Министерство образования и науки Российской Федерации

Амурский государственный университет

МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ II

Практикум

Составители Г.П. Вохминцева, Г.Г. Торопчина,
И.Н. Шевченко

Благовещенск
Издательство АмГУ
2011

ББК 22.1 я 73
М 34

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
С.В. Ланкин, зав. кафедрой общей физики БГПУ, д-р физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный работник высшей школы РФ.

Вохминцева, Г.П., Торопчина, Г.Н., Шевченко, И.Н. (составители)
М 34 Математика. Часть II. : практикум / сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2011. – 160 с.

Практикум предназначен для студентов экономических специальностей первого курса. Рассматриваются в практикуме краткие теоретические сведения, решения типовых задач, содержатся вопросы для самопроверки, задания для аудиторной и самостоятельной работы, контрольные и домашние задания, тесты.

ББК 22.1 я 73

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с возросшей ролью математики в экономической науке будущие экономисты нуждаются в серьезной математической подготовке, которая давала бы возможность математическими методами исследовать широкий круг экономических задач и использовать теоретические знания на практике. Для этого, по меньшей мере, необходимо получение ими правильного общего представления о том, что такое математика и математическое моделирование.

Несомненно, математика имеет определенное мировоззренческое значение, но для специалистов по экономике математика является в большей мере инструментом анализа, организации, управления.

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов первого курса в весеннем семестре. В пособии рассматриваются основные сведения линейной алгебры, интегрального исчисления функции одной и нескольких переменных, элементы теории дифференциальных уравнений и рядов.

Объединение в одном пособии сведений из различных дисциплин (линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений) позволяет рассматривать общие понятия различных разделов в курсе одной математической теории.

По каждому изучаемому разделу в пособии приводятся основные теоретические сведения; задания для аудиторных и домашних работ; образцы тестовых заданий; заданий для контрольных работ; вопросы самопроверки.

Цель данного пособия заключается в облегчении поиска понятий, определений и формул курса высшей математики, их усвоению и овладением способностью свободной их трактовке и применению. В сборнике помещены рисунки, облегчающие понимание формул и определений и приводятся примеры, которые так же решаются для пояснения определений и свойств математических понятий.

Мы надеемся, что изучение математических дисциплин и экономических приложений позволит будущему специалисту приобрести базовые знания, для дальнейшего углубленного изучения и исследования экономических проблем с помощью математических методов, а также сформировать компоненты своего мышления.

П О Л О Ж Е Н И Е

о рейтинговой системе оценки успеваемости студентов
кафедры общей математики и информатики

Рейтинговая система оценки успеваемости студентов по кафедре ОМиИ является одной из форм контроля текущей успеваемости обучаемых. Она предусматривает еженедельный мониторинг и оценку в баллах учебной активности и уровня знаний по дисциплине.

1. По этой системе в баллах оценивается уровень следующих видов учебной деятельности студентов:
   - активность на практических занятиях;
   - экспресс тестирования на лекциях;
   - расчетно-графическая работа;
   - контрольная (самостоятельная) работа;
   - коллоквиум;
   - лабораторная работа.

Указанные виды учебной деятельности имеют следующее содержание.

Активность на практических занятиях. Оценивается учебная активность и самостоятельность работы студентов.

Экспресс-тестирование на лекциях. Систематически проводится на лекциях с целью проверки усвоения текущего теоретического материала. Заключается в ответе на один теоретический вопрос или решении одной простейшей задачи. Проводится письменно, как правило, в течение 5-6 минут.

Контрольная (самостоятельная) аудиторная работа. Проводится письменно, с целью оперативного контроля степени усвоения изученного материала, например, базовых положений отдельных дидактических единиц.

Расчетно-графическая работа. РГР содержит задачи, решение которых требует применения типового арсенала вычислительных приемов, усвоенных при изучении соответствующих дидактических единиц. РГР зависит от содержания и вычислительной сложности дидактической единицы.

С целью выявления качества усвоения изученного материала вводится процедура **«Защита РГР».**

Коллоквиум проводится письменно, с целью доэкзаменационной оценки уровня теоретических знаний и практических навыков.

Лабораторная работа. Проводится по темам, требующим применения вычислительных методов.

2. Рейтинговая оценка студента по дисциплине складывается из оценки за работу в семестре максимально **60 баллов** и экзаменационной оценки – максимально **40 балов**. Таким образом, максимально возможное количество баллов, которыми оценивается успеваемость за семестр по дисциплинам кафедры ОМиИ, равно **100**.
3. Студент, активно участвовавший в учебном процессе (доклады, рефераты, выступления на олимпиадах и конференциях) может быть поощрен лектором потока или заведующим кафедрой дополнительными баллами (как правило, не более 5 баллов за семестр).
4. Минимальное количество баллов за работу в семестре, необходимое для получения студентом допуска на экзамен, равно **30** баллов (половина баллов от максимального балла за работу в семестре).

Минимальное количество баллов за выполнение экзаменационной работы, необходимое для получения оценки: «удовлетворительно» – **15 баллов**; «хорошо» – **20 баллов**; «отлично» – **30 баллов**.

5. В течении семестра студенты выполняют рейтинговые мероприятия (см. приложение).

6. Распределение модульных баллов:

Соответствие итогового рейтинга студента и традиционных оценок устанавливается по следующей шкале:

Баллы (%)	Оценка
0-50	Неудовлетворительно
51-75	Удовлетворительно
76-90	Хорошо
91-100	Отлично

7. Студент, набравший в семестре **менее 30 баллов**, сдает экзамен по дисциплине в два этапа: **предварительный** и **основной**.

7.1. **Предварительный этап экзамена**

Предварительный этап проходит в день сдачи экзамена своей группы. На нем студент выполняет практическое экзаменационное задание по материалу, изученному в семестре и вошедшему в тесты, контрольные и домашние работы по данной дисциплине. Это практическое задание оценивается в **20** баллов. Предварительный экзамен считается сданным при условии набора на нем **10 и более** баллов. Результат **сданного** предварительного экзамена **суммируется** с семестровым рейтингом, а студент со своим новым рейтингом допускается к основному экзамену. При наборе студентом на предварительном этапе менее **10 баллов** экзамен считается **не сданным** и его результат **не добавляется** в итоговый рейтинг. В любом из указанных случаев после предварительного этапа экзамена в ведомость студенту выставляется оценка «**Неудовлетворительно**», а в графу «Суммарный балл» проставляется рейтинг с учетом результата предварительного экзамена.

7.2. **Основной этап экзамена**

Для студентов, успешно сдавших предварительный экзамен, основной экзамен проводиться в установленный на кафедре день пересдач.

Как исключение, студент, имевший семестровый рейтинг **в диапазоне от 20 до 30 баллов** и успешно сдавший предварительный этап экзамена (т.е.

набравший на нем 10 баллов и более), с разрешения ответственного экзаменатора, назначенного на экзамен, может быть допущен к основному экзамену в день сдачи предварительного экзамена (т.е. со своей группой).

Студенты, имеющее семестровый рейтинг **в диапазоне от 10 до 20 баллов** и успешно преодолевшие предварительный этап (10 баллов и более), сдают основной экзамен только в день пересдач.

Студенты, набравшие в семестре **менее 10 баллов** и успешно прошедшие предварительный этап экзамена, допускается к сдаче основного экзамена **только по назначению заведующего кафедрой или заместителя по учебной работе**.

Замечание. Руководству кафедры сдаются экзаменационные работы:
- предварительного экзамена (10 и более баллов) – в день его сдачи студентом;
- основного экзамена (для прошедших предварительный экзамен) – в день основного экзамена.

8. Для дисциплин с зачетом:

8.1. Минимальное значение рейтинговой оценки, набранной студентом по результатам текущего контроля по всем видам занятий, при которой студент допускается к сдаче зачета, составляет **40 баллов**.

8.2. Если к моменту проведения зачета студент набирает 51 и более баллов, они могут быть выставлены ему в виде поощрения в ведомость и в зачетную книжку без процедуры принятия зачета. Выставление баллов производится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплине.

8.3. Устранение задолженности студента по отдельным контролируемым темам дисциплины может проходить в течение семестра в часы дополнительных занятий или консультаций, установленных в расписании.

8.4. Устранение задолженности по текущему контролю для допуска студента к зачету проводится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплине.

Приложение (для экономических специальностей)

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4	
	Вид работы	Элементы матричной алгебры	Интегральное исчисление	Дифференциальные уравнения	Ряды	Итоговая работа за семестр
1	Контрольная работа	5	5	5		
2	Тест	5	5		5	
3	Расчетно-графическая работа	5	5		5	
4	Коллоквиум	5		5		
5	Домашние задания	1	2	1	1	$\sum = 60$

Оценка контрольных работа

«3» – 3 б
«4» – 4 б
«5» – 5 б

Тест 25 заданий

9 – 12 – 2 б
13 – 19 – 3 б
20 – 22 – 4 б
23– 25 – 5 б

Расчетно-графическая работа

Сдача в срок – 2
Защита: «3» – 1 б
«4» – 1,5 б
«5» – 3 б

Коллоквиум

«3» – 3 б
«4» – 4 б
«5» – 5 б

Приложение (для инженерных специальностей)

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4	Модуль 5	
	Вид работы	Функции нескольких переменных	Интегральное исчисление	Дифференциальные уравнения	Кратные интегралы	Элементы теории поля	Итоговая работа за семестр
1	Контрольная работа	3	3	3	3	3	5
2	Тест	5		5			
3	Расчетно-графическая работа		5	5	5		
4	Коллоквиум			5	5		
5	Домашние задания	1	1	1	1	1	$\sum = 60$ баллов

Оценка контрольных работа

«3» – 1 б
«4» – 2 б
«5» – 3 б

Тест 25 заданий

9 – 12 – 2 б
13 – 19 – 3 б
20 – 22 – 4 б
23 – 25 – 5 б

Расчетно-графическая работа

Сдача в срок – 2
Защита: «3» – 1 б
«4» – 1,5 б
«5» – 2 б

Коллоквиум

«3» – 3 б
«4» – 4 б
«5» – 5 б

9

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Основные определения.

Определение. Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

расположенных в m строк и n столбцов, называется матрицей размера m×n.

Числа a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} называются ее элементами.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов m = n, то матрица называется квадратной порядка n.

Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} образуют главную диагональ, а элементы a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1} – побочную диагональ квадратной матрицы.

Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой, а из одного столбца – матрицей-столбцом.

Транспонированием матрицы называется замена ее столбцов (строк) на строки (столбцы) с сохранением их порядка.

1. 2. Операции над матрицами.

Равенство матриц.

Матрицы А= (a_{ij}) и В= (b_{ij}) одного размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т.е. А=В, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

Суммой двух матриц А и В одного размера m×n называется матрица С= А+В, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для i= 1,2,…,m; j=1,2,…,n.

Произведением матрицы А на число α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы А на число α, т. е. $\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})$.

Умножение матриц

Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В этом случае матрицы называются согласованными.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ik}\, b_{kj}\,.$$

Задача 1.1. В два магазина поступило три вида товаров. Количество завезенного товара задано матрицей $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Вторичное поступление товаров в магазины описывается матрицей $B = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 7 \\ 14 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазины.

Решение. $A+B = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 8 & 7 \\ 14 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 18 & 22 \\ 21 & 11 & 11 \end{pmatrix}$.

Задача 1.2. Предприятие выпускает три вида продукции – П1, П2, П3, используя два вида сырья – S1, S2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} П1 & П2 & П3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} S1 \\ S2 \end{array} \end{array}.$$

Определить затраты сырья, необходимые для осуществления следующего выпуска товаров: $C = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$S = A \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot100+ & 1\cdot120+ & 3\cdot140 \\ 2\cdot100+ & 0\cdot120+ & 3\cdot140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 620 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что кроме этих данных указаны еще и стоимости каждого вида сырья (в расчете на единицу сырья): $P = (10 \quad 20)$.

Тогда стоимость всего затраченного сырья будет равна:

$$P \cdot A \cdot C = (10 \quad 20) \cdot \begin{pmatrix} 940 \\ 620 \end{pmatrix} = 21800 .$$

1.3. Определители и их свойства

Определителем (детерминантом) n-го порядка, соответствующим данной квадратной матрице A, называется число, символическая запись которого имеет вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

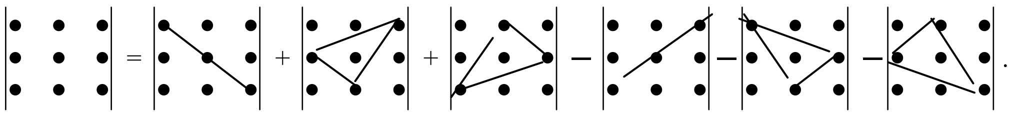
Определителем 2-го порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}.$$

Определителем 3-го порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{21}.a_{12}.a_{33}.$$

Запомнить формулу можно с помощью схемы



С в о й с т в а о п р е д е л и т е л е й.

1. Определитель не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами.

2. При перестановке элементов двух строк (столбцов) определитель изменит знак, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель равен нулю, если все элементы какой-либо строки (столбца)равны нулю.

4. Определитель с двумя одинаковыми (пропорциональными) строками (столбцами) равен нулю.

5. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

6. Если каждый элемент j столбца (строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из определителя A вычеркиванием элементов ***i*** строки и ***j*** столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их соответствующие алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

С помощью этой формулы вычисляются определители высших порядков. Свойство 8 называют разложением определителя по элементам ***i***-й строки.

9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т.е. $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

Задача 1.3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $=2\cdot4\cdot3 + 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot2\cdot3 - 1\cdot4\cdot3 - 2\cdot1\cdot2 - 0\cdot1\cdot3 =$

=24+1-12- 4 = 9.

Задача. 1.4. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. По свойству 8 разложить определитель можно по любой строке, но рациональнее разложение выполнить по элементам второй строки, в которой имеются два нуля.

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} = 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$=3 \cdot (3+14+48-126-2-8)+2 \cdot (4+24+36-96-9-4) = -303$.

1.4. Обратная матрица

Квадратная матрица называется неособенной (невырожденной), если ее определитель отличен от нуля (det A $\neq 0$).

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица А называется особенной (вырожденной).

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице А, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E –единичная матрица. Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу.

Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \tilde{A}^T = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,

где - $\tilde{A}^T$ присоединенная транспонированная матрица, элементы кото рой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы А.

Замечание. Особенная матрица обратной матрицы не имеет.

Задача 1.5. Найти матрицу обратную матрице А

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 7\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим $\det A=\begin{vmatrix}5 & 8 & 7\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=-40\neq 0$,

т.е. матрица А – неособенная.

Запишем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-10,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}8 & 7\\ 4 & 1\end{vmatrix}=20,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-12,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}8 & 7\\ 2 & 3\end{vmatrix}=10,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & 7\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-15,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5 & 8\\ 0 & 2\end{vmatrix}=10.$$

Составим присоединенную матрицу $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-10 & 3 & -2\\ 20 & -2 & -12\\ 10 & -15 & 10\end{pmatrix}$,

Найдем $\widetilde{A}^T=\begin{pmatrix}-10 & 20 & 10\\ 3 & -2 & -15\\ -2 & -12 & 10\end{pmatrix}$,

тогда $A^{-1}=-\dfrac{1}{40}\begin{pmatrix}-10 & 20 & 10\\ 3 & -2 & -15\\ -2 & -12 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{40} & \frac{1}{20} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

1.5. Системы линейных алгебраических уравнений.

Системы линейных алгебраических уравнений– один из основных разделов алгебры. Нет такой отрасли науки и приложений, где бы они не использовались в том или ином виде. При решении экономических задач системы линейных уравнений наиболее употребительны как в аппарате исследования, так и при рассмотрении частных проблем.

В общем виде система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} и b_j – произвольные числа ($i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1,2, \ldots, n$), которые называются соответственно коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений.

Решением системы уравнений называется набор n чисел $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ... , $x_n=a_n$, при подстановке которых каждое из уравнение системы обращается в тождество.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; и несовместной, если система не имеет решений. Совместная система уравнений имеет либо одно решение – и в таком случае называется определенной, либо больше одного решения и тогда она называется неопределенной.

Системы уравнений называются эквивалентными, если имеют одно и то же множество решений.

1.6. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений, когда число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $m = n$. Такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \end{cases}$$

....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn} = b_n .$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который называется определителем системы.

Заменим в этом определителе j-й столбец на столбец свободных членов B**,** т.е. получим в результате замены другой определитель, который обозначим Δ_{x_j} :

$$\Delta_{x_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера. Пусть Δ −определитель матрицы системы, а Δj −определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца свободных членов B. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta}, \quad j = 1,2, \ldots , n.$$

Данные формулы называются *формулами Крамера*

Задача1.6. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x+2y+z =5, \\ 2x- y+ z =6, \\ \end{cases}$$

$x + 5y \quad = -3.$

Решение. Составим и вычислим определитель системы уравнений $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера.

Вычислим определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$, полученные из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов матрицы A столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Откуда: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 2$; $\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = -1$; $\quad z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = 1$.

1. 7. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Пусть дана система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn} = b_n. \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Эта матрица состоит из n строк и n столбцов и называется матрицей системы.

Введем в рассмотрение две матрицы; матрицу неизвестных X и матрицу свободных членов B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений в матричной форме примет вид $AX = B$. Пусть матрица системы A является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение системы уравнений. $X = A^{-1}B$, где A^{-1} обратная матрица.

Задача 1.7. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x+y+z = 2, \\ x+y+3z = 6, \\ 2x+y+2z = 5. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов при неизвестных,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов.

Система уравнений в матричной форме запишется $AX=B$, поэтому решением системы будет матрица - столбец $X = A^{-1}B$.

Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице A.

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1(-4) + 1(-1) = 1.$$

Алгебраические дополнения всех элементов:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}=4;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}=0;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, $A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1&2\\4&2&-5\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\4&2&-5\\-1&0&1\end{pmatrix}.$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\4&2&-5\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 6+2\cdot 5\\4\cdot 2+2\cdot 6+(-5)\cdot 5\\(-1)\cdot 2+0\cdot 6+1\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x=2$; y= -5; z = 3.

1. 8. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса− метод последовательного исключения переменных −заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Элементарными преобразованиями системы являются;

1) умножение уравнения на число отличное от нуля;

2) сложение уравнения умноженого на любое число, с другим уравнением;

3) перестановка уравнений;

4) отбрасывание уравнений вида 0 = 0.

Элеметарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Задача 1.8. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} .$$

Чтобы из системы исключить неизвестную x_1 достаточно в этой матрице получить (накопить) нули в первом столбце.

Для этого первую строку перепишем, а затем , умножив ее на -2 и -3, прибавим ко второй и третьей строкам, соответственно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Получим нули во первом столбце. Вторую строку сложим с третьей строкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} .$$

Полученная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \quad x_2 - 6x_3 = -8, \\ \qquad -7x_3 = -7. \end{cases}$$

Отсюда найдем $x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1.$

1. 9. Ранг матрицы и его применение

Пусть дана матрица A, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \text{-------------} \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выберем в матрице A произвольно k строк и k столбцов ($k \le m, k \le n$) и выпишем элементы, которые находятся на их пересечениях. Эти элементы образуют квадратную матрицу k-го порядка матрицы A. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы A.

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы A, отличного от нуля.

Обозначается ранг матрицы A символами: $rangA$ или $r(A)$.

Итак, из определения следует, что если $r(A) = k$, то существует минор порядка k матрицы A, отличный от нуля, а все миноры порядка ($k+1$) равны нулю или не существуют.

Имеются несколько способов вычисления ранга матрицы.

Теорема 1. Если минор порядка k матрицы A отличен от нуля, а миноры порядка ($k+1$) окаймляющие рассматриваемый минор, равны нулю, то $r(A) = k$.

Заметим, что минор, который определяет $r(A)$, называется базисным минором матрицы A. Очевидно, что у матрицы может быть несколько базисных миноров. Строки и столбцы, которым принадлежат элементы базисного минора, называют базисными строками и базисными столбцами или линейно-независимыми строками и столбцами.

Теорема 2. Ранги эквивалентных матриц равны.

Определение. Матрицы A и B одинакового размера называются эквивалентными ($A \sim B$), если матрица B получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);

а) перемена мест двух параллельных рядов;

б) умножение элементов ряда на произвольное число $\lambda \neq 0$;

в) прибавление к одному ряду линейной комбинации других, параллельных ему рядов, умноженных на любые константы, отличные от нуля.

Элементарные преобразования меняют матрицу A, но не меняет ее ранга.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к ступенчатому виду, накапливая нули ниже главной диоганали. Тогда число ненулевых строк ровно рангу матрицы.

Задача 1.9 . Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним элементарные преобразования.

Поменяем первую строку с третьей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Первую строку умножим на -3 и прибавим ко второй.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первую строку умножим на -2 и прибавим к третьей получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку умножим на -1 и прибавим к третьей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Следовательно, $rangA = 2$.

1. 10. Система m линейных уравнений с n переменными.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \text{------------} \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$ A – матрица системы .

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \text{------------} & \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$ B – расширенная матрица системы.

Имеет место теорема Кронекера – Капелли.

Чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = r(B)$, при этом: а) если $r(A) = r(B) = n$ − система имеет единственное решение, б) если $r(A) = r(B) < n$ система имеет множество решений, в которой r независимых уравнений, r базисных переменных и n-r свободных переменных.

Задача 1.10. Исследовать и решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Введем в рассмотрение матрицы A и В и найдем их ранги:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad rangA = 2,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad rangB = 2.$$

Так как $rangA = rangB = 2 < n = 5$, то система совместна и имеет множество решений. Для решения в системе оставляем число уравнений равное двум.

Первое и третье уравнения системы линейно независимы, т.к. коэффициенты при x_1 и x_2 составляют отличный от нуля минор 2-го порядка.

Решения исходной системы найдем, решая систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Считая неизвестные x_3, x_4, x_5 свободными, переносим их в правые части уравнений, x_1, x_2 базисными переменными, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 + x_4 - x_5 + 1, \\ x_1 + 5x_2 = 9x_3 + 8x_4 - x_5. \end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 & 1 \\ 9x_3 + 8x_4 - x_5 & 5 \end{vmatrix} = 5 + x_3 - 3x_4 - 4x_5,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 \\ 1 & 9x_3 + 8x_4 - x_5 \end{vmatrix} = -1 + 7x_3 + 7x_4 .$$

$$\begin{cases} x_1 = \quad \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{4}x_3 - \dfrac{3}{4}x_4 - x_5, \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4}x_3 + \dfrac{7}{4}x_4. \end{cases}$$

Полученные формулы определяют общее решение исходной системы. При произвольных числовых значениях, x_3, x_4, x_5 получим частные решения исходной системы.

Так, при $x_3 = -1,\ x_4 = 0,\ x_5 = -2$, имеем вектор - решение (-2, -2, -1, 0, -3)

при $x_3 = -2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$, имеем вектор - решение (3, 3, 2, -1, 1).

1. 11. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Определение. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы A, соответствующий собственному значению λ, если имеет место равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

В конечномерном пространстве L_n это векторное равенство эквивалентно матричному равенству: $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0},\ \vec{x} \neq 0.$

Число λ есть собственное число матрицы A тогда и только тогда, когда $\det(A-\lambda E)=0$, т.е. λ есть корень многочлена $\det(A-\lambda E)$, называемого характеристическим многочленом матрицы A.

Уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

Задача 1.11. Дана матрица А=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти ее собственные числа и собственные векторы.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } (5-\lambda)(3-\lambda)-8=0, \text{ т. е. } \lambda^2-8\lambda+7=0;$$

характеристические числа $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=7.$ Находим собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу, из системы уравнений $\begin{cases} (5-\lambda_1)x_1+ \quad 2x_2=0, \\ \quad 4x_1+(3-\lambda_1)x_2=0. \end{cases}$

Так как $\lambda_1=1,$ то x_1 и x_2 связаны зависимостью $2x_1+x_2=0.$

Полагая $x_1=\alpha$ (α–произвольное число), получаем $x_2=-2\alpha$ и собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1=1,$

есть вектор $\vec{b}_1=\alpha\vec{i}-2\alpha\vec{j}.$

Подставляя в составим систему уравнений значение $\lambda_2=7,$

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)x_1+2x_2=0, \\ 4x_1+(3-\lambda_2)x_2=0 \end{cases}$$

получаем соотношение $x_1-x_2=0,$ т.е. $x_1=x_2=\beta$. Собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит вектор $\vec{b}_1=\beta\vec{i}+\beta\vec{j}.$

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

2.1 Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике.

Эффективное ведение хозяйства предполагает баланс между отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой, – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определенного вида таблицами, называемыми таблицами межотраслевого баланса.

Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в трудах американского экономиста В. Леонтьева в 1936 г. Эта модель основана на алгебре матриц.

Будем предполагать, что рассматривается n отраслей $O_1, O_2, \ldots, O_n$ хозяйства, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной и других отраслей, а другая часть предназначена для потребления вне сферы материального производства.

Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени $[T_0;T_1]$, в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем обозначения:

x_i– общий объем продукции i-й отрасли (ее валовый выпуск);

x_{ij}– объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j;

y_i–объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере (продукт конечного потребления). Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции.

Указанные величины сведем в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Производственное потребление $Q_1 \; Q_2 \; \dots \; Q_n$	Конечное потребление $\vec{y}$	Валовой выпуск $\vec{x}$
Q_1 $x_{11} \; x_{12} \; \dots \; x_{1n}$	y_1	x_1
Q_2 $x_{21} \; x_{22} \; \dots \; x_{2n}$	y_2	x_2
. . . .	…	…
Q_n $x_{n1} \; x_{n2} \; \dots \; x_{nn}$	y_n	x_n

Балансовый принцип связи различных отраслей хозяйства состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах.

В самой простой форме (гипотеза линейности) балансовые соотношения имеют вид:т $x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i$; $i=1,2,\dots,n$. (2.1)

Уравнения (2.1) называются соотношениями баланса.

Единицы измерения указанных величин могут быть натуральными (тонны, штуки, кубометры и т.д.) или стоимостными.

В зависимости от этого различают натуральный и стоимостный межотраслевой балансы. Для определенности будем иметь в виду стоимостный баланс.

В. Леонтьев на основании анализа экономики США в предвоенный период установил важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются практически неизменными и могут рассматриваться как постоянные числа.

Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.

При $x_j = 1$ (руб.) $a_{ij} = x_{ij}$. Таким образом, a_{ij} – есть стоимость i продукции, вложенной в 1 руб. продукции j-й отрасли.

В силу сказанного сделаем допущение: для выпуска любого объема x_j продукции j-й отрасли необходимо затратить продукцию i-й отрасли в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} –постоянный коэффициент. Иначе говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение называется гипотезой линейности существующей технологии. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых материальных затрат.

Таким образом, коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учесть только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

Итак, согласно гипотезе линейности имеем

$$x_{ij} = a_{ij}x_j; \quad i, j=1, 2, \ldots, n; \tag{2.2}$$

где x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью;

x_j – объем произведенной j-й отраслью продукции;

a_{ij} – коэффициенты прямых затрат (коэффициент материалоемкости).

Из уравнений (2.1) и (2.2) следует:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение технологическую матрицу, или матрицу коэффициентов прямых затрат (коэффициентов материалоемкости) и векторы (матрицы) конечного выпуска и потребления

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.3) в матричной форме запишется:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}\,. \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется уравнением линейного межотраслевого баланса.

Система (2.3) или уравнение (2.4) называются экономико-математической моделью межотраслевого баланса или вместе с интерпретацией матрицы А и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – моделью Леонтьева или моделью «затраты - выпуск».

В уравнении (2.4) приняты следующие обозначения:

$\vec{x}$ – вектор валового выпуска;

$\vec{y}$ – вектор конечного потребления;

А – матрица прямых затрат.

С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов.

1. Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (x_i), можно определить объемы конечной продукции (y_i) :

$$\vec{y} = (E-A)\,\vec{x}\,. \qquad (2.5)$$

2. Задав величины конечной продукции всех отраслей (y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (x_i):

$$\vec{x} = (E-A)^{-1}\,\vec{y}\,. \qquad (2.6)$$

3. По отдельным отраслям задаются уровни валовой продукции по другим уровни конечного продукта (в сумме число заданных величин равно n). Требуется определить значения остальных n переменных.

Заметим, что система (2.3) (уравнение (2.4)) имеет особенности, вытекающие из прикладного характера задачи: все элементы матрицы А и векторов $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ должны быть неотрицательными.

Определение. Матрица А≥0 (элементы матрицы А неотрицательны) называется продуктивной, если для любого вектора $\vec{y} \geq 0$ существует решение $\vec{x} \geq 0$ этого уравнения.

Первый критерий продуктивности: матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

Второй критерий продуктивности: матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Пусть $A \ge 0$ –продуктивная матрица.

Определение. Запасом продуктивности матрицы A называется число $\alpha>0$ такое, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1+\alpha$ продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$- непродуктивна.

Задача 2.1 Исследовать на продуктивность матрицу $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Решение. Легко видеть, что второй критерий продуктивности не выполняется. Поэтому исследуем продуктивность матрицы A с помощью первого критерия.

Имеем $E-A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}$,

$|E-A| = \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}56 - 0{,}54 = 0{,}02 \Rightarrow$ матрица $(E-A)^{-1}$ существует.

Найдем $(E-A)^{-1} = \dfrac{1}{0{,}02}\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы $(E-A)^{-1}$ неотрицательны, следовательно, матрица A продуктивна.

Задача 2.2. Найти запас продуктивности матрицы $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Решение. В силу первого критерия продуктивности матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда существует и неотрицательная матрица $(E-\lambda A)^{-1}$.

Найдем матрицу $E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1-0{,}5\lambda & -0{,}3\lambda \\ -0{,}4\lambda & 1-0{,}5\lambda \end{pmatrix}$.

Определитель ее $\Delta = |E - \lambda A| = (1-0{,}5\lambda)(1-0{,}5\lambda) - 0{,}12\lambda^2 =$

$= 1 - \lambda + 0{,}25\lambda^2 - 0{,}12\lambda^2 = 1 - \lambda + 0{,}13\lambda^2$. Обратной матрицей является матрица

$$(E-\lambda A)^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} 1-0{,}5\lambda & 0{,}3\lambda \\ 0{,}4\lambda & 1-0{,}5\lambda \end{pmatrix}.$$

Для продуктивности матрицы λA необходимо, чтобы все элементы матрицы $(E-\lambda A)^{-1}$ были неотрицательны, то есть $\Delta > 0$, $1 - 0{,}5\lambda > 0$, Из условия $\Delta = 0$, найдем $0{,}13\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6{,}5$; $\lambda_2 = 1{,}19$.

Решаем систему $\begin{cases} 0{,}13\lambda^2 - \lambda + 1 > 0, \\ 1 - 0{,}5\lambda > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 6{,}5;\ \lambda < 1{,}19 \\ \lambda < 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda < 1{,}19.$

При $\lambda < 1{,}19$ матрица λA будет продуктивной, при $\lambda = 1{,}19$ матрица λA непродуктивна. Запас продуктивности равен $1{,}19 - 1 = 0{,}19$, то есть запас продуктивности матрицы достаточен.

Задача 2.3. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл.ден.ед.:

Отрасли	Потребление O_1	O_2	Конечный продукт	Валовой продукт
O_1	3	8	89	100
O_2	5	7	88	100

Требуется:

1. Составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность.
2. Вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 100 % и 50% соответственно.
3. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в k=1 раз, а отрасли O_2 – на Р %=10%.

4. Найти векторы валового выпуска и потребления при уменьшении валового выпуска первой отрасли на 40% и увеличении конечного потребления второй отрасли на 2ед.

Решение.

1. Введем в рассмотрение матрицу $\begin{pmatrix} 3\ 8 \\ 5\ 7 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 88 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу прямых затрат А, учитывая, что ее элементы $a_{ij}=x_{ij}/x_j$:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}03\ 0{,}08 \\ 0{,}05\ 0{,}07 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что сумма элементов столбцов (строк) матрицы А меньше единицы. Следовательно, в силу второго критерия продуктивности матрица *A* продуктивна.

2. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид $\vec{y}=(E-A)\vec{x}$. При увеличении валового выпуска отраслей O_1 и O_2 на 100% и 50% соответственно получим новый вектор валового выпуска $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$. Вектор потребления $\vec{y}_1$, соответствующий вектору $\vec{x}_1$, находится из уравнения баланса

$$\vec{y}_1=(E\text{-}A)\,\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 129{,}5 \end{pmatrix}.$$

Изменения объемов конечного продукта O_1 на 182-89=93 ед., или 104,5%, O_2 на 129,5 − 88=41,5 ед., или на 47,2%.

3. Конечное потребление отрасли O_1 остается без изменения, а отрасли O_2 Станет равным 88·1,1 = 96,8; то есть новый вектор конечного потребления $\vec{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix}$ ·Новый вектор валового выпуска $\vec{x}_2$ находится из уравнения баланса

$$\vec{x}_2 = (E-A)^{-1}\vec{y}_2. \qquad E-A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}; \quad |E-A| = 0{,}8981.$$

$$\left(E-A\right)^{-1}=\frac{1}{0{,}8981}\begin{pmatrix}0{,}93 & 0{,}08\\ 0{,}05 & 0{,}97\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}03 & 0{,}09\\ 0{,}06 & 1{,}08\end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}1{,}03 & 0{,}09\\ 0{,}06 & 1{,}08\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}89\\ 96{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100{,}38\\ 109{,}88\end{pmatrix}.$$

Валовый продукт отраслей необходимо увеличить: O_1– на0,38% O_2 – на 9,88%.

4. Пусть $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}60\\ x_2\end{pmatrix}$ и $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ 90\end{pmatrix}$–искомые векторы валового выпуска и потребления. Согласно уравнению баланса получим:

$$\begin{pmatrix}60\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}03 & 0{,}08\\ 0{,}05 & 0{,}07\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ 90\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases}60=0{,}03\cdot 60+0{,}08\cdot x_2+y_1,\\ x_2=0{,}05\cdot 60+0{,}07x_2+90.\end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем $x_2=100,\ \ y_1=50{,}2.$

Таким образом, $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}60\\ 100\end{pmatrix},\ \vec{y}_3=\begin{pmatrix}50{,}2\\ 90\end{pmatrix}.$

2.2. Модель равновесных цен

Пусть $A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\ a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}$ матрица прямых затрат.

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$ — вектор валового выпуска;

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$$ — вектор цен (p_i – цена единицы продукции i-й отрасли).

От реализации продукции i-я отрасль получит доход $x_i p_i$, который идет на закупку сырья $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_b)$, а некоторая его часть составляет добавленную стоимость ν_i (стоимость условно чистой продукции).

Имеем равенства $x_i p_i = x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i} + \ldots + a_{ni}p_n) + \nu_i \quad i = \overline{1, n}$. (2.7)

Разделив обе части уравнения (2.7) на x_i получим:

$$p_i = a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_n + V_i, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad (2.8)$$

где $V_i = \dfrac{\nu_i}{x_i}$ –норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции i-й отрасли)

Если ввести в рассмотрение вектор норм добавленной стоимости $\vec{V} = (V_1, V_2, \ldots V_n)$, то система (2.8) в матричной форме примет вид:

$\vec{p} = A^T\vec{p} + \vec{V}$ или $\vec{p} = \left(E - A^T\right)^{-1} \cdot \vec{V}$. Уравнение называется моделью равновесных цен.

Задача 2.3. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух отраслей (промышленности и сельского хозяйства).

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ — матрица прямых затрат; $\vec{V}$=(4; 10) – вектор норм добавленной стоимости.

Определить:

Равновесные цены.

Равновесные цены при увеличении нормы где $V_i = \nu_i / x_i$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции *i*-й отрасли).

Решение. 1. Из уравнения модели равновесных цен $\vec{p} = \left(E - A^T\right)^{-1} \cdot \vec{V}$,

Имеем: $E\text{-}A^T=\begin{pmatrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,5 & 0,8 \end{pmatrix}$, $\left|E - A^T\right| = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,5 & 0,8 \end{vmatrix}$=0,48-0,15=0,33≠0,

следовательно, матрица $(E\text{-}A^T)^{-1}$=1/0,33$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,42 & 0,91 \\ 1,51 & 1,82 \end{pmatrix}$.

Тогда $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2,42 & 0,91 \\ 1,51 & 1,82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,68 + 9,1 \\ 6,04 + 18,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,78 \\ 24,24 \end{pmatrix}$.

2.3. Линейная модель торговли

Пусть бюджеты n стран, которые обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров.

Обозначим: a_{ij} – доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, если весь бюджет идет на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.17)$$

(сумма элементов любого столбца равна единице). Матрица А со свойством (2.17) называется структурной матрицей торговли. Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i-й страны выражается равенством

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n. \qquad (2.18)$$

Условие бездефицитной торговли (сбалансированной) формируется следующим образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т. е. $p_i \geq x_i$ или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.19)$$

Однако в условиях (2.19) не может быть неравенства. В самом деле, сложим эти неравенства при i от 1 до n. Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j, получим

$$x_1(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2})+\ldots+x_n(a_{in}+a_{2n}+\ldots+a_{nn})\geq x_1+x_2+\ldots+x_n$$

в силу свойств (2.17) $\Rightarrow$ $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq x_1+x_2+\ldots+x_n \Rightarrow$ возможен лишь знак равенства. Поэтому, условия (2.19) принимают вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Введем вектор бюджетов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Тогда система (2.20) запишется $A\vec{x} = \vec{x}$ или $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$. Последнее уравнение означает, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы A, соответствующий, собственному значению λ=1, то есть вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Задача 2.5. Дана структурная матрица торговли трех стран

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна в=7000.

Решение. Легко видеть, что элементы матрицы А удовлетворяют условиям теоремы 2. Следовательно, существует собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Из уравнения (2.17) получим $(A-E)\vec{x} = \vec{0}$ или $\begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & -0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

или $\begin{cases} -0,8x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 = 0, \\ 0,4x_1 - 0,5x_2 + 0,3x_3 = 0, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 - 0,6x_3 = 0. \end{cases}$

Определитель системы равен нулю, а $\begin{vmatrix} -0,8 & 0,1 \\ 0.4 & -0.5 \end{vmatrix} = 0.36 \neq 0$. Следовательно, ранг системы равен двум. Поэтому, отбросив третье уравнение, имеем:

$$\begin{cases} -0,8x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 = 0, \\ 0,4x_1 - 0,5x_2 + 0,3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k, \\ x_2 = 3k, \quad k \in R. \\ x_3 = 5/3k, \end{cases}$$

Учитывая, что сумма $x_1+x_2+x_3=7000$, определим величину k: $k+3k+5/3k=7000 \Rightarrow k=1235,3$. Поэтому $x_1=1235,3$; $x_2=3705,9$; $x_3=2058,8$. Таким образом, искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле соответственно равны: $x_1=1235,3$; $x_2=3705,9$; $x_3=2058,8$.

2.4. Типовые задачи и их решение

Задача 2.6. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели заданы векторами:

$\vec{\mathbf{g}}$ –вектор ассортимента (количество изделий);

$\vec{\mathbf{s}}$ – вектор расхода сырья (кг/изд.);

$\vec{\mathbf{t}}$ – вектор затрат рабочего времени (ч/изд.);

$\vec{\mathbf{p}}$ – ценовой вектор (ед/изд.).

Требуется определить ежесуточные показатели предприятия:

S – расход сырья;

T – затраты рабочего времени;

P – стоимость выпускаемой продукции, если $\vec{g}$ =(20; 40; 30; 30),

$\vec{s}$ =(4; 3; 5; 4), $\vec{t}$ =(5; 4; 6; 5), $\vec{p}$ =(40; 36; 60; 50).

Решение. Искомые величины S, T и P равны скалярным произведением вектора ассортимента $\vec{g}$ на векторы $\vec{s}$, $\vec{t}$ и $\vec{p}$ соответственно:

$S = \vec{g} \cdot \vec{s} = 20 \cdot 4 + 40 \cdot 3 + 30 \cdot 5 + 30 \cdot 4 = 470$(кг),

$T = \vec{g} \cdot \vec{t} = 20 \cdot 5 + 40 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 30 \cdot 5 = 590$(ч),

$P = \vec{g} \cdot \vec{p} = 20 \cdot 40 + 40 \cdot 36 + 30 \cdot 60 + 30 \cdot 50 = 5540$(ден. ед).

Задача 2.7.

Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы - столбцы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Найти затраты сырья, если задан вектор-план выпуска продукции

$\vec{\mathbf{g}}$=(50; 60; 40; 45).

Решение.

Пусть $\vec{S}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ – вектор затрат сырья, то есть координаты этого вектора равены величинам затрат по каждому виду сырья.

Тогда $\vec{s}^{\,T}=\vec{g}\cdot A=$

$$=(50;\,60;\,40;\,45)\bullet\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&3&5&6\\6&2&3&2\\4&5&5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\cdot1+60\cdot2+40\cdot6+45\cdot4\\50\cdot2+60\cdot3+40\cdot2+45\cdot5\\50\cdot4+60\cdot5+40\cdot3+45\cdot5\\50\cdot5+60\cdot6+40\cdot2+45\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}590\\585\\845\\1005\end{pmatrix}.$$

$\vec{S}=(590,\ 585,\ 845,\ 1005)$.

Задача 2.8.

Затраты четырех видов сырья на выпуск четырех видов продукции характеризуются матрицей А, приведенной в предыдущей задаче.

$C=\begin{pmatrix}4&5&3&6\\2&4&3&5\end{pmatrix}$ – матрица себестоимости сырья и его доставки (соответственно первая и вторая строки).

Найти: 1. Общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозки.

2. Общие затраты на сырье и его транспортировку при заданном векторе-плане $\vec{g}=(50;\,60;\,40;\,45)$.

Решение.

Общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку равны $A\,C^T$:

$$A\,C^T=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&3&5&6\\6&2&3&2\\4&5&5&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\5&4\\3&3\\6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}56&47\\74&61\\55&39\\98&75\end{pmatrix}$$

Общие затраты на сырье и его транспортировку определяются произведением вектора $\vec{g}$ на матрицу $A\,C^T$:

$$\vec{g} \cdot A\, C^{T} = (50\ \ 60\ \ 40\ \ 45)\cdot\begin{pmatrix} 56 & 47 \\ 74 & 61 \\ 55 & 39 \\ 98 & 75 \end{pmatrix} = (13850\ \ 10945).$$

Задача 2.9.

В матрицах А и В представлены:

А – данные о дневной производительности пяти предприятий, выпускающих четыре вида продукции;

В – матрица затрат сырья на единицу изделия;

$\vec{p}$ - вектор стоимости сырья;

$\vec{T}$ – вектор количества рабочих дней в году.

Требуется определить:

1. Годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий.

2. Годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья.

3. Годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска изделий указанных видов и при определенном количестве рабочих дней, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}$ =(35; 40; 45); $\vec{T}$ =(200, 160, 170, 150, 140).

Решение.

1. Годовая производительность каждого предприятия по каждому виду изделий равна произведению j-го столбца матрицы А на количество рабочих дней в году для этого предприятия:

$$A_{год}=\begin{pmatrix} 600 & 640 & 340 & 900 & 980 \\ 800 & 320 & 510 & 900 & 980 \\ 1400 & 480 & 0 & 150 & 560 \\ 1200 & 320 & 340 & 600 & 420 \end{pmatrix}.$$

2. Дневной расход каждого предприятия по каждому виду сырья равен В А:

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 & 34 & 21 & 50 & 63 \\ 93 & 46 & 33 & 76 & 90 \\ 101 & 53 & 36 & 85 & 105 \end{pmatrix}$$

где i-я строка соответствует виду сырья, j-й столбец – номер предприятия. Годовая потребность каждого предприятия в каждом виде сырья найдется умножением матрицы ВА на соответствующее количество рабочих дней в году для каждого предприятия:

$$BA_{год}=\begin{pmatrix} 14000 & 544 & 3570 & 7500 & 8820 \\ 18600 & 7360 & 5610 & 11400 & 12600 \\ 20200 & 8480 & 6120 & 12750 & 14700 \end{pmatrix}.$$

3. Годовая сумма кредитования каждого предприятия для закупки сырья получается умножением вектора стоимости сырья $\vec{\mathbf{P}}$ на годовую потребность каждого предприятия в сырье, т. е.

$$\vec{P}=\vec{p}\ BA_{год}=(35;\ 40;\ 45).\begin{pmatrix} 14000 & 544 & 3570 & 7500 & 8820 \\ 18600 & 7360 & 5610 & 11400 & 12600 \\ 20200 & 8480 & 6120 & 12750 & 14700 \end{pmatrix}=$$

$$=(2143000;\quad 69504;\quad 64475;\quad 1292250;\quad 1474200).$$

Следовательно, суммы кредитования предприятий для закупки сырья равны соответствующим координатам вектора $\vec{P}$.

Задачи для самостоятельной работы

Занятие 1. Методы вычисления определителей. Решение систем линейных уравнений методом Крамерра.

1. Вычислить определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad 3)\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad 2)\ \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}; \quad 3)\ \begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Решить неравенства:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad 2)\ \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 14.$$

4. Вычислить определители;

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad 4)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

$$1)\ \begin{cases} 3x - y + 2z = 1, \\ -4x + 5y = -6, \\ 6x - 3y + 2z = 2. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

5) $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$

6. Решить задачи:

1.Из Минска в Могилев необходимо перевезти оборудование трех типов: I типа –105 ед., II тип 120 ед., Ill типа –225 ед. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, приведено в табл.

Таблица 4.2

Тип оборудования	Вид транспорта		
	T_1	T_2	T_3
I	3	2	1
II	4	2	2
III	3	5	4

Записать в математической форме условия перевозки оборудования из Минска в Могилев.

Установить, сколько единиц транспорта каждого вида потребуется для перевозки оборудования из Минска в Могилев.

Занятие 2. Действия над матрицами.

Решение матричных уравнений.

1. Даны матрицы: A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и B =$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) A+B; 2) 2A; 3) 3B; 4) 2A−3B.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычислить: 1) $A \cdot B$; 2) $B \cdot A$.

3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычислить: 1) A^2; 2) $A \cdot E$; 3) $(A - E)^T$.

4. Выполнить действия с матрицами.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.,

5. Решить задачи.

1) В магазин поступило три вида товаров: 5 холодильников, 10 телевизоров и 8 пылесосов: $X_1 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}$– вектор поступления тех же товаров в следующем месяце. Найти поступление товаров за два месяца.

2) В два магазина поступило три вида товаров. Количество завозимого товара задано матрицей: $A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 \\ 12 & 15 & 4 \end{pmatrix}$. Вторичное поступление товаров в магазины описывается матрицей: $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 10 & 5 & 12 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазины.

3) Три месяца завоз товаров в магазин был постоянным и описывался матрицей: $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ и четыре месяца описывается матрицей: $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 6 & 10 & 3 \end{pmatrix}$. Найти суммарный завоз товаров в магазин.

4) Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий. Количество изделий задано матрицей $A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 15 & 10 \end{pmatrix}$, цена их $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ден. ед. Определить стоимость выпускаемой продукции.

5) Фирма реализует четыре вида товаров в трех районах. Данные об уровне продаж по районам образуют матрицу:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&7&8&4\\2&0&10&6\\0&4&3&5\end{pmatrix}$$ (объемы продаж в тыс. шт.). $C=\begin{pmatrix}7\\4\\2\\5\end{pmatrix}$ −соответствующие цены (тыс. руб./тыс. шт).

Найти матрицу суммарных продаж в каждом районе.

6) Предприятие выпускает три вида продукции Π_1, Π_2, Π_3, используя два вида сырья $-S_1$ и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$\mathrm{A}=\begin{array}{cc}
S_1 & S_2 & \\
\left(\begin{matrix}5&3\\0&1\\4&4\end{matrix}\right) & & \begin{matrix}\Pi_1\\\Pi_2\\\Pi_3\end{matrix}
\end{array}.$$

Определить: а) затраты сырья, необходимого для осуществления следующего выпуска товаров: $C=(150;\ 120;\ 80)$; б) стоимость всего затраченного сырья, если стоимость каждого вида сырья (в расчете на единицу) $\mathrm{P}=(20\ ;\ 30)$.

6) Найти обратную матрицу:

1) $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&2\end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{pmatrix}$.

7) Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&2\\-5&0\end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\-5&0\end{pmatrix}$.

8) Решить системы уравнений матричным методом.

$$\begin{cases}2x+3y+2z=9,\\x+2y-3z=14,\\3x+4y+z=16.\end{cases}$$

Занятие 3. Метод Гаусса. Решение систем m линейных уравнений с n незвестными.

Задача 1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Найти ранг матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. С помощью теоремы Кронекера - Капелли доказать совместность системы линейных уравнений и решить их:

1) $\begin{cases} 3x - y + 2z + 4t = 1, \\ 4x + 5y + z + 2t = -6, \\ 7x + 4y + 3z + 6t = -5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y + z + 3t = 0, \\ x + 2y + 3z + t = 0, \\ 3x + 3y + 4z + 4t = 0, \\ x - y - 2z + 2t = 0. \end{cases}$

Занятие 4. Приложения матричной алгебры.

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix}$, 2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.):

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
	O_1	O_2		
O_1	2	18	80	100
O_2	5	15	150	170

Таблица задана матрицей

X=$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} \\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} \end{pmatrix}$ и векторами $\vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$.

Требуется:

1. составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;
2. вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 50 % и 10% соответственно;
3. вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в 2 раза, а отрасли O_2 – на 40%.

<u>Задача 3</u>. Дана матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Зная конечный продукт первой отрасли $y_1 = 80$ и валовой выпуск второй отрасли $x_2 = 100$, найти конечнный продукт второй и валовой выпуск первой отрасли.

<u>Задача 4.</u> Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$– вектор норм добавленной стоимости.

Определить:

равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=2, b=3 соответственно.

<u>Задача 5</u>.Дана структурная матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 15000.

Задача 6. Используя балансовые соотношения между элементами таблицы, завершите составление баланса в каждом из следующих случаев:

1)

Отрасли	O_1	O_2	$\sum$	Y	X
O_1 O_2	150 60	0 140		140	
$\sum$					
V					
X		300			

2)

Отрасли	O_1	O_2	$\sum$	Y	X
O_1 O_2	– 20	40 20	60		 200
$\sum$					
V	45				
X					

Домашнее задание.

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

2. Предприятие выпускает продукцию трех видов – *А, Б и В*. Уровень выпуска лимитируется ограниченностью ресурсов. Все числовые данные приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Ресурсы	Запас ресурса	Нормы затрат на единицу продукции		
		А	*Б*	*В*
Сырье, кг	24	5	7	4
Материалы, кг	75	10	5	20
Оборудование, ед.	10	5	2	1

Записать в математической форме условия, которым должен удовлетворять план выпуска продукции, предполагая полное использование ресурсов. Найти план выпуска продукции.

3. Решить матричное уравнения $x \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему уравнений матричным методом $\begin{cases} 5x + 8y + z = 2, \\ 3x - 2y + 6z = -7, \\ 2x - y - z = -5. \end{cases}$

5, Найти ранг матриц $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. С помощью теоремы Кронекера - Капелли доказать совместность системы линейных уравнений и решить их:

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 11x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.):

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
	O_1	O_2	$\vec{y}$	$\vec{x}$
O_1	10	20	70	100
O_2	20	30	150	200

Требуется:

1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;

2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 40 % и 20% соответственно;

3) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в 1,5 раза, а отрасли O_2 – на 60%.

8. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства.

Пусть $A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V}=(10;\quad 12)$– вектор норм добавленной стоимости.

Определить:

равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=4, b=2 соответственно.

9. Дана структурная матрица $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 18000.

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x-y+2z+3t=4, \\ x+2y+z+2t=6, \\ 3x+y+3z+5t=10. \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1. Понятие линейного пространства. Примеры.
2. Арифметическое линейное пространство.
3. Понятие евклидового пространства. Примеры.
4. Линейная зависимость и независимость векторов.
5. Базис и размерность линейного пространства.
6. Переход к новому базису.
7. Линейные преобразования.
8. Матрица линейного пространства при переходе к новому базису.
9. Самосопряженный оператор и его свойства.

10. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.
11. Базис и размерность пространства « R_n ».
12. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов.
13. Неравенство Коши −Буняковского.
14. Определители 2-го порядка, их вычисление.
15. Определители 3-го порядка, их вычисление.
16. Свойства определителей.
17. Понятие определителя n-го порядка.
18. Что называется минором определителя n-го порядка, соответствующим какому-либо элементу определителя?
19. Что называется алгебраическим дополнением?
20. Вычисление определителей, связанные с алгебраическими дополнениями и элементами этого определителя.
21. Перечислите методы вычисления определителей. Укажите, на каком теоретическом материале основаны эти методы.
22. Правило Крамера (вывод).
23. Определение матрицы. Виды матриц.
24. Сложение и вычитание матриц, свойства.
25. Умножение матрицы на число, свойства.
26. Умножение матриц, свойства.
27. Равенство матриц.
28. Транспонирование матриц.
29. Обратная матрица (определение).
30. Нахождение обратной матрицы.
31. Решение матричных уравнений.
32. Решение систем уравнений матричным методом.
33. Минор матрицы.
34. Ранг матрицы. Методы его нахождения.
35. Элементарные преобразования матриц.

36. Эквивалентные матрицы.
37. Общий вид системы неоднородных линейных уравнений.
38. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений? Приведите примеры.
39. Общий вид системы однородных линейных уравнений.
40. Определение решения систем линейных уравнений.
41. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы уравнений.
42. Матричная запись систем линейных уравнений.
43. Методы решения систем линейных уравнений.
44. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
45. Теорема Кронекера - Капелли.
46. Условие единственности решения систем линейных уравнений.
47. При каких условиях система линейных уравнений имеет множество решений и как их найти?
48. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.
49. Решение систем однородных линейных уравнений.
50. При каких условиях однородная линейная система имеет отличные от нуля решения.
51. Что называется собственными значениями и собственными векторами квадратной матрицы. Алгоритм их нахождения.Вывод.
52. В чем заключается экономический смысл элементов матрицы прямых затрат?
53.Запишите уравнение линейного межотраслевого баланса.
54. Запишите решения уравнения линейного межотраслевого баланса.
55.Дайте понятие «продуктивность матрицы прямых затрат».
56. Дайте понятие «запаса продуктивности».
57. Сформулируйте критерии продуктивности матрицы прямых затрат.
58. Дайте понятие нормы добавленной стоимости.

59. Запишите уравнение модели равновесных цен.

6о. Дайте понятие структурной матрицы торговли.

61.Сформулируйте условие бездефицитной торговли.

Тест 1

1. Векторы $\vec{a} = \{2;4;\alpha;4\}$ и $\vec{b} = \{\alpha;7;2;4\}$ ортогональны при α, равном:

1) 2 ; 2) 8; 3) -11; 4) 11.

2. Векторы $\vec{a} = \{2;\ \alpha;3;2\}$ и $\vec{b} = \{4;2;\beta;4\}$ коллинеарны при значениях параметров, равных: 1) $\alpha = \frac{2}{3};\ \beta = 15$; 3) $\alpha = 3;\ \beta = 6$;

2) $\alpha = 2;\ \beta = 5$; 4) $\alpha = 1;\ \beta = 6$.

3. Детерминант матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ равен: 1) 4; 2) 12; 3) 0; 4) 3.

4. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,то наименьший элемент матрицы $A^T + 3B$ равен: 1) 4; 2) 2; 3) -1; 4) 0 .

5. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то наибольший элемент матрицы $A \cdot B$ равен:

1) 6 ; 2) 7; 3) 1; 4) 14 .

6. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ равен: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

7. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, то сумма элементов матрицы A^{-1} равна:

1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{5}{14}$; 3) 0; 4) 9 .

8. Если $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$, то координаты собственного вектора, соответствующего меньшему собственному значению, равны:

1) (1;2); 2) (-1;2); 3) (-2;1); 4) (1:-2).

9. Число свободных неизвестных в системе $\begin{cases}2x+\quad y+4z=0,\\ -x+2y-2z=0,\\ -5x+5y-10z=0\end{cases}$

равно: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

10. Если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, то матрица $C=2A+B$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 8 & -8\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & -8\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

11. Если $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид

1) $\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0\\ 8\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix}$.

12. Собственные значения собственных векторов линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, могут быть найдены по формуле

1) $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix}1+\lambda & 2\\ 3 & 4+\lambda\end{vmatrix}=0$;

3) $\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 3-\lambda & 4\end{vmatrix}=0$; 4) $\begin{vmatrix}1 & 2+\lambda\\ 3+\lambda & 4\end{vmatrix}=0$.

13. При умножении матрицы на число:

1) элементы одного из любых столбцов (строк) умножаются на это число.

2) все элементы матрицы умножаются на это число.

14. Матрица − это

1) прямоугольная таблица чисел, заключенная в вертикальные скобки −

$\left|a_{ij}\right|$, содержащая m строк и n столбцов;

2) прямоугольная таблица чисел, заключенная в скобки вида, $\left\|a_{ij}\right\|$, либо $\left\lfloor a_{ij} \right\rfloor$ содержащая некоторое число m строки и n столбцов;

3) прямоугольная таблица чисел, содержащая n строк и n столбцов, заключенных в вертикальные скобки $-\left|a_{ij}\right|$ и равная некоторому числу после вычисления.

15. Определитель − это

1) прямоугольная таблица чисел, заключенная в вертикальные скобки − $\left|a_{ij}\right|$, содержащая m строк и n столбцов;

2) прямоугольная таблица чисел, заключенная в скобки вида, $\left\|a_{ij}\right\|$, $\left(a_{ij}\right)$, либо $\left\lfloor a_{ij} \right\rfloor$ содержащая некоторое число m строки и n столбцов;

3) квадратная таблица чисел, содержащая n строк и n столбцов, заключенных в вертикальные скобки $-\left|a_{ij}\right|$ и равная некоторому числу после вычисления.

16. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ вычисляется поформуле

1) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$; 2) $a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}$; 3) $a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$; 4) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

17. Минором М $_{ij}$ любого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется…

1) матрица (n-1) –го порядка, получаемая из элементов исходной матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} ;

2) определитель (n-1) –го порядка, получаемая из элементов исходной

матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} ;

3) определитель исходной матрицы, умноженный на элемент a_{ij} .

18. При замене всех строк определителя соответствующими по номеру столбцами, определитель…1) меняет знак; 2) принимает новое числовое значение; 3) не изменяет своего числового значения.

19. Если элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, либо равны друг другу, то определитель равен…

1) удвоенному значению определителя, получаемому при вычеркивании соответствующих столбцов (строк); 2) нулю;

3) сумме произведений элементов этих столбцов (строк) на их алгебраические дополнения.

20. Матрица называется квадратной, если …

1) все элементы столбцов (строк) не равны нулю;

2) число строк не равно числу столбцов;

3) число строк равно числу столбцов.

21. При умножении матрицы на число…

1) все элементы матрицы умножаются на это число;

2) элементы одного и любого столбца (строки) умножаются на это число.

22. При умножении двух матриц должно соблюдаться условие…

1) число строк первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы;

2) число столбцов первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы;

3) число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы;

23. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если она удовлетворяет условию…

1) $A \cdot A^{-1}=1$; 2) $A \cdot A^{-1}=E$, где E - единичная матрица; 3) $A \cdot A^{-1}=A$.

24. Решение матричного уравнения AX=B имеет вид…

1) $X = A^{-1} \cdot B$; 2) $X = B \cdot A^{-1}$; 3) $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$.

25. Рангом матрицы называется …

1) произведение числа строк m на число столбцов n;

2) число, равное наибольшему из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля; 3) сумме числа строк m и числа столбцов n.

3. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3. 1. Свойства неопределенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Определение 2. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то множество функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

при этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, а переменная x – переменной интегрирования. Отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции называется интегрированием этой функции. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию. Чтобы проверить, правильность интегрирования, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Неопределенный интеграл обладает следующими его свойствами:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)\,dx, \quad \kappa = const \neq 0$;

5) $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$;

6) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

7) $\int f(u)du = F(u) + C$

3. 2. Таблица неопределенных интегралов, где $u = \varphi(x)$

1. $\int du = u + C.$

2. $\int\limits_{n \neq -1} u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int\limits_{u \neq 0} \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$

4. $\int\limits_{a \neq 1,\, a > 0} a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$

5. $\int e^u du = e^u + C.$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

7. $\int \cos u du = \sin u + C.$

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$

12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C.$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm \kappa}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm \kappa}\right| + C.$

15. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C.$

16. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C.$

17. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C.$

18. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$

19. $\int \frac{udu}{a \pm u^2} = \frac{1}{2} \ln\left|a \pm u^2\right| + C.$

20. $\int \frac{udu}{\sqrt{a \pm u^2}} = \pm\sqrt{a \pm u^2} + C.$

5. 3. Таблица дифференциалов

1. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2).$

2. $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3).$

3. $x^3dx = \frac{1}{4}d(x^4).$

4. $x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1}).$

5. $\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right).$

6. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}).$

7. $\frac{dx}{x} = d(\ln x).$

8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx).$

9. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx).$

10. $\sin xdx = -d(\cos x).$

11. $cosxdx = d(\sin x).$

12. $\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx).$

13. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x).$

14. $e^x dx = d(e^x).$

15. $e^{ax}dx = \frac{1}{a}d(e^{ax}).$

Пример 1. Найти $\int (3cosx + 1 - 2x^2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2+1})dx$.

Решение.

$$\int (3cosx + 1 - 2x^2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2+1})dx = 3\int \cos xdx + \int dx - 2\int x^2dx +$$

$$\int \frac{dx}{x} - 5\int \frac{dx}{x^2+1} = 3\sin x + x - \frac{2}{3}x^2 + \ln|x| - 5arctgx + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$.

Решение. Под знаком интеграла стоит неправильная дробь, выделяя целую часть, получим

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - arctg\,x + C.$$

Пример 3. Найти $\int \sin 5x dx$.

Решение. В силу свойства 6 имеем $\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

Пример 4. Найти $\int x e^{4x^2+3} dx$.

Решение. $\int x e^{4x^2+3} dx = \frac{1}{4\cdot 2}\int e^{4x^2+3} d(4x^2+3) = \frac{1}{8} e^{4x^2+3} + C$.

Пример 5. Найти $\int \frac{x^4 dx}{x^5+7}$.

Решение. $\int \frac{x^4 dx}{x^5+7} = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(x^5+7\right)}{x^5+7} = \frac{1}{5}\ln\left|x^5+7\right| + C$.

Пример 6. Найти $\int \frac{dx}{2x+3}$.

Решение. $\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$.

Пример 7. Найти $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+1} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1} = arctg(x-3) + C$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы.

1. $\int x^5 dx$. 2. $\int \sqrt{x} dx$. 3. $\int x^{-4} dx$. 4. $\int \frac{dx}{x^3}$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

6. $\int (2x^3 - 5x + 3) dx$. 7. $\int \frac{3x^2 + 2x - 7}{x^2} dx$.

8. $\int (4\sin x + 2\sqrt{x})dx.$

9. $\int (\frac{3}{x} - 5^x)dx.$

10. $\int (\frac{3}{\sin^2 x} + e^x)dx.$

11. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^4}dx.$

12. $\int \frac{dx}{4 + x^2}.$

13. $\int \frac{dx}{25 + x^2}.$

14. $\int \frac{dx}{5 + x^2}.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$

16. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}.$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - 36}.$

18. $\int \frac{1 + \cos 2x}{\cos x}dx.$

19. $\int \frac{cos2x}{\cos x - \sin x}dx.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6}}.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}.$

22. $\int cos4xd(4x).$

23. $\int cos4xdx.$

24. $\int cos(5x + 3)dx.$

25. $\int \sin(3x + 1)dx.$

26. $\int \sin(4 - 7x)dx.$

27. $\int \sin\frac{x}{3}dx.$

28. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}.$

29. $\int \frac{dx}{\cos^2(4x + 3)}.$

30. $\int \frac{dx}{\sin^2(8x - 1)}.$

31. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}.$

32. $\int 2^{3x}dx.$

34. $\int e^{-4x+1}dx.$

33. $\int e^{5x}dx.$

36. $\int xe^{x^2}dx.$

35. $\int \frac{dx}{e^{2x}}.$

37. $\int x^2 \sin x^3 dx.$

38. $\int xcosx^2 dx.$

39. $\int \frac{xdx}{x^2+5}$.

40. $\int x^3 e^{x^4} dx$.

41. $\int \cos^5 x \sin xdx$.

42. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+6}}$.

43. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$.

44. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

45. $\int \frac{tg^4 x}{\cos^2 x} dx$.

46. $\int \frac{ctg^5 x}{\sin^2 x} dx$.

47. $\int \frac{arctg^5 x}{1+x^2} dx$.

48. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

49. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

50. $\int \frac{\ln^6 xdx}{x}$.

51. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$.

52. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$.

53. $\int (5x+7)^9 dx$.

54. $\int \cos xe^{\sin x} dx$.

55. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-9x}}$.

56. $\int \sqrt{2x+4} dx$.

57. $\int \frac{d(3x-1)}{3x-1}$.

58. $\int \frac{dx}{(2x-3)^4}$.

59. $\int \frac{3x+4}{x^2+9} dx$.

60. $\int \frac{dx}{5x+4}$.

61. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

62. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

63. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$

64. $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$.

65. $\int \frac{x^3}{x-1} dx$

66. $\int \frac{2x+4}{x-3} dx$.

Домашнее задание

Вычислить интегралы.

1. $\int cos(8x+3)dx$.

2. $\int \sin(5x+1)dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^2(2x+3)}$.

5. $\int e^{-5x+3}dx$.

6. $\int xcos3x^2dx$.

7. $\int \cos^2 x \sin xdx$.

8. $\int \sin^4 x\cos xdx$.

9. $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

10. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

12. $\int \frac{\ln^4 xdx}{x}$.

13. $\int \frac{5x}{x^2+9}dx$.

14. $\int (4x+3)^4 dx$.

15. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

16. $\int \frac{x^3+4x-1}{x-1}dx$.

17. $\int \frac{x^2}{x^2+9}dx$

18. $\int \frac{3x+1}{x-2}dx$.

3. 4. Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы

$$\int udv = uv - \int vdu\ .$$

Эта формула позволяет свести вычисление интерала $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Данную формулу принято называть формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Укажем некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kxdx,\ \int P(x)\cos kxdx,$ где *P(x)* многочлен, *k* – некоторое число. Подобные интегралы находят методом интегрирования по частям, полагая

$$u = P(x),\ dv = e^{kx}dx\ (\sin kxdx,\ \cos kxdx).$$

Пример 1. Найти $\int x\cos xdx$.

Решение

$$\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos xdx \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - -\int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$$

2. Интегралы вида

$$\int P(x)\ln kxdx,\qquad \int P(x)arctgkxdx,\ \int P(x)\arcsin kxdx$$

$$\int P(x)arcctgkxdx,\ \int P(x)\arccos kxdx,$$

где *P(x)* – многочлен. Во всех этих случаях полагают

$$u = \{\ \ln kx,\ \ \arcsin kx,\ \ \arccos kx,\ \ arctgkx\ \}\ dv = P(x)dx.$$

Пример 2.Найти $\int xarctgxdx$.

Решение.

$$\int xarctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx,\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{2\cdot(1+x^2)} =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

3. Интегралы $\int \ell^{ax} \cos kxdx, \int \ell^{ax} \sin kxdx,$ приводят после повторного интегрирования по частям к уравнению относительно исходного интеграла.

Пример 3. Найти $\int \ell^{2x} \cos 3xdx$.

Решение.

$$\int \ell^{2x} \cos 3xdx = \left| \begin{matrix} u = \ell^{2x}, du = 2\ell^{2x}dx \\ dv = \cos 3xdx, v = \int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\ell^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3}\int \ell^{2x} \sin 3xdx = \left| \begin{matrix} u = \ell^{2x}, du = 2\ell^{2x}dx \\ dv = \sin 3xdu, v = -\frac{1}{3\cos 3x} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{3}\ell^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\ell^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3}\int \ell^{2x} \cos 3xdx \right).$$

Обозначим $\int \ell^{2x} \cos 3xdx = Y$.

Тогда $Y = \frac{1}{3}\ell^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9}\ell^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9}Y$. Решим уравнение относительно Y:

$$Y + \frac{4}{9}Y = \frac{1}{3}\ell^{2x}(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x), \quad Y = \frac{3}{13}\ell^{2x}(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x) + c.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы.

1. $\int x\ell^{4x}dx$.
2. $\int x\cos(6x+2)dx.$
3. $\int (3x+2)\sin 4xdx$.
4. $\int (x^2+1)\ell^{-2x}dx$.
5. $\int x^2 \sin xdx$
6. $\int x^3 \ln 2xdx.$
7. $\int \ln 4xdx.$
8. $\int arctgxdx$

9. $\int \sin(\ln x)dx.$ 10. $\int e^{3x}\sin xdx.$

11. $\int cos(\ln x)dx.$ 12. $\int e^{2x}\cos xdx.$

Домашнее задание

Найти интегралы.

1. $\int (4x+1)\sin 2xdx$. 2. $\int x^2 \ell^{3x}dx$.

3. $\int x^2 \ln 4xdx.$ 4. $\int x\cos(3x+5)dx.$

5. $\int \arcsin xdx$. 6. $\int \ln 4xdx.$

3. 5. Метод подстановки.

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение исходного интеграла к более простому интегралу. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной, который основан на формуле

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \ .$$

Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Пример 1. Найти $\int \sqrt{1+e^x}dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{1+e^x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+e^x}=t & e^x dx = 2tdt \\ 1+e^x=t^2 & \\ e^x=t^2-1 & dx=\dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix} \right|$$

$$=2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{1+e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C.$$

Пример 2. Найти $\int x(5x-1)^4dx$.

Решение.

$$\int x(5x-1)^4dx=\begin{vmatrix}5x-1=t\\ x=\frac{t+1}{5}\\ dx=\frac{1}{5}dt\end{vmatrix}=\frac{1}{25}\int(t+1)t^4dt=\frac{1}{25}\int t^5dt+\frac{1}{25}\int t^4dt=$$

$$=\frac{1}{25}(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5})+C=\frac{1}{25}(\frac{(5x-1)^6}{6}+\frac{(5x-1)^5}{5})+C.$$

Пример 3. Найти $\int\frac{x}{(x+3)^3}dx$.

Решение.

$$\int\frac{x}{(x+3)^3}dx=\begin{vmatrix}x+3=t\\ x=t-3\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{t-3}{t^3}dt=\int(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t^3})dt=$$

$$=\int t^{-2}dt-3\int t^{-3}dt=-\frac{1}{t}+\frac{3}{2t^2}+C=-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2(x+1)^2}+C.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы.

1. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.
2. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$.
3. $\int\frac{4x+3}{(x-2)^2}dx$.
4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.
5. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.
6. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}dx$.

Домашнее задание

Найти интегралы.

1. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}dx$. 2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}-1}dx$. 4. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x}dx$.

3. 6. Интегрирование рациональных функций

Дробно − рациональные функции образуют важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции.

Дробно − рациональной функцией называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и Q(x) – многочлены. Если степень многочлена в числителе больше или ровна степени многочлена в знаменателе, то дробь называется неправильной. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется правильной.

Например,

$\frac{2x^4}{x^2-3x+2}$ – неправильная дробь, $\frac{x^2+1}{x^4-x^2+3}$ – правильная дробь.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Это достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен. В результате получаем $-\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, где $W(x)$ – многочлен, а $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь.

Пример 1. Представить неправильную дробь $\frac{x^4-2x^3+x^2-1}{x^2+x-2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Выполним деление многочленов:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 & \underline{x^2 + x - 2} \\
-\underline{x^4 + x^3 - 2x^2} & x^2 - 3x + 6 \\
\qquad -3x^3 + 3x^2 - 1 & \\
\qquad -\underline{-3x^3 - 3x^2 + 6x} & \\
\qquad\qquad 6x^2 - 6x - 1 & \\
\qquad\qquad -\underline{6x^2 + 6x - 12} & \\
\qquad\qquad\quad -12x + 11 &
\end{array}
$$

Следовательно, $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = x^2 - 3x + 6 + \dfrac{-12x + 11}{x^2 - 3x + 6}$.

Так как интегрирование многочлена не представляет затруднений, то интегрирование дробно − рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Интегрирование простейших рациональных дробей

Рациональные дроби I. $\dfrac{A}{x-a}$, II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$

где A, a, p, q, M, N, $(n \ge 2)$ – действительные числа, n – натуральное число, а $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, отнесем к простейшим рациональным дробям.

Интегралы $\int \dfrac{A}{x-a}dx$ и $\int \dfrac{A}{(x-a)^n}dx$ берутся с помощью подстановки

$x - a = t$, а $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ сводится к табличному подстановкой

$$z=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'=x+\frac{p}{2}.$$

Пример 2.Найти $\int\frac{8dx}{(x-3)^5}$.

Решение.

$$\int\frac{8dx}{(x-3)^5}=8\int\frac{dx}{(x-3)^5}=\begin{vmatrix}x-3=t\\ dx=dt\end{vmatrix}=8\int\frac{dt}{t^5}=-\frac{2}{t^4}+c=-\frac{2}{(x-3)^4}+c.$$

Пример 3. Найти $\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx$.

Решение.

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx=\begin{vmatrix}z=\frac{1}{2}(x^2+2x+2)'=x+1\\ x=z-1,\quad dx=dz\end{vmatrix}=\int\frac{z-2}{(z-1)^2+2(z-1)+2}dz=$$

$$=\int\frac{z-2}{z^2+1}dx=\int\frac{zdz}{z^2+1}-2\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2}\ln(z^2+1)-2arctgz+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-$$

$$-2arctg(x+1)+c.$$

Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей. Для этого функцию Q(x) необходимо разложить на линейные и квадратичные множители. Согласно основной теореме алгебры уравнение $Q(x)=0$ имеет ровно столько корней (действительных и комплексных с учетом их кратности), какова степень многочлена Q(x), а комплексные корни всегда сопряженные .

Поэтому многочлен Q(x) разложим на линейные и квадратичные множители следующим образом:

$Q(x) = A(x-\alpha)^{\kappa}(x-\beta)^{\ell}\cdot\dots\cdot(x^2+px+g)^{s}(x^2+ux+v)^{r}\cdot\dots$ Здесь $\alpha, \beta, \dots$ - действительные корни многочлена Q(x) кратностей $\kappa, \ell, \dots$ соответственно; $A, p, g, u, v, \dots$ - действительные числа; x^2+px+g, $x^2+ux+v, \dots$ имеет комплексные сопряженные корни;

число $\kappa+\ell+\dots+s+r+\dots$ равно степени многочлена Q(x) . В этом случае дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ единственным образом представима в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\kappa}} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{\kappa-1}} + \dots + \frac{A_{\kappa}}{x-\alpha} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{\ell}} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{\ell-1}} + \dots + \frac{B_{\ell}}{x-\beta} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+g)^{S}} +$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+g)^{s-1}} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{x^2+px+g} + \frac{K_1x+\lambda_1}{(x^2+ux+v)^{r}} + \frac{K_2x+\lambda_2}{(x^2+ux+v)^{r-1}} + \dots + \frac{K_rx+\lambda_r}{x^2+ux+v} + \dots,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_{\kappa}, B_1, B_2, \dots, B_{\ell}, M_1, N_1, \dots, M_s, N_s, K_1, \alpha_1, \dots, K_r, \alpha_r$ – некоторые вещественные числа, подлежащие определению. Обратим внимание, что каждому множителю $(x-\alpha)^k$ в разложении соответствует *к* простейших дробей типа I и II, а каждому множителю

$(x^2+px+g)^s$ – группа *s* простейших дробей типа III и IV.

<u>Пример 4.</u> Записать функции в виде суммы простейших дробей.

1) $$\frac{2x-1}{x^3(x-1)^2(x+3)} = \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{x-1} + \frac{C}{x+3}.$$

2) $$\frac{3x^2+4}{(x+2)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

3) $$\frac{x^2}{(x^3-8)(x^2-4)}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{x^2}{(x+2)(x-2)^2(x^2+2x+4)}=$$

$$=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1}{(x-2)^2}+\frac{B_2}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+4}.$$

4) $$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+4)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+4}.$$

Для вычисления неизвстных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, \mathrm{M}_r, N_r \ldots$ приведем простейшие дроби к общему знаменателю *Q(x)* и приравняем многочлен, получившийся в числителе, к многочлену *P(x)*. Так как равенство между многочленом P(x) и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех x, то коэффициенты при равных степенях *x* должны быть равны между собой. Приравнивая их, получим систему уравнений первой степени, из которой определяются числа $A_1, A_2, \ldots, N_r, M_r \ldots$.Такой метод отыскания коэффициентов разложения рациональной функции называется методом неопределенных коэффициентов

Пример 8. Разложить рациональную дробь $\frac{x-1}{x(x^2+1)}$ на простейшие дроби.

Решение.

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}, \qquad \frac{x-1}{x(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+x(Mx+N)}{x(x^2+1)},$$

$x-1=A(x^2+1)+x(Mx+N),\ x-1=(A+M)x^2+Nx+A$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему для нахождения коэффициентов *A, M, N*:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 0=A+M \\ x & 1=N \\ x & -1=A \end{array}, \quad A=-1, N=1, M=1.$$

Следовательно, $\dfrac{x-1}{x(x^2+1)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов можно дать переменной *x* несколько частных значений (лучше те, которые обращают знаменатель в нуль) и получить систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов.

Пример 9. Разложить рациональную функцию $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ на простейшие дроби.

Рещение. Разложим знаменатель x^2-5x+6 на множители $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, так как $x=3$ и $x=2$ является корнями уравнения $x^2-5x+6=0$.

Запишем разложение дроби в сумму простейших дробей

$\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-2}$. Отсюда $2x-1=A(x-2)+B(x-3)$.

Это равенство справедливодля всех значений *x*.

При $x=2$, $B=-3$. При $x=3$, $A=5$.

Таким образом, $\dfrac{2x-1}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}$.

Пример 10. Разложить $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ на простейшие дроби.

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^3-4x=x(x+2)(x-2),$$

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Следовательно, $4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$

Придавая x последовательно частные значения, равные корням знаменателя, находим

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -8=-4A, \\ x=2 & 40=8B, \\ x=-2 & -24=8C, \end{array} \qquad \text{откуда } A=2, B=5, C=-3,$$

поэтому $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x+2}$.

<u>Пример 11.</u> Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^3-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx.$

<u>Решение.</u>

Подынтегральная дробь – неправильная, поэтому выделим целую часть и в полученной правильной дроби разложим знаменатель на множители:

$$\int(x+1)dx-\int\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}dx\ ,$$

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1},$$

$$x+2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Подставляя последовательно в обе части равенства значения

$x=0,\ x=2,\ x=-1$ (корни знаменателя), получим $A=-1,\ B=\dfrac{2}{3},\ C=\dfrac{1}{3}$.

Поэтому

$$\int(x+1)dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

<u>Пример 12</u>. Найти $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}$.

<u>Решение.</u> $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+4)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Mx+N}{x^2+4}$,

$$x=A(x^2+4)+(Mx+N)(x+1),$$

$$x=Ax^2+4A+Mx^2+Nx+Mx+N.$$

Сгруппируем слагаемые относительно $x^2,\ x^1,\ x^0$.

$$x = (A+M)x^2 + (N+M)x + (4A+N).$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+M=0, \\ x^1 & N+M=1, \\ x^0 & 4A+N=0. \end{array} \quad \text{Откуда } A=-\frac{1}{5};\ M=\frac{1}{5};\ N=\frac{4}{5}.$$

Тогда $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{5}\int \frac{x+4}{x^2+4}dx = -\frac{1}{5}\ln|x+4| + \frac{1}{10}\int \frac{dx^2}{x^2+4} +$

$+\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+4} = -\frac{1}{5}\ln|x+4| + \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{2}{5}arctg\,\frac{x}{2} + c.$

Задачи для самостоятельной работ

Найти интегралы.

1. $\int \frac{xdx}{x^2-2x-3}$. 2. $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+13}dx$. 3. $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+1)}$.

4. $\int \frac{(x+1)dx}{x(x-1)(x+2)}$. 5. $\int \frac{dx}{x^2(x-2)}$. 6. $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-2)(x-1)^2}$.

7. $\int \frac{x^5-2x^3+4}{x^3-4x}dx$. 8. $\int \frac{xdx}{(x^2+2)(x+1)}$. 9. $\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+1)x}$.

Домашнее задание

Найти интегралы.

1. $\int \frac{xdx}{x^2-4x-5}$. 2. $\int \frac{x+1}{8-2x-x^2}dx$. **3.** $\int \frac{(x+1)dx}{(x-4)(x+3)}$.

4. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$. 5. $\int \frac{(2-x)dx}{(x^2+1)(x+5)}$. 6. $\int \frac{dx}{x^3-x^2+x-1}$.

3. 7. Интегрирование иррациональных функции

Интегрирование иррациональных функции сводится к подбору подстановки, с помощью которой освобождаемся от иррациональности. Такая операция называется рационализацией функции.

1. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}} ...,)dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots$ - целые числа, можно рационализировать подстановкой $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}, \ldots$

Пример 1. Найти $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

Решение.

Так как общий знаменатель дробных показателей 1/2, 1/3 равен 6, то произведем замену $x = t^6$:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^6, t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^3 \\ \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5}{t^3 - t^2} dt = 6\int \frac{t^6}{t-1} dt =$$

$$= t^6 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 6t + 6\ln|t-1| + C =$$

$$= x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_1}{n_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_2}{n_2}}, ...)dx$, где $(n_1, m_1, n_2, m_2, ...)$ –целые числа рционализируются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, s – общей знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

Пример 2. Найти $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = I.$

Решение.

$$I = \left| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2, x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}, 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\cdot t\cdot\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt = -\int\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + c = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}} = \mathrm{Y}.$

Решение.

$$Y = \left| \begin{array}{l} x+3 = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{array} \right| = 4\int\frac{t^3dt}{(t-1)t^2} = 4\int\frac{tdt}{t-1} = 4\int\frac{(t-1)+1}{t-1}dt = 4(t + \ln|t-1|) +$$

$$= 4\left(\sqrt[4]{x+3} + \ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|\right) + c.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.
2. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$.
3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+x}}$.
5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.
7. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.
8. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.
9. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$.
10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.
11. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.
12. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

Домашнее задание

Найти интегралы

1. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$.   2. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.   3. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

3. 8 Интегрирование тригонометрических функций

1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ функция, рационально зависящая от sinx и cosx, сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$tg\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, x=2arctgt,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

которая называется универсальной.

Пример 1. Найти. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{5+3\cos x}=\left|\begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|===\int \frac{2\mathrm{dt}}{(5+\frac{3(1-\mathrm{t}^2)}{1+t^2})(1+\mathrm{t}^2)}=\int \frac{2dt}{8+2t^2}=$$

$$=\int \frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+c=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{2}\right)+c.$$

2. Интегралы вида $\int R(\sin x)\cos xdx$ и $\int R(\cos x)\sin xdx$ рационализируются подстановкой *sinx=t* или *cosx =t* соответственно.

Пример 2. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$.

Решение.

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x}{\cos x-3}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x-3}\sin xdx=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\-\sin xdx=dt\end{array}\right|=-\int\frac{1-t^2}{t-3}dt=$$

$$=\int\frac{(t^2-1)dt}{t-3}=\int(t+3+\frac{8}{t-3})dt=\frac{t^2}{2}+3t+8\ln|t-3|+c=\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+c.$$

3. Интегралы вида $\int R(tgx)dx$ рационализируются подстановкой

tgx = t, dx $=\frac{dt}{1+t^2}$.

Пример 3. Найти $\int\frac{1+tg^2x}{1+tgx}dx$.

Решение.

$$\int\frac{1+tg^2x}{1+tgx}dx=\left|\begin{array}{l}tgx=t\\dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+t^2)dt}{(1+t)(1+t^2)}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|=\ln|1+tgx|+C\ .$$

4. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, если *sinx* и *cosx* входят в подынтегральную функцию только в четных степенях, вычисляются с помощью подстановки $tgx=t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}.$

Пример 4. Найти $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\left|\begin{array}{l}tgx=t,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\\\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{1}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}arctg\frac{t}{\sqrt2}+c=\frac{1}{\sqrt2}arctg\frac{tgx}{\sqrt2}+c.$$

5. Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n xdx$, *m* и *n* – целые числа.

а). Одно из чисел m или n нечетно. Пусть $m=2k+1$, *n* –любое, тогда

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x d \sin x = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x).$$

В результате получаем интеграл от степенной функции.

Пример 5. Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x d \sin x = \int \sin^2 x \left(1-\sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) =$$

$$= \int \sin^2 x d\left(\sin x\right) - \int \sin^4 x d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^2 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c.$$

б). Числа m и n – четные и неотрицательные.

Тогда используются формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 6. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 4x\right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

6. Для вычисления интегралов вида

$$\int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx$$

применяют формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму функций:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x) dx,$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx,$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\sin(m-n)x + \sin(m+n)x) dx.$$

Пример 7. Найти $\int \sin 4x \sin 2x dx$.

Решение. $\int \sin 4x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 6x) dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$.

7. Интегралы вида $\int tg^n x dx,\ \int ctg^n x dx,$ n – целое положительное число, вычисляют с использованием формул:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,\ \ ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Пример 8. Найти $\int tg^4 x dx$.

Решение.

$$\int tg^4 x dx = \int tg^2 x tg^2 x dx = \int tg^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dx -$$

$$- \int tg^2 x dx = \int tg^2 x d(tgx) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + c.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы

1. $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$.
2. $\int \cos^2 3x dx$.
3. $\int (4 + \cos 2x)^2 dx$.
4. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.
5. $\int \sin 4x \cos 6x dx$.
6. $\int \sin 3x \sin 6x dx$.
7. $\int \cos^3 x dx$.
8. $\int tg^4 x dx$.
9. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.
10. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$.
11. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$.
12. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$

Домашнее задание

Найти интегралы.

1. $\int \sin^2 4x dx$ 2. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$. 4. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{cos x}} dx$. 6. $\int \frac{dx}{ctg^3 x}$.

Контрольные вопросы

1. Неопределенный интеграл, его определение, геометрическая интерпретация.
2. Метод подстановки**.**
3. Интегрирование по частям.
4. Разложение правильной дроби на простейшие
5. Интегрирование рациональных функций.
6. Интегрирование иррациональных функций.
7. Интегрирование тригонометрических функций.

4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4. 1. Определение. Формула Ньютона - Лейбница

Определение**.** Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b]:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

Сама функция f(x) на отрезке [a,b] называется интегрируемой подынтеграль ной функцией, *а* – верхний предел интегрирования, b – нижний предел интегрирования, а *х* – переменная интегрирования.

Теорема. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то она интегрируема на этом отрезке.

Формула Ньютона -Лейбница

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и функция F(x) является ее некоторой первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Решение. $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$

Пример 2. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$.

Решение. $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\ \Big|_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

Пример 3. Вычислить $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\ \Big|_{-1}^1 = arctg\ 1 - arctg\ (-1) = \frac{\Pi}{4} - (-\frac{\Pi}{4}) = \frac{\Pi}{2}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы.

1. $\int\limits_1^2 (3x^2-5)dx$;
2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$;
3. $\int\limits_{-1}^2 (4x^3+2x)dx$;
4. $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$
5. $\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}dx$;
6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$;
7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;
8. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{4+x}$.

4. 2. Методы интегрирования

1. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть u=u(x) и v=v(x) – непрерывные и дифференцируемые (т.е. имеют непрерывные производные) функции на отрезке [a,b], тогда

$$\int\limits_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} x\cos xdx$.

Решение. $\int\limits_0^{2\pi} x\cos xdx = \left|\begin{array}{ll} \mathrm{u = x} & \mathrm{du = dx} \\ \mathrm{dv = \cos xdx} & \mathrm{v = \int \cos xdx = \sin x} \end{array}\right| =$

$= \mathrm{x\sin x}\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{\sin x\,dx} = \mathrm{x\sin x}\Big|_0^{2\pi} + \mathrm{\cos x}\Big|_0^{2\pi} = \left[2\pi\cdot\sin(2\pi)-0\cdot\sin(0)\right]+$

$+\left[2\pi\cdot\cos(2\pi)-0\cdot\cos(0)\right]=0.$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^e x^2 \ln x dx$.

Решение. Положим $\left| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right|$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_1^e x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int\limits_1^e x^3 \frac{dx}{x} = (\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}) \Big|_1^e = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int\limits_0^1 (2x+1)e^x dx$;

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$;

3. $\int\limits_1^e x^2 \ln x dx$;

4. $\int\limits_1^2 \ln x dx$.

2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b];
2) функция x=φ(t) непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке [α, β];
3) a=φ(α), b=φ(β).

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

Решение: $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+x}=t \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \\ \text{если } x=o, \ \ mo \ \ t=1, \\ \ \text{если} \ \ x=3, \ mo \ t=2 \end{array} \right| = \int_1^2 \left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2tdt =$

$$= 2\int_1^2 \left(t^4-t^2\right)dt = 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 7\frac{11}{15}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Пусть $x=t^2$, тогда $dx=2tdt$, при $x=0$ $t_1=0$ и при $x=4$ $t_2=2$. Получаем:

$$\int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{(t+1)-1}{1+t}dt = 2\int_0^2 (1-\frac{1}{(1+t)})dt =$$

$$= 2(t-\ln(1+t))\Big|_0^2 = 4-2\ln 3.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Применим подстановку

$t = tg\frac{x}{2}$, тогда $x = 2arctgt$,

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $t_1=0$, $t_2=1$.

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg\ 0) = \frac{\Pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. 3. Интегрирование четных и нечетных функции

Если f(x) четная функция, т.е. f(-x) = f(x), то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Если f(x) нечетная функция, т.е. f(-x) = -f(x), то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы.

1. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$;
2. $\int_{4}^{9} \frac{xdx}{\sqrt{x}-1}$;
3. $\int_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$;
4. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;
5. $\int_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$;
6. $\int_{3}^{8} \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$;
7. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sin^5 x}$;
8. $\int_{0}^{1} \left(e^x+4\right)^2 e^x dx$.

Домашнее задание

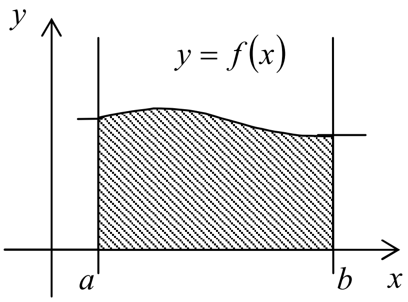
Вычислить интегралы.

1. $\int_{1}^{2} \left(x^2+4x\right)dx$;
2. $\int_{0}^{\pi} \sin xdx$;
3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;
4. $\int_{0}^{2} \frac{x}{x+4}dx$;
5. $\int_{0}^{1} (x+1)^2 dx$;
6. $\int_{1}^{2} \frac{x}{1+x^2}dx$.
7. $\int_{0}^{1} x\ell^{2x}dx$;
8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx$;
9. $\int_{1}^{2} x^3 \ln xdx$.
10. $\int_{1}^{16} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$;
11. $\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$;
12. $\int_{0}^{25} \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

4. 4. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур

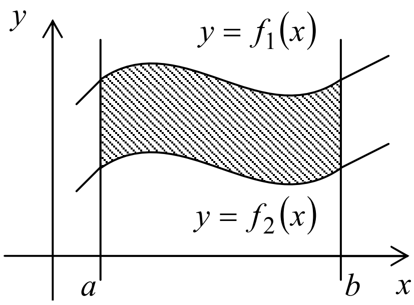
1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. В силу геометрического смысла определенного интеграла площадь криволинейной трапеции (рис.1) численно равна интегралу от данной функции по данному отрезку, т.е.



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Рис. 1.

2. Если фигура ограничена графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, прямыми $x = a,\ x = b$ (рис. 2), то ее площадь равна



$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx\ .$$

Рис.2.

<u>Пример 1</u>**.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2 - x^2$ и параболой $y = x^2$.

<u>Решение.</u> Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2$$

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1; x_2 = 1 \Rightarrow a = -1;\ b = 1.$$

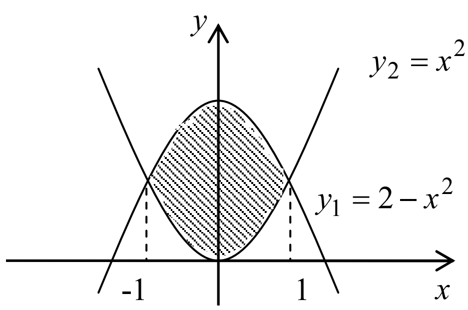


Рис. 3

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\left(2-x^2\right)-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx=2\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=$$
$$=2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)\right)=\frac{8}{3}.$$

3. Площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta$ вычисляется по формуле $S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$,

где верхняя граница задана параметрически $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

4. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

$\rho=\rho(\varphi)$ - кривая, заданная в полярной системе координат, $\alpha\le\varphi\le\beta$.

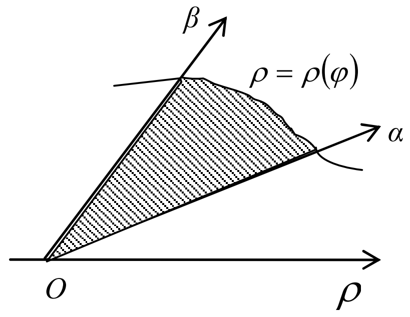


Рис. 4.

Пример 1.Найти площадь кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (см. рис.5).

Решение. Из рисунка следует, что кардиоида симметрична оси $O\rho$, тогда

$$S=2\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\rho^2d\varphi=a^2\int_{0}^{\pi}(1+\cos(\varphi))^2d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2\ \text{(кв. ед.)}$$

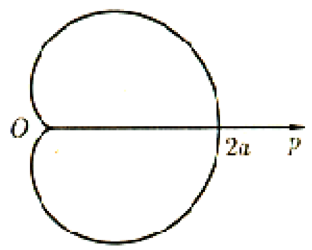


Рис. 5.

2. Вычисление длин дуг плоских кривых

1) Длина L дуги кривой, заданной уравнением y=*f*(x), $a \le x \le b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

2) Длина L дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

3) Длина L дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi.$$

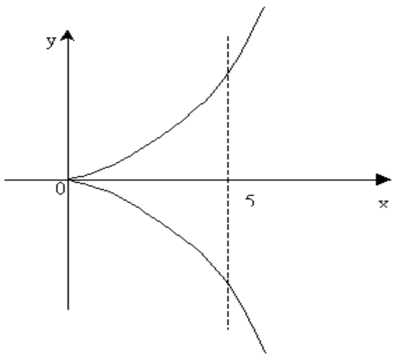


Рис. 6.

Пример 1. Найти длину дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$ от x=0 до x=5 (рис. 5).

Решение. Кривая симметрична относительно оси Ox. Найдем длину верхней ветви кривой. Из уравнения $y = x^{3/2}$ находим $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Далее, применяя формулу вычисления длины дуги получим

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5 = \frac{335}{27}.$$

3. Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции *a*ABb, ограниченной графиком функции, непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a,b]$ (рис. 6). Объем тела вращения определяется форму-

лой $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

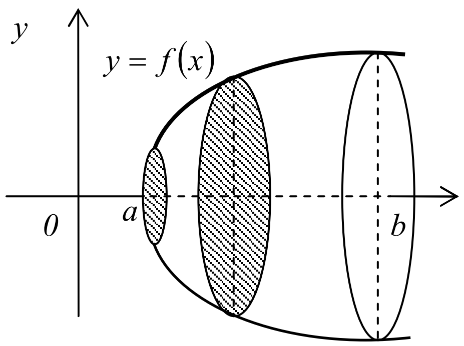


Рис. 7.

Если тело образовано вращением криволинейной трапеции вокруг оси $0y$,

то объем тела вращения равен $V=\pi\int\limits_a^b f^2(y)dy$

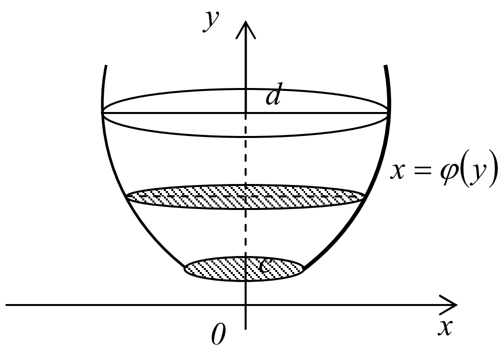


Рис .8.

<u>Пример 1</u>**.** Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры ограниченнщй прямыми $y=0$, $x=0$, $x=4$ и параболой $y=x^2$:

а) вокруг оси $0x$; б) вокруг оси $0y$.

Решение. а) Построим тело, образованное вращением фигуры вокруг оси $0x$ (рис. 9.).

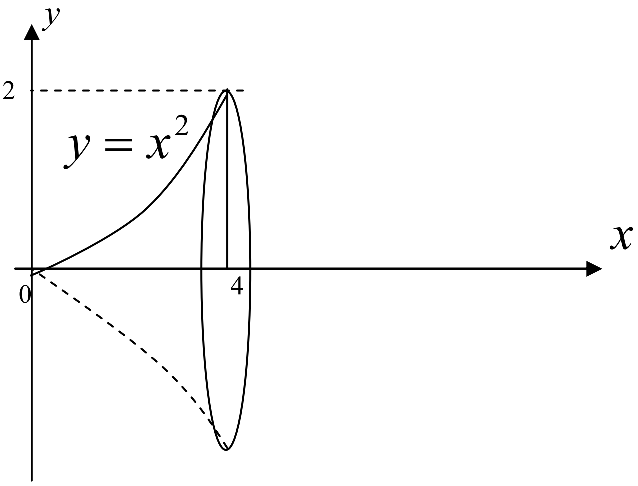


Рис 9.

По формуле искомый объем равен

$$V = \pi \int_0^4 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5} = \frac{256\pi}{5} = 51{,}2\pi\left(ед^3\right).$$

б) Рассмотрим тело, образованное вращением криволинейной трапеции $y = 0$, $x = 0$, $y = 2$, $x = \sqrt{y}$ вокруг оси $0y$ (рис. 10).

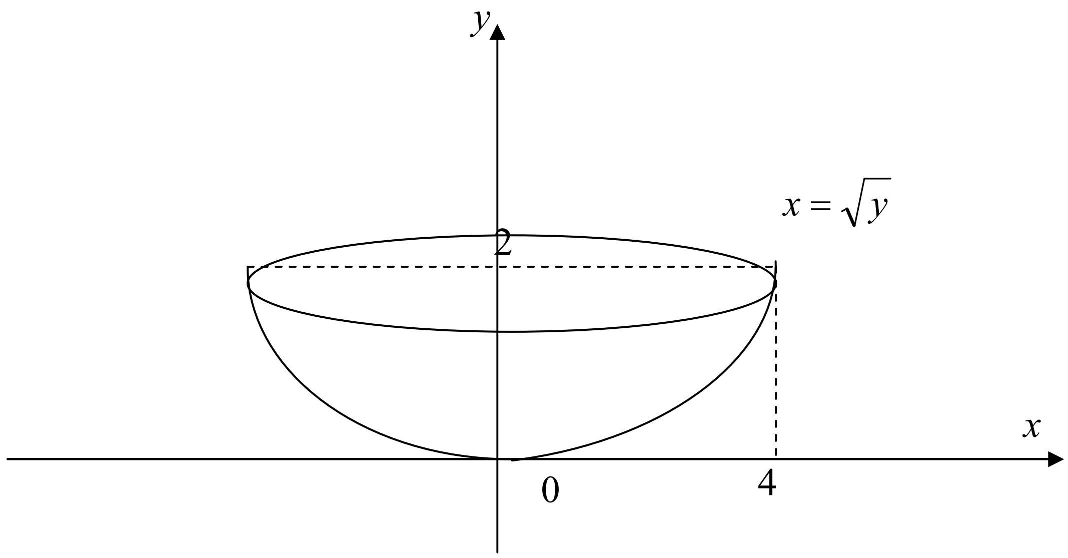


Рис 8.

По формуле искомый объем: $V = \pi \int_0^2 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2\pi\left(ед\right)^3$.

Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной прямой $5x - 8y + 14 = 0$ и параболой $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ вокруг оси $0x$.

Решение. Тело образовано вращением фигуры ABCA вокруг оси $0x$ (рис.11.)

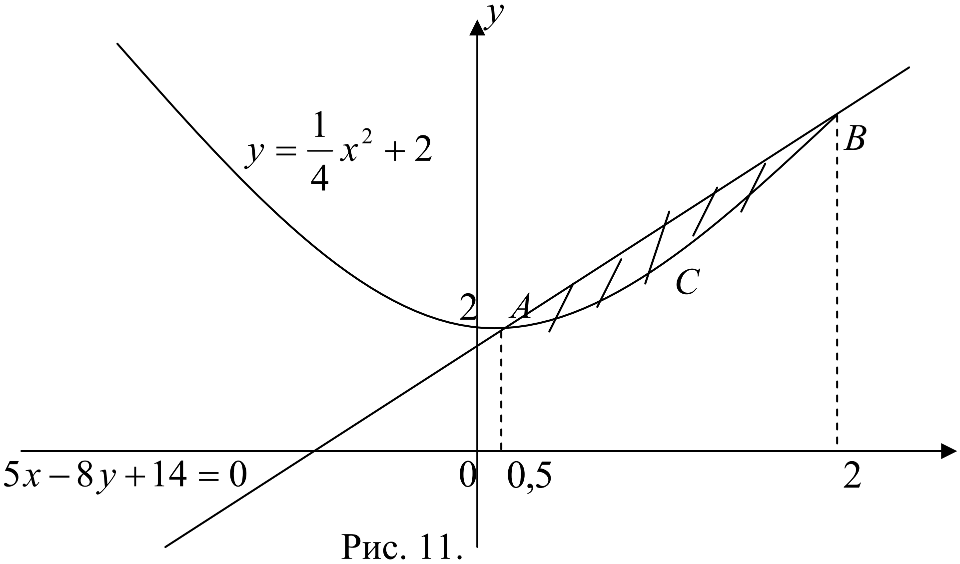


Рис. 11.

Найдем абсциссы точек пересечения A и B, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + 2, \\ 5x - 8y + 14 = 0. \end{cases}.$$

Отсюда $x_A = \frac{1}{2}$, $x_B = 2$. В данном случае объем находим, как разность двух объемов двух тел образованных линиями $y = \frac{5}{8}x + \frac{14}{8}$, $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ и прямыми $x = 0{,}5$, $x = 2$.

$$V = \pi \int_{0,5}^{2} (\frac{1}{8^2}(5x+14)^2 - \pi \int_{0,5}^{2} (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2)dx = \frac{891}{1280}\pi \approx 2{,}186\left(ед^3\right).$$

4. 5. Физические и экономические приложения определенного интеграла

1. Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v=v(t)$. Найдем путь S, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Пример 1.Если $v(t)=5t+3\left(\text{м}/\text{с}\right)$, то путь, пройденный телом от начала движения до конца 4-й секунды,равен

$$S=\int_0^4 (5t+3)dt=(3t^2+3t)\Big|_0^4=60(\text{м}).$$

2. Издержки производства

Пусть на складе хранится запас некоторого расходного товара (например, мука). Пусть издержки хранения одной единицы товара в течение единицы времени равны p. Если запас товара на складе есть функция времени $f(t)$, то издержки хранения за время от a до b равны:

$$C=\int_a^b pf(t)dt.$$

Пример 2 Задана функция предельных издержек (издержки на производство дополнительной выпускаемой единицы продукции товара) $C=2q^2-14q+250$. Найти функцию издержек $C=C(q)$ и вычислить издержки в случае производства 15 единиц товара.

Решение. Находим интегрированием издержек на изготовление 15 ед. товара

$$C=\int_0^{15}(2q^2-14q+250)dq=\frac{2}{3}q^3-\frac{14}{2}q^2+250q\Big|_0^{15}=4425\ (y.e.).$$

3 Обьем произведенной продукции.

По известной функции производительности труда объем произведенной продукции

$$Q=\int_0^T f(t)\,dt\ ,$$

где $f(t)$ - производительность труда в момент времени t,

$[0,T]$ - рассматриваемый промежуток времени.

<u>Пример 3.</u> Найти объем произведенной продукции за время $t=6$ час, если производительность труда задана функцией

$f(t)=-t^2+10t\,(ед\ /\ час)$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой (19).

$$Q=\int_0^T f(t)dt=\int_0^6(-t^2+10t)dt=(-\frac{t^3}{3}+\frac{10t^2}{2})\Big|_0^6=108\ (y.e.).$$

<u>Пример 4.</u> Определить выработку рабочего:

а) за весь рабочий день;

б) за третий час работы;

в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов, а $f(t)=-3t^2+18t$ - производительность труда;

г) провести экономический анализ задачи.

<u>Решение.</u> Находим общую выработку рабочего за весь день (6 часов).

$$Q=\int_0^6(-3t^2+18t)dt=(-\frac{3t^3}{3}+18\frac{t^2}{2})\Big|_0^6=(-t^3+9t^2)\Big|_0^6=$$

$$=(-216+324)=108\ (y.e.)\ .$$

Определяем выработку рабочего за третий час работы.

$$Q = \int_2^3 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2) \Big|_2^3 = 26\ (у.е.).$$

Аналогично определяем выработку рабочего за последний час работы:

$$Q = \int_5^6 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2) \Big|_5^6 = 8\,(у.е.).$$

За полный рабочий день выработка составила 108 у.е. продукции. За третий час работы 26 у.е., за последний час 8 у.е.. Вероятно, что работа утомительная и требует большого напряжения, поэтому к концу смены производительность труда падает.

4. Среднее время изготовления изделия.

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x - порядковый номер изделия в партии.

Тогда **<u>среднее время</u>** t_{cp}, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx.$$

<u>Пример 5</u>**.** Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 50$ до $x_2 = 75$ изделий, если функция изменения затрат времени $t = 100\ x^{-\frac{1}{2}}$ (ч).

<u>Решение.</u>

$$t_{cp} = \frac{1}{75 - 50} \int_{50}^{75} 100\,x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{100}{25} \int_{50}^{75} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\sqrt{x}\ \Big|_{50}^{75} \approx 11{,}2(ч).$$

Пример 6. Заданы чистые инвестиции функцией $I(t)=500\sqrt{t}(у.е)$. Требуется определить приращение капитала за 2 года.

Решение. Применим формулу (24), получим

$$\Delta K=\int_0^2 500\sqrt{t}dt=\frac{500\,t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{500\cdot 2}{3}\sqrt{8}\approx 943{,}3(у.е.)$$

Пример 7. Задана функция чистых инвестиций $I(t)=300\sqrt[3]{t}$.

Определить: сколько лет потребуется, чтобы приращение капитала составила 3000.

Решение. Обозначим искомый промежуток времени $[0,T]$ и, используя формулу (24), получим

$$3000=\int_0^T (300\sqrt[3]{t})dt=\left(\frac{4\cdot 300\sqrt[3]{t^4}}{3}\right)\Big|_0^T=400\sqrt[3]{T^4}.$$

Запишем уравнение: $3000=400\sqrt[3]{T^4}$.

Решая его, находим: $T^{\frac{4}{3}}=7{,}5$ или $T=\left(7{,}5^{3/4}\right)=4{,}53$.

Чтобы приращение капитала составило 3000, потребуется 4,53 года.

5. Выигрыши потребителей и поставщиков.

Пусть $p=f(x)$ −кривая спроса D на некоторый товар и $p=g(x)$ − кривая предложения S, где p−цена на товар, x − величина спроса (предложения). Обозначим через (x_0,y_0) точку рыночного равновесия.

Доход от реализации количества товара x_0 по равновесной цене p_0 равен произведению $x_0 p_0$. Если непрерывное снижение цены от максимальной

$p_D = f(0)$ до равновесной p_0 по мере удовлетворения спроса, то доход составит $\int_0^{x_0} f(x)dx$. Величина денежных средств

$$С = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0$$

сберегается потребителями, если предполагать продажу товара по равновесной цене p_0, поэтому С называется также выигрышем потребителей.

Аналогично, Р = $p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$ называется выигрышем поставщиков.

Величины С и Р численно равны площадям соответствующих криволинейных треугольников.

Премер 7. Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предположении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предположения имеют вид: $p = 186 - x^2$, $p = 20 + \frac{11}{6}x$.

Решение. Решая систему $\begin{cases} p = 186 - x^2, \\ p = 20 + \frac{11}{6}x, \end{cases}$ найдем точку рыночного равновесия: $x_0 = 12,\ y_0 = 42.$

Тогда С= $\int_0^{12}\left(186 - x^2\right)dx - 12 \cdot 42 = (186x - \frac{x^3}{3})\ \Big|_0^{12} - 504 = 1152$ (ден. ед.),

$$P = 12 \cdot 42 - \int_0^{12}\left(20 + \frac{11}{6}x\right)dx = 504 - (20x + \frac{11}{6}\frac{x^2}{2})\ \Big|_0^{12} = 132$$ (ден. ед.)

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = x^2 + 1; \quad x = 3; \quad y = 0; \quad x = 0.$

2. $xy = 3; \; x = 1; \; x = 2; \quad y = 0.$

3. $y = \sin x; \; x = 0; \; x = \pi.$

4. $y = 4x - x^2; \quad y = 0.$

4. $y = x^2; \quad y = 9.$

5. $y = x^2 + 4x; \qquad y = x + 4.$

6. $y = x^2 - 2x + 2$; $y = 2 + 4x - x^2$.

7. $y = x^2$; $y = 2 - x$; $y = 0$.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ох и циклоидой x = t − sint, y = 1 − cost на отрезке $[0;2\pi]$.

9. Найти площадь фигуры ограниченной эллипсом $x = acost, \; y = a\sin t.$

10. Найти площадьфигуры, ограниченной линией $\rho = a\sin 2\varphi$.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигур, ограниченных заданными линиями:

1. $y = \dfrac{4}{x}; \quad x = 1; \quad x = 4; \quad y = 0.$

2. $y = \sin x; \qquad x = 0; \qquad x = \pi.$

3. $x = y^2$, $y = 0$, $x = 2$.

4. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

5. $y = 4 - x^2$, y = 0, x = 0, где x ≥ 0.

6. $y = x^3$, y = 1, x = 0.

Вычислить длину дуги плоской кривой.

1. Вычислить длину дуги $y = 1 - \ln\sin x$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды циклоидой x = t − sint, y = 1 − cost на отрезке $[0;2\pi]$.

3. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

4. Решить задачи.

1). Определить объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности $f(t)=12e^{-0,4t}$, где t – время в часах.

2). Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p=134-x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

3). Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, если законы спроса и предположения имеют вид: $p=250-x^2$, $p=20+\frac{1}{3}x$.

4). Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения одного изделия в период освоения от $x_1=100$ до $x_2=121$ изделий, полагая, что функция изменения затрат $t(x)=600x^{-\frac{1}{2}}$.

Домашнее задание

1. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1) $y=2x-x^2$; $y=0$.
2) $y=x^2$; $y=1$.
3) $y=\ell^x$; $y=\ell^{-x}$; $x=1$.
4) $y=x$; $y=2x-x^2$.
5) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$
6) $y=2x-x^2$; $y=x^2$.

2. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными кривыми

1) $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x=4$.
2) $y=\sin 2x$; $y=0$; $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
3) $y=x$; $y=0$; $y=\frac{1}{x}$; $x=2$.
4) $y=\cos x$; $y=0$; $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
5) $y=x^2$; $y^2=x$.
6) $y=\frac{3}{x}$; $x+y=4$.

3. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, если законы спроса и предположения имеют вид: $p=240-x^2$, $p=x^2+2x+20$.

5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вводя понятие определенного интеграла, мы предполагаем, что отрезок интегрирования конечен, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке.

Однако возможны случаи, когда одно или оба этих условия не выполняются. В таком случае соответствующие интегралы называются **несобственными.**

5.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $a < b < \infty$.

Если существует предел $\lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то он называется несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a, \infty)$ и обозначается символом:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

В тех случаях, когда предел существует и конечен, говорят, что несобственный интеграл **сходится.**

Если же предел бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл **расходится.**

Наряду с интегралами (1) рассматривают также интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Интеграл $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3)$$

где c −любая точка числовой оси.

Пример. Вычислить интегралы или установить их расходимость.

1) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$ если они сходится.

<u>Решение.</u>

1) В силу определения имеем:

$$1)\ \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} (-\frac{1}{2x^2}) \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (-\frac{1}{2b^b} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

$$2)\ \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} (arctg\ 0 - arctga\ ) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится.

$$3)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int\limits_{a}^{b} e^{-x}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \left(-e^{-x}\right) \Big|_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \left(-e^{-b} - e^{-a}\right) = -(0-\infty) = \infty.$$

Интеграл расходится.

5. 2 Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad (\varepsilon > 0). \qquad (4)$$

Интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ называется <u>**сходящимся**</u>, если существует и конечен предел в правой части равенства (5), и <u>**расходящимся**</u>, если указанный предел не существует или равен бесконечности и называется несобственным интегралом II рода.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции, имеющий бесконечный разрыв в точке $x = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad (\varepsilon > 0). \qquad (5)$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (\varepsilon > 0). \qquad (6)$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется **сходящимся**, если оба предела в правой части равенства (6) существуют, и **расходящимся**, если хотя бы один из указанных пределов не существует или равен бесконечности.

Геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченной функции аналогичен геометрическому смыслу несобственного интеграла с бесконечными пределами.

Пример 4. Вычислить следующие интегралы или установить их расходимость:

1) $$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x|\,\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty$$

интеграл расходится.

2) $$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(1-x)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2(1-x)^2}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) = -\infty$$

интеграл расходится;

3)
$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}3\frac{x^{4/3}}{4}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{(-\varepsilon)^4}-\sqrt[3]{(-1)^4}+\sqrt[3]{1^4}-\sqrt[3]{\varepsilon^4}\right)=0\,.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы или установить их расходимость

1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$; 2. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$; 3. $\int\limits_{-\infty}^{0}e^x dx$; 4. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$;

5. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$; 6. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{4+x}$; 7. $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}$; 8. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$.

Домашнее задание

Вычислить интегралы или установить их расходимость

1. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x+2}$; 3. $\int\limits_{1}^{\infty}\ell^{-3x}dx$; 4. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

5. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 6. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$; 7. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; 8. $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{(x-3)^3}$.

6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Приближенное вычисление определенного интеграла

На практике часто встречаются интегралы, которые не выражаются через элементарные функции или выражаются очень сложно. Поэтому в приложениях используют так называемые **численные методы**, позволяющие найти приближенные значения искомого интеграла с требуемой точностью.

Рассмотрим некоторые из многочисленных методов приближенного вычисления определенного интеграла.

1. Метод трапеции.

Делим отрезок $[a,b]$ на n равных частей. Площадь каждой полоски, на которые разбивается криволинейная трапеция $aABb$, заменяется площадью обычной прямоугольной трапеци

$$S_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2} h, \text{ где } h = \frac{b-a}{n}$$

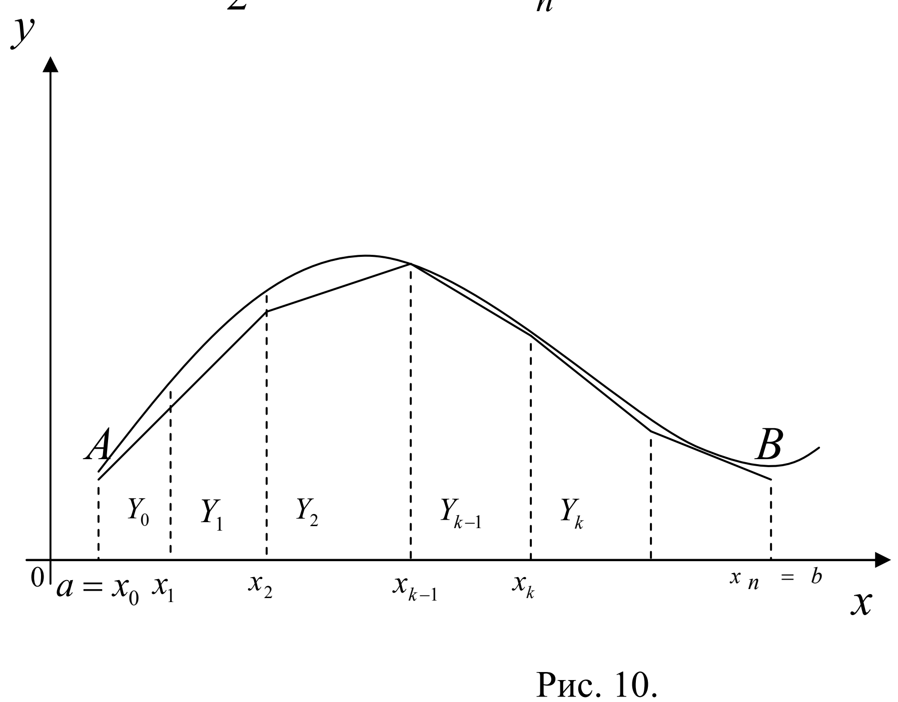


Рис. 10.

Складывая площади элементарных частей, получим **<u>формулу трапеций:</u>**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right].$$

Погрешность формулы оценивается неравенством $\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$,

где M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ в промежутке $[a,b]$.

<u>Пример 1</u> Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ приближенно, разделив отрезок $[0,1]$ на десять равных частей. Применить формулу трапеций. Оценить допускаемую погрешность.

<u>Решение.</u> Обозначим точки деления $[0,1]$ через $x_0=0$, $x_1=0{,}1$, $x_2=0{,}2$, ..., $x_{10}=1$. Вычислим значение подынтегральной функции $f(x_i)=\sqrt{1+x_i^4}$, $(i=1,2,...10)$

Составим таблицу

xi	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(xi)$	1	1,0001	1,0008	1,0040	1,0127	1,0308	1,0628	1,1136	1,1873	1,2869	1,4142

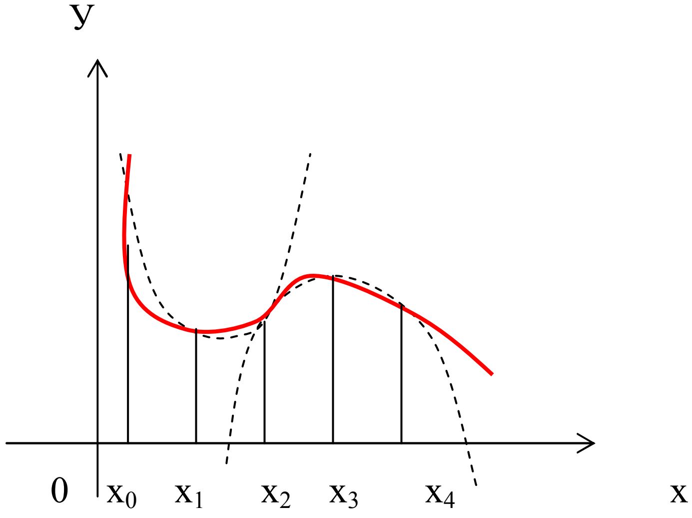
Используя формулу трапеций, получим

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \approx \frac{1}{10}(\frac{1+1{,}4142}{2}+1{,}0001+1{,}0008+1{,}0040+1{,}0127+1{,}0308+1{,}0628+$$
$$+1{,}1136+1{,}1873+1{,}2869) \approx 1{,}0906.$$

Формула Симпсона

Разделим отрезок интегрирования [a, b] на четное число отрезков $n=2m$. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси Oy и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.



$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})\right]$$

Чем больше взять число m, тем более точное значение интеграла будет получено.

Пример. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

По формуле Симпсона получим:

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}[y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) +$$
$$+ y(3) + y(5) + +y(7)]].$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	2.828	3.873	4	4.123	4.899	6.557	8.944	11.87	15.23	18.94	22.97

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}[2.828 + 22.978 + 2[4 + 4.899 + 8.944 + 15.232] + 4[3.873 +$$
$$4.123 + 6.557 + +11.874 + 18.947]] = 91.151$$

Приближенные формулы будут тем, точнее, чем больше число разбиенияе n. При одном и томже значении n вторая формула точнее первой.

7. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7. 1. Вычисление двойного интеграла

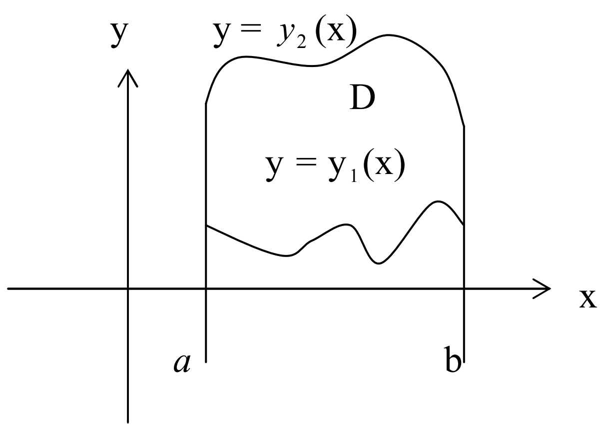
Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы, составленной для функции $f(x,y)$ по области D при $\lambda \to 0$, то этот предел называется двойным интегралом от функции f(x,y) по области D:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta p_i = \iint\limits_{D} f(x,y)dP .$$

Вычисление двойного интеграла сводится к двукратному интегрированию. Начинается с вычисления внутреннего интеграла; интегрирование производится по той переменной, дифференциал которой записан под знаком интеграла. Другую переменную считают константой.

Пределы внутреннего интеграла, как правило, переменные и содержат пнременную, по которой производится внешнее интегрирования, а пределы внешнего интеграла ВСЕГДА - постоянные числа.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



Если $f(x,y) = 1$, $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$ определяет площадь

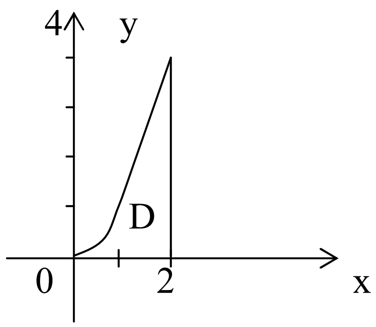
области D.

Если $f(x,y)$ поверхностная плотность в каждой точке области D, то масса плоской пластины определяется формулой

$$m = \iint\limits_D f(x,y)dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

<u>Пример</u>. Дана поверхностная плотность $f(x,y) = x - y$ в каждой точке области D: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$. Найти массу плоской пластины D.

Решение



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} (x-y)dy = \int\limits_0^2 (xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} =$$

$$\int\limits_0^2 (x^3 - \frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 = 4 - 3{,}2 = 0{,}8.$$

7.2 **Вычисление тройного интеграла.**

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы, составленной для функции $f(x,y,z)$ при $\lambda \to 0$, то этот предел называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz..$$

Вычисление тройного интеграла сводится к трехкратному интегрированию.

Если f(x,y,z)=1, V= $\iint\limits_D dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$ определяет объем

области V.

Если f(x,y,z) плотность в каждой точке области V, то масса пространственноготела определяется формулой

$$m = \iint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

<u>Пример</u>. Дана плотность f(x,y,z)= y в каждой точке области V.

Найти массу тела ограниченного поверхностями $y = x^2$, x =1,

$z = x^2 + y^2$, z = 0, x = 0, y = 0.

Решение.

$$m = \iint\limits_D ydxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} ydz = \int\limits_0^1 dx \int_0^{x^2} dy yz\Big|_0^{x^2+y^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} y(x^2+y^2)dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} (yx^2+y^3)dy = \int\limits_0^1 dx\left(y^2x^2 + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^{x^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^6 + \frac{x^8}{4}\right)dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{36}\Big|_0^1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{36} = \frac{43}{242}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Построить область, ограниченную линиями и найти ее площадь.

1) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2\sqrt{x}, \\ x = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x, \\ y = 2x, \\ x = 2. \end{cases}$

2. Вычислить двойные интегралы;

1) $\int_1^2 dx \int_{x/2}^{x} xydy$;   2) $\int_0^3 dx \int_1^2 (2x+y)dy$.

3. Найти массу пластины, ограниченной линиями: $\begin{cases} x + y = 2, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$

если плотность в каждой точке области равна f(x,y)=2x+3y.

4. Найти объём тела V, ограниченного заданными поверхностями.

1) $z = \frac{y^2}{2}$, 2x + 3y – 12 = 0, z = 0, x = 0.

2) $z = x^2 + y^2$, x + y =1 , z = 0, x = 0, y=0.

5. Найти массу объёмного тела, ограниченного заданными поверхностями, если плотность в каждой точке $f($x,y,z)=x.

3x+ y + 3z = 6, x = 0, y = 0, z = 0.

Домашнее задание

1. Построить область, ограниченную линиями, найти площадь области.

1) $\begin{cases} y = 6 - x, \\ y=2x, \end{cases}$ x=0.   2. $\begin{cases} y = \frac{x}{2}, \\ y = x, \end{cases}$ x=4.

2. Вычислить двойной интеграл

1) $\int_1^3 dx \int_x^{3x} xydy$;   2) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y)dy$.

3. Найти массу пластины, ограниченной линиями: $\begin{cases} 4x + y = 2, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$

если плотность в каждой точке области D f(x,y)=x+2y.

4. Найти объём тела V, ограниченного заданными поверхностями.

1) $z = x^2$, x + y = 2, z = 0, y = 0.

2) $z = x^2 + y^2$, x = 1, y = 1, 0, z = 0, x = 0, y = 0.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если плотность в каждой точке $f(x,y,z) = 2y$.

x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.

Контрольные вопросы

1. Определенный интеграл, определение, геометрический смысл.
2. Интегрирования по частям в определенном интеграле.
3. Замена переменного в определенном интеграле.
4. Свойства определенного интеграла.
5. Вычисление площади криволинейной трапеции.
6. Вычисление длины дуги.
7. Вычисление объем тела вращения.
8. Экономический смысл определенного интеграла.
9. Формула трапеций, формула Симпсона.
10. Несобственные интегралы.
11. Двойные интегралы и их вычисление.
12. Тройные интегралы и их вычисление.

Тест

1. Найти интеграл $\int cos 4x dx$ …

1) $\sin 4x + c$; 2) $4\sin 4x + c$; 3) $\frac{1}{4}\sin 4x + c$; 4) $\frac{1}{4}\sin x + c$.

2. Найти интеграл $\int \frac{3dx}{3x-1}$ …

1) $\ln|3x-1| + c$; 2) $6\ln|3x-1| + c$; 3) $3\ln|3x-1| + c$; 4) $3(3x-1)^2 + c$

3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{9+x^2}$ …

1) arctgx+c; 2) $\frac{1}{3}$arctgx+c; 3) $\frac{1}{3}$arctg$\frac{x}{3}$+c; 4) arctg$\frac{x}{3}$+c.

4. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}$ …

1) 2+4ln 0,4; 2) 2+4ln 0,6; 3) 2+2ln0,8; 4) 2-4ln 0,8.

5. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin xdx$ ….

1) -1; 2) $-\frac{10}{9}$; 3) $-\frac{8}{9}$; 4) 2.

6. Исследовать сходимость $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$ …

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) ∞; 4) - ∞.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, y = 0, x = 1, x = 4….

1) $\frac{45}{2}$; 2) $\frac{45}{4}$; 3) $\frac{14}{3}$; 4) $\frac{47}{7}$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций y = $\sqrt{x}$, y = 0, x = 0, x = 1….

1) $\frac{1}{2}\pi$; 2) π; 3) 2π; 4) 3π.

9. Найти объем произведенной продукции за время t=2час, если производительность труда задана функцией $f(t)=-2t+4$ …

1) 3; 2)12; 3)4; 4) 8.

10. Вычислить интеграл $\iint_D (x+2y)dxdy$, D − область, ограниченная линиями x + y = 1, x = 0, y = 0…. 1) 0,5; 2) 1; 3) 4; 4) 2.

11. Функция $F(x)$, называется первообразной для функции $f(x)$, если выполняется равенство…

1) $f'(x)=F(x)$; 2) $f'(x)=F(x)$+C;

3) $f(x)=F'(x)+C$; 4) $F'(x)=f(x)$.

12. Укажите, какой ответ правильно отражает свойства неопределенного интеграла…

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$, $d\int f(x)dx=f(x)+C$, $\int dF(x)=f(x)$+C

2) $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$, $\quad d\int f(x)dx = f(x)dx$, $\quad \int df(x) = F(x) + C$;

3) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $\quad d\int f(x)dx = f(x)\ dx$, $\quad \int dF(x) = F(x)+\text{C}$;

13. Укажите, какой ответ правильно отражает свойства неопределенного

интеграла .....

1) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$,

$\int f(x+b)dx = \int f(x)dx + \int f(b)dx$;

2) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, $a\int f(x)dx = \int af(x)dx$,

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$;

3) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, $\int af(x)dx = \int F(ax)dx$,

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

14. Замена переменной в неопределенном интегреле $\int f(x)dx$ осуществляется по формуле…

1) $\int f(\varphi(t))dt$; 2) $\int f(\varphi(t))t'dt$; 3) $\int f(\varphi(t))dt$; 4) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

15. Метод интегрирования по частям состоит в том, что $\int UdV$ будет равен…

1) $UV + \int VdU$; 2) $UV - \int VdU$; 3) $U'V + V'U$; 4) $UV \cdot \int VdU$.

16. Если отрезок $[a;b]$ разбит точкой c на $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$\int_a^b f(x)dx$ будет равен…

1) $\int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$; 2) $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$;

3) $\int_a^c f(x)dx + \int_{-c}^b f(x)dx$; 4) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

17. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ будет равен…

1) $\int_b^a f(x)dx$; 2) $-\int_a^b f(x)dx$; 3) $-\int_a^{-b} f(x)dx$; 4) $-\int_b^a f(x)dx$.

18. Интегралом с переменным верхним пределом называется…

1) F(x) = $\int_a^x f(t)dt$; 2) F(x) = $\int_a^t f(x)dx$;

3) F(x) = $\int_a^x F(t)dt$; 4) F(x) = $\int_a^x F(x)dx$.

19. Формула Ньютона-Лейбница, если F(x) - первообразная для *f(*x), имеет вид… 1) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$; 2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

3) $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$; 4) $\int_a^b f(x)dx = F(a) \cdot F(b)$.

20. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид… 1) $\int_a^b UdV = UV + \int_a^b VdU$: 2) $\int_a^b UdV = UV - \int_a^b VdU$;

3) $\int_a^b UdV = UV \cdot \int_a^b VdU$; 4) $\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU$.

21. Если *x=q(x)* и если $q(\alpha) = a,\ q(\beta) = b$, то формула замены переменной имеет вид…

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(q(t))q'(t)dt$; 2) $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(q(t))q'(t)dt$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(q(t))dt$; 4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(q(t))dt$.

22. Интегральной суммой функции *f(x)* на сегменте $[a;b]$ называется:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)$; 2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta f(P_i)$; 3) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta y_i$; 4) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i$.

23. Несобственный интеграл 1-ого рода обозначает:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx$; 2) $\int\limits_a^\infty f(x)dx$; 3) $\int\limits_a^0 f(x)dx$; 4) $\int\limits_a^b df(x)$.

24. Интеграл вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ вычисляется с помощью «универсальной» подстановки…1) t=sinx; 2) t=cosx; 3) t = tg$\dfrac{x}{2}$; 4) t = tgx.

25. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a,b]$ равна если $f_2(x) \geq f_1(x)$:

1) $S = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$; 2) $S = \int\limits_a^b f_1(x)dx - \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

3) $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$ 4) $S = \int\limits_a^b (f_2(x) + f_1(x))dx$.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8. 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнения вида: *F(x,y,y')= 0,* *P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0* , *y' =f(x).*

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция *y = φ(x),* которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

Простейшим дифференциальным уравнением является уравнение вида $y' = f(x)$. Решением этого уравнения являются функции $y = \int f(x)dx + C$, где C- произвольная постоянная.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка

$y' = f(x,y)$ в некоторой области Д называется функция $y = \varphi(x,c)$, обладающая следующими свойствами:

а) функция $\varphi(x,c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной С, принадлежащих некоторому множеству;

б) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0, y_0) \in Д$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Всякое решение $y = \varphi(x,c_0)$, получающееся из общего решения

$y = \varphi(x,c)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется частным решением.

Задачу отыскания частного решения называют задачей Коши. Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\partial f/\partial y$ непрерывны в области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, то уравнение $y' = f(x,y)$ имеет единственное решение $y = \varphi(x,c_0)$, такое, что $y(x_0) = y_0$.

Построенный на плоскости ХОУ график всякого решения $y = \varphi(x)$ данного дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Общему решению $y=\varphi(x,c)$ на плоскости ХОУ соответствует семейство интегральных кривых, зависящих от одного параметра- произвольной постоянной C, а частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$,- кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$.

8. 2. Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx - \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Заметим, что в уравнениях с разделяющимися переменными коэффициенты при dx и dy разлагаются на множители, зависящие от одной переменной.

Исключим из рассмотрения точки, в которых $\varphi_1(x)=0$ и $f_2(y)=0$.

Разделим обе части уравнения на $f_2(y)\,\varphi_1(x)\neq 0$, получим уравнения

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy ,$$

в котором переменные разделены. Общее решение этого уравнения находится почленным интегрированием $\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = \int \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}dy$

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение уравнения $y(1-x^2)dy-x(1-y^2)dx=0$.

<u>Решение.</u> Разделив обе части уравнения на произведение

$(1-x^2)\cdot(1-y^2)\neq 0$ имеем $\dfrac{ydy}{1-y^2} = \dfrac{xdx}{1-x^2}$.

Интегрируя, находим $\int \frac{ydy}{1-y^2} = \int \frac{xdx}{1-x^2} + \ln C$ или

$ln|1-y^2|=ln|1-x^2|+lnC$.

Тогда $1-y^2 = C(1-x^2)$ – общее решение исходного уравнения.

Задачи для самостоятельной работы.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения.

1. $y'x = y-2$;
2. $y'y = x+4$;
3. $dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$;
4. $(3x-1)dy + y^2dx = 0$;
5. $y' = \dfrac{\ell^y}{x}$, $y(1)=0$;
6. $xy' = 2\sqrt{y}$, $y(1)=0$;

7. $3yy' = \frac{x}{2}$, $y(4) = 2$; 8. $xy' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

11. 3. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ или $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$- однородные функции одной степени однородности или $f(x,y)$- однородная функция нулевой степени однородности. Функция $P(x,y)$ называется однородной степени k, если $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k \cdot P(x,y)$.

Однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=\varphi(\frac{y}{x})$.

Решения однородного уравнения сводится к решению уравнению с разделяющими переменными подстановкой

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \; y' = u'x + u.$$

<u>Пример1.</u> Найти общее решение уравнения $(x+y)dx+(x - y)dy=0$.

<u>Решение.</u> Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$$ или $$y' = \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}.$$ Обозначим $\frac{y}{x} = u,$ тогда

$y=ux,$ и $y' = u'x + u$.

Отсюда $$u'x + u = \frac{u+1}{u-1}$$ или $$\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Интегрируя по членно, получим:

$$\int\frac{(1-u)du}{1=2u-u^2}+\int\frac{dx}{x}= \ \frac{1}{2}\ ln|2+2u-u^2|+ln|x|=ln|C|,$$

$$x^2(1 + 2u - u^2) = C_1, \text{ где } u = \frac{y}{x}, \text{ то } \quad x^2(1 + 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2) = C.$$

Задачи для самостоятельной работы.

Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения.

1. $y' = \ell^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;
2. $y' = \frac{y-x}{y+x}$;
3. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$;
4. $y' = \frac{y^2}{xy-x^2}$;
5. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, $y(1) = 0$.
6. $xy' = \frac{x}{\sin\frac{y}{x}} + y$.

7. 4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение вида $y'+P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$- непрерывные функции аргумента x , называется линейным уравнением первого порядка.

Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y=U{\cdot}V,\ y' = U'V + UV'$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Пример1. Решить уравнение $y'+y{\cdot}sinx = 2xe^{cosx}$.

Решение. Пусть $y = U{\cdot}V$, тогда $y' = U'V + UV'$. Подставив значение y и y' в уравнение, получим:

$$U'V + UV' + U{\cdot}V{\cdot}sinx = 2xe^{cosx},$$

$$V \cdot U' + U \cdot (V' + V \cdot sinx) = 2xe^{cosx}.$$

В силу того, что одна из функций $U(x)$ или $V(x)$ может быть выбрана совершенно произвольно (лишь произведение $U \cdot V$ должно удовлетворять исходному уравнению), функцию $V(x)$ определим как частное решение уравнения:

$V' + V \cdot sinx = 0,$ (1) тогда второе уравнение

$U'V = 2xe^{\cos x}$ (2).

Каждое из уравнений системы есть уравнения с разделяющимися переменными.

Проинтегрировав первое уравнение и взяв частное решение при $C=0$, получим $ln|V| = cosx,\ V = e^{cosx}$ подставим его в уравнение (2). Получим $e^{cosx} \cdot U' = 2xe^{cosx}$. Сократив на $e^{cosx} \neq 0$, получим $\frac{dU}{dx} = 2x$. Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, имеем $U = x^2 + C$. Следовательно, общее решение $y = U \cdot V$ уравнения имеет вид: $y = e^{cosx} \cdot (x^2 + C)$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. $y' - \frac{y}{x} = 2x;$ 2. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2};$

3. $y' + 2y = e^{3x};$ 4. $y' + 2xy = e^{-x2}, y(0) = 0.$

5. $xy' - 2y = 3x^4;$ 6. $y' + ytgx = \sin 2x.$

Домашнее задание

Решить дифференциальные уравнения

1. $y' \cos x - y \sin 2x = 0;$ 2. $y' = y(x+1),\ y(1) = 1;$

3. $yy' = x(y^2 + 1);$ 4. $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0;$

5. $xy' = 1 - x$.;

6. $y' = \frac{\ell^{y}}{x}$, $y(1) = 0$;

7. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;

8. $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$;

9. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$;

10. $y' - y\sin x = \ell^{-\cos x}\sin x$;

11. $y' - \frac{2y}{x} = x$, если y(1)=5.

8. 5. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

а) Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием обеих частей уравнения n раз. Общий интеграл уравнения содержит n произвольных постоянных.

Пример 1. Для данного дифференциального уравнения $y''=4\sin 2x$ найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Решение. Дважды интегрируя уравнение $y''=4\sin 2x$, получим

$$y' = 4\int \sin 2x dx = -2\cos 2x + C_1$$

$$y = -2\int (\cos 2x + C_1)dx = -\sin 2x + C_1 x + C_2$$

$y= -\sin 2x+C_1x+C_2$ - общий интеграл уравнения.

Подставляя последовательно в полученное общее решение начальные условия, определим C_1 и C_2:

$0= -2\cos 0+C_1$, $C_1=2$, $0= -\sin 0+C_2$, $C_2=0$;

$y= -\sin 2x+2x$ – искомое частное решение.

б) Уравнение 2-го порядка $F(x,y',y'')=0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$, $y''=p$, где $p = p(x)$ − функция от x.

Пример2. Решить уравнение $(x-3)y''+y'=0$.

Решение. Данное уравнение 2-го порядка не содержит явно переменную y. Полагая $y'=p$, получим $y''=\frac{dp}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение 1-го порядка.

$$(x-3)\cdot\frac{dp}{dx}+p=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем:

$$\int\frac{dp}{p}+\int\frac{dx}{x-3}=0,\quad ln|p|+ln|x-3|=lnC,$$

$|p(x-3)|=C,\ p(x-3)=\pm C,\ p(x-3)=C_1,$ где $C_1=\pm C$.

Заменяя вспомогательную функцию $p=\frac{dy}{dx}$, получим уравнение

$(x-3)\frac{dy}{dx}=C_1$, решая которое найдем искомый интеграл:

$$\int dy=\int\frac{C_1dx}{x-3},\qquad y=C_1ln|x-3|+C_2.$$

в). Уравнение 2-го порядка $F(y,y',y'')=0$, не содержащее явно аргумент x, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p,\ y''=p\frac{dp}{dy}$, где p = p(y).

Пример 3. Решить уравнение $2(y')^2=(y-1)y''$.

Решение. Полагая в этом уравнении $y'=p$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$2p^2=(y-1)p\,\frac{dp}{dy}\,; \qquad 2\int\frac{dy}{y-1}=\int\frac{dp}{p}\,;$$

$$2\ln|y-1|+\ln C_1=\ln|p|; \quad \ln|y-1|^2C_1=\ln|p|; \quad p=(y-1)^2C_1.$$

Так как $p=\dfrac{dp}{dy}$, то $\dfrac{dy}{dx}=(y-1)^2C_1$.

Откуда $\displaystyle\int\frac{dy}{(y-1)^2}=\int C_1dx\,,\ -\frac{1}{y-1}=C_1x+C_2\,.$

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие и частные (там, где даны начальные условия) решения дифференциальных уравнений.

1. $y'''=6x+1$; 2. $y'''=4\cos 2x$, если $y(0)=0$, $y'(0)=0$; $y''(0)=1$;

3. $xy''=y'$; 4. $y''+\dfrac{y}{x}=0$; 5. $yy''=(y')^2$.

Домашнее задание

Решить дифференциальные уравнения.

1. $y''=4e^{2x}$, если $y(0)=2$, $y'(0)=1$;

2. $y'''=x+x^3$; 3. $y''x^2=y'$ 4. $y''=\dfrac{y'}{x}+1$.

8. 6. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=0 \quad (1)$$

Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка (1) имеет вид $y=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\ldots+C_n y_n(x)$, (2)

где $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения.

Для нахождения общего решения уравнения составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} +\ldots+ a_{n-1}k + a_n = 0. \quad (3)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (3) возможны случаи:

а) Если все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots ,k_n$ – действительные и различные, то общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{k1x} + C_2e^{k2x} + \ldots+C_ne^{knx} \quad .$$

б) Если среди корней характеристического уравнения $k_1, k_2,\ldots, k_n$ имеются кратные ($k_1=k_2=\ldots=k_n=k$), а остальные различные, то общее решение (2) примет вид

$$y=e^{kx}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1})+C_{m+1}e^{km+1\cdot x}+\ldots+C_ne^{km-n\cdot x}$$

где m- кратность корня.

в) Если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение примет вид

$$y= e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x).$$

Пример1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2y''+5y'+2y=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$2k^2+5k+2=0.$$

Корни его действительные и различные $k_1=-2,\ k_2=\frac{1}{2}$, поэтому

$$y_1=e^{-2x};\ y_2=e^{\frac{x}{2}}$$ – частные решения.

Тогда $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-1/2}$ – общее решение уравнения.

<u>Пример 2.</u> Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, удовлетворяющего условиям

$$y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=2\ ,\ y''|_{x=0}=4.$$

<u>Решение.</u> Составим характеристическое уравнение

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

Найдем его корни $k_1=k_2=k_3=1$ − они действительные и равные, поэтому частные решения имеют вид $y_1=e^x,\ y_2=xe^x,\ y_3=x^2e^x$, а $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$ – общее решение.

Для определения частного решения в равенства подставим начальные условия

$$y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2);$$

$$y'=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2+C_2+2C_3x);$$

$$y''=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2+2C_2+4C_3x+2C_3).$$

Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 1=C_1, \\ 2=C_1+C_2, \\ 4=C_1+2C_2+2C_3, \end{cases}$$

из которой определяем $C_1=1,\ C_2=1,\ C_3=0{,}5.$

Следовательно, $y=e^x(1+x+\frac{x^2}{2})$ – искомое частное решение.

<u>Пример 3.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+6y'+13y=0.$

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2+6k+13=0$ комплексные сопряженные $k_{1,2}= -3\pm 2i$. Согласно правилу запишем общее решение данного уравнения

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти общее решение дифференциального уравнении

1. $2y''+ y' - y = 0$; 2. $y''- 9y = 0$;
3. $y'' + 4y' = 0$; 4. $y''' + y'' - 2y' = 0$;
5. $y'' - 4y' + 4y = 0$; 6. $y^{iv} - 2y''' + y'' = 0$;
7. $y^{IV} - y''' = 0$; 8. $y''-4y'+13y=0$;
9. $4y'' - 8y' + 5y = 0$; 10. $y^{IV} - 16 = 0$;
11. $y'' + y = 0$; 12. $y''' - 2y'' = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения.

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$, при $y(0)=6$, $y'(0)=10$;

2) $y'' +4y' + 29y = 0$, при $y(0)=0$, $y'(0)=15$.

Домашнее задание

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 5y = 0$;
3) $y'' + 4y = 0$; 4) $y^{iv} - 6y''' + 9y'' = 0$;
5) $y'' + 9y' = 0$; 6) $y^{IV} - 16y''' = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения.

$y'' + 9y = 0$, при $y(0)=6$, $y'(0)=1$.

8. 7. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно искомой функции и всех ее производных

$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=f(x)$, где f(x) непрерывная функция непрерывная.

Общее решение такого уравнения $y=y^*+\bar{y}$, где

y^* - общее решение соответствующего однородного уравнения,

$\bar{y}$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Частное решения $\bar{y}$ можно найти методом подбора в следующих случаях:

1. Если $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, то $\bar{y}=e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)\cdot x^r$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а r показывает, сколько раз число α встречается среди корней характеристического уравнения.

2. Если $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$, то $\bar{y}=e^{\alpha x}[M_S(x)\cos\beta x+N_S(x)\sin\beta x]\cdot x^r$, где $M_S(x)$ и $N_S(x)$ – многочлены степени $S=\max\{n,m\}$, а r – кратность корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения.

Пример1. Проинтегрировать уравнение $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$.

Решение. Решение уравнения находим виде $y=y^*+\bar{y}$. Характеристическое уравнение $k^2+k-2=0$ имеет действительные различные корни $k_1=1$, $k_2=-2$, следовательно, общее решение y^* однородного уравнения примет вид:
$y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$.

Функция $f(x)=\cos x-3\sin x$ в стандартном виде будет:

$f(x)=e^{0x}(\cos x-3\sin x)$, здесь $\alpha=0$, $\beta=1$, $\alpha+\beta i=i$. Видим, что $0\pm i$ не является корнем характеристического уравнения, значит $r=0$. $P_n(x)=1$,

$Q_m(x)=-3$, следовательно, $n=m=0$, а значит, $S=max\{n,m\}=0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде:

$$\overline{y} = \cdot e^{0x}(A\cos x + B\sin x) \text{ или } \overline{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Дважды дифференцируем $\overline{y}\,(x)$, получаем:

$$\overline{y}' = -A\sin x + B\cos x\,, \quad \overline{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ в исходное уравнение, группируя слагаемые, получим тождество:

$$(B-3A)\cos x - (3B+A)\sin x = \cos x - 3\sin x.$$

Приравняем коэффициенты левой и правой частей при cosx и sinx. Получим систему: $\begin{cases} B-3A=1, \\ 3B+A=3 \end{cases}$ из которой следует $A=0$, $B=1$.

Тогда $\overline{y} = \sin x$ – частное решение неоднородного уравнения. Общее решение исходного уравнения примет вид: $y=\sin x+C_1e^{-2x}+C_2{}^x$.

<u>Пример 2.</u> Решить дифференциальное уравнение $y'''+y''=12x^2$.

<u>Решение.</u> Характеристическое уравнение $k^3 + k^2 = 0$ имеет корни $k_1= 0$, $k_2=0$, $k_3=-1$ Общее решение соответствующего однородного уравнения можно записать

$$y^*=C_1 + C_2x + C_3e^{-x}.$$

Запишем $f(x)=e^{0x}\cdot 12x^2$, откуда $\alpha=0$, $n=2$. В данном случае $\alpha=0$ – двуратный корень характеристического уравнения, следовательно, $r=2$. Частное решение исходного уравнения следует искать в виде: $\overline{y} = x^2(Ax^2+Bx+C)$. Трижды дифференцируя $\overline{y}\,(x)$, получаем:

$$\overline{y}' = 4Ax^3+3Bx^2+2Cx,$$

$$\overline{y}'' = 12Ax^2+6Bx+2C\,,$$

$$\overline{y}''' = 24Ax+6B.$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, имеем:

$12Ax^2+x(24A+6B)+6B+2C=12x^2$.

Из полученного тождества следует, что $12A=12$, $24A+6B=0$, $6B+2C=0$, откуда $A=1$, $B=-4$, $C=12$. Тогда $\overline{y}=x^4-4x^3+12x^2$, а

$y=y^*+\overline{y}=x^4-4x^3+12x^2+C_1+C_2x+C_3e^{-x}$ – общее решение исходного уравнения.

<u>Пример3.</u> Решить уравнение $y''-2y'+y=sinx+e^{-x}$.

<u>Решение.</u> Корни характеристического уравнения $k^2-2k+1=0$ есть $k_1=k_2=1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$У^*=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Так как $f(x)$ есть сумма функций $sinx$ и e^{-x}, то частное решение $\overline{y}$ будем искать в виде: $\overline{y}=\overline{y}_1+\overline{y}_2$, где $\overline{y}_1$ – частное решение $y''-2y'+y=sinx$, а $\overline{y}_2$ частное решение уравнения $y''-2y'+y=e^{-x}$.

Рассмотрим уравнение $y''-2y'+y=sinx$. Число $\beta i=i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение $\overline{y}_1$ будем искать в таком виде: $\overline{y}_1=Asinx+Bcosx$. Подставляя значения $\overline{y}_1, \overline{y}_1', \overline{y}_1''$ в исходное уравнение и сравнивая коэффициенты при $sinx$ и $cosx$ в левой и правой частях тождества,получим: $-2A=0$, $2B=-1$, отсюда $A=0$, $B=-\frac{1}{2}$.

Следовательно $\overline{y}_1=-\frac{1}{2}cosx$.

Частное решение $\overline{y}_2$ равнения $y''-2y'+y=e^{-x}$ будем искать в виде:

$\overline{y}_2=Ae^{-x}$. Подставляя в указанное уравнение выражение $\overline{y}_2, \overline{y}_2', \overline{y}_2''$, получим $A=-1$, $\overline{y}_2=-e^{-x}$ Таким образом, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид: $\overline{y}=-\frac{1}{2}cosx - e^{-x}$, а его общее решение : $y=C_1e^x+C_2xe^x-\frac{1}{2}cosx - e^{-}$

Задачи для самостоятельной работы.

Решить уравнения.

1. $y'' + y' - 2y = 3xe^{-x}$; 2. $y'' + 4y' + 5y = x^2 - 1$

3. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$; 4. $y'' - 2y' = x^2 - 2$;

5. $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$; 6. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x - 2\cos 2x$;

7. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$; 8. $y'' - 4y' + 4y = \sin 3x$.

Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x + 2\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Домашнее задание

Решить уравнения.

1. $y'' - 5y' + 4y = xe^{2x}$; 2. $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$;

3. $y'' + 2y' = 2x^2 + x$; 4. $y'' + y' - 2y = xe^{2x}$;

5. $y'' + 3y' + 2y = \cos 3x$; 6. $y'^{I} + 5y' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x$.

Найти частное решение уравнения: $y'' - 4y' + 4y = xe^{x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Вариант контрольной работы

Решить уравнения:

1) $xy' = 1 + y$, $y(1) = 2$; 2) $(2x - y)dx + xdy = 0$;

3) $xy' - 2y = 3x^4$; 4) $y''' = 9\cos x + x$;

5) $y^{iv} - 7y''' + 10y'' = 0$; 7) $y'' - 4y' = x^2 - 2x$.

6) $y'' - 2y' + 5y = 0$, при $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Задача. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% первоначального количества, если известно, что количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально наличному количеству этого вещества в данный момент.

8. 8 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дифференциального уравнения. Что называется порядком дифференциального уравнения? Приведите примеры.
2. Дайте понятие общего и частного решений дифференциального уравнения.
3. В чем состоит геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?
4. Сформулируйте теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
5. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Изложите метод решения. Приведите примеры.
6. Дайте определение решения однородного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод решения. Приведите примеры.
7. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод решения. Приведите примеры.
8. Дайте определение уравнения Бернулли. Изложите метод решения. Приведите примеры.
9. Укажите способ решения дифференциального уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$.
10. Укажите способ решения дифференциального уравнения вида $F(x,y',y'')=0$.
11. Укажите способ решения дифференциального уравнения вида

$F(y,y',y'')=0.$

12. Дайте определение линейных однородных и неоднородных уравнений n-го порядка. Запишите их в общем виде.

13. Докажите теоремы о решениях линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

14. Дайте определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

15. Докажите теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

16. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае:

а) различных действительных корней характеристического уравнения;

б) кратных корней характеристического уравнения;

в) комплексных корней характеристического уравнения;

17. Изложите алгоритм решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

18. Сформулируйте и докажите теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

19. Изложите метод подбора частного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью вида:

а) $f(x)=P(x)\cdot e^{\alpha x}$;

б) $f(x)=P(x)\cdot\cos\beta x+Q(x)\cdot\sin\beta x$;

в) $f(x)=e^{\alpha x}[P(x)\cdot\cos\beta x+Q(x)\cdot\sin\beta x]$.

9. РЯДЫ

9. 1. Основные определения. Ряды с неотрицательными членами.

<u>Определение.</u> Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**, т.е.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а

u_n – общим членом ряда.

<u>Определение.</u> Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$.

<u>Определение.</u> Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм .

<u>Определение.</u> Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

9. 2. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел общего член при $n \to \infty$ u_n рав нулю, т. е. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Однако это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд расходится т. е. теорема является необходимым услвием сходимости и достаточным условием для исследования расходимости ряда.

Например, гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$.

<u>Пример.</u> Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{3n-1}+...$

<u>Решение</u>. $u_n=\frac{n}{3n-1}$ –общий член ряда.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0$. Необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

9. 3. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

1. Признак Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$***, то при l < 1 ряд сходится, а при l > 1 – расходится. Если l = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя, нужны дополнительные исследования.***

<u>Пример 1.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

<u>Решение.</u>

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример 2.</u> Исследовать сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+...$

Решение.

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Задачи для самостоятельной работы.

Исследовать сходимость рядов помощью признака Даламбера.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n3^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$; 6.. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\,!}$.

2. Радикальный признак Коши.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$***, то при l<1 ряд сходится, а при l>1 ряд расходится. Если l = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя, нужны дополнительные исследования.***

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Вывод: ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Пизнак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимого условия сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Задачи для самостоятельной работы.

Исследовать сходимость рядов с помощью радикального признака Коши.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{n}\frac{3}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}}\left(\frac{n+4}{2n+1}\right)^{n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+3}{8n+1}\right)^{n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{n+1}\right)^{n}$.

3. Интегральный признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, члены которого положительны, не возрастают и

$u_n = f(n)$ Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *рас*ходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Ряд $1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+...+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots$ **сходится при** $\alpha>1$ **и расходится** $\alpha\le 1$ **т.к. соответствующий несобственный интеграл** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ **сходится при** $\alpha>1$ **и расходится** $\alpha\le 1$**.**

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ **называется обобщенным гармоническим рядом.**

Задачи для самостоятельной работы.

Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

4. Признак сравнения рядов

Теорема. Если для знако положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ (2) выполняется неравенство $U_n \le V_n$, то

а) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);

б) если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Следствие. . Если для знако положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ существует конечный предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \mathrm{k} \ne 0$, то ряды одновременно сходятся, либо расходятся.

Задачи для самостоятельной работы.

Исследовать сходимость данных рядов с помощью признака сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4n+1}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+1}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+4n+1}$.

Домашнее задание

1. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

2. Исследовать сходимость рядов с помощью радикального признака Коши.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n$.

3. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$.

4. Определить сходимость рядов с помощью интегрального признака.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5+4}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+4n+1}$.

9. 4. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Функциональные ряды.

1. Знакопеременные ряды.

Знакочередующийся ряд имеет вид:

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$, где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,...$

Признак Лейбница.

Если в знакочередующемся ряде

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$ члены ряда по абсолютной величине убывают $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ и предел общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т. е., $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена; т.е. $S \le u_1$.

2. Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков)

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2),$$

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

<u>Определение 1.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

<u>Определение 2.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов расходится.

Задачи для самостоятельной работы

1. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ряды.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n+1}$

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n3^n}$ с точностью 0,001.

3. Выяснить, какие из следующих рядов сходятся абсолютно.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{n!}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{3^n}$.

Домашнее задание

Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4n+1}{n+2}$

4. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n+1)^n}$ с точностью 0,001.

9. 5 Функциональные ряды.

Ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)... = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ членами которого являются последовательность функции от $u_x(x)$ называется функциональным рядом.

Значение $x = x_0$, при котором числовой ряд $u_1(x_0)+u_2(x_0)+...+u_n(x\ )+...$ сходится, называется точкой сходимости функциального ряда. Совокупность всех точек сходимости ряда называют областью сходимости ряда.

1. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда.

<u>Определение.</u> Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad (1)$$

При $x_0 = 0$ ряд имеет вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \quad (2)$$

где $a_1,\ a_2,....a_n,a_{n+1}\cdots$ –коэффиценты степенного ряда.

Ряд (2) сходится,если $x\in(-R;R)$, где $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, при $x=\pm R$ сходимость следует исследовать дополнительно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1, \quad R=1.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x=1$ и $x=-1$.

При x = -1 имеем $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...$ ряд сходится в силу признака Лейбница.

При x = 1 имеем $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ ряд расходится (гармонический ряд).

Вывод. Ряд сходится при $x\in[-1;1)$.

Задачи для самостоятельной работы.

Найти область сходимости заданных степенных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^2}$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$.

Домашнее задание

Найти область сходимости заданных степенных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n3^n}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n4^n}$.

2. Формула Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности производные порядка до (n+1) включительно,

x– любое значение аргумента из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε, что справедлива формула:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Эта формула называется **формулой Тейлора**, а выражение:

$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=R_{n+1}(x)$ – остаточный член ряда в форме Лагранжа.

При $a = 0$ получим равенство

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1};\qquad 0<\theta<1.$$

. называемое формулой Маклорена состаточным членом в форме Лагранжа

Имеют место равенства;

1. $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$, .

2. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.$,

3. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ldots.$,

4. $arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$,

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + ...,$

6. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$

$+ \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n\,!}x^n + ... \quad .$

Пример. Вычислить значение $\sin 20^0$ с точностью 0,01.

Решение.Предварительно переведем угол 20^0 в радианы

$20^0 = \frac{20^0\pi}{180^0}$=π/9=0,348154.

Применим разложение функции sinx в ряд Тейлора, ограничившись тремя первыми членами:

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 = 0{,}348889 - 0{,}007078 + 0{,}000043 = 0{,}341854$$

без потери в точности ограничиться первым членом разложения, т.е.

$$\sin 20^0 = 0{,}34\,.$$

Задачи для самостоятельной работы

Пример. Вычислить определенный интеграл, используя разложения в ряд подынтегральной функции с точностью 0,001

1. $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \sin x^2 dx$; 2. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \ell^{-x^2} dx$; 3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$; 4. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие числового ряда. Определение сходимости ряда
2. Примеры простейших числовых рядов.
3. Необходимое условие сходимости ряда.
4. Признак сравнения рядов.
5. Признак Даламбера.
6. Признак Коши.

7. Интегральный признак сходимости.
8. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
9. Сходимость функциональных рядов.
10. Степенные ряды. Сходимость степенных рядов.
11. Радиус (интервал) сходимости степенного ряда.
12. Ряд Тейлора.
13. Ряд Маклорена.
14. Разложения функций в ряды Маклорена;

$$y = e^x, y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = arctgx,$$
$$y = \ln(1+x), \ y = (1+x)^m$$

15. Основные задачи теории рядов.

Тест

1.Общее решение дифференциального уравнения $xy' - 4y = 0$ имеет вид…

1) $y = 4lnx + C$; 2) $y = x^4C$; 3) $y = 4xC$; 4) $y = lnx^4C$.

2.Общее решение дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = cos^2\frac{y}{x}$ имеет вид…

1) $tg\frac{y}{x} = lnCx$; 2) $cos\frac{y}{x} = lnCx$; 3) $tg\frac{y}{x} = Cx$; 4) $sin\frac{y}{x} = lnCx$.

3.Общее решение дифференциального уравнения $y'' = 2cos2x + 4$ имеет вид…

1) $y = \frac{1}{2}\sin 2x + x^2 + C_1x + C_2$; 2) $y = \sin 2x + x^2 + C_1x + C_2$;

3) $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + x^2 + C_1x + C_2$; 4) $y = \frac{1}{2}\cos 2x + x + C_1 + C_2$.

4.Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' - 5y = 0$ имеет вид…

1) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^x$; 2) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x}$;

3) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}$; 4) $y = C_1e^x + C_2e^{5x}$.

5.Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 10y' + 25y = 0$ имеет вид…

1) $y = e^{5x}(C_1 + C_2)$; 2) $y = e^{5x}(C_1 + C_2x)$;

3) $y = e^{-5x}(C_1 + C_2x)$; 4) $y = e^{-5x}(C_1 + C_2)$.

6.Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 10y = 0$ имеет вид…

1) $y = e^{-3x}(C_1 cosx + C_2 sinx)$; 2) $y = e^{3x}(C_1 cosx + C_2 sinx)$;

3) $y = e^{-3x}(C_1 cosx)$; 4) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$.

7. Если $U_1, U_2, ..., U_n, ...$ - числовая последовательность, то выражения

$\sum_{k=1}^{n} U_n$, $\sum_{k=1}^{\infty} U_n$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_n$ называеются соответственно:

1) рядом, суммой ряда, частичной суммой;

2) суммой ряда, частичной суммой, рядом;

3) частичной суммой ряда, суммой ряда, рядом;

4) частичной суммой ряда, рядом, суммой ряда.

8. Необходимым условием сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U_n$ является:

1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_n = 0$; 2) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$; 3) $\lim_{n\to\infty} U_n = C = const$; 4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{U_n} = 0$.

9. Если для рядов с положительными числами $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ выполняется

$U_k \le V_k$, то: 1) из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$;

2) из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ следует расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$;

3) из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$.

10. Признак Даламбера сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ с положительными членами P_k заключается в том, что:

1) $\lim_{k\to\infty} \frac{P_{k+1}}{P_k} = q$, $q < 1$ - ряд расходится, $q > 1$ - ряд сходится;

2) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{P_k} = q$, $q < 1$ - ряд расходится, $q > 1$ - ряд сходится;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{P_{k+1}}{P_k}=q,\ q>1$ - ряд расходится, $q<1$- ряд сходится;

4) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{P_{k+1}}{P_k},\quad q>1$- ряд расходится, $q<1$- ряд сходится.

11. Признак Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_k$ с положительными членами P_k заключается в том, что:

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{P_{k+1}}{P_k}=q,\ q<1$ - ряд расходится, $q>1$- ряд сходится;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{P_k}=q,\ q>1$ - ряд расходится, $q<1$- ряд сходится;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{P_{k+1}}{P_k}=q,\ q>1$ - ряд расходится, $q<1$- ряд сходится;

4) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{P_k}=q,\ q<1$ - ряд расходится, $q>1$- ряд сходится.

12. Интегральный признак Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=m}^{\infty}P_k$ с невозрастающими членами заключается в том, что:

1) если $\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(x)dx$ сходится, то ряд сходится;

2) если $\int\limits_{m}^{\infty}P(x)dx$ расходится, то ряд сходится;

3) если $\int\limits_{m}^{\infty}P(x)dx$ сходится, то ряд расходится;

4) если $\int\limits_{m}^{\infty}\frac{P_{k+1}(x)}{P(x)}dx$ сходится, то ряд сходится.

13. Ряд $\sum U_k$ называется абсолютно сходящимся, если:

1) ряд $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k\right|$ сходится; 2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right|$ сходится;

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\sqrt[k]{U_k}\right|$ сходится; 4) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|U_k\right|$ сходится.

14. Знакочередующийся ряд $U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots+(-1)^{n+1}U_n+\ldots\ (U_i>0)$ сходится (признак Лейбница), если:

1) $U_1 < U_2 < U_3 < ... < U_n < ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$;

2) $U_1 > U_2 > U_3 > ... > U_n > ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$;

3) $U_1 > U_2 > U_3 > ... > U_n > ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0$;

4) $U_1 > U_2 > U_3 > ... > U_n > ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = 0$.

15. Функция e^x разлагается в ряд Маклорена вида:

1) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$; 2) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$;

3) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$; 4) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$.

16. Порядком дифференциального уравнения называется:

1) наивысшая степень одной из производных уравнения;

2) наивысший порядок производных уравнения;

3) сумма всех порядков производных, входящих в уравнение.

17. Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется:

1) $\Phi(x, y, c) = 0$; 2) $y' = f(x, y)$; 3) $y = \varphi(x)$; 4) $y = \varphi(x, c)$.

18. Однородное дифференциальное уравнение I-го порядка решается подстановкой:

1) $y = U \cdot V$; 2) $y = \frac{x}{U}$; 3) $y = \frac{U}{V}$; 4) $y = U \cdot x$.

19. Дифференциальное уравнение I-го порядка называется линейным, если:

1) $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$; 2) $\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)$; 3) $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot x = Q(x)$.

20. Линейное уравнение первого порядка решается подстановкой:

1) $y = \frac{U}{V}$; 2) $y = \frac{x}{U}$; 3) $y = x \cdot U$; 4) $y = U \cdot V$.

21. Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ имеет характеристическое уравнение вида:

1) $k^2 + a_1 k + a_2 y = 0$; 2) $k'' + a_1 k' + a_2 k = 0$;

3) $y^2 + a_1k + a_2 = 0$; 4) $k^2 + a_1k + a_2 = 0$.

22. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Тогда общее решение этого уравнения будет:

1) y=$C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$; 2) $y = C_1\cos k_1x + C_2\sin k_2x$;

3)y= $e^{k_1x} + e^{k_2x}$; 4) y=$C_1e^{k_1x} \cdot C_2e^{k_2x}$.

23. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_1 = \alpha - i\beta$. Тогда общее решение дифференциального уравнения будет:

1) $e^{\beta x}\left(C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x\right)$; 2) $C_1\cos\beta x + C_2\sin\alpha x$;

3) $e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$; 4) $C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$.

24. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ имеет два одинаковых $k_1 = k_2$. Тогда общее решение дифференциального уравнения будет:

1) y=$C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$; 2) y= $C_1\cos k_1x + C_2\sin k_1x$;

2) y=$e^{k_1x}\left(C_1\cos k_2x + C_2\sin k_2x\right)$; 4) y=$C_1e^{k_1x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k_1x}$.

25. Если y_1 и y_2 - два линейно независимых решения дифференциального уравнения $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, то общее решение этого уравнения будет:

1) y=$C_1y_1 + C_2y_2$; 2) y=$y_1 + y_2$; 3)y= C_1y_1 / C_2y_2; 4) y=$C_1e^{y_1x} + C_2e^{y_2x}$.

Зачетный тест.

1.

Определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равен… 1) -1; 2) 1; 3) 5; 4) -5

2. Если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, то матрица $C=2A+B$ имеет вид….

1) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 8 & -8\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & -8\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & -8\end{pmatrix}$.

3. Для матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ и транспонированных к ним определены произведения …

1) AB; 2) B^TA; 3) A^TB^T; 4) AB^T; 5) BA.

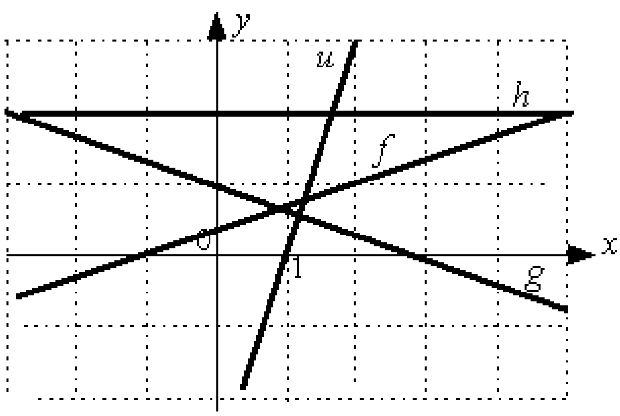
4. Система линейных уравнений $\begin{cases}2x_1+x_2=4,\\ 4x_1+5x_2=6\end{cases}$ решается по правилу Крамера. Установите соответствие между определителями системы

1) Δ, 2) Δ_{x_1}, 3) Δ_{x_2} и их значениями. 1) -2; 2) 2; 3) 6; 4) 14.

5. Даны точки $A(2;-1)$, $B(10;5)$ и $C(10;-1)$. Установите соответствие между отрезком и его длиной 1. $|AB|$, 2. $|AC|$, 3. $|BC|$.

1) 14; 2) 6; 3) 10; 4) 8. 5) 12.

6. Даны графики прямых



Укажите правильное соответствие между прямыми 1. f, 2. g, 3. h, 4. u.
и значениями их угловых коэффициентов

1) 0; 2)-3; 3) 3; 4) $\frac{1}{3}$.

7. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, то длина ее действительной полуоси равна…

1) 3; 2) 9; 3) 16; 4) 4.

8. Плоскость, проходящая через начало координат параллельно плоскости $4x + 2y - 6z + 5 = 0$, имеет уравнение …

1) $2x + y - 3z = 0$; 2) $2x - y - 3z = 0$;

3) $2x + y + 3z = 0$; 4) $4x + 2y - 6z - 5 = 0$.

9. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ нечетна, если функция $g(x)$ задается формулами

1) $g(x) = x^2$; 2) $g(x) = x^3$; 3) $g(x) = 3x$; 4) $g(x) = x + 1$.

10. Выберите верную последовательность значений пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3 + x - 8}{x^3 - 2x - 1};\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4 + 3x}{x^3 - 4};\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 4}{6x^7 - 5x + 2}$$

1) 0; 2) 2; 3) 5; 4) ∞.

11. Материальная точка движется по закону $s = 4\sin^2 t$. Тогда ее ускорение в момент времени $t = 0$ равно…

1) 0; 2) 4; 3) -4; 4) 8.

12. Производная функции $y = \sin^2 x$ равна…

1) $\cos^2 x$; 2) $\sin 2x$; 3) $2\cos x$; 4) $2\sin x$.

13. Первообразными функции $y = 3x^2 - 2x + 1$ являются …

1) $6x - 2$; 2) $x^3 - x^2 + x$; 3) $3x^3 - 2x^2$; 4) $x^3 - x^2 + x + 1$.

13. Несобственный интеграл $\int\limits_3^{+\infty}(x-2)^{-4}dx$ равен …

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 1.

14. Укажите сходящиеся числовые ряды…

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$.

15. Дополнить

Если последовательность ….., то она …..

1) монотонна; сходится ; 2) монотонна и ограничена; сходится ;

3) сходится; ограничена ; 4) ограничена; сходится.

16. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 10. Тогда интервал сходимости имеет вид…

1) (0; 10); 2) (– 10; 0) ; 3) (– 10; 10) ; 4) (– 5; 5).

17. Первый **отличный от нуля** коэффициент разложения функции $y = 2\sin x$ в ряд Тейлора по степеням x равен …

1) 2; 2) -1; 3) -2; 4) 1.

18. Порядок дифференциального уравнения $y'' - y'\,\mathrm{tg}x = \cos x$ можно понизить заменой …

1) $y' = z(x)$; 2) $y' = z(y)$; 3) $y'' = z(x)$; 4) $y'' = z(y)$.

20 Решением уравнения первого порядка $x'x = t$ является функция …

1) $x(t) = \sqrt{6t^2 + 1}$; 2) $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$;

3) $x(t) = \sqrt{4t^2 + 1}$; 4) $x(t) = \sqrt{t^2 + 1} + 1$.

22. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = x + 2$ имеет вид …

1) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$; 2) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$;

3) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$; 4) $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

23. Функция $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения. Тогда его характеристическое уравнение имеет вид …

1) $k^2 + k - 6 = 0$; 2) $k^2 - k - 2 = 0$; 3) $k^2 + k - 2 = 0$; 4) $k^2 + 3k - 4 = 0$.

24. Дана функция полезности $u = x + 4\sqrt{y}$. Тогда кривая безразличия задается уравнением…

1) $x+4\sqrt{y}=C$; 2) $\dfrac{x}{4\sqrt{y}}=C$; 3) $1+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=C$; 4) $4x\sqrt{y}=C$.

25. Даны функции спроса $q=\dfrac{p+6}{p+1}$ и предложения $s=2p+1{,}5$, где p – цена товара. Тогда ***равновесная цена*** равна…

1) 3,5; 2) 4,5; 3) 2,25; 4) 1.

26. Неоклассическая мультипликативная производственная функция переменных K и L может иметь вид …

1) $f(K,L)=0{,}3K+0{,}5L$; 2) $f(K,L)=K^{0,3}L^{5}$;

3) $f(K,L)=K^{0,3}L^{0,5}$; 4) $f(K,L)=K^{-0,3}L^{-0,7}$.

27. Мультипликативная производственная функция имеет вид $X=0{,}3K^{0,4}L^{0,5}$, где K – капитал, L – труд. Тогда увеличение объема капитала на 1% приведет к увеличению валового выпуска на …

1) 0,4%; 2) 0,5%; 3) 0,3%; 4) 0,9%.

28. Точками разрыва функции $y=\dfrac{x+3}{x(x+1)}$ являются точки …

1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) -3.

29. Функция полезности потребителя имеет вид $u=\sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 5, на благо y равна 10, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид…

1) (40, 0); 2)(8,16) ; 3) (20,10); 4) (20,20).

30. Комплексное число $1+i$ можно представить в виде …

1) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; 2) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов, рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Банки и биржи; ЮНИТИ, 1998, 2002, 2003, 2004, 2000.
2. Высшая математика для экономистов. Учеб. пособие / ред. Н.Ш. Кремер. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1997.
3. Красс М.С. Математика для экономистов. Учеб. пособие, рек. УМО вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2005.
4. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. Учебник, рек. Мин. обр. РФ / Красс М.С., Чупрынов Б.П. – 2-е изд., испр., 3-е изд., испр., 4-е изд., испр. – М.: Дело, 2001, 2003, 2002.
5. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник для вузов, рек. Мин. обр. РФ. – М. :Инфра-М, 1999, 1998.
6. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник для вузов, рек. Мин. обр. РФ / ред. В.И. Ермаков. – М.: ИНФРА-М, 2000, 2001.
7. Практикум по высшей математике для экономистов. Учеб. пособие, рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002, 2003, 2004.
8. Федосеев В.В., Эрношвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2001.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
1. Элементы линейной алгебры 10
2. Практические приложения матричной алгебры в экономике 29
3. Первообразная и неопределенный интеграл 60
4. Определенный интеграл 86
5. Несобственные интегралы 104
6. Приближенное вычисление определенного интеграла 106
7. Кратные интегралы 110
8. Дифференциальные уравнения 118
9. Ряды 136
Библиографический список 159

Вохминцева Галина Павловна,
доцент кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Торопчина Галина Никитовна,
доцент кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Шевченко Инна Николаевна,
доцент кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Математика. Часть II. практикум

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 9,3. Заказ 258.