Министерство образования и науки Российской Федерации

Амурский государственный университет

Н.Н. Кушнирук, В.В. Сельвинский

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2011

ББК 22.19 я 73
К 96

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Р.В. Намм, зав. кафедрой программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем ТОГУ (г. Хабаровск), д-р физ.-мат. наук, профессор

Кушнирук, Н.Н., Сельвинский, В.В.
К 96 Методы оптимизации. Практикум / Н.Н. Кушнирук, В.В. Сельвинский. – Благовещенск: Изд-во АмГУ , 2011. – 96 с.

В пособии излагаются краткие теоретические сведения, основные положения, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы некоторых разделов методов оптимизации: элементы выпуклого анализа, методы одномерной и многомерной безусловной оптимизации, теория линейного программирования. Все методы иллюстрируются примерами.

Практикум предназначен для студентов специальностей 010101 – «Математика», 010501 – «Прикладная математика и информатика», 010701 – «Физика».

ББК 22.19 я 73

ВВЕДЕНИЕ

Принцип выбора лучшего варианта из многих является основой жизнедеятельности человека. Существенную роль здесь играет критерий, по которому оценивается лучший вариант. Один и тот же вариант может быть лучшим по одному критерию и не быть таковым по другому критерию. Выбор критерия оценки варианта – проявление уровня интеллекта и жизненного опыта человека.

Совокупность критерия и множества возможных вариантов составляют структуру любой задачи оптимизации. Математическая модель такой задачи включает в себя целевую функцию (или функционал), выражающую критерий оценки, а также систему уравнений или неравенств относительно переменных, определяющих вариант выбора. Методы решения таких задач существенно зависят от вида целевой функции (функционала), характера ограничений и составляют содержание таких математических дисциплин как математическое программирование, вариационное исчисление, оптимальное управление, методы оптимизации и т.п.

Пособие состоит из введения, пяти глав, списка литературы и содержания. В пяти главах отражен основной материал: постановка задач оптимизации, элементы выпуклого анализа, методы одномерной и многомерной безусловной оптимизации, теория линейного программирования. Объем пособия не позволил включить в его содержание таких важных разделов, как методы решения задач условной оптимизации, теория двойственности, вариационное исчисление, оптимальное управление. Однако в будущем подразумевается выпуск второй части пособия, в котором будут отражены указанные вопросы.

Все представленные методы иллюстрируются примерами; в месте окончания каждого примера ставится знак ■. Приводятся задания для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов специальностей 010101 – «Математика» в рамках изучения дисциплин «Выпуклый анализ и математическое программирование» (цикл ОПД) и «Вариационное исчисление и методы оптимизации» (цикл СД), 010501 – «Прикладная математика и информатика» в рамках изучения дисциплины «Методы оптимизации» (цикл ОПД), 010701 – «Физика» в рамках изучения дисциплины «Методы оптимизации» (цикл ЕН.В.). Также практикум будет полезен для студентов специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика» в рамках изучения некоторых вопросов дисциплины «Теория игр и исследование операций» (цикл ОПД).

ГЛАВА 1. ПРЕДМЕТ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть заданы множество $X \subseteq R^n$ (n = 1, 2, …) и функция $f(x)$, определенная на данном множестве. Требуется найти точки минимума (или максимума) функции $f(x)$ на X:

$$f(x) \to \min, \; x \in X . \tag{1.1}$$

$f(x)$ – *целевая функция*, X – *допустимое множество*, $\forall x \in X$ – *допустимая точка* задачи (1.1).

Точка $x^* \in X$ называется:

1) *точкой глобального минимума* функции $f(x)$ на множестве X или глобальным решением задачи (1.1), если:

$$f(x^*) \le f(x) \;\; \forall x \in X ; \tag{1.2}$$

2) *точкой локального минимума* функции $f(x)$ на множестве X или локальным решением задачи (1.1), если $\exists \varepsilon > 0$:

$$f(x^*) \le f(x) \;\; \forall x \in U_\varepsilon(x^*), \tag{1.3}$$

где $U_\varepsilon(x^*) = \left\{x \in R^n : \left|x - x^*\right| \le \varepsilon\right\}$ – шар с центром в точке x^* и радиусом $\varepsilon > 0$.

Если неравенства (1.2) или (1.3) выполняются как строгое, то говорят, что точка x^* является *точкой строгого минимума* в глобальном или локальном смысле. Очевидно, что точка глобального минимума является точкой локального минимума; обратное не верно.

Для отражения факта, что точка $x^* \in X$ является точкой глобального минимума функции $f(x)$ на X, будем использовать запись

$$f^* = (f^{\min} =) f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \text{ или } x^* = (x^{\min} =) \arg\min_{x \in X} f(x) .$$

Множество всех точек глобального минимума обозначим

$$X^* = Arg \min_{x \in X} f(x) = \left\{x^* \in X : f(x^*) = f^*\right\}, \text{ где } f^* = f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) .$$

По аналогии ставится задача максимизации функции f на множестве X в виде

$$f(x) \to \max, \ x \in X. \tag{1.4}$$

Решения задач (1.1) и (1.4), то есть точки максимума и минимума, называют точками экстремума, а сами задачи (1.1) и (1.4) экстремальными задачами.

Ясно, что задача (1.4) эквивалентна задаче

$$-f(x) \to \min, \ x \in X$$

в том смысле, что множества глобальных и локальных, строгих и нестрогих решений этих задач совпадают. Это позволяет переносить результаты, полученные для задачи минимизации, на задачи максимизации, и наоборот. В дальнейшем, если это не будет оговорено отдельно, будем рассматривать задачу максимизации (1.1).

Важную роль в теории методов оптимизации играет следующая теорема.

Теорема 1.1 (теорема Вейерштрасса). Пусть X – компакт (замкнутое ограниченное множество) в R^n, $f(x)$ – непрерывная на X функция. Тогда на этом множестве функция $f(x)$ достигает своего максимального и минимального значений.

В зависимости от вида целевой функции и допустимого множества задачи оптимизации можно разделять на задачи условной и безусловной оптимизации; одномерной и многомерной оптимизации; конечномерной и бесконечномерной оптимизации; линейные и нелинейные задачи; выпуклое программирование. В зависимости от вида задачи для ее решения можно применить тот или иной метод.

ГЛАВА 2. ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Поиск экстремальных значений функции на допустимом множестве упрощается, если ограничится задачей минимизации выпуклых функций на выпуклом множестве.

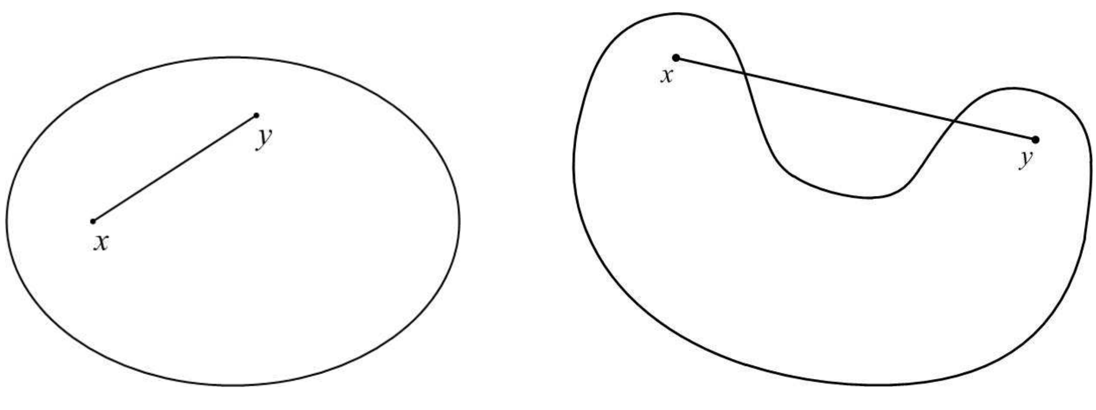
Замечание 2.1. Читателю предлагается самостоятельно обосновать некоторые из утверждений, которые будут излагаться ниже в данной главе.

§ 2.1. Выпуклые множества

Определение 2.1. Множество $X \subset R^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек из данного множества ему принадлежит соединяющий их отрезок, то есть

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in X, \quad \forall x, y \in X, \ \alpha \in [0,1].$$

На рисунке 2.1. изображены примеры множеств, являющегося (а) и не являющегося (б) выпуклыми.



а) б)

Рисунок 2.1. Примеры

Определение 2.2. *Выпуклой комбинацией* точек $x_1, x_2, ..., x_n$ называется точка $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где все $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Отметим, что выпуклое множество содержит выпуклые комбинации всех своих точек.

Приведем примеры выпуклых множеств.

1) Шар $S(x^0, r) = \{x \in R^n : |x - x^0| \le r\}$.

2) Гиперплоскость.

Определение 2.3. *Гиперплоскостью* в R^n называется множество вида

$$\Gamma = \Gamma(c, \gamma) = \{x \in R^n : (c, x) = \gamma\},$$

где $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T \ne 0$ – n-мерный вектор, $\gamma \in R$.

3) Множества вида $\Gamma^+ = \{x \in R^n : (c, x) > \gamma\}$, $\Gamma^- = \{x \in R^n : (c, x) < \gamma\}$ (открытые полупространства), $\overline{\Gamma}^+ = \{x \in R^n : (c, x) \ge \gamma\}$, $\overline{\Gamma}^- = \{x \in R^n : (c, x) \le \gamma\}$ (замкнутые полупространства).

4) Множество решений системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, то есть множество вида

$$M = \{x \in R^n : Ax = b\},$$

где A – заданная матрица размера $m \times n$, b – вектор из R^n. Множество M называется аффинным множеством, или линейным многообразием.

5) Множества вида $M^- = \{x \in R^n : Ax \le b\}$ и $M^+ = \{x \in R^n : Ax \ge b\}$.

6) Множество вида $U = \{x \in R^n : a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n}\}$, где a_i, b_i – заданные величины ($a_i < b_i$, возможно $a_i = -\infty$, $b_i = \infty$). Если a_i, b_i – конечные величины, то U называется многомерным параллелепипедом.

7) Неотрицательный октант $R^n_+ = \{x \in R^n : x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}\}$.

Пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло. Объединение любых двух (и более) выпуклых множеств не обязательно выпукло. Сумма выпуклых множеств $C = A_1 + A_2 + ... + A_m$, разность выпуклых $C = A - B$ и произведение выпуклого множества на произвольное действительное число $C = \lambda A$ являются выпуклыми множествами.

Проверка условия в определении 2.1 в большинстве случаев требует громоздких выкладок, поэтому на практике при исследовании выпуклости множеств в пространствах R^2 и R^3 часто прибегают к геометрическим построениям.

Пример 2.1. Выяснить, является ли множество $X = \{x \in R^2 : x_1 x_2 > 1, x_1 > 0\}$ выпуклым?

Решение. Построим граничные кривые множества *X*. Кривая $x_1 x_2 = 1$ представляет собой гиперболу. Определим множество, определяемое соотношением $x_1 x_2 > 1$; для этого выберем какую-либо точку в координатной плоскости, не лежащую на данной кривой. Если координаты этой точки удовлетворяют неравенству, то все точки, лежащие по ту же сторону относительно кривой $x_1 x_2 = 1$, что и выбранная точка, определяют множество, определяемой соотношением $x_1 x_2 > 1$. Выберем точку (0, 0). Очевидно, что координаты не удовлетворяют соотношению $x_1 x_2 > 1$. Таким образом, множество, определяемое данным неравенством, расположено в противоположную точке (0, 0) сторону относительно гиперболы. Множество, определяемое неравенством $x_1 > 0$, представляет собой правую полуплоскость. На рисунке 2.2 на графиках всех кривых поставим стрелочки, тем самым, определив направления. Отметим, что множество задано строгими неравенствами, поэтому граничную кривую рисуем пунктиром.

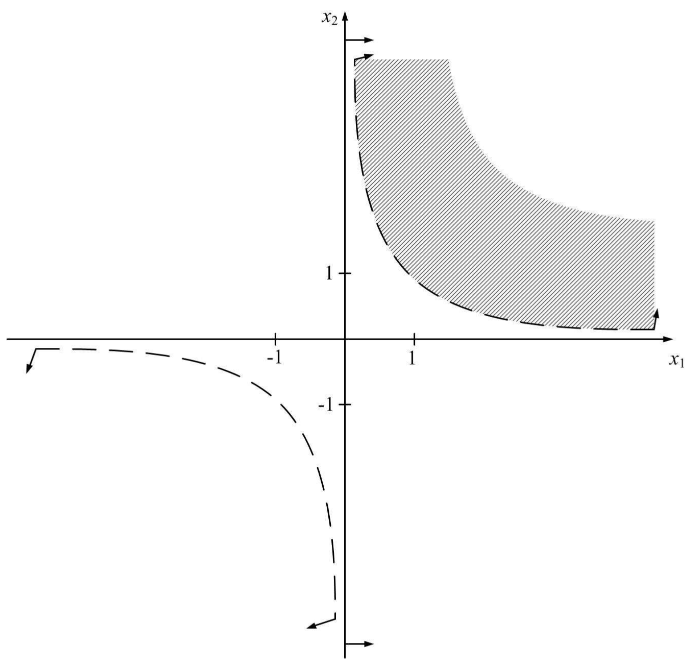


Рисунок 2.2. Графическая иллюстрация к примеру 2.1

Как видно из рисунка, множество X является выпуклым. ■

Пример 2.2. Выяснить, является ли множество $X = \left\{ x \in R^3 : x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{2} + \dfrac{x_3^2}{3} \geq 1 \right\}$ выпуклым?

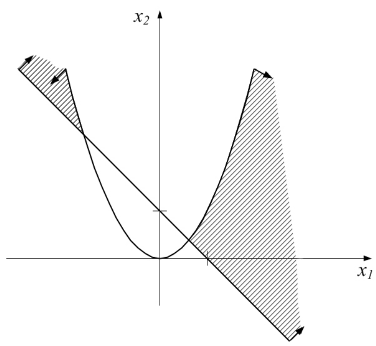
Решение. Множество X представляет собой внешнюю часть эллипсоида $x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{2} + \dfrac{x_3^2}{3} = 1$ и, очевидно, не является выпуклым множеством. ■

Пример 2.3. Выяснить, при каком значении параметра a множество $X = \left\{ x \in R^2 : x_1 + x_2 \geq 1,\ x_2 \leq a x_1^2 \right\}$ является выпуклым?

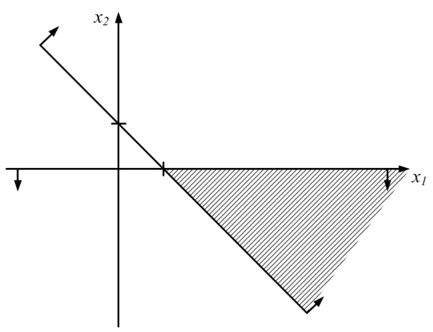
Решение. Построим граничные кривые. Уравнение $x_1 + x_2 = 1$ представляет собой уравнение прямой, уравнение $x_2 = a x_1^2$ при $a \neq 0$ есть уравнение параболы.

При $a > 0$, очевидно, что множество X не является выпуклым ни при каком значении параметра (рисунок 2.3, а).

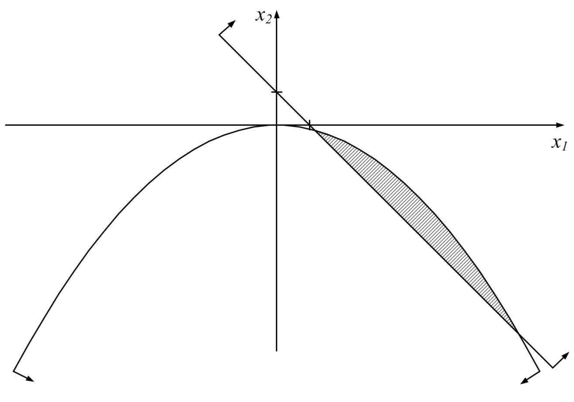
Если $a = 0$, то множество X выпукло (рисунок 2.3, б).



а)



б)



в)

Рисунок 2.3. Графическая иллюстрация к примеру 2.3

Если $a < 0$, то множество X будет выпуклым только в случае, если множества $\{x \in R^2 : x_1 + x_2 \geq 1\}$ и $\{x \in R^2 : x_2 \leq a x_1^2\}$ имеют непустое пересечение (рисунок 2.3, в). Найдем значение параметра, при котором графики функций $x_1 + x_2 = 1$ и $x_2 = a x_1^2$ касаются. Значение параметра и координаты точки касания найдем из системы:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_1, \\ x_2 = a x_1^2, \\ (1 - x_1)' = (a x_1^2)'. \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x_2 = 1 - x_1, \\ x_2 = a x_1^2, \\ -1 = 2 a x_1. \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ a = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Таким образом, при $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ указанные множества имеют непустое пересечение. При $a = -\frac{1}{4}$ множество X состоит из единственной точки (2, –1).

Окончательно получаем, что множество X будет выпуклым при $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$. ■

§ 2.2. Выпуклые функции

Определение 2.4. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq R^n$, называется *выпуклой (выпуклой вниз)* на X, если

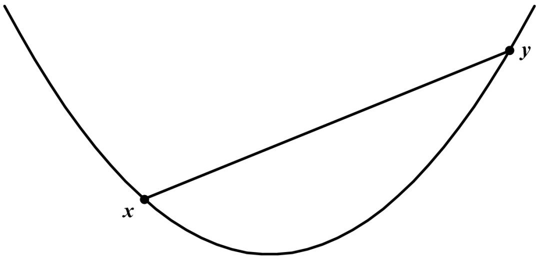
$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \quad \forall x, y \in X, \ \alpha \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Если при всех $x, y \in X, \ x \neq y, \ \alpha \in (0,1)$ неравенство (2.1) выполняется как строгое, то функция $f(x)$ называется *строго выпуклой* (рисунок 2.4, а).

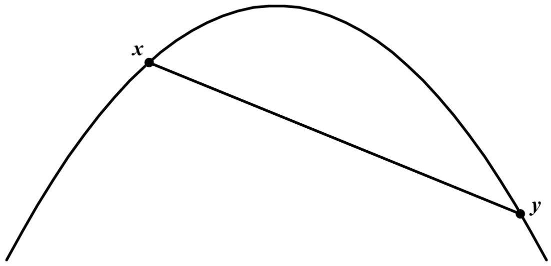
Функция $f(x)$ называется *(строго) вогнутой (выпуклой вверх)* на X (рисунок 2.4, б), если функция $-f(x)$ (строго) выпукла, то есть

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \quad \forall x, y \in X, \ \alpha \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Геометрически выпуклость функции означает, что любая произвольная точка произвольной хорды графика функции $f(x)$ располагается не ниже соответствующей точки самого графика (рисунок 2.4, а).



а)



б)

Рисунок 2.4. Примеры выпуклой и вогнутой функций

Для любой выпуклой функции $f(x)$ на выпуклом множестве имеет место неравенство (*неравенство Йенсена*)

$$f(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(x_i), \quad \forall m \ge 1,\ \forall x_i \in X,\ \forall \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1. \tag{2.3}$$

Обосновать выпуклости (вогнутости) можно проводить непосредственно с использованием определения, однако эту задачу облегчает применение следующей теоремы.

Теорема 2.1. Пусть X – выпуклое множество с непустой внутренностью, функция $f(x) \in C^2(X)$. Тогда для выпуклости $f(x)$ на X необходимо и достаточно, чтобы

$$(f''(x)h,h) \ge 0 \ \ \forall h \in R^n,\ \forall x \in X,$$

иными словами, чтобы Гессиан $f''(x) = \left\{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ был неотрицательно определен.

Для вогнутости $f(x)$ на X необходимо и достаточно, чтобы

$$(f''(x)h,h) \le 0 \ \ \forall h \in R^n,\ \forall x \in X,$$

иными словами, чтобы Гессиан $f''(x)=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ был неположительно определен.

Для определения положительной или неотрицательной определенности матрицы Гессе используется критерий Сильвестра.

Критерий Сильвестра. Необходимым и достаточным условием неотрицательной (неположительной) определенности матрицы Гессе $H(x^*)=f''(x^*)$ является выполнение n условий:

$$\Delta_1 = H_{11}^* \geq 0(\leq 0),\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* \end{vmatrix} \geq 0(\geq 0),\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* & H_{13}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* & H_{23}^* \\ H_{31}^* & H_{32}^* & H_{33}^* \end{vmatrix} \geq 0(\leq 0),\ ...,$$

т.е. необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры этой матрицы были неотрицательны (меняли знак, начиная с неположительного).

В случае строгой выпуклости и вогнутости неравенства выполняются как строгие.

Задачи выпуклого анализа обладают хорошим свойством: если функция $f(x)$ строго выпукла на выпуклом множестве *X*, тогда точка минимума будет единственной.

При исследовании выпуклости функции может быть полезна следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть функция $\varphi(t)$ одной переменной выпукла и не убывает на промежутке $a \leq t \leq b$ (возможность $a=-\infty$ и $b=\infty$ не исключается), пусть функция $g(x)$ выпукла на выпуклом множестве *X*, причем $g(x)\in[a,b]\ \forall x \in X$. Тогда выпуклой на *X* будет функция

$$f(x)=\varphi(g(x)).$$

Выпуклые функции являются удобным средством для построения выпуклых множеств.

Определение 2.5. *Надграфиком* (или *эпиграфом*) всякой функции $f(x)$, определенной на множестве X, называется множество (рисунок 2.5)

$$epi\, f = \{(x,\gamma) \in R^{n+1} : \ x \in X, \ \gamma \geq f(x)\}.$$

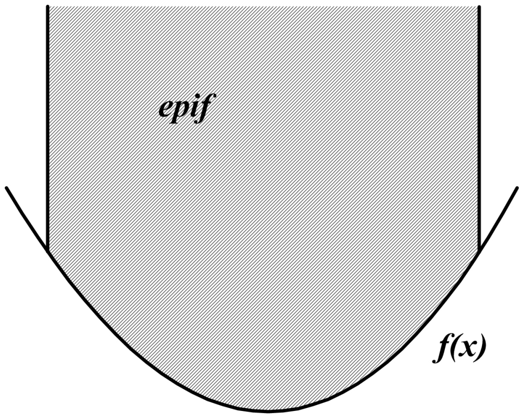


Рисунок 2.5. Эпиграф выпуклой функции

Теорема 2.3. Для того чтобы функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, была выпуклой на нем, необходимо и достаточно, чтобы ее надграфик был выпуклым множеством.

Очевидно, что для вогнутости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, что бы ее подграфик $\{(x,\gamma) \in R^{n+1} : \ x \in X, \ \gamma \leq f(x)\}$ был выпуклым.

Пример 2.4. Выяснить, является ли функция $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2)$ выпуклой в R^2.

Решение. Запишем матрицу вторых производных

$$H(x) = \begin{pmatrix} 4 + \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Найдем главные миноры данной матрицы:

$$\Delta_1 = 4 + \sin(x_1 + x_2) > 0, \ \Delta_2 = 8 - 6\sin(x_1 + x_2) > 0,$$

то есть функция $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2)$ выпукла в пространстве R^2. ■

Пример 2.5. Выяснить, является ли функция $f(x) = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ выпуклой в R_+^n.

Решение. Запишем матрицу вторых производных $H(x)=\begin{pmatrix} \frac{2}{x_1^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{x_2^3} \end{pmatrix}$.

Очевидно, что все главные миноры $\Delta_1=\frac{2}{x_1^3}>0,\ \Delta_2=\frac{4}{x_1^3x_2^3}>0$, и, следовательно, функция $f(x)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ будет строго выпукла в указанном пространстве. ■

Пример 2.6. Выяснить, при каких значениях параметров функция $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$ выпуклой в R_{+}^{n}.

Решение. Воспользуемся теоремой 2.2. Для этого представим функцию $f(x)$ в виде $f(x)=\varphi(g(x))=\varphi(e^x)=ae^{2x}+be^{x}+c$, где функция $g(x)=e^x$ выпукла в R и принимает значение из интервала $(0,\infty)$. Функция $\varphi(t)=at^2+bt+c$ будет выпукла в R при $a\ge 0$ и не убывает при $t\ge -\frac{b}{2a}$. Последнее неравенство с учетом замены переписывается в виде $e^x\ge -\frac{b}{2a}$. Таким образом, если $b\ge 0$, то функция $f(x)$ будет выпукла при любом значении аргумента. Если же $b\le 0$, то функция $f(x)$ выпукла при $x\ge \ln\left(-\frac{b}{2a}\right)$. ■

Задачи к главе 2

1. Установить, какие из следующих множеств являются выпуклыми:

1) $X=\{x\in R^2: 2x_1+x_2\le 2, 2x_1-x_2\ge -2, x_2\ge 0\}$; ***2)*** $X=\{x\in R^2: x_2\ge x_1^2\}$;

3) $X=\{x\in R^2: x_1x_2<1, x_1>0, x_2>0\}$; ***4)*** $X=\{x\in R^2: x_1-x_2\le 2, x_1^2+x_2^2\le 4\}$;

5) $X=\{x\in R^3: x_3\ge x_1^2+x_2^2\}$; ***6)*** $X=\{x\in R^3: x_3^2\ge x_1^2+x_2^2\}$;

7) $X=\{x\in R^3: x_1^2+x_2^2\le 1\}$; ***8)*** $X=\{x\in R^3: x_1+x_2+x_3\le 1, x_1\ge 0, x_2\ge 0\}$;

9) $X=\{x\in R^2: \sin x_1\ge x_2,\ 0\le x_1\le \pi\}$.

2. При каких значениях параметра a множество X будет выпуклым:

1) $X = \{x \in R^2 : a(x_1 - x_2^2) \le 0, x_1 + x_2 \le 1\}$; ***2)*** $X = \{x \in R^2 : x_1^2(a^2 + 3a + 2) - x_2 \ge 0\}$;

3) $X = \{x \in R^2 : a(x_1 - x_2^2) \le 0, x_1 + x_2 \le a\}$; ***4)*** $X = \{x \in R^2 : x_2 \le e^{ax_1}, x_2 \le x_1\}$;

5) $X = \{x \in R^2 : a(x_1 - x_2^2) \le 0, x_1 + x_2 \ge a\}$; ***6)*** $X = \{x \in R^2 : x_2 \le e^{x_1}, x_2 \le ax_1\}$;

7) $X = \{x \in R^2 : e^{x_1}(a^2 - 5a + 6) - x_2(a^2 + 2) \le 0\}$;

8) $X = \left\{x \in R^2 : \dfrac{x_1^2}{a^2 + 1} + (x_2 + 1)^2 \le 1, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \le a\right\}$;

9) $X = \{x \in R^2 : x_2 \ge \ln x_1, x_2 \ge ax_1, x_1 \ge 0\}$;

10) $X = \{x \in R^2 : x_1^3 + x_2^3 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge a\}$

11) $X = \{x \in R^2 : (x_1 - 1)^3 - x_2^2 \le 0,\ x_2 - x_1 \le a\}$.

3. Исследовать функции на выпуклость или вогнутость в области:

1) $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - x_2 - 2$ в R^2; ***2)*** $f(x) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$ в R^2;

3) $f(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2$ в R^2; ***4)*** $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos\dfrac{x_1 - x_2}{2}$ в R^2;

5) $f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ в R^2; ***6)*** $f(x) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ в R^3;

7) $f(x) = x_1^6 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 10x_1 + 5x_2 - 3x_4 - 20$ в R^4;

8) $f(x) = -x_2^5 + \dfrac{x_3^2}{2} + 7x_1 - x_3 + 6$ в $R_-^3 = \{x \in R^3 : x_i \le 0, i = 1,2,3\}$;

9) $f(x) = x_1^3 + 2x_3^2 + 10x_1 + x_2 - 5x_3 + 6$ в R_-^3; ***10)*** $f(x) = x_1 e^{-(x_1 + x_2)}$ в R^2;

11) $f(x) = -x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + 10x_1 - x_2 + 15x_3 + 6$ в $R_+^3 = \{x \in R^3 : x_i \ge 0, i = 1,2,3\}$;

12) $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_2$ в R^3;

13) $f(x) = (x_1^2 - x_2)^2$ в R^2.

4. Указать множества, на которых функции являются выпуклыми:

1) $f(x) = \dfrac{x_1^2}{x_2}$; ***2)*** $f(x) = \sin(x_1 + x_2)$; ***3)*** $f(x) = x_1^2 - x_2^2 - \sin(x_1 - x_2)$;

4) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{1}{x_1 + x_2}$.

5. При каких значениях параметров функции будут выпуклыми в R^n:

1) $f(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$; ***2)*** $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_2$.

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В данной главе рассматриваются задачи одномерной минимизации, т.е. задачи вида $f(x) \to \min, x \in R$.

§ 3.1. Методы анализа

Для минимизации (максимизации) функций одной переменной применимы результаты дифференциального исчисления. Здесь будем рассматривать задачу нахождения экстремальных значений функции $f(x) \to extr,\ x \in X,$ где $X \in R$ – некоторое заданное множество (отрезок или объединение некоторых отрезков). Здесь одну из главных ролей играет теорема Ферма, которая дает необходимое условие экстремума функции в точке.

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке и во внутренней точке x^* этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда $f'(x^*) = 0$.

Таким образом, экстремум дифференцируемой функции следует искать в стационарных точках, то есть точках, удовлетворяющих уравнению $f'(x) = 0$. Кроме того, «подозрительными» на экстремум являются точки, не попадающие под действие теоремы Ферма, а именно: граничные точки, точки разрыва функции и точки разрыва производной. После того, как все эти точки определены, необходимо вычислить значения функции в этих точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее.

Пример 3.1. Найти экстремум функции $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\big/(x+1)^2$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Вычислим значение функции в граничных точках: $f(-2) = 12,\ f(2) = 0$.

Точка разрыва функции $(x = -1)$ принадлежит заданному множеству, поэтому вычислим предельное значение функции в точке разрыва:

$\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) = +\infty$. То есть на заданном множестве функция неограниченна сверху.

Вычислим производную функции $f'(x) = (5x-7)\big/(x+1)^3$, найдем точки, в которых производная равна нулю ($x = 7/5 \in [-2,2]$) и точки разрыва производной ($x = -1$) и рассчитаем значение функции в стационарной точке: $f(7/5) = -1/24$.

Таким образом, наименьшее значение функция достигает в точке $x^{\min} = 7/5$, наименьшее значение равно $f^{\min} = -1/24$. Наибольшее значение на заданном множестве функция не достигает. ■

Пример 3.2. Найти экстремум функции $f(x) = x\sqrt[3]{|x|-1}$ на отрезке $[-7, 2]$.

Решение. Пользуясь определением модуля, запишем функцию в виде:

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{-x-1}, & x \in [-7, 0), \\ x\sqrt[3]{x-1}, & x \in [0, 2], \end{cases}$$

при этом $f(-7) = -7\sqrt[3]{6} \approx -12{,}72,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2\sqrt[3]{1} = 2$. Точек разрыва функция не имеет. Исследуем поведение функции на каждом из выделенных промежутков.

1) $x \in [-7, 0)$. Производная имеет вид $f(x) = (-4x-3)\Big/\left(3(-x-1)^{2/3}\right)$. Производная обращается в ноль в точке $x = -3/4 \in [-7,0)$ и имеет разрыв в точке $x = -1 \in [-7,0)$. Вычислим значения функции в этих точках $f(-3/4) = 3\Big/\left(4\sqrt[3]{4}\right) \approx 0{,}47$, $f(-1) = 0$.

1) $x \in [0, 2]$. Производная имеет вид $f(x) = (4x-3)\Big/\left[3(x-1)^{2/3}\right]$. Производная обращается в ноль в точке $x = 3/4 \in [0,2]$ и имеет разрыв в точке $x = 1 \in [0,2]$. Вычислим значения функции в этих точках $f(3/4) = -3\Big/\left(4\sqrt[3]{4}\right) \approx -0{,}47$, $f(1) = 0$.

Таким образом, получаем ответ: $x^{\min} = -7,\ f^{\min} = -7\sqrt[3]{6}$, $x^{\max} = 2,\ f^{\max} = 2$. ■

§ 3.2. Унимодальные функции

Большинство известных методов одномерной минимизации применяется для класса унимодальных функций.

Определение 3.1. Функцию $f(x)$ будем называть *унимодальной* на отрезке $[a_0, b_0]$, если она определена во всех точках отрезка $[a_0, b_0]$ и существует точка $x^* \in [a_0, b_0]$, в которой функция достигает глобального минимума на $[a_0, b_0]$, причем слева от этой точки функция не возрастает, а справа не убывает (рисунок 3.1).

На практике иногда для проверки унимодальности функции используют следующие критерии:

1) если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$;

2) если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a,\ b]$, то $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$.

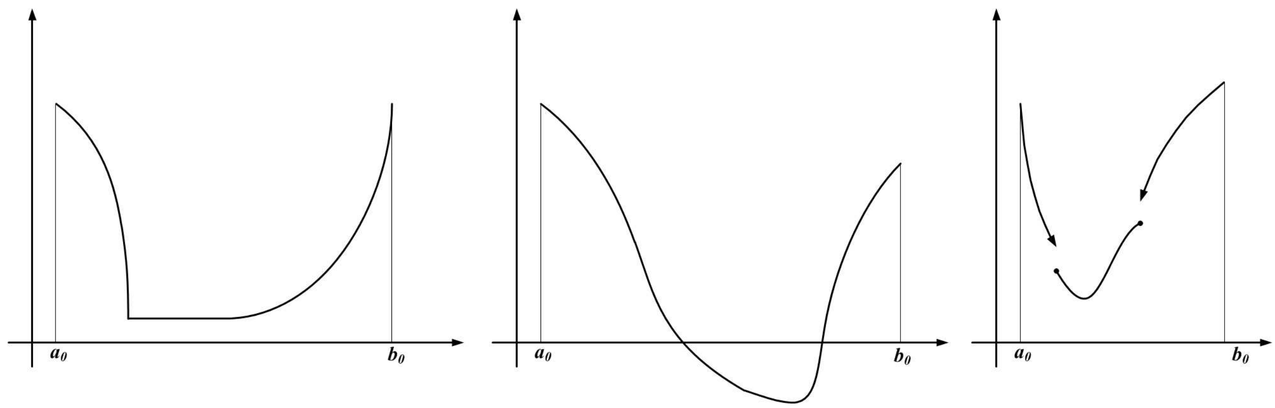


Рисунок 3.1. Примеры унимодальных функций

Однако следует понимать, что функции, у которых меняется знак второй производной на заданном промежутке, так же могут быть унимодальными на данном отрезке.

Пример 3.3. Убедиться в унимодальности функции $f(x) = x^2 - 3x + x\ln x$ на отрезке $[1, 2]$.

Решение. Вычислим первую и вторую производные функции:

$$f'(x) = 2x - 3 + \ln x + x\frac{1}{x} = 2x - 2 + \ln x, \;\; f''(x) = 2 + \frac{1}{x}.$$

Вторая производная функции на отрезке $[1, 2]$ принимает положительные значения, поэтому функция $f(x) = x^2 - 3x + x\ln x$ на данном отрезке будет унимодальной. Однако можно было воспользоваться и тем, что производная функции является функцией возрастающей как сумма возрастающих функций, а, следовательно, сама функция $f(x) = x^2 - 3x + x\ln x$ является унимодальной. ■

Как правило, на практике, в случае сложного задания функции (и, как следствие, сложных формул первой и второй производных), промежутки унимодальности определяются графически.

§ 3.3. Численные методы минимизации

Численные методы одномерной минимизации базируются на вычислении конечного числа значений функции $f(x)$ и ее производных в некоторых точках отрезка $L_0 = [a_0, b_0]$. Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, называются *методами минимизации нулевого порядка*. Методы, использующие значения производных делятся на *методы первого, второго* и т.д. *порядков* в зависимости от того, производные какого порядка они используют.

Как правило, результатом работы численных алгоритмов одномерной минимизации является некоторый заключительный промежуток неопределенности L_N (N – число произведенных типовых вычислений в процессе работы данного алгоритма, иначе, число шагов метода).

Существуют две принципиально различные стратегии выбора точек, в которых осуществляются вычисления, – *пассивная* и *последовательная*.

ПАССИВНЫЕ СТРАТЕГИИ

3.3.1. Метод перебора

Метод перебора является простейшим из методов минимизации нулевого порядка. Пусть задан первоначальный промежуток неопределенности (отрезок, на котором ищется минимум функции) $L_0 = [a_0, b_0]$. Различают два варианта данного метода.

1) Задается количество вычислений функции N. Вычисляются значения функции в $N+1$ равноотстоящих друг от друга точках: $f(x_i)$, где $x_i = a_0 + i\dfrac{b_0 - a_0}{N}, i = \overline{0,N}$. При этом промежуток с $L_0 = [a_0, b_0]$ делится на N равных промежутков. Путем сравнения величин $f(x_i)$, $i = \overline{0,N}$ находится точка x_k, в которой значение функции наименьшее. Искомая точка минимума считается заключенной в промежутке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. При этом верхняя оценка погрешности определения точки минимума имеет вид $\varepsilon \le \dfrac{b_0 - a_0}{N}$.

2) Задана погрешность ε нахождения точки минимума. Вычисляют координаты точек $x_i = a_0 + i\varepsilon, i = \overline{0,N}$, где точка $x_N \le b_0$, а следующая точка $x_{N+1} > b_0$. Далее повторяется процесс, описанный в предыдущем пункте.

Пример 3.4. Методом перебора определить точку минимума функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке $[0,10]$ с $N = 10$.

Решение. Определим точки вычисления функции: $x_i = 0 + i\dfrac{(10-0)}{10} = i$, $i = \overline{0,10}$, и вычислим значения функции в полученных точках: $f(0) = 0$, $f(1) = -10$, $f(2) = -16$, $f(3) = -18$, $f(4) = -16$, $f(5) = -10$, $f(6) = 0$, $f(7) = 14$, $f(8) = 32$, $f(9) = 54$, $f(10) = 80$. Таким образом, в точке $x_3 = 3$ функция принимает наименьшее значение: $f(x_3) = -18$.■

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ

В основе данных методов лежит последовательное сокращение промежутка неопределенности. Следует отметить, что последовательные стратегии применимы для минимизации унимодальных функций. Таким образом, решение задачи разбивается на два этапа: определение первоначального промежутка неопределенности, на котором функция является унимодальной (аналитически или графически), и применение для минимизации численного алгоритма.

3.3.2. Метод деления промежутка пополам

На каждой итерации (номер k) сравниваются значения функции в трех пробных точках, равномерно распределенных на текущем промежутке. Координаты точек вычисляются по формулам: $x_k = (a_k + b_k)/2$, $y_k = (a_k + x_k)/2$, $z_k = (x_k + b_k)/2$. Далее вычисляются значения функции в данных точках. Следующий промежуток неопределенности определяется по правилу:

1) если $f(y_k) < f(x_k)$, положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$;

2) если $f(z_k) < f(x_k)$, положить $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$;

3) если $f(y_k) \geq f(x_k)$ и $f(z_k) \geq f(x_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$.

Работа алгоритма заканчивается, когда длина текущего промежутка неопределенности оказывается не более некоторой величины $\varepsilon > 0$, которую называют требуемой точностью. При этом полагают $x^{\min} = x_k$, $f^{\min} = f(x^{\min})$, где k – номер последней итерации.

Зная данное ε, можно заранее рассчитать количество необходимых шагов. Это число принимается равным наименьшему целому числу, удовлетворяющему неравенству $N \geq \ln \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Big/ (\ln 2)$.

Пример 3.5. Методом половинного деления найти точку минимума функции $f(x) = 10x\ln x - \dfrac{x^2}{2}$ на отрезке $[0{,}1;\, 1]$ с погрешностью $\varepsilon = 0{,}05$; оценить количество итераций, необходимых для решения задачи с указанной точностью.

Решение. Убедимся, что функция $f(x) = 10x\ln x - \dfrac{x^2}{2}$ будет унимодальной на заданном отрезке. Вычислим вторую производную $f''(x) = \dfrac{10}{x} - 1$. На заданном отрезке $f''(x) > 0$, и, следовательно, целевая функция будет унимодальной на $[0{,}1;\,1]$. Оценим количество итераций, требуемых для достижения указанной точности:

$$N \geq \ln \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Big/ \ln 2 = \ln \frac{1 - 0{,}1}{0{,}05} \Big/ \ln 2 \approx 4{,}17;$$

таким образом, за $N = 5$ итерации получим решение, имеющее указанную точность. Все вычисления удобнее проводить в таблице. Представим результаты численных расчетов (таблица 3.1):

Таблица 3.1. Результаты расчетов (пример 3.5)

Номер итер., k	a_k	y_k	x_k	z_k	b_k	$\lvert L_k \rvert$	$f(y_k)$	$f(x_k)$	$f(z_k)$
0	0,1	0,325	0,55	0,775	1	0,9	-3,70559	-3,43935	-2,27573
1	0,1	0,2125	0,325	0,4375	0,55	0,45	-3,31381	-3,70559	-3,71242
2	0,325	0,38125	0,4375	0,49375	0,55	0,225	-3,74907	-3,71242	-3,60642
3	0,325	0,35313	0,38125	0,40938	0,4375	0,1125	-3,73814	-3,74907	-3,74002
4	0,35313	0,36719	0,38125	0,39531	0,40938	0,05625	-3,74620	-3,74907	-3,74695
5	0,36719	–	0,38125	–	0,39531	0,02813	–	-3,74907	–

Получили на пятой итерации метода, что длина интервала унимодальности функции $\lvert L_5 \rvert = 0{,}02813 < \varepsilon$, и, таким образом процесс решения завершается. Окончательно получаем, что ответ

$$x^{\min} = x_5 = 0{,}38125,\ f^{\min} = f(x_4) = -3{,}74907. \ ■$$

3.3.3. Метод золотого сечения

Определение 3.3. Говорят, что точка производит *золотое сечение* промежутка, если отношение длины всего промежутка к длине большей части равно отношению длины большей части к меньшей.

В методе золотого сечения на промежутке $[a,b]$ симметрично относительно его концов выбираются точки y и z, такие что

$$\frac{b-a}{b-y} = \frac{b-y}{y-a} = \frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z}.$$

Нетрудно найти, что $y = a + (3-\sqrt{5})(b-a)/2,\ z = b - (3-\sqrt{5})(b-a)/2$.

Алгоритм метода аналогичен алгоритму метода половинного деления. Первоначально определяется промежуток неопределенности, на котором функция является унимодальной. Вычисляются координаты точек по формулам $y_k = a_k + (3-\sqrt{5})(b_k - a_k)/2$, $z_k = b_k + (3-\sqrt{5})(b_k - a_k)/2$ и значения целевой функции в вычисленных точках. Следующий промежуток неопределенности определяется по правилу:

1) если $f(y_k) < f(z_k)$, положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$;

2) если $f(z_k) < f(y_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$;

3) если $f(y_k) = f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$.

Работа алгоритма заканчивается, как только длина текущего интервала не станет меньше заданной наперед точности $\varepsilon > 0$. При этом полагают $x^{\min} = (a_k + b_k)/2$, $f^{\min} = f(x^{\min})$, где k – номер последней итерации.

Следует отметить, что на каждой итерации метода требуется вычисление значения функции только в одной новой точке (если только не выполнился случай 3). При этом к k-й итерации длина интервала неопределенности становится равной величине $b_k - a_k = \left((\sqrt{5}-1)/2\right)^k (b_0 - a_0)$. Тогда, при известной точности $\varepsilon > 0$, можно рассчитать количество итераций метода, необходимых для достижения требуемой точности, как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$N \ge \ln\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Big/ \ln\frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Пример 3.6. Решим методом золотого сечения задачу примера 3.5.

Решение. Вычислим необходимое число итераций:

$$N \ge \ln\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Big/ \ln\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \ln\frac{1-0{,}1}{0{,}05} \Big/ \ln\frac{2}{\sqrt{5}-1} = 6{,}006,$$

таким образом, $N = 7$. Результаты расчетов представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Результаты расчетов (пример 3.6)

Номер итер., k	a_k	y_k	z_k	b_k	$\lvert L_k \rvert$	$f(y_k)$	$f(z_k)$
0	0,1	0,44377	0,65623	1	0,9	-3,70387	-2,97964
1	0,1	0,31246	0,44377	0,65623	0,55623	-3,68360	-3,70387
2	0,31246	0,44377	0,52492	0,65623	0,34377	-3,70387	-3,52092
3	0,31246	0,39361	0,44377	0,52492	0,21246	-3,74746	-3,70387
4	0,31246	0,36262	0,39361	0,44377	0,13131	-3,74416	-3,74746
5	0,36262	0,39361	0,41277	0,44377	0,08115	-3,74746	-3,73764
6	0,36262	0,38177	0,39361	0,41277	0,05016	-3,74908	-3,74746
7	0,36262	–	–	0,39361	0,03100	–	–

Получили на последней итерации $\lvert L_7 \rvert = 0{,}031 < \varepsilon$, то есть процесс завершаем и записываем ответ $x^{\min} = (a_7 + b_7)/2 = 0{,}37811$, $f^{\min} = -3{,}74887$. ■

3.3.4. Метод хорд (секущих)

Метод основан на применении метода хорд для решения уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$ унимодальности функции. При этом очевидно должны выполнятся условия $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$.

Следуя методу, для текущего промежутка $[a_k, b_k]$ координата точки пересечения хорды с осью OX определяется по формуле $x_k = a_k - \dfrac{f'(a_k)}{f'(a_k) - f'(b_k)}(a_k - b_k)$ (рис. 3.2).

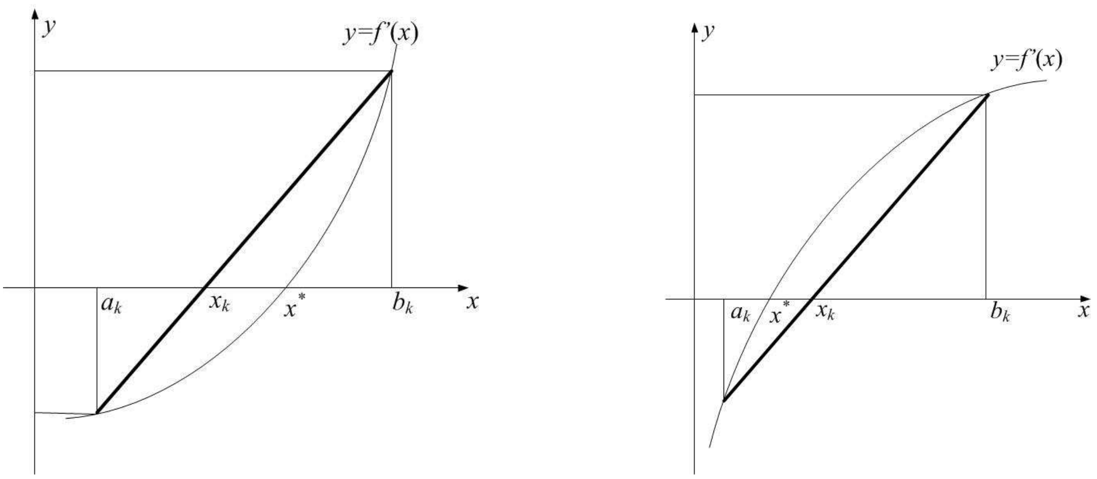


Рисунок 3.2. Графическая иллюстрация к методу хорд

Отрезок дальнейшего поиска $[a_k; x_k]$ или $[x_k; b_k]$ выбирается в зависимости от знака $f'(x_k)$. Если $f'(x_k) > 0$, то полагаем $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k; x_k]$, если $f'(x_k) < 0$ – $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k; b_k]$.

Условие достижения требуемой точности в данном алгоритме накладывается не на длину промежутка неопределенности, а на величину $|f'(x_k)|$, то есть итерации заканчиваются, как только выполнится условие $|f'(x_k)| \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая величина, заданная наперед. В качестве дополнительного критерия может использоваться условие $|x_k - x_{k-1}| \le \delta$, где $\delta > 0$ – сколь угодно малая величина.

Пример 3.7. Решим методом хорд задачу примера 3.5.

Решение. В качестве критериев останова счета выберем два условия: $|f'(x_k)| \le \varepsilon$ и $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$. Вычислим первую производную $f'(x) = 10\ln x + 10 - x$. Представим результаты расчетов в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Результаты расчетов (пример 3.7)

Номер итер., k	a_k	$f'(a_k)$	b_k	$f'(b_k)$	x_k	$f'(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0,1	-13,12585	1	9	0,63391	4,80761	
1	0,1	-13,12585	0,63391	4,80761	0,49078	2,39163	0,14313
2	0,1	-13,12585	0,49078	2,39163	0,43055	1,142553	0,06023
3	0,1	-13,12585	0,43055	1,14253	0,40408	0,53450	0,02647
4	0,1	-13,12585	0,40408	0,53450	0,39218	0,24748	0,01190
5	0,1	-13,12585	0,39218	0,24748	0,38677	0,11398	0,00541
6	0,1	-13,12585	0,38677	0,11398	0,38430	0,05238	0,00247
7	0,1	-13,12585	0,3843	0,05238	0,38317	0,02406	0,00113

Таким образом, на седьмой итерации получили: $|f'(x_7)| = 0{,}0241 < \varepsilon$ и $|x_7 - x_6| = 0{,}00113 < \varepsilon$, и итерации останавливаем. Окончательно получаем ответ: $x^{\min} = x_7 = 0{,}38317$, $f^{\min} = -3{,}74907$.■

3.3.5. Метод Ньютона и его модификация

Метод Ньютона является последовательным методом второго порядка. Предполагается, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема, причем

$f''(x) > 0$ (это гарантирует выпуклость функции $f(x)$). В этом случае корень уравнения $f'(x) = 0$ можно приближенно искать методом касательных (рис. 3.3).

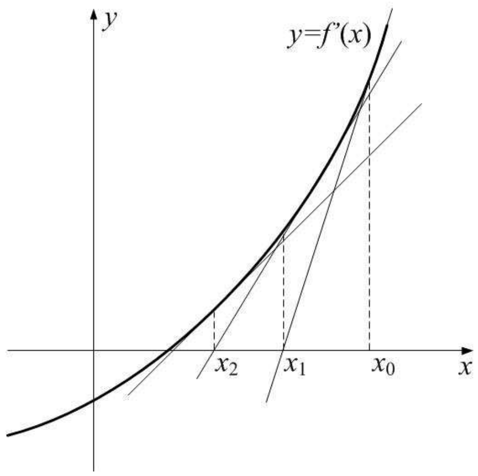


Рисунок 3.3. Графическая иллюстрация к методу Ньютона

Уравнение касательной к графику $f'(x)$ в точке x_k имеет вид $y = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k)$, поэтому точка x_{k+1}, найденная из условия $y = 0$, определяется формулой

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k) / f''(x_k).$$

Заменяя в данной формуле производную $f''(x_k)$ выражением $\left(f'(x_k) - f''(x_{k-1})\right) / \left(x_k - x_{k-1}\right)$, получим формулу

$$x_{k+1} = x_k - \left((x_k - x_{k-1}) f'(x_k)\right) / \left(f'(x_k) - f'(x_{k-1})\right).$$

Очевидно, что в этом случае, для начала работы алгоритма потребуется две точки. Можно поступить следующим образом: начальную точку выбрать с помощью указанного ниже правила, следующую – по методу Ньютона, а далее следовать указанному методу.

Процедура нахождения точек x_k продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность, т.е. $\left|f'(x_k)\right| \le \varepsilon$. Как и в методе хорд, в качестве дополнительного критерия может использоваться условие $\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \delta$, где $\delta > 0$ – сколь угодно малая величина.

Если обратиться к проблеме выбора начальной точки, то такой выбор желательно осуществлять по правилу:

$$\left| f'(x_0) f'''(x_0) \big/ f''^2(x_0) \right| < 1.$$

Также следует начальную точку выбирать из отрезка унимодальности целевой функции.

Пример 3.8. Решим методом Ньютона задачу примера 3.5.

Решение. В качестве критериев останова счета выберем два условия: $|f'(x_k)| \le \varepsilon$ и $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$. Выберем начальную точку x_0 согласно указанному правилу. Вычислим $f'(x) = 10\ln x + 10 - x$, $f''(x) = 10/x - 1$ и $f'''(x) = -10/x^2$. Подставим координаты точки $a = 0{,}1$ $\left(\left| f'(0{,}1) f'''(0{,}1) \big/ f''^2(0{,}1) \right| = 1{,}34 > 1\right)$ и координаты точки $b = 1$ $\left(\left| f'(1) f'''(1) \big/ f''^2(1) \right| = 1{,}11 > 1\right)$. Таким образом, ни одна из данных точек не подходит. В серединной точке отрезка $x = 0{,}45$ $\left(\left| f'(0{,}55) f'''(0{,}55) \big/ f''^2(0{,}55) \right| = 0{,}39 < 1\right)$ условие выполнено, тогда выберем начальную точку x_0 =0,45. Представим результаты расчетов в таблице 3.4.

Таблица 3.4. Результаты расчетов (пример 3.8)

Номер итер., k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0,5	3,47163	17,18182	
1	0,34795	-0,90491	27,7738	0,20205
2	0,38057	-0,04142	25,27637	0,03262

Таким образом, уже на второй итерации получили, что $|f'(x_2)| = 0{,}04142 < \varepsilon$ и $|x_2 - x_1| = 0{,}03262 < \varepsilon$. Окончательно записываем ответ: $x^{\min} = x_2 = 0{,}38057$, $f^{\min} = -3{,}74904$. ■

Задачи к главе 3

1. Найти экстремум функции на указанном промежутке:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$ в R; ***2)*** $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$ в R; ***3)*** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^{x^2}}$ в R;

4) $f(x)=x-2\sin x$ при $x\in[0,+\infty)$; ***5)*** $f(x)=x^{2/3}e^{-x}$ при $x\in[-1,+\infty)$;

6) $f(x)=|x|e^{-|x|}$ при $x\in[-2,2]$; ***7)*** $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ при $x\in[-7,2]$;

8) $f(x)=x(x-2)^{2/3}$ при $x\in[-1,+\infty)$; ***9)*** $f(x)=\begin{cases}|\cos x|, & x\le 0,\\ |\sin x|, & x>0,\end{cases}$ в R;

10) $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le 1,\\ (x-3)^2-3, & 1<x\le 4,\\ 0, & 4<x\le 5,\end{cases}$ при $x\in[-1,5]$;

11) $f(x)=\begin{cases}x^4, & x\le -2,\\ 1, & -2<x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le \pi,\\ 2, & \pi<x\le 5,\\ 2e^{x-5}, & 5<x<10,\end{cases}$ при $x\in(-\infty,10)$.

2. Убедиться в унимодальности функций на указанных отрезках:

1) $f(x)=\ln(1+x^2)-\sin x$ при $x\in[0,\pi/4]$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^2-8x+12$ при $x\in[0,2]$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\sin x$ при $x\in[0,1]$; ***4)*** $f(x)=10x\ln x-\dfrac{x^2}{2}$ при $x\in[0{,}5;1]$;

5) $f(x)=\sqrt{1+x^2}+e^{-2x}$ при $x\in[0,1]$.

3. Найти максимальное значение параметра, при котором функция $f(x)=-x^2+5x-6$ ***унимодальна на отрезке*** $[-5,b]$**.**

4. При каком значении параметра функция $f(x)=ax^3-3x^2-10$ ***будет унимодальной на отрезке* [1, 2]*?***

5. Методом перебора найти точки минимума на данном отрезке с указанной погрешностью:

1) $f(x)=x^2-2x+e^{-x}$, $[1;1{,}5]$, $\varepsilon=0{,}05$; ***2)*** $f(x)=\sqrt{1+x^2}+e^{-2x}$, $[0;1]$, $\varepsilon=0{,}1$;

3) $f(x)=x^4+4x^2-32x+1$, $[1{,}5;2]$, $\varepsilon=0{,}05$;

4) $f(x)=(x-1)^2\sin x,\ [-2;3],\ \varepsilon=0{,}05$; ***5)*** $f(x)=x^3-3\sin x,\ [1{,}5;2],\ \varepsilon=0{,}05$.

6. Убедившись в унимодальности функции на указанном промежутке, методом половинного деления найти точки минимума с указанной погрешностью; оценить количество итераций, необходимых для решения задачи с указанной точностью:

1) $f(x)=x\sin x+2\cos x,\ [-5;-4],\ \varepsilon=0{,}05$**;**

2) $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x+90,\ [1{,}5;2],\ \varepsilon=0{,}02$;

3) $f(x)=x^6+3x^2+6x-1,\ [-1;0],\ \varepsilon=0{,}1$;

4) $f(x)=10x\ln x-\dfrac{x^2}{2},\ [0{,}5;1],\ \varepsilon=0{,}05$;

5) $f(x)=3x^4-10x^3+21x^2+12x,\ [0;0{,}5],\ \varepsilon=0{,}01$;

6) $f(x)=\dfrac{2x}{\ln 2}-2x^2,\ [3{,}5;4{,}5],\ \varepsilon=0{,}02$;

7) $f(x)=e^x-\dfrac{1}{3}x^3+2x,\ [-1{,}5;-1],\ \varepsilon=0{,}01$.

7. Убедившись в унимодальности функции на указанном промежутке, методом золотого сечения найти точки минимума на данном отрезке с указанной погрешностью; оценить количество итераций, необходимых для решения задачи с указанной точностью:

1) $f(x)=x^4+2x^2+4x+1,\ [-1;0],\ \varepsilon=0{,}1$;

2) $f(x)=x^5-5x^3+10x^2-5x,\ [-3;-2],\ \varepsilon=0{,}1$;

3) $f(x)=x^2+3x(\ln x-1),\ [0{,}5;1],\ \varepsilon=0{,}05$;

4) $f(x)=x^2-2x-2\cos x,\ [0{,}5;1],\ \varepsilon=0{,}05$;

5) $f(x)=(x+1)^4-2x^2,\ [-3;-2],\ \varepsilon=0{,}05$;

6) $f(x)=3(5-x)^{4/3}+2x^2,\ [1{,}5;2],\ \varepsilon=0{,}025$;

7) $f(x)=-x^3+3(1+x)[\ln(1+x)-1],\ [-0{,}5;0{,}5],\ \varepsilon=0{,}05$.

8. Убедившись в унимодальности функции на указанном отрезке, методом хорд найти точки минимума на данном отрезке с точностью $\varepsilon = 0{,}01$***:***

1) $f(x) = x - \ln x,\ [0{,}1;\ 2]$; ***2)*** $f(x) = x^2 - \sin x,\ [0;\ \pi/2]$;

3) $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1,\ [-1;\ 2]$; ***4)*** $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \cos x,\ [0;\ 3]$;

5) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x},\ [0;\ 1]$; ***6)*** $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x},\ [0{,}1;\ 2]$;

7) $f(x) = (x-4)^2 + \ln x,\ [3;\ 5]$; ***8)*** $f(x) = (x-1)^2 \sin x,\ [-2;\ 3]$.

9. Убедившись в выпуклости функции на всей числовой оси, методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона найти точки минимума с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$***:***

1) $f(x) = x^2 + e^{-x}$; ***2)*** $f(x) = 2x + e^{-x}$; ***3)*** $f(x) = x^2 + x + \sin x$;

4) $f(x) = x^2 - x + e^{-x}$; ***5)*** $f(x) = e^x + e^{-2x} + 2x$; ***6)*** $f(x) = 2x^2 + x + \cos^2 x$.

10. Методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона найти минимизировать функции на указанных отрезках с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$***:***

1) $f(x) = x\,arctgx - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2),\ [-6,\ 6]$; ***2)*** $f(x) = (x-1)^4,\ [0{,}5;\ 2]$;

3) $f(x) = x \sin(1/x),\ [0{,}2;\ 1]$; ***4)*** $f(x) = 2(x-3)^2 + e^{x^2/2},\ [0,\ 3]$.

ГЛАВА 4. БЕЗУСЛОВНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данной главе будем рассматривать задачу безусловной минимизации функции в n-мерном евклидовом пространстве:

$$f(x) \to \min, \; x \in R^n. \tag{4.1}$$

§ 4.1. Методы анализа

В данном параграфе рассмотрим общую задачу поиска безусловного экстремума функции $f(x)$. В случае, когда целевая функция и ее производные имеют «простой» вид, для поиска экстремума можно применить результаты дифференциального исчисления.

Пусть $\nabla f(x^*) = f'(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right)^T$ – вектор первых частных производных (*градиент*) функции $f(x)$ в точке $x^* \in R^n$; $H^* = H(x^*) = f''(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \right)_{i,j=\overline{1,n}}$ – матрица вторых частных производных (*гессиан*, *матрице Гессе*) функции $f(x)$ в точке $x^* \in R^n$.

Необходимое условие локального экстремума. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $x^* \in R^n$. Тогда для того, чтобы в точке x^* достигался экстремум, необходимо выполнение условия $f'(x^*) = 0$. Точки, удовлетворяющие данному условию, называются *стационарными*.

Достаточное условие локального экстремума. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^* \in R^n$. Тогда для того, чтобы в точке x^* достигался минимум (максимум), достаточно выполнение условия положительной (отрицательной) определенности матрицы вторых производных (гессиана).

Для определения знакоопределенности можно пользоваться Критерием Сильвестра (см. § 2.2).

В случае если матрица Гессе, вычисленная в стационарной точке, является неопределенной (ни отрицательно, ни положительно не определена), то в точке экстремум не достигается.

Пример 4.1. Найти точки локального экстремума функции $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$.

Решение. Для нахождения точек экстремума решим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 2(x_1 + x_2) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 2(x_1 + x_2) = 0. \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 2x_1^3 - x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_2^3 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $x_2 = 2x_1^3 - x_1$ и подставим во второе:

$$2(2x_1^3 - x_1)^3 - x_1 - (2x_1^3 - x_1) = 0.$$

Откуда, преобразовав, получим

$$x_1^3(x_1 - 1)(x_1 + 1)\left(4x_1^6 - 2x_1^4 + x_1^2\right) = 0.$$

Из последнего уравнения получаем три стационарные точки $x^1 = (0,0)$, $x^2 = (1,1)$, $x^3 = (-1,-1)$. Уравнение $4x_1^6 - 2x_1^4 + x_1^2 = 0$ действительных решений не имеет.

Составим гессиан целевой функции

$$H(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим гессиан и определим его знакоопределенность в стационарных точках:

$$H(x^1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \; H(x^2) = H(x^3) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Для $H(x^1)$ имеем: $\Delta_1 = -2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, то есть матрица $H(x^1)$ неопределенная, и поэтому в точке $x^1 = (0,0)$ экстремум не достигается. Для $H(x^2)$, $H(x^3)$ имеем: $\Delta_1 = 10 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 96 > 0$, то есть матрица $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ положительно определенная, и поэтому в точках $x^2 = (1,1)$ и $x^3 = (-1,-1)$ достигаются локальные минимумы. Значение целевой функции в этих точках $f(x^2) = f(x^3) = -2$. ■

Пример 4.2. Найти точки локального экстремума функции $f(x) = -(\sin x_1 + 2)(x_2^2 + 1)$.

Решение. Для нахождения точек экстремума решим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = -\cos x_1 (x_2^2 + 1) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -2(\sin x_1 + 2)x_2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ и подставим во второе уравнение:

$$-2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + 2\right)x_2 = 0,\ k \in Z, \quad \left((-1)^k + 2\right)x_2 = 0,\ k \in Z.$$

Откуда получаем, что $x_2 = 0$, и имеем семейство стационарных точек $x^* = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 0\right),\ k \in Z$.

Составим гессиан целевой функции, вычислим его в стационарных точках и определим знакоопределенность:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \sin x_1 (x_2^2 + 1) & -2x_2 \cos x_1 \\ -2x_2 \cos x_1 & -2(\sin x_1 + 2) \end{pmatrix},$$

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & -2((-1)^k + 2) \end{pmatrix},\ k \in Z.$$

Тогда при четных k гессиан $H(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ не является знакопределенным, поэтому экстремум не достигается. При нечетных значениях четных k гессиан $H(x^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ является отрицательно определенным, поэтому точках $x^* = \left(\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi, 0\right), n \in Z$, достигаются локальные максимумы. Значение этих максимумов $f(x^*) = -3$. ■

§ 4.2. Численные алгоритмы

Для численного решения задач (4.1) безусловной многомерной минимизации разработано много алгоритмов, использующих итерационные процедуры $x^{k+1} = x^k + \alpha_k y^k$, где x^k – текущая точка алгоритма; y^k – направление поиска точки x^{k+1} из точки x^k; α_k – величина шага в выбранном направлении. Выбор шага по правилу $\alpha_k = \arg\min_{\alpha \in R} \Phi(\alpha) = \arg\min_{\alpha \in R} f(x^k + \alpha\, y^k)$ называется правилом наискорейшего спуска. В качестве критерия останова счета может быть выбран один из критериев $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$, $\left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| < \varepsilon$, $\left\| \nabla f(x^k) \right\| < \varepsilon$, где ε – заданный параметр точности, либо их комбинации.

МЕТОДЫ ПОИСКА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ (МЕТОДЫ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА)

4.2.1. Метод покоординатного спуска

Этот метод заключается в последовательной минимизации целевой функции $f(x)$ сначала по направлению первого базисного вектора e^1, затем второго e^2 и т.д. Таким образом, здесь $y^k = e^k$, а α_k выбирается в соответствии с правилом наискорейшего спуска. После окончания минимизации по направлению последнего базисного вектора e^n цикл может повторяться. Метод покоординатного спуска является методом нулевого порядка. В качестве критерия останова счета может быть выбрано либо условие $\left|x^k - x^{k-1}\right| \le \varepsilon$, либо $\left|f(x^k) - f(x^{k-1})\right| \le \varepsilon$, либо оба условия одновременно.

Пример 4.3. Решить задачу $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \to \min$ методом покоординатного спуска с точностью $\varepsilon = 0{,}05$.

Решение. Рассчитаем матрицу вторых производных целевой функции $H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Очевидно, что матрица Гессе является положительно определенной, поэтому целевая функция строго выпукла во всем пространстве R^2. Следовательно, задача имеет единственное минимальное решение.

Выберем произвольную начальную точку, например, $x^0 = (0{,}5;1)$, $f(x^0) = 2$. В качестве критерия останова выберем одновременное выполнение условий $\left|x^{k-1} - x^k\right| < \varepsilon$ (здесь под модулем понимается евклидова норма вектора) и $\left|f(x^{k-1}) - f(x^k)\right| < \varepsilon$.

Итерация 1. В качестве первого направления выберем $e^1 = (1,0)$. Решим задачу одномерной минимизации по α:

$$\Phi(\alpha) = f(x^0 + \alpha e^1) = f(0{,}5 + \alpha, 1) = 2(0{,}5 + \alpha)^2 + 1^2 + (0{,}5 + \alpha) \cdot 1 \to \min.$$

Решим эту задачу с применением дифференциального исчисления. Вычислим $\Phi'(\alpha) = 4(0{,}5 + \alpha) + 1$ и приравняем к нулю. Функция $\Phi(\alpha)$ представляет собой уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, и, таким образом, в стационарной точке будет достигаться минимум. Получаем $\alpha^* = -0{,}75$. Тогда $\tilde{x} = x^0 + \alpha e^1 = (-0{,}25;1)$, $f(\tilde{x}) = 0{,}875$. В качестве следующего направления выбираем $e^2 = (0,1)$. Записываем задачу одномерной минимизации:

$$\Phi(\alpha) = f(\tilde{x} + \alpha e^2) = 2(-0{,}25)^2 + (1 + \alpha)^2 - 0{,}25(1 + \alpha) \to \min.$$

Далее вычисляем $\Phi'(\alpha) = 2(1 + \alpha) - 0{,}25 = 0$, откуда, рассуждая аналогично, получаем $\alpha^* = -0{,}875$, $x^1 = \tilde{x} + \alpha e^2 = (-0{,}25; 0{,}125)$, $f(x^1) = 0{,}109375$.

Проверяем критерии останова:

$$\left|x^0 - x^1\right| = \left|(0{,}5;1) - (-0{,}25;0{,}125)\right| = \sqrt{(0{,}75)^2 + (0{,}875)^2} \approx 1{,}15 > \varepsilon,$$

$$\left|f(x^0) - f(x^1)\right| = \left|2 - 0{,}109375\right| = 1{,}810625 > \varepsilon.$$

Итерации продолжаем.

Итерация 2. В качестве первого направления выберем $e^1 = (1,0)$. Решим задачу одномерной минимизации по α:

$$\Phi(\alpha) = f(x^1 + \alpha e^1) = 2(-0{,}25 + \alpha)^2 + (0{,}125)^2 + (-0{,}25 + \alpha) \cdot 0{,}125 \to \min.$$

Имеем $\Phi'(\alpha) = 4(-0{,}25 + \alpha) + 0{,}125 = 0$ и $\alpha^* = 0{,}21875$. Тогда $\tilde{x} = x^1 + \alpha e^1 = (0{,}03125; 0{,}125)$, $f(\tilde{x}) \approx 0{,}02148$. В качестве следующего направления выбираем $e^2 = (0,1)$. Записываем задачу одномерной минимизации:

$$\Phi(\alpha) = f(\tilde{x} + \alpha e^2) = 2(0{,}03125)^2 + (0{,}125 + \alpha)^2 + 0{,}03125(0{,}125 + \alpha) \to \min.$$

Далее вычисляем $\Phi'(\alpha) = 2(0{,}125 + \alpha) + 0{,}03125 = 0$, откуда получаем $\alpha^* = -0{,}140625$, $x^2 = \tilde{x} + \alpha e^2 = (0{,}03125; -0{,}015625)$, $f(x^2) \approx 0{,}001709$.

Проверяем критерии останова:

$$\left|x^1 - x^2\right| = \sqrt{(-0{,}28125)^2 + (0{,}140325)^2} \approx 0{,}3143 > \varepsilon$$

$$\left|f(x^1) - f(x^2)\right| = \left|0{,}109375 - 0{,}001709\right| = 0{,}107666 > \varepsilon$$

Итерации продолжаем.

Итерация 3. В качестве первого направления выберем $e^1 = (1,0)$. Решим задачу одномерной минимизации по α:

$$\Phi(\alpha) = f(x^2 + \alpha e^1) =$$
$$= 2(0{,}03125 + \alpha)^2 + (-0{,}015625)^2 - (0{,}03125 + \alpha) \cdot 0{,}015625 \to \min.$$

Имеем $\Phi'(\alpha) = 4(0{,}03125 + \alpha) - 0{,}015625 \to \min$ и $\alpha^* = -0{,}027344$. Тогда $\tilde{x} = x^1 + \alpha e^1 = (0{,}003906; -0{,}015625)$, $f(\tilde{x}) \approx 0{,}000213$. В качестве следующего направления выбираем $e^2 = (0,1)$. Записываем задачу одномерной минимизации:

$$\Phi(\alpha) = f(\tilde{x} + \alpha e^2) =$$
$$= 2(0{,}003906)^2 + (-0{,}015625 + \alpha)^2 + 0{,}003906(-0{,}015625 + \alpha) \to \min.$$

Далее вычисляем $\Phi'(\alpha) = 2(-0{,}015625 + \alpha) + 0{,}003906 = 0$, откуда получаем $\alpha^* = -0{,}013672$, $x^3 = \tilde{x} + \alpha e^2 = (0{,}003906; -0{,}001953)$, $f(x^3) \approx 0{,}000027$.

Проверяем критерии останова:

$$\left|x^2 - x^3\right| = \sqrt{(0{,}027344)^2 + (-0{,}013672)^2} \approx 0{,}0306 < \varepsilon$$

$$\left|f(x^2) - f(x^3)\right| = \left|0{,}001709 - 0{,}000027\right| = 0{,}001682 < \varepsilon$$

Оба критерия выполнены, итерации заканчиваем.

Таким образом, получаем ответ $x^{\min} = (0{,}003906; -0{,}001953)$, $f^{\min} \approx 0{,}000027$. ■

Замечание. Очевидно, что оптимальным решением является точка $(0{,}0)$. Таким образом, полученное решение находится довольно близко к точному решению.

МЕТОДЫ ГРАДИЕНТНОГО ПОИСКА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПЕРВУЮ ПРОИЗВОДНУЮ (МЕТОДЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА)

4.2.2. Метод дробления шага

Особенность данного метода состоит в том, что вначале вычислительного процесса задается начальный шаг $\alpha > 0$, а затем параметр α остается неизменным или изменяется в ходе вычислений по следующему правилу: на *k*-й итерации вычисляется $x^k = x^{k-1} - \alpha \nabla f(x^{k-1})$ (где α есть текущее значение параметра), и если $f(x^k) \le f(x^{k-1})$, то осуществляется переход на следующую итерацию; если же $f(x^k) > f(x^{k-1})$, то параметр α уменьшается (полагают, например, $\alpha := \frac{\alpha}{2}$), и пересчитывается значение $x^k = x^{k-1} - \alpha \nabla f(x^{k-1})$ с уже новым значением параметра α. Такой выбор параметра гарантирует, что в следующей точке значение целевой функции будет не больше, чем в предыдущей.

Пример 4.4. Решить задачу $f(x)=2x_1^2+x_2^2+x_1x_2\to\min$ методом дробления шага с точностью $\varepsilon=0{,}05$.

Решение. Положим $\alpha=1$, $x^0=(0{,}5;1)$ ($f(x^0)=2$). В качестве критерия останова выберем одновременное выполнение условий $\left|x^{k-1}-x^k\right|<\varepsilon$ и $\left|\nabla f(x^k)\right|<\varepsilon$. Вычислим градиент целевой функции $\nabla f(x)=(4x_1+x_2;x_1+2x_2)$, тогда $\nabla f(x^0)=(3;2{,}5)$.

Итерация 1. Вычислим $x^1=x^0-\alpha\,\nabla f(x^0)=(0{,}5;1)-1\cdot(3;2{,}5)=$ $=(-2{,}5;-1{,}5)$, $f(x^1)=18{,}5$. Так как $f(x^1)>f(x^0)$, уменьшим шаг вдвое $\alpha=\dfrac{1}{2}=0{,}5$. Вычислим $x^1=x^0-\alpha\,\nabla f(x^0)=(0{,}5;1)-0{,}5\cdot(3;2{,}5)=(-1;-0{,}25)$, $f(x^1)=2{,}3125$. Так как снова $f(x^1)>f(x^0)$, уменьшим шаг вдвое $\alpha=\dfrac{0{,}5}{2}=0{,}25$. Вычислим $x^1=x^0-\alpha\,\nabla f(x^0)=(0{,}5;1)-0{,}25\cdot(3;2{,}5)=$ $=(-0{,}25;0{,}375)$, $f(x^1)=0{,}171875<f(x^0)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^0-x^1\right|=\left|(0{,}75;0{,}625)\right|\approx 0{,}98>\varepsilon$, $\left|\nabla f(x^1)\right|=\left|(-0{,}625;0{,}5)\right|\approx 0{,}8>\varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 2. Вычислим $x^2=x^1-\alpha\,\nabla f(x^1)=(-0{,}25;0{,}375)-$ $-0.25\cdot(-0{,}625;0{,}5)=(-0{,}09375;0{,}25)$, $f(x^2)=0{,}0566<f(x^1)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^1-x^2\right|=\left|(-0{,}15625;0{,}125)\right|\approx 0{,}2>\varepsilon$, $\left|\nabla f(x^2)\right|=\left|(-0{,}125;0{,}40625)\right|\approx 0{,}425>\varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 3. Вычислим $x^3=x^2-\alpha\,\nabla f(x^2)=(-0{,}09375;0{,}25)-$ $-0.25\cdot(-0{,}125;0{,}40625)=(-0{,}0625;0{,}14844)$, $f(x^3)=0{,}021<f(x^2)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^2 - x^3\right| = \left|(-0{,}03125; 0{,}10156)\right| \approx 0{,}106 > \varepsilon$, $\left|\nabla f(x^3)\right| = \left|(-0{,}10156; 0{,}23438)\right| \approx 0{,}255 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 4. Вычислим $x^4 = x^3 - \alpha\,\nabla f(x^3) = (-0{,}0625; 0{,}14844) - 0.25 \cdot (-0{,}10156; 0{,}23438) = (-0{,}03711; 0{,}08984)$, $f(x^4) = 0{,}00749 < f(x^3)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^3 - x^4\right| = \left|(-0{,}02539; 0{,}0586)\right| \approx 0{,}064 > \varepsilon$, $\left|\nabla f(x^4)\right| = \left|(-0{,}0586; 0{,}14257)\right| \approx 0{,}154 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 5. Вычислим $x^5 = x^4 - \alpha\,\nabla f(x^4) = (-0{,}03711; 0{,}08984) - 0.25 \cdot (-0{,}0586; 0{,}14257) = (-0{,}02246; 0{,}0542)$, $f(x^5) = 0{,}00273 < f(x^4)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^4 - x^5\right| = \left|(-0{,}01465; 0{,}03564)\right| \approx 0{,}039 < \varepsilon$, но $\left|\nabla f(x^5)\right| = \left|(-0{,}03564; 0{,}08594)\right| \approx 0{,}093 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 6. Вычислим $x^6 = x^5 - \alpha\,\nabla f(x^5) = (-0{,}02246; 0{,}0542) - 0.25 \cdot (-0{,}03564; 0{,}08594) = (-0{,}01355; 0{,}03272)$, $f(x^6) = 0{,}00099 < f(x^5)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^5 - x^6\right| = \left|(-0{,}00891; 0{,}021485)\right| \approx 0{,}023 < \varepsilon$, но $\left|\nabla f(x^6)\right| = \left|(-0{,}02148; 0{,}05189)\right| \approx 0{,}056 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 7. Вычислим $x^7 = x^6 - \alpha\,\nabla f(x^6) = (-0{,}01355; 0{,}03272) - 0.25 \cdot (-0{,}02148; 0{,}05189) = (-0{,}00818; 0{,}01974)$, $f(x^7) = 0{,}00036 < f(x^6)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^6 - x^7\right| = \left|(-0{,}00537; 0{,}01297)\right| \approx 0{,}014 < \varepsilon$ и $\left|\nabla f(x^7)\right| = \left|(-0{,}01298; 0{,}0313)\right| \approx 0{,}034 < \varepsilon$. Итерации заканчиваем.

Окончательно получаем ответ $x^{\min} = x^7 = (-0{,}00818; 0{,}01974)$, $f^{\min} = f(x^{\min}) = 0{,}00036$. ■

4.2.3. Метод наискорейшего спуска

Шаг алгоритма на каждой итерации выбирается по правилу наискорейшего спуска, то есть как решение следующей задачи $\alpha^* = \arg\min\limits_{\alpha>0} \Phi(\alpha) = \arg\min\limits_{\alpha>0} f(x^{k-1} - \alpha \nabla f(x^{k-1}))$ и новое приближение рассчитывается по формуле $x^k = x^{k-1} - \alpha^* \nabla f(x^{k-1})$. Следует отметить, что поиск минимума осуществляется среди положительных параметров α.

Пример 4.5. Решить задачу $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \to \min$ методом наискорейшего спуска с точностью $\varepsilon = 0{,}05$.

Решение. Положим $x^0 = (0{,}5;1)$, тогда $f(x^0) = 2$. В качестве критерия останова выберем одновременное выполнение условий $\left| x^{k-1} - x^k \right| < \varepsilon$ и $\left| \nabla f(x^k) \right| < \varepsilon$ (как и ранее под модулем понимается евклидова норма вектора). Вычислим градиент целевой функции $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)$, тогда $\nabla f(x^0) = (3; 2{,}5)$.

Итерация 1. Вычислим первое приближение $x^1 = x^0 - \alpha_1 \nabla f(x^0) =$ $= (0{,}5;1) - \alpha_1 (3; 2{,}5) = (0{,}5 - 3\alpha_1; 1 - 2{,}5\alpha_1)$, где величина α_1 есть решение следующей задачи минимизации:

$$\Phi(\alpha) = f(0{,}5 - 3\alpha; 1 - 2{,}5\alpha) \to \min_{\alpha>0}.$$

Имеем $\Phi(\alpha) = 2(0{,}5 - 3\alpha)^2 + (1 - 2{,}5\alpha)^2 + (0{,}5 - 3\alpha)(1 - 2{,}5\alpha)$. Вспомогательную задачу минимизации в силу «простого» вида целевой функции можно решить с применением дифференциального исчисления. Очевидно, что $\Phi(\alpha)$ представляет собой уравнение параболы, ветви которой направлены вверх. Это означает, что стационарная (единственная) точка будет решением задачи минимизации. Вычислим производную $\Phi'(\alpha)$ и приравняем ее к нулю:

$$\Phi'(\alpha) = 4(0{,}5 - 3\alpha)(-3) + 2(1 - 2{,}5\alpha)(-2{,}5) - 3(1 - 2{,}5\alpha) + (0{,}5 - 3\alpha)(-2{,}5),$$

$$\Phi'(\alpha) = 63{,}5\alpha - 15{,}25 = 0,$$

откуда $\alpha_1 = 15{,}25 / 63{,}5 \approx 0{,}2402$. Тогда $x^1 = (0{,}5 - 3 \cdot 0{,}2402; 1 - 2{,}5 \cdot 0{,}2402)$, $x^1 = (-0{,}2206; 0{,}3995)$. Проверим условия останова счета $\left|x^0 - x^1\right| = \left|(0{,}7206; 0{,}6005)\right| \approx 0{,}94 > \varepsilon$, $\left|\nabla f(x^1)\right| = \left|(-0{,}4829; 0{,}5784)\right| \approx 0{,}75 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 2. Вычислим приближение

$$x^2 = x^1 - \alpha_2 \nabla f(x^1) = (-0{,}2206; 0{,}3995) - \alpha_2(-0{,}4829; 0{,}5784),$$

$$x^2 = (-0{,}2206 + 0{,}4829\alpha_2; 0{,}3995 - 0{,}5784\alpha_2).$$

Составим функцию $\Phi(\alpha_2) = f(-0{,}2206 + 0{,}4829\alpha_2; 0{,}3995 - 0{,}5784\alpha_2)$ и найдем точку ее минимума. Вычислим производную и приравняем ее к нулю

$$\Phi'(\alpha_2) = 4 \cdot 0{,}4829 \cdot (-0{,}2206 + 0{,}4829\alpha_2) - 2 \cdot 0{,}5784 \cdot (0{,}3995 - 0{,}5784\alpha_2) +$$

$$+ 0{,}4829 \cdot (0{,}3995 - 0{,}5784\alpha_2) - 0{,}5784 \cdot (-0{,}2206 + 0{,}4829\alpha_2) = 0,$$

$$1{,}04324404\alpha_2 - 0{,}56773897 = 0,\ \alpha_2 = 0{,}56773897 / 1{,}04324404 \approx 0{,}5442.$$

Тогда $x^2 = (-0{,}2206 + 0{,}4829\alpha_2; 0{,}3995 - 0{,}5784\alpha_2) = (0{,}0422; 0{,}0847)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^1 - x^2\right| = \left|(-0{,}2628; 0{,}3148)\right| \approx 0{,}41 > \varepsilon$, $\left|\nabla f(x^2)\right| = \left|(0{,}2535; 0{,}2116)\right| \approx 0{,}36 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 3. Вычислим приближение

$$x^3 = x^2 - \alpha_3 \nabla f(x^2) = (0{,}0422; 0{,}0847) - \alpha_3(0{,}2535; 0{,}2116),$$

$$x^3 = (0{,}0422 - 0{,}2535\alpha_3; 0{,}0847 - 0{,}2116\alpha_3).$$

Составим функцию $\Phi(\alpha_3) = f(0{,}0422 - 0{,}2535\alpha_3; 0{,}0847 - 0{,}2116\alpha_3)$ и найдем точку ее минимума. Вычислим производную и приравняем ее к нулю

$$\Phi'(\alpha_3) = -4 \cdot 0{,}2535 \cdot (0{,}0422 - 0{,}2535\alpha_3) - 2 \cdot 0{,}2116 \cdot (0{,}0847 - 0{,}2116\alpha_3) +$$

$$- 0{,}2535 \cdot (0{,}0847 - 0{,}2116\alpha_3) - 0{,}2116 \cdot (0{,}0422 - 0{,}2535\alpha_3) = 0,$$

$0{,}45387932\alpha_3 - 0{,}10903681 = 0$, $\alpha_3 = 0{,}10903681 / 0{,}45387932 \approx 0{,}2402$.

Тогда $x^3 = (0{,}0422 - 0{,}2535\alpha_3; 0{,}0847 - 0{,}2116\alpha_3) = (-0{,}0187;\ 0{,}0339)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^2 - x^3\right| = \left|(0{,}0609; 0{,}0508)\right| \approx 0{,}079 > \varepsilon$, $\left|\nabla f(x^3)\right| = \left|(-0{,}0409; 0{,}0491)\right| \approx 0{,}064 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Итерация 4. Вычислим приближение

$$x^4 = x^3 - \alpha_4 \nabla f(x^3) = (-0{,}0187;\ 0{,}0339) - \alpha_4(-0{,}0409; 0{,}0491),$$

$$x^4 = (-0{,}0187 + 0{,}0409\alpha_4;\ 0{,}0339 - 0{,}0491\alpha_4).$$

Составим функцию $\Phi(\alpha_4) = f(-0{,}0187 + 0{,}0409\alpha_4;\ 0{,}0339 - 0{,}0491\alpha_4)$ и найдем точку ее минимума. Вычислим производную и приравняем ее к нулю

$$\Phi(\alpha_4) = 4 \cdot 0{,}0409 \cdot (-0{,}0187 + 0{,}0409\alpha_4) - 2 \cdot 0{,}0491 \cdot (0{,}0339 - 0{,}0491\alpha_4) +$$

$$+ 0{,}0409 \cdot (0{,}0339 - 0{,}0491\alpha_4) - 0{,}0491 \cdot (-0{,}0187 + 0{,}0409\alpha_4) = 0,$$

$0{,}00749648\alpha_4 - 0{,}00408362 = 0$, $\alpha_4 = 0{,}00408362 / 0{,}00749648 \approx 0{,}5447$.

Тогда $x^4 = (-0{,}0187 + 0{,}0409\alpha_4;\ 0{,}0339 - 0{,}0491\alpha_4) = (0{,}0036;\ 0{,}0072)$.

Проверим условия останова счета $\left|x^3 - x^4\right| = \left|(-0{,}0223; 0{,}0267)\right| \approx 0{,}035 < \varepsilon$ и $\left|\nabla f(x^4)\right| = \left|(0{,}0216; 0{,}018)\right| \approx 0{,}028 < \varepsilon$. Итерации заканчиваем.

Окончательно получаем ответ $x^{\min} = x^4 = (0{,}0036; 0{,}0072)$, $f^{\min} = f(x^{\min}) = 0{,}0001$. ■

4.2.4. Метод сопряженных направлений (сопряженных градиентов)

В методе сопряженных направлений точки последовательности приближений к решению находятся по формуле $x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k$, где $p^k = \nabla f(x^k) + \beta_k p^{k-1}$, $\beta_k = \dfrac{\left\|\nabla f(x^k)\right\|^2}{\left\|\nabla f(x^{k-1})\right\|^2}$, $(k = 1,2,...)$, $p^0 = \nabla f(x^0)$. Параметр α_k

определяется по правилу наискорейшего спуска, то есть как решение задачи $\min\limits_{\alpha>0}\Phi(\alpha)=\min\limits_{\alpha>0} f(x^k-\alpha\, p^k)$.

Метод сопряженных направлений отличается от метода наискорейшего спуска только выбором направления уменьшения функции на каждом шаге. Отметим, что p^k определяется не только градиентом $\nabla f(x^k)$, но и направлением спуска на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в градиентных методах учитывать особенности целевой функции при построении последовательных приближений к точке ее минимума.

Для минимизации выпуклой квадратичной функции в R^n требуется не более n итераций метода (сходится к точному решению ровно за n итераций).

Методы сопряженных направлений являются одними из наиболее эффективных для решения задач минимизации. Однако следует отметить, что они чувствительны к ошибкам, возникающим в процессе счета. При большом числе переменных погрешность может настолько возрасти, что процесс придется повторять даже для квадратичной функции.

Пример 4.6. Решить задачу $f(x)=2x_1^2+x_2^2+x_1x_2\to\min$ методом сопряженных направлений с точностью $\varepsilon=0{,}05$.

Решение. Положим $x^0=(0{,}5;1)$, тогда $f(x^0)=2$. В качестве критерия останова выберем условие $\left|\nabla f(x^k)\right|<\varepsilon$. Вычислим градиент целевой функции $\nabla f(x)=(4x_1+x_2;x_1+2x_2)$, тогда $p^0=\nabla f(x^0)=(3;2{,}5)$.

Итерация 1. Нетрудно увидеть, что первая итерация метода совпадает с первой итерацией метода наискорейшего спуска. Имеем $x^1=(-0{,}2206;0{,}3995)$, $\nabla f(x^1)=(-0{,}4829;0{,}5784)$. Переходим к следующей итерации.

Итерация 2. Вычислим

$$\beta_1=\frac{\left\|\nabla f(x^1)\right\|^2}{\left\|\nabla f(x^0)\right\|^2}=\frac{\left\|(-0{,}4829;0{,}5784)\right\|^2}{\left\|(3;2{,}5)\right\|^2}\approx 0{,}0372,$$

$$p^1 = \nabla f(x^1) + \beta_1 p^0 = (-0{,}4829;0{,}5784) + 0{,}0372 \cdot (3;\, 2{,}5) = (-0{,}3713;0{,}6714),$$

$$x^2 = x^1 - \alpha_1 p^1 = (-0{,}2206;0{,}3995) - \alpha_1(-0{,}3713;0{,}6714),$$

$$x^2 = (-0{,}2206 + 0{,}3713\alpha_1;0{,}3995 - 0{,}6714\alpha_1).$$

Определим параметр α_1. Составим функцию

$$\Phi(\alpha_1) = f(x^1 - \alpha_1 p^1) = f((-0{,}2206 + 0{,}3713\alpha_1;0{,}3995 - 0{,}6714\alpha_1)),$$

$$\Phi(\alpha_1) = 2(-0{,}2206 + 0{,}3713\alpha_1)^2 + (0{,}3995 - 0{,}6714\alpha_1)^2 +$$

$$+(-0{,}2206 + 0{,}3713\alpha_1)(0{,}3995 - 0{,}6714\alpha_1).$$

Вычислим производную, приравняем ее к нулю и найдем единственную стационарную точку, которая будет нести минимум функции $\Phi(\alpha_1)$:

$$\Phi'(\alpha_1) = 4 \cdot 0{,}3713 \cdot (-0{,}2206 + 0{,}3713\alpha_1) - 2 \cdot 0{,}6714 \cdot (0{,}3995 - 0{,}6714\alpha_1) +$$

$$+ 0{,}3713 \cdot (0{,}3995 - 0{,}6714\alpha_1) - 0{,}6714 \cdot (-0{,}2206 + 0{,}3713\alpha_1) = 0,$$

$$0{,}95442904\alpha_1 - 0{,}56763853 = 0,\ \alpha_1 = 0{,}56763853 / 0{,}95442904 \approx 0{,}5947.$$

Имеем $x^2 = (-0{,}2206 + 0{,}3713\alpha_1;0{,}3995 - 0{,}6714\alpha_1) = (0{,}00021;0{,}00022)$.

Проверим условие останова счета: $\nabla f(x^2) = (0{,}00106;0{,}00065)$, $\left|\nabla f(x^2)\right| = (0{,}00106;0{,}00065) = 0{,}0012 < \varepsilon$.

Таким образом, получаем ответ $x^{\min} = (0{,}00021;0{,}00022)$, $f^{\min} \approx 0$.

Если не осуществлять округлений при вычислениях (сохранять все знаки в числах), то получим точное решение задачи. ■

МЕТОДЫ ГРАДИЕНТНОГО ПОИСКА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ВТОРУЮ ПРОИЗВОДНУЮ (МЕТОДЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА)

4.2.5. Метод Ньютона

Метод Ньютона применяется для минимизации дважды непрерывно дифференцируемых функций. В качестве направления движения выбирается вектор-антиградиент $y^k = -\nabla f(x^k)$. В качестве параметра α_k – обратная матрица к гессиану целевой функции $H(x^k)=\left\{\dfrac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{n}$. Тогда очередное приближение рассчитывается по формуле $x^{k+1}=x^k-\left[H(x^k)\right]^{-1}\nabla f(x^k)$.

Для выпуклых квадратичных функций метод сходится за одну итерацию.

Существенным недостатком метода Ньютона является зависимость сходимости для невыпуклых функций от начального приближения. Если x^0 находится достаточно далеко от точки минимума, то метод может расходиться. Как альтернативный можно использовать метод Ньютона с регулировкой шага (модифицированный метод Ньютона). Итерационный процесс в таком случае определяется выражением $x^{k+1}=x^k-\alpha_k\left[H(x^k)\right]^{-1}\nabla f(x^k)$, где α_k определяется по правилу наискорейшего спуска:

$$\alpha_k=\arg\min_{\alpha>0}\Phi(\alpha)=\arg\min_{\alpha>0} f(x^k-\alpha\left[H(x^k)\right]^{-1}\nabla f(x^k)).$$

Количество вычислений на итерации методом Ньютона, как правило, значительно больше, чем в градиентных методах. Это объясняется необходимостью вычисления и обращения матрицы вторых производных целевой функции. Для устранения этого недостатка можно вычислить гессиан только в начальной точке и использовать алгоритм вида $x^{k+1}=x^k-\alpha_k\left[H(x^0)\right]^{-1}\nabla f(x^k)$, где α_k определяется по правилу наискорейшего спуска. Или пересчитывать гессиан через определенное число итераций, то есть использовать алгоритм вида $x^{k+1}=x^k-\alpha_k\left[H(x^l)\right]^{-1}\nabla f(x^k)$, где α_k также определяется по правилу наискорейшего спуска.

Пример 4.7. Решить задачу $f(x)=2x_1^2+x_2^2+x_1x_2\to\min$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon=0{,}05$.

Решение. Положим $x^0=(0{,}5;1)$, тогда $f(x^0)=2$. Вычислим градиент целевой функции $\nabla f(x)=(4x_1+x_2;x_1+2x_2)$, тогда $\nabla f(x^0)=(3;2{,}5)$. Гессиан имеет вид $H(x)=H(x^0)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Далее $\left[H(x^0)\right]^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. Вычисли первое приближение $x^1=x^0-\left[H(x^0)\right]^{-1}\nabla f(x^0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 1\end{pmatrix}-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

Вычислив градиент в найденной точке, получим $\nabla f(x^1)=(0;0)$. То есть получили точное решение (см. пример 4.3) ровно за одну итерацию. ■

Пример 4.8. Решить задачу $f(x)=x_1^4+2x_2^2+2x_1x_2\to\min$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon=0{,}05$.

Решение. Вычислим градиент $\nabla f(x)=(4x_1^3+2x_2;2x_1+4x_2)$ и гессиан $H(x)=\begin{pmatrix}12x_1^2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ целевой функции. Исследуем функцию на выпуклость. Очевидно, что $\Delta_1=12x_1^2\ge 0\ \ \forall(x_1,x_2)\in R^2$. Минор второго порядка $\Delta_2=48x_1^2-4\ge 0$ при $|x_1|\ge\frac{1}{\sqrt{12}}$ и $\forall x_2\in R$.

Тогда в качестве начальной точки выберем точку $x^0=(1;1)$, тогда $\nabla f(x^0)=(6;6)$, $H(x^0)=\begin{pmatrix}12 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ и $\left[H(x^0)\right]^{-1}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 12\end{pmatrix}$.

Итерация 1. Вычислим первое приближение

$$x^1=x^0-\left[H(x^0)\right]^{-1}\nabla f(x^0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}-\frac{1}{44}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7273\\ -0{,}3636\end{pmatrix}.$$

Тогда $\nabla f(x^1)=(0{,}8117;0{,}0002)$, $\left|\nabla f(x^1)\right|=0{,}8117>\varepsilon$. Итерации продолжаем. Вычислим $H(x^1)=\begin{pmatrix}6{,}3476 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ и $\left[H(x^1)\right]^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}187 & -0{,}0935\\ -0{,}0935 & 0{,}2968\end{pmatrix}$.

Итерация 2. Вычислим приближение

$$x^2=x^1-\left[H(x^1)\right]^{-1}\nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0{,}5755\\ -0{,}2878\end{pmatrix}.$$

Тогда $\nabla f(x^2) = (0{,}1868; -0{,}0002)$, $\left|\nabla f(x^2)\right| = 0{,}1868 > \varepsilon$. Итерации продолжаем.

Вычислим $H(x^2) = \begin{pmatrix} 3{,}9744 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $\left[H(x^2)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3362 & -0{,}1681 \\ -0{,}1681 & 0{,}3341 \end{pmatrix}$.

Итерация 3. Вычислим следующее приближение

$$x^3 = x^2 - \left[H(x^2)\right]^{-1} \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 0{,}5127 \\ -0{,}2563 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\nabla f(x^3) = (0{,}0265; 0{,}0002)$, $\left|\nabla f(x^3)\right| = 0{,}0265 < \varepsilon$. Итерации заканчиваем.

Окончательно получаем ответ $x^{\min} = x^3 = (0{,}5127; -0{,}2563)$, $f^{\min} = -0{,}0623$.

Замечание. В силу симметричности целевой функции относительно начала координат ($f(-x) = f(x)$), имеем еще одну точку минимума $x^{\min} = (-0{,}5127; -0{,}2563)$, $f^{\min} = -0{,}0623$. Это решение получим, если в качестве начальной точки взять $x^0 = (-1; -1)$. ■

Задачи к главе 4

1. Найти точки локальных экстремумов следующих функций:

1) $f(x) = (x_1 + x_2 - 1)^2 + x_1^2 - 2x_2$;

2) $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$;

3) $f(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_3 - 5)^2$;

4) $f(x) = e^{-2x_1^2 - 5x_2^2 + x_1x_2}$

5) $f(x) = x_1^3 + 5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_1 + 4x_2^2$;

6) $f(x) = x_1x_2 + \dfrac{20}{x_1} + \dfrac{50}{x_2}$;

7) $f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 - x_2$;

8) $f(x) = (x_1^2 - x_2 + 1)^2 + x_2$;

9) $f(x) = 2x_1(x_1^2 + 2x_1 - \dfrac{3}{2}) + 2x_2(-x_1 + x_2)$;

10) $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 + x_2)^2$;

11) $f(x) = -x_1^2 + x_1\sqrt{x_2} - x_2 + 6x_1 + 10$;

12) $f(x) = e^{-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2}$;

13) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2$;

14) $f(x) = (2x_1^2 + x_2^2)e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$;

15) $f(x)=x_1^2x_2-x_1x_2-x_1x_2^2+x_2^2$;

16) $f(x)=x_2\sqrt{x_1}-x_2^2-x_1+6x_2$;

17) $f(x)=(4-x_1)^2+(x_1-x_2^2)^2$;

18) $f(x)=-x_1^2-x_2^2+e^{-x_1^2}$;

19) $f(x)=(x_1^3-1)^4+(x_2-x_1)^2-2$;

20) $f(x)=x_1x_2^2(1-x_1-x_2)$;

21) $f(x)=(x_1+x_2-1)e^{-x_1^2-x_1x_2+x_2^2}$;

22) $f(x)=2x_1^{2/3}+x_2^{2/3}+4x_3^{2/3}$;

23) $f(x)=x_1x_2^2x_3^2(1-x_1-2x_2-3x_3)$;

24) $f(x)=(x_1-1)^3+(x_2^3-x_1)^2$.

2. Методами покоординатного спуска, наискорейшего спуска и сопряженных направлений найти точки локальных минимумов следующих функций с точностью $\varepsilon=0{,}05$ ***начиная поиск с точки*** x^0***:***

1) $f(x)=(x_1+x_2-1)^2+x_1^2-2x_2,\ x^0=(0,0)$;

2) $f(x)=x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2+x_1,\ x^0=(1,1)$;

3) $f(x)=x_1^2x_2-x_1x_2-x_1x_2^2+x_2^2,\ x^0=(1/2,1/4)$;

4) $f(x)=x_1^3-x_1x_2+x_2^2-2x_1+3x_2+4,\ x^0=(0,0)$;

5) $f(x)=\left(x_2-x_1^2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2,\ x^0=(0,0)$.

3. Методом дробления шага найти точки локальных минимумов следующих функций с точностью $\varepsilon=0{,}05$ ***начиная поиск с точки*** x^0***:***

1) $f(x)=(x_1^2-x_2+1)^2+x_2,\ x^0=(0,1)$;

2) $f(x)=(x_1-1)^2+(x_2^3-x_1)^2,\ x^0=(2,2)$;

3) $f(x)=(4-x_1)^2+(x_1-x_2^2)^2,\ x^0=(3,3)$ и $x^0=(3,-1)$;

4) $f(x)=x_1^3+3x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_2x_3-x_2,\ x^0=(0,0,0)$.

4. Методом Ньютона и методом Ньютона с регулировкой шага найти точки локальных минимумов следующих функций с точностью $\varepsilon=0{,}05$ ***(начальную точку определить самостоятельно):***

1) $f(x)=x_1x_2+\dfrac{2}{x_1}+\dfrac{16}{x_2}$;

2) $f(x)=x_1^2+x_1^4-x_2^2+x_3^2-2x_1x_3-x_2$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x_1x_2}-x_1-x_2$;

4) $f(x)=x_1^2+x_2^3+3x_1^2+x_3^2-x_1x_3-x_2$.

5. Методом Ньютона с регулировкой шага найти точки локальных минимумов следующих функций с точностью $\varepsilon = 0{,}1$ (начальную точку определить самостоятельно):

1) $f(x) = x_1^3 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 + 2x_2 - 4$; ***2)*** $f(x) = \dfrac{1}{x_1 x_2} - x_1 - x_2$;

3) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + 3x_1^2 + x_3^2 - 2x_1 x_3 - x_3$.

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 5.1. Постановка задачи

Задачей линейного программирования называется задача минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях.

Будем рассматривать *общую задачу* линейного программирования в форме

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,k}, \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{k+1,l},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{l+1,m} \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Ограничения типа (5.1) назовем *ограничениями-равенствами*, ограничения типа (5.2) – *ограничениями-неравенствами*, ограничения типа $x_j \ge 0$ – *прямыми ограничениями*. Если в условии задачи линейного программирования не содержаться ограничения-неравенства, то есть в (5.1) $k = m$, что она называется задачей линейного программирования в *каноническом виде*. Любую задачу линейного программирования можно представить в каноническом виде.

§ 5.2. Приведение задачи к каноническому виду

Прежде чем переходит к изучению универсального метода для решения задач линейного программирования – симплекс-метода, рассмотрим процедуру перехода от общей задачи линейного программирования к ее аналогичной записи в каноническом виде. Рассмотрим общую задачу линейного программирования в следующем виде (вообще говоря, несколько отличной от записи в § 5.1)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,k},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{k+1,l},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{l+1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

При этом ограничения на переменные типа $x_j \ge b_j$ или $x_j \le b_j$, которые также естественно называть прямыми ограничениями, будем считать записанными в ограничениях-неравенствах. При этом коэффициенты b_i будем считать неотрицательными; если это не так, то соответствующее ограничение следует умножить на –1, при этом знак ограничений-неравенств следует менять на противоположный.

Для перехода общей задачи к эквивалентной канонической записи следует выполнить следующие действия:

1) к левой части ограничений-неравенств типа $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ следует прибавить неотрицательные переменные x_{n+i}, $i = \overline{1,l-k}$ и поставить знак равенства. Таким образом, получаем новое ограничение-равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1,l-k},$$

и записываем соответствующие прямые ограничения для новых переменных

$$x_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{1,l-k}.$$

2) из левой части ограничений-неравенств типа $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ следует вычесть неотрицательные переменные x_{n+i}, $i = \overline{1, m-l}$ и поставить знак равенства. Таким образом, получаем новое ограничение-равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+l+i} = b_i, \ i = \overline{1, m-l},$$

и записываем соответствующие прямые ограничения для новых переменных

$$x_{n+l+i} \geq 0, \ i = \overline{1, m-l}.$$

3) если для некоторой переменной x_q отсутствуют прямые ограничения $x_q \geq 0$, то в целевой функции и ограничениях эту переменную следует заменить на разность двух неотрицательных переменных:

$$x_q = x_q^{(1)} - x_q^{(2)}, \text{ где } x_q^{(1)}, \ x_q^{(2)} \geq 0.$$

Полученная каноническая задача является эквивалентной исходной общей задаче в том смысле, что значения минимумов в обеих задачах совпадают, а компоненты вектора-решения исходной задачи определяются из компонент вектора-решения канонической задачи: дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m-k}$ отбрасываются, а переменные, для которых нет прямых ограничений $x_q \geq 0$, вычисляются по формуле $x_q = x_q^{(1)} - x_q^{(2)}$.

§ 5.3. Графический метод решения задачи линейного программирования

Пусть задача линейного программирования содержит только две переменные, и в ее условии нет ограничений равенств (5.1), то есть, имеем задачу вида

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min(\max), \tag{5.3}$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \ i = \overline{1, m}, \tag{5.4}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{5.5}$$

Допустимое множество X в задаче (5.4)-(5.5) является пересечением первого квадранта и полуплоскостей, соответствующих неравенствам (5.4). Для решения задачи (5.3)-(5.4) рассмотрим семейство линий уровня целевой функции из (5.3)

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C,\ C = const, \tag{5.6}$$

которые являются параллельными прямыми. Градиент $f'(x) = (c_1, c_2)$ и антиградиент $-f'(x) = (-c_1, -c_2)$ перпендикулярны прямым (5.6) и указывают направление возрастания и убывания целевой функции. Если перемещать параллельно самой себе произвольную прямую (5.6), проходящую через допустимое множество *X*, в направлении градиента или антиградиента до тех пор, пока эта прямая будет иметь хотя бы одну общую точку с множеством *X*, то в своем крайнем положении указанная прямая пройдет через точку множества *X*, в которой целевая функция $f(x)$ принимает максимальное или минимальное на *X* значение.

Графический метод используют также и для решения задачи линейного программирования в каноническом виде с произвольным числом переменных, если число свободных переменных системы ограничений-равенств не превосходит двух. В этом случае, исходя из каких-либо соображений, одна или две переменные выбираются в качестве свободных, остальные переменные (базисные) и целевая функция выражаются через эти свободные переменные. Пользуясь свойством неотрицательности переменных из выражений для базисных переменных, получим систему ограничений неравенств, определяющих допустимое множество. А далее алгоритм решения повторяет метод, описанный выше.

Пример 5.1. Решить следующую задачу линейного программирования графически:

$$\begin{aligned}
&f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min,\\
&x_1 + 2x_2 \le 7,\\
&2x_1 + x_2 \le 8,\\
&\qquad x_2 \le 3,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Решение. Изобразим на координатной плоскости допустимое множество *X*. Проведем граничные прямые $x_1 + 2x_2 = 7$ (l_1), $2x_1 + x_2 = 8$ (l_2),

$x_2 = 3$ (l_3) и определим полуплоскости, соответствующие ограничениям-неравенствам. Для этого для каждого ограничения выберем точку (например, начало координат (0, 0)), не лежащую на соответствующей граничной прямой, и проверим выполнение неравенства. Например, для ограничения $x_1 + 2x_2 \le 7$ подставим координаты (0, 0) и получим, что неравенство выполняется, т.е. это ограничение описывает множество точек, лежащих ниже (левее) относительно прямой $x_1 + 2x_2 = 7$. В результате получаем следующее множество допустимых решений (рис. 5.1).

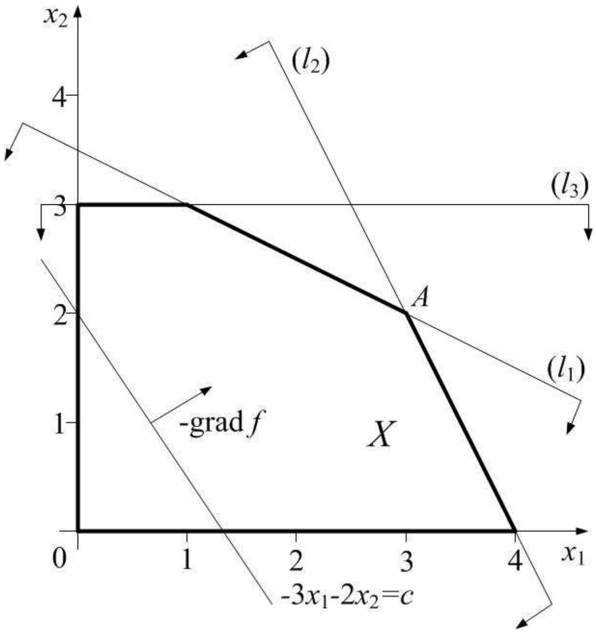


Рисунок 5.1. Графическая иллюстрация к примеру 5.1

Построим линию уровня целевой функции $-3x_1 - 2x_2 = c$ и вычислим антиградиент $-grad\ f = (3, 2)$. Совершая параллельный перенос линии уровня в направлении вектора $-grad\ f$, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая проходит через точку $A(3, 2)$. Таким образом, целевая функция принимает минимальное значение $f^{min} = -13$ в точке $x^{min} = (3, 2)$. ■

Пример 5.2. Решить графически следующую задачу линейного программирования:

$$f(x)=3x_1+4x_2+7x_3-x_4 \to extr,$$
$$x_1+3x_2+2x_3+2x_4=7,$$
$$2x_1+4x_2+x_3+3x_4=10,$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы ограничений и приведем ее к треугольному виду

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 7\\ 2 & 4 & 1 & 3 & 10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 2 & 7\\ 0 & -2 & -3 & -1 & -4\end{pmatrix}.$$

В качестве базисных переменных выберем x_1,x_4 и выразим их через свободные переменные x_2,x_3. Имеем

$$x_1=x_2+4x_3-1,\ x_4=-2x_2-3x_3+4\,.$$

Из условия неотрицательности переменных получаем систему ограничений неравенств

$$\begin{cases}x_1=x_2+4x_3-1\ge 0,\\ x_4=-2x_2-3x_3+4\ge 0,\\ x_{2,3}\ge 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2+4x_3\ge 1, & (l_1)\\ 2x_2+3x_3\le 4, & (l_2)\\ x_{2,3}\ge 0.\end{cases}$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные и рассчитаем градиент и антиградиент:

$$f(x)=3x_1+4x_2+7x_3-x_4=3(x_2+4x_3-1)+4x_2+7x_3-(-2x_2-3x_3+4),$$
$$f(x)=9x_2+22x_3-7\,,\ gradf=(9,22),\ -gradf=(-9,-22)\,.$$

Построим область допустимых значений и определим решение задачи.

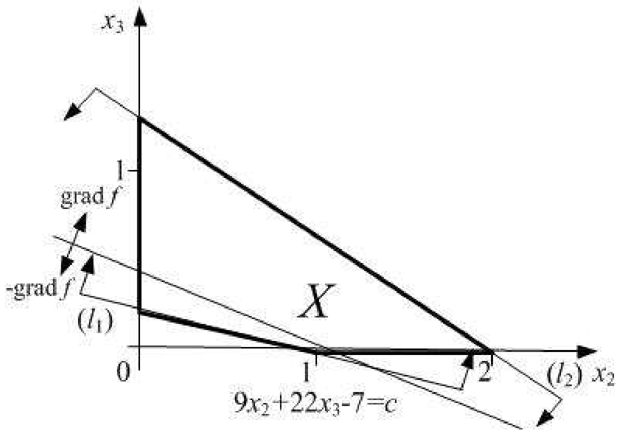


Рисунок 5.2. Графическая иллюстрация к примеру 5.2

Передвигая линию уровня $9x_2 + 22x_3 - 7 = c$ в направлении градиента, получаем, что максимум достигается в точке $(x_2, x_3) = (0, \frac{4}{3})$, откуда вычисляем $x_1 = x_2 + 4x_3 - 1 = \frac{13}{3}$, $x_4 = -2x_2 - 3x_3 + 4 = 0$, $f(x) = 9x_2 + 22x_3 - 7 = \frac{67}{3}$. Минимум достигается в точке $(x_2, x_3) = (0, \frac{1}{4})$, откуда вычисляем $x_1 = x_2 + 4x_3 - 1 = 0$, $x_4 = -2x_2 - 3x_3 + 4 = \frac{13}{4}$, $f(x) = 9x_2 + 22x_3 - 7 = -\frac{3}{2}$.

Окончательно получаем точки экстремума $x^{\max} = (\frac{13}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0)$, $f^{\max} = \frac{67}{3}$; $x^{\min} = (0, 0, \frac{1}{4}, \frac{13}{4})$, $f^{\min} = -\frac{3}{2}$. ■

§ 5.4. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Представленный ниже метод является универсальным методом при решении задач линейного программирования. Очевидно, что множество допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Дадим следующее определение.

Определение 1. Точка выпуклого множества называется *угловой* (или крайней), если через неё нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек данного множества и для которого она была бы внутренней (рис. 5.3).

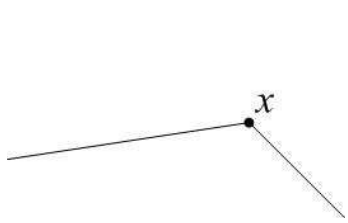


Рисунок 5.3. Угловая точка множества

В основе симплекс-метода лежит следующий факт: *если задача линейного программирования разрешима, то минимум целевой функции достигается хотя бы в одной из угловых точек допустимого множества X этой задачи.*

Отсюда следует, что задачу линейного программирования можно решать посредством перебора конечного числа угловых точек допустимого множества X, сравнивая значения целевой функции в этих точках. Однако при большой размерности задачи этот подход затруднителен. *Идея симплекс-метода состоит в направленном переборе угловых точек допустимого множества X с последовательным уменьшением целевой функции.*

Перейдем к описанию симплекс-метода. Пусть ранг r матрицы $A = (a_{ij})$ системы ограничений-равенств задачи линейного программирования в каноническом виде совпадает с рангом расширенной матрицы $(A \mid b)$.

Выберем какой-нибудь базисный минор матрицы A. Для определенности будем считать, что он соответствует первым r столбцам и строкам этой матрицы. Если $r < m$, то уравнения с номерами $i = \overline{r+1, m}$, являющиеся следствиями остальных уравнений, опустим, полагая в дальнейшем $r = m$.

Для решения системы уравнений относительно базисных переменных x_j, $j = \overline{1, m}$, с помощью эквивалентных преобразований приведем ее к виду

$$\begin{aligned}
&x_1 \qquad\qquad\qquad + a_{1,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + a_{1,n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)},\\
&\qquad x_2 \qquad\qquad + a_{2,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + a_{2,n}^{(0)} x_n = b_2^{(0)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + a_{m,n}^{(0)} x_n = b_m^{(0)}.
\end{aligned}$$

Тогда общее решение системы запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_1 = b_1^{(0)} - a_{1,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - a_{1,n}^{(0)} x_n,\\
&x_2 = b_2^{(0)} - a_{2,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - a_{2,n}^{(0)} x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_m = b_m^{(0)} - a_{m,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - a_{m,n}^{(0)} x_n.
\end{aligned}$$

где свободные переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ могут принимать произвольные значения.

Положив их равными нулю, получим частное решение

$$x_1 = b_1^{(0)},\ x_2 = b_2^{(0)},\ \ldots,\ x_m = b_m^{(0)},\ x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$$

или

$$x^{(0)} = (b_1^{(0)},\ b_2^{(0)},\ \ldots,\ b_m^{(0)},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

которое назовем *базисным решением* системы. Каждому выбору базисных переменных соответствует свое базисное решение системы.

Если все компоненты базисного решения удовлетворяют условию неотрицательности, т.е. если $b_i^{(0)} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$, то такое решение называется *допустимым базисным решением* системы или *угловой точкой* допустимого множества X канонической задачи линейного программирования. Если среди неотрицательных чисел $b_i^{(0)}$ есть равные нулю, то допустимое базисное решение называют *вырожденным* (вырожденной угловой точкой), а соответствующая задача линейного программирования также называется *вырожденной*.

Предположим, что каноническая задача линейного программирования является невырожденной, а базисное решение – допустимым. Выразим целевую функцию через свободные переменные $x_{m+1},\ldots,x_n$:

$$f(x) = c^{(0)} + \sum_{j=m+1}^{n} c_j^{(0)} x_j,$$

где $c^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i^{(0)},\ c_j^{(0)} = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,j}^{(0)},\ j = \overline{m+1,n}$.

Все вычисления в симплекс-методе удобно проводить с использованием симплекс-таблицы. При этом каждому базисному решению будет соответствовать своя симплекс-таблица. Составим симплекс-таблицу, соответствующую первому допустимому базисному решению.

В таблице 5.1 коэффициенты $c_j^{(0)},\ j = \overline{1,m}$, и $a_{i,j}^{(0)},\ i,j = \overline{1,m},\ i \neq j$, равны нулю, коэффициенты $a_{i,i}^{(0)},\ i = \overline{1,m}$ равны единицы. Такое их обозначение примем для удобства дальнейшего изложения, в силу того, что в произвольной симплекс-таблице (соответствующей произвольному базисному решению) в столбце «Базисные переменные» могут стоять иные переменные. При этом следует понимать, что в произвольной симплекс-таблице на пересечении строки и столбца, соответствующих некоторой базисной переменной x_k, будет стоять единица, все остальные элементы столбца, соответствующего переменной x_k, и коэффициент целевой функции $c_k^{(0)}$, равны нулю.

Таблица 5.1. Симплекс-таблица

Базисные переменные	x_1 x_2 … x_l … x_n	Свободные коэффициенты	Отношение, δ_i
x_1	$a_{1,1}^{(0)}$ $a_{1,2}^{(0)}$ … $a_{1,l}^{(0)}$ … $a_{1,n}^{(0)}$	$b_1^{(0)}$	
…	…………………………………	…	
x_k	$a_{k,1}^{(0)}$ $a_{k,2}^{(0)}$ … $\underline{a_{k,l}^{(0)}}$ … $a_{k,n}^{(0)}$	$b_k^{(0)}$	
…	…………………………………	…	
x_m	$a_{m,1}^{(0)}$ $a_{m,2}^{(0)}$ … $a_{m,l}^{(0)}$ … $a_{m,n}^{(0)}$	$b_m^{(0)}$	
f	$c_1^{(0)}$ $c_2^{(0)}$ … $c_l^{(0)}$ … $c_n^{(0)}$	$-c^{(0)}$	

Справедливы следующие утверждения:

1) Если все коэффициенты $c_j^{(0)}$, неотрицательны, то в угловой точке достигается минимум целевой функции $f(x)$ из (3) на допустимом множестве X задачи и этот минимум равен $c^{(0)}$.

2) Если среди отрицательных коэффициентов $c_j^{(0)}$ есть такой (например, $c_l^{(0)} < 0$), что все коэффициенты $a_{i,l}^{(0)} \le 0,\ i = \overline{1,m}$, то целевая функция $f(x)$ неограниченна снизу на допустимом множестве X и задача не имеет решений.

3) Если хотя бы один из коэффициентов $c_j^{(0)}$ отрицателен (например, $c_l^{(0)} < 0$) и при этом среди коэффициентов $a_{i,l}^{(0)},\ i = \overline{1,m}$ есть хотя бы один положительный, то существует угловая точка $x^{(1)}$ множества X такая, что $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$.

В случаях 1) и 2) процесс решения задачи линейного программирования на этом заканчивается. Рассмотрим подробнее случай 3). Пусть коэффициент $c_l^{(0)} < 0$. Столбец симплекс-таблицы, соответствующий этому коэффициенту, назовем *разрешающим столбцом* (в случае, если среди коэффициентов $c_j^{(0)}$ имеется несколько отрицательных, то выбирается любой из них, например, наибольший по абсолютному значению). Найдем номер k базисной переменной из условия

$$\delta_k = \frac{b_k^{(0)}}{a_{kl}^{(0)}} = \min_{i:a_{il}^{(0)}>0} \{\delta_i\} = \min_{i:a_{il}^{(0)}>0} \left\{ \frac{b_i^{(0)}}{a_{il}^{(0)}} \right\}.$$

Строку с номером k назовем *разрешающей строкой*, а элемент $a_{k,l}^{(0)}$, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, – *разрешающим элементом*.

Далее осуществим переход от симплекс-таблицы, соответствующей угловой точке $x^{(0)}$, к симплекс-таблице для угловой точки $x^{(1)}$. Для построения новой симплекс-таблицы необходимо выполнить следующие операции:

1. В столбце «Базисные переменные» на месте элемента x_k ставим элемент x_l.

2. На месте разрешающего элемента $a_{k,l}^{(0)}$ ставится единица, все остальные элементы разрешающего столбца принимаются равными нулю.

3. Все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, т.е. рассчитываются по формуле

$$a_{l,j}^{(1)} = \frac{a_{k,j}^{(0)}}{a_{k,l}^{(0)}},\ j = \overline{1,n},\ j \neq l,\ b_l^{(1)} = \frac{b_k^{(0)}}{a_{k,l}^{(0)}}.$$

4. Остальные элементы симплекс-таблицы пересчитываются по правилу «прямоугольника»:

$$a_{i,j}^{(1)} = \frac{a_{i,j}^{(0)} a_{k,l}^{(0)} - a_{i,l}^{(0)} a_{k,j}^{(0)}}{a_{k,l}^{(0)}},\ i = \overline{1,m},\ i \neq k,\ j = \overline{1,n},\ j \neq l,$$

$$b_i^{(1)}=\frac{b_i^{(0)}a_{k,l}^{(0)}-b_k^{(0)}a_{i,l}^{(0)}}{a_{k,l}^{(0)}},\ i=\overline{1,m},\ i\neq k,$$

$$c_j^{(1)}=\frac{c_j^{(0)}a_{k,l}^{(0)}-c_l^{(0)}a_{k,j}^{(0)}}{a_{k,l}^{(0)}},\ j=\overline{1,n},\ j\neq l,$$

$$\left(-c^{(1)}\right)=\frac{\left(-c^{(0)}\right)a_{k,l}^{(0)}-c_l^{(0)}b_k^{(0)}}{a_{k,l}^{(0)}}.$$

Далее проверяется справедливость одного из утверждений 1), 2) или 3).

Следует понимать, что если решается задача на максимум, то в симплекс-таблице элементы нижней строки должны записываться с обратным знаком, и, если справедливо утверждение 1), значение максимума равно свободному коэффициенту целевой функции.

Замечание. Если задача линейного программирования вырождена, то возможны холостые шаги симплекс-метода, т.е. шаги, в результате которых значение целевой функции не изменяется. При этом теоретически возможно и зацикливание, т.е. бесконечное повторение холостых шагов. Для того чтобы избежать зацикливания, разработаны специальные алгоритмы (антициклины). Однако на практике зацикливание происходит редко, поэтому антициклины мы рассматривать не будем.

Пример 5.2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$\begin{aligned}
&f(x)=-5x_1+4x_2-x_3-3x_4-x_5\to extr,\\
&3x_1-3x_2+2x_4+x_5=5,\\
&2x_1-3x_2+x_3+2x_4+x_5=6,\\
&3x_1-x_2+x_3+3x_4+2x_5=9,\\
&x_j\geq 0,\ j=\overline{1,5},
\end{aligned}$$

выбрав в качестве начальной угловой точки $x^{(0)}=(0,0,1,2,1)$.

Решение. Точка $x^{(0)}$ удовлетворяет ограничениям-равенствам и ее координаты неотрицательны, значит, она является допустимой. Так как

$x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0$, то эти переменные являются свободными, а остальные переменные $x_3^{(0)}, x_4^{(0)},\ x_5^{(0)}$ – базисными. Выразим базисные переменные через свободные, для это разрешим систему ограничений-равенств методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили

$$\begin{aligned} -x_1 \quad\quad + x_3 &= 1, & \qquad & x_3 = 1 + x_1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 &= 2, & \text{или} \qquad & x_4 = 2 - 2x_1 + 5x_2, \\ -x_1 + 7x_2 + x_5 &= 1, & \qquad & x_5 = 1 + x_1 - 7x_2, \end{aligned}$$

и $f(x) = -5x_1 + 4x_2 - (1 + x_1) - 3(2 - 2x_1 + 5x_2) - (1 + x_1 - 7x_2) = -8 - x_1 - 4x_2$.

Решим задачу минимизации. Составим симплекс-таблицу, соответствующую первому базисному решению (первому опорному плану):

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_3	–1	0	1	0	0	1
x_4	2	–5	0	1	0	2
x_5	–1	**7**	0	0	1	1
f	–1	–4	0	0	0	8

В нижней строке симплекс-таблицы стоят два отрицательных коэффициента – –1 и –4. Выберем из них максимальный по модулю, второй столбец, соответствующий ему, будет разрешающим. Среди коэффициентов a_{i2} единственный положительный – 7, он и будет разрешающим элементом. В первой строке в столбце «Базисные переменные» вместо x_5 ставим x_2 и пересчитываем элементы симплекс-таблицы. Получаем

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_3	–1	0	1	0	0	1
x_4	**9/7**	0	0	1	5/7	19/7
x_2	–1/7	1	0	0	1/7	1/7
f	–11/7	0	0	0	4/7	60/7

В нижней строке стоит коэффициент –11/7, соответствующий первому столбцу. Этот столбец возьмем в качестве разрешающего. Разрешающим элементом является единственный положительный коэффициент 9/7. Во второй строке в столбце «Базисные переменные» вместо x_4 ставим x_1 и пересчитываем элементы симплекс-таблицы. Получаем

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_3	0	0	1	7/9	5/9	28/9
x_1	1	0	0	7/9	5/9	19/9
x_2	0	1	0	1/9	2/9	4/9
f	0	0	0	11/9	13/9	107/9

Получили, что все коэффициенты нижней строки последней симплекс-таблицы неотрицательны, следовательно, решение, соответствующее этой таблице, является оптимальным. Таким образом, ответ задачи минимизации

$$x^{\min} = (19/9,\ 4/9,\ 28/9,\ 0,\ 0),\ f^{\min} = -107/9.$$

Решим задачу максимизации.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_3	–1	0	1	0	0	1
x_4	2	–5	0	1	0	2
x_5	–1	7	0	0	1	1
f	1	4	0	0	0	–8

Все коэффициенты нижней строки последней симплекс-таблицы неотрицательны, следовательно, решение, соответствующее этой таблице, является оптимальным. Таким образом, ответ задачи максимизации

$$x^{\max} = (0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1),\ f^{\min} = -8. \blacksquare$$

§ 5.5. Метод искусственного базиса

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с поиска какой-либо угловой точки допустимого множества. Очевидно, что лишь в простейших случаях эту точку можно найти с помощью элементарных преобразований системы ограничений. В общем случае для решения этой проблемы применяется метод искусственного базиса.

Суть метода состоит в решении симплекс-методом вспомогательной задачи минимизации функции, равной сумме дополнительных переменных, которые прибавляются к левым частям ограничений.

Пусть в ограничениях задачи линейного программирования все коэффициенты $b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$. Если это не так, то умножим соответствующие уравнения на –1. Введем m дополнительных переменных $x_{n+i},\ i=\overline{1,m}$, и рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\hat{f}(x)=\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n+m}.$$

Одной из угловых точек допустимого множества $\hat{X}$ этой задачи, очевидно, является точка $\hat{x}^{(0)}=(0,\ ...,\ 0,\ b_1,\ ...,\ b_m)$. Поэтому для решения задачи можно использовать симплекс метод со следующей начальной симплекс таблицей:

Таблица 5.2. Симплекс-таблица

Базисные переменные	$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n+m}$	Свободные коэффициенты
x_{n+1}	$a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}$	b_1
x_{n+2}	$a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}$	b_2
…	…………………….	…
x_{n+m}	$a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}$	b_m
$\hat{f}$	$c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n+m}$	$-c$

Где $c_{n+i}=0,\ i=\overline{1,m},\ c_j=-\sum_{i=1}^{m} a_{ij},\ j=\overline{1,n},\ (-c)=-\sum_{i=1}^{m} b_i$.

Отметим, что решение вспомогательной задачи всегда существует, так как ее допустимое множество непусто ($\hat{x}^{(0)} \in \hat{X}$, т.е. $\hat{X}$ содержит хотя бы один элемент), а целевая функция ограничена снизу на $\hat{X}$ ($\hat{f} \ge 0$). Пусть $\hat{f}^* = \min_{x\in\hat{X}} \hat{f}(x)$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $\hat{f}^* > 0$. Тогда допустимое множество X исходной задачи канонической линейного программирования пусто, т.е. эта задача не имеет решений.

2. $\hat{f}^* = 0$ и минимум целевой функции достигается в угловой точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ ..., \ \hat{x}_n, \ \hat{x}_{n+1}, \ , \ \hat{x}_{n+m})$ допустимого множества $\hat{X}$ вспомогательной задачи. Тогда точка $x^{(0)} = (\hat{x}_1, \ ..., \ \hat{x}_n)$ есть угловая точка допустимого множества X исходной задачи и ее можно использовать в качестве начальной угловой точки при решении этой задачи.

Равенство $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}^* = 0$ возможно только тогда, когда все координаты $\hat{x}_{n+i}$, $i = \overline{1,m}$ равны нулю.

Если задача невырождена, то это означает, что все переменные x_{n+i}, $i = \overline{1,m}$ для угловой точки являются свободными. Опустим столбцы, соответствующие этим переменным в окончательной симплекс-таблице, составленной при решении задачи. Полученная в результате этого таблица будет соответствовать системе уравнений-ограничений, разрешенной относительно m переменных x_i, являющихся базисными для угловой точки $\hat{x}$. Поэтому остается заменить в этой таблице последнюю строку на строку коэффициентов целевой функции исходной задачи и продолжить ее решение симплекс-методом из начальной угловой точки $x^{(0)} = (\hat{x}_1, \ ..., \ \hat{x}_n)$.

Если вспомогательная задача вырождена, то в угловой точке $\hat{x}$ некоторые из переменных x_{n+i}, $i = \overline{1,m}$ могут оказаться базисными. Тогда эти переменные следует перевести в свободные с помощью холостых шагов симплекс-метода, выбирая в качестве разрешающих произвольные элементы симплекс-таблицы, стоящие в строке, соответствующей этой переменной, отличные от нуля и удовлетворяющие аналогичному соотношению.

Замечание. Если в системе ограничений некоторые из переменных «претендуют» роль базисных, т.е. присутствуют только в одном уравнении с положительным коэффициентом и соответствующий свободный коэффициент в правой части равенства неотрицателен, то к этому ограничению дополнительную переменную можно не добавлять. При этом целевая функция вспомогательной задачи представляет собой сумму только дополнительных переменных.

Пример 5.4. Решить каноническую задачу линейного программирования симплекс-методом

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -x_1 - 4x_4 \to extr,\\
&-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13,\\
&-2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5,\\
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5,\\
&x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5},
\end{aligned}
$$

находя угловую точку методом искусственного базиса.

Решение. Ни одна из переменных не присутствует только в одном ограничении с положительным коэффициентом (при этом необходимо, чтобы правая часть соответствующего ограничения была неотрицательна), поэтому к левой части всех ограничений прибавляем искусственные переменные. Получаем вспомогательную задачу

$$
\begin{aligned}
&\hat{f}(x) = x_6 + x_7 + x_8 \to \min,\\
&-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 + x_6 = 13,\\
&-2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 + x_7 = 5,\\
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 5,\\
&x_j \geq 0,\ j = \overline{1,8},
\end{aligned}
$$

В качестве базисных переменных примем переменные x_6, x_7, x_8 и выразим целевую функцию через свободные

$$\hat{f}(x) = 23 + 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 8x_5,$$

при этом начальной угловой точкой данной задачи является точка $x^{(0)}$=(0, 0, 0, 0, 0, 13, 5, 5). Составим симплекс-таблицу, соответствующую первому базисному решению:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СК	δ_i
x_6	–1	–2	2	1	5	1	0	0	13	13/5=2,6
x_7	–2	2	0	4	1	0	1	0	5	5/1=5
x_8	1	–1	1	–1	**2**	0	0	1	5	5/2=2,5
$\hat{f}$	2	1	–3	–4	–8	0	0	0	–23	

Выберем в качестве разрешающего выберем второй столбец, тогда разрешающим будет элемент, стоящий в третьей строке. Пересчитываем коэффициенты симплекс таблицы. Получаем

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СК	δ_i
x_6	–7/2	**1/2**	–1/2	7/2	0	1	0	–5/2	1/2	(1/2)/(1/2)=1
x_7	–5/2	5/2	–1/2	9/2	0	0	1	–1/2	5/2	(5/2)/(5/2)=1
x_5	1/2	–1/2	1/2	–1/2	1	0	0	1/2	5/2	
$\hat{f}$	6	–3	1	–8	0	0	0	4	–3	

Разрешающим можно выбрать второй или четвертый столбец, однако выбора остановим на втором, чтобы далее было «проще» рассчитывать коэффициенты. Разрешающей строкой выберем первую. Пересчитаем элементы симплекс-таблицы.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СК
x_2	–7	1	–1	7	0	2	0	–5	1
x_7	**15**	0	2	–13	0	–5	1	12	0
x_5	–3	0	0	3	1	1	0	–2	3
$\hat{f}$	–15	0	–2	13	0	6	0	–11	0

Значение целевой функции равно нулю, однако, решение не оптимально. В качестве разрешающего выберем элемент, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СК
x_2	0	1	–1/15	14/15	0	–1/3	7/15	3/5	1
x_1	1	0	2/15	–13/15	0	–1/3	1/15	4/5	0
x_5	0	0	2/5	2/5	1	0	1/5	–2/5	3
$\hat{f}$	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Таким образом, получили, что оптимальное значение целевой функции равно нулю, при этом искусственные переменные выведены из состава базисных. Из последней симплекс-таблицы, исключая столбцы, соответствующие искусственным переменным, получаем систему ограничений

$$\begin{aligned}
&x_2 - 1/15x_3 + 14/15x_4 = 1,\\
&x_1 + 2/15x_3 - 13/15x_4 = 0,\\
&\qquad 2/5x_3 + 2/5x_4 + x_5 = 3,\\
&x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5},
\end{aligned}$$

Выражение целевой функции через свободные переменные имеет вид $f(x) = 2/15x_3 - 73/15x_4$. Решим задачу минимизации. Составим симплекс-таблицу, соответствующую первому базисному решению $x^{(0)}$=(0, 1, 0, 0, 3).

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_2	0	1	–1/15	**14/15**	0	1	15/14
x_1	1	0	2/15	–13/15	0	0	
x_5	0	0	2/5	2/5	1	3	15/2
f	0	0	2/15	–73/15	0	0	

Разрешающим столбцом выберем четвертый столбец, тогда разрешающей строкой будет строка, соответствующая базисной переменной x_2. Пересчитаем элементы симплекс таблицы.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_4	0	15/14	–1/14	1	0	15/14	
x_1	1	13/14	1/14	0	0	13/14	13
x_5	0	–3/7	**3/7**	0	1	18/7	6
f	0	73/14	–3/14	0	0	73/14	

В новой симплекс-таблице разрешающим будет элемент, стоящий на пересечении третьего столбца и третьей строки.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_4	0	1	0	1	1/6	3/2
x_1	1	1	0	0	–1/6	1/2
x_3	0	–1	1	0	7/3	6
f	0	5	0	0	1/2	13/2

Таким образом, план, соответствующий последней симплекс-таблице, оптимальный, так как коэффициенты целевой функции неотрицательны. Итак, $x^{\min}$=(1/2, 0, 6, 3/2, 0), $f^{\min}$= –13/2.

Решим задачу максимизации.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_2	0	1	–1/15	14/15	0	1	
x_1	1	0	**2/15**	–13/15	0	0	0
x_5	0	0	2/5	2/5	1	3	15/2
f	0	0	–2/15	73/15	0	0	

Разрешающим столбцом выберем третий столбец, тогда разрешающей строкой будет строка, соответствующая базисной переменной x_1. Пересчитаем элементы симплекс таблицы.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_2	1/2	1	0	1/2	0	0
x_3	15/2	0	1	–13/2	0	0
x_5	3	0	0	3	1	1
f	1	0	0	4	0	0

Таким образом, решение, соответствующее последней симплекс-таблице, оптимально, так как коэффициенты целевой функции неотрицательны. Итак, x^{max}=(0, 0, 0, 0, 1), f^{max}= 0. ■

Пример 5.5. Решить общую задачу линейного программирования симплекс-методом

$$f(x) = -x_2 \to extr,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,$$
$$-x_1 + x_2 \geq -1,$$
$$2x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,2}.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду (для удобства второе ограничение умножим на –1)

$$f(x) = -x_2 \to extr,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 1,$$
$$-2x_1 + x_2 + x_5 = 0,$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}.$$

Переменные x_4 и x_5 могут выступать в качестве базисных переменных, поскольку каждая из них присутствует только в одном ограничении с положительным коэффициентом и правые части ограничений неотрицательны. Поэтому, к левой части первого ограничения прибавим новую искусственную переменную x_6 и для поиска начальной угловой точки решим следующую вспомогательную задачу

$$\hat{f}(x) = x_6 = 1 - x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 1,$$
$$-2x_1 + x_2 + x_5 = 0,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Составим симплекс-таблицу, соответствующую начальной угловой точке $x^{(0)}$=(0, 0, 0, 1, 0, 1).

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК	δ_i
x_6	**1**	1	–1	0	0	1	1	1/1=1
x_4	1	–1	0	1	0	0	1	1/1=1
x_5	–2	1	0	0	1	0	0	
$\hat{f}$	–1	–1	1	0	0	0	–1	

В качестве разрешающего элемента выберем элемент, стоящий на пересечении первой строки и первого столбца. Получаем

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_1	1	1	–1	0	0	1	1
x_4	0	–2	1	1	0	–1	0
x_5	0	3	–2	0	1	2	2
$\hat{f}$	0	0	0	0	0	1	0

Получили, что оптимальное решение вспомогательной задачи, при этом значение целевой функции равно нулю. Перепишем исходную задачу в виде:

$$f(x) = -x_2 \to extr,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$
$$-2x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$3x_2 - 2x_3 + x_5 = 2,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Решим задачу минимизации. Запишем симплекс-таблицу, соответствующую точке $x^{(0)}$=(1, 0, 0, 0, 2).

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_1	1	1	–1	0	0	1	1
x_4	0	–2	1	1	0	0	
x_5	0	**3**	–2	0	1	2	2/3
f	0	–1	0	0	0	0	

В качестве разрешающего элемента выберем элемент, стоящий на пересечении второго столбца и третьей строки. Имеем

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_1	1	0	–1/3	0	–1/3	1/3
x_4	0	0	–1/3	1	2/3	4/3
x_2	0	1	–2/3	0	1/3	2/3
f	0	0	–2/3	0	1/3	2/3

В нижней строке третьего столбца стоит отрицательный коэффициент (–2/3), однако в этом столбце среди коэффициентов a_{i3} нет положительных, поэтому задача минимизации решения не имеет.

Решим задачу максимизации. Запишем симплекс-таблицу, соответствующую полученному ранее базисному решению.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_1	1	1	–1	0	0	1
x_4	0	–2	1	1	0	0
x_5	0	3	–2	0	1	2
f	0	1	0	0	0	0

Все элементы нижней строки неотрицательны, таким образом, полученное решение оптимально. Получаем x^{max}=(1, 0, 0, 0, 2), f^{max}= 0.

Решим задачу графически. Нарисуем множество допустимых значений в плоскости x_1Ox_2 (рис. 5.4).

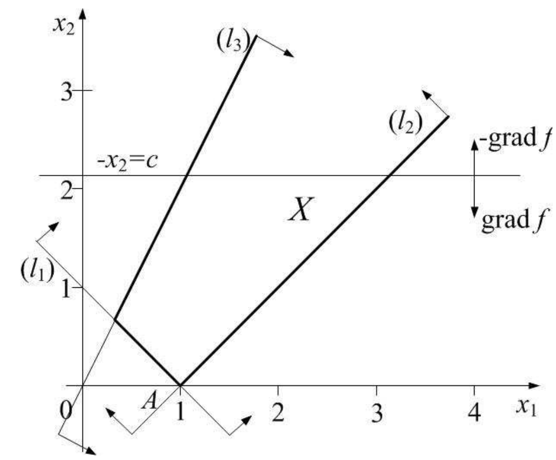


Рисунок 5.4. Графическая иллюстрация к примеру 5.5

Как видно из рисунка, целевая функция неограниченна снизу на допустимом множестве, а максимальное значение равно f^{max}= 0 и достигается в точке x^{max}=(1, 0, 0, 0, 2). ■

Пример 5.6. Решить общую задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f(x) = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to extr,$$
$$-2x_2 + x_4 + x_5 = -3,$$
$$x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 \le 5,$$
$$x_1 + x_2 \ge -3$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду

$$f(x) = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to extr,$$
$$2x_2 - x_4 - x_5 = 3,$$
$$x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 5,$$
$$-x_1 - x_2 + x_7 = 3$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Переменные x_3, x_6 и x_7 могут выступать в качестве базисных переменных, поскольку каждая из них присутствует только в одном ограничении с положительным коэффициентом и правые части ограничений неотрицательны. Поэтому, к левой части первого ограничения прибавим новую искусственную переменную x_8 и для поиска начальной угловой точки решим следующую вспомогательную задачу

$$\hat{f}(x) = x_8 = 3 - 2x_2 + x_4 + x_5 \to \min,$$
$$2x_2 - x_4 - x_5 + x_8 = 3,$$
$$x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 5,$$
$$-x_1 - x_2 + x_7 = 3$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,8}.$$

Составим симплекс-таблицу первого опорного плана $x^{(0)}$=(0, 0, 2, 0, 0, 5, 3, 3).

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СК	δ_i
x_8	0	$\underline{\mathbf{2}}$	0	–1	–1	0	0	1	3	3/2
x_3	0	0	1	–2	0	0	0	0	2	
x_6	1	3	0	–1	0	1	0	0	5	5/3
x_7	–1	–1	0	0	0	0	1	0	3	
$\hat{f}$	0	–2	0	1	1	0	0	0	–3	

В качестве разрешающего элемента берем элемент, стоящий на пересечении первой строки и второго столбца. Получаем новую симплекс-таблицу

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СК
x_2	0	1	0	–1/2	–1/2	0	0	1/2	3/2
x_3	0	0	1	–2	0	0	0	0	2
x_6	1	0	0	1/2	3/2	1	0	–3/2	1/2
x_7	–1	0	0	–1/2	–1/2	0	1	1/2	9/2
$\hat{f}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Получили, что оптимальное значение целевой функции вспомогательной задачи $\hat{f}^* = 0$, и искусственная переменная x_8 не входит в число базисных. Поэтому, исключив ее из ограничений, соответствующих последней симплекс-таблице, получаем ограничения для решения исходной задачи:

$$
\begin{aligned}
x_2 \quad - 1/2x_4 - 1/2x_5 \qquad &= 3/2,\\
x_3 - 2x_4 \qquad\qquad &= 2,\\
x_1 \quad + 1/2x_4 + 3/2x_5 + x_6 \quad &= 1/2,\\
-x_1 \quad - 1/2x_4 - 1/2x_5 \quad + x_7 &= 9/2\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.
\end{aligned}
$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$f(x) = -1/2 - 2x_1 - 3/2x_4 + 3/2x_5.$$

Решим задачу минимизации. Составим симплекс-таблицу, соответствующую опорному плану $x^{(0)}$=(0, 3/2, 2, 0, 0, 1/2, 9/2).

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК
x_2	0	1	0	–1/2	–1/2	0	0	3/2
x_3	0	0	1	–2	0	0	0	2
x_6	**1**	0	0	1/2	3/2	1	0	1/2
x_7	–1	0	0	–1/2	–1/2	0	1	9/2
f	–2	0	0	–3/2	3/2	0	0	1/2

В качестве разрешающего берем элемент, стоящий на пересечении третьей строки и первого столбца. Получаем

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК
x_2	0	1	0	–1/2	–1/2	0	0	3/2
x_3	0	0	1	–2	0	0	0	2
x_1	1	0	0	**1/2**	3/2	1	0	1/2
x_7	0	0	0	0	1	1	1	5
f	0	0	0	–1/2	9/2	2	0	3/2

Элемент 1/2, стоящий в третьей строке четвертом столбце, является разрешающим, как единственный положительный элемент в четвертом столбце с отрицательным коэффициентом в целевой функции. Пересчитаем элементы симплекс-таблицы:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК
x_2	1	1	0	0	1	1	0	2
x_3	4	0	1	0	6	4	0	4
x_4	2	0	0	1	3	2	0	1
x_7	0	0	0	0	1	1	1	5
f	1	0	0	0	6	3	0	2

Таким образом, получили оптимальное решение задачи минимизации. Из записи решения исключаем переменные x_6 и x_7 и записываем ответ $x^{\min}=(0, 2, 4, 1, 0), f^{\min}=-2$.

Решим задачу максимизации. Составим симплекс-таблицу, соответствующую опорному плану $x^{(0)}=(0, 3/2, 2, 0, 0, 1/2, 9/2)$.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК
x_2	0	1	0	–1/2	–1/2	0	0	3/2
x_3	0	0	1	–2	0	0	0	2
x_6	1	0	0	1/2	**3/2**	1	0	1/2
x_7	–1	0	0	–1/2	–1/2	0	1	9/2
f	2	0	0	3/2	–3/2	0	0	–1/2

В качестве разрешающего берем элемент, стоящий на пересечении третьей строки и пятого столбца. Получаем

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК
x_2	1/3	1	0	–1/3	0	1/3	0	5/3
x_3	0	0	1	–2	0	0	0	2
x_5	2/3	0	0	1/3	1	2/3	0	1/3
x_7	–2/3	0	0	–1/3	0	1/3	1	14/3
f	3	0	0	2	0	1	0	0

Таким образом, решение оптимально. Записываем ответ, исключив значение переменных x_6 и x_7, $x^{\max}=(0, 5/3, 2, 0, 1/3), f^{\max}=0$. ■

§ 5.5. Целочисленное линейное программирование

Во многих случаях на допустимое множество задачи линейного программирования накладывается дополнительное ограничение целочисленности переменных x_j. Если этому требованию должны удовлетворять все переменные, то получаем *полностью целочисленную задачу линейного программирования*, которая в каноническом виде записывается следующим образом:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

при ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m},\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\ x_j \in \mathrm{Z},\ j=\overline{1,n}.$

Полностью целочисленную задачу с двумя переменными можно решить *графически*, учитывая, что допустимое множество $\widetilde{X}$ этой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих допустимому множеству X задачи линейного программирования, описываемого соотношениями (5.4), (5.5).

Пример 5.7. Решить полностью целочисленную задачу графически

$$f(x)=-x_1-x_2 \to \min$$
$$2x_1+3x_2 \le 5,$$
$$x_1 \le 2,$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j=\overline{1,2}.$$

Решение. Построим область допустимых значений, соответствующую ограничениям-неравенствам, без требования целочисленности координат. В построенной области отметим точки с целочисленными координатами. Это и есть область допустимых значений задачи. Далее, следуя алгоритму решения задачи графическим методом, построим линию уровня целевой функции $-x_1-x_2=c$ и антиградиент $-grad\,f=(1,1)$.

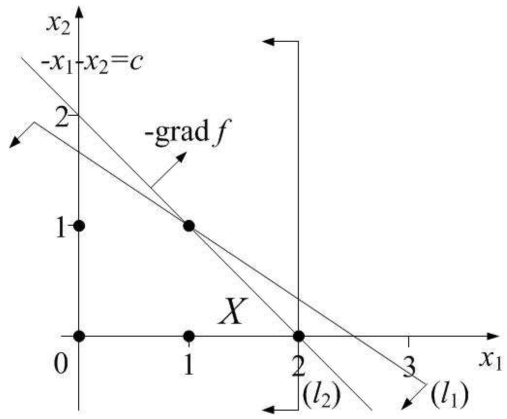


Рисунок 5.5. Графическая иллюстрация к примеру 5.7

Как видно из рисунка 5.5, своего минимального значения $f^{\min} = -2$ функция достигает в двух точках $x^{\min} = (2, 0)$ и $x^{\min} = (1, 1)$. ■

Для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с произвольным числом переменных используется *метод Гомори*. Он состоит в последовательном отсечении от допустимого множества X нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целочисленными координатами. Эти отсечения производятся введением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j.

Запишем алгоритм метода Гомори, использующий симплекс-метод:

1. С помощью симплекс-метода находится решение x^* задачи линейного программирования без учета требования целочисленности. Если для точки x^* требование целочисленности выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел b_i последнего столбца симплекс-таблицы, определяющей решение x^*, есть такие, что $\{b_i\} > 0$, где $\{\cdot\} \in [0,\ 1)$ – дробная часть числа.

2. Среди нецелых элементов b_i выбираем произвольный элемент b_r (например, с наибольшей дробной частью). По r-й строке симплекс-таблицы составляется дополнительное ограничение вида $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \{a_{rj}\} x_j \geq \{b_r\}$ (здесь, как и ранее, для определенности считаем, что свободными переменными являются переменные x_j, $j = \overline{m+1, n}$). С помощью вспомогательной переменной x_{n+1} представляем это ограничение в виде $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \{a_{rj}\} x_j - x_{n+1} = \{b_r\}$ и вводим его дополнительной строкой в симплекс-таблицу (таблица 5.3).

3. В качестве разрешающей строки выбирается новая строка. Номер l разрешающего столбца находится из условия:

$$\Delta_l = \frac{c_l}{\{a_{rl}\}} = \min_{j:\{a_{lj}\}>0} \{\Delta_j\} = \min_{j:\{a_{lj}\}>0} \left\{ \frac{c_j}{\{a_{lj}\}} \right\}.$$

Таблица 5.3. Симплекс-таблица

Базисные переменные	x_1 x_2 … x_n x_{n+1}	Свободные коэффициенты
x_1 x_2 … x_m	a_{11} a_{12} … a_{1n} 0 a_{21} a_{22} … a_{2n} 0 …………………………… a_{m1} a_{m2} … a_{mn} 0 $\{a_{r1}\}$ $\{a_{r2}\}$ … $\{a_{rn}\}$ -1	b_1 b_2 … b_m $\{b_r\}$
f	c_1 c_2 … c_n 0	$-c$
Отношение, Δ_j		

Совершается преобразование симплекс-таблицы с разрешающим элементом $\{a_{rl}\}$.

Отметим, что выбор разрешающего элемента гарантирует неотрицательность коэффициентов c_j новой симплекс-таблицы, и может оказаться, что какой-то из свободных коэффициентов (например b_q) отрицателен; тогда преобразования продолжаются. В качестве разрешающей строки выбирается строка, соответствующая свободному коэффициенту b_q. Номер разрешающего столбца находится из условия

$$\Delta_l = \frac{c_l}{|a_{ql}|} = \min_{j:a_{qj}<0}\{\Delta_j\} = \min_{i:a_{qj}<0}\left\{\frac{c_l}{|a_{qj}|}\right\}.$$

Преобразования продолжаются до тех пор, пока все из свободных коэффициентов b_j не станут неотрицательными.

Если же все коэффициенты b_i симплекс-таблицы неотрицательны, то допустимое базисное решение найдено и это решение является оптимальным.

4. Если найденное новое оптимальное решение задачи линейного программирования удовлетворяет условию оптимальности, то вычисления завершаются, если нет, то продолжаются переходом к пункту 2 описанного алгоритма.

Описанный алгоритм позволяет найти решение целочисленной задачи линейного программирования или установить отсутствие решений (а это возможно, если нельзя выбрать разрешающий элемент в пункте 3 алгоритма) за конечное число шагов.

Отметим, что переход к каноническому виду в полностью целочисленной задаче линейного программирования, содержащей ограничения-неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ $(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i)$ не приводит, вообще говоря, к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$ $(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+l+i} = b_i)$ вспомогательные переменные не подчинены требованию целочисленности.

Однако если все коэффициенты a_{ij}, b_i в ограничениях являются целыми числами, то условие целочисленности можно распространить и на вспомогательные переменные. Полностью целочисленную задачу в каноническом виде можно получить также, если коэффициенты a_{ij}, b_i – рациональные числа. Для этого ограничения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ $(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i)$ следует умножить на общее кратное знаменателей (т.е. перейти к целым коэффициентам) и после этого ввести дополнительные переменные.

Пример 5.8. Решить полностью целочисленную задачу линейного программирования методом Гомори.

$$f(x) = -x_1 + x_4 \to extr,$$
$$-2x_1 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_1 + x_2 - 2x_4 = 2,$$
$$x_1 + x_3 + 3x_4 = 3,$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$$

Решение. Применим симплекс-метод для решения задачи. Очевидно, что переменные x_5, x_2 и x_3 можно принять за базисные переменные. Целевая функция выражена через свободные переменные. Тогда начальной угловой точкой будет точка $x^{(0)}$=(0, 2, 3, 0, 1). Решим задачу минимизации. Составим симплекс-таблицу:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_5	–2	0	0	1	1	1	
x_2	**1**	1	0	–2	0	2	2/1=2
x_3	1	0	1	3	0	3	3/1=3
f	–1	0	0	1	0	0	

После выбора разрешающего элемента, пересчитываем коэффициенты симплекс-таблицы:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_5	0	2	0	–3	1	5
x_1	1	1	0	–2	0	2
x_3	0	–1	1	**5**	0	1
f	0	1	0	–1	0	2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_5	0	7/5	3/5	0	1	28/5
x_1	1	3/5	2/5	0	0	12/5
x_4	0	–1/5	1/5	1	0	1/5
f	0	4/5	1/5	0	0	11/5

Решение, соответствующее последней симплекс-таблице, оптимальное, но нецелочисленное. Вычислим дробные части от нецелочисленных координат полученного решения и выберем из них максимальное значение:

$$\max\{\{28/5\},\{12/5\},\{1/5\}\}=\max\{3/5,2/5,1/5\}=3/5.$$

Составим дополнительное ограничение по первой строке:

$$\{7/5\}x_2+\{3/5\}x_3\geq\{28/5\},$$

$$2/5x_2+3/5x_3\geq 3/5,$$

приведем его к каноническому виду, вычтя из левой части новую переменную x_6, и добавим новой строкой в симплекс-таблицу:ё

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_5	0	7/5	3/5	0	1	0	28/5
x_1	1	3/5	2/5	0	0	0	12/5
x_4	0	–1/5	1/5	1	0	0	1/5
	0	2/5	**3/5**	0	0	–1	3/5
f	0	4/5	1/5	0	0	0	11/5
Δ_j		$\frac{4/5}{2/5}=2$	$\frac{1/5}{3/5}=1/3$				

Разрешающей является новая строка. Разрешающий элемент выбирается как минимальный из соотношений коэффициентов целевой функции к положительным коэффициентам разрешающей строки. Таким образом, элемент 3/5 является разрешающий. Рассчитываем элементы новой симплекс-таблицы:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_5	0	1	0	0	1	1	5
x_1	1	1/3	0	0	0	2/3	2
x_4	0	–1/3	0	1	0	1/3	0
x_3	0	2/3	1	0	0	–5/3	1
f	0	2/3	0	0	0	1/3	2

Полученное решение является оптимальным и целочисленным: x^{min}=(2, 0, 1, 0, 5), f^{min}=–2.

Решим задачу максимизации. Составим симплекс-таблицу:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_5	–2	0	0	**1**	1	1	1/1=1
x_2	1	1	0	–2	0	2	
x_3	1	0	1	3	0	3	3/3=1
F	1	0	0	–1	0	0	

После выбора разрешающего элемента, пересчитываем коэффициенты симплекс-таблицы:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_4	–2	0	0	1	1	1
x_2	–3	1	0	0	2	4
x_3	**7**	0	1	0	–3	0
F	–1	0	0	0	1	1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_4	0	0	2/7	1	1/7	1
x_2	0	1	3/7	0	5/7	4
x_1	1	0	1/7	0	–3/7	0
F	0	0	1/7	0	4/7	1

Получили оптимальное решение задачи максимизации. Оно целочисленное, поэтому записываем ответ x^{max}=(0, 4, 0, 1, 0), f^{max}=1. ■

Пример 5.9. Решить полностью целочисленную задачу линейного программирования методом Гомори.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to extr,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10,$$
$$2x_1 + 4x_3 \ge 14,$$
$$2x_2 + x_3 \ge 7,$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to extr,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 10,$$
$$2x_1 + 4x_3 - x_5 = 14,$$
$$2x_2 + x_3 - x_6 = 7,$$
$$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,6}.$$

При этом на искусственные переменные так же распространяется требование целочисленности, поскольку коэффициенты ограничений являются целыми числами.

Для поиска начальной угловой точки применим метод искусственного базиса и решим вспомогательную задачу

$$\hat{f}(x) = x_7 + x_8 + x_9 = 31 - 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 10,$$
$$2x_1 + 4x_3 - x_5 + x_8 = 14,$$
$$2x_2 + x_3 - x_6 + x_9 = 7,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,9}.$$

Составим симплекс-таблицы:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	СК	δ_i
x_7	1	3	1	–1	0	0	1	0	0	10	10/1=10
x_8	2	0	**4**	0	–1	0	0	1	0	14	14/4=3,5
x_9	0	2	1	0	0	–1	0	0	1	7	7/1=7
$\hat{f}$	–3	–5	–6	1	1	1	0	0	0	–31	

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	СК	δ_i
x_7	1/2	3	0	–1	1/4	0	1	–1/4	0	13/2	(13/2)/3=13/6
x_3	1/2	0	1	0	–1/4	0	0	1/4	0	7/2	
x_9	–1/2	**2**	0	0	1/4	–1	0	–1/4	1	7/2	(7/2)/2=7/4
$\hat{f}$	0	–5	0	1	–1/2	1	0	3/2	0	–10	

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	СК	δ_i
x_7	5/4	0	0	–1	–1/8	**3/2**	1	1/8	–3/2	5/4	(5/4)/(3/2)=5/6
x_3	1/2	0	1	0	–1/4	0	0	1/4	0	7/2	
x_2	–1/4	1	0	0	1/8	–1/2	0	–1/8	1/2	7/4	
$\hat{f}$	–5/4	0	0	1	1/8	–3/2	0	7/8	5/2	–5/4	

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	СК
x_6	5/6	0	0	–2/3	–1/12	1	2/3	1/12	–1	5/6
x_3	1/2	0	1	0	–1/4	0	0	1/4	0	7/2
x_2	1/6	1	0	–1/3	1/12	0	1/3	–1/12	0	13/6
$\hat{f}$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Получили, что $\hat{f}^* = 0$ и все искусственные переменные выведены из состава базисных. Запишем ограничения в виде

$$\begin{aligned}
&5/6x_1 \qquad\qquad - 2/3x_4 - 1/12x_5 + x_6 = 5/6,\\
&1/2x_1 \quad + x_3 \qquad\quad - 1/4x_5 \qquad = 7/2,\\
&1/6x_1 + x_2 \quad - 1/3x_4 + 1/12x_5 \qquad = 13/6,\\
&x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,6},
\end{aligned}$$

и выразим целевую функцию через свободные переменные

$$f(x) = 47/6 + 13/6x_1 + 2/3x_4 + 1/12x_5.$$

Решим задачу минимизации. Составим симплекс-таблицу, соответствующую опорному плану $x^{(0)}$=(0, 13/6, 7/2, 0, 0, 5/6):

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_6	5/6	0	0	–2/3	–1/12	1	5/6
x_3	1/2	0	1	0	–1/4	0	7/2
x_2	1/6	1	0	–1/3	1/12	0	13/6
f	13/6	0	0	2/3	1/12	0	–47/6

Все коэффициенты целевой функции неотрицательны, следовательно, решение x^*=(0, 13/6, 7/2, 0, 0, 5/6) является оптимальным, но нецелочисленным. По третьей строчке составим дополнительное ограничение

$$1/6x_1 + 2/3x_4 + 1/12x_5 \geq 1/6.$$

В данном случае выбор строки, по которой составляется дополнительное ограничение, обусловлено тем, что в этом случае коэффициенты дополнительного ограничения будут «лучше». Например, ограничение, составленное по первой строке, имеет вид

$$5/6x_1 + 1/3x_4 + 11/12x_5 - x_7 = 5/6.$$

Очевидно, что коэффициенты будут «неудобны» (очевидно, могут вновь появиться дробные элементы в решении) при преобразовании симплекс-таблицы.

Введя дополнительную переменную в построенном ограничении, получим $1/6x_1 + 2/3x_4 + 1/12x_5 - x_7 = 1/6$.

Составим новую симплекс-таблицу:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК
x_6	5/6	0	0	–2/3	–1/12	1	0	5/6
x_3	1/2	0	1	0	–1/4	0	0	7/2
x_2	1/6	1	0	–1/3	1/12	0	0	13/6
	1/6	0	0	2/3	**1/12**	0	–1	1/6
f	13/6	0	0	2/3	1/12	0	0	–47/6
Δ_j	$\frac{13/6}{1/6}=13$			$\frac{2/3}{2/3}=1$	$\frac{1/12}{1/12}=1$			

Выбрав в качестве разрешающего элемента 1/12, пересчитаем коэффициенты симплекс-таблицы:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК
x_6	1	0	0	0	0	1	–1	1
x_3	1	0	1	2	0	0	–3	4
x_2	0	1	0	–1	0	0	1	2
x_5	2	0	0	8	1	0	–12	2
F	2	0	0	0	0	0	1	–8

Таким образом, получили оптимальное целочисленное решение. Из записи решения исключим переменные x_4, x_5, x_6, x_7 и запишем ответ решения задачи минимизации: x^{min}=(0, 2, 4), f^{min}=8.

Решим задачу максимизации. Составим симплекс-таблицу, соответствующую опорному плану $x^{(0)}$=(0, 13/6, 7/2, 0, 0, 5/6):

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК	δ_i
x_6	**5/6**	0	0	–2/3	–1/12	1	5/6	(5/6)/(5/6)=1
x_3	1/2	0	1	0	–1/4	0	7/2	(7/2)/(1/2)=7
x_2	1/6	1	0	–1/3	1/12	0	13/6	(13/6)/(1/6)=13
f	–13/6	0	0	–2/3	–1/12	0	47/6	

После выбора разрешающего элемента строим новые симплекс-таблицы:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_1	1	0	0	–4/5	–1/10	6/5	1
x_3	0	0	1	**2/5**	–1/5	–3/5	3
x_2	0	1	0	–1/5	1/10	–1/5	2
f	0	0	0	–12/5	–3/10	13/5	10

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_1	1	0	2	0	–1/2	0	7
x_4	0	0	5/2	1	–1/2	–3/2	15/2
x_2	0	1	1/2	0	0	–1/2	7/2
f	0	0	6	0	–3/2	–1	28

В нижней строке коэффициентов целевой функции есть отрицательные, однако, в соответствующих им столбцам нет положительных элементов. Это означает, что целевая функция неограниченная снизу на допустимом множестве и задача максимизации решение не имеет. ■

Задачи к главе 5

1. Найти графическим методом решения следующих задач:

1) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \to extr,$
$x_1 + x_2 \ge 1,$
$2x_1 - x_2 \ge -1,$
$x_1 - 2x_2 \le 0,$
$x_1,\ x_2 \ge 0.$

2) $f(x) = x_1 - 2x_2 \to extr,$
$-x_1 + x_2 \le 0,$
$2x_1 - x_2 \le 3,$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

3) $f(x) = -x_1 - 3x_2 \to extr,$
$2x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 - x_2 \ge 0,$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

4) $f(x) = -2x_1 - x_2 \to extr,$
$2x_1 + x_2 \ge 1,$
$3x_1 - x_2 \ge -1,$
$x_1 - 4x_2 \le 2,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

5) $f(x) = -x_1 - 4x_2 \to extr,$
$x_1 \le 2,$
$x_1 + 2x_2 \ge 2,$
$x_2 \le 2,$
$x_1 + x_2 \le 3,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

6) $f(x) = -2x_1 - x_2 \to extr,$
$x_1 + 2x_2 \ge 2,$
$2x_1 - x_2 \ge 0,$
$x_1 - 2x_2 \le 0,$
$x_1 - x_2 \ge -1,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

7) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$
$x_1 + x_2 \ge 1,$
$x_1 - x_2 \ge -1,$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$x_1 \le 2,$
$x_2 \le 2,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

8) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$
$2x_1 \ge 1,$
$x_1 + x_2 \le 3,$
$x_1 \le 2,$
$x_2 \le 2,$
$2x_1 + x_2 \ge 2,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

9) $f(x)=x_1+x_2 \to extr,$
$x_2 \le 5,$
$2x_1-6x_2 \le 12,$
$3x_1+8x_2 \le 52,$
$x_1,\ x_2 \ge 0.$

10) $f(x)=2x_1+5x_2 \to extr,$
$x_1-3x_2 \le 3,$
$x_1-x_2 \le 4,$
$-3x_1+x_2 \le 3,$
$x_1,\ x_2 \ge 0.$

11) $f(x)=-4x_1+2x_2 \to extr,$
$-x_1+3x_2 \le 7,$
$2x_1+x_2 \le 7,$
$x_1-2x_2 \le 0,$
$x_1,\ x_2 \ge 0.$

12) $f(x)=4x_1+3x_2 \to extr,$
$2x_1-3x_2 \le 6,$
$x_1-2x_2 \le 5,$
$-7x_1+x_2 \le 14,$
$x_1,\ x_2 \ge 0.$

13) $f(x)=-x_1+4x_2 \to extr,$
$3x_1+4x_2 \ge 12,$
$5x_1+2x_2 \ge 10,$
$4x_1+x_2 \le 20,$
$-3x_1+2x_2 \le 6,$
$x_1,\ x_2 \ge 0.$

14) $f(x)=3x_1+x_2 \to extr,$
$x_1-x_2 \ge 3,$
$x_1-2x_2 \ge 1,$
$x_1+x_2 \ge -1,$
$x_2 \ge -1,$
$x_1 \ge 0.$

15) $f(x)=-4x_1+x_2 \to extr,$
$x_1-3x_2 \le 3,$
$4x_1+2x_2 \ge 8,$
$-6x_1+7x_2 \le 42,$
$x_2 \le 8,$
$x_2 \ge 0.$

16) $f(x)=x_1+2x_2 \to extr,$
$-4x_1+2x_2 \le 20,$
$x_1 \ge -3,$
$x_1-x_2 \le 4,$
$x_2 \le 6,$
$x_1 \le 6.$

2. Найти графическим методом решения следующих задач:

1) $f(x)=-4x_1+2x_2-x_3+x_4 \to extr$
$3x_1+2x_2-x_3+4x_4=3,$
$x_1-x_2+4x_3-2x_4=2,$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

2) $f(x)=x_1-2x_2-3x_3+8x_4 \to extr$
$x_1+2x_2+4x_3+2x_4=2,$
$2x_1+3x_2+2x_3+x_4=2,$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3) $f(x)=3x_1-x_2+4x_3+x_4 \to extr$
$-x_1+4x_2-x_3+x_4=1,$
$2x_1+2x_2+3x_3+2x_4=1,$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

4) $f(x)=3x_1+x_2+2x_3+4x_4 \to extr$
$x_1+x_2+2x_3+4x_4=8,$
$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11,$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

5) $f(x) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to extr$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6,$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$

6) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \to extr$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5,$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$

7) $f(x) = -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \to extr,$

$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$

$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$

$3x_2 + x_4 + x_5 = 4,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}.$

8) $f(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to extr,$

$x_1 + 2x_3 + x_4 = 8,$

$x_1 + x_2 - x_4 = 4,$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$

9) $f(x) = -x_1 + x_2 \to extr,$

$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3,$

$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6,$

$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}.$

10) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to extr,$

$10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25,$

$-x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,$

$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}.$

11) $f(x) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \to extr,$

$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 13,$

$4x_1 + x_2 + x_5 = 26,$

$-2x_1 + x_2 + x_3 = 1,$

$x_1 - 3x_2 + x_6 = 0,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,6}.$

12) $f(x) = -x_1 - 3x_2 \to extr,$

$2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10,$

$2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25,$

$-2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9,$

$6x_2 + x_3 + x_4 = 36,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,6}.$

13) $f(x) = 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \to extr,$

$-x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 8,$

$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6,$

$2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \leq 10,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$

14) $f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to extr,$

$2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 6,$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9,$

$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq -57,$

$3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \leq 24,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$

15) $f(x) = 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \to extr,$

$x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6,$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 10,$

$-3x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 \leq 2,$

$20x_1 - 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 87,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$

16) $f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to extr,$

$4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5,$

$-2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1,$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3,$

$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 40x_4 \geq -1,$

$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$

17) $f(x)=4x_1+3x_2-6x_3+x_4\to extr,$
$2x_1+x_2-x_3+2x_4=15,$
$3x_1+x_2+2x_3-x_4=30,$
$-4x_1+x_2+x_3+2x_4\ge 15,$
$2x_1-x_2+4x_3-15x_4\ge -9,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

18) $f(x)=5x_1+x_2-4x_3-2x_4\to extr,$
$2x_1+x_2-x_3-x_4=6,$
$x_1-x_2+2x_3+9x_4=10,$
$3x_1+x_2-2x_3-9x_4\le 6,$
$18x_1+3x_2+x_3-x_4\ge 30,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

19) $f(x)=2x_1-x_2+x_3-x_4\to extr,$
$-x_1+x_2-5x_3-x_4=10,$
$2x_1-3x_2+25x_3+4x_4=10,$
$10x_1+x_2+5x_3+3x_4\ge 20,$
$-37x_1+3x_2+40x_3+x_4\ge 40,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

20) $f(x)=x_1+2x_2+3x_3-4x_4\to extr,$
$2x_1+x_2+3x_3-x_4=14,$
$x_1-x_2-x_3+2x_4=22,$
$-9x_1-3x_2-3x_3+2x_4\le 10,$
$22x_1-x_2-7x_3-x_4\ge 4,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3. Симплекс-методом найти экстремумы функций при соответствующих ограничениях, выбрав в качестве начальной угловой точки $x^{(0)}$:

1) $f(x)=-x_1-x_2-x_3-x_4+4x_5,$
$3x_1+x_2+x_3-6x_5=7,$
$2x_1+x_2+3x_3+3x_4-7x_5=10,$
$-3x_1+x_2+x_3-6x_4=1,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5};\ x^{(0)}=(1,2,2,0,0).$

2) $f(x)=-6x_1-x_2-4x_3+5x_4,$
$3x_1+x_2-x_3+x_5=4,$
$5x_1+x_2+x_3-x_4=4,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4};\ \ x^{(0)}=(1,0,0,1).$

3) $f(x)=x_1-3x_2-3x_3+6x_4+3x_5,$
$-2x_1+3x_2-4x_3+3x_4+2x_5=1,$
$-8x_1+2x_2+3x_3-4x_4-4x_5=1,$
$-x_1-4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=1,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5};\ x^{(0)}=(0,1,1,0,1).$

4) $f(x)=-x_1+2x_2-3x_3+x_4,$
$x_1-3x_2-x_3-2x_4=-4,$
$x_1-x_2+x_3=0,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4};\ x^{(0)}=(0,1,1,0).$

5) $f(x)=x_1-3x_2-3x_3+6x_4+3x_5,$
$-2x_1+3x_2-4x_3+3x_4+2x_5=1,$
$-8x_1+2x_2+3x_3-4x_4-4x_5=1,$
$-x_1-4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=1,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5};\ \ x^{(0)}=(0,1,1,0,1).$

6) $f(x)=-x_1-x_2-x_3-x_4,$
$x_1+x_2+x_3+3x_4=3,$
$x_1+x_2-x_3+x_4=1,$
$x_1-x_2+x_3+x_4=1,$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4};\ x^{(0)}=(0,0,0,1).$

7) $f(x) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5$,
$2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3$,
$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 1$,
$-3x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};\ x^{(0)} = (0,1,1,1,0)$.

8) $f(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5$,
$x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5$,
$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9$,
$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};\ x^{(0)} = (0,0,1,2,1)$.

9) $f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5$,
$x_2 + 2x_4 - x_5 = 1$,
$x_1 - x_4 - x_5 = 1$,
$2x_1 + x_3 + 2x_5 = 4$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};\ x^{(0)} = (1,1,2,0,0)$.

10) $f(x) = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5$,
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3$,
$x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0$,
$x_1 + x_4 - x_5 = 0$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};\ x^{(0)} = (0,2,0,1,1)$.

11) $f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5$,
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$,
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7$,
$x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};\ x^{(0)} = (2,1,2,0,0)$.

12) $f(x) = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 6x_5$,
$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18$,
$x_1 + 5x_2 + 2x_4 + 8x_5 = 13$,
$x_3 + x_5 = 3$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};\ x^{(0)} = (0,1,2,0,1)$.

4. Симплекс-методом отыскать экстремум функций в следующих канонических задачах линейного программирования, находя начальную угловую точку методом искусственного базиса:

1) $f(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3$,
$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$,
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}$.

2) $f(x) = 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4$,
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3$,
$-10x_1 + 14x_2 + 10x_3 + x_4 = 24$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$.

3) $f(x) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5$,
$x_1 + x_2 - x_3 = 1$,
$-x_2 + x_3 + x_4 = 1$,
$x_2 + x_3 + x_5 = 2$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}$.

4) $f(x) = -6x_1 - 8x_2$,
$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20$,
$12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72$,
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$.

5) $f(x) = -34x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4,$
$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

6) $f(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,$
$-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

7) $f(x) = -3x_1 + x_3 - 2x_4,$
$15x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 4,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3,$
$x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 7,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

8) $f(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5,$
$x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9,$
$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

9) $f(x) = -x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

10) $f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4,$
$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5,$
$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5,$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

11) $f(x) = -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5,$
$3x_1 + x_2 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 10,$
$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20,$
$10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

12) $f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 5x_5,$
$x_2 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2,$
$x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2,$
$x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

5. Симплекс-методом отыскать экстремум функций в следующих общих задачах линейного программирования, находя начальную угловую точку методом искусственного базиса:

1) $f(x) = x_1 + 3x_2 + x_3$
$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -4,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

2) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - x_4$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7,$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \ge 10,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

3) $f(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$
$3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4,$
$2x_2 - x_3 + 4x_4 \le 2,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 \ge 6,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

4) $f(x) = 6x_1 - x_2 - 2x_3$
$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6,$
$-x_1 + x_3 \ge 2,$
$-2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \ge -8,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

5) $f(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3$
$-x_1 + x_2 - x_3 \ge -1,$
$x_1 + 3x_2 \ge 2,$
$4x_2 + 7x_3 + 4x_4 \ge 6,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

6) $f(x) = -8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 15x_4$
$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10,$
$10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

7) $f(x) = 2x_1 - x_2$
$x_1 + x_2 \ge 4,$
$-x_1 + 2x_2 \ge -6,$
$2x_1 - x_2 \ge 1,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$

8) $f(x) = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + x_4$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \le 8,$
$3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 15,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

9) $f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$
$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1,$
$x_1 - x_2 \ge 1,$
$-3x_1 + x_2 + x_3 \le -4,$
$x_1 + 3x_2 \ge -2,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

10) $f(x) = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5$
$-2x_1 + x_4 + x_5 = -3,$
$x_3 - 2x_4 = 2,$
$x_1 + 3x_2 - x_4 \le 5,$
$x_1 + x_2 \ge -3,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

6. Решить полностью целочисленные задачи графически:

1) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$
$2x_1 + 3x_2 \le 36,$
$x_1 \le 13,$
$3x_1 + x_2 \ge -6,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}.$

2) $f(x) = -9x_1 - 11x_2 \to extr,$
$4x_1 + 3x_2 \le 10,$
$x_1 \le 5,$
$x_1 + 2x_2 \le 8,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}.$

3) $f(x) = x_2 - x_3 \to extr,$
$3x_2 + x_3 + x_4 = 3,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

4) $f(x) = -x_2 \to extr,$
$3x_1 + x_2 + x_3 = 12,$
$-8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

7. Решить полностью целочисленную задачу линейного программирования методом Гомори:

1) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 5,$
$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

2) $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \to extr,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8,$
$4x_1 + x_2 + x_4 = 10,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

3) $f(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to extr,$
$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$
$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$
$3x_2 + x_4 + x_5 = 4,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,5}.$

4) $f(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to extr,$
$x_1 + 2x_3 + x_4 = 8,$
$x_1 + x_2 - x_4 = 4,$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

5) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \to extr,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$
$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$
$x_3 - x_4 + x_5 = 1,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,5}.$

6) $f(x) = -x_3 \to extr,$
$-6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6,$
$7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,5}.$

7) $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \to extr,$
$4x_1 + x_2 \leq 44,$
$x_1 \leq 22,$
$x_2 \leq 18,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}.$

8) $f(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 \to extr,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16,$
$x_1 + x_2 \leq 7,$
$3x_1 + 2x_3 \geq 18,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}.$

9) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to extr,$
$1/3x_1 + 1/3x_2 + 2/3x_3 \geq 1,$
$2x_1 + x_2 \geq 1,$
$1/2x_2 + 3/4x_3 \geq 1,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}.$

10) $f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to extr,$
$x_1 + 2/3x_2 + 1/2x_3 \leq 25/6,$
$x_1 + 3/5x_2 + 2/5x_3 \leq 3,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Азарнова Т.В., Каширина И.Л., Чернышова Г.Д. Методы оптимизации: Учебное пособие. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. – 86 с.
2. Алексеев В.М., Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: ФИМАЛИТ, 2005. – 256 с.
3. Альсевич В.В., Крахотко В.В. Сборник задач по методам оптимизации: Линейное программирование. Учебное пособие. – Мн.: Белгоруниверситет, 1997. – 67 с.
4. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учебн. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2001. – 576 с.
5. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
6. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
7. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Физматлит, 1999. – 208 с.
8. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: Изд-во Московского университета, 1974. – 374 с.
9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 823 с.
10. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: Учеб. пособие. – М.: Сов. Радио, 1980 г. – 272 с.
11. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 599 с.
12. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. – 4-е изд., перераб. и доп. - М.: ФИМАЛИТ, 2000. – 264 с.

13. Ларин Р.М., Плясунов А.В., Пяткин А.В. Методы оптимизации. Примеры и задачи: Учебное пособие. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 2003. – 115 с.

14. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 368 с.

15. Мину М. Математическое программирование: теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 485 с.

16. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высш.шк., 2002. – 544 с.

17. Пикина Г.А. Задачи по оптимизации и оптимальному управлению. – М.: МЭИ, 1988. – 84 с.

18. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход.– М.: Мир, 1974. – 376 с.

19. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

20. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 469 с.

21. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1973. – 244 с.

22. Сухарев А.Г., Тихомиров А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации: Учеб. пособие. – 2-е изд. - М.: ФИМАЛИТ, 2005. – 368 с.

23. Харчисов Б.Ф. Методы оптимизации: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. – 140 с.

24. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М: Мир, 1979. – 399 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Надежда Николаевна Кушнирук,

старший преподаватель кафедры МАиМ, канд. физ.-мат. наук;

Владимир Владимирович Сельвинский,

доцент, заведующий кафедрой МАиМ, канд. физ.-мат. наук.

Методы оптимизации. Практикум.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,58. Заказ 265.