = 46 \ \text{см/с}^2;$$

Определим угловое ускорение звена AB:

$$\varepsilon_{\grave{A}\hat{A}} = \frac{\grave{a}^\tau_{\hat{A}/\grave{A}}}{\grave{A}\hat{A}} = \frac{46}{50} = 0,92 \ \text{с}^{-2}.$$

Определим ускорение точки C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^n_{A/O} + \vec{a}^\tau_{A/O} + \vec{a}^n_{C/A} + \vec{a}^\tau_{C/A};$$

$$a^n_{\tilde{N}/\grave{A}} = \omega^2_{\grave{A}\hat{A}} \cdot \tilde{N}\grave{A} = 0,753^2 \cdot 25 = 14,18 \ \text{см/с}^2;$$

$$a^\tau_{\tilde{N}/\grave{A}} = \varepsilon_{\grave{A}\hat{A}} \cdot \tilde{N}\grave{A} = 0,92 \cdot 25 = 23 \ \text{см/с}^2;$$

Спроектировав векторное уравнение на координатные оси:

$$a_{\tilde{N}\tilde{o}} = a^n_{A/O} \cdot \cos 66^o + a^\tau_{A/O} \cdot \cos 24^{\hat{\imath}} + a^n_{\tilde{N}/A};$$
$$a_{\tilde{N}\acute{o}} = -a^n_{A/O} \cdot \sin 66^o + a^\tau_{A/O} \cdot \sin 24^{\hat{\imath}} + a^\tau_{\tilde{N}/A}.$$

Подставив значения, получим:

$$a_{\tilde{N}\tilde{o}} = 100 \cdot 0,406 + 25 \cdot 0,914 + 14,18 = 95,45;$$
$$a_{\tilde{N}\acute{o}} = -100 \cdot 0,914 + 25 \cdot 0,406 + 23 = -58,25.$$

$$a_{\tilde{N}} = \sqrt{95,45^2 + \left(-58,25\right)^2} = 111,82 \ \text{см/с}^2.$$

Таблица ответов:

$\upsilon_{\grave{A}}, \frac{c\grave{\imath}}{\tilde{n}}$	$\omega_{\grave{A}\hat{A}}, \frac{1}{\tilde{n}}$	$\upsilon_{\hat{A}}, \frac{c\grave{\imath}}{\tilde{n}}$	$\upsilon_{\tilde{N}}, \frac{c\grave{\imath}}{\tilde{n}}$	$\grave{a}_{\grave{A}}, \frac{c\grave{\imath}}{\tilde{n}^2}$	$\grave{a}_{\hat{A}}, \frac{c\grave{\imath}}{\tilde{n}^2}$	$\varepsilon_{\grave{A}\hat{A}}, \frac{1}{\tilde{n}^2}$	$\grave{a}_{\tilde{N}}, \frac{c\grave{\imath}}{\tilde{n}^2}$
50	0,753	48,7	45,72	103,1	98,4	0,92	111,82

4.3.6. Задачи третьего типа.

В некоторый момент времени известны величины и направления ускорений двух точек плоской фигуры, например, А и В. Определить в этот момент времени мгновенную угловую скорость ω*, мгновенное угловое ускорение* E *и ускорение любой точки, (например, С) (см. пример19).*

4.3.7. Задачи четвертого типа.

В некоторый момент времени известны мгновенная угловая скорость плоской фигуры 1 (или какого-либо звена), величина и направление ускорения какой-либо ее точки В (либо его можно найти из условия задачи). Некоторая точка С этой фигуры одновременно принадлежит другой фигуре (или звену), движущейся в той же плоскости. При этом ускорение какой-либо точки, например, А (пример 19) известна, (в частности, точка А может быть и неподвижной). Требуется определить угловое ускорение фигуры 1 и 2 и ускорение точки С.

Пример 22 (18.18 [9])

Антипараллелограмм (Рис.78) состоит из двух кривошипов *AB* и *CD* одинаковой длины 40 *см* и шарнирно соединенного с ними стержня *BC* длины 20 *см.* Расстояние между неподвижными осями *A* и *D* равно 20 *см.* Кривошип *AB* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{\grave{A}\hat{A}}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *BC* в тот момент времени, когда угол *ADC* равен 90^0, а также определить скорость точки *C* и угловую скорость звена *CD*.

Решение

Строим схему механизма в заданном положении (Рис.78)

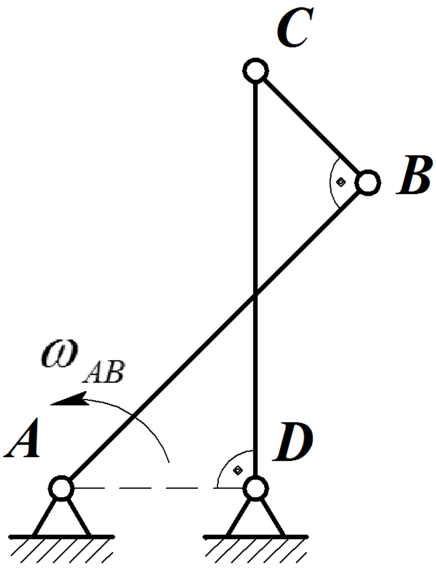


Рис.78

Решение

1. Определяем линейные скорости. По заданной угловой скорости кривошипа *AB* находим скорость υ_B точки *B*:

$$\upsilon_B = \omega_{AB} \cdot AB = 40\omega_{AB}$$

Точка *B* является общей для кривошипа *AB* и стержня *BC*, который совершает плоскопараллельное движение. Искомую угловую скорость ω_{BC} стержня *BC* определим с помощью мгновенного центра скоростей. Как известно для построения мгновенного центра скоростей плоской фигуры достаточно знать линии действия векторов скоростей двух ее точек. В данном случае известны линии действия векторов скоростей точек *B* и *C* (точка *C* кривошипа *CB* описывает окружность с центром в точке *D* и вектор ее скорости направлен перпендикулярно радиусу *CD* в данный момент времени). Положение мгновенного центра скоростей (Р) находим как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках *B* и *C* к векторам их скоростей (Рис.79).

Стержень *CB* вращается вокруг мгновенного центра скоростей *P* с угловой скоростью ω_{BC}. Поэтому:

$$\omega_{BC} = \frac{\upsilon_B}{PB}.$$

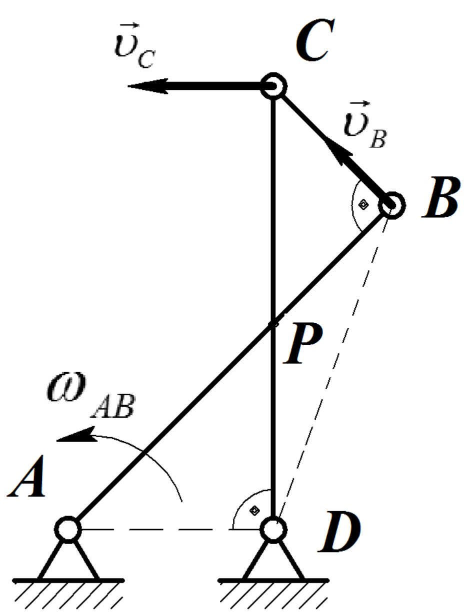


Рис.79

Чтобы определить численное значение $\omega_{\hat{A}\tilde{N}}$. необходимо знать расстояние *PB*. Для этого соединим точки *B* и *D* и рассмотрим треугольники *ABC* и *CBD*. Они имеют равные стороны и, следовательно, равные углы *ABC* и *CBD*. Если считать, что эти углы принадлежат треугольнику *DPB*, то последний оказывается равнобедренным и тогда *DP=PB*. Учитывая, что

PB=AB-AP; то есть *PB=40-AP*;

$AP^2=AD^2+PB^2$; или $AP^2=20^2+(40-AP)^2$. отсюда преобразовав получим:

AP=25 *см*. и *PB*=15*см*.

Угловая скорость звена *BC*:

$$\omega_{\hat{A}\tilde{N}}=\frac{\upsilon_{\hat{A}}}{\text{Ð}\hat{A}}=\frac{40\cdot\omega_{\grave{A}\hat{A}}}{15}=\frac{8}{3}\omega_{\grave{A}\hat{A}}.$$

Определяем скорость точки *C* учитывая, что скорость любой точки равна произведению угловой скорости звена на длину отрезка от точки до МЦС, получим:

$$\upsilon_{\tilde{N}}=\omega_{\hat{A}\tilde{N}}\cdot\tilde{N}\text{Ð}$$

Отрезок *CP* определим, зная расстояние от точки *D* до МЦС:

CP=CD-PD; отсюда: *CP=40-15=25 см*. Тогда:

$$\upsilon_{\tilde{N}}=\omega_{\hat{A}\tilde{N}}\cdot\tilde{N}\text{Ð}=\frac{8}{3}\omega_{\grave{A}\hat{A}}\cdot 25=\frac{200}{3}\omega_{\grave{A}\hat{A}}.$$

Так как точка *C* принадлежит кривошипу *CD* находим угловую скорость звена *CD*:

$$\omega_{CD} = \frac{\upsilon_C}{CD} = \frac{200 \cdot \omega_{AB}}{3 \cdot 40} = \frac{5}{3}\omega_{AB}.$$

2. Определяем линейные ускорения точек и угловые ускорения звеньев.

Для определения углового ускорения E_{BC} стержня *BC* определяем ускорение точки *B* кривошипа *AB*, так как закон движения кривошипа нам известен. По условию задачи кривошип вращается вокруг неподвижной оси *A* с постоянной угловой скоростью ω_{AB}. Ускорение его точки *B* будет определяться только центростремительной (нормальной) составляющей, направленной вдоль кривошипа *AB* к точке *A* как центру вращения кривошипа *AB* (Рис.80).

$$a_B = a_B^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 40\omega_{AB}^2$$

Точка *B* является общей для кривошипа *AB* и стержня (шатуна) *BC*. Выбирая точку *B* за полюс, представим ускорение точки *C* стержня *BC* в соответствии с общей формулой плоского поля ускорений:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B}^n + \vec{a}_{C/B}^\tau,$$

где: нормальное ускорение:

$$a_{C/B}^n = \omega_{C/B}^2 \cdot CB$$

- известно по величине и направлению, и его модуль:

$$a_{C/B}^n = (\frac{8}{3} \cdot \omega_{AB})^2 \cdot 20 = \frac{1280}{9} \cdot \omega_{AB}^2;$$

- касательное ускорение:

$$a_{C/B}^\tau = \varepsilon_{C/B} \cdot CB$$

- известно только по линии действия.

Учтем, что точка *C* принадлежит и кривошипу *CD*, который вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку *D*, поэтому:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{C/D}^n + \vec{a}_{C/D}^\tau,$$

где: нормальное ускорение:

$$a_{C/D}^n = \omega_{C/D}^2 \cdot CD$$

- известно по величине и направлению, его модуль:

$$a^n_{C/D} = (\frac{5}{3} \cdot \omega_{AB})^2 \cdot 40 = \frac{1000}{9} \cdot \omega_{AB}{}^2 ;$$

касательное ускорение:

$a^\tau_{C/D} = \varepsilon_{C/D} \cdot CD$ - известно только по линии действия.

Приравнивая правые части этих равенств, получим векторное уравнение:

$$\vec{a}_B + \vec{a}^n_{C/B} + \vec{a}^\tau_{C/B} = \vec{a}_D + \vec{a}^n_{C/D} + \vec{a}^\tau_{C/D} .$$

Проектируя полученное векторное уравнение на координатные оси x и y (Рис.80) получим:

$$x : a^n_{C/B} = a^n_{C/D} \cdot cos\alpha - a^\tau_{C/D} \cdot cos\beta ;$$

$$y : -a_B + a^\tau_{C/B} = -a^n_{C/D} \cdot \sin\alpha - a^\tau_{C/D} \cdot \sin\beta .$$

Из первого уравнения (проекции на ось x) получим:

$$a^\tau_{C/D} = \frac{1}{cos\beta}(a^n_{C/D} \cdot cos\alpha - a^n_{C/B}) ;$$

Из второго уравнения (проекции на ось y) получим:

$$a^\tau_{C/B} = a_B - a^n_{C/D} \cdot \sin\alpha - a^\tau_{C/D} \cdot \sin\beta$$

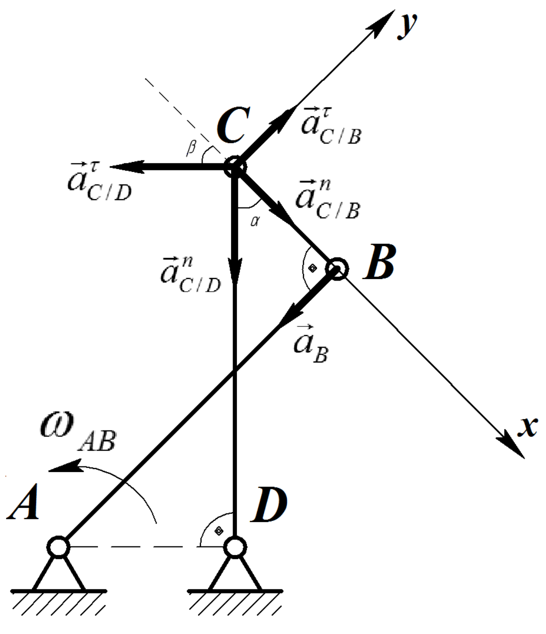


Рис.80

Из треугольника CBP (рис.79):

$$\sin\alpha = \frac{PB}{PC} = \frac{15}{25} = 0,6 ;\ cos\alpha = \frac{CB}{PC} = \frac{20}{25} = 0,8 ; \sin\alpha = \cos\beta = 0,6 ;\ \sin\beta = \cos\alpha = 0,8 .$$

Подставив значения, получим:

$$a^{\tau}_{C/D} = \frac{1}{0,6}\left(\frac{25\cdot\omega^2_{AB}\cdot 40}{9}\cdot 0,8 - \frac{64\cdot\omega^2_{AB}}{9}\cdot 20\right) = -\frac{800}{9}\cdot\omega^2_{AB};$$

Знак «минус» у касательного ускорения $a^{\tau}_{C/D}$ говорит о том, что вектор $\vec{a}^{\tau}_{C/D}$ направлен в сторону, противоположную обозначенному направлению на чертеже (Рис.81). Зная касательное ускорение можно определить угловое ускорение звена CD:

$$\varepsilon_{CD} = \frac{a^{\tau}_{C/D}}{CD} = -\frac{800\cdot\omega^2_{AB}}{9\cdot 40} = -\frac{20}{9}\cdot\omega^2_{AB};$$

Определяем касательное ускорение $a^{\tau}_{C/B}$:

$$a^{\tau}_{C/B} = a_B - a^{n}_{C/D}\cdot\sin\alpha - a^{\tau}_{C/D}\cdot\sin\beta;$$

Подставив значения, получим:

$$a^{\tau}_{C/B} = 40\cdot\omega^2_{AB} - \frac{1000}{9}\cdot\omega^2_{AB}\cdot 0,6 + \frac{800}{9}\cdot\omega^2_{AB}\cdot 0,8 = \frac{400}{9}\cdot\omega^2_{AB}.$$

Зная касательное ускорение можно определить угловое ускорение звена CB:

$$\varepsilon_{CB} = \frac{a^{\tau}_{C/B}}{CB} = -\frac{400\cdot\omega^2_{AB}}{9\cdot 20} = \frac{20}{9}\cdot\omega^2_{AB}$$

Для определения ускорения точки C, записав проекции векторного уравнения на координатные оси x и y, получим:

$$a_{Cx} = a^{n}_{C/B} + a^{n}_{C/D}\cdot\cos\alpha - a^{\tau}_{C/D}\cdot\cos\beta,$$

$$a_{Cy} = -a_B + a^{\tau}_{C/B} - a^{n}_{C/D}\cdot\sin\alpha - a^{\tau}_{C/D}\cdot\sin\beta.$$

Подставив значения, получим:

$$a_{Cx} = \frac{1280}{9}\cdot\omega^2_{AB} + \frac{1000}{9}\cdot\omega^2_{AB}\cdot 0,8 + \frac{800}{9}\cdot\omega^2_{AB}\cdot 0,6 = \frac{2560}{9}\cdot\omega^2_{AB};$$

$$a_{Cy} = -40\cdot\omega^2_{AB} + \frac{400}{9}\cdot\omega^2_{AB} - \frac{1000}{9}\cdot\omega^2_{AB}\cdot 0,6 + \frac{800}{9}\cdot\omega^2_{AB}\cdot 0,8 = \frac{80}{9}\cdot\omega^2_{AB}$$

$$a_C = \sqrt{a^2_{Cx} + a^2_{Cy}} = 29,8\omega^2_{AB}.$$

5. Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется (плоским) плоскопараллельным?

2. Приведите примеры звеньев механизмов, совершающих плоское движение

3. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?

4. Из каких простых движений складывается плоское движение твердого тела?

5. Зависит ли поступательное движение от выбора полюса?

6. Зависит ли вращательное движение плоской фигуры от выбора полюса?

7. Какие существуют способы определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении?

8. Покажите, что проекции скоростей точек неизменяемого отрезка на ось, совпадающую с этим отрезком, равны между собой.

9. Чему равна и как направлена скорость $\vec{\upsilon}_{A/O}^{\text{вр.}}$ в векторном равенстве $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_O + \vec{\upsilon}_{A/O}^{\text{вр.}}$?

10. Сформулируйте теорему о проекциях линейных скоростей точек тела на прямую, соединяющие эти точки.

11. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей? В чем заключается физический смысл МЦС? Приведите основные случаи определения положения МЦС?

12. Как определяется величина и направление скорости произвольной точки тела при известном положении мгновенного центра скоростей и угловой скорости?

13. Что представляет собой распределение скоростей точек плоской фигуры в данный момент?

14. Как построить центр поворота плоской фигуры, зная ее начальное и конечное положения?

15. Как с помощью мгновенного центра скоростей определяется угловая скорость тела?

16. Какое движение называется мгновенно поступательным движением? Где в этом случае находится мгновенный центр скоростей?

17. Какая точка колеса, катящегося по неподвижной поверхности, имеет наибольшую скорость?

18. Какая точка колеса, катящегося по неподвижной поверхности, является мгновенным центром скоростей?

19. Какие минимальные данные необходимы для определения скорости любой точки тела при его плоскопараллельном движении?

20. Каким образом можно определить линейное ускорение любой точки тела при его плоскопараллельном движении?

21. Чему равны и как направлены векторы $\vec{a}^{n}_{A/O}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A/O}$ в векторном равенстве $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}^{n}_{A/O} + \vec{a}^{\tau}_{A/O}$?

22. Что называется мгновенным центром ускорений?

23. Сформулируйте способы нахождения мгновенного центра ускорений.

24. Как производят определение угловых ускорений звеньев плоского механизма?

25. Что представляет собой картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени в трех случаях:

1) $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$; 2) $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$; 3) $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$?

6. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа – проявляется в узнавании, осмыслении, запоминании, подведении известного метода решения под новую задачу.

К самостоятельной работе помимо подготовки к лекционным и практическим занятиям относится выполнение расчетно-графических работ. Требования к выполнению и защите расчетно-графических работ изложены в п. 6 рабочей программы дисциплины.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №№ 15.3; 15.4; 15.5; 16.1; 16.2; 16.3; 16.10; 16.31; 16.34; 16.35; 16.39; 18.1; 18.2; 18.9; 18.12; 18.13; 18.23; 18.26; 18.29; 18.37; 18.40. [9], а также задач разработанных кафедрой и задач, предлагаемых на олимпиадах.

7. Расчетно-графическая работа

На практическом занятии производится выдача задания к расчетно-графической работе К3 на тему: «Определение скоростей и ускорений твердого тела при плоском движении» и К4 на тему: «Определение скоростей твердого тела при плоском движении». Варианты заданий следует брать по указанию преподавателя. Используются пособия [4], [5], а также задания, разработанные кафедрой.

Расчетно-графические работы проводятся с целью практической проработки разделов дисциплины, что способствует закреплению, углублению и обобщению теоретических знаний, развивает творческую инициативу и самостоятельность, повышает интерес к изучению дисциплины и прививает навыки научно-исследовательской работы.

Подготовка к защите расчетно-графических работ осуществляется каждым студентом самостоятельно и включает проработку разделов лекционного материала, охватывающего тему данной работы, выполнение работы и оформление пояснительной записки в соответствии с требованиями. Пояснительная записка оформляется на листах белой бумаги форматом А 4 и включает следующие разделы: титульный лист, задание, решение задач и пояснения к ним, содержащие необходимые уравнения, выводы соответствующих зависимостей, теоремы и расчеты, сопровождаемые требуемыми графическими иллюстрациями. При выполнении пояснительной записки допускается использование ПЭВМ.

Самостоятельные работы, оформленные небрежно и без соблюдения предъявляемых к ним требований, не рассматриваются и не засчитываются.

При защите расчетно-графических работ студент должен уметь:

- четко сформулировать поставленную задачу (что дано, что требуется найти);
- объяснить каким методом пользовался при решении задачи (сформулировать его, указать основные свойства, область применимости);
- знать основные используемые формулы и определения;

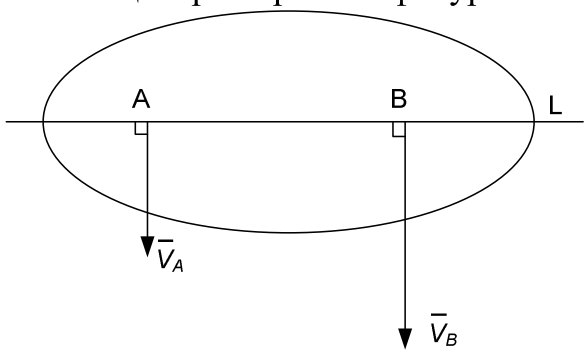
- рассказать последовательность решения задачи (общий план и особенности варианта);

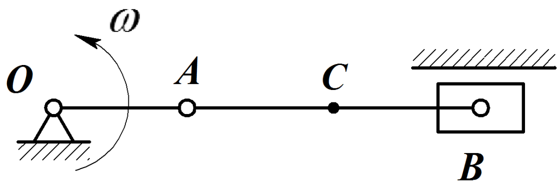
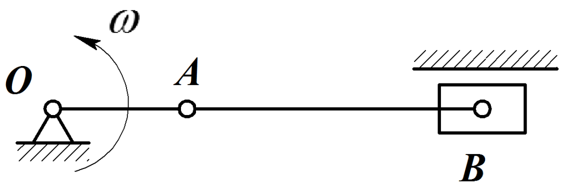
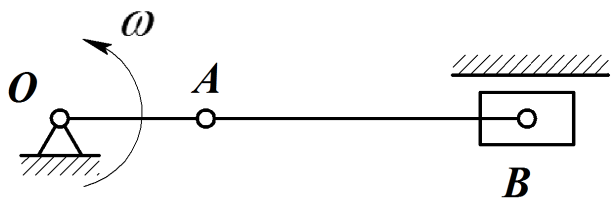
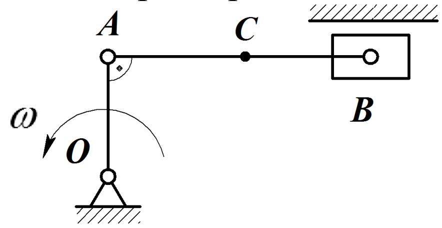
- объяснить полученный результат (если требуется провести его анализ);

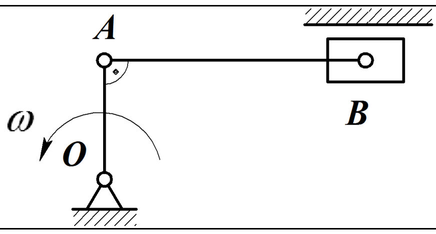
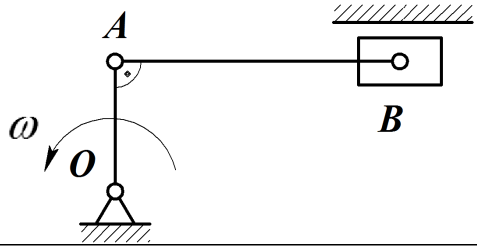
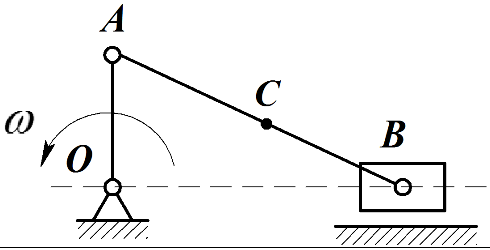
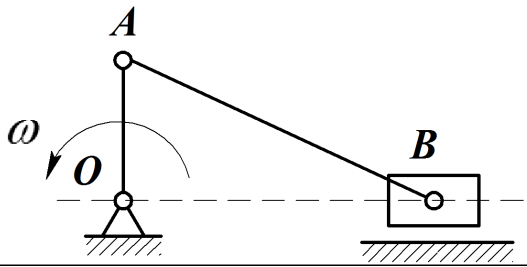
-отвечать на дополнительные вопросы по теме расчетно-графической работы;

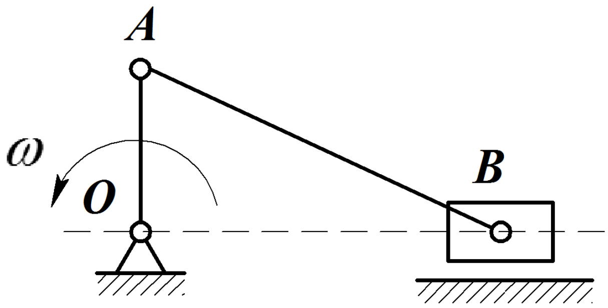
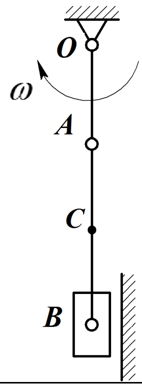
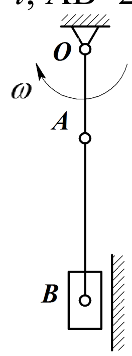
- отстаивать свою точку зрения при объяснении.

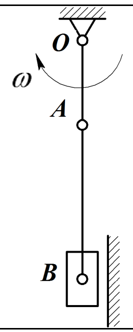
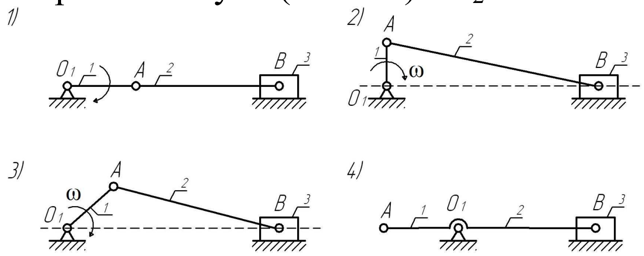
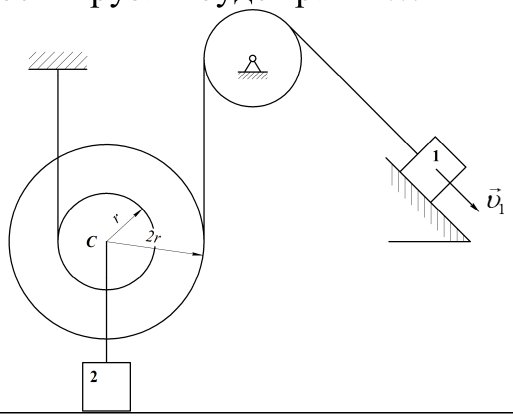
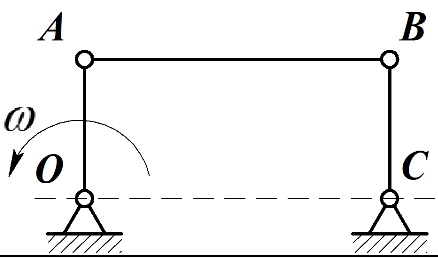
8. ПРИМЕРЫ ТЕСТОВ
по теме «Плоскопараллельное движение»

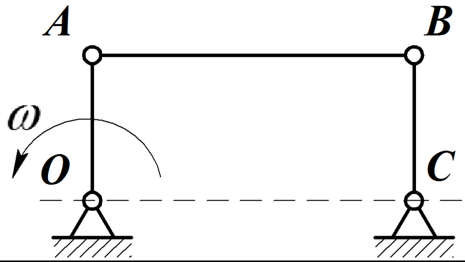
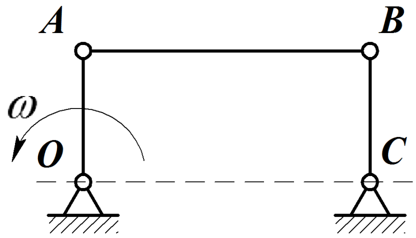
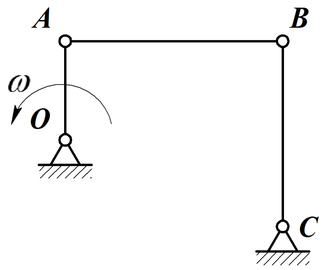
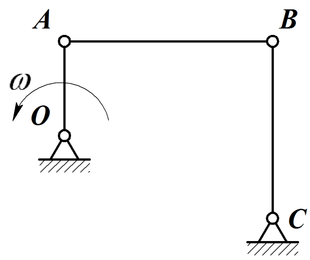
№	Задание	Варианты ответов:
21.	Скорости двух точек А и В плоской фигуры направлены, как указано на рисунке. Мгновенный центр скоростей фигуры … 	1). Находится на прямой АВ справа от точки В 2). Находится на бесконечном удалении 3). Находится на прямой АВ слева от точки А 4). Находится на прямой АВ между точками А и В
2 2.	Какое минимальное количество независимых уравнений описывает плоскопараллельное движение тела?	Запишите ответ цифрой
3.	Какая геометрическая точка является мгновенным центром скоростей плоской фигуры?	1. Геометрическая точка плоской фигуры, скорость которой равна нулю. 2. Геометрический центр плоской фигуры. 3. Центр тяжести плоской фигуры. 4. Центр масс плоской фигуры. 5. Точка, относительно которой определяется сумма моментов сил?
34.	Определить величину скорости точки С (средней точки шатуна АВ) кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=l; АВ=2l.	1). $\upsilon_C = l \cdot \omega$; 2). $\upsilon_C = \dfrac{l \cdot \omega}{2}$ 3). $\upsilon_C = 2l \cdot \omega$ 4). $\upsilon_C = \dfrac{3}{2} l \cdot \omega$

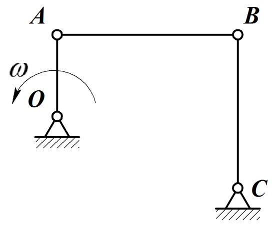
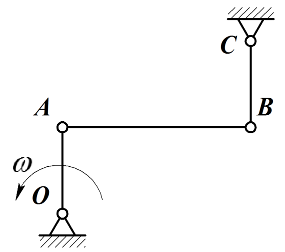
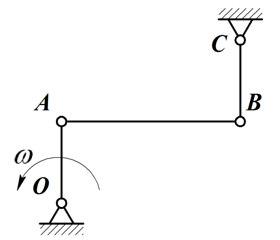
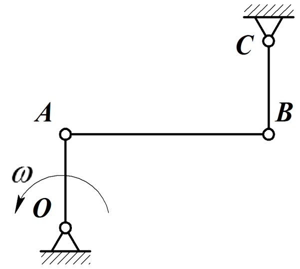
		
45.	Определить величину угловой скорости шатуна АВ кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*. 	1). $\omega_{AB}=2\cdot\omega$; 2). $\omega_{AB}=\omega$; 3). $\omega_{AB}=\frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{AB}=0$;
4 6.	Определить величину скорости точки В ползуна кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*. 	1). $\upsilon_B=\upsilon_A$ 2). $\upsilon_B=2\upsilon_A$ 3).0; 4). $\upsilon_B=\frac{\upsilon_A}{2}$
7.	Определить величину скорости точки С (средней точки шатуна АВ) кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*. 	1). $\upsilon_C=\upsilon_A$; 2). $\upsilon_C=\frac{\upsilon_A}{2}$ 3). $\upsilon_C=2\upsilon_A$ 4). $\upsilon_C=0$
8.	Определить величину угловой скорости шатуна АВ кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*.	1). $\omega_{AB}=2\cdot\omega$; 2). $\omega_{AB}=\omega$; 3). $\omega_{AB}=\frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{AB}=0$;

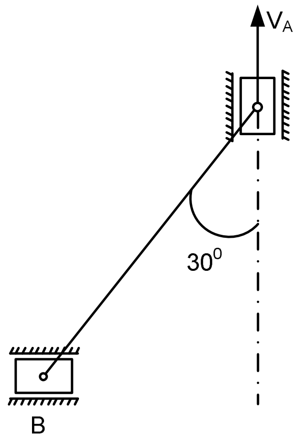
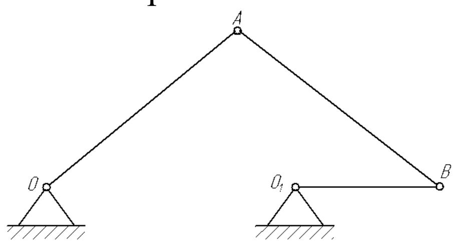
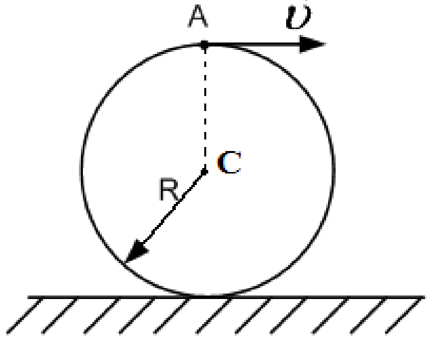
		
9.	Определить величину скорости точки В ползуна кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*. 	1). $\upsilon_B = \frac{\upsilon_{\grave{A}}}{2}$ 2). $\upsilon_B = \upsilon_{\grave{A}}$ 3).0; 4). $\upsilon_B = \upsilon_{\grave{A}}$
10.	Определить величину скорости точки С (средней точки шатуна АВ) кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*. 	1). $\upsilon_C = l \cdot \omega$; 2). $\upsilon_C = \frac{l \cdot \omega}{2}$ 3). $\upsilon_C = 2l \cdot \omega$ 4). $\upsilon_C = \frac{3}{2} l \cdot \omega$
11.	Определить величину угловой скорости шатуна АВ кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*. 	1). $\omega_{AB} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{AB} = \omega$; 3). $\omega_{AB} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{AB} = 0$;
12.	Определить величину скорости точки В ползуна кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=*l*; АВ=2*l*.	1). $\upsilon_B = l \cdot \omega$ 2). $\upsilon_B = 2l \cdot \omega$ 3).0;

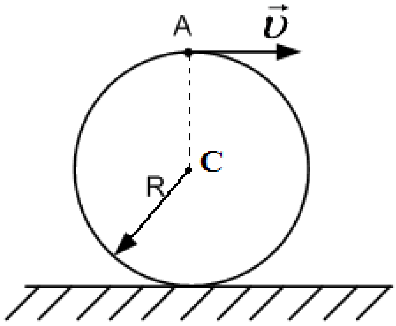
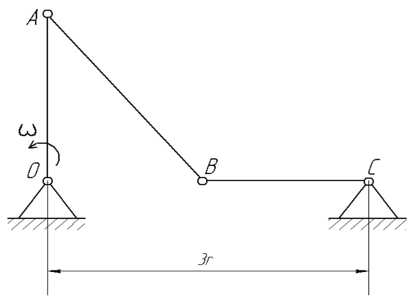
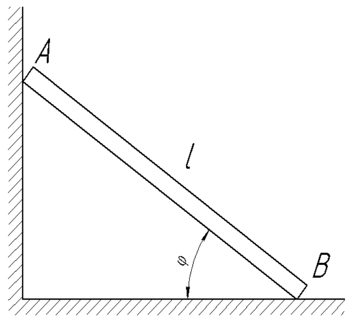
		4). $\upsilon_B = \frac{l \cdot \omega}{2}$
13.	Определить величину скорости точки С (средней точки шатуна АВ) кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=l; АВ=2l. 	1). $\upsilon_C = l \cdot \omega$; 2). $\upsilon_C = \frac{l \cdot \omega}{2}$ 3). $\upsilon_C = 2l \cdot \omega$ 4). $\upsilon_C = 0$
14.	Определить величину угловой скорости шатуна АВ кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=l; АВ=2l. 	1). $\omega_{AB} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{AB} = \omega$; 3). $\omega_{AB} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{AB} = 0$;
15.	Определить величину скорости точки В ползуна кривошипо-ползунного механизма в указанном положении, если известна угловая скорость кривошипа ω, и размеры АО=l; АВ=2l.	1). $\upsilon_B = l \cdot \omega$ 2). $\upsilon_B = 2l \cdot \omega$ 3).0; 4). $\upsilon_B = \frac{l \cdot \omega}{2}$

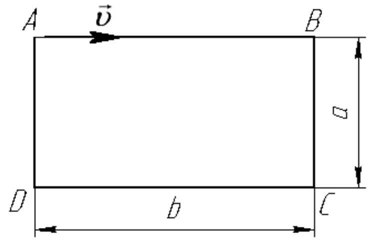
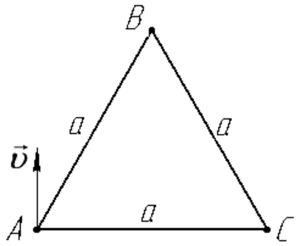
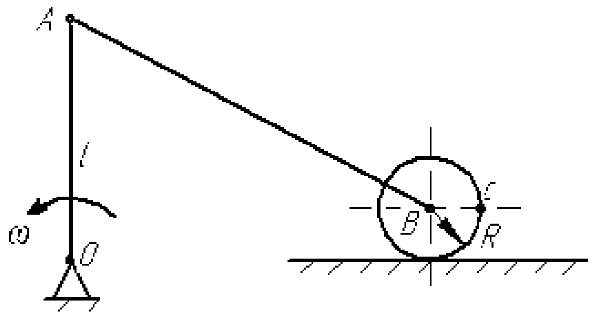
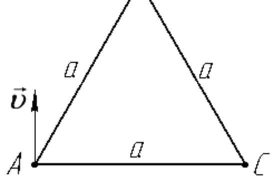
		
16.	В каком положении механизма угловая скорость шатуна (звена 2) - $\omega_2 = 0$? 	Введите ответ цифрой, соответствующей номеру положения механизма:
17.	Груз 1 имеет скорость V. Скорость груза 2 будет равна… 	1). 2V; 2). V; 3). V/2; 4). 3V; 5). V/3;
18.	В данном положении четырехзвенного механизма найти угловую скорость звена *AB*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*BC*=*l*, *AB*=2*l*. 	1). $\omega_{AB} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{AB} = \omega$; 3). $\omega_{AB} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{AB} = 0$;
19.	В данном положении четырехзвенного механизма найти скорость точки *B*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*BC*=*l*, *AB*=2*l*.	1). $\upsilon_B = \upsilon_A$ 2). $\upsilon_B = 2\upsilon_A$ 3).0; 4). $\upsilon_B = \frac{\upsilon_A}{2}$

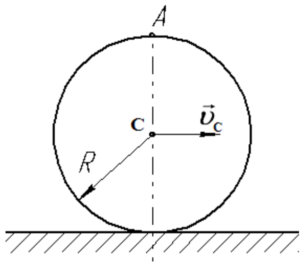
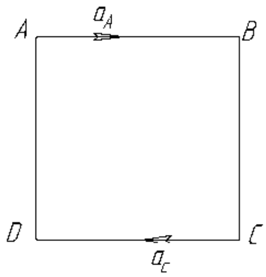
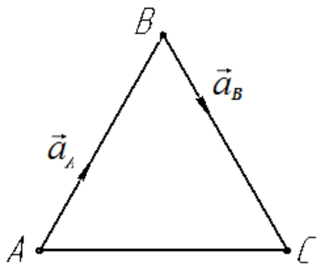
		
20.	В данном положении четырехзвенного механизма найти угловую скорость звена *BC*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*BC*=*l*, *AB*=2*l*. 	1). $\omega_{B\tilde{N}} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{B\tilde{N}} = \omega$; 3). $\omega_{B\tilde{N}} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{B\tilde{N}} = 0$;
21.	В данном положении четырехзвенного механизма найти угловую скорость звена *AB*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*l*, *AB*=*BC*=2*l*. 	1). $\omega_{AB} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{AB} = \omega$; 3). $\omega_{AB} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{AB} = 0$;
22.	В данном положении четырехзвенного механизма найти угловую скорость звена *BC*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*l*, *AB*=*BC*=2*l*. 	1). $\omega_{B\tilde{N}} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{B\tilde{N}} = \omega$; 3). $\omega_{B\tilde{N}} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{B\tilde{N}} = 0$;

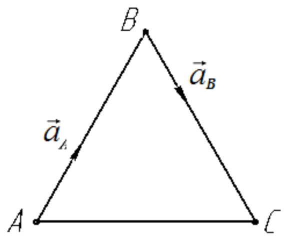
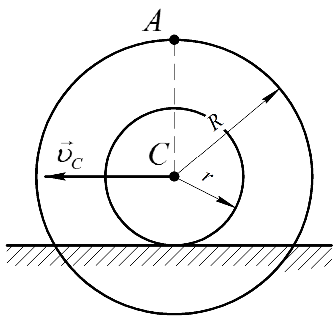
23.	В данном положении четырехзвенного механизма найти скорость точки *B*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*l*, *AB*=*BC*=2*l*.  	1). $\upsilon_B = \upsilon_{\grave{A}}$ 2). $\upsilon_B = 2\upsilon_{\grave{A}}$ 3).0; 4). $\upsilon_B = \frac{\upsilon_{\grave{A}}}{2}$
24.	В данном положении четырехзвенного механизма найти угловую скорость звена *BC*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*BC*=*l*, *AB*=2*l*.  	1). $\omega_{B\tilde{N}} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{B\tilde{N}} = \omega$; 3). $\omega_{B\tilde{N}} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{B\tilde{N}} = 0$;
25.	В данном положении четырехзвенного механизма найти скорость точки *B*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*BC*=*l*, *AB*=2*l*.  	1). $\upsilon_B = \upsilon_{\grave{A}}$ 2). $\upsilon_B = 2\upsilon_{\grave{A}}$ 3).0; 4). $\upsilon_B = \frac{\upsilon_{\grave{A}}}{2}$
26.	В данном положении четырехзвенного механизма найти угловую скорость звена *AB*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*BC*=*l*, *AB*=2*l*  	1). $\omega_{AB} = 2 \cdot \omega$; 2). $\omega_{AB} = \omega$; 3). $\omega_{AB} = \frac{\omega}{2}$; 4). $\omega_{AB} = 0$;

27.	Муфты A и B, скользящие вдоль прямолинейных направляющих, соединены стержнем $AB = 20$ *см*. Скорость муфты A - υ_A=40 *см/с.* Угловая скорость стержня AB - ω_{AB} равна … $с^{-1}$. 	1). 2 2). $\sqrt{2}$ 3). 4 4). $2\sqrt{2}$
28.	Определить положение МЦС шатуна АВ четырехзвенного шарнирного механизма в указанном на чертеже положении. 	1. Точка O_1; 2. Точка О; 3. Точка В; 4. Точка А.
29.	Диск радиуса R катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Скорость точки A равна υ. Угловая скорость ω вращения диска равна … 	1). $\omega = \frac{\upsilon}{R}$; 2). $\omega = \frac{2\upsilon}{R}$ 3). $\omega = \frac{\upsilon}{2R}$ 4). $\omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{\upsilon}{R}$
	Диск радиуса R катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Скорость точки A равна υ.	1). $\upsilon_C = \frac{\upsilon}{2}$; 2). $\upsilon_C = \upsilon$;

30.	Скорость центра диска *C* равна … 	3). $\upsilon_C = 2\upsilon$; 4). $\upsilon_C = \frac{3\upsilon}{2}$;
531.	В данном положении четырехзвенного механизма найти угловую скорость звена *BC*, если угловая скорость кривошипа *OA* равна ω и *OA*=*l*, BC=2*l*. 	1). $\omega_{BC} = 0,5\omega$; 2). $\omega_{BC} = \omega$; 3). $\omega_{BC} = \sqrt{2}\omega$; 4). $\omega_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega$
32.	Стержень *AB* длиной *l* скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти угловую скорость стержня, если скорость его конца *A* равна υ. 	1). $\omega = \frac{\upsilon}{l \cdot \cos\varphi}$; 2). $\omega = \frac{\upsilon}{l \cdot \sin\varphi}$; 3). $\omega = \frac{\upsilon}{l} \cdot \cos\varphi$; 4). $\omega = \frac{\upsilon}{l} \cdot \sin\varphi$;
33.	Прямоугольник *ABCD* совершает плоское движение. Скорость точки *A* равна υ и направлена по *AB*. Найти скорость точки *B*, если известно, что скорость точки *C* направлена по *BC*.	1). $\upsilon_B = \upsilon \cdot \frac{a}{b}$; 2). $\upsilon_B = \upsilon \cdot \frac{b}{a}$; 3). $\upsilon_B = \upsilon \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$; 4). $\upsilon_B = \upsilon \cdot \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b}$

		
34.	Равносторонний треугольник совершает плоское движение, причем, $\vec{\upsilon}_A \perp AB$ и $\upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon$. Найти угловую скорость треугольника если $\vec{\upsilon}_A \not\parallel \vec{\upsilon}_B$. 	1). $\omega = 0$; 2). $\omega = \dfrac{\upsilon}{a}$ 3). $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$ 4). $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$
35.	В указанном положении механизма найти скорость точки *C* диска, если угловая скорость кривошипа равна ω, и *AB=l*. Скольжением колеса пренебречь. 	1). $\upsilon_C = 2\omega \cdot l$; 2). $\upsilon_C = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot l$; 3). $\upsilon_C = \omega \cdot l$; 4). $\upsilon_C = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot R$;
36.	Равносторонний треугольник совершает плоское движение, причем, $\vec{\upsilon}_A \perp AC$ и $\upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon$. Найти угловую скорость треугольника если $\vec{\upsilon}_A \square \vec{\upsilon}_B$. 	1) $\omega = 0$; 2). $\omega = \dfrac{\upsilon}{a}$; 3). $\omega = \dfrac{\upsilon_A \sqrt{3}}{2a}$; 4). $\omega = \dfrac{\upsilon_A \sqrt{2}}{2a}$

37.	Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу. Скорость центра C постоянна и равна по модулю υ_C. Найти модуль ускорения точки A колеса, лежащего на вертикальном диаметре. 	1). $a_A = \frac{\upsilon_C^2}{R}$; 2). $a_A = \frac{\upsilon_C^2}{2R}$; 3). $a_A = 0$; 4). $a_A = \frac{\upsilon_C}{R}$;
38.	Квадрат $ABCD$ со стороной b совершает плоское движение. Найти угловое ускорение квадрата, если: $\vec{a}_A \parallel AB$; $\vec{a}_C \parallel AC$ и $a_A = a_C = a$. 	1). $\varepsilon = \frac{b}{a}$; 2). $\varepsilon = \frac{a}{b}$; 3). $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}b}{a}$; 4). $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}a}{b}$;
39.	Равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна l, совершает плоское движение. Найти угловую скорость треугольника ω, если $\vec{a}_A \parallel AB$, $\vec{a}_B \parallel BC$ и $a_A = a_B = a$. 	1). $\omega = \sqrt{\frac{a}{l}}$; 2). $\omega = \sqrt{\frac{a}{2l}}$; 3). $\omega = \sqrt{\frac{2a}{3l}}$; 4). $\omega = \sqrt{\frac{3a}{2l}}$

40.	Равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна l, совершает плоское движение. Найти угловое ускорение треугольника ε , если $\vec{a}_A \parallel AB$, $\vec{a}_B \parallel BC$ и $a_A = a_B = a$.  	1). $\varepsilon = \dfrac{a}{l}$; 2). $\varepsilon = \dfrac{a}{2l}$; 3). $\varepsilon = \dfrac{a\sqrt{3}}{2l}$; 4). $\varepsilon = \dfrac{2a}{l}$;
41.	Ступенчатое колесо катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу. Скорость центра C постоянна и равна по модулю υ_C. Найти модуль ускорения точки A колеса, лежащего на вертикальном диаметре. Соотношение радиусов $\dfrac{R}{r} = 2$.  	1). $a_A = \dfrac{\upsilon_C^2}{R}$; 2). $a_A = \dfrac{\upsilon_C^2}{2R}$; 3). $a_A = \dfrac{\upsilon_c^2}{r}$; 4). $a_A = \dfrac{2\upsilon_C^2}{R}$;

Библиографический список

1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: учеб. пособие: В 2 т:. Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань,2004. -730 с.: (и предыдущие издания).

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2003, 2006 – 416с. (и предыдущие издания).

3. Яблонский А.А. и др. Курс теоретической механики. учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань, 2004, -765 с.: (и предыдущие издания).

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие: Доп. Мин.обр. СССР / Ред. А.А. Яблонский/. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. - 382 с. (и предыдущие издания).

5. Диевский В.А. Теоретическая механика: сб.заданий: Рек. УМО/ - СПб.: Лань,2007. -192 с.

6. Диевский В.А. Теоретическая механика: учеб. пособие: Рек. УМО/ - СПб.: Лань,2005. -320 с.

7. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие: рек.. Мин.обр.РФ/ М.: Высш. шк. 2002. – 336 с.

8. Цывильский В.Л. Теоретическая механика: Учеб. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2001, 2008. – 319с.

9. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

СОДЕРЖАНИЕ

Татьяна Анатольевна Луганцева,

доцент кафедры АППиЭ (механика) АмГУ, канд. техн. наук

Плоскопараллельное движение: Учебное пособие.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 6,5. Заказ 332.