Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Н. Кушнирук, Т.В. Труфанова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практикум

Благовещенск

Издательство АмГУ

2011

ББК 22.16 я73
К 96

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Ермак Н.В., доц. каф. алгебры, геометрии, и методики преподавания математики БГПУ, канд.физ.-мат. наук

Кушнирук Н.Н., Труфанова Т.В.
К 96 Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений / Н.Н. Кушнирук, Т.В. Труфанова. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011. – 79 с.

В издании излагаются краткие теоретические сведения, основные положения, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы некоторых разделов асимптотических методов в теории дифференциальных уравнений: дифференцируемость решений по параметру, асимптотические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, отыскание периодических решений, оценка погрешности приближенного решения. Все методы иллюстрируются примерами.

Практикум предназначен для студентов специальностей 010101 – «Математика» в рамках изучения спец. курса «Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений». Материал будет интересен аспирантам и преподавателям, интересующимися вопросами исследования и решения дифференциальных уравнений.

В пособии представлен практикум из 13 лабораторных работ, даны краткие теоретические сведения, примеры, контрольные вопросы и задания для самостоятельного выполнения. Пособие рекомендуется студентам, изучающим курс «Информационные технологии», а также всем желающим ознакомится с современными компьютерными информационными технологиями.

ББК 22.16 я73

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного практикума – познакомить студентов математиков с основами теории малого параметра Ляпунова-Пуанкаре, которая лежит в основе целого ряда методов в астрономии, теории колебаний и т. д. Эта теория дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений, кроме того, эта теория дает понимание того, как должны строиться методы исследования новых задач.

Асимптотические методы позволяют отыскивать приближенные решения дифференциальных уравнений (или систем), близких к таким уравнениям (или системам), решения которых известны. В прикладных задачах часто бывает, что на течение рассматриваемого физического процесса влияют как основные факторы, определяющие ход процесса, так и факторы, оказывающие меньшее влияние и меньшие количественные характеристики процесса. При учете только основных факторов можно получить точное решение системы уравнений, а при учете всех известных факторов система становится сложной и не решается. В таких случаях асимптотические методы часто позволяют найти решения с нужной точностью.

В данном издании рассмотрены следующие разделы асимптотических методов в теории дифференциальных уравнений: дифференцируемость решений по параметру, асимптотические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, отыскание периодических решений, оценка погрешности приближенного решения. Вначале приводятся теоретические сведения по рассматриваемой теме, затем подробное решение задач. В конце пособия даны задачи для самостоятельного решения.

Практикум состоит из введения, шести параграфов, разделенных на пункты, заданий для самостоятельной работы, списка литературы и содержания. В месте окончания доказательства основных положений ставится знак ■. Начало и конец решения примеров обозначаются знаками ◄ и ► соответственно. Нумерация формул, теорем, примеров сквозная в пределах одного параграфа и состоит из двух чисел, первое – номер параграфа, второе – порядковый номер формулы, теоремы, примера в данном параграфе.

§ 1 ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ПАРАМЕТРУ

1.1 Об отыскании производных по параметру

Рассматривается система уравнений с параметром μ

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu),\ x(t_0) = a(\mu);$$

$$x = (x_1, ..., x_n),\ f = (f_1, ..., f_n). \tag{1.1}$$

При каждом μ система имеет решение. Оно зависит не только от t, но и от выбранного значения параметра μ, поэтому обозначается $x(t, \mu)$.

Теорема 1.1. Пусть при $(t, \mu) \in D$, $\mu \in M$, (D – область в R^{n+1}, M – интервал в R^1) все функции f_i, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial \mu}$, $a'(\mu)$ непрерывны. Пусть при всех $\mu \in M$ на отрезке $t_0 \in [t_1, t_2]$ решение $x(t, \mu)$ задачи (1.1) существует и проходит в области D. Тогда это решение имеет производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial \mu}$, непрерывные по (t, μ). Функции $u_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \mu}$ $(i = 1, ..., n)$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu},\ u_i(t_0) = a_i'(\mu),\ (i = 1, ..., n). \tag{1.2}$$

В (1.2) производные от f_i зависят от аргументов t, $x_1(t, \mu)$, …, $x_n(t, \mu)$, μ, где $x_i(t, \mu)$ – координаты решения $x(t, \mu)$ при том значении μ, при котором разыскивается $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$.

Если решение $x(t, \mu)$ известно хотя бы при одном значении μ, то система (1.2) позволяет найти $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$ при этом μ. Систему (1.2) можно не запоминать, она получается посредством дифференцирования обеих частей системы (1.1) по μ; при этом считаем, что $x = x(t, \mu)$, и $\dfrac{\partial x_i}{\partial \mu}$ обозначаем u_i.

Доказательство теоремы. Зафиксируем $\mu \in M$. Имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \lim_{\widetilde{\mu} \to \mu} \frac{\widetilde{x} - x}{\widetilde{\mu} - \mu}, \tag{1.3}$$

где $\widetilde{x} = x(t, \widetilde{\mu})$ – решение задачи (1.1), но с $\widetilde{\mu}$ вместо μ, то есть

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = f(t, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}),\ \widetilde{x}(t_0) = a(\widetilde{\mu}). \tag{1.4}$$

Обозначим дробь в (1.3) через $v(t, \mu)$. Идея доказательства теоремы. Составляем дифференциальное уравнение для $v(t, \mu)$ при $\widetilde{\mu} \neq \mu$. Его правая часть при $\widetilde{\mu} \to \mu$ стремится к правой части уравнения (1.2). Поэтому и решение $v(t, \widetilde{\mu})$ при $\widetilde{\mu} \to \mu$, то есть дробь в (1.3), стремится к решению уравнения (1.2). Значит, предел в (1.4), то есть $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$, существует и удовлетворяет уравнению (1.2).

Из уравнений (1.4) и (1.1), вычитая и деля на $\widetilde{\mu} - \mu$, получаем

$$\frac{dv(t, \widetilde{\mu})}{dt} = \frac{f(t, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}) - f(t, x, \mu)}{\widetilde{\mu} - \mu}, \quad v(t_0, \mu) = \frac{a(\widetilde{\mu}) - a(\mu)}{\widetilde{\mu} - \mu}. \tag{1.5}$$

Преобразуем первую дробь в (1.5). Положим

$$F(s) = f(t, x^*, \mu^*),$$

$$x^* = x + s(\widetilde{x} - x),\ \mu^* = \mu + s(\widetilde{\mu} - \mu).$$

Тогда

$$f(t, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}) - f(t, x, \mu) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds,$$

$$F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^*}(\widetilde{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \mu^*}(\widetilde{\mu} - \mu) \ \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x^*} \text{ есть матрица } \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j{}^*}\right)_{i, j = 1, \ldots, n}\Bigr).$$

Поэтому из (1.5) имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} \int_0^1 F'(s) ds = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x^*, \mu^*)}{\partial x^*} ds \cdot \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu} + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu^*} ds . \qquad (1.6)$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ непрерывны по совокупности переменных, то подынтегральные функции непрерывны по t, x, $\tilde{x}$, μ, $\tilde{\mu}$, s, а интегралы – по t, x, $\tilde{x}$, μ, $\tilde{\mu}$. Из (1.1) $x = x(t, \mu)$ непрерывно по t. Из теоремы (о непрерывной зависимости решения от параметра) $\tilde{x}$ непрерывно по $(t, \tilde{\mu})$ по совокупности переменных. Поэтому последние два интеграла в (1.6) непрерывные функции от $(t, \tilde{\mu})$, включая значение $\tilde{\mu} = \mu$. Обозначая их $H(t, \tilde{\mu})$ и $h(t, \tilde{\mu})$, получаем

$$\frac{dv}{dt} = H(t, \tilde{\mu}) v + h(t, \tilde{\mu}) . \qquad (1.7)$$

Функция $v(t, \tilde{\mu})$ была определена при $\tilde{\mu} \neq \mu$. Доопределяем ее при $\tilde{\mu} = \mu$ как решение уравнения (1.7) с начальным условием $v(t_0, \mu) = a'(\mu)$, полученным из начального условия (1.5) при $\tilde{\mu} \to \mu$. По теореме (о непрерывной зависимости решения от параметра) функция $v(t, \tilde{\mu})$ непрерывна по $\tilde{\mu}$, включая $\tilde{\mu} = \mu$. При $\tilde{\mu} = \mu$ имеем $x^* = x = x(t, \mu)$, $\mu^* = \mu$, подынтегральные выражения в (1.6) не зависят от s. Тогда в (1.7) матрица H и вектор h принимают значения

$$H(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i, j = 1, \dots, n}, \; h(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu} .$$

Таким образом, для $v(t, \mu)$ уравнение (1.7) и начальное условие $v(t_0, \mu) = a'(\mu)$ совпадают с (1.2). В силу непрерывности $v(t, \tilde{\mu})$ существует $\lim\limits_{\tilde{\mu} \to \mu} v(t, \tilde{\mu}) = v(t, \mu)$. То есть в (1.3) существует производная $\frac{\partial x}{\partial \mu} = v(t, \mu)$ и координаты u_i вектора $v(t, \mu)$ удовлетворяют системе уравнений и начальным условиям (1.2).

Теперь пусть μ меняется на интервале M. Тогда правые части системы (1.2) (и производные $\frac{\partial}{\partial u_j}$ от них) непрерывны по (t, μ). По теореме (о непрерывной зависимости решения от параметра) решение системы (1.2), то есть производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu}$, тоже непрерывны по (t, μ). ■

1.2 Примеры нахождения производных по параметру от решений задач

Пример 1.1. Найти $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$ от решения задачи

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 4\mu t + \mu^2, \ x(1) = 2\mu - 1. \tag{1.8}$$

◄ Условия теоремы 1.1 выполнены, так как функции $f = x^2 + 4\mu t + \mu^2$ и $a(\mu) = 2\mu - 1$ непрерывны и имеют непрерывные производные по x, μ. Дифференцируя (1.3) по μ и обозначая $x'_\mu = u$, получаем

$$\frac{du}{dt} = 2xu + 4t + 2\mu, \ u(1) = 2. \tag{1.9}$$

Здесь $\mu = 0$, а x – решение задачи (1.8) при $\mu = 0$, то есть задачи $\frac{dx}{dt} = x^2$, $x(1) = -1$. Отсюда $x = -\frac{1}{t}$. Теперь (1.9) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2u}{t} + 4t, \ u(1) = 2.$$

Решая это линейное уравнение (выкладки пропускаем), получаем $u = t^2 + ct^{-2}$. Из начального условия находим $c = 1$. Итак, $u = t^2 + t^{-2}$.◄

Пример 1.2. Найти $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$ от решения задачи

$$y' = y + \mu(x + y^2), \ y(0) = 1.$$

◄ Дифференцируя по параметру μ тождества

$$y'_x(x, \mu) \equiv y(x, \mu) + \mu(x + y^2(x, \mu)), \ y(0, \mu) = 1,$$

имеем:

$$\frac{du}{dx} = u + x + y^2(x,\mu) + 2\mu y(x,\mu)u\,,\ u(0,\mu) = 0\,,$$

где $u = \dfrac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu}$. Полагая здесь $\mu = 0$, получим задачу для функции $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = u(x,0)$:

$$\frac{du(x,0)}{dx} = u(x,0) + x + y^2(x,0)\,, u(0,0) = 0\,. \tag{1.10}$$

Функция $x \mapsto y(x,0)$ является решением задачи:

$$y'(x,0) = y(x,0)\,,\ y(0,0) = 1\,,$$

что непосредственно следует из данной задачи при $\mu = 0$. Поскольку $y(x,0) = e^x$, то, решая задачу (1.1), получаем окончательно

$$u(x,0) = \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = e^{2x} - x - 1\,. \ ►$$

Пример 1.3. Найти $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$ от решения задачи

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3,\ x(0) = 1 + \mu\,.$$

◄ Дифференцированием по μ из данной задачи получаем задачу для функции $u(t,\mu) = \dfrac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}$:

$$\frac{\partial u(t,\mu)}{\partial t} = t(x^3 + 3x^2\mu u(t,\mu)) + 2xu(t,\mu)\,,\ u(0,\mu) = 1\,.$$

Положив здесь $\mu = 0$, имеем:

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial t} = tx^3(t,0) + 2x(t,0)u(t,0)\,,\ u(0,0) = 1\,, \tag{1.11}$$

где функция $t \mapsto x(t,0)$ является решением задачи:

$$\frac{dx(t,0)}{dt} = x^2(t,0)\,,\ x(0,0) = 1\,, \tag{1.12}$$

получающейся из исходной при $\mu = 0$. Из (1.12) находим $x(t,0) = \dfrac{1}{1-t}$. Подставив $x(t,0)$ в (1.11), получаем задачу для искомой функции:

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial t} = \frac{t}{(1-t)^3} + \frac{2u(t,0)}{1-t},\ u(0,0) = 1,$$

откуда

$$u(t,0) = \frac{1 - t - \ln(1-t)}{(1-t)^2}.$$

Таким образом, $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = u(t,0) = \dfrac{1 - t - \ln(1-t)}{(1-t)^2}$. ►

Пример 1.4. Найти $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$ от решения задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 1 + \mu, \\ \dot{y} = 2x + \mu y^2, & y(0) = -2. \end{cases}$$

◄ С помощью дифференцирования каждого равенства данной задачи по параметру μ и последующей подстановки $\mu = 0$ получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{du(t,0)}{dt} = u(t,0) + v(t,0), && u(0,0) = 1, \\ &\frac{dv(t,0)}{dt} = -2u(t,0) + y^2(t,0), && v(0,0) = 0, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $u(t,\mu) = \dfrac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}$, $v(t,\mu) = \dfrac{\partial y(t,\mu)}{\partial \mu}$. Функцию $y(t,0)$ находим из задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}(t,0) = x(t,0) + y(t,0), & x(0,0) = 1, \\ \dot{y}(t,0) = 2x(t,0), & y(0,0) = -2. \end{cases}$$

которая получается из данной при $\mu = 0$. Подставив $x(t,0) = \dfrac{1}{2}\dot{y}(t,0)$ в первое уравнение, имеем задачу

$$\ddot{y}(t,0) - \dot{y}(t,0) - 2y(t,0) = 0,\ y(0,0) = -2,\ \dot{y}(0,0) = 2,$$

из которой находим $y(t,0) = -2e^{-t}$. Используя этот результат, из системы (1.13) методом исключения получаем задачу:

$$\ddot{v}(t,0)-\dot{v}(t,0)-2v(t,0)=-12e^{-2t},\ v(0,0)=0,\ \dot{v}(0,0)=6,$$

решение которой имеет вид $v(t,0)=2e^{-t}+e^{2t}-3e^{-2t}$. Это и есть искомое решение. ►

Пример 1.5. Найти $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu=1$ от решения задачи

$$\ddot{x}-\dot{x}=(x+1)^2-\mu x^2;\ x(0)=\frac{1}{2},\ \dot{x}(0)=-1.$$

◄ Дифференцируя равенства данной задачи и полагая затем в каждом из них $\mu=1$, получаем:

$$\frac{d^2u(t,1)}{dt^2}-\frac{du(t,1)}{dt}-2u=-x^2(t,1),\ u(0,1)=0,\ \left.\frac{du(t,1)}{dt}\right|_{t=0}=0,$$

где $u(t,\mu)=\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}$. Функция $t\mapsto x(t,1)$ является решением задачи:

$$\frac{d^2x(t,1)}{dt^2}-\frac{dx(t,1)}{dt}=2x(t,1)+1,\ x(0,1)=\frac{1}{2},\ \dot{x}(0,1)=-1, \tag{1.14}$$

которую можно получить из данной при $\mu=1$. Решив последнюю задачу, имеем:

$$x(t,1)=e^{-t}-\frac{1}{2}.$$

Учитывая это решение, задачу (1.14) представляем в виде:

$$\ddot{u}(t,1)-\dot{u}(t,1)-2u(t,1)=-\left(e^{-t}-\frac{1}{2}\right)^2,\ u(0,1)=\dot{u}(0,1)=0.$$

Наконец, интегрируя последнее уравнение и используя начальные условия, получаем:

$$u(t,1)=\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}=\frac{1}{8}+e^{-t}\left(\frac{5}{36}-\frac{t}{3}\right)-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{72}e^{2t}.\ ►$$

1.3 Дифференцируемость решений по начальным условиям

Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n),\ x_i(t_0) = x_{i0}\ (i = 1, ..., n). \tag{1.15}$$

Пусть при $(t, x) \in D$ все функции f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны, и на отрезке $t_0 \in [t_1, t_2]$ решение задачи (1.15) существует и проходит в области D. Тогда при $t_1 \le t \le t_2$ существуют непрерывные производные решения $x_i(t)$ $(i = 1, ..., n)$ по начальным условиям x_{k0} $(k = 1, ..., n)$. Функции $u_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{k0}}$ $(i = 1, ..., n)$ удовлетворяют системе

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j,\ u_i(t_0) = \begin{cases} 0 & (i \ne k), \\ 1 & (i = k). \end{cases} \tag{1.16}$$

Здесь $f_i = f_i(t, x_1(t), ..., x_n(t))$, где $x_1(t), ..., x_n(t)$ - решение задачи (1.16).

Доказательство. Пусть $x_{k0} = \mu$, а при $i \ne k$ x_{i0} не зависит от μ. Тогда система (1.16) удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Следовательно, производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_{k0}} \equiv \dfrac{\partial x_i}{\partial \mu} = u_i$ существуют, непрерывны и удовлетворяют системе (1.2), которая в этом случае превращается в (1.16).

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и, кроме того, функции f_i, $a_i(\mu)$, имеют непрерывные производные по $x_1, ..., x_n$, μ до порядка $m \ge 2$ включительно, в том числе смешанные производные. Тогда решение $x(t, \mu)$ имеет непрерывные по t, μ производные по μ до порядка m включительно.

Доказательство производится с помощью индукции по m. Для $m = 1$ утверждение теоремы 1.2 следует из теоремы 1.1. Пусть утверждение верно для производных до порядка $m - 1 \ge 1$. Докажем, что оно верно и для производных порядка m. Так как $\dfrac{\partial^m x_i}{\partial \mu^m} \equiv \dfrac{\partial^{m-1} u_i}{\partial \mu^{m-1}}$, а функции $u_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \mu}$ $(i = 1, ..., n)$ удовлетворяют системе (1.2), то надо проверить, что правые части в (1.2) имеют непрерывные производные по u_i, μ до порядка $m - 1$ включительно.

По условию, $f_i \in C^m$ по $x_1,...,x_n$, μ, значит, в (1.2) $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и $\dfrac{\partial f_i}{\partial \mu}$ принадлежат C^{m-1} по аргументам $x_1,...,x_n$, μ. Но каждое $x_k = x_k(t,\mu)$ есть координата вектора $x(t,\mu)$, являющегося решением задачи (1.1), где f и $a(\mu)$ принадлежат C^m, значит, принадлежат и C^{m-1} по $x_1,...,x_n$, μ. По предположению индукции, все $x_k(t,\mu) \in C^{m-1}$ по μ. Значит, в (1.2) сложная функция $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f_i(t, x_1(t,\mu),...,x_n(t,\mu),\mu)$ принадлежит C^{m-1} по μ, аналогично $\dfrac{\partial f_i}{\partial \mu}$, также $a'(\mu) \in C^{m-1}$. По предположению индукции, примененному к системе (1.2), решение $u_1,...,u_n$ системы (1.2) принадлежит C^{m-1} по μ. Так как $u_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \mu}$, то $x_i(t,\mu) \in C^m$ по μ. ■

1.4 Примеры нахождения производных по начальным условиям от решений задач

Пример 1.6. Найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$ от решения задачи $y' = y + y^2 + xy^3$.

◄ Пусть $y = y(x, y_0)$ – решение данной задачи. Тогда дифференцируя тождества

$$y'_x(x,y_0) \equiv y(x,y_0) + y^2(x,y_0) + xy^3(x,y_0),\ y(2,y_0) = y_0$$

по параметру y_0, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y_0)}{\partial x} = u(x,y_0) + 2y(x,y_0)u(x,y_0) + 3xy^2(x,y_0)u(x,y_0), \\ u(2,0) = 1, \quad u(x,y_0) = \dfrac{\partial y(x,y_0)}{\partial y_0}. \end{cases}$$

Полагая здесь $y_0 = 0$, получаем задачу для функции $x \mapsto \left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = u(x,0) + 2y(x,0)u(x,0) + 3xy^2(x,0)u(x,0) \\ u(2,0) = 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

где $y(x,0)$ – решение следующей задачи:

$$y'_x(x,0) = y(x,0) + y^2(x,0) + xy^3(x,0),\ y(2,0) = 0.$$

Очевидно, $y(x,0) \equiv 0$, поэтому задача (1.17) принимает вид:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = u(x,0),\ u(2,0) = 1.$$

Отсюда находим $u(x,0) = e^{x-2}$. Итак, $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = u(x,0) = e^{x-2}$. ►

Пример 1.7. Найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3\\ y_0=2}}$ от решения задачи $\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2,\ x(1) = x_0, \\ 2\dot{y} = -y^2,\quad y(1) = y_0. \end{cases}$

◄ Дифференцируя по параметру y_0 каждое равенство данной задачи, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x_0,y_0)}{\partial t} = x(t,x_0,y_0)v(t,x_0,y_0) + u(t,x_0,y_0)y(t,x_0,y_0), \\ u(1,x_0,y_0) = 0, \\ 2\dfrac{\partial v(t,x_0,y_0)}{\partial t} = -2y(t,x_0,y_0)v(t,x_0,y_0), \\ v(1,x_0,y_0) = 1, \end{cases} \tag{1.18}$$

где введены обозначения:

$$u(t,x_0,y_0) = \frac{\partial x(t,x_0,y_0)}{\partial y_0},\ v(t,x_0,y_0) = \frac{\partial y(t,x_0,y_0)}{\partial y_0}.$$

Функции x, y являются решениями исходной задачи. Полагая в ней $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ и интегрируя соответствующие уравнения, получаем:

$$x(t,3,2) = t^3 + 2t^2,\ y(t,3,2) = \frac{2}{t}.$$

Подставляя в (1.18) найденные функции, а также $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,3,2)}{\partial t} = (t^3 + 2t^2)v(t,3,2) + \dfrac{2}{t}u(t,3,2), \\ u(1,3,2) = 0, \\ \dfrac{\partial v(t,3,2)}{\partial t} = -\dfrac{2}{t}v(t,3,2), \\ v(1,3,2) = 1, \end{cases} \tag{1.19}$$

Из второго уравнения системы (1.19) находим: $v(t,3,2) = \dfrac{1}{t^2}$. Подставив $v(t,3,2)$ в первое уравнение системы (1.19), после интегрирования имеем: $u(t,3,2) = t^2 \ln t - 2t + 2t^2$.

Следовательно, $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2}} = t^2 \ln t - 2t + 2t^2$. ►

§ 2 АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1 Метод степенных рядов

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \tag{2.1}$$

Если коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ являются аналитическими функциями, т.е. разлагающимися в ряд по степеням $x - x_0$, и $p_0(x_0) \neq 0$, то решение этого уравнения в некоторой окрестности указанной точки также аналитичны. Если же точка $x = x_0$ является s-кратным нулем функции p_0, $(s-1)$-кратным (или выше) нулем функции p_1 (если $s > 1$) и $(s-2)$-кратным (или выше) нулем функции p_2 (если $s > 2$), то существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (2.1) в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где r – некоторое число.

Если функция f является аналитической в окрестности точки (x_0, y_0), то решение задачи

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

также является аналитической функцией в окрестности точки $x = x_0$. Аналогично, если функция $f = f\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ является аналитической в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$, то существует решение задачи

$$y^{(n)} = f,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

в виде ряда по степеням $(x - x_0)$. Для отыскания коэффициентов ряда часто используется формула Тейлора.

2.2 Примеры построения решений в виде степенного ряда

В каждой задаче найти решения уравнения в виде степенного ряда.

Пример 2.1. $y' = y^2 - x$; $y(0) = 1$.

◀Функция $f(x, y) = y^2 - x$ является аналитической по совокупности переменных x, y в окрестности точки (0,1), поэтому существует аналитическое решение этой задачи

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Подставив его в данное уравнение, получаем тождество по x:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right)^2 - x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь систему уравнений относительно чисел a_i ($i = 0,1,2,\ldots$):

$$a_1 = a_0^2,\ 2a_2 = 2a_0 a_1 - 1,\ 3a_3 = a_1^2 + 2a_0 a_2,\ 4a_4 = 2a_1 a_2 + 2a_0 a_3,\ \ldots.$$

Так как $y(0) = 1$, то $a_0 = 1$. А тогда из уравнений полученной системы последовательно находим:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{2}{3},\ a_4 = \frac{7}{12},\ \ldots.$$

Таким образом, приближенное решение имеет вид:

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4. \ ▶$$

Пример 2.2. $y' = y + xe^y$, $y(0) = 0$.

◀Функцию $f(x, y) = y + xe^y$ разложим в степенной ряд в окрестности точки (0,0) по степеням x, y:

$$f(x, y) = y + x\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \ldots\right).$$

Далее, принимая во внимание начальное условие, ищем решение в виде ряда

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots.$$

Подставив его в уравнение

$$y' = y + x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$a_1 = 0,\ 2a_2 = 1,\ 3a_3 = a_2,\ 4a_4 = a_3 + a_2,\ \ldots,$$

откуда находим

$$a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{1}{6},\ \ldots.$$

Следовательно, $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots.$ ►

Пример 2.3. $y'' = xy' - y^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$..

◄Как и в предыдущих задачах, приближенное решение $y(x)$ можно было бы получить в виде частичной суммы степенного ряда, находя коэффициенты его из некоторой системы рекуррентных уравнений. Однако в данном случае мы поступим по-другому. Именно, зная, что искомый степенной ряд является рядом Тейлора, путем последовательного дифференцирования правой части данного уравнения по x вычисляем нужного порядка производные в точке $x = 0$. Таким образом, учитывая начальные условия, имеем:

$$y''(0) = -y^2(0) = -1,$$

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(xy' - y^2\right) = y' + xy'' - 2yy', \qquad y'''(0) = -2,$$

$$y^{IV}(x) = 2y'' + xy''' - 2y'^2 - 2yy'', \qquad y^{IV}(0) = -8, \ldots$$

Следовательно, по формуле Тейлора,

$$y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \ldots.$$ ►

Пример 2.4. $\frac{dx}{dt} = t + x - y^2$, $\frac{dy}{dt} = -1 + t^2 + x^2 + y$; $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

◄ Поскольку правые части уравнений являются аналитическими функциями переменных x, y, t в совокупности, то решение ищем в виде

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots,$$

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots .$$

Подставив их в данные уравнения и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений относительно чисел a_i, b_i, $i = 1,2,\dots$:

$$a_1 = a_0 - b_0^2, \qquad 2a_2 = 1 + a_1 - 2b_0 b_1, \qquad 3a_3 = a_2 - b_1^2 - 2b_0 b_2, \; \dots,$$

$$b_1 = -1 + b_0 + a_0^2, \qquad 2b_2 = b_1 + 2a_0 a_1, \qquad 3b_3 = 1 + b_2 + a_1^2 + 2a_0 a_2, \; \dots .$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия, которые дают $a_0 = 1$, $b_0 = -1$, последовательно находим:

$$a_1 = 0, \; b_1 = -1, \; a_2 = -\frac{1}{2}, \; b_2 = -\frac{1}{2}, \; a_3 = -\frac{5}{6}, \; b_3 = -\frac{1}{6}, \; \dots .$$

Следовательно,

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t^3 + \dots, \qquad y(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots . \; ►$$

Пример 2.5. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t + x^2 + y^2}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{xy\ln\left(t + x^2 + y^2\right)}{1 + (t + tgy)^2}$; $x(1) = 0, y(1) = 1$.

◄ Сначала, пользуясь формулой Тейлора, разложим правые части уравнений по степеням $(t-1)$, x, $y-1$:

$$f_1(t,x,y) = \frac{1}{2} + (t-1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial t}\right|_M + x\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_M + (y-1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_M +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left((t-1)^2 \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right|_M + 2(t-1)x\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial x}\right|_M + 2(t-1)(y-1)\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial y}\right|_M + \right.$$

$$\left. + 2x(y-1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial x \partial y}\right|_M + x^2\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right|_M + (y-1)^2\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right|_M \right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{t-1}{4} - \frac{3(y-1)}{4} + \frac{(t-1)^2}{8} + \frac{3(t-1)(y-1)}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}(y-1)^2 + \dots,$$

$$f_2(t,x,y)=(t-1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial t}\right|_M+x\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_M+(y-1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_M+$$

$$+\frac{1}{2!}\left((t-1)^2\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\right|_M+2x(t-1)\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial t\partial x}\right|_M+2(t-1)(y-1)\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial t\partial y}\right|_M+\right.$$

$$\left.+2x(y-1)\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}\right|_M+x^2\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right|_M+(y-1)^2\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\right|_M\right)+\ldots=$$

$$=ax+x(t-1)b+cx(y-1)+\ldots,$$

где

$$f_1(t,x,y)=\frac{1}{t+x^2+y^2},\ f_2(t,x,y)=\frac{xy\ln\left(t+x^2+y^2\right)}{1+(t+tgy)^2},$$

$$a=\frac{\ln 2}{1+(1+tg1)^2},\ b=\frac{1}{2\left(1+(1+tg1)^2\right)}-2(1+tg1)\frac{\ln 2}{\left(1+(1+tg1)^2\right)^2},$$

$$c=\frac{\ln 2+1}{1+(1+tg1)^2}-\frac{\ln 2}{\left(1+(1+tg1)^2\right)^2}.$$

Таким образом, имеем задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{t-1}{4}-\dfrac{3(y-1)}{4}+\dfrac{(t-1)^2}{8}+\dfrac{3(t-1)(y-1)}{8}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{8}(y-1)^2+\ldots,\\ \dfrac{dy}{dt}=ax+x(t-1)b+cx(y-1)+\ldots,x(1)=0,y(1)=1.\end{cases}\tag{2.2}$$

Далее, ищем решение задачи (2.2) в виде:

$$x(t)=a_1(t-1)+a_2(t-1)^2+a_3(t-1)^3+\ldots,$$

$$y(t)=1+b_1(t-1)+b_2(t-1)^2+b_3(t-1)^3+\ldots$$

Подставляя последние ряды в уравнение (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t-1$, получаем систему уравнений, из которой находим

$$a_1=\frac{1}{2},\ b_1=0,\ a_2=-\frac{1}{8},\ b_2=\frac{a}{4},\ a_3=\frac{1-3a}{48},\ b_3=\frac{4b-a}{24},\ \ldots.$$

Следовательно,

$$x(t)=\frac{t-1}{2}-\frac{(t-1)^2}{8}+\frac{1-3a}{48}(t-1)^3+\ldots,$$

$$y(t)=1+\frac{a}{4}(t-1)^2+\frac{4b-a}{24}(y-1)^3+\ldots .$$ ►

Пример 2.6. $\frac{dx}{dt}=t+e^{x+y}$, $\frac{dy}{dt}=1+\sin xy$, $x(0)=y(0)=1$.

◄ Поскольку

$$x(t)=x(0)+x'(0)t+\frac{x''(0)}{2}t^2+\frac{x'''(0)}{6}t^3+\ldots,$$

$$y(t)=y(0)+y'(0)t+\frac{y''(0)}{2}t^2+\frac{y'''(0)}{6}t^3+\ldots,$$

то остается найти значения производных в точке $t=0$. Из уравнений системы имеем:

$$x'(0)=e^2,\ x''(t)=1+e^{x+y}(x'+y')=1+e^{x+y}(x'+1+\sin xy),$$

$$x''(0)=1+e^2(e^2+1+\sin 1),$$

$$y'(0)=1+\sin 1,\ y''(t)=\cos xy\cdot(x'y+xy'),\ y''(0)=\cos 1\cdot(e^2+1+\sin 1).$$

Далее,

$$x'''=e^{x+y}(x'+y')^2+e^{x+y}(x''+y''),$$

$$x'''(0)=e^2\left((e^2+1+\sin 1)^2+1+e^4+e^2+e^2\sin 1+e^2\cos 1+\cos 1+\cos 1\cdot\sin 1\right);$$

$$y'''(t)=-\sin xy\cdot(x'y+xy')^2+\cos xy\cdot(x''y+2x'y'+xy''),$$

$$y'''(0)=-\sin 1\cdot(e^2+1+\sin 1)^2+\cos 1\cdot\left(1+e^4+e^2+e^2\sin 1+2e^2(1+\sin 1)+\right.$$

$$\left.+\cos 1\cdot(e^2+1+\sin 1)\right).$$ ►

Пример 2.7. Оценить снизу радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение уравнения $y'=y^2-x$ с начальным условием $y(0)=1$.

◄ Используя уравнение и начальное условие, последовательно находим:

$$y'(0)=1,\ y''(x)=2yy'-1,\ y''(0)=2y(0)y'(0)-1=1,$$

$$y^{(n)}(x)=2(yy')^{(n-2)}=2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k y^{(k)}(y')^{(n-2-k)}=2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k y^{(k)}(x)y^{(n-1-k)}(x),$$

$$y^{(n)}(0)=2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k y^{(k)}(0)y^{(n-k-1)}(0),\ n\ge 3.$$

Покажем, что $\left|y^{(n)}(0)\right| \le n!$, $n \in \mathrm{N}$. С этой целью воспользуемся методом математической индукции. Имеем $|y'(0)| \le 1$, $|y''(0)| \le 1$. Предположив, что $\left|y^{(k)}(0)\right| \le k!$ для $k = 3,4,\ldots,(n-1)$, оценим

$$\left|y^{(n)}(0)\right| \le 2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} \left|y^{(k)}(0)\right|\left|y^{(n-k-1)}(0)\right| \le 2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} k!(n-k-1)! =$$
$$= 2(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1) = n!$$

Следовательно, согласно указанному методу, $\left|y^{(n)}(0)\right| \le n!$, $n \in \mathrm{N}$.

С учетом доказанного равенства для коэффициентов степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, представляющего решение в некоторой окрестности точки $x = 0$, справедлива оценка:

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\left|y^{(n)}(0)\right| \le 1. \tag{2.3}$$

Наконец, используя формулы Коши-Адамара $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, а также неравенство (2.3), для радиуса R сходимости степенного ряда получаем требуемую оценку: $R \ge 1$. ►

В следующих задачах найти линейно независимые решения каждого из данных уравнений в виде степенных рядов.

Пример 2.8. $y'' - x^2 y = 0$.

◄ Поскольку функции $p_0 = p_0(x) \equiv 1$, $p_1 = p_1(x) \equiv 0$, $p_2 = p_2(x) \equiv -x^2$ аналитичны $\forall x \in (-\infty,+\infty)$ и $p_0(x) \ne 0$, то согласно п. 2.1 существует аналитическое решение $y = y(x)$, $x \in (-\infty,+\infty)$. Ищем его в виде ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,. \tag{2.4}$$

Подставив $y(x)$ в уравнение, получим тождество по x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0\,.$$

Заменив во второй сумме индекс суммирования по формуле $n = n' - 4$ ($n' = 4,5,...$), имеем:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n'=4}^{\infty} a_{n'-4} x^{n'-2} = 0\,,$$

или

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=4}^{\infty} \left(n(n-1)a_n - a_{n-4}\right)x^{n-2} = 0\,.$$

Отсюда следует, что $a_2 = a_3 = 0$, $n(n-1)a_n - a_{n-4} = 0$. Из рекуррентной формулы $a_n = \dfrac{a_{n-4}}{n(n-1)}$ последовательно находим:

$$a_4 = \frac{a_0}{4\cdot 3}\,,\ a_5 = \frac{a_1}{5\cdot 4}\,,\ a_6 = 0\,,\ a_7 = 0\,,\ a_8 = \frac{a_4}{8\cdot 7} = \frac{a_0}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}\,,$$

$$a_9 = \frac{a_5}{9\cdot 8} = \frac{a_1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}\,,\ a_{10} = a_{11} = 0 \text{ и т. д.} \qquad (2.5)$$

Поскольку a_0, a_1 – произвольные постоянные, то можем положить $a_0 = 1, a_1 = 0$ или $a_0 = 0, a_1 = 1$. Тогда согласно (2.4), (2.5), имеем два частных решения:

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^8}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \frac{x^{12}}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \ldots,$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^5}{5\cdot 4} + \frac{x^9}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \frac{x^{13}}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \ldots.$$

Очевидно, полученные степенные ряды сходятся $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. Решения $y_1(x)$, $y_2(x)$линейно независимы, так как тождество $y_1(x) \equiv k y_2(x)$, $k = const$, невозможно (например, $y_1(0) = 0$, что противоречит определению $y_1(x)$). Таким образом, решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему и общее решение данного уравнения представляется в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),\ \forall x \in (-\infty, +\infty).\ ►$$

Пример 2.9. $(1-x^2)y''-4xy'-2y=0$.

◄ Поскольку функция

$$f=f(x,y,y')=\frac{4xy'+2y}{1-x^2},\ x\neq\pm1,$$

является аналитической по совокупности переменных x, y, y' ($x\neq\pm1$), то существуют аналитические решения данного уравнения при $x\neq\pm1$. Найдем эти решения сначала в некоторой окрестности нуля ($x=0$), т. е. будем искать их в виде

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots.$$

Подставив написанный ряд в данное уравнение, получим тождество по x:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-4\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv0.$$

Заменив в первой сумме индекс суммирования n на $n+2$, перепишем тождество в таком виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-4\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv0,$$

или

$$2a_2+6a_3x-2a_0-6a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-4na_n-2a_n\big)x^n\equiv0.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$a_2=a_0,\ a_3=a_1,\ a_{n+2}=a_n,\ n=2,3,\dots.$$

Пусть $a_0=1$, $a_1=0$, тогда $a_{2k}=1$, $a_{2k+1}=0$, $k=\overline{0,\infty}$. Следовательно,

$$y_1(x)=1+x^2+x^4+\dots=\frac{1}{1-x^2},\ |x|<1.$$

Аналогично, если $a_0=0$, $a_1=1$, то получим $a_{2k}=0$, $a_{2k+1}=1$. Поэтому

$$y_2(x)=x+x^3+x^5+\dots=\frac{x}{1-x^2},\ |x|<1.$$

Нетрудно видеть, что функции y_1, y_2 являются решениями данного уравнения и при $|x|>1$. ►

Пример 2.10. $(1-x)y''-2y'+y=0$.

◀ Как и в предыдущем примере, сначала ищем решения в некоторой окрестности точки $x=0$, т. е. в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Подставив ряд в уравнение, получаем тождество по x:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n+1)a_nx^{n-1}-2a_1+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv 0.$$

Заменив в первой сумме индекс суммирования n на $n+2$, а во второй – n на $n+1$, имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}x^n-2a_1+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv 0,$$

откуда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получаем:

$$2a_2-2a_1+a_0=0,\ (n+2)(n+1)(a_{n+2}-a_{n+1})+a_n=0,\ n\in N. \tag{2.6}$$

Пусть $a_1=0, a_0=1$. Тогда из уравнений (2.6) найдем:

$$a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=-\frac{1}{2},\ a_4=-\frac{11}{24},\ \ldots.$$

Следовательно,

$$y_1(x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{11}{24}x^4-\ldots.$$

Положив $a_0=0$, $a_1=1$, аналогично получаем:

$$a_2=1,\ a_3=\frac{5}{6},\ a_4=\frac{3}{4},\ \ldots,$$

поэтому

$$y_2(x)=x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{3}{4}x^4+\ldots.$$

Поскольку функция $x\mapsto\dfrac{2y'-y}{1-x}$ аналитична при $x\neq 1$, то полученные ряды сходятся только при $|x|<1$. Для получения частных решений при произвольных $x\neq 1$ произведем замену $x=t+x_0$, где $x_0\neq 1$, и будем искать частные решения в виде:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n,\ t=x-x_0.$$

После выкладок, аналогичных проделанным выше, приходим к таким частным решениям:

$$y_1(x)=1-\frac{(x-x_0)^2}{2(1-x_0)}-\frac{(x-x_0)^3}{2(1-x_0)^2}-\frac{11+x_0}{24(1-x_0)^3}(x-x_0)^4-\ldots,$$

$$y_2(x)=(1-x_0)(x-x_0)+(x-x_0)^2+\frac{5+x_0}{6(1-x_0)}(x-x_0)^3+\frac{3+x_0}{4(1-x_0)^2}(x-x_0)^4-\ldots$$

Поскольку радиус сходимости R полученных рядов определяется расстоянием от точки $t=0$ до особой точки функции $t\mapsto\dfrac{2y_t'-y(t)}{1-x_0-t}$, то $R=|1-x_0|$. Следовательно, функции y_1, y_2 определены при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<|1-x_0|$. Из этого неравенства следует, что функции y_1, y_2 описывают все частные решения данного уравнения при любых $x\neq 1$. ►

Замечание. В предыдущем примере нам удалось просуммировать степенные ряды, и, таким образом, найти аналитические функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения и при других возможных x.

Пример 2.11. $y''-xy'+xy=0$.

◄ Поскольку $p_0(x)\equiv 1\neq 0$, функции $p_1=p_1(x)=-x$, $p_2=p_2(x)=x$ – аналитические, то уравнение имеет частные решения, которые образуют фундаментальную систему и являются аналитическими функциями при всех $x\in(-\infty,+\infty)$. Степенной ряд

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,$$

в виде которого мы будем искать частные решения, сходится при всех x. Подставляя в данное уравнение ряд и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему относительно чисел a_n:

$$a_2=0,\ a_{n+2}=\frac{na_n-a_{n-1}}{(n+2)(n+1)},\ n=\overline{1,\infty}.$$

Отсюда, полагая $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, находим:

$$a_3 = -\frac{1}{6},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{1}{40},\ \ldots.$$

Аналогично, полагая $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, имеем:

$$a_3 = \frac{1}{6},\ a_4 = -\frac{1}{12},\ a_5 = \frac{1}{40},\ \ldots$$

Следовательно, частные решения представляются в виде:

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \ldots,\ y_2(x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \ldots . \blacktriangleright$$

Пример 2.12. $xy'' + y\ln(1-x) = 0$.

◄ Пользуемся разложением

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right),\ -1 \le x < 1$$

и ищем частные решения в виде

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots .$$

Относительно коэффициентов известным путем получаем систему уравнений:

$$2a_2 - a_0 = 0,\ 6a_3 - a_1 - \frac{1}{2}a_0 = 0,\ 12a_4 - \frac{1}{2}a_1 - a_2 - \frac{1}{3}a_0 = 0,\ \ldots,$$

из которой, полагая $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, получаем

$$a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{12},\ a_4 = \frac{5}{72},\ \ldots.$$

Следовательно, первое частное решение имеет вид:

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{72}x^4 + \ldots .$$

Для получения второго частного решения полагаем $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Тогда из этой же системы найдем

$$a_2 = 0,\ a_3 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{1}{24},\ \ldots.$$

Следовательно,

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots .$$

Радиус сходимости степенных рядов, представляющих $y_1(x)$, $y_2(x)$, равен единице. Для получения частных решений, пригодных $\forall x \in (-\infty, 1)$, сделаем замену $x = t - x_0$ ($x_0 > 0$). Тогда данное уравнение примет вид

$$(t - x_0)y'' + y\ln(1 + x_0 - t) = 0,$$

или

$$(t - x_0)y'' + y\ln(1 + x_0) + y\ln\left(1 - \frac{t}{1 + x_0}\right) = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение разложения

$$\ln\left(1 - \frac{t}{1 + x_0}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n(1 + x_0)^n}, \; y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем:

$$2b_2 x_0 - b_0 \ln(1 + x_0) = 0, \; 2b_2 - 6b_3 x_0 + b_1 \ln(1 + x_0) - \frac{b_0}{1 + x_0} = 0,$$

$$-12b_4 x_0 + 6b_3 + b_2 \ln(1 + x_0) - \frac{b_1}{1 + x_0} - \frac{b_0}{2(1 + x_0)^2} = 0, \dots \tag{2.7}$$

Пусть $b_0 = 1$, $b_1 = 0$. Тогда из полученной системы последовательно найдем

$$b_2 = \frac{\ln(1 + x_0)}{2x_0}, \; x_0 \neq 0, \quad b_3 = \frac{1}{6x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} - \frac{1}{1 + x_0}\right), \; x_0 \neq 0,$$

$$b_4 = \frac{1}{12x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0^2} - \frac{1}{x_0(1 + x_0)} + \frac{\ln^2(1 + x_0)}{2x_0} - \frac{1}{2(1 + x_0)^2}\right), \; x_0 \neq 0, \dots .$$

Пусть $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Тогда из системы (2.7) получим:

$$b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{\ln(1 + x_0)}{6x_0}, \; x_0 \neq 0, \quad b_4 = \frac{1}{12x_0}\left(\frac{\ln(1 + x_0)}{x_0} - \frac{1}{1 + x_0}\right), \; x_0 \neq 0.$$

Заметим, что из выражений для b_i, $i = 1,2,3,4$, предельным переходом $x_0 \to +0$ можно получить значения соответствующих a_i, $i = 1,2,3,4$, вычисленных в случае $x_0 = 0$.

Таким образом, частные решения при $x_0 > 0$ можно записать так:

$$y_1(x) = 1 + \frac{(x+x_0)^2}{2}\frac{\ln(1+x_0)}{x_0} + \frac{(x+x_0)^3}{6x_0}\left(\frac{\ln(1+x_0)}{x_0} - \frac{1}{1+x_0}\right) +$$

$$+\frac{(x+x_0)^4}{12x_0}\left(\frac{\ln(1+x_0)}{x_0^2} - \frac{1}{x_0(1+x_0)} + \frac{\ln^2(1+x_0)}{2x_0} - \frac{1}{2(1+x_0)^2}\right) + \ldots,$$

$$y_2(x) = x + x_0 + \frac{(x+x_0)^3}{6}\frac{\ln(1+x_0)}{x_0} + \frac{(x+x_0)^4}{12x_0}\left(\frac{\ln(1+x_0)}{x_0} - \frac{1}{1+x_0}\right) + \ldots . \ \blacktriangleright$$

Пример 2.13. $y''' - xy'' + (x-2)y' + y = 0$.

◀ Поскольку $p_0(x) \equiv 1 \neq 0$ и функции $p_1 = p_1(x) = -x$, $p_2 = p_2(x) = x - 2$, $p_3 = p_3(x) \equiv 1$ являются аналитическими при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то фундаментальная система состоит из аналитических на всей числовой оси функций. Следовательно, соответствующие им степенные ряды сходятся при всех x. Подставляя в данное уравнение ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и приравнивая коэффициенты при x^0, x, x^2, …, получаем:

$$6a_3 - 2a_1 + a_0 = 0, \quad (n+3)(n+2)a_{n+3} - (n+2)a_{n+1} + a_n = 0, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$. Тогда из последних уравнений найдем:

$$a_3 = -\frac{1}{6},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{1}{30},\ a_6 = \frac{1}{180},\ \ldots .$$

Следовательно, $y_1(x) = 1 - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{30} + \dfrac{x^6}{180} + \ldots$.

Пусть $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 1$. Тогда из указанных выше уравнений следует, что

$$a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = -\frac{1}{12},\ a_5 = \frac{1}{15},\ \ldots .$$

Поэтому второе частное решение имеет вид: $y_2(x) = x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{15} + \ldots$.

Наконец, если положим $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, то получим:

$$a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{4},\ a_5 = -\frac{1}{20},\ \ldots .$$

Следовательно, $y_3(x)=x^2+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{20}-\ldots$. ►

Пример 2.14. $xy''+2y'+xy=0$.

◄ Поскольку функция $p_0=p_0(x)=x$ имеет в точке $x=0$ нуль 1-го порядка, функция $p_1=p_1(x)=2$ нулей не имеет, а функция $p_2=p_2(x)=x$ имеет в этой точке нуль 1-го порядка, то, согласно п. 2.1, существует по крайней мере одно нетривиальное решение данного уравнения в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Подставив ряд в данное уравнение и приравняв коэффициенты при x^0, x, …, получим:

$$a_0r(r+1)=0,\qquad a_1(r+1)(r+2)=0,\qquad a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r+1)}.\tag{2.8}$$

Ясно, что нетривиальное решение возможно только при условии $a_0^2+a_1^2\neq 0$. Пусть $a_0=1$, $a_1=0$. Тогда из первого уравнения (2.8) следует, что $r(r+1)=0$. Взяв $r=0$, из третьего уравнения (2.8) последовательно находим:

$$a_2=-\frac{1}{2\cdot 3},\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\ a_5=0,\ a_6=-\frac{1}{6!},\ \ldots.$$

Следовательно, $y_1(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots=\frac{\sin x}{x}$, $x\neq 0$; $y_1(0)=1$.

Далее, положив $r=-1$ ($a_0=1$, $a_1=0$), из (2.8) получаем:

$$a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{4!},\ \ldots.$$

Поэтому второе частное решение имеет вид:

$$y_2(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)=\frac{\cos x}{x},\ x\neq 0.$$

Пусть $a_0=0$, $a_1=1$. Тогда из второго уравнения (2.8) следует, что $(r+1)(r+2)=0$. Полагая, например, $r=-1$, из третьего уравнения (2.8) последовательно находим:

$$a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5!},\ \ldots.$$

Таким образом, $y_3(x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$.

Если же положим $r = -2$, то аналогично будем иметь

$$y_4(x) = \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots\right) = \frac{\cos x}{x},\ x \neq 0.$$

Итак, если $x \neq 0$, то два линейно независимых частных решения представятся в виде: $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, $y_2(x) = \frac{\cos x}{x}$. ►

Примечание. Можно было бы обойтись рассмотрением случая $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

Пример 2.15. $9x^2 y'' - (x^2 - 2)y = 0$.

◄ Подставляя в уравнение ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$a_n\bigl(9(n+r)(n+r-1)+2\bigr) - a_{n-2} = 0,\ n = 2,3,\ldots, \tag{2.9}$$

$$a_0\left(9r^2 - 9r + 2\right) = 0,\ a_1\left(9r^2 + 9r + 2\right) = 0. \tag{2.10}$$

Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Тогда из первого уравнения (2.9) следует, что $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{2}{3}$. Подставив в (2.10) сначала $r = \frac{1}{3}$, а затем $r = \frac{2}{3}$, для каждого из этих двух случаев найдем:

$$a_2^{(1)} = \frac{1}{5\cdot 6},\ a_3^{(1)} = 0,\ a_4^{(1)} = \frac{1}{5\cdot 6\cdot 11\cdot 12},\ \ldots,$$

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{6\cdot 7},\ a_3^{(2)} = 0,\ a_4^{(2)} = \frac{1}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13},\ \ldots.$$

Таким образом,

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{x^2}{5\cdot 6} + \frac{x^4}{5\cdot 6\cdot 11\cdot 12} + \ldots\right),$$

$$y_2(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{x^2}{6\cdot 7} + \frac{x^4}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13} + \ldots\right),\ x \neq 0. \ ▶$$

Примечание. Рассмотрение случая $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ приводит к такому же результату.

Пример 2.16. $x^2 y'' + 2xy' - \left(x^2 + 2x + 2\right)y = 0$**.**

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем:

$\left(r^2 + r - 2\right)a_0 = 0$, $r(r+3)a_1 - 2a_0 = 0$,

$$\left((n+r)(n+r+1) - 2\right)a_n - a_{n-2} - a_{n-1} = 0,\ n = 2,3,\ldots \qquad (2.11)$$

Поскольку мы ищем нетривиальные решения, то $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$. Следовательно, определитель первых двух однородных уравнений должен быть равен нулю, т. е.

$$(r-1)r(r+2)(r+3) = 0.$$

Отсюда находим возможные варианты:

$r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $r_3 = -2$, $r_4 = -3$.

Пусть $r = 1$, $a_0 = 1$, тогда из указанных уравнений получаем $a_1 = \frac{1}{2}$, а из третьего уравнения в (2.11) последовательно находим

$$a_2 = \frac{1}{5},\ a_3 = \frac{1}{20},\ a_3 = \frac{3}{280},\ \ldots$$

Первое частное решение имеет вид $y_1(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{20} + \frac{3x^5}{280} + \ldots$.

Пусть $r = -2$, $a_0 = 1$, тогда аналогичным образом можем получить

$$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку при отыскании a_3 приходим к неопределенности $\frac{0}{0}$, то поступаем следующим образом. Считая, что $r \neq -2$, из уравнений (2.11) находим:

$$a_1=\frac{2}{r^2+3r},\ a_2=\frac{r^2+3r+4}{(r^2+3r)(r^2+5r+4)},\ a_4=\frac{4(r+2)}{(r^2+3r)(r^2+5r+4)(r+5)}.$$

Отсюда, устремив $r\to-2$, получим: $a_1=-1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=0$.

Коэффициенты a_4, a_5 и т. д. находим обычным способом. Таким образом, второе частное решение запишется в виде:

$$y_2(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{40}+\frac{7x^4}{120}+\ldots.$$

Рассмотрение случаев $r=0$ и $r=-3$ приводит к таким же результатам. ►

Пример 2.17. $xy''+y'-xy=0$.

◄ Подставив ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ в уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_0r^2=0,\ a_1(1+r)^2=0,\ a_n=\frac{a_{n-2}}{(n+r)^2},\ n=2,3,\ldots.$$

Пусть $r=0$, тогда $a_1=0$, а коэффициент a_0 можем приравнять единице. Из третьего соотношения последовательно находим:

$$a_2=\frac{1}{4},\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{2^2\cdot4^2},\ \ldots.$$

Следовательно, $y_1(x)=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\ldots.$ ►

В следующих задачах найти общее решение уравнений.

Пример 2.18. $x^2y''+xy'+(1-x)y=0$.

◄ Частное решение ищем в виде ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$. Подставив ряд в уравнение, получим тождество по x, из которого известным способом находим:

$$a_0(r^2+1)=0,\ a_n=\frac{a_{n-1}}{1+(n+r)^2},\ n\in N.$$

Поскольку $a_0\neq0$ (при $a_0=0$ получается тривиальное решение), то из первого уравнения следует, что $r=\pm i$. Пусть $r=i$, $a_0=1$, тогда из второго уравнения последовательно получаем:

$$a_1=\frac{1}{1+2i},\ a_2=\frac{1}{(1+2i)(1+i)},\ a_3=\frac{1}{12(1+2i)(1+i)(3+2i)},\ \ldots.$$

Таким образом, частные решения имеют вид:

$$y_1(x)=x^i\left(1+\frac{x}{1+2i}+\frac{x^2}{4(1+2i)(1+i)}+\frac{x^3}{12(1+2i)(1+i)(3+2i)}+\ldots\right),$$

$$y_2(x)=x^{-i}\left(1+\frac{x}{1-2i}+\frac{x^2}{4(1-2i)(1-i)}+\frac{x^3}{12(1-2i)(1-i)(3-2i)}+\ldots\right).$$

Общее же решение

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1(u+iv)+C_2(u-iv)=au+bv,$$

где $a=C_1+C_2$, $b=i(C_1-C_2)$. Функции u, v легко получить из представления $y_1(x)$, если воспользоваться формулами Эйлера. Имеем:

$$y_1(x)=u(x)+iv(x)=e^{i\ln x}\left(1+\frac{x}{5}(1-2i)-\frac{x^2}{40}(1+3i)+\frac{x^3}{520}\left(i-\frac{3}{2}\right)+\ldots\right)=$$

$$=(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x))\left(1+\frac{x}{5}-\frac{x^2}{40}-\frac{3x^3}{1040}+\ldots+i\left(-\frac{2x}{5}-\frac{3x^2}{40}+\frac{x^3}{520}+\ldots\right)\right)=$$

$$=\left(1+\frac{x}{5}-\frac{x^2}{40}-\frac{3x^3}{1040}+\ldots\right)\cos(\ln x)+\left(\frac{2x}{5}+\frac{3x^2}{40}-\frac{x^3}{520}+\ldots\right)\sin(\ln x)+$$

$$+i\left(\left(1+\frac{x}{5}-\frac{x^2}{40}-\frac{3x^3}{1040}+\ldots\right)\sin(\ln x)-\left(\frac{2x}{5}+\frac{3x^2}{40}-\frac{x^3}{520}+\ldots\right)\cos(\ln x)\right).$$

Следовательно,

$$u(x)=\alpha(x)\cos(\ln x)+\beta(x)\sin(\ln x),\ v(x)=\alpha(x)\sin(\ln x)+\beta(x)\cos(\ln x),$$

$$\alpha(x)=1+\frac{x}{5}-\frac{x^2}{40}-\frac{3x^3}{1040}+\ldots,\ \beta(x)=\frac{2x}{5}+\frac{3x^2}{40}-\frac{x^3}{520}+\ldots.$$ ►

Пример 2.19. $x^2y''+(3x-1)y'+y=0$.

◄ Будем искать частное решение в виде

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

Тогда для коэффициентов a_n, способом, изложенным в примере 2.3, получим:

$$a_2 = \frac{(1-3x_0)a_1 - a_0}{2x_0^2},\ a_3 = \frac{1}{6x_0^4}\left(a_1\left(1-8x_0+11x_0^2\right) - a_0(1-5x_0)\right),\ \ldots$$

Коэффициенты a_0, a_1 произвольны, $x_0 \neq 0$, то решение ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)x^{\alpha}.$$

Подставив ряд в уравнение и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях x, найдем

$$\alpha a_0 = 0,\ a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+2)+1}{\alpha+n+1}a_n \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{2.12}$$

В силу того, что мы ищем нетривиальное решение, следует положить $\alpha = 0$. Пусть $a_0 = 1$, тогда из (1) последовательно определяем

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2!,\ a_3 = 3!,\ \ldots,\ a_n = n!,\ \ldots.$$

Следовательно, $y(x) = 1 + 1!x + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots$.

Очевидно, что этот ряд сходится лишь в точке $x = 0$. ►

2.3 Разложения решения по степеням малого параметра

Разложение решения по степеням малого параметра – один из наиболее употребительных асимптотических методов.

Следствие теоремы 1.2. Пусть при $(t,x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$ выполнены условия теоремы 1.2, и при $\mu = 0$, $t_1 \le t \le t_2$ решение задачи (1.1) проходит в области D; $t_0 \in [t_1, t_2]$. Тогда решение $x(t,\mu)$ задачи (1.1) при $t_1 \le t \le t_2$ разлагается по формуле Тейлора по степеням параметра μ до μ^m включительно:

$$x(t,\mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \ldots + \mu^m v_m(t) + o(\mu^m). \tag{2.13}$$

Здесь $x(t,\mu)$ и $v_i(t)$ – n-мерные вектор-функции, $v_0(t) \equiv x(t,0)$ есть решение системы (1.1) при $\mu = 0$, оно считается известным. Чтобы найти $v_1(t),\ldots,v_m(t)$, надо подставить разложение (2.13) в систему (1.1) и начальные условия, и разложить правые части по степеням μ до μ^m включительно. Далее надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получается для $v_1,...,v_m$ система дифференциальных уравнений с начальными условиями. Последовательно решая уравнения системы и пользуясь начальными условиями, находим $v_1(t),...,v_m(t)$.

2.4 Примеры разложения решения по степеням малого параметра

Пример 2.20. Найти разложение решения задачи

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} - 2\mu t^2,\ x(1) = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{8} \tag{2.14}$$

по степеням параметра μ до μ^2 включительно.

◀Правая часть уравнения в области $x > 0$ имеет производные любого порядка по x, μ. Условия теоремы 1.2 выполнены для любого m, пока решение задачи (2.14) с $\mu = 0$ проходит в области $x > 0$. При $\mu = 0$ задача (2.14) принимает вид $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$, $x(1) = 1$, и имеет решение $x(t) = t$, оно проходит в области $x > 0$ при $t > 0$. Поэтому $v_0(t) = t$ ($t > 0$). Разложение $x = t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + o(\mu^2)$ подставляем в уравнение и начальные условия (2.14), члены порядка $o(\mu^2)$ не пишем.

$$1 + \mu v_1' + \mu^2 v_2' + ... = \frac{t}{(t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + ...)} - 2\mu t^2, \tag{2.15}$$

$$1 + \mu v_1(1) + \mu^2 v_2(1) + ... = 1 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{8}. \tag{2.16}$$

Разлагаем дробь в (2.15) по степеням μ, члены с μ^k, $k > 2$, не пишем.

$$\frac{t}{t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + ...} = \frac{1}{1 + \mu t^{-1} v_1 + \mu^2 t^{-1} v_2 + ...} =$$

$$= 1 - \left(\frac{\mu}{t} v_1 + \frac{\mu^2}{t} v_2 + ...\right) + \left(\frac{\mu}{t} v_1 + ...\right)^2 - ... = 1 - \frac{\mu}{t} v_1 - \frac{\mu^2 t}{} v_2 + \frac{\mu^2}{t^2} v_1^2 + ...$$

Подставляем это в (2.15) и приравниваем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях параметра μ:

при μ^1: $v_1' = -\dfrac{v_1}{t} - 2t^2$, $v_1(1) = -\dfrac{1}{2}$, (2.17)

при μ^2: $v_2' = -\dfrac{v_2}{t} + \dfrac{v_1^2}{t^2}$, $v_2(1) = \dfrac{1}{8}$. (2.18)

Здесь начальные условия получены из (2.16). Все дифференциальные уравнения для $v_1,...,v_m$ всегда линейные. Из (2.17) получаем $v_1 = -\dfrac{t^3}{2}$. Подставляя это в (2.18), находим $v_2 = \dfrac{1}{12t} + \dfrac{t^5}{24}$. Итак,

$$x(t) = t - \mu\frac{t^3}{2} + \mu^2\left(\frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}\right) + o(\mu^2). \tag{2.19}$$

Так как условия теоремы 1.2 выполнены для любого $m \geq 2$, то следующий член разложения имеет вид $\mu^3 v_3(t)$ и, не находя v_3, в (2.19) вместо $o(\mu^2)$ можно написать $O(\mu^3)$. ►

Пример 2.21. $y' = 4\mu x - y^2$, $y(1) = 1$.

◄ Поскольку правая часть аналитична по y, μ, то, согласно п. 2.3 решение ищем в виде

$$y(x,\mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + ...$$

Подставив ряд в уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем

$$y_0' = -y_0^2,\ y_1' = 4x - 2y_0 y_1,\ y_2' = -y_1^2 - 2y_0 y_2,\ \ldots \tag{2.20}$$

Приняв во внимание начальное условие, имеем:

$$y_0(1) = 1,\ y_1(1) = 0,\ y_2(1) = 0,\ \ldots \tag{2.21}$$

Теперь последовательно решаем рекуррентную систему (2.20), используя начальные условия (2.21):

$$y_0(x) = \frac{1}{x},\ y_1(x) = x^2 - \frac{1}{x^2},\ y_2(x) = -\frac{x^5}{7} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{x^3} - \frac{32}{21x^2},\ \ldots.$$

Итак, $y(x)=\frac{1}{x}+\mu\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\mu^2\left(-\frac{x^5}{7}+\frac{2x}{3}-\frac{32}{21x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+\ldots$ есть решение поставленной задачи. ►

Пример 2.22. $xy'=\mu x^2+\ln y$, $y(1)=1$.

Принимая во внимание аналитичность правой части как функции переменных y, μ при $y>0$ и пользуясь методом малого параметра, решение задачи ищем в виде

$$y(x,\mu)=y_0(x)+\mu y_1(x)+\mu^2 y_2(x)+\ldots \tag{2.22}$$

Далее, учитывая соотношения: $y(x,0)=y_0(x)$,

$$\left.\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=y_1(x),\ \left.\frac{\partial y^2(x,\mu)}{\partial\mu^2}\right|_{\mu=0}=2y_2(x),\ \ldots,$$

$$y'_x(x,0)=y'_0(x),\ \left.\frac{\partial}{\partial\mu}y'_x(x,\mu)\right|_{\mu=0}=y'_1(x),\ \left.\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}y'_x(x,\mu)\right|_{\mu=0}=2y'_2(x),\ \ldots,$$

из данного уравнения дифференцированием по параметру μ находим:

$$xy'_0=\ln y_0,\ xy'_1=x^2+\frac{y_1}{y_0},\ xy'_2=\frac{y_2}{y_0}-\frac{y_1^2}{2y_0^2},\ \ldots \tag{2.23}$$

Исходя из начального условия $y(1)=1$, из (2.22) получаем начальные условия для функций y_i, $i=\overline{0,\infty}$:

$$y_0(1)=1,\ y_1(1)=y_2(1)=\ldots=0. \tag{2.24}$$

Последовательно интегрируя уравнение (2.23) и пользуясь условиями (2.24), находим:

$$y_0=1,\ y_1=x^2-x,\ y_2=\frac{x}{6}(1-x)^3,\ \ldots \tag{2.25}$$

Наконец, подставляя (2.25) в (2.22), приходим к решению поставленной задачи:

$$y(x,\mu)=1+\mu\left(x^2-x\right)+\mu^2\frac{x}{6}\left(1-x^3\right)+\ldots$$ ►

Пример 2.23. $y'=e^{y-x}+\mu y$, $y(0)=-\mu$.

◄ Как и в предыдущем примере, имеем:

$$y(x,\mu)=y_0(x)+\mu y_1(x)+\mu^2 y_2(x)+\ldots,$$

где

$$y_0(x)=y(x,0),\ y_1(x)=\left.\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0},\ y_2(x)=\left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial\mu^2}\right|_{\mu=0},\ \ldots,$$

$$y_0'(x)=y_x'(x,0),\ y_1'(x)=\left.\frac{\partial}{\partial\mu}y_x'(x,\mu)\right|_{\mu=0},\ y_2'(x)=\left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}y_x'\right|_{\mu=0},\ \ldots$$

Используя эти соотношения, из данного уравнения находим:

$$y_0'=e^{y_0-x},\ y_1'=e^{y_0-x}y_1+y_0,\ y_2'=e^{y_0-x}y_2+y_1+\frac{1}{2}e^{y_0-x}y_1^2,\ \ldots \tag{2.26}$$

При этом начальные условия имеют вид:

$$y_0(0)=y_2(0)=\ldots=0,\ y_1(0)=-1. \tag{2.27}$$

Из первого уравнения (2.26) следует, что $e^{-y_0}=e^{-x}+C_1$. В силу первого начального условия (2.27) $C_1=0$, поэтому $y_0=x$. Далее из второго уравнения (2.26) нетрудно найти $y_1=C_2e^x-x-1$. Постоянную C_2 определяем, пользуясь последним условием (2.27), что дает $C_2=0$. Следовательно, $y_1=-x-1$. Аналогично решаем задачу:

$$y_2'=y_2-x-1+\frac{(x+1)^2}{2},\ y_2(0)=0.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$y(x,\mu)=x-\mu(x+1)+\frac{\mu^2}{2}\left(e^x-x^2-2x-1\right)+\ldots.\ ►$$

Пример 2.24. $\begin{cases}\dot{x}=x+\mu\left(x^2-y^2\right), & x(0)=1-\mu,\\ \dot{y}=y-\mu\left(x^2+y^2\right), & y(0)=\mu^2.\end{cases}$

◄ Подставляя в данные уравнения ряды

$$\begin{cases}x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2 x_2(t)+\ldots,\\ y(t,\mu)=y_0(t)+\mu y_1(t)+\mu^2 y_2(t)+\ldots\end{cases} \tag{2.28}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\dot{x}_0=x_0, \qquad \dot{y}_0=y_0,$$

$x_0(0)=1,$ $\qquad$ $y_0(0)=0,$

$\dot{x}_1 = x_1 + x_0^2 - y_0^2,$ $\qquad$ $\dot{y}_1 = y_1 - x_0^2 - y_0^2,$

$x_1(0)=-1,$ $\qquad$ $y_1(0)=0,$

$\dot{x}_2 = x_2 + 2x_0x_1 - 2y_0y_1,$ $\qquad$ $\dot{y}_2 = y_2 - 2x_0x_1 - 2y_0y_1,$

$x_2(0)=0,$ $\qquad$ $y_2(0)=1.$

Отсюда интегрированием последовательно находим:

$x_0 = e^t,$ $\qquad$ $y_0 = 0;$

$x_1 = e^{2t} - 2e^t,$ $\qquad$ $y_1 = e^t - e^{2t};$

$x_2 = e^{3t} - 4e^{2t} + 3e^t,$ $\qquad$ $y_2 = 4e^{2t} - e^{3t} - 2e^t.$

Таким образом, ряды (2.28) можно записать в виде:

$$x = e^t + \mu\left(e^{2t} - 2e^t\right) + \mu^2\left(e^{3t} - 4e^{2t} + 3e^t\right) + \ldots,$$

$$y = \mu\left(e^t - e^{2t}\right) + \mu^2\left(4e^{2t} - e^{3t} - 2e^t\right) + \ldots . \ \blacktriangleright$$

§ 3 ОТЫСКАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ

3.1 Условия существования периодических решений

Нижеследующие лемма 3.2 и теорема 3.1 дают условия существования периодических решений соответственно для линейной системы с периодической правой частью и для нелинейной системы, близкой к линейной, и указывают методы отыскания таких решений.

Лемма 3.1. Пусть при $0 \le t \le p$ вектор-функция $x(t)$ - решение уравнения $x' = f(t,x)$, где вектор-функция f и все $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны и $f(t+p,x) \equiv f(t,x)$. Если $x(p) = x(0)$, то решение $x(t)$ продолжается на интервал $(-\infty,\infty)$ с периодом p.

Доказательство. Так как

$$x'_{лев}(p) = f(p,x(p)) = f(0,x(0)) = x'_{прав}(0),$$

то продолженная с периодом p функция $x(t) \in C^1$. Она всюду удовлетворяет данному уравнению, ибо для любого $k \in Z$ имеем

$$x'(t+kp) = x'(t) = f(t,x(t)) = f(t+kp, x(t+kp)).\blacksquare$$

Лемма 3.2. Если для всех собственных значений матрицы A имеем

$$\lambda \ne \frac{2\pi k}{p} i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.1}$$

то система $x' = Ax + f(t)$ для каждой непрерывной функции $f(t)$ с периодом p имеет (и только одно) решение с периодом p.

Условие (3.1) называется условием отсутствия резонанса.

Доказательство. Пусть $v(t)$ – частное решение данной системы с $v(0) = 0$. В силу теоремы (о сумме решений) и следствия (о фундаментальной матрице системы) общее решение имеет вид $x = e^{tA}b + v(t)$, где b – произвольный вектор из R^n. Чтобы это решение имело период p, по лемме 3.1 надо, чтобы $x(p) = x(0)$. То есть

$$e^{pA}b + v(p) = b + v(0),\ (e^{pA} - E)b = -v(p).$$

Это – линейная алгебраическая система относительно неизвестных координат вектора b. Для существования единственного решения достаточно, чтобы $\det(e^{pA} - 1 \cdot E) \neq 0$, то есть чтобы матрица e^{pA} не имела собственных значений, равных 1.

Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы A, то e^{pA} имеет собственные значения $e^{p\lambda_i}$, $i = 1,...,n$. Для $\lambda = \alpha + \beta i$ имеем $e^{p\lambda} = e^{p\alpha}(\cos p\beta + i \sin p\beta)$. Это число равно 1 только в случае $\alpha = 0$, $p\beta = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$. Поэтому при условии (3.1 имеем $e^{p\lambda} \neq 1$. ■

Теорема 3.1. Пусть функции $f(t)$, $g(t,x,\mu)$ непрерывны при $x \in R^n$, $(t,x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$, имеют период p по t; $g \in C^m$ по x, μ, где $m \geq 1$. Пусть выполнено условие (3.1) и решение $x^0(t)$ с периодом p уравнения $x' = Ax + f(t)$ содержится в области D. Тогда при всех достаточно малых $|\mu|$ система

$$x' = Ax + f(t) + \mu g(t,x,\mu) \tag{3.2}$$

имеет решение периода p по t, стремящееся к $x^0(t)$ при $\mu \to 0$. Такое решение единственно и принадлежит классу C^m по μ.

Доказательство. Пусть $x(t;b,\mu)$ – решение системы (3.2) с начальным условием $x(0;b,\mu) = b$. По лемме 3.1 оно будет иметь период p, если

$$x(p;b,\mu) - b = 0. \tag{3.3}$$

Докажем, что при малых μ существует $b \in R^n$, удовлетворяющее уравнению (3.3). Функция $x(p;b,\mu) \in C^m$ по b, μ в силу теоремы 3.2. При $\mu = 0$ уравнение (3.2) линейное, как в лемме 3.2, уравнение (3.3) принимает вид

$$(e^{pA} - E)b = -v(p),\ \det(e^{pA} - 1 \cdot E) \neq 0 \tag{3.4}$$

и имеет единственное решение b. Далее, якобиан левой части равенства (3.3) по координатам $b_1, ..., b_n$ вектора b при $\mu = 0$ совпадает с детерминантом (3.4), значит, не равен нулю. Тогда по теореме о неявных функциях уравнение (3.3) при достаточно малых μ имеет решение $b = b(\mu)$, стремящееся к b^0 при $\mu \to 0$, такое решение единственно и $b(\mu) \in C^m$.

Тогда решение $x(t; b(\mu), \mu) \in C^m$ по μ, и в силу (3.3) и леммы 3.1 имеет период p. ■

Следствие. При условиях теоремы 3.1 названное периодическое решение имеет разложение по степеням μ вида (2.13) с функциями $v_i(t)$, имеющими период p.

Доказательство. Решение $x(t; b(\mu), \mu) \in C^m$ по μ, поэтому имеет разложение вида (2.13). Следовательно,

$$x(t+p, b(\mu), \mu) - x(t, b(\mu), \mu) = d_0 + d_1\mu + \ldots + d_m\mu^m + o(\mu^m), \tag{3.5}$$

где $d_i = v_i(t+p) - v_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,m$. В силу периодичности решения левая часть в (3.5) равна нулю, поэтому все $d_i = 0$, то есть $v_i(t+p) \equiv v_i(t)$. ■

Замечание. Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t) + \mu g(t, y, \mu) \tag{3.6}$$

с постоянными коэффициентами a_i и непрерывными функциями f, g периода p по t и $g \in C^m$ по y, μ, а корни λ характеристического уравнения удовлетворяют условию (3.1). Тогда для отыскания решения периода p не нужно переходить от уравнения (3.6) к системе, можно сразу отыскать решение в виде (2.13), где теперь $v_i(t)$ – скалярные функции с периодом p.

К системе вида (3.2) сводится задача о вынужденных колебаниях автономной системы вблизи положения равновесия, вызываемых периодическим малым внешним воздействием. Рассмотрим систему

$$x' = F(x) + \mu f(t), \; f(t+p) \equiv f(t), \; x = (x_1, \ldots, x_n)^T. \tag{3.7}$$

Пусть x^0 – положение равновесия при $\mu = 0$, то есть $F(x^0) = 0$; μ – малое число, функция $f(t)$ непрерывна, $F(x) \in C^{m+1}$ $(m \geq 1)$ в окрестности точки

x^0. Замена $x = x^0 + \mu y$ дает $\mu y' = F(x^0 + \mu y) + \mu f(t)$. Так как $F(x^0) = 0$, то по формуле Тейлора

$$F(x^0 + \mu y) = \mu A y + r(\mu, y), \; A = \left(\frac{\partial F_i(x^0)}{\partial x_j^0} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Остаточный член $r \in C^{m+1}$ (ибо другие члены в равенстве принадлежат C^{m+1}), $r = \mu^2 g(y, \mu)$. Получаем систему вида (3.2)

$$y' = Ay + f(t) + \mu g(y, \mu), \; g \in C^m. \tag{3.8}$$

Если собственные значения матрицы A удовлетворяют условию (3.1) (нет резонанса), то по теореме 3.1 система (3.7) при достаточно малых $|\mu|$ имеет решение с периодом p.

3.2 Примеры нахождения периодических решений

Пример 3.1. Найти с точностью $o(\mu^2)$ периодическое решение уравнения $x'' + 3x = 2\sin t + \mu x^2$.

◄ Здесь $p = 2\pi$, $\lambda^2 + 3 = 0$, $\lambda = \pm i\sqrt{3} \neq \frac{2\pi k i}{p} = ki$ ($k \in Z$), условие (3.1) выполнено. Ищем периодическое решение в виде $x = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \dots$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем систему уравнений

$$v_0'' + 3v_0 = 2\sin t, \; v_1'' + 3v_1 = v_0^2, \; v_2'' + 3v_2 = 2v_0 v_1, \dots$$

Надо найти решения v_0, v_1, v_2 с периодом 2π. Для каждого из этих уравнений надо найти лишь частное решение (методом неопределенных коэффициентов), так как по теореме 3.1 при выполнении условия (3.1) решение с периодом p единственно. Последовательно находим $v_0 = \sin t$; $v_1'' + 3v_1 = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$, $v_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t$. Подставляя v_0 и v_1 в уравнение для v_2, имеем

$$v_2'' + 3v_2 = 2\sin t\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) = -\frac{1}{6}\sin t + \frac{1}{2}\sin 3t.$$

Отсюда находим

$$v_2 = -\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t.$$

Следовательно,

$$x = \sin t + \mu\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) + \mu^2\left(-\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t\right) + o(\mu).$$

Как в примере 2.20, вместо $o(\mu^2)$ можно написать $O(\mu^3)$. ►

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение

$$x'' + 2x' + x^2 - 1 = \mu\sin t \ \ (x \in R^1). \tag{3.9}$$

◄ При $\mu = 0$ положения равновесия $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Найдем периодическое решение, близкое к $x = 1$. Замена $x = 1 + \mu y$ дает

$$y'' + 2y' + 2y = \sin t - \mu y^2. \tag{3.10}$$

Здесь $p = 2\pi$, $\lambda = -1 \pm i \neq \frac{2\pi k i}{p}$ ($k \in Z$), условие (3.1) выполнено. Поэтому при малых μ уравнение (3.10) имеет решение периода 2π и вида $y = v_0(t) + \mu v_1(t) + \ldots$, где все $v_i(t)$ имеют период 2π. Подставляя это в (3.10), получаем, как в примере 3.1,

$$v_0'' + 2v_0' + 2v_0 = \sin t,\ v_1'' + 2v_1' + 2v_1 = -v_0^2,\ \ldots$$

Отсюда находим $v_0 = a\cos t + b\sin t$, $a = -\frac{2}{5}$; $b = \frac{1}{5}$; $v_0^2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{50}\cos 2t - \frac{2}{25}\sin 2t$, $v_1 = h + c\cos 2t + d\sin 2t$, $h = -\frac{1}{20}$, $c = -\frac{1}{100}$, $d = -\frac{1}{50}$ и т.д. Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= 1 + \mu y = \\ &= 1 + \mu\left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right) + \mu^2\left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{100}\cos 2t - \frac{1}{50}\sin 2t\right) + O(\mu^3). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Уравнение (3.9) при малых μ имеет и другое решение с периодом 2π. Оно близко к неустойчивому положению равновесия $x_2 = -1$ и отыскивается аналогичным способом. Можно доказать, что оно неустойчиво. ►

В следующих задачах с помощью малого параметра найти приближенно периодические решения с периодом, равным периоду правой части уравнения.

Пример 3.3. $\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu\dot{x}^2$.

◄ Согласно методу малого параметра, периодическое решение ищем в виде:

$$x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots, \tag{3.12}$$

где x_i $(i = \overline{0,\infty})$ – 2π-периодические функции. Подставляя разложение (3.11) в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\ddot{x}_0 + 3x_0 = 2\sin t,\ \ \ddot{x}_1 + 3x_1 = \dot{x}_0^2,\ \ \ddot{x}_2 + 3x_2 = 2\dot{x}_0\dot{x}_1,\ \ldots \tag{3.13}$$

Первое уравнение имеет общее решение

$$x_0(t) = C_{10}\sin\sqrt{3}t + C_{20}\cos\sqrt{3}t + \sin t.$$

Поскольку требуется найти 2π-периодическое решение, то в последнем равенстве следует положить $C_{10} = C_{20} = 0$. Следовательно,

$$x_0(t) = \sin t.$$

Принимая во внимание это значение, из второго уравнения системы (3.12) находим

$$x_1(t) = C_{11}\sin\sqrt{3}t + C_{21}\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Отсюда в силу требования 2π-периодичности функции x_1 имеем:

$$x_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Аналогичным образом из третьего уравнения системы (3.13) получаем

$$x_2(t) = -\frac{1}{6}\sin 3t + \frac{1}{2}\sin t.$$

Подставляя x_0, x_1, x_2, … в (3.12), приходим к искомому решению:

$$x(t,\mu)=\sin t+\mu\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)+\mu^2\left(-\frac{1}{6}\sin 3t+\frac{1}{2}\sin t\right)+\ldots \ ►$$

Пример 3.4. $\ddot{x}+3x+x^3=2\mu\cos t$.

◄ Подставляя ряд

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2 x_2(t)+\ldots$$

в данное уравнение, известным способом получаем систему уравнений:

$$\ddot{x}_0+3x_0+x_0^3=0,$$

$$\ddot{x}_1+3x_1+3x_0^2x_1=2\cos t,$$

$$\ddot{x}_2+3x_2+3x_0x_1^2+3x_0^2x_2=0,$$

$$\ddot{x}_3+3x_3+x_1^3+3x_0^2x_3=0,\ \ldots,$$

из которой последовательно находим 2π-периодические решения:

$$x_0(t)\equiv 0,\ x_1(t)=\cos t,\ x_2(t)\equiv 0,\ x_3(t)=-\frac{3}{8}\cos t+\frac{1}{24}\cos 3t.$$

Следовательно, $x(t,\mu)=\mu\cos t+\dfrac{\mu^3}{8}\left(\dfrac{1}{3}\cos 3t-3\cos t\right)+\ldots$ ►

Примечание. Нетривиальные решения уравнения $\ddot{x}_0+3x_0+x_0^3=0$ выражаются через эллиптические функции, не являющиеся 2π-периодическими.

Пример 3.5. $\ddot{x}+\sin x=\mu\sin 2t$.

◄ Как и в предыдущем примере, степенной ряд

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2 x_2(t)+\ldots$$

подставляем в данное уравнение и получаем тождество по параметру μ, из которого следует система уравнений:

$$\ddot{x}_0+\sin x_0=0,$$

$$\ddot{x}_1+x_1\cos x_0=\sin 2t,$$

$$\ddot{x}_2+x_2\cos x_0-\frac{x_1^2}{2}\sin x_0=0, \tag{3.14}$$

$$\ddot{x}_3+\left(x_3-\frac{x_1^3}{6}\right)\cos x_0-x_1x_2\sin x_0=0,\ \ldots.$$

Первое уравнение в (3.14) имеет серию π-периодических решений:

$$x_{0k} = k\pi\,,\ k \in Z\,.$$

Второе уравнение дает

$$x_{1k} = \frac{\sin 2t}{(-1)^k - 4},$$

а третье –

$$x_2 = 0\,.$$

Из четвертого, имеющего вид

$$\ddot{x}_3 + (-1)^k x_3 = \frac{(-1)^k}{6}\frac{\sin^3 2t}{\left((-1)^k - 4\right)^3},$$

следует π-периодическое решение

$$x_{3k} = \frac{(-1)^k}{24\left((-1)^k - 4\right)^3}\left(\frac{\sin 6t}{36 - (-1)^k} - \frac{4 + (-1)^k}{5}\sin 2t\right).$$

Таким образом,

$$x(t,\mu) = k\pi + \frac{\mu \sin 2t}{(-1)^k - 4} + \frac{(-1)^k \mu^3}{24\left((-1)^k - 4\right)^3}\left(\frac{\sin 6t}{36 - (-1)^k} - \frac{4 + (-1)^k}{5}\sin 2t\right) + \ldots \blacktriangleright$$

Примечание. Для полученной системы (3.14) удобно пользоваться разложением

$$\sin(x_0 + u) = \sin x_0 \cos u + \sin u \cos x_0\,,$$

где $u = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots$, а также

$$\cos u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}u^4 - \ldots\ ,\ \sin u = u - \frac{1}{3!}u^3 + \ldots$$

В результате имеем

$$\sin(x_0 + u) = A\sin x_0 + B\cos x_0\,,$$

$$A = 1 - \frac{\mu^2}{2}x_1^2 - \mu^3 x_1 x_2 + \ldots,\ B = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots - \frac{\mu^3}{6}x_1^3 + \ldots.$$

Пример 3.6. $\ddot{x} + x = \sin 3t - \sin 2t + \mu x^2$.

◀ Представляя решение в виде ряда $x = x_0 + \mu x_1 + \ldots$ относительно функций x_0, x_1, …, известным способом получаем систему уравнений:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = \sin 3t - \sin 2t,$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = x_0^2, \qquad (3.15)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = 2x_0 x_1, \ \ldots.$$

Из первого уравнения системы (3.15) имеем:

$$x_0 = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t - \frac{1}{8}\sin 3t, \ \ldots, \qquad (3.16)$$

где A, B – постоянные интегрирования. Эти постоянные мы определим, исходя из требования, чтобы в правой части второго уравнения системы (3.15) отсутствовали так называемые резонирующие члены. В данном случае резонирующими членами будут функции $t \mapsto \sin t$, $\cos t$, поэтому в правой части

$$\left(A\cos t + B\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t - \frac{1}{8}\sin 3t\right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2 - B^2}{2}\cos 2t +$$
$$+ \frac{1}{18} - \frac{\cos 4t}{18} + \frac{1}{128} - \frac{\cos 6t}{128} + AB\sin 2t + \frac{A}{3}(\sin 3t + \sin t) -$$
$$- \frac{A}{8}(\sin 4t + \sin 2t) - \frac{B}{8}(\cos 2t - \cos 4t) - \frac{1}{24}(\cos t - \cos 5t) + \frac{B}{3}(\cos t - \cos 3t).$$

следует положить $A = 0$, $B = \frac{1}{8}$. Тогда из (3.16) получим

$$x_0(t) = \frac{1}{8}(\sin t - \sin 3t) + \frac{1}{3}\sin 2t.$$

Аналогично находятся функции x_1 и т. д. ►

В следующих задачах с помощью метода малого параметра приближенно найти периодические решения данных уравнений.

Пример 3.7. $\ddot{x} + x = \mu\left(\dot{x} - \dot{x}^3\right)$.

◄ Поскольку правая часть от t явно не зависит, то сначала сделаем замену

$$\tau = t\left(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots\right),$$

где b_i, $i \in N$ – постоянные, подлежащие определению. Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}\left(1+b_1\mu+b_2\mu^2+\ldots\right)^2+x=\mu\left(\frac{dx}{d\tau}\left(1+b_1\mu+b_2\mu^2+\ldots\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^3\left(1+b_1\mu+b_2\mu^2+\ldots\right)^3\right). \qquad (3.17)$$

Далее, приближенное решение уравнения (3.17) ищем в виде

$$x(\tau,\mu)=x_0(\tau)+\mu x_1(\tau)+\mu^2x_2(\tau)+\ldots \qquad (3.18)$$

Подставив (3.18) в (3.17) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим:

$$\ddot{x}_0+x_0=0,$$
$$\ddot{x}_1+x_1=\dot{x}_0-\dot{x}_0^3-2b_1\ddot{x}_0, \qquad (3.19)$$
$$\ddot{x}_2+x_2=b_1\dot{x}_0-2b_1\ddot{x}_1+\dot{x}_1-3b_1\dot{x}_0^3-3\dot{x}_0^2\dot{x}_1-b_1^2\ddot{x}_0-2b_2\ddot{x}_0, \ \ldots.$$

Решение первого уравнения

$$x_0(\tau)=A\cos(\tau+\varphi)$$

(A, φ – произвольные постоянные) подставляем во второе уравнение (3.19):

$$\ddot{x}_1+x_1=-A\sin(\tau+\varphi)\left(1-A^2\sin^2(\tau+\varphi)\right)+2b_1A\cos(\tau+\varphi)=$$
$$=\left(\frac{3}{4}A^3-A\right)\sin(\tau+\varphi)-\frac{A^3}{4}\sin 3(\tau+\varphi)+2b_1A\cos(\tau+\varphi). \qquad (3.20)$$

Поскольку мы ищем периодические нетривиальные решения, то в (4) должны положить

$$\frac{3}{4}A^3-A=0,\ 2b_1A=0.$$

Отсюда следует, что $b_1=0$, $A=\frac{2}{\sqrt{3}}$. А тогда из уравнения (3.20) нетрудно найти, что

$$x_1(\tau)=A_1\cos(\tau+\varphi_1)+\frac{1}{12\sqrt{3}}\sin 3(\tau+\varphi),\ A_1,\ \varphi_1 \text{ – постоянные.}$$

Учитывая найденное, третье уравнение системы (3.19) представляем в виде:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \dot{x}_1 - 3\dot{x}_0^2\dot{x}_1 - 2b_2\ddot{x}_0 = -A_1\left(1 - 4\sin^2(\tau+\varphi)\right)\sin(\tau+\varphi_1) +$$
$$+\frac{4}{\sqrt{3}}b_2\cos(\tau+\varphi) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(1 - 4\sin^2(\tau+\varphi)\right)\cos 3(\tau+\varphi) =$$
$$= A_1\left(\sin(\tau+\varphi_1) + \sin(\tau-\varphi_1+2\varphi) - \sin(3\tau+2\varphi+\varphi_1)\right) +$$
$$+\left(\frac{4b_2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\cos(\tau+\varphi) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\cos 5(\tau+\varphi) - \cos 3(\tau+\varphi)\right).$$

Отсюда видим, что условием отсутствия резонирующих членов является выполнение равенств:

$$A_1 = 0,\ b_2 = -\frac{1}{16}.$$

Таким образом, $x_1(\tau) = \dfrac{1}{12\sqrt{3}}\sin 3(\tau+\varphi)$, и

$$x(\tau,\mu) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\tau+\varphi) + \frac{\mu}{12\sqrt{3}}\sin 3(\tau+\varphi) + O(\mu^2),\ \tau = t\left(1 - \frac{\mu^2}{16} + \ldots\right). \ ►$$

Пример 3.8. $\ddot{x} + x = x^2$.

◄ Считая, что x мало, в качестве малого параметра возьмем амплитуду колебаний, являющихся решением уравнения $\ddot{x} + x = 0$. Полагая, для определенности, $x|_{t=0} = \mu$ (μ – малый параметр), периодическое решение данного уравнения ищем в виде:

$$x = \mu x_0(\tau) + \mu^2 x_1(\tau) + \mu^3 x_2(\tau) + \ldots, \tag{3.21}$$

где $\tau = t\left(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots\right)$.

Подставив эти разложения в уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0,$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\tau + 2b_1\cos\tau, \tag{3.22}$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = 2x_1\cos\tau + 2b_2\cos\tau,\ \ldots.$$

Из первого уравнения с учетом начального условия находим

$$x_0 = \cos\tau.$$

Поскольку функция x_1 должна быть периодической, то в правой части второго уравнения системы (3.22) следует положить $b_1 = 0$. Тогда из этого уравнения нетрудно получить, что

$$x_1(\tau) = A\cos\tau + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2\tau .$$

Учитывая условие $x_1(0) = 0$, находим $A = -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$x_1(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\tau - \frac{1}{6}\cos 2\tau .$$

Подставив значение $x_1(\tau)$ в правую часть третьего уравнения системы (3.22) и потребовав, чтобы она не содержала резонирующих членов, получаем

$$b_1 = -\frac{5}{12},\ x_2 = A - \frac{A}{3}\cos 2\tau + \frac{1}{48}\cos 3\tau .$$

Так как $x_2(0) = 0$, то $A = -\frac{1}{32}$. Поэтому

$$x_2 = -\frac{1}{32} + \frac{1}{96}\cos 2\tau + \frac{1}{48}\cos 3\tau .$$

Таким образом,

$$x = \mu\cos\tau + \mu^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\tau - \frac{1}{6}\cos 2\tau\right) + \mu^3\left(-\frac{1}{32} + \frac{1}{96}\cos 2\tau + \frac{1}{48}\cos 3\tau\right) + \ldots;$$

$$\tau = t\left(1 - \frac{5}{12}\mu^2 + \ldots\right). \blacktriangleright$$

Примечание. Такой же результат получится, если проделать аналогичные выкладки для уравнения $\ddot{x} + x = \mu x^2$, а затем при решении положить $\mu = 1$.

§ 4 ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

4.1 Об оценке погрешности приближенного решения

Пусть $y = y(t)$ – вектор-функция, являющаяся приближенным решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ x\big|_{t=0} = x(0), \tag{4.1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Здесь и далее будем считать, что вектор-функция непрерывна по переменным t, x и удовлетворяет условию Липшица по переменной x:

$$\|f(t,y) - f(t,x)\| \le K\|y - x\|,\ K = const, \tag{4.2}$$

где $\|\bullet\|$ обозначает какую- либо норму вектора:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2},\ \|x\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|,\ \|x\| = \max_{1\le i\le n}|x_i|.$$

Пусть далее, приближенное решение $y(t)$ задачи (4.1) удовлетворяет неравенствам:

$$\left\|\frac{dy}{dt} - f(t,y)\right\| \le \varepsilon,\ \|y(0) - x(0)\| \le \delta. \tag{4.3}$$

Тогда справедлива оценка погрешности:

$$\|x(t) - y(t)\| \le \delta e^{K|t|} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|t|} - 1). \tag{4.4}$$

4.2 Примеры оценки погрешности приближенного решения

В следующих задачах оценить погрешность приближенного решения на указанном отрезке (волной отмечено приближенное решение).

Пример 4.1. $y' = \frac{x}{4} - \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 1$, $\widetilde{y} = 1 - \frac{x}{2}$, $|x| \le \frac{1}{2}$.

◀ Правая часть этого уравнения, очевидно, непрерывна по совокупности переменных x, y ($|x| \le \frac{1}{2}$, $-\infty < y < +\infty$) и имеет непрерывную же по y производную

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

причем

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{2|y|}{1+|y|^2} \cdot \frac{1}{1+|y|^2} \le \frac{2|y|}{1+|y|^2} \le 1.$$

Следовательно, в качестве постоянной Липшица K можем взять единицу. Далее, по формулам (4.3) имеем оценки:

$$\left|\widetilde{y}' - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+\widetilde{y}^2}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{4}{8-4x+x^2}\right| = \left|\frac{x^2(x-2)}{4(8-4x+x^2)}\right| \le \frac{1}{16} \max_{|x| \le \frac{1}{2}} \left|\frac{x-2}{8-4x+x^2}\right| = \frac{1}{64},$$

$$|\widetilde{y}(0) - y(0)| = 0.$$

Поэтому $\varepsilon = \frac{1}{64}$, $\delta = 0$. Таким образом, согласно (4.4) получаем оценку погрешности:

$$\|y(x) - \widetilde{y}(x)\| = |y(x) - \widetilde{y}(x)| \le \frac{1}{64}(e^{|x|} - 1) \le \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{64} < 0{,}011. \blacktriangleright$$

Пример 4.2. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = tx_1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$; $\widetilde{x}_1 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$, $\widetilde{x}_2 = \frac{1}{2}t^2$, $|t| \le 0{,}1$.

◀ Пусть $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Тогда согласно (4.3) имеем

$$\left\|\frac{d\widetilde{x}}{dt} - f(t, \widetilde{x})\right\| = \left|\frac{d\widetilde{x}_1}{dt} - f_1(t, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\right| + \left|\frac{d\widetilde{x}_2}{dt} - f_2(t, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\right|,$$

где

$$f_1(t, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2, \; f_2(t, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = t \cdot \widetilde{x}_1.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{d\widetilde{x}}{dt}-f(t,\widetilde{x})\right\| = \left|1+t-(1+t)\right| + \left|t-t(1+t+\frac{1}{2}t^2)\right| = \left|t(t+\frac{1}{2}t^2)\right| \le t^2+|t|\frac{t^2}{2} < 0{,}0105\,;$$

$\varepsilon = 0{,}0105$, $\delta = 0$.

Так как

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=1,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}=-1,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}=t,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0,$$

то постоянная Липшица $K=2$. А по формуле (4.4) имеем:

$$\|x(t)-\widetilde{x}(t)\| \le 0{,}0053(e^{2|t|}-1) \le 0{,}0053(e^{0,2}-1) < 0{,}0012\,.\blacktriangleright$$

Примечание. Если в области определения правой части $f(t,x)$, выпуклой по переменной x выполняются неравенства $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right| \le C$, то в качестве постоянной Липшица можно взять число $K=nC$.

Пример 4.3. $y''-x^2y=0$**,** $y(0)=1$**,** $y'(0)=0$**;** $\widetilde{y}=e^{\frac{x^4}{12}}$**,** $|x|\le 0{,}5$.

◀ Переходя от уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка, имеем:

$$x=t,\ y=x_1,\ y'=x_2,\ x_1'=x_2,\ x_2'=t^2x_1,$$

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=0;\ \widetilde{x}_1=e^{\frac{t^4}{12}},\ \widetilde{x}_2=\widetilde{y}'=\frac{1}{3}t^3e^{\frac{t^4}{12}},\ |t|\le 0{,}5.$$

Пусть $\|x\|=|x_1|+|x_2|$. Тогда согласно (4.3) имеем:

$$\left\|\frac{d\widetilde{x}}{dt}-f(t,\widetilde{x})\right\| = \left|\widetilde{x}_1'-f_1(t,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)\right| + \left|\widetilde{x}_2'-f_2(t,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)\right|. \tag{4.5}$$

Поскольку

$$\widetilde{x}_1'=\frac{1}{3}t^3e^{\frac{t^4}{12}},\ f_1(t,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)=\widetilde{x}_2-\frac{1}{3}t^3e^{\frac{t^4}{12}},$$

$$\widetilde{x}_2'=e^{\frac{t^4}{12}}\left(t^2+\frac{1}{9}t^6\right),\ f_2(t,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)=t^2\cdot\widetilde{x}_1=t^2e^{\frac{t^4}{12}},$$

то из (4.5) следует, что

$$\left\|\frac{d\tilde{x}}{dt}-f(t,\tilde{x})\right\|=\left|\frac{t^6}{9}e^{\frac{t^4}{12}}\right|\le\max_{|t|\le\frac{1}{2}}\frac{t^6}{9}e^{\frac{t^4}{12}}=\frac{(0{,}5)^6}{9}e^{\frac{(0{,}5)^4}{12}}=0{,}00017\ldots$$

Поэтому $\varepsilon=0{,}0017$; $\delta=0$.

Далее, так как

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}=1,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}=t^2,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0,$$

то постоянная Липшица $K=2\max\limits_{|t|\le\frac{1}{2}}(1;t^2)=2$ (см. примечание после примера 4.2). В силу оценки (4.4) и имеющихся значений ε, δ, K справедливо неравенство

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\|\le\frac{0{,}0017}{2}(e^{2|t|}-1)<0{,}009(e-1)<0{,}002.$$

Отсюда следует, что тем более $|x_1-\tilde{x}_1|<0{,}002$.►

Пример 4.4. $y'=2xy^2+1$, $y(0)=1$; $\tilde{y}=\dfrac{1}{1-x}$, $|x|\le\dfrac{1}{4}$.

◄ Сначала находим числа ε, δ. По формуле (4.3) имеем:

$$|\tilde{y}'-2x\tilde{y}^2-1|=\frac{x^2}{(1-x)^2}\le\frac{1}{9},\ |y(0)-\tilde{y}(0)|=0,$$

поэтому $\varepsilon=\dfrac{1}{9}$, $\delta=0$.

Предположим, что решение $y(x)$ существует в прямоугольнике

$$R=\left\{(x,y):|x|\le\frac{1}{4},|y-1|\le\frac{1}{3}\right\}$$

$(\tilde{y}(x)\in R)$. Тогда для постоянной Липшица K имеем оценку

$$K\le\max_R\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\max_R|4xy|=\frac{4}{3}.$$

Используя полученные оценки, по формуле (4.4) получаем

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|\le\frac{1}{12}(e^{\frac{4|x|}{3}}-1)\le\frac{1}{12}(e^{\frac{1}{3}}-1)=0{,}034\ldots$$

Остается проверить, действительно ли точное решение $y(x)$ содержится в указанном прямоугольнике. Поскольку функции $f(x,y)=2xy^2+1$ и $f'_y=4xy$ непрерывны в любом прямоугольнике $R_1=\{(x,y):|x|\le a,|y-1|\le b\}$, то, согласно теореме существования, на отрезке $|x|\le h$, где $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{R_1}(2xy^2+1)$, существует единственное решение рассматриваемой задачи. Найдем h. Для этого оцениваем $M\le 2a(b+1)^2+1$ и ищем $\max\min\left(a,\dfrac{b}{2a(b+1)^2+1}\right)$. Из уравнений

$$a=\frac{b}{2a(b+1)^2+1},\ \left(\frac{b}{2a(b+1)^2+1}\right)'_b=0$$

получаем

$$b=\sqrt{1+\frac{1}{2a}},\ a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=0{,}308\ldots,\ b=1{,}617\ldots .$$

Следовательно, в R_1 существует единственное решение $y(x)$, где

$$R_1=\{(x,y):|x|\le 0{,}308,|y-1|\le 1{,}617\}.$$

Поскольку $R<R_1$, то оно существует и в R. ►

Пример 4.5. Оценить, насколько может измениться при $0\le x\le 1$ решение уравнения $y'=x+\sin y$ с начальным условием $y(0)=y_0=0$, если число y_0 изменить меньше, чем на 0,01.

◄ Пользуемся неравенством (4.4). В данном примере $\varepsilon=0$, так как сравниваются между собой решения $y(x)$ и $z(x)$ одного и того же уравнения, т. е. $y'=x+\sin y$ и $z'=x+\sin z$, где решение $y(x)$ удовлетворяет начальному условию $y_0=0$, а решение $z(x)$ – условию $z(0)=z_0$, для которого, согласно условию, справедлива оценка $|y_0-z_0|\le 0{,}01$, или $|z_0|\le 0{,}01$. Следовательно, по формуле (4.3) $\delta=0{,}01$.

Далее, так как $|\sin y - \sin z| \le |y - z|$, то постоянная Липшица $K = 1$, и, согласно оценке (4.4) имеем окончательно:

$|y(x) - z(x)| \le 0{,}01 e^{|x|} \le 0{,}01 e \approx 0{,}0271$. ►

Пример 4.6. Чтобы приближенно найти решение уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$, его заменили уравнением $\ddot{x} + x = 0$. Оценить при $0 \le t \le 2$ возникающую от этого погрешность в решении с начальными условиями $x(0) = 0{,}25$, $\dot{x}(0) = 0$, если известно, что $|x - \sin x| < 0{,}003$ при $|x| \le 0{,}25$.

◄ Пусть $y(t)$ – решение задачи

$$\ddot{y} + \sin y = 0,\ y(0) = 0{,}25,\ \dot{y}(0) = 0, \tag{4.6}$$

а $x(t)$ – решение задачи:

$$\ddot{x} + x = 0,\ x(0) = 0{,}25,\ \dot{x}(0) = 0. \tag{4.7}$$

Тогда для погрешности $u(t) = x(t) - y(t)$ путем почленного вычитания из равенств (4.6) равенств (4.7) получаем задачу:

$$\ddot{u}(t) + u(t) = \sin y - y,\ u(0) = 0,\ \dot{u}(0) = 0,$$

решение которой имеет вид:

$$u(t) = \int_0^t (\sin y(\tau) - y(\tau)) \sin(t - \tau) d\tau. \tag{4.8}$$

Умножив почленно уравнение (4.6) на $\dot{y}$ и проинтегрировав, а также приняв во внимание начальные условия, получим:

$$\dot{y}^2 = 2(\cos y - \cos 0{,}25).$$

Отсюда следует, что $|y| \le 0{,}25$. Поэтому $|\sin y - y| \le 0{,}003$, и из (4.8) находим нужную задачу:

$$|u(t)| \le \int_0^t |\sin y(\tau) - y(\tau)| |\sin(t - \tau)| d\tau \le 0{,}003 \int_0^t |\sin(t - \tau)| d\tau \le 0{,}003 \int_0^2 d\tau = 0{,}006.$$ ►

§ 5 СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

В этом параграфе мы будем изучать системы с переменными параметрами. Первые существенные результаты этой теории, полученные методом усреднения, принадлежат Ю.А. Митропольскому, которому также принадлежит первое математическое изложение теории колебательных систем, параметры которых медленно изменяются.

5.1 Вывод укороченных уравнений

Рассмотрим теперь уравнение следующего типа:

$$\ddot{z} + f(z,\tau) = \varepsilon\varphi(z,\dot{z},\tau), \tag{5.1}$$

где τ – "медленное время": $\tau = \varepsilon t + const$.Таким образом, уравнение (5.1) описывает колебательные процессы в системе с медленно меняющимися параметрами. При $\varepsilon = 0$ уравнение (5.1) превращается в порождающее

$$\ddot{z} + f(z,\tau) = 0, \tag{5.2}$$

где τ – некоторая постоянная.

Методы, развитые в предыдущих параграфах, без каких-либо существенных изменений могут быть использованы (5.1).

Общий интеграл порождающего уравнения, как и в предыдущем параграфе, будем считать известным, однако теперь он будет зависеть не только от *x* и *y*, но и от параметрами τ:

$$z = Q(x,y,\tau),$$

где, как и раньше, $y = \omega(x,\tau)(t+t_0)$. Заметим при этом, что теперь частота ω будет функцией не только амплитудой *x*, но и медленного времени τ: $\omega = \omega(x,\tau)$.

Функция *Q* будет удовлетворять уравнению

$$\omega^2 Q_{YY} + f(Q) = 0 \tag{5.3}$$

тождественно по *x* и τ.

Решение уравнения (5.1) будем искать в виде

$$z = Q(x, y, \tau), \tag{5.4}$$

$$\dot{z} = \omega(x, \tau) Q_Y(x, y, \tau). \tag{5.5}$$

Другими словами, вместо переменной z мы введем новые переменные x и y при помощи равенств (5.4) и (5.5). Тогда получим уравнения

$$Q_X \dot{x} + Q_Y - \omega Q_Y + \varepsilon Q_\tau = 0,$$

$$(\omega_X Q_Y + \omega Q_{XY})\dot{x} + \omega \dot{y} Q_{YY} + f(Q, \tau) + \varepsilon(\omega_\tau Q_Y + \omega Q_{Y\tau}) = \varepsilon\varphi.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, и используя определения Δ и тождество (5.3), мы получим

$$\dot{x}\Delta + \varepsilon\left\{\omega_X (Q_\tau Q_{YY} + Q_X Q_{Y\tau}) - \omega_\tau Q_Y^2\right\} = -\varepsilon\varphi Q_Y,$$

$$-\dot{y}\Delta + \omega\Delta + \varepsilon\left\{\omega(Q_\tau Q_{XY} - Q_X Q_{Y\tau}) + \omega_\tau Q_X Q_\tau - \omega_\tau Q_X Q_Y\right\} = -\varepsilon\varphi Q_X$$

или окончательно

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\Delta}\left\{\varphi Q_Y + \xi_1(x, y, \tau)\right\}, \\ \dot{y} &= \omega(x, \tau) + \frac{\varepsilon}{\Delta}\left\{\varphi Q_X + \xi_2(x, y, \tau)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

где

$$\xi_1 = \omega(Q_\tau Q_{YY} + Q_{Y\tau} Q_Y) - \omega_\tau Q_Y^2,$$

$$\xi_2 = \omega(Q_\tau Q_{XY} - Q_X Q_{Y\tau}) + \omega_X Q_Y Q_\tau - \omega_\tau Q_X Q_Y.$$

В системе (5.6) правые части зависят не только от переменных x и y, т.е. не только от амплитуды и фазы, но и от времени. Существенно, однако, что правые части являются по условию медленно изменяющимися со временем. Поэтому основные соображения о возможности усреднения правых частей по периоду изменения быстрой переменной остаются в силе, так как за время, в течение которого фаза изменяется на 2π, величина τ изменяется мало.

Итак, и в этом случае мы также сможем составить систему укороченных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\{\varphi Q_Y + \xi_1\}dy, \\ \dot{y} &= \omega(x,\tau) + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\{\varphi Q_X + \xi_2\}dy,\end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

Таким образом, процедура Ван-дер-Поля формально применима к системам с медленно меняющимися правыми частями при условии, что функция $Q(x, y,\tau)$ описывает некоторый колебательный процесс (т.е. правые части системы (5.6) являются периодическими функциями «быстрой» переменной y). В этом случае мы можем заменить исходное уравнение (5.1) укороченными — системой (5.7).

5.2 Адиабатические инварианты

В системах с медленно меняющимися параметрами рассматриваются величины, называемые *адиабатическими инвариантами.*

Предположим, что некоторая величина $I(x, y)$ является интегралом порождающего уравнения. Это значит, что производная dI/dt, вычисленная в силу порождающего уравнения, равна нулю.

Предположим, что система (5.1) не подвержена действию внешних сил, т.е. $\varphi = 0$, и вычислим в этом случае производную dI/dt в силу укороченных уравнений Ван-дер-Поля. В общем случае эта величина будет зависеть от переменных x и τ и, следовательно, будет отлична от нуля при $\varepsilon \neq 0$.

Условимся называть функцию $I(x, y)$ адиабатическим инвариантом системы (5.1) относительно укороченных уравнений Ван-дер-Поля, если ее полная производная по времени, вычисленная в силу этих уравнений, равна нулю.

Ниже будет показано, что уравнения Ван-дер-Поля определяют решение с точностью до величин $O(\varepsilon)$. Следовательно, величину $I(x, y,\tau)$ мы называем адиабатическим инвариантом, если

$$\frac{dI}{dt} = Q(\varepsilon^k), \quad k > 1.$$

Другими словами адиабатический инвариант — это некоторая функция амплитуды и фазы, которая изменяется медленнее, нежели параметры системы.

5.3 Интеграл действия

Рассмотрим функцию $I(x,\tau)$ определенную равенством

$$I(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x,\tau)Q_Y^2(x,y,\tau)dy\,. \qquad (5.8)$$

Функция (5.8) называется *интегралом действия.* Свое название это выражение оправдывается тем, что $I(x,\tau)$ является интегралом порождающего уравнения. В самом деле, при $\tau=const$ «амплитуда» — величина постоянная, поэтому и $I(x,\tau)$ также является постоянной.

Покажем, что интеграл действия является адиабатическим инвариантом. Для этого найдем полную производную по времени

$$\frac{dI}{dt}=I_X\dot{x}+I_\tau\varepsilon\,.$$

Вычислим частные производные I_X и I_τ и подставим их в это выражение. В результате мы получим

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2+2\omega Q_Y Q_{XY})dy+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Q_Y^2\omega_\tau+2\omega Q_Y Q_{Y\tau})dy\,. \qquad (5.9)$$

Преобразуем второе слагаемое в первом интеграле, проинтегрировав его по частям

$$\int_0^{2\pi}Q_X Q_{XY}dy=Q_X Q_Y\Big|_{Y=0}^{Y=2\pi}-\int_0^{2\pi}Q_{YY}Q_X dy\,.$$

Но первое слагаемое равно нулю, поскольку Q-периодическая функция; следовательно

$$\int_0^{2\pi}Q_Y Q_{XY}dy=-\int_0^{2\pi}Q_{YY}Q_X dy\,.$$

Используя это выражение, мы можем преобразовать первый из интегралов, входящих в правую часть (5.9)

$$I_1 = \frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{XY})dy = \frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\omega_X Q_Y^2 - \omega(Q_{YY}Q_X - Q_Y Q_{XY})\right\}dy.$$

Но по определению

$$\omega_X Q_Y^2 - \omega(Q_{YY}Q_X - Q_Y Q_{XY}) = -\Delta.$$

Таким образом,

$$\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{XY})dy = -\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta dy.$$

Величина Δ от фазы у не зависит, поэтому

$$\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{XY})dy = -\dot{x}\Delta.$$

Аналогично проведем вычисление второго слагаемого

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_\tau Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{Y\tau})dy = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_\tau Q_Y^2 - \omega Q_{YY}Q_\tau + \omega Q_Y Q_{Y\tau})dy =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1(x, y, \tau)dy.$$

Итак, окончательно

$$\frac{dI}{dt} = -\Delta\dot{x} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1(x, y, \tau)dy. \tag{5.10}$$

Подставляя в (5.10) выражение для $\dot{x}$, которое дается первым из уравнений (5.6)

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy - \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy,$$

Получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x, y, \tau)Q_Y dy.$$

Отсюда сразу следует, что если $\varphi \equiv 0$, то величина интеграла действия сохраняет свое значение. Итак, интеграл действия является адиабатическим инвариантом порождающего уравнения.

5.4 Пример использования адиабатических инвариантов

Использование адиабатических инвариантов позволяет в некоторых случаях получать ответы на интересующие нас вопросы, минуя интегрирование системы.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + g(\varepsilon t)z = 0\,. \tag{5.11}$$

В этом случае

$$z = x\cos y\,,\ \dot{z} = -\omega x\sin y\,,$$

где

$$\omega = \sqrt{g(\varepsilon t)}\,.$$

Таким образом, $Q(x, y) = x\cos y$, $Q_Y = -x\sin y$.

Составим выражение адиабатического варианта

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\omega Q_Y^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sqrt{g(\varepsilon t)}x^2\sin^2 y dy = \frac{\sqrt{g(\varepsilon t)}x^2}{2}. \tag{5.12}$$

На основании сказанного выше мы имеем $I = I_0 = const$. Таким образом, если ставится вопрос об исследовании зависимости амплитуды x от времени, то из (5.12) мы сразу находим

$$x = \frac{const}{\sqrt[4]{g(\varepsilon t)}}\,. \tag{5.13}$$

Этот результат может быть получен разными методами, но применение теории адиабатических инвариантов позволяет его получить, по-видимому, наиболее простым способом.

5.5 Вычисление амплитуды и энергии

Формула (5.13) является выражением значительно более общего результата. Пусть мы имеем произвольное нелинейное уравнение вида

$$\ddot{z} + f(z, \varepsilon t) = 0\,, \tag{5.14}$$

у которого решение

$$z = Q(x, y, \varepsilon t) \tag{5.15}$$

является периодической функцией у периода 2π. Тогда зависимость амплитуды от времени может быть получена без интегрирования уравнения (5.14). В самом деле, для уравнения (5.14) интеграл действия будет адиабатическим инвариантом, т.е.

$$\int_0^{2\pi} \omega(x, \varepsilon t) Q_Y^2(x, y, \varepsilon t) dy = const. \tag{5.16}$$

Выражение (5.16) является некоторым трансцендентным уравнением, которое связывает величины x и t

$$\phi(x,t) = 0 \tag{5.16'}$$

и представляет собой неявное задание функции $x(t)$.

Полная энергия системы не является адиабатическим инвариантом, хотя она определяется так же, как и интеграл действия, только амплитудой. Однако, имея в распоряжении зависимость $x(\varepsilon t)$ и используя то обстоятельство, что

$$\frac{dE}{dt} = -\Delta\dot{x} + \varepsilon E_\tau,$$

мы можем легко подсчитать изменение энергии системы вследствие изменения параметров системы. Нетрудно убедиться в том, что $dE \backslash dt$ имеет порядок величины ε.

Процедура вычисления энергии может быть и не связана с нахождением корней трансцендентного уравнения (5.16'). Для этой цели следует использовать рассуждения предыдущего параграфа. Найдем производную величины $\alpha = 2E$

$$\alpha = \dot{z}^2 + U(z,\tau),$$

где

$$U(z,\tau) = \int_{Z_0}^{Z} f(z,\tau) dz.$$

Так как

$$\ddot{z} = -f(z,\tau),$$

то производная $d\alpha / dt$, вычисленная в силу этого уравнения, будет

$$\ddot{\alpha} = \varepsilon U_\tau$$

или после усреднения

$$\dot{\alpha} = \frac{\varepsilon}{T(\alpha)} \int_{\beta_0}^{\beta_0+T} U_\tau(z,\tau) d\beta = \frac{\varepsilon}{T(\alpha)} \left\{ \int_{\underline{Z}}^{\overline{Z}} \frac{U_\tau dz}{\sqrt{\alpha - U_Z}} - \int_{\overline{Z}}^{\underline{Z}} \frac{U_\tau dz}{\sqrt{\alpha - U(Z)}} \right\},$$

где $\underline{z}$ и $\overline{z}$ являются корнями уравнения $U(z) = 0$.

5.6 Некоторые обобщения

Мы рассмотрели процедуру применения схемы Ван-дер-Поля для нахождения приближенных решений уравнения (5.1). Она может быть легко обобщена на широкий класс систем уравнений, близких к гамильтоновским. Одним из представителей таких систем является уравнение

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + f(z,\tau) = \varepsilon\varphi(z,\dot{z},\tau). \tag{5.17}$$

Для этого случая повторим все рассуждения данного параграфа. Считая, как и раньше, что решение порождающего уравнения

$$m\ddot{z} + f(z,\tau) = 0, \; \tau = const,$$

нам известно:

$$z = Q(x,y,\tau),$$

сделаем замену переменного (5.4) и (5.5). Выписав уравнение совместности и подставив эти функции в уравнение (5.17), мы получим

$$Q_X\dot{x} + Q_Y\dot{y} - \omega Q_Y = -\varepsilon Q_\tau,$$

$$m\dot{x}(\omega_X Q_Y + \omega Q_{XY}) + m\omega Q_{YY}\dot{y} + f(Q,\tau) = \varepsilon\varphi - \varepsilon\{\omega_\tau m Q_Y + \omega m Q_{Y\tau} + m_\tau \omega Q_Y\}.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и используя выражения для Δ, ξ_1 и ξ_2, мы придем к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{m\Delta}\varphi Q_Y - \frac{\varepsilon}{\Delta}\xi_1 + \frac{\varepsilon}{m\Delta} m_\tau \omega Q_Y^2, \\ \dot{y} &= \omega + \frac{\varepsilon}{m\Delta}\varphi Q_X + \frac{\varepsilon}{\Delta}\xi_2 - \frac{\varepsilon}{m\Delta} m_\tau \omega Q_Y Q_X. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Система (5.18) совершенно аналогична системе (5.6). Проводя операцию осреднения, мы получим систему укороченных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy - \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy,\\
\dot{y} &= \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_X dy + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_2 dy - \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y Q_X dy.
\end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Нетрудно проверить, что для уравнения (5.17) выражение

$$I(x,\tau) = \frac{m(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x,\tau)Q_Y^2 dy \tag{5.20}$$

является также адиабатическим инвариантом. Найдем для этого

$$\frac{dI}{dt} = \dot{x}I_X + \varepsilon I_\tau. \tag{5.21}$$

Повторяя вычисления предыдущих пунктов этого параграфа, мы получим

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}I_X &= -\dot{x}m\Delta,\\
\varepsilon I_\tau &= -\frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy.
\end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Заменяя в этих выражениях величину $\dot{x}$ из системы (5.19) и подставляя величины (5.22) в равенство (5.21), получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy + \frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy - \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy - \frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy.$$

Таким образом, при отсутствии внешних воздействий величина I, определяемая формулой (5.20), остается постоянной, если считать, что величина x изменяется, следуя уравнениям (5.19).

5.7 Задача о маятнике переменной массы

Рассмотрим малые колебания математического маятника, масса которого изменяется со временем. Если предположить, что скорость отделения частиц бесконечно мала (или что система реактивных сил образует нулевой торсор), то уравнение движения такого маятника имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + m(\tau)glz = 0\,, \tag{5.23}$$

где g – напряженность гравитационного поля, l – длина маятника. Рассчитать приближенно изменения амплитуды колебаний такого маятника можно, не интегрируя уравнения (5.23). Для этого надо вспомнить, что величина

$$I = \frac{m(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega Q_y^2 dy$$

является адиабатическим инвариантом.

В нашем случае

$$\omega = \sqrt{gl}\,,\; Q = x\cos y\,,\; Q_Y = -x\sin y\,.$$

Подставляя эти величины в выражение (5.20), мы получим уравнение для определения амплитуды

$$\frac{m\sqrt{gl}}{2}x^2 = const\,,$$

откуда

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{m(\tau)}}\,. \tag{5.24}$$

Заметим, что закон изменения амплитуды (5.24) сохраняет свою силу также и для уравнения

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + m(\tau)glz = \varepsilon\varphi(z)\,,$$

где $\varphi(z)$ – произвольная функция.

В самом деле, изменение величины I подчиняется уравнению

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy\,.$$

Следовательно, I сохраняет свое значение не только тогда, когда $\varphi \equiv 0$, но и при условии ортогональности φ и Q_Y что в нашем случае соблюдается

$$\int_0^{2\pi} \varphi Q_Y dy = -x \int_0^{2\pi} \varphi(x \cos y) \sin y dy \equiv 0 .$$

Итак, мы показали, как может быть использована идея Ван-дер-Поля об осреднении в задачах нелинейных колебаний. Она позволяет исследовать широкий круг вопросов этой теории при помощи укороченных уравнений.

Таким образом, теория Ван-дер-Поля позволяет получить только некоторые приближенные решения, причем она не содержит никаких методов, позволяющих оценить степень точности полученных решений. Точно так же в рамках теории Ван-дер-Поля мы не можем уточнить полученные решения. Наконец, еще одним существенным недостатком изложенного подхода является то, что он приспособлен для исследования только одномерных задач и не допускает непосредственного обобщения на многомерные задачи в системах с числом степеней свободы больше чем одна.

Для преодоления всех указанных трудностей необходима более общая теория, содержащая новый взгляд на проблему усреднения. Она впервые возникает в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, опубликованных в тридцатых годах. К ее изложению мы сейчас и переходим.

§ 6 ОБЩИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ КЛАССА ФУКСА

Особой точкой называется точка, в которой функция или неопределенна или обращается в бесконечность. Если ряд содержит конечное число членов, то особая точка является полюсом. Если же ряд содержит бесконечное число членов, то особая точка является существенно особой точкой.

Линейные дифференциальные уравнения, интегралы которых имеют все особые точки регулярными, представляют особый интерес. Они впервые были изучены Фуксом и называются уравнениями класса Фукса.

Теорема Фукса: Для того чтобы уравнение

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

имело в некоторой точке $z = \xi$, особой для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$, интегралы с регулярной особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы $p(z)$ имело в ξ полюс не выше первого порядка, а $q(z)$ имело бы полюс не выше второго порядка.

Так как регулярные особые точки являются для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ полюсами, то в случае уравнений класса Фукса $p(z)$ и $q(z)$ должны иметь на всей комплексной плоскости, включая и бесконечно удаленную точку, особыми точками только полюсы. Следовательно, число этих полюсов должно быть конечно, а потому $p(z)$ и $q(z)$ должны быть рациональными функциями, причем $p(z)$ имеет полюсы не выше первого порядка и $q(z)$ не выше второго порядка.

Обозначая особые точки $p(z)$ и $q(z)$ через $a_1, a_2, ..., a_n$, мы можем написать $p(z)$ и $q(z)$ в следующем виде:

$$p(z) = \frac{P(z)}{\prod_1^n (z - a_k)}, \tag{6.1}$$

$$q(z) = \frac{Q(z)}{\prod_1^n (z - a_k)^2}, \tag{6.2}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены.

Нетрудно показать, что требование, чтобы бесконечно удаленная точка была или обыкновенной точкой интеграла или регулярной особой точкой, ограничивает степень многочленов $P(z)$ и $Q(z)$.

Действительно, подставляя в уравнение $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ выражения (1) и (2), получим дифференциальное уравнение в виде

$$w''+\frac{P(z)}{\prod_{1}^{n}(z-a_k)}w'+\frac{Q(z)}{\prod_{1}^{n}(z-a_k)^2}w=0. \qquad (6.3)$$

Для изучения поведения интегралов в области $z=\infty$ сделаем замену $z=\frac{1}{\xi}$ и изучим поведение интегралов преобразованного уравнения в области $\xi=0$.

Имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dz}=-\xi^2\frac{dw}{d\xi},\\ &\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{d^2w}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2+\frac{dw}{d\xi}\frac{d^2\xi}{dz^2}=\frac{d^2w}{d\xi^2}\xi^4+\frac{dw}{d\xi}2\xi^3 \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

и

$$\frac{d^2w}{d\xi^2}+\left[\frac{2}{\xi}-\frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_{1}^{n}\left(\xi-\frac{1}{a_k}\right)}\right]\frac{dw}{d\xi}+\frac{1}{\xi^{M-2n+4}}\frac{Q_1(\xi)}{\prod_{1}^{n}\left(\xi-\frac{1}{a_k}\right)^2}w=0, \qquad (6.5)$$

где N и M соответственно – степени многочленов P и Q и $P_1(\xi)$ и $Q_1(\xi)$ многочлены от ξ.

Подставляя выражения (6.4) и (6.5) в уравнение (6.3), получим

$$\frac{d^2w}{d\xi^2}+\left[\frac{2}{\xi}-\frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_{1}^{n}\left(\xi-\frac{1}{a_k}\right)}\right]\frac{dw}{d\xi}+\frac{1}{\xi^{M-2n+4}}\frac{Q_1(\xi)}{\prod_{1}^{n}\left(\xi-\frac{1}{a_k}\right)^2}w=0. \qquad (6.6)$$

Получим в случае, если $\xi = 0$ является точкой голоморфности, что

1) функция

$$\frac{2}{\xi} - \frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2} \prod_1^n \left(\xi - \frac{1}{a_k} \right)} \tag{6.7}$$

при $\xi = 0$ голоморфна, для чего необходимо, чтобы $N - n + 2 = 1$, то есть

$$N = n - 1, \tag{6.8}$$

и чтобы $P_1(0) = 2 \prod_1^n \frac{1}{a_k} (-1)^n$;

2) функция

$$\frac{1}{\xi^{M-2n+4}} \frac{Q_1(\xi)}{\prod_1^n \left(\xi - \frac{1}{a_k} \right)^2} \tag{6.9}$$

при $\xi = 0$ голоморфна, для чего необходимо, чтобы

$$M - 2n + 4 = 0, \text{ то есть } M = 2n - 4. \tag{6.10}$$

Если же $\xi = 0$ является регулярной особой точкой, то из выражения (6.6) получим, что $N \le n - 1$, и из выражения (6.9) получим, что $M - 2n + 4 \le 2$, то есть $M \le 2n - 2$.

Итак, в том и другом случаях уравнение (6.3) имеет вид

$$w'' + \frac{p_0 z^{n-1} + p_1 z^{n-2} + \ldots + p_{n-1}}{\prod_1^n (z - a_k)} w' + \frac{q_0 z^{2n-2} + q_1 z^{2n-3} + \ldots + q_{2n-2}}{\prod_1^n (z - a_k)^2} w = 0. \tag{6.11}$$

Таков общий вид уравнений класса Фукса. Функцию $p(z)$ можно, очевидно, написать в настоящем случае в виде

$$p(z) = \frac{p_0 z^{n-1} + p_1 z^{n-2} + \ldots + p_{n-1}}{\prod_1^n (z - a_k)} = \sum_1^n \frac{A_k}{z - a_k}. \tag{6.12}$$

Легко найти выражения A_k через корни основного определяющего уравнения, соответствующего особой точке a_k. Действительно, уравнение (6.11) в области $z = a_k$ можно написать в виде

$$\begin{aligned}&(z-a_k)^2 w''+\left[A_k(z-a_k)+(z-a_k)^2\{...\}\right]w'+\\&+\left[M_k'+M_k''(z-a_k)+(z-a_k)^2\{...\}\right]w=0\end{aligned} \tag{6.13}$$

Подставляя в уравнение (6.13) для w разложение вида

$$w=(z-a_k)^{\rho}\left[a+\beta(z-a_k)+...\right], \tag{6.14}$$

получим для определения показателя ρ уравнение

$$\rho(\rho-1)+A_k\rho+M_k'=0, \tag{6.15}$$

откуда, обозначая корни этого уравнения через $\rho_1^{(k)}$ и $\rho_2^{(k)}$ будем иметь

$$\rho_1^{(k)}+\rho_2^{(k)}=1-A_k \text{ и } \rho_1^{(k)}\rho_2^{(k)}=M_k'. \tag{6.16}$$

Следовательно, равенство (6.12) может быть написано в виде

$$p(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_1^{(k)}-\rho_2^{(k)}}{z-a_k}. \tag{6.17}$$

Так как по (6.16)

$$p\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_1^{(k)}-\rho_2^{(k)}}{z-a_k\xi}\xi,$$

то, подставляя это выражение в уравнение (6.6), получим

$$\frac{2}{\xi}-\frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_1^n\left(\xi-\frac{1}{a_k}\right)}=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_1^{(k)}-\rho_2^{(k)}}{z-a_k\xi}. \tag{6.18}$$

Из уравнения (6.18) следует, что в области точки $\xi=0$ имеем

$$\frac{2}{\xi}-\frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_1^n\left(\xi-\frac{1}{a_k}\right)}=\frac{1}{\xi}\left\{2-\sum_1^n(1-\rho_1^{(k)}-\rho_2^{(k)})\right\}+\xi\{...\}.$$

Отсюда следует, что если точка $\xi=0$ является точкой голоморфности коэффициентов уравнения, то выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\rho_1^{(k)}-\rho_2^{(k)}\right)=2. \tag{6.19}$$

Если же точка $\xi=0$ является регулярной особой точкой, то обозначая для нее корни определяющего уравнения через $\rho_1^{(\infty)}$ и $\rho_2^{(\infty)}$ получим

$$2-\sum_{1}^{n}(1-\rho_1^{(k)}-\rho_2^{(k)})=1-\rho_1^{(\infty)}-\rho_2^{(\infty)},$$

что можно еще написать, относя к особой точке $\xi=0$ (то есть $z=\infty$) номер n + 1 :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left\{1-\left(\rho_1^{(k)}+\rho_2^{(k)}\right)\right\}=2\,. \tag{6.20}$$

Соотношения (6.19) или (6.20) носят название соотношений Фукса.

Функции $q(z)$ также можно придать очень простой вид, аналогичный выражению $p(z)$ по формуле (6.12). Для этого заметим, что можно написать $q(z)$ в виде

$$\begin{aligned} q(z)&=\frac{q_0z^{2n-2}+\ldots+q_{2n-2}}{\prod_1^n(z-a_k)^2}=\frac{q_0z^{2n-2}+\ldots+q_{2n-2}}{\prod_1^n(z-a_k)}\frac{1}{\prod_1^n(z-a_k)}=\\ &=\left\{\sum_1^n\frac{M_k}{z-a_k}+Q_{n-1}(z)\right\}\frac{1}{\prod_1^n(z-a_k)} \end{aligned} \tag{6.21}$$

где $Q_{n-2}(z)$ – многочлен степени n-2, если точка $z=\infty$ есть регулярная особая точка, или в виде

$$q(z)=\frac{q_0z^{2n-4}+\ldots+q_{2n-4}}{\prod_1^n(z-a_k)^2}==\left\{\sum_1^n\frac{M_k}{z-a_k}+Q_{n-4}(z)\right\}\frac{1}{\prod_1^n(z-a_k)}, \tag{6.22}$$

если точка $z=\infty$ есть точка голоморфности для дифференциального уравнения.

Заметим, что в этих выражениях многочлены Q выпадают, если n-2 или n-4 отрицательны, как это видно по происхождению этих многочленов.

Разлагая выражение (6.21) или (6.22) по степеням $(z-a_k)$, получим в области $(z-a_k)$ разложение вида

$$q(z)=\frac{M_k}{(z-a_k)^2}\cdot\frac{1}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}+\frac{1}{z-a_k}\{\ldots\}.$$

Сравнивая это разложение с (6.13), имеем

$$M'_k=\frac{M_k}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}$$

и по уравнению (6.16) получаем

$$M_k = \rho_1^{(k)}\rho_2^{(k)}(a_k - a_1)(a_k - a_2)...(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})...(a_k - a_n)\,. \qquad (6.23)$$

Отсюда окончательно можем представить уравнения класса Фукса в следующем виде, указанном Папперитцем:

$$w'' + \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)}}{z - a_k}\right\} w' +$$

$$+ \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_1^{(k)}\rho_2^{(k)}(a_k - a_1)(a_k - a_2)...(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})...(a_k - a_n)}{z - a_k} + Q_{n-2}(z)\right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{w}{\prod_1^n (z - a_k)} = 0$$

Таким образом, данными показателями $\rho_{1,2}^{(k)}$ вполне определяется функция p(z), а в функции $q(z)$ остается многочлен, коэффициенты которого не определяются через показатели $\rho_{1,2}^{(k)}$. Степень этого многочлена n-2, если $z = \infty$ является особой точкой, или n-4, если $z = \infty$ не является особой точкой коэффициентов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти производные от решения данного дифференциального уравнения (или системы) по параметру μ при $\mu = 0$:

1) $y' = \mu x + \dfrac{1}{2y}$ $(x > 0)$, $y(1) = 1 - 2\mu$;

2) $y' = \dfrac{y}{x} + \mu x e^{-y}$ $(x > 0)$, $y(1) = 1 + 2\mu$;

3) $y' = y - x + \mu x e^{2y}$ $(x > 0)$, $y(1) = 2 - \mu$;

4) $y' = \mu x + \sin y$, $y(0) = 2\mu$;

5) $\ddot{x} = x \sin \dot{x} + \sin\left(x^2\right)$, $x(0) = \mu$, $\dot{x}(0) = \mu$;

6) $\ddot{x} = x + \sin(\dot{x})^2$, $x(0) = \mu$, $\dot{x}(0) = \mu^2$;

7) $\ddot{x} + x = 2\mu \sin t + \mu x^2$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$;

8) $\ddot{x} - 2\dot{x} = \mu t x$, $x(0) = 4$, $\dot{x}(0) = \mu^2 + 3\mu$;

9) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x + 3\mu y^2$, $x(0) = 2 - 4\mu$, $y(0) = 0$;

10) $y' = 2x + \mu y^2$, $y(0) = \mu - 1$;

11) $y' = \dfrac{y}{x} + \mu x e^{-y}$, $y(1) = 1$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x, & y(0) = 0. \end{cases}$ Найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

2. Найти решение уравнения в виде степенного ряда или в виде обобщенного степенного ряда. Если есть начальные условия, найти частные решения:

1) $y' = x + \dfrac{1}{y}$, $y(0) = 1$;

2) $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$;

3) $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$;

4) $y'' = y'^2 + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$;

5) $y'' - xy' - 2y = 0$;

6) $(1-x)y'' - 2y' + y = 0$;

7) $(x^2 - x + 1)y'' + (4x-2)y' + 2y = 0$;

8) $y'' + y\sin x = 0$;

9) $xy'' + y\ln(1-x) = 0$;

10) $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0$;

11) $x^2y'' - x^2y' + (x-2)y = 0$;

12) $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0$;

13) $xy'' - xy' - y = 0$;

14) $xy'' + y' - xy = 0$.

3. Найти 2-3 члена разложения по степеням малого параметра μ***:***

1) $y' = \dfrac{6\mu}{x} - y^2$, $y(1) = 1 + 3\mu$;

2) $y' = e^{y-x} + \mu y$, $y(0) = -\mu$;

3) $y' = 5\mu x + \dfrac{1}{2y}$ $(x \ge 1)$, $y(1) = 1 - \mu$;

4) $\ddot{x} = 2x - 2x^3$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \mu$;

5) $y' = \dfrac{y}{x} + \mu x e^{-y}$ $(x > 0)$, $y(1) = 1 + 2\mu$;

6) $y' = \mu x + \sin y$, $y(0) = 2\mu$;

7) $\ddot{x} + x = 2\mu \sin t + \mu x^2$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$;

8) $xy' = \mu x^2 + \ln y$, $y(1) = 1$;

9) $y' = 4\mu x - y^2$, $y(1) = 1$;

10) $y' = -5\mu x + \dfrac{2}{y}$, $y(1) = 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000. – 368 с.

2 Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математичке. – М.: УРСС, 1999. – 283 с.

3 Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – изд. 2-е. – М.: Гос. изд-во технико–теор. литературы, 1950. – 436 с.

4 Кодингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1958. – 475 с.

5 Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. – 464 с.

6 Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Изд. Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 379 с.

7 Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Изд. УРСС, 2004. – 239 с.

8 Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: РХД, 2000. – 176 с.

9 Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Высш. шк., 1991. – 303 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Надежда Николаевна Кушнирук,

старший преподаватель кафедры МАиМ, канд. физ.-мат. наук;

Татьяна Вениаминовна Труфанова,

доцент кафедры МАиМ, канд. техн. наук.

Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений. Практикум.

Изд-во АмГУ. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 4,88. Тираж 50. Заказ 193

Отпечатано в типографии АмГУ.