Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Серия «Учебно-методический комплекс дисциплины»

А.П. Филимонова, С.В. Костенко,
А.В. Павельчук, А.В. Голик

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Практикум

Благовещенск
2010

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

Филимонова А.П., Костенко С.В., Павельчук А.В., Голик А.В.
Дифференцирование функций одной переменной с приложениями. Практикум. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2010. – 147 с.

Практикум предназначен для студентов инженерно-технических специальностей университета и содержит краткие теоретические сведения раздела математики «Дифференцирование функций одной переменной с приложениями» и материалы для проведения практических занятий. Основные понятия иллюстрируются профессионально-ориентированными примерами, которые помогут студентам при самостоятельной работе по изучению данного радела математики. Пособие содержит 20 вариантов расчетно-графической работы. Предназначено для студентов специальностей: с«130301», «160802», «160803», «280101», «140101», «140106», «140204», «140205», «140211», «220301», «140203».

Рецензенты: С.В. Ланкин, *д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей физики БГПУ;*
И.А. Голубева*, к. ф.-м. наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики АмГУ.*

§ 1. Некоторые задачи, приводящие к понятию производной

К понятию производной приводит ряд задач из различных областей знаний.

1. Задача о касательной.

Пусть дана некоторая непрерывная функция $y = f(x)$. Графиком её будет какая-то кривая AB (рис. 1).

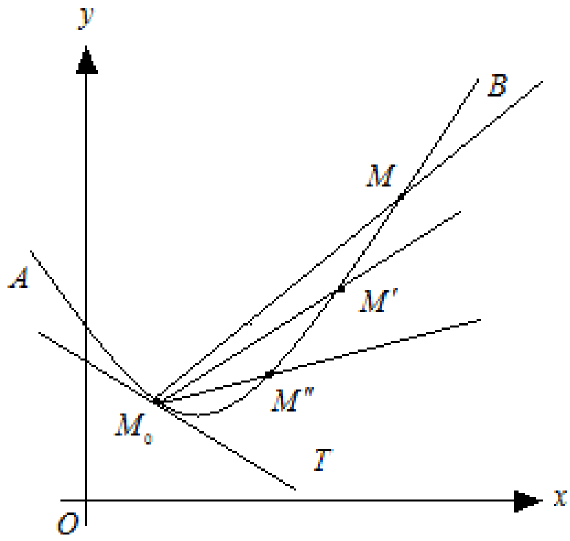


Рисунок 1.

Выберем на данной кривой какую-либо точку M_0 и, зафиксировав её, возьмём на этой же кривой произвольным образом ещё одну точку M. Проведем секущую M_0M. Затем станем приближать точку M к M_0 по кривой AB. Секущая будет при этом поворачиваться. Может случиться, что при неограниченном приближении точки M к M_0 по кривой (с любой стороны) секущая M_0M будет стремиться к некоторому предельному положению. Тогда предельное положение M_0T секущей M_0M и называется касательной к кривой AB в данной её точке M_0. При этом, говоря о предельном положении секущей M_0M, мы имеем в виду следующее: существует такая прямая M_0T, что угол ψ между ней и секущей M_0M стремиться к нулю, когда длина хорды $\rho = M_0M$ стремится к нулю:

$$\lim_{\rho \to 0} \psi = 0.$$

Вводя это определение, рассмотрим задачу о проведении касательной к данной кривой $y = f(x)$. Положим, что эта кривая AB (рис.2) имеет в данной тачке $M_0(x_0;y_0)$ касательную M_0T, которая образует с положительным лучом оси OX угол $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Задача будет решена, если найдём угловой коэффициент $k = tg\alpha$ касательной M_0T.

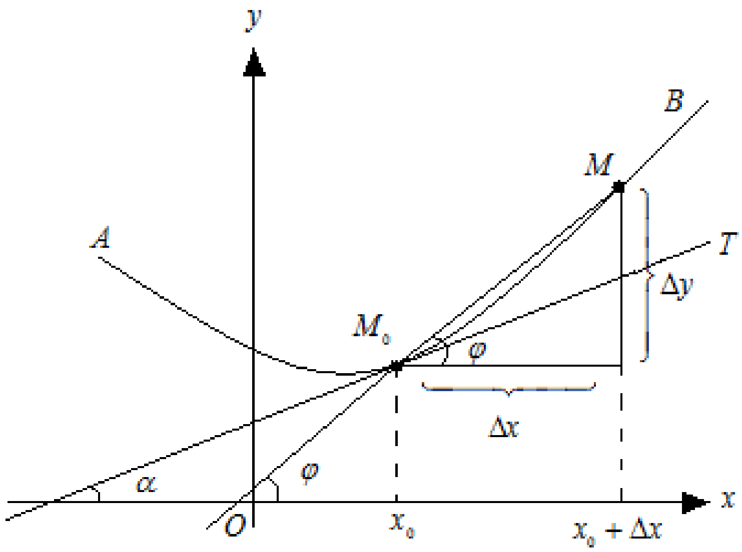


Рисунок 2.

Для решения этой задачи поступим следующим образом: дадим x_0 приращение $\Delta x \neq 0$ и, вычислив соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

возьмём на кривой точку $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$. Проведём затем секущую M_0M. Пусть эта секущая образует с положительным направление оси OX угол φ. Для угла ψ между секущей M_0M и касательной M_0T имеем:

$$\psi = |\varphi - \alpha|,$$

откуда по определению касательной

$$\lim_{\rho \to 0} |\varphi - \alpha| = \lim_{\rho \to 0} \psi = 0,$$

или, иначе говоря $\lim_{\rho \to 0} \varphi = \alpha$.

Поскольку кривая $y = f(x)$ пересекается всякой прямой, перпендикулярной к оси OX, не более чем в одной точке, то для прямой M_0M будет:

$$\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

и существует $tg\varphi$.

Проведём $M_0P \parallel OX$. Тогда из ΔM_0MP найдём:

$$tg\varphi = \frac{PM}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Устремим Δx к нулю. Тогда, в силу непрерывности функции $y = f(x)$, и Δy будет стремиться к нулю. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \rho = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

то есть при $\Delta x \to 0$ и $\rho \to 0$. Но при $\rho \to 0$ имеем: $\varphi \to \alpha$ и, значит, вследствие непрерывности тангенса

$$tg\varphi \to tg\alpha = k.$$

Отсюда следует, что существует и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi$, который также равен k, то есть существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

так что $k = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Итак, чтобы найти угловой коэффициент k касательной в точке M_0 к кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ - непрерывная функция, достаточно уметь находить предел вида:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Задача о касательной - далеко не единственная задача, сводящаяся к отысканию предела указанного вида.

2. Задача о скорости прямолинейного движения.

Пусть зависимость пути S от времени t в данном прямолинейном движении материальной точки выражается уравнением:

$$S = f(t).$$

Пусть t_0 - некоторый момент времени. Рассмотрим другой момент времени t. Обозначим $t - t_0 = \Delta t$ вычислим соответствующее приращение пути ΔS:

$$\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ меняется с изменением Δt и называется средней скоростью движения за время Δt. Скоростью v прямолинейного движения, с законом $S = f(t)$, в данный момент времени t_0 называется предел средней скорости

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

(если он существует), когда промежуток времени Δt стремится к нулю, то есть по определению

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Таким образом, чтобы уметь находить скорость прямолинейного движения в данный момент времени t_0, мы должны научиться вычислять предел указанного вида.

Итак, при решении некоторых важных задач мы сталкиваемся с необходимостью отыскания предела отношения приращения некоторой функции к соответствующему приращению её аргумента (когда последнее стремиться к нулю).

§ 2. Понятие производной функции.

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная в некоторой области значений аргумента. Выберем какую-либо точку x_0 из этой области и дадим x_0 некоторое приращение Δx, отличное от нуля (причём так, чтобы точка $x_0 + \Delta x$) принадлежала области определения функции). Вычислим соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

и составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это отношение есть некоторая функция от аргумента Δx. Может случиться, что эта функция имеет предел при $\Delta x \to 0$, то есть что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда этот предел мы будем называть производной (от) данной функции в точке x_0.

Производную от функции $f(x)$ в точке x_0 можно определить и как

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В самом деле, производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$, тогда $\Delta x = x - x_0$, причём при $\Delta x \to 0$, $x \to x_0$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Предположим теперь, что данная функция $f(x)$ в каждой точке некоторой области D имеет производную. Тогда каждому x из области D будет соответствовать своё значение этой производной, и тем самым на области D построится некоторая функция $\varphi(x)$. Эта функция называется производной функцией от данной функции или просто производной от этой функции.

Итак, производной функцией от данной функции $f(x)$ называется (при переменной x) предел отношения приращения функции $f(x)$ к приращению её аргумента, когда последнее стремиться к нулю.

Характеристику производной функции от функции $y = f(x)$ принято обозначать через f' (читается: «эф штрих»), так что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Иначе производную от $y = f(x)$ обозначают через y' (читается: «игрек штрих»); наконец, её обозначают и с помощью символа $\frac{dy}{dx}$ (который читают: «дэ игрек по дэ икс»).

Для отыскания производной от данной функции $y = f(x)$, как это следует из самого определения производной, надо:

1) произвольному значению аргумента x из области определения функции дать произвольное же приращение $\Delta x \neq 0$ и вычислить соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

2) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

3) перейти к отысканию предела этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Те значения x, для которых этот предел существует составят некоторую область D, в которой и будет существовать производная $f'(x)$ от данной функции:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Операция отыскания производной функции от данной функции называется дифференцированием.

<u>Пример 1.</u> Пусть функция заданна на $(-\infty; \infty)$ соотношением $y = f(x) = c$, где $c = const$. Найти производную функции.

Решение. Возьмём любое число x. Дадим ему произвольное приращение Δx и вычислим Δy. Так как $f(x) = c$, то и $f(x + \Delta x) = c$; поэтому $\Delta y = c - c = 0$. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$. Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, находим при произвольном y:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

то есть $f'(x)=0$. Таким образом, производная от функции, сохраняющей постоянное значение, тождественно равна нулю: $c'=0$.

Пример 2. Найти производную от функции $y=f(x)=x$.

Решение. Возьмём произвольное значение аргумента x, дадим ему приращение Δx и вычислим Δy:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x-\Delta x)-x=\Delta x.$$

Отсюда при любом x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

поэтому и

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

Итак, производная от функции, численно равной в каждой точке значению своего аргумента, тождественно равна единице: $x'=1$.

Пример 3. Найти производную от функции $f(x)=\sqrt{x}$.

Решение. Дадим x ($x\ge 0$) приращение Δx и вычислим соответствующее приращение функции (обозначим его через $\Delta f(x)$):

$$\Delta f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}, \text{ где } x+\Delta x\ge 0.$$

Далее,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$. Тогда получим:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{x+\Delta x-x}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)\Delta x}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}.$$

Если $x>0$, то предел последней дроби существует и равен

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Если же $x=0$, то дробь $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ равна $\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ и при $\Delta x \to 0$ ни к какому конечному предельному значению не стремится. Следовательно, в точке $x=0$ функция $f(x)=\sqrt{x}$ производной не имеет.

Итак, данная функция $f(x)=\sqrt{x}$, определённая на $[0;\infty)$, имеет производную лишь в $(0;\infty)$, где последняя равна

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Иначе:

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Пользуясь определением производной, найти производную функцию от функции $y=\frac{1}{x}$.

2. Пользуясь определением производной, найти производную функцию от функции $y=x^2$.

3. Пользуясь определением производной, найти производную функцию от функции $y=x^3$.

4. Обобщить результат упражнений 2 и 3 на случай $y=x^n, n\in N$.

§ 3. Геометрическое и механическое истолкование производной.

1. Геометрическое истолкование понятий производной.

В § 1 мы видели, что если график непрерывной в данной точке x_0 функции $f(x)$ имеет в соответствующей точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную, не перпендикулярную к оси OX, то угловой коэффициент k касательной равен $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Но этот предел представляет собой не что иное, как значение производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то есть $k = f'(x_0)$. Таким образом, если кривая $y = f(x)$ имеет в точке с абсциссой x_0 касательную, не перпендикулярную оси OX, то $f(x)$ имеет в точке x_0 производную. Справедливо и обратное утверждение. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную и производная от $f(x)$ в точке x_0 геометрически означает угловой коэффициент k касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$. В этом заключается геометрический смысл производной (в данной точке).

2. Механическое истолкование понятия производной.

Пусть уравнение $S = f(t)$ характеризует зависимость пути S от времени t в прямолинейном движении. Из § 1 скорость движения v в момент времени t задается равенством:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

(в предположении, что последний предел существует). Но указанный предел есть производная от функции S в точке t:

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt},$$

или, как говорится обычно в физике: скорость прямолинейного движения есть производная от пути по времени. Таково механическое истолкование понятия производной, чрезвычайно важное для физики, техники.

Заметим, что задача об определении скорости движущейся точки в данный момент времени, как и задача о проведении касательной к данной кривой в данной точке, были теми задачами, которые привели в XVII веке к открытию дифференциального исчисления (Ньютон, Лейбниц).

§ 4. Скорость изменения функции.

В § 1 для функции $S = f(t)$, где S - путь, а t - время, было введено понятие скорости движения как скорости изменения этой функции в зависимости от времени. Это понятие переносится и на случай произвольной функции $y = f(x)$. И здесь прежде всего рассматривают, исходя из данного значения аргумента x и данного приращения Δx, отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Составленное отношение называют средней скоростью изменения функции $y = f(x)$ в зависимости от изменений аргумента. Далее рассматривают предел

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(если он существует) и называют его скоростью изменения функции $y = f(x)$ в данной точке x (при данном значении x независимого переменного).

Пример 1. Скорость v прямолинейного движения зависит от времени t по закону: $v = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет производную (в каждой точке рассматриваемой области). Найти скорость W изменения функции v в данный момент времени t.

Решение. Согласно принятому определению скорости изменения функции мы можем записать:

$$W = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Этот предел, то есть скорость изменения скорости движения, называется в физике ускорением прямолинейного движения в данный момент времени t.

Таким образом, ускорение есть производная от скорости по времени.

Пример 2. Тело в процессе нагревания получает тепло, количество Q которого зависит от температуры τ по закону:

$$Q = f(\tau)$$

(где $f(\tau)$ - функция, имеющая производную). Найти скорость $\mathbb{C}$ изменения функции Q в зависимости от изменения температуры τ.

Решение. По сказанному выше $\mathbb{C}=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau}$. Эта скорость $\mathbb{C}$ называется в физике теплоёмкостью тела. Если m - масса тела, то величина $c=\dfrac{\mathbb{C}}{m}$ называется удельной теплоемкостью этого тела.

§ 5. Непрерывность функции, имеющей производную.

Свойство функции иметь производную тесно связано со свойством её быть непрерывной, а именно имеет место следующее утверждение.

Функция $y=f(x)$, имеющая в данной точке x_0 производную, непрерывна в этой точке.

Иными словами, функция, разрывная в данной точке x_1, не может иметь в этой точке производной.

Однако обратное утверждение неверно: из одного только факта непрерывности данной функции в данной точке (в данной области) ещё не следует существования у неё в этой точке (в этой области) производной.

Пример. Дана функция $f(x)=|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$ (рис.3).

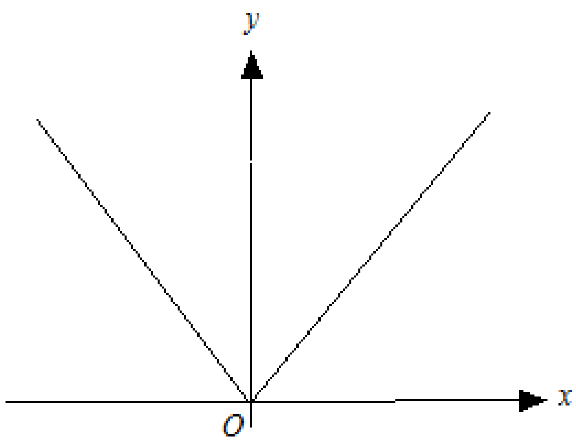


Рисунок 3.

Известно, что эта функция непрерывна в точке $x=0$. Между тем в этой точке $f(x)$ не имеет производной. В самом деле,

$$f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)=|\Delta x|,$$

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, x>0\\-1, x<0\end{cases}.$$

Отсюда очевидно, что

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1, \text{ а } \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-1.$$

Таким образом, правый и левый пределы различны и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

не существует, то есть для данной функции не существует производной в точке $x=0$. С геометрической точки зрения это означает, что график функции $y=f(x)$ не имеет в точке $x_0=0$ касательной.

§6. Общее правило дифференцирования.

Непосредственное дифференцирование функции, осуществляемое на основе определения производной, весьма утомительно при применении его к сколько-нибудь сложно устроенным функциям, поэтому устанавливают некоторые общие правила дифференцирования и выводят производные для первичных элементарных функций.

Справедливы следующие утверждения.

1. Алгебраическая сумма нескольких функций, имеющих в данной области D производные, также имеет в этой области производную, которая равна алгебраической сумме (того же вида) производных отдельных слагаемых. Например, для двух слагаемых $u(x)$ и $v(x)$ записывают:

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

2. Если функции $u=f(x)$ и $v=\varphi(x)$ имеют производные в данной области D, то и их произведение $y=u\cdot v$ имеет в этой области производную, причём

$$y'=(uv)'=u'v+uv'.$$

Следствие. Если $y=cu$, где $c=const$, а функция u имеет производную в этой области, причём $y'=cu'$.

3. Если функции u и v имеют производные в данной области D, и функция v в этой области в нуль не обращается, то и частное $y = \frac{u}{v}$ имеет в области D производную, причём

$$y' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Для примера покажем справедливость первого утверждения в случае трёх слагаемых.

Пусть $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$, $w = f_3(x)$ имеют производные в данной x области D. Рассмотрим их алгебраическую сумму, например, вида:

$$y = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) = u + v - w.$$

Дадим рассматриваемому значению x приращение Δx. Тогда и функции u, v, w получат соответственно некоторые приращения $\Delta u, \Delta v, \Delta w$. В соответствии с этим новые значения для u, v, w будут $u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w$, а новое значение для y:

$$y_1 = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w).$$

Поэтому

$$\Delta y = y_1 - y = \Delta u + \Delta v - \Delta w, \text{ а}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

По условию существуют

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = w'.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v' - w'.$$

Таким образом, для произвольного $x \in D$:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w',$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2 + x - \sqrt{x} + 3$.

Решение.

$$y' = (x^2 + x - \sqrt{x} + 3)' = (x^2)' + x' - (\sqrt{x})' + 3' = 2x + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(см. §2).

Пример 2. Найти производную функции $y = (5 - 4x^2)(4x + 1)$.

Решение.

$$y = ((5-4x^2)(4x+1))' = (5-4x^2)'(4x+1) + (5-4x^2)(4x+1)' =$$
$$(5' - (4x^2)')(4x+1) + (5-4x^2)((4x)' + 1') = -8x(4x+1) + 4(5-4x^2) =$$
$$-32x^2 - 8x + 20 - 16x^2 = -48x^2 - 8x + 20.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \dfrac{2}{x^3}$.

Решение. $y' = \left(\dfrac{2}{x^3}\right)' = \dfrac{2' \cdot x^3 - 2 \cdot (x^3)'}{x^6} = \dfrac{0 - 6x^2}{x^6} = \dfrac{-6}{x^4}$.

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{3x^2 - 8x + 2}{x^3 - 3}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{3x^2 - 8x + 2}{x^3 - 3}\right)' = \frac{(3x^2 - 8x + 2)' \cdot (x^3 - 3) - (3x^2 - 8x + 2)(x^3 - 3)'}{(x^3 - 3)^2} =$$
$$= \frac{(6x - 8)(x^3 - 3) - (3x^2 - 8x + 2) \cdot 3x^2}{(x^3 - 3)^2} = \frac{6x^4 - 8x^3 - 18x + 24 - 9x^4 + 24x^3 - 6x^2}{(x^3 - 3)^2} =$$
$$= \frac{-3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 18x + 24}{(x^3 - 3)^2}.$$

Замечание. Во всех рассмотренных примерах использовались производные найденных в §2 (включая упражнения) функций.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти y', если $y = 2x^3 - x^2 + 4\sqrt{x} + 7$.

2. Найти производную функции $y = (3\sqrt{x} + x)(7x^2 - x)$.

3. Найти производную функции $y=\dfrac{2x^3+4x^2}{3x^2-2}$.

4. Найти y' для функции:

а) $y=\dfrac{-8}{x^2}$;

б) $y=\dfrac{1}{6x}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{5}$.

§7. Производные первичных элементарных функций. Таблица производных элементарных функций.

Пример 1. Найти производную функции $y=\sin x$, пользуясь определением производной и правилами дифференцирования.

Решение. Дадим x приращение Δx и вычислим Δy:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}),$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right]=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Итак, $(\sin x)'=\cos x$

Пример 2. Найти производную функции $y=a^x$ $(a>0)$.

Решение. Беря любое действительное число x и давая ему произвольное приращение Δx, находим:

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

так как a^x постоянно относительно Δx, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Поступая аналогичным способом, мы получим производные остальных элементарных функций.

Обычно производные элементарных функций оформляются в виде таблицы:

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	$y = x^\alpha, \alpha \in R$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
5	$y = \sin x$ м	$y' = \cos x$
6	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
7	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
10	$y = e^x$	$y' = e^x$

11	$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
12	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$y=arctgx$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
15	$y=arcctgx$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$
16	$y=\arcsin$	$y'=0$

Пример 3. Найти производную функции

$$y=x^4e^x-(1+x^2)\arcsin x+\sqrt[3]{x}\cos x.$$

Решение.

$$y'=(x^4)'e^x+x^4(e^x)'-(1+x^2)'\arcsin x-(1+x^2)(\arcsin x)'+(\sqrt[3]{x})'\cos x+\sqrt[3]{x}(\cos x)'=$$

$$=4x^3e^x+x^4e^x-2x\cdot\arcsin x-(1+x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{-2}{3}}\cos x+\sqrt[3]{x}(-\sin x)=$$

$$=4x^3e^x+x^4e^x-2x\cdot\arcsin x-\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}\sin x.$$

Пример 4. Найти производную функции

$$y=\frac{tgx-1}{ctgx+2}-\frac{1}{\sin x}+2x^7\ln x+4\frac{arctgx}{2^x}.$$

Решение.

$$y'=\left(\frac{tgx-1}{ctgx+2}\right)'-\left(\frac{1}{\sin x}\right)'+\left(2x^7\ln x\right)'+\left(4\frac{arctgx}{2^x}\right)'=$$

$$=\frac{(tgx-1)'(ctgx+2)-(tgx-1)(ctgx+2)'}{(ctgx+2)^2}-\frac{1'\cdot\sin x-1\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}+(2x^7)'\ln x+$$

$$+2x^7(\ln x)'+\frac{(4arctgx)'2^x-4arctgx\cdot(2^x)'}{2^{2x}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(ctgx+2)-(tgx-1)\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{(ctgx+2)^2}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}+14x^6\ln x+2x^7\frac{1}{x}+$$

$$+\frac{\frac{4}{1+x^2}\cdot 2^x-4arctgx\cdot 2^x\ln 2}{4^x}=\frac{\sin^2 x(ctgx+2)+\cos^2 x(tgx-1)}{\cos^2 x\sin^2 x(ctgx+2)^2}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}+$$

$$+2x^6(7\ln x+1)+\frac{2^{2-x}(1+(1+x^2)arctgx\cdot\ln x)}{1+x^2}.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Пользуясь производными $(\sin x)'=\cos x$ и $(\cos x)'=-\sin x$ и правилом дифференцирования частного двух функций, вывести формулу:

$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Показать, что $(e^x)'=e^x$, используя $(a^x)'$.

3. Найти производную y', пользуясь таблицей, если

$y=\frac{2}{x^3}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}$.

4. Найти y', если

$y=3^x(\sin x+\cos x)+\frac{2\arccos x}{1-x^2}-2x^3arctgx$.

5. Найти y', если

$y=2\left(\frac{1}{4}x^8+x^2\right)\ln x-\frac{\sqrt{x}}{3\arcsin x}$.

6. Показать, что функция $y=e^x\left(\ln x+\frac{x^2 2}{}+1\right)$ удовлетворяет условию:

$x(y'-y)=(1+x^2)e^x$.

7. Найти значение производной функции $f(x)=\sqrt[4]{x}$ в точке $x=1$.

8. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=4$.

9. Показать, что (при переменном радиусе R) поверхность шара S есть производная от его объёме V по радиусу R, то есть $S=\frac{dV}{dR}$.

10. Зависимость пути S от времени t в прямолинейном движении даётся формулой: $S = t^4$. Найти скорость движения:

а) в произвольный момент времени;

б) в момент времени $t = 3$.

Найти ускорение движения в момент времени $t = 2$.

§8. Производная сложной функции.

Введенные выше правила дифференцирования не дают ещё возможности вычислять производные от многих функций, например от

$$f(x) = 2^{\sin x}$$

или от

$$\varphi(x) = \ln^3(6x^2 + 1) \text{ и т.п.}$$

Введём правило дифференцирования сложной функции, которое восполнит этот пробел.

Пусть дана сложная функция $y = F(x)$, определяемая соотношениями $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Тогда справедливо утверждение.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в данной точке производную, а функция $y = f(u)$ в соответствующей точке «u» также имеет производную (по аргументу «u»), то и сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ имеет в точке x производную, причём

$$y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$$

(индексы внизу у характеристик указывают, по какому аргументу ведётся дифференцирование).

Иными словами, производная сложной функции (функции от функции) $y = f[\varphi(x)]$ по независимой переменной x равна производной заданной функции по промежуточному аргументу $u = \varphi(x)$, умноженной на производную промежуточного аргумента «u» по независимому переменному x.

Коротко записывают так:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = 2^{\sin x}$.

Решение. Мы имеем сложную функцию. Здесь $y = f(u) = 2^u$, где $u = \varphi(x) = \sin x$. Так как $y'_u = (2^u)' = 2^u \ln 2$, а $u'_x = \cos x$, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2^u \ln 2 \cdot \cos x = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x,$$

то есть $(2^{\sin x})' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \cos^4 x$.

Решение. Положим $\cos x = u$, тогда

$$y = u^4,$$

$$y'_u = 4u^3,$$

$$u'_x = -\sin x,$$

поэтому

$$y'_x = -4u^3 \sin x = -4\cos^3 x \cdot \sin x,$$

то есть

$$(\cos^4 x)' = -4\cos^3 x \cdot \sin x.$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = \ln^3(6x^2 + 1)$.

Решение. Вводя обозначения

$$\ln(6x^2 + 1) = u,$$

мы получим:

$$y = u^3.$$

Тогда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 u'_x.$$

Но здесь функция

$$u = \ln(6x^2 + 1)$$

сама является сложной функцией. Обозначив $6x^2 + 1$ через v, можем написать:

$$u = \ln v,\ v = 6x^2 + 1.$$

Тогда

$$u'_x = u'_v v'_x = \frac{1}{v} \cdot 12x = \frac{12x}{6x^2 + 1}.$$

Подставляя найденное значение u'_x в выражение для y'_x, найдем:

$$y'_x = 3u^2 \frac{12x}{6x^2 + 1} = \frac{36x}{6x^2 + 1} \ln^2(6x^2 + 1).$$

Нужно иметь в виде, что не следует злоупотреблять записью, с *фактическим* обозначением промежуточного аргумента. При навыке действия по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

должны производиться в уме. Например, для функции

$$y = \ln \sin x$$

имеем

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx.$$

Рассуждения ведутся примерно так: промежуточным аргументом является $\sin x$, производная от y по $\sin x$ равна $\frac{1}{\sin x}$; эту производную надо для получения y'_x ещё умножить на производную промежуточного аргумента по x, то есть на $(\sin x)' = \cos x$.

Постепенный переход к такой записи от записи, явно указывающей (в специальных обозначениях) звенья сложной функции, может быть совершён через запись, где первый сомножитель из формулы y'_x уже вычислен, а второй лишь указан. Например:

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' \text{ и т.д.}$$

Применим формулу дифференцирования сложной функции к нахождению производных гиперболических функций.

Для гиперболического синуса

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

находим

$$(shx)' = \frac{e^x - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

то есть $(shx)' = chx$. Аналогично получаем $(chx)' = shx$.

Для гиперболического тангенса имеем

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)'chx - shx(chx)'}{ch^2x} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x},$$

а для котангенса:

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти y', если:

а) $y = \sin 4x$; б) $y = \cos\frac{x}{2}$;

в) $y = e^{-3x+1}$; г) $y = \arcsin 2x$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y = \ln^3 x$; б) $y = tg^2 x$;

в) $y = \arcsin^4 x$; г) $y = arctg^5 x$;

д) $y = ctgx^2$; е) $y = \sin x^3$.

3. Найти y' для функций:

а) $y = \sqrt[3]{\arcsin 3x}$; б) $y = \sqrt{\ln^3 4x}$;

в) $y = \sqrt[4]{ctg^3 2x}$; г) $y = \sqrt{\sin^5 3x}$;

д) $y = arctg\sqrt{6x}$; е) $y = ctg\sqrt[3]{x}$.

4. Найти y',если:

а) $y = (x^2 + 4)^4 \sin 2x$;

б) $y = (3x^3 + 2x)^3 e^{2x}$;

в) $y = (4x^6 + x^5 + 1)^6 arctg3x$.

5. Найти производные функции:

а) $y=\dfrac{e^{4x+3}}{\sqrt{5x+2}}$; б) $y=\dfrac{\ln(5x+6)}{(x^2+4x)^3}$;

в) $y=\dfrac{\cos(7x+\varphi)}{(2x+3)^2}$; г) $y=\dfrac{\sin\left(6x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{2x^2+7}}$.

6. Найти y' для следующих функций:

а) $y=sh^2 2x$; б) $y=ch^3 x\sqrt{3x+8}$;

в) $y=\dfrac{tg(3x+2)}{\ln^2(2x+1)}$; г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}cth5x$;

д) $y=\sqrt{chx}\cdot e^{2x+9}$; е) $y=\sqrt[3]{\ln(shx)}$.

§9. Логарифмическое дифференцирование.

Пусть надо продифференцировать функцию

$$y=\sqrt[3]{\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}}.$$

При $x\neq\pm1$ и $x\neq 0$ находим:

$$y'=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}\right]^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}\right)'==\frac{1}{3}\frac{\sqrt[15]{(1-x)^2}}{x\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(5x^4+2x)\sqrt[5]{1-x}-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{\sqrt[5]{(1-x)^4}}(-1)(x^5+x^2)}{\sqrt[5]{(1-x)^2}}.$$

После алгебраических преобразований окончательно получаем:

$$y'=\frac{-24x^4+25x^3-9x+10}{15(1-x)\sqrt[15]{(x^3+1)^{10}(x^5-x^6)}}.$$

Вычисления были громоздкими. Проще здесь поступить следующим образом: вместо y рассматривать функцию

$$z=\ln|y|=\ln\sqrt[3]{\frac{x^2|x^3+1|}{\sqrt[5]{|1-x|}}}.$$

Логарифмирование даёт:

$$z = \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| - \frac{1}{15}\ln|1 - x|.$$

Тогда

$$z' = \frac{2}{3x} + \frac{1}{3(x^2+1)}\cdot 3x^2 - \frac{1}{15(1-x)}\cdot(-1) = \frac{-24x^4 + 25x^3 - 9x + 10}{15x(1-x)(x^3+1)}.$$

С другой стороны,

$$z' = (\ln|y|)' = \frac{1}{y}\cdot y',$$

откуда $y' = z'y$, то есть

$$y' = \frac{-24x^4 + 25x^3 - 9x + 10}{15x(1-x)(x^3+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}}.$$

Несложными преобразованиями можно привести этот ответ для y' к ранее найденному (если бы в этом встретилась необходимость).

Употреблённый только что приём дифференцирования носит название логарифмического дифференцирования. Общие основы его таковы.

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в своей области определения D производную и не обращающаяся в этой области на разу в нуль. Составим новую функцию:

$$z = \ln|f(x)| = \ln|y|.$$

Она имеет ту же область определения D, что и $f(x)$ (поскольку в D $f(x) \neq 0$) и обладает в этой области производной (как сложная функция). Эта производная z' связана с y' соотношением:

$$z' = \frac{1}{y}\cdot y',$$

откуда

$$y' = z'y.$$

Таким образом, вычисление y' может быть сведено к вычислению z'.

Такое сведение нередко применяют в тех случаях, когда вычисление z' производится проще, чем непосредственное вычисление y'. Именно по такой схеме мы и действовали в рассматриваемом примере.

Применим метод логарифмического дифференцирования к отысканию производной показательно-степенной функции

$$y = [u(x)]^{v(x)},$$

где берутся лишь такие значения аргумента x, для которых $u(x) > 0$. Очевидно, y принимает только положительные значения.

Предположим, что функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют в данной области определённые производные. Тогда функция $z = \ln y = v \ln u$ также имеет в этой области производную, причем

$$z' = (v \ln u)' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'.$$

С другой стороны, поскольку $y = e^{\ln y} = e^z$, то функция $y = u^v$ также имеет производную в указанной области, причём

$$y' = e^z \cdot z' = y \cdot z',$$

то есть

$$y' = u^v (v' \ln u + v \frac{1}{u} u'), \text{ или } (u^v)' = v \cdot u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Эту формулу легко запомнить, если заметить, что, полагая в равенстве $y = u^v$, $v = const$, мы для y' получаем выражение равное первому слагаемому правой части формулы, а, полагая $u = const$,найдём для y' второе слагаемое.

Итак, производная показательно-степенной функции получается, если эту функцию один раз продифференцировать как степенную, а другой раз как показательную, и результаты сложить.

<u>Пример1.</u> Найти y' для $y = x^x$.

Решение. $y' = x \cdot x^{x-1} \cdot x' + x^3 \ln x \cdot x' = x^x \cdot 1 + x^x \ln x \cdot 1 = x^x (1 + \ln x)$.

<u>Пример 2.</u> Найти y' для $y = (\sin x)^{\cos x}$, $\sin x > 0$.

Решение.

$$y' = \cos x \cdot (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x + (\sin x)^{\cos x} \cdot \ln\sin x \cdot (-\sin x) =$$
$$= (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln\sin x).$$

§10. Производные высших порядков.

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в данной области D производную: $y' = f'(x)$. Может оказаться, что функция $f'(x)$ в свою очередь имеет в некоторой области D_1 производную, то есть существует (в этой области):

$$(y')' = (f'(x))'.$$

Эта производная по отношению к данной функции $y = f(x)$ называется производной второго порядка или, коротко, второй производной и обозначается: y'', или $f''(x)$, причём в связи с этим производная y' называется производной первого порядка или первой производной от y.

Применяется также и обозначение: $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ (читается: «дэ два игрек по дэ икс квадрат»).

В свою очередь функция $y'' = f''(x)$ может снова иметь производную в какой-либо области D_2, тогда производная от $f''(x)$ называется по отношению к данной функции производной третьего порядка или, коротко, третьей производной и обозначается: y''', или $f'''(x)$, а также $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

Аналогично вводится понятие производной четвертого порядка (четвертой производной). Вообще, производной *n*-го порядка (*n*-й производной) от данной функции, называется производной от её (n-1)-й производной (в предположении, конечно, что эти производные существуют). Её обозначают часто через $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Производные порядка выше третьего часто обозначают с помощью употребления римских цифр, например, четвертая производная обозначается:

$y^{IV}(x)$; пятая $y^{V}(x)$, или y^{V}, и т.д. Применяют также и следующие обозначения: $y^{(4)}$, или $y^{(4)}(x)$, $y^{(5)}$ или $y^{(5)}(x)$, и вообще (для производной *n*-го порядка): $y^{(n)}$ или $y^{(n)}(x)$. С помощью таких обозначений определение *n*-й производной может быть выражено следующим образом:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

При $n > 1$ производная $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ называется производной высшего порядка от функции $y = f(x)$.

Процесс отыскания всех производных рассматриваемой функции до данного порядка включительно называется последовательным дифференцированием этой функции.

Ранее было введено понятие ускорения в прямолинейном движении с законом $S = f(t)$. В предположении, что скорость этого движения $v = \varphi(t)$ есть функция, имеющая производную в данной точке t, мы определили ускорение w в момент времени t как производную (в данной точке t) от скорости по времени:

$$w = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t).$$

Но $v = \varphi(t) = f'(t)$, поэтому

$$w = \varphi'(t) = [f'(t)]' = f''(t) = \frac{d^2 S}{dt^2},$$

и мы можем, следовательно, сказать, что ускорение в прямолинейном движении от пути по времени:

$$w = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

В этом и состоит механический смысл второй производной.

<u>Пример 1</u>. $y = (6 - x^2)\sin x - 4x\cos x$. Найти y''.

Решение. Вычислим сначала y':

$$y' = -2x\sin x + (6 - x^2)\cos x - 4\cos x + 4x\sin x = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x.$$

Теперь находим y'':

$$y'' = (y')' = 2\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x - (2 - x^2)\sin x = x^2 \sin x.$$

Итак, $y'' = x^2 \sin x$.

<u>Пример 2.</u> $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. Имеем: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$. Так как $y^{IV} = y$, то дальше производные начнут периодически повторяются: $y^{V} = y'$, $y^{VI} = y''$, $y^{VII} = y'''$, $y^{VIII} = y^{IV} = y$. Вообще $y^{(4k)} = y$, $y^{(4k+1)} = y'$, $y^{(4k+2)} = y''$, $y^{(4k+3)} = y'''$ ($k = 0,1,2,3...$), причем под $y^{(0)}$ понимается сама функция y.

Нередко приходится отыскивать *k*-ю производную от произведения $y = uv$ двух функций $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$. Непосредственно такое отыскание часто бывает выполнить затруднительно. Поэтому для $(uv)^{(n)}$ выводится специальная формула, называемая формулой Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{(n-3)}v''' + ... +$$
$$+ \frac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}u^{(n-k)}v^{(k)} + ... + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + u\cdot v^{(n)}.$$

<u>Пример 3.</u> $y = x^2 e^x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. Полагая $u = x^2$ и $v = e^x$, находим:

$u' = 2x$, $u'' = 2$,

$u''' = u^{IV} = ... = u^{(n)} = 0 \ (n > 2)$,

$v' = e^x$, $v'' = e^x$, …, $v^{(n)} = e^x$.

Применяя формулу Лейбница, получим:

$$y^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2e^x + n\cdot 2xe^x + x^2e^x + (x^2 + 2nx + n^2 - n)e^x.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. $y = 7x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 4x + 3$. Найти $y^{(n)}$.

2. $f(x) = \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Найти $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Доказать, что функция $y = ae^{2x} + be^{3x}$ удовлетворяет условию $y'' - 5y' = -6y$.

4. Найти $y^{(n)}$ для функции:

а) $y = ae^{bx}$;

б) $y = \sin^2 x$;

в) $y = x^3 \ln x$.

5. Движение происходит прямолинейно по закону $S = t^3 - 6t^2 + 9t$, где S выражается в метрах, а время t - в секундах. Найти ускорение движения в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$.

§11. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Имеет место следующее утверждение о производной обратной функции. Если монотонная и непрерывная на данном промежутке функция $y = f(x)$ имеет в точке x этого промежутка производную, отличную от нуля, то и обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$, построенная на соответствующем промежутке, имеет в соответствующей точке y_0 ($y_0 = f(x_0)$) производную, причём

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следствие. Если функция $y = f(x)$ в некотором промежутке имеет производную $f'(x)$ в каждой точке этого промежутка, причём $f'(x) \neq 0$, то и обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$ имеет в соответствующем промежутке производную $\varphi'(y)$, и $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ задана параметрически системой: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - функции, имеющие на данном промежутке L производные, причём $\varphi'(t) \neq 0$. Так как $\varphi'(t) \neq 0$ на промежутке L, то функция $x = \varphi(t)$ имеет на соответствующем промежутке L' обратную функцию

$t=\overline{\varphi}(x)$. Эта функция будет иметь на L' производную $\overline{\varphi}'_x$, и $\overline{\varphi}'_x=\dfrac{1}{\varphi'_t(t)}$. По теореме о производной о сложной функции функция

$$y=f(x)=\psi[\overline{\varphi}(x)]$$

обладает на L' производной, причём

$$f'(x)=\psi'_t(t)\cdot\overline{\varphi}'_x(x)=\psi'_t(t)\frac{1}{\varphi'_t(t)},$$

или, опуская индексы: $f'(x)=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пример 1. Функция $y=f(x)$ задана параметрически системой: $x=2\sin t$, $y=2\cos t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$. Областью определения $f(x)$ является сегмент $[-2;2]$. Так как функции $\varphi(t)=2\sin t$ и $\psi(t)=2\cos t$ имеют производные в каждой точке t, причём $\varphi'(t)\neq 0$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, то можно утверждать, что определяемая данной системой функция $y=f(x)$ имеет в каждой точке интервала $(-2;2)$ производную:

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{(2\cos t)'}{(2\sin t)'}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-tgt.$$

В точках $t=\pm\dfrac{\pi}{2}$ имеем: $\varphi'(t)=0$. В соответствующих точках $x=\pm 2$ функция $f(x)$ не имеет производной.

Предположим, что на данном промежутке L функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные как первого, так и второго порядков и что на нём $\varphi'(t)\neq 0$. Производная $f'(x)$ рассматривается как сложная функция от x:

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ t=\overline{\varphi}(x).$$

Из существования $\varphi''(t)$ и $\psi''(t)$ заключаем, что на L существует производная от $f'(x)$ по t. По теореме о производной сложной функции на L' существует и $f''(x)$, причём

$$f''(x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx},$$

откуда, в виду того, что

$$\frac{dt}{dx} = \overline{\varphi}'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}$$

имеет

$$f''(x) = \frac{[f'(x)]'_t}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}.$$

<u>Пример 2.</u> Найти $f'(x)$ и $f''(x)$ для функции $y = f(x)$, заданной в параметрической форме уравнениями:

$$x = \varphi(t) = t - 2\sqrt{t}\ ,\ x = \psi(t) = t + 2\sqrt{t}\ ,\ (1 < t < \infty).$$

Решение. Прежде всего здесь существует $\varphi'(t) \neq 0$. Следовательно, данная система определяет y как функцию от x. Областью определения этой функции будет $(-1;\infty)$. Далее, на $(1;\infty)$ существует и $\psi'(t)$, значит на $(-1;\infty)$ существует $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{t}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{t}-1}$$

для $t > 1$, или, что то же, для $x > -1$. Но производные $\varphi''(t)$ и $\psi''(t)$ также существуют на $(1;\infty)$. Следовательно, существует на $(-1;\infty)$ функция

$$f''(x) = \frac{d}{dt}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}-1}\right)\frac{1}{(t - 2\sqrt{t})'} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{t}}}{(\sqrt{t}-1)^2}\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{t}}} = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)^3} = -\frac{1}{(\sqrt{t}-1)^3}.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Проверить, что система $x=2t^2+1$, $y=4-t^3$ $(t\geq 0)$ определяет y как функцию от x на $[1;\infty)$, и найти явное выражение y через x.

2. Записать параметрические уравнения:

а) окружности $x^2+y^2=r^2$;

б) эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

в) гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3. Найти y'_x и y''_x для функции, заданной уравнениями: $x=t-\ln t$, $y=t+\ln t$ $(1<t<\infty)$.

§12. Понятие дифференциала функции.

Пусть дана функция $y=f(x)$, имеющая в данной точке x производную $f'(x)$. Так как

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то можно записать $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

При данном x приращение Δy есть функция только от Δx. При этом оба слагаемых в правой части стремятся к нулю при $\Delta x\to 0$ и является величинами бесконечно малыми. Но второе из этих слагаемых есть произведение двух бесконечно малых и в сравнении с Δx является бесконечно малым высшего порядка малости. Поэтому (при $f'(x)\neq 0$) главное влияние на величину Δy приращения функции оказывает при малых Δx первое слагаемое. Она называется, независимо от значения $f'(x)$, главной или линейной частью приращения Δy функции $y=f(x)$ или её дифференциалом в данной точке x и обозначается: dy, или $df(x)$.

Следовательно, по определению $dy=f'(x)\Delta x$, или $dy=y'\Delta x$.

Итак, дифференциалом функции $y = f(x)$ в данной точке x называется произведением этой функции в выбранной точке на приращение Δx независимого переменного.

При введенных обозначениях можно записать:

$\Delta y = dy + \alpha \Delta x$.

При достаточно малом Δx мы можем пользоваться приближенным равенством: $\Delta y \approx dy$, которое дает тем лучшее приближение для Δy, чем меньше Δx. Это соотношение широко применяется в теории приближенных вычислений. Его можно переписать так:

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

<u>Пример 1.</u> Дана функция $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 57x - 33$. Вычислить приращение функции, получаемое ею при переходе аргумента от значения $x = 4$ к значению $x = 4{,}0003$.

Решение. Находим:

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 57$,

$f'(4) = 3 \cdot 16 - 24 \cdot 4 + 57 = 9$,

$\Delta x = 4{,}0003 - 4 = 0{,}0003$.

Следовательно,

$dy = f'(4) \cdot \Delta x = 9 \cdot 0{,}003 = 0{,}0027$,

а $\Delta y \approx 0{,}0027$.

<u>Пример 2.</u> Вычислить без помощи таблицы $\sin 45^\circ 6'$.

Решение. Здесь $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = \frac{\pi}{1800}$ ($\frac{\pi}{1800}$ - радианная мера угла в $45^\circ 6'$), тогда получим, учитывая, что

$f'(x) = \cos x$;

$$\sin 45^\circ 6' = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{1800}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{1800}.$$

Но $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70711$, а $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{1800} \approx 0{,}001233$, поэтому

$$\sin 45^\circ 6' = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{1800}\right) \approx 0{,}70711 + 0{,}00123 \approx 0{,}7083 .$$

Пример 3. Ход стенных часов регулируется маятником, период качания которого T (в секундах) определяется по формуле:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l - длина маятника (в сантиметрах), g - ускорение силы тяжести ($g \approx 980\dfrac{см}{сек^2}$). Перемещая с помощью винта груз маятника, можно изменить длину маятника. Часы отстают, и маятник совершает одно качание в течение 0,602 секунды, вместо того, чтобы совершать его в течение 0,6 секунд. На сколько следует уменьшить длину маятника, чтобы часы шли верно?

Решение. Из формулы, связывающей T и l, находим:

$$l = \frac{gT^2}{\pi^2}.$$

Речь идет о том, чтобы вычислить то приращение Δl длины l маятника, которое соответствует уменьшению периода T от значения $T_1 = 0{,}602$ до значения $T_2 = 0{,}6$.

Имеем $dl = \dfrac{2gT}{\pi^2}\Delta T$, что при $T = T_1 = 0{,}602$ и $\Delta T = -0{,}002$ даёт:

$$dl = \frac{-2g\cdot 0{,}602\cdot 0{,}002}{\pi^2} \approx \frac{-2\cdot 980\cdot 0{,}602\cdot 0{,}002}{9{,}87} \approx -2{,}4(мм),$$

откуда и $\Delta l \approx -2{,}4(мм)$.

Итак, длина маятника должна быть уменьшена приблизительно на 2,4 мм.

Дифференциалом dx независимого переменного x называется его приращение, то есть по определению $dx = \Delta x$. Тогда $dy = f'(x)dx$, откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Тем самым обозначение производной через $\dfrac{dy}{dx}$ перестаёт теперь быть лишь символом, а становится обычным обозначением частного.

Справедливы следующие соотношения:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2) $d(u \cdot v) = vdu + udv$;

3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$,

где u и v - две функции от x, имеющие в данной области D производные u' и v' (в случае частного берутся лишь те точки области D, в которой $v \neq 0$).

Пример 4. Найти дифференциал функции

$y = (x^2 + 1)(arctgx)^2 - 2xarctx + \ln(1 + x^2)$.

Решение.

$dy = (arctgx)^2 d(x^2 + 1) + (x^2 + 1)d(arctgx)^2 - 2xarctxdx - 2xd(arctgx) + d\ln(1 + x^2)$,

так как

$$d(x^2 + 1) = (x^2 + 1)'dx = 2xdx,$$

$$d(arctgx) = (arctgx)'dx = \frac{1}{1 + x^2}dx,$$

$$d(arctgx)^2 = [(arctgx)^2]'dx = \frac{2arctgx}{1 + x^2}dx,$$

$d\ln(1 + x^2) = \dfrac{1}{1 + x^2}2xdx$, то

$$dy = 2x(arctgx)^2 dx + 2arctgxdx - 2xarctxdx - 2\frac{x}{1 + x^2}dx + 2\frac{x}{1 + x^2}dx = 2x(arctgx)^2 dx.$$

Разумеется здесь можно было сначала найти y' и затем составить $dy = y'dx$.

Пусть равенствами $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ задана некоторая сложная функция y независимого переменного t. Тогда в условиях теоремы о производной сложной функции имеем:

$$\frac{dy}{dx} = f'_x(x)\varphi'_t(t).$$

Отсюда $dy = f'_x(x)\varphi'_t(t)dt$, или, опуская значок внизу у $f'_x(x)$ и замечая, что $\varphi'_t(t)dt = dx$, получаем: $dy = f'_x(x)dx$.

Итак, дифференциал функции всегда выражается формулой

$dy = f'_x(x)dx$,

как в том случае, когда y - простая функция (то есть x - независимое переменное), так и в том случае, когда y - сложная функция (x - функция некоторого аргумента t). В этом и заключается свойство инвариантности (неизменяемости) дифференциала функции.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{x}$.

2. Вычислить приращение функции $y = 2x^4 - 3x^3 - 4x - 43$, получаемое ею при переходе аргумента от значения $x = 3$ к значению $x = 3{,}0012$.

3. Найти без помощи таблиц приближенное значение для $tg 61^\circ 30'$.

4. При определении силы тока пользуются формулой: $J = ktg\varphi$, где J - сила тока, k - коэффициент пропорциональности (зависящий от прибора), φ - угол отклонения стрелки прибора. Определить относительную ошибку результата зависящую от неточности в отсчете угла φ. При каком положении стрелки прибора результаты получаются наиболее надёжными?

§13. Теоремы о средних значениях.

В этом параграфе сформулируем теоремы, играющие важную роль как в самом математическом анализе, так и в его приложениях.

Лемма. Если функция $f(x)$, определённая на данном интервале $(a;b)$, принимает в какой либо точке ξ этого интервала наибольшее или наименьшее значение и имеет в этой точке производную $f'(\xi)$, то последняя равна нулю: $f'(\xi) = 0$.

То, что производная от функции $f(x)$ в некоторой точке ξ равна нулю, геометрически означает, что угловой коэффициент касательной в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ равен нулю. Поэтому лемма имеет следующее геометрическое истолкование: если кривая AB (рис. 4) является графиком функции $y = f(x)$ и $f(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы на интервале $(a;b)$, то касательная к кривой AB в некоторой точке $M(\xi; f(\xi))$, где $a < \xi < b$, параллельна оси OX (или совпадает с ней).

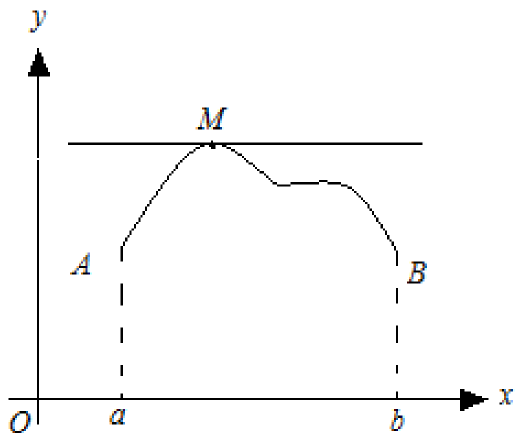


Рисунок 4

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на данном сегменте $[a;b]$, имеет производную хотя бы в интервале $(a;b)$ и значения функции в точках $x = a$ и $x = b$ равны, то есть $f(a) = f(b)$, то в интервале $(a;b)$ найдётся по крайней мере одна такая точка $x = \xi$, в которой производная данной функции обращается в нуль: $f'(\xi) = 0$.

Геометрическое истолкование теоремы Ролля таково: на кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ на $[a;b]$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы, найдется по крайней мере одна точка $M(\xi; f(\xi))$, в которой касательная к этой кривой параллельна оси OX (или совпадает с ней) (рис.4).

Значение ξ аргумента x, удовлетворяющее неравенству $a < \xi < b$, иногда называется средним (промежуточным) между a и b.

<u>Пример 1</u>. Функция $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - x^2$ на $[-2;2]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: во-первых, $f(-2) = f(2)$, во-вторых, данная функция имеет на $[-2;2]$ производную $f'(x) = 2x^3 - 2x$, а следовательно, и непрерывна на нём. Тогда по теореме Ролля существует в $(-2;2)$ по крайней мере одна такая точка, в которой производная данной функции $f(x)$ равна нулю (рис. 5).

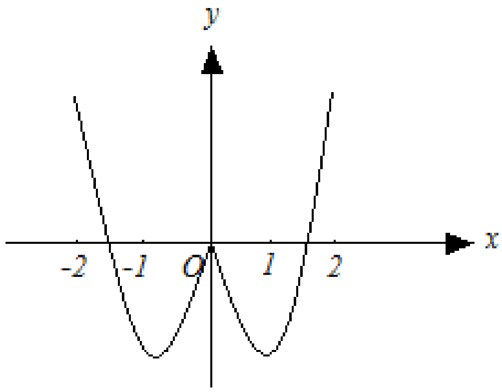


Рисунок 5.

Из выражения производной видно, что таких точек здесь три: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, имеет производную хотя бы в $(a;b)$ и точки a и b являются корнями этой функции, то между этими точками содержится по крайней мере один корень производной данной функции.

Теореме Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на данном сегменте $[a;b]$ и имеет производную хотя бы в интервале $(a;b)$, то в этом интервале найдётся по крайней мере одно число ξ такое, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Формула Лагранжа может быть иллюстрирована геометрически.

Пусть на рисунке 6 представлен график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей на $[a;b]$ всем условиям теоремы Лагранжа. Пусть A и B - точки графика, соответствующие значениям $x = a$ и $x = b$. Ординаты этих точек будут соответственно $f(a)$ и $f(b)$. Проведем секущую AB, а также прямую AC, параллельную оси OX. Угол, образуемый секущей AB с положительным направлением оси OX, обозначим через α. Тогда

$$tg\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

так что левая часть формулы Лагранжа представляет собой геометрически угловой коэффициент хорды AB. В правой же части этой формулы находится значение производной $f'(x)$ для $x=\xi$, то есть значение углового коэффициента касательной к кривой $y=f(x)$ в некоторой точке M с абсциссой ξ. Обозначая через ω угол, который образует с положительным направлением оси OX касательная к кривой $y=f(x)$ в точке M, будет иметь

$$f'(\xi)=tg\omega$$

и, значит

$$tg\alpha=tg\omega,$$

откуда $\alpha=\omega$.

Таким образом, формула Лагранжа утверждает, что при соответствующих требованиях, наложенных на $f(x)$, имеет место следующий геометрический факт: на дуге AB с уравнением $y=f(x)$ найдётся такая точка M (по крайней мере одна), в которой касательная параллельна хорде AB, стягивающей эту дугу.

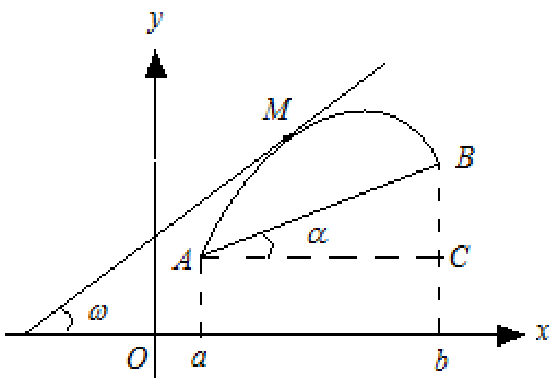


Рисунок 6.

Пример 2. Рассмотрим на сегменте $[-1;1]$ функцию $f(x)=5x^3+11x^2$. Эта функция на $[-1;1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. Тогда, так как

$$f(-1)=6,$$

$$f(1)=16,$$

$$f'(x)=15x^2+22x,$$

по формуле Лагранжа получаем

$$16-6=[1-(-1)](15\xi^2+22\xi),$$

откуда

$$\xi = \frac{-11 \pm \sqrt{121+75}}{15} = \frac{-11 \pm 14}{15},$$

$$\xi_1 = \frac{1}{5},\ \xi_2 = -\frac{5}{3}.$$

Но число $-\frac{5}{3}$ не принадлежит $[-1;1]$, остается $\xi = \frac{1}{5}$.

Следствие. Если непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет, хотя бы в $(a;b)$, производную, равную нулю, то $f(x)$ постоянна на всём данном сегменте.

Теорема Коши. Если функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на данном сегменте $[a;b]$ и хотя бы в интервале $(a;b)$ имеют производные, причём производная функции $\varphi(x)$ ни в какой точке этого интервала не обращается в нуль: $\varphi'(x) \neq 0$, то в интервале найдётся хотя бы одна точка ξ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Теорема Дарбу. Если функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке производную $f'(x)$, которая в двух каких-либо точках $x=a$ и $x=b$ ($a<b$) этого промежутка принимает различные значения: $f'(a)=A$ и $f'(b)=B$, то эта производная на данном промежутке принимает и всякое промежуточное между A и B значение, то есть, каково бы ни было число C между A и B, всегда найдётся в $(a;b)$ хотя бы одна точка c такая, что $f'(c)=C$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Проверить применимость теоремы Ролля к следующим функциям:

а) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x + 1$ на $[-1;1]$;

б) $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x^2}$ на $[-8;8]$;

в) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на $[1;2]$;

г) $f(x)=\begin{cases} x+1, -1\le x\le 0, \\ e^x, 0<x\le 1. \end{cases}$.

В случае применимости теоремы найти точки, в которых производная данной функции равна нулю.

2. Проверить применимость теоремы Лагранжа к функциям:

а) $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$ на $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

б) $f(x)=\ln x$ на $[1;e]$.

В случае применимости теоремы найти значение ξ.

3. Удовлетворяют ли условиям теоремы Коши функции:

а) $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$ на $[1;4]$;

б) $f(x)=e^x$, $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ на $[-3;3]$;

в) $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$ на $[-1;1]$?

4. В какой точке касательная к кривой $y=x^2+3x+1$ параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1;1)$ и $B(1;5)$?

§14. Формула Тейлора для многочленов.

Пусть дан многочлен n-й степени:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ - данные числа.

Зафиксируем за переменным x некоторое определённое значение a и дадим этому значению приращение h. Соответствующее значение функции $f(x)$ в точке $a+h$ будет (при переменном h) некоторой функцией от h:

$$f(a+h)=a_0+a_1(a+h)+a_2(a+h)^2+...+a_n(a+h)^n.$$

Так как $(a+h)^k$ при любом натуральном k является многочленом степени k, то $f(a+h)$ будет многочленом n-й степени относительно h. Таким образом,

$$f(a+h)=A_0+A_1h+A_2h^2+...A_kh^k+...+A_nh^n.$$

Можно показать, что $A_0, A_1, A_2, ..., A_k, ..., A_n$ находятся по формулам: $A_0 = f(a)$, $A_1 = f'(a)$, $A_2 = \frac{1}{2!} f''(a)$, $A_3 = \frac{1}{3!} f'''(a)$, …, $A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$, …, $A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$.

Тогда имеем

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Число a является произвольным значением аргумента. Заменяя a более привычным для аргумента обозначаем x, можно записать:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + ... + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Это равенство носит название формулы Тейлора для многочленов, она даёт разложение значения $f(x+h)$ многочлена $f(x)$ по степеням приращения h аргумента x.

Формулу Тейлора часто записывают в несколько другом виде. Обозначая $a+h$ через x (откуда $h = x - a$), найдём:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

n - степень многочлена $f(x)$.

<u>Пример 1.</u> Разложить многочлен $f(x) = 4 - 5x + x^2 + 2x^3$ по степеням двучлена $x+2$.

Решение. Здесь $a = -2$, $n = 3$. Так как

$f'(x) = -5 + 2x + 6x^2$,

$f''(x) = 2 + 12x$,

$f'''(x) = 12$,

то $f(-2) = 2$, $f'(-2) = 15$, $f''(-2) = -22$, $f'''(-2) = 12$. Отсюда .

<u>Пример 2.</u> Пользуясь формулой Тейлора, вычислить значение функции $f(x) = -5x^3 + 3x^2 - x + 2$ при $x = 1{,}02$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Представляя $1{,}02$ как сумму 1 и $0{,}002$ и полагая $x = 1$, $h = 0{,}02$, имеем:

$$f(1{,}02) = f(1) + \frac{0{,}02}{1!} f'(1) + \frac{(0{,}02)^2}{2!} f''(1) + \frac{(0{,}02)^3}{3!} f'''(1).$$

Вычислим $f(1), f'(1), f''(1), f'''(1)$:

$$f'(x) = -15x^2 + 6x - 1,$$

$$f''(x) = -30x + 6,$$

$$f'''(x) = -30,$$

$$f(1) = -1,\ f'(-1) = -10,\ f''(-1) = -24,\ f'''(-1) = -30.$$

Поэтому

$$f(1{,}02) = -1 - \frac{0{,}02}{1} 10 - \frac{(0{,}02)^2}{2!} 24 - \frac{(0{,}02)^3}{3!} 30.$$

Так как значение $f(1{,}02)$ должно быть вычислено с точностью до $0{,}001$, то мы можем отбросить последний член записанного равенства, как не оказывающий по своей малости влияния на тысячные доли результата. Имеем:

$$f(1{,}02) \approx -1 - 0{,}2 - 0{,}0004 \cdot 12 \approx -1{,}205$$

с точностью до $0{,}001$.

<u>Пример 3</u>. Разложить функцию $f(x) = x^n \quad (n \in N)$ по степеням приращения h.

Решение. Находим:

$$f'(x) = nx^{n-1},$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2},\ \ldots,$$

$$f^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k},\ \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = n!.$$

Тогда

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}h^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} x^{n-k}h^k + \ldots + h^n.$$

Полученное равенство носит название формулы бинома Ньютона.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Дан многочлен $f(x)=3-4x^2+2x^3-x^5$.

а) разложить $f(x)$ по степеням двучлена $x-1$;

б) разложить $f(x)$ по степеням двучлена $x+3$;

в) вычислить приближённо $f(1{,}04)$ и $f(0{,}97)$ с точностью до $0{,}01$.

2. Используя формулу бинома Ньютона, записать разложение $(x-2)^7$, $(x+1)^9$.

§ 15. Касательная и нормаль к кривой.

Пусть кривая задана уравнениями $y=f(x)$, $f(x)$ - дифференцируемая функция. Точка $M_0(x_0;y_0)$ ($y_0=f(x_0)$) – точка этой кривой.

Зная угловой коэффициент k касательной, можно, пользуясь известной из аналитической геометрии формой уравнения прямой:

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

составить уравнение этой касательной:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

так как $k=f'(x_0)$.

Таким образом, математический анализ даёт нам общий способ нахождения касательных к кривым, которые заданы уравнением вида $y=f(x)$ (в предположении, что производная $f'(x)$ существует мы можем её найти).

Наряду с касательной часто бывает нужно провести нормаль к кривой в данной точке M_0, то есть перпендикуляр к кривой в той же точке.

Очевидно уравнение нормали будет иметь вид:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

(в предположении, что $f'(x_0)\neq 0$. Если $f'(x_0)=0$, то уравнение нормали имеет вид: $x=x_0$).

<u>Пример 1.</u> Провести касательную к параболе $y=f(x)=x^2$ в точке $M_0(2;4)$.

Решение. $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$, следовательно, $k = 4$. Откуда уравнение касательной: $y - 4 = 4(x - 2)$, или $y = 4x - 4$.

Для построения искомой касательной укажем ещё одну какую-либо её точку, кроме M_0, например $B(0,-4)$. Соединив точки M_0 и B прямой линией, мы построим требуемую касательную (рис.7).

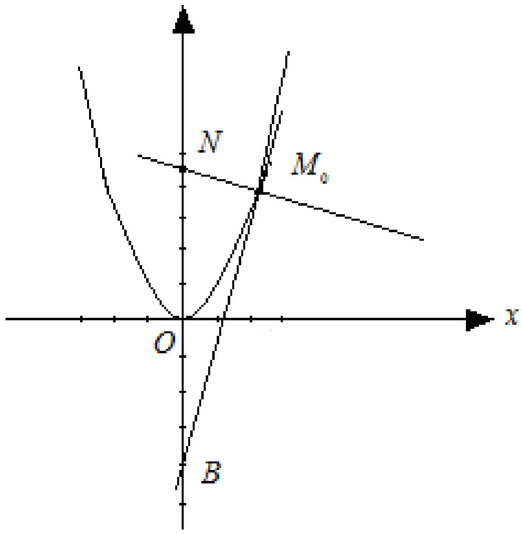


Рисунок 7.

Уравнение нормали M_0N будет: $y - 4 = -\dfrac{1}{4}(x - 2)$, или $x + 4y - 18 = 0$.

Если некоторая кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то мы можем найти, используя формулу $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, угловой коэффициент k касательной к этой кривой в данной её точке $(x_0; y_0)$, соответствующей некоторому значению t_0 параметра t: $k = f'(x_0) = \dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$ (в условиях применимости формулы).

Тогда уравнение касательной к кривой: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в её точке $(x_0; y_0)$ будет:

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - x_0),$$

где $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, или, как иногда пишут (считая, что $\psi'(t_0) \neq 0$):

$$\frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}=\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Для нормали к кривой в той же точке найдём:

$$y-\psi(t_0)=-\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x-\varphi(t_0))$$

(при $\psi'(t_0)\neq 0$).

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x=\varphi(t)=4\cos^3 t$, $y=\psi(t)=4\sin^3 t$ в точке, соответствующий значению $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Находим:

$\varphi'(t)=-12\cos^2 t+\sin t$,

$\psi'(t)=12\sin^2 t+\cos t$,

причём $\psi'(t_0)\neq 0$ на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда система $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ определяет на этом интервале (которому принадлежит и точка $t_0=\dfrac{\pi}{4}$) y как дифференцированную функцию от x.

Далее

$$\varphi(t_0)=\psi(t_0)=\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},$$

тогда $\varphi'(t_0)=-12\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=-\psi'(t_0)$,

следовательно, уравнение касательной к кривой в точке $(\sqrt{2};\sqrt{2})$:

$$y-\sqrt{2}=-(x-\sqrt{2}),$$

или $x+y-2\sqrt{2}=0$, а уравнение нормали к этой кривой в той же точке $y=x$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=3\sqrt{x}$ в точке $A(4;6)$.

2. Кривая задана уравнениями $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ $(0<t<2\pi)$. Составить уравнение касательной и нормали в точке $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

§ 16. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

В этом параграфе рассматривается применение производной к нахождению пределов некоторых функций.

I. Неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - две бесконечно малые функции в окрестности данной точки a:

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=0.$$

Справедливо утверждение. Если бесконечно малые при $x\to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют в некоторой окрестности точки a производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ (за исключением, быть может, самой точки a), и $\varphi'(x)\neq 0$ для точек этой окрестности, то из существования

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

(он может быть и бесконечным) вытекает и существование

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

причём

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Таким образом, предел отношения двух данных бесконечно малых при $x\to a$ функций может быть заменён (при указанных условиях) пределом отношения производных этих функций (также при $x\to a$) (правило Лопиталя).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\ln(x+e)}{\arcsin x}$.

Решение. Здесь обе функции $f(x)=e^{2x}-\ln(x+e)$ и $\varphi(x)=\arcsin x$ - бесконечно малые в окрестности нуля:

$$\lim_{x\to 0}[e^{2x}-\ln(x+e)]=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\arcsin x=0,$$

поэтому имеем неопределенность вода $\left(\frac{0}{0}\right)$. Далее, $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ существуют (например) в окрестности $(-1;1)$ точка $x=0$, причём

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\neq 0.$$

Наконец, предел отношения

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{2e^{2x}-\dfrac{1}{x+e}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

существует при $x\to 0$ и равен $2-\frac{1}{e}$.

Тогда по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\ln(x+e)}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{[e^{2x}-\ln(x+e)]'}{(\arcsin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-\dfrac{1}{x+e}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=2-\frac{1}{e}.$$

Замечание. Указанное утверждение может быть обобщено и на тот случай, когда $x\to\infty$ ($x\to+\infty, x\to-\infty$).

<u>Пример 2.</u> Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Легко проверить, что мы можем применить правило Лопиталя, которое даст:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{2\frac{2x}{1+x^4}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^4}{2x^4}=-\frac{1}{2}.$$

II. Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Имеет место утверждение. Если бесконечно большие при $x\to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в некоторой окрестности точки a (за исключением самой этой точки) и $\varphi'(x)\neq 0$ для рассматриваемых значений x, то из существования предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

(он может быть и бесконечным) вытекает и существование предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

причём

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Таким образом, и в случае неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ действует (в указанных выше условий) правило Лопиталя.

<u>Пример 3.</u> Найти $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x^2)}{tg\frac{\pi}{2}x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Здесь функции

$$f(x)=\ln(1-x^2) \text{ и } \varphi(x)=tg\frac{\pi}{2}x$$

имеют в некоторой левосторонней окрестности точки $x=1$ производные:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1},$$

$$\varphi'(x)=\frac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi}{2}x} \quad \text{и} \quad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{4x\cos^2\frac{\pi}{2}x}{\pi(x^2-1)}=\frac{4x}{\pi}\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}.$$

Если мы докажем, что $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует, то для отыскания $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может быть применимо правило Лопиталя.

Так как отыскание $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x}{\pi}$ затруднений не вызывает, то вопрос сводится к исследованию отношения $\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}$ при $x\to1$. Снова имеем неопределенность, но уже вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. При этом

$$(\cos^2\frac{\pi}{2}x)'=-2\cos\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}\sin\pi x,$$

$$(x^2-1)'=2x.$$

Но непосредственно очевидно, что

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(1-x^2)}{tg\frac{\pi}{2}x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to1}\frac{[\ln(1-x^2)]'}{\left(tg\frac{\pi}{2}x\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi}{2}x}}=\lim_{x\to1}\frac{4x}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{4}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\left(\cos^2\frac{\pi}{2}x\right)'}{\left(x^2-1\right)'}=\frac{4}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\pi x}{2x}=\frac{4}{\pi}\cdot0=0.$$

Замечание. Утверждение распространения (при соответствующей перефразировке условий) и на случай, когда $x\to\infty$ $(+\infty;-\infty)$.

<u>Пример 4.</u> Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

III. Неопределенность вида $(0\cdot\infty)$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (запись $x\to a$ может означать здесь также и $x\to\infty$ $(+\infty;-\infty)$).

Рассмотрим вопрос о вычислении предела вида

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]$.

Так как

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

то вопрос может быть сведён к раскрытию неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, либо вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

<u>Пример 5</u>. Найти $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)ctg\ln^2(1+x)]$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)ctg\ln^2(1+x)]=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg\ln^2(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+\sin^2 x)]'}{[tg\ln^2(1+x)]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+\sin^2 x}2\sin x\cos x}{\dfrac{1}{\cos^2\ln^2(1+x)}2\ln(1+x)\dfrac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\ln(1+x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\dfrac{1}{1+x}}=1.$$

IV. Неопределенность вида $(\infty-\infty)$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ $(+\infty;-\infty)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ $(+\infty;-\infty)$. Ставится вопрос об отыскании прела вида

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]$.

Легко свести ее на неопределенность уже разобранного вида, пользуясь соотношением

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)f(x)}},$$

которое является тождеством (по крайней мере в достаточно малой окрестности точки $x=a$).

Тем самым вопрос сводится к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

<u>Пример 6.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{3\sin 2x+6x\cos 2x-2x^2\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{12\cos 2x-16x\sin 2x-4x^2\cos^2 x}=\frac{1}{3}.$$

V. Неопределенность вида $1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Пусть надо найти предел вида:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=0$$

(где $f(x)>0$ в некоторой окрестности точки a) в одном из следующих случаев:

а) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (неопределенность вида 1^∞);

б) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (неопределенность вида 0^0);

в) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (неопределенность вида ∞^0).

Во всех случаях действуем однообразна: обозначаем $y=\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ и находим $\ln y:\ln y=\varphi(x)\ln f(x)$.

Рассматривая правую часть этого равенства в окрестности точки a, имеем в первом случае:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}\ln f(x)=0,$$

во втором и третьем:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0,\ \lim_{x\to a}\ln f(x)=\infty,$$

то есть во всех трёх случаях получаем при $x\to a$ неопределенность вида $0\cdot\infty$. Предположим, что нам удалось раскрыть эту неопределенность и найти

$$\lim_{x\to a}\ln y=l.$$

Тогда в силу непрерывности логарифмической функции и $\lim_{x\to a}\ln y=l$, откуда и находим искомый предел:

$$\lim_{x\to a}y=e^{l}.$$

Пример 7. Найти $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Пусть

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

тогда

$$\ln y=\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$$

(неопределенность вида $(0\cdot\infty)$), или

$$\ln y=\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

(неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$).

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=$$
$$=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = e^{-\frac{1}{6}}$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg5x}{tg3x}$.

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{arctgx}\right)$.

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}$.

§ 17. Условия монотонности.

О возрастании или убывании функции часто можно судить по поведению её производной. Именно, имеет место следующее утверждение. Для того чтобы функция $y=f(x)$, непрерывная на сегменте $[a;b]$ и имеющая производную по крайней мере в интервале $(a;b)$, была монотонно возрастающей (убывающей) на сегменте $[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы:

1. производная функции $y=f(x)$ на $(a;b)$ была не отрицательна (не положительна);

2. равенство $f'(x)=0$ не выполняется тождественно ни на каком промежутке, составляющем часть интервала.

Откуда следует, что если в некотором промежутке функции $f(x)$ монотонна и имеет на нём производную, то эта производная сохраняет во всех точках данного промежутка один и тот же знак (обращаясь, быть может, в отдельных точках этого промежутка в нуль).

Обратно, если в каждой точке некоторого промежутка производная функция $f'(x)$ существует и сохраняет на нем один и тот же знак, за исключением, быть может, отдельных точек, в которых она обращается в нуль, то в этом промежутке функция $f(x)$ монотонна.

В частности, имеет место следующий достаточный признак монотонности функции: если функция $f(x)$ имеет на данном промежутке производную, отличную от нуля в каждой точке этого промежутка, то $f(x)$ монотонна на этом промежутке.

Конкретизируя этот достаточный признак монотонности, мы можем сказать, что если на рассматриваемом промежутке $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то $f(x)$ монотонно возрастает (убывает)на этом промежутке.

Сформулированный конкретизированный достаточный признак монотонности функции даёт простой и удобный на практике способ исследования функции на возрастание и убывание.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на монотонность функцию $y=2x^3-3x^2-12x+7$.

Решение. Данная функция для всех x имеет производную:

$y'=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$.

Корнями y' являются числа $x=-1$, $x=2$; коэффициент при x^2 - положительное число. Тогда квадратный трёхчлен, то есть y', имеет положительное значение при $x<-1$ и $x>2$, и отрицательное – внутри промежутка между этими корнями, то есть при $-1<x<3$. Следовательно, в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(2;\infty)$

Даная функция монотонно возрастает, а в интервале $(-1;2)$ - монотонно убывает.

График исследуемой функции изображен на рисунке 8.

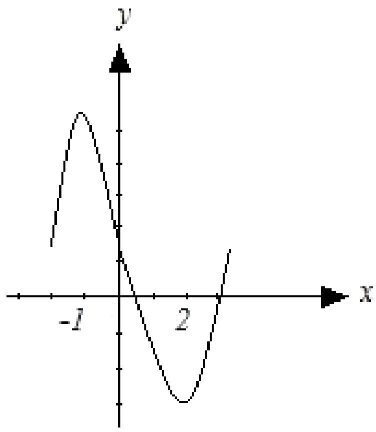


Рисунок 8.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на возрастание и убывание функцию

$f(x) = x + \cos x$.

Решение. Находим $f'(x) = 1 - \sin x$. Так как $\sin x \le 1$, то $f'(x) \ge 0$, причём $f'(x) = 0$ только в отдельных точках: $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Таким образом, данная функция возрастает в интервале $(-\infty; +\infty)$. График функции изображён на рисунке 9.

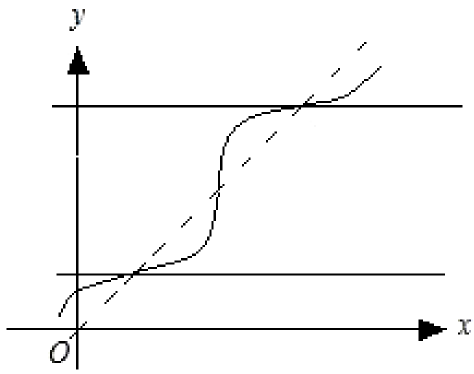


Рисунок 9.

В точках $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ касательная к кривой, являющейся графиком данной функции, параллельна оси OX.

Пример 3. Из орудия вертикально вверх выпускают снаряд с начальной скоростью $v_0 = 200 м/сек.$ Узнать, поднимается ли снаряд вверх или падает вниз в момент:

а) $t = 15 \;\; сек.$;

б) $t = 25 \;\; сек.$.

Решение. По условию задачи расстояние снаряда от земной поверхности выражается формулой:

$$S(t) = 200t - \frac{gt^2}{2},$$

где t - время, отсчитываемое в секундах от момента $t = 0$, $g \approx 9{,}8 \;\; м/сек^2$ - ускорение силы тяжести. Тогда

$$S'(t) = 200t - gt.$$

При $t < \frac{200}{g}$ имеем $S'(t) > 0$, а при $t > \frac{200}{g}$ $S'(t) < 0$, и поэтому $S(t)$ возрастает в $\left(0; \frac{200}{g}\right)$ и убывает в $\left(\frac{200}{g}; \infty\right)$. Так как $t = 15 \;\; сек.$ принадлежит первому интервалу, а $t = 25 \;\; сек.$ - второму, то в момент $t = 15 \;\; сек.$ снаряд поднимается вверх, а в момент $t = 25 \;\; сек.$ - опускается вниз.

Признаки монотонности функции часто могут быть с пользой применены к доказательству неравенств.

Пример 4. Доказать справедливость неравенства $\frac{e^x}{x} > e$ при $x > 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{e^x}{x} - e$ и убедимся в том, что она при $x > 1$ положительна.

Найдём производную: $f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x^2}e^x = \frac{e^x}{x^2}(x-1)$.

Для $x \geq 1$ $f'(x)$ неотрицательна, причём она равна нулю только для $x = 1$, значит, $f(x)$ возрастает на $[1;\infty)$. Но так как $f(1) = 0$, то при $x > 1$ имеем $f(x) > 0$, то есть $\frac{e^x}{x} - e > 0$, или $\frac{e^x}{x} > e$ для всех $x > 1$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти промежутки возрастания и убывания следующих функций:

а) $y = 3x^4 - 8x^3 + 16$;

б) $y = x^3 + 6x^2 + 12x - 13$;

в) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$;

г) $y = (x^2 - 3)e^{-x^2}$;

д) $y = tgx - x$.

2. Доказать неравенства:

а) $e^x \geq 1 + x, \quad x > 0$;

б) $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad x > 0$.

3. Прямолинейное движение точки совершается по закону

$S = t^3 - 12t^2 + 45t$,

где S (см) – расстояние точки от начального положения в момент t (сек.). Определить промежутки времени, в которые расстояние S будем возрастать или убывать, и те моменты, в которые будет происходить смена направления движения, а также вычислить ускорение движения в эти моменты.

§ 18. Экстремумы функций одной переменной.

При исследовании данной функции $f(x)$ часто бывает важно уметь находить те значения независимого переменного x, при которых функция $f(x)$ имеет значения, которые по сравнению с «соседними» значениями той же функции будет наибольшими или наименьшими. В частности, такие значения возникают в тех точках, в которых непрерывная функция из возрастающей становится убывающей, из убывающей делается возрастающей.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке и x_0 - есть внутренняя точка этого промежутка.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ данной точки, что для всякого x из этой окрестности выполняется соотношение:

$$f(x) = f(x_0),$$

или, что то же,

$$f(x) - f(x_0) \le 0.$$

Другими словами, говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех значений h, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, выполняется соотношение:

$$f(x_0 + h) \le f(x_0).$$

или, что то же,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \le 0.$$

Само значение $f(x_0)$ принято называть максимумом (максимальным значением) функции и обозначать:

$$f_{\max}(x_0)$$

(или просто $f_{\max}$).

Говорят, что функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ данной точки, что для всякого x из этой окрестности выполняется соотношение:

$$f(x) \ge f(x_0),$$

или, что то же,

$$f(x) - f(x_0) \ge 0.$$

Другими словами, говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, если можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех значений h, удовлетворяющих неравенству $|h| < \delta$, выполняется условие: $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$,
или, что то же, $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$.

Значение $f(x_0)$ называют минимумом (минимальным значением) функции и обозначают через

$$f_{\min}(x_0)$$

(или просто $f_{\min}$).

Пример 1. Функция $f(x) > +\sqrt{1 - x^2}$ в точке $x_0 = 0$ имеет максимум (строгий), так как здесь, например, при $\delta > 1$ для $0 < |h| < \delta$ выполняется условие:

$$f(0 + h) - f(0) = \sqrt{1 - h^2} - 1 < 0.$$

Максимум функции $f(x)$ равен $f(0) = 1$ (рис. 10).

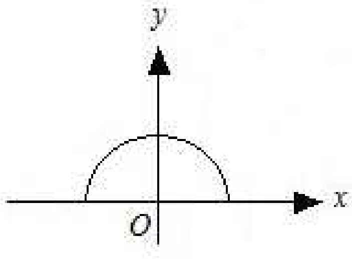


Рисунок 10.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < 1 \\ 2, x = 1 \\ 2x - 1, x > 1 \end{cases}$$

(рис. 11) имеет в точке $x_0 = 1$ максимум (строгий), так как для всякого $x \neq 1$, принадлежащего окрестности $(1 - \delta; 1 + \delta)$ (где, например, $\delta = \dfrac{1}{2}$),
выполняется неравенство

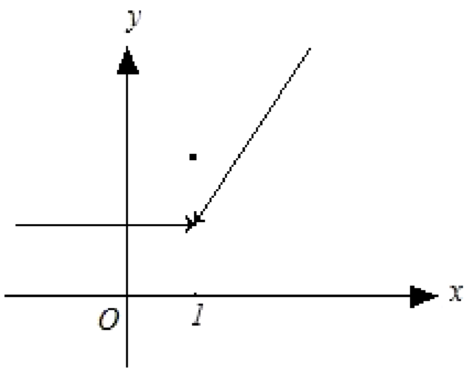


Рисунок 11.

$$f(x) < f(1),$$

$$f_{\max}(1) = 2.$$

Пример 3. Функция $f(x)=|x|$ в точке $x_0=0$ имеет минимум (строгий), так как

$$f(0+h)-f(0)=|h|>0$$

при $h\neq 0$. Здесь в качестве δ можно взять положительное число. Минимум функции равен нулю (рис.3).

Максимум или минимум функции в точке не является непременно соответственно наибольшим или наименьшим значением функции во всей области её определения. Максимум (минимум) функции $f(x)$ в данной точке x_0 есть наибольшее (наименьшее) значение этой функции, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности этой точки. Поэтому одна и та же функция может в своей области иметь несколько различных максимумов и несколько различных минимумов.

Так, например, функция, график которой представлен на рисунке 12, имеет максимумы в точках x_2, x_4, x_6 и минимумы в точках x_1, x_3, x_5 (причем максимумы в точках x_4, x_6 меньше минимума в точке x_1).

Максимум и минимум функции объединяются под общим названием экстремума или экстремального значения функции.

Точки, в которых функция $f(x)$ достигает максимума или минимума (имеет экстремум), называются соответственно точками максимума или минимума (экстремума) функции.

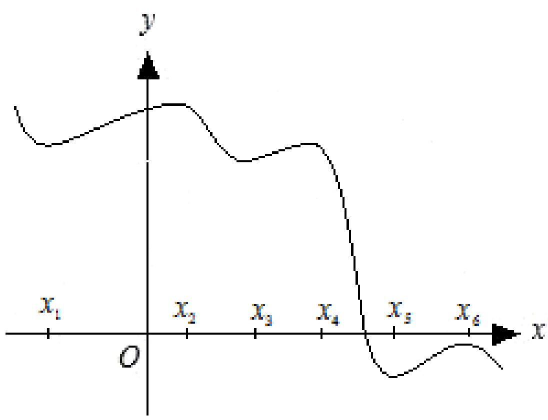


Рисунок 12.

Пользуясь термином, экстремум функции, можно сказать, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, если существует такая окрестность $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, что во всех точках x этой окрестности разность $f(x)-f(x_0)$ неположительная (неотрицательная).

Различают строгий и нестрогий экстремум: в первом случае разность $f(x)-f(x_0)$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ обращается в нуль только при $x=x_0$, оставаясь в остальных её точках знакопостоянной; во втором – ещё и в других (или даже во всех точках окрестности, рассматриваемой в определении экстремума функции).

Необходимое условие существования экстремума. Если функция $f(x)$, заданная на некотором промежутке, имеет экстремум в какой-либо внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная $f'(x)$ при $x=x_0$ необходимо равна нулю (если она существует в рассматриваемой точке), то есть $f'(x_0)=0$.

Геометрическое истолкование этого утверждения: касательная к кривой $y=f(x)$ в точке, которая соответствует экстремальному значению функции, параллельна оси OX (или совпадает с ней) (рис. 13).

Функция может иметь экстремум и в таких точках, в которых производная вовсе не существует. Так, в примере 3 было показано, что $f(x)=|x|$ в точке $x_0=0$ имеет минимум. Однако эта функция в точке $x_0=0$ производной не имеет.

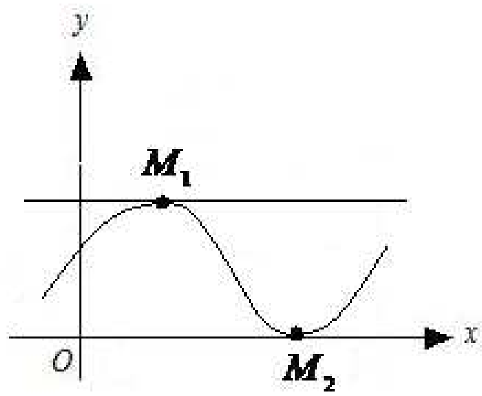


Рисунок 13.

Кроме того, известно, что производная не может существовать в точках разрыва функции. Но в примере 2 мы видели, что экстремум может быть и в таких точках.

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, будем называть «подозрительными на экстремумах» (в последнем случае эти точки берутся, конечно, также принадлежащими области определения функции).

Итак, функция может иметь экстремум только в «подозрительных на экстремум» точках.

Однако обратное утверждение неверно, не во всякой «подозрительной на экстремум» точке функция имеет экстремум.

<u>Пример 4.</u> Для функции $f(x) = x^3$ (рис. 14) имеет: $f'(x) = 3x^2$. При $x = 0$ производная обращается в нуль: $f'(0) = 0$, то есть $x_0 = 0$ - «подозрительная на экстремум» точка, тем не менее в этой точке $f(x)$ не имеет экстремума, так как нельзя указать такой окрестности точки $x_0 = 0$, в которой разность

$$f(x) - f(0) = x^3$$

была бы неотрицательна (неположительна): при $x < 0$ эта разность отрицательна, а при $x > 0$ - положительна.

Заметим, что $f(x)$ возрастает на $(-\infty;\infty)$, так как $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.

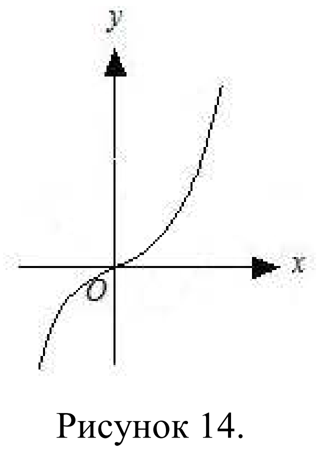


Рисунок 14.

<u>Пример 5.</u> Для функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

(рис.15) находим:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

(для $x \neq 0$). При $x = 0$ производная не существует. Следовательно, $x_0 = 0$ - точка, «подозрительная на экстремум». Между тем в этой точке данная функция не имеет экстремума, ибо в любой окрестности данной точки разность

$$f(x) - f(0) = \sqrt[3]{x}$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

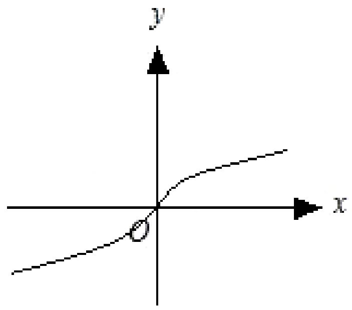


Рисунок 15

Таким образом, равенство нулю производной от данной функции в некоторой внутренней точке промежутка, на котором задана эта функция, или отсутствие производной в этой точке, являясь необходимым условием наличия экстремума функции в данной точке, не является условием, достаточным для этого.

Замечание. Точки, «подозрительные на экстремум», называют часто ещё критическими.

Сформулируем достаточные условия существования экстремума функции. При этом, говоря об экстремуме функции, мы будем подразумевать только строгий экстремум.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 удовлетворяет следующим условиям:

1) имеет в каждой точке этой окрестности производную (за исключением, быть может, точки x_0, в которой, однако, $f(x)$ непрерывна);

2) производная $f'(x)$ сохраняет некоторый определенный знак при $x_0 - \delta < x < x_0$, а также тот или иной определенный знак при $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Тогда при $x = x_0$ функция $f(x)$:

а) Будет иметь максимум, если $f'(x)$ переходит от положительных значений к отрицательным, когда x, возрастая, переходит через значение x_0.

б) Будет иметь минимум, если $f'(x)$ переходит от отрицательных значений к положительным, когда x, возрастая, переходит через значение x_0.

в) Не будет иметь экстремума, если $f'(x)$ не меняет знак при переходе x через значение x_0.

Сформулированные утверждения дают следующее правило нахождения точек экстремума функции.

Чтобы найти точки экстремума данной функции $f(x)$, надо:

1. Найти все подозрительные на экстремум точки, для чего:

а) найти производную данной функции, приравнять её нулю и вычислить для полученного таким образом уравнения действительные корни (соответствующие внутренним точкам промежутка, на котором задана функция);

б) найти те точки внутри области определения $f(x)$, в которых производная $f'(x)$ не существует.

2. Исследовать производную $f'(x)$ на изменение знака при переходе x (в порядке возрастания) через каждую подозрительную на экстремум точку x_0; если при этом производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 - точка максимума функции, если – с минуса на плюс, то x_0 - точа минимума; если же $f'(x)$ при этом будет сохранять один и тот же знак, то x_0 не будет точкой экстремума.

Замечание. При выполнении исследования по п. 2 этого правила полезно иметь в виду следующее. В наиболее часто встречающихся на практике случаях бывает так, что подозрительных на экстремум точек имеется только конечное число. Пусть эти точки, расположенные в порядке возрастания, будут:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Тогда в каждом интервале $(x_{k-1};x_k)$ между двумя подозрительными на экстремум точками x_{k-1} и x_k, также во всех точках $x<x_1$ и $x>x_n$ (из области определения функции) производная $f'(x)$ существует, отлична от нуля (кроме, быть может, концевых точек промежутка, на котором задана функция) и, следовательно, сохраняет постоянный знак. Поэтому для определения знака производной при значениях x, меньших подозрительного на экстремум значения x_k, но достаточно близких к нему, можно определить знак производной в одной какой-либо точке x' интервала $(x_{k-1};x_k)$ (или в любой точке $x<x_1$ при $k=1$). Точно так же для определения знака производной при значениях x, больших подозрительного на экстремум значения x_k, но достаточно близких к нему, можно определить знак производной в какой-нибудь точки x'' интервала $(x_{k-1};x_k)$ (или в случае $k=n$ в любой точке $x>x_n$). Таким образом, достаточно определить знаки значений производной на концах так составленного сегмента $[x';x'']$.

<u>Пример 6.</u> Исследовать на экстремум функцию

$$y=f(x)=1+24x-22x^2+8x^3-x^4.$$

Решение. Эта функция имеет производную на интервале $(-\infty;\infty)$. Находим:

$$y'=24-44x+24x^2-4x^3.$$

Преобразуем выражение для y':

$$y'=4(6-11x+6x^2-x^3)=4(6-6x-5x+5x^2+x^2-x^3)=$$
$$=4[6((1-x)-5x(1-x)+x^2(1-x)]=4(1-x)(6-5x+x^2)=4(1-x)(x-2)(x-3).$$

Отсюда корни производной: $x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=3$.

Данная функция имеет производную в каждой точке, поэтому критическими точками являются здесь только корни производной.

Исследуем производную на изменение знака при переходе x через каждую критическую точку.

Взяв сначала наименьшее подозрительное на экстремум значение аргумента $x_1 = 1$, выберем произвольный сегмент, содержащий $x_1 = 1$, на не содержащий соседнюю критическую точку $x_2 = 2$, например, сегмент $0 \le x \le 1{,}5$. Пользуясь выражением для производной, определяем знаки её значений на концах взятого сегмента:

$f'(0) > 0$, $f'(1{,}5) < 0$.

Итак, знак производной при переходе аргумента от значений, меньших чем 1, к значениям, больших чем 1, меняется с плюс анна минус. Следовательно, $x_1 = 1$ есть точка максимума данной функции. Максимум функции будет: $f_{\max}(1) = 10$.

Вслед за $x_1 = 1$ берём критическую точку $x_2 = 2$. Рассмотрим сегмент, содержащий $x_2 = 2$, но не содержащий $x_1 = 1$, $x_3 = 3$, например, сегмент:

$1{,}5 \le x \le 2{,}5$.

Как уже было найдено выше, $f'(1{,}5) < 0$, в то время как $f'(2{,}5) > 0$, то есть при переходе x через значение $x_2 = 2$ производная меняет свой знак с минуса на плюс. Значит, $x_2 = 2$ - точка минимума функции, а $f_{\min}(2) = 9$.

Наконец, исследуем производную на изменение знака при переходе аргумента через последнюю критическую точку $x_3 = 3$. Берём промежуток:

$2{,}5 \le x \le 4$.

Находим:

$f'(2{,}5) > 0$, $f'(4) < 0$.

Производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $x_3 = 3$ - точка максимума, а $f_{\max}(3) = 10$.

Результат оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;\infty)$
y'	$y' > 0$	$y' = 0$	$y' < 0$	$y' = 0$	$y' > 0$	$y' = 0$	$y' < 0$
y	*возрастает*	***max***	*убывает*	***min***	*возрастает*	***max***	*убывает*

График данной функции изображен на рисунке 16.

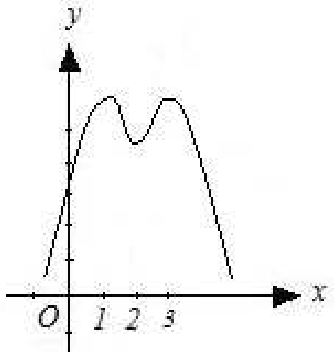


Рисунок 16.

Замечание. Задача нахождения максимума и минимума функции часто облегчается, если учитывать следующее:

1. Если c - некоторое положительное постоянное, то функция $cf(x)$ имеет максимум или минимум для таких и только таких значений переменного x, которые доставляют максимум или соответственно минимум функции $f(x)$.

2. Если c - некоторое отрицательное постоянное, то функция $cf(x)$ имеет максимум (минимум) для таких и только таких значений переменного x, которые доставляют минимум (максимум) функции $f(x)$.

3. Функция $\sqrt[n]{\varphi(x)}$ $(n \in N)$ имеет максимум (минимум) для тех и только тех значений x, которые доставляют максимум (минимум) функции $\varphi(x)$, рассматриваемой в области определения $f(x)$.

4. Если $f(x) = \dfrac{1}{\psi(x)}$, где $\psi(x)$ непрерывная в своей области определения функция, то $f(x)$ достигает максимума (минимума) при тех и только тех значениях x, при которых функция $\psi(x)$ достигает минимума (максимума), не обращаясь при этом в нуль.

5. Если непрерывная на данном промежутке функция $f(x)$ имеет в двух каких-либо его различных точках x_1 и x_2 максимум (минимум) (безразлично, строгий или нет), то между этими точками найдется хоть одна точка, в которой $f(x)$ будет иметь минимум (максимум) (возможно, он окажется и нестрогим).

<u>Пример 7.</u> Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=\frac{23}{25\sqrt{24x^7-70x^6+105x^4-56x^3+47}}.$$

Решение. Следуя только что сделанным указаниям, мы вместо данной функции $f(x)$ исследуем на экстремум функцию

$$\varphi(x)=24x^7-70x^6+105x^4-56x^3+47.$$

Имеем

$$\varphi'(x)=168x^6-420x^5+402x^3-168x^2,$$

или

$$\varphi'(x)=168x^2(x^4-\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{2}x-1)=168x^2[(x^4-1)-\frac{5}{2}x(x^2-1)]=$$

$$=168x^2(x^4-1)(x^2+1-\frac{5}{2}x)=168x^2(x^2-1)(x-\frac{1}{2})(x-2).$$

Корни производной будут: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=1$, $x_5=2$. При этих значениях x знаменатель функции $f(x)$ является действительным числом и не обращается в ноль. Следовательно, они являются критическими точками не только для $\varphi(x)$, но и для $f(x)$.

Как легко видеть, производная $\varphi'(x)$ при переходе аргумента x через значение $x_1=-1$ меняет знак с плюса на минус. Значит, при $x_1=-1$ функция $\varphi(x)$ имеет максимум. При переходе x через значение $x=\frac{1}{2}$ производная $\varphi'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x=\frac{1}{2}$ $\varphi(x)$ имеет минимум.

Так как $\varphi(x)$ непрерывна на $(-\infty;\infty)$ и имеет на нём лишь конечное число подозрительных на экстремум точек, а следовательно, и экстремумов, то, согласно п. 5 замечания максимальны и минимальны этой функции должны чередоваться. Но тогда в точке $x_2=0$ функция $\varphi(x)$ не имеет экстремума (так как в противном случае мы имеем для неё подряд или два максимума, иди два минимума).

Исследуя производную $\varphi'(x)$ на изменение знака при переходе аргумента через значение $x = 2$, найдём, что при этом значении x функция $\varphi(x)$ имеет минимум, а тогда при $x = 1$ эта функция получает максимум, так как иначе она имела бы по крайней мере два минимума подряд.

Тогда согласно п. 1, 3 и 4 замечания функция $f(x)$ имеет: при $x = -1$ - минимум, при $x = \frac{1}{2}$ - максимум, при $x = 1$ - минимум, при $x = 2$ - максимум.

Упражнения для самостоятельной работы.

Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $y = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 5$;

б) $y = x^4 - x^3 + 4$;

в) $y = (3 - x)^2 (1 + x)^3$;

г) $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$;

д) $y = \sqrt{x^2 - 8x} + 7$;

е) $y = \dfrac{8}{\sqrt[3]{2x^6 - 9x^4 + 12x^2 + 4}}$.

§ 19. Наибольшее и наименьшее значение функции.

Мы рассмотрели вопрос об экстремуме функции в данной точке, то есть о наибольшем, наименьшим значении функции в некоторой окрестности данной точки.

Это наибольшее (наименьшее) в данной окрестности значение функции не является непременно наибольшим (наименьшим) значением функции во всей её области определения. На практике же часто приходится искать не просто тот или иной экстремум функции, а как раз наибольшее (наименьшее) значение этой функции во всей области её определения.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$. Тогда она имеет на нём как наибольше, так и наименьшее значение. Это наибольшее (наименьшее) своё значение функция $f(x)$ может принимать на одном из концов сегмента (рис. 17); может, однако, случиться, что наибольшее (наименьшее) значение функции будет принято во внутренней точке сегмента $[a;b]$ (рис.18).

Тогда, очевидно, в этой точке данная функция будет иметь экстремум (он может быть и нестрогим).

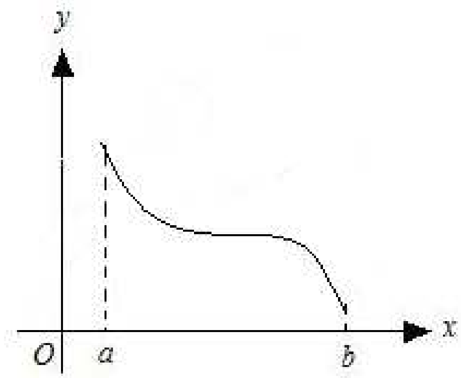


Рисунок 17.

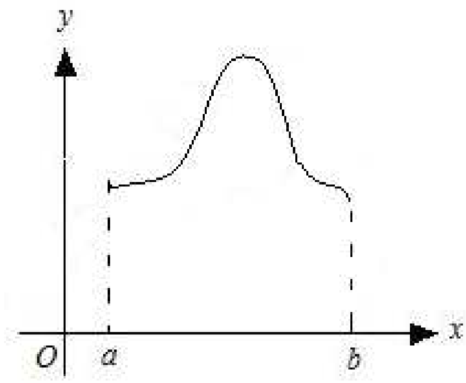


Рисунок 18.

Значит, наибольшее (наименьшее) значение данной функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ либо совпадает с одним из её экстремумов (быть может, и нестрогим), либо достигается на одном из концов этого сегмента.

Итак, если функция $f(x)$ непрерывна на данном сегменте $[a;b]$, то для того, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение $f(x)$ на этом сегменте, нужно найти все экстремумы (если это затруднительно, то можно обратиться к нахождению значений функции во всех точках, подозрительных на экстремум) этой функции, а также вычислить её значения $f(a)$ и $f(b)$ на концах сегмента и выбрать из всех этих чисел наибольшее (наименьшее).

Замечание 1. Если непрерывная на данном сегменте $[a;b]$ функция имеет экстремум в единственной точке x_0 интервала $(a;b)$, а именно максимум (минимум), то этот максимум (минимум) является и наибольшим (наименьшим) значением функции на данном сегменте, причём это значение принимается ею лишь однажды на этом сегменте.

Замечание 2. Монотонно возрастающая (убывающая) на сегменте $[a;b]$ функция будет при $x = a$ иметь наименьшее (наибольшее) значение, а при $x = b$ - наибольшее (наименьшее).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

на [-2;2].

Решение. Находим:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x\,.$$

Корни первой производной есть $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Исследуя знак производной получаем $f_{\max}(0) = 1$, $f_{\min}(\pm 1) = 0$. Вычислим значение функции $f(x)$ на концах сегмента [-2;2]: $f(\pm 2) = 9$.

Сопоставляя найденные значения экстремумов со значениями функции на концах сегмента находим, что наибольшее значение данной функции равно 9, а наименьшее есть нуль:

$$M = \max_{[-2;2]} f(x) = 9, \qquad m = \min_{[-2;2]} f(x) = 0\,.$$

Теория экстремумов важна не только для самой математики, но и имеет большое прикладное значение. С помощью этой теории часто удается решать важные в экономическом отношении проблемы о получении наибольших эффектов при наименьшей затрате материала, труда, времени и т.п.

Пример 2. Быстрота сигнализации по подводному кабелю пропорциональна выражению $x^2 \ln\frac{1}{x}$, где x - отношение радиуса металлической сердцевины кабеля к толщине его изолирующей оболочки. Каким должно быть это отношение, чтобы быстрота сигнализации была наибольшей?

Решение. Задача будет решена, если мы найдём в интервале $(0;\infty)$ значение x, при котором функция

$$f(x) = x^2 \ln\frac{1}{x}$$

имеет наибольшее значение. Производная $f'(x)$ существует в каждой точке области определения $f(x)$. Находим:

$$f'(x) = 2x\ln\frac{1}{x} - x = x(2\ln\frac{1}{x} - 1)\,.$$

Корнем производной $f'(x)$ является только число

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Производная при переходе x через значение $x = e^{-\frac{1}{2}}$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = e^{-\frac{1}{2}}$ функция $f(x)$ имеет максимум. А так как на $(0;\infty)$ $f(x)$ не имеет других экстремумов, то этот единственный максимум, достигаемый в точке $x = e^{-\frac{1}{2}}$, и является наибольшим значением данной функции на $(0;\infty)$.

Таким образом, быстрота сигнализации по подводному кабелю будет наибольшей, когда отношение x радиуса металлической сердцевины к толщине его изолирующей оболочки равно $e^{-\frac{1}{2}}$.

При решении этой задачи функция, которую требовалось исследовать на экстремум, была дана с самого начала. Но так бывает на всегда. Часто сначала приходится по данным условиям задачи составить ту функцию которую в целях решения задачи надлежит исследовать на экстремум, а затем только уже проводить указанное исследование, причём эта первая часть решения задачи иногда бывает не менее трудной, чем вторая.

Пример 3. При конструировании трансформатора переменного тока заполняют внутренность катушки круглого сечения железным сердечником, имеющим форму квадрата с вырезанными при его вершинах четырьмя равными малыми квадратами. При этом с технической точки зрения важно, чтобы сечение сердечника имело возможно большую площадь. Каким должен быть для этого угол φ, если радиус катушки равен R (рис. 19)?

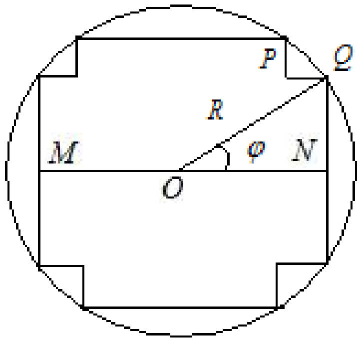


Рисунок 19.

Решение. Обозначая через S площадь сечения сердечника, находим:

$$S = (MN)^2 - 4(PQ)^2 .$$

Так как

$$MN = 2ON = 2R\cos\varphi ,$$

$$PQ = ON - NQ = R(\cos\varphi - \sin\varphi) ,$$

то

$$S = 4R^2(\sin 2\varphi - \sin^2\varphi) ;$$

$$S' = 4R^2(2\cos 2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi) .$$

Решая уравнение

$$2\cos 2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi = 0 ,$$

находим

$$tg 2\varphi = 2 ,$$

откуда $\varphi \approx 31^\circ 43'$. При этом значении угла φ функция будет иметь максимум. Вычисления дают:

$$S_{\max} \approx 2{,}472R^2 .$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Исследовать на наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 8$ на $[-1;4]$;

б) $f(x) = 2tgx - tg^2 x$ на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Энергия, отдаваемая электрическим элементом, даётся формулой

$$P = \frac{E^2 R}{(r+R)^2},$$

где E - постоянная электродвижущая сила, r - постоянное внутреннее сопротивление, R - внешнее сопротивление. Показать, что P имеет наибольшее значение, когда сопротивление R внешней цепи равно внутреннему сопротивлению r самого элемента.

3. Цилиндрическая консервная банка должна иметь данный объём V. Каковы должны быть размеры банки, чтобы на изготовление её пошло наименьшее количество жести?

§ 20. Вогнутость и выпуклость кривой. Точки перегиба.

Применим понятие производной второго порядка к исследованию функции на существование у её графика точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости. Выявление этих особенностей облегчает построение графика функции.

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ имеет на данном промежутке производную, то есть кривая AB имеет в каждой точке этого промежутка касательную, не перпендикулярную оси OX.

Возьмём на данной кривой точку M_0 с координатами (x_0, y_0). Проведём к кривой AB в этой точке касательную M_0T. Тогда, если кривая AB вблизи точки M_0 (как слева, так и справа) лежит по одну сторону от касательной M_0T, а именно по ту сторону этой касательной, куда направлена ось OY, то говорят, что кривая AB в точке M_0 обращена вогнутостью в сторону положительного луча от OY (вогнута вверх), или коротко, что она в этой точке вогнута (рис.20).

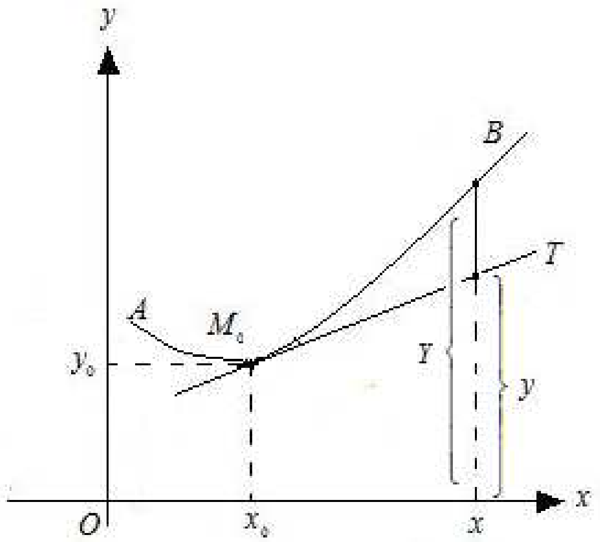


Рисунок 20.

Если же кривая AB вблизи точки M_0 (как слева, так и справа от этой точки) лежит снова по одну сторону от касательной, но теперь уже с противоположной стороны той, куда направлена ось OY, то говорят, что кривая AB в точке M_0 обращена выпуклостью в сторону положительного луча OY (выпукла вверх), или коротко, что она выпукла в этой точке (рис. 21).

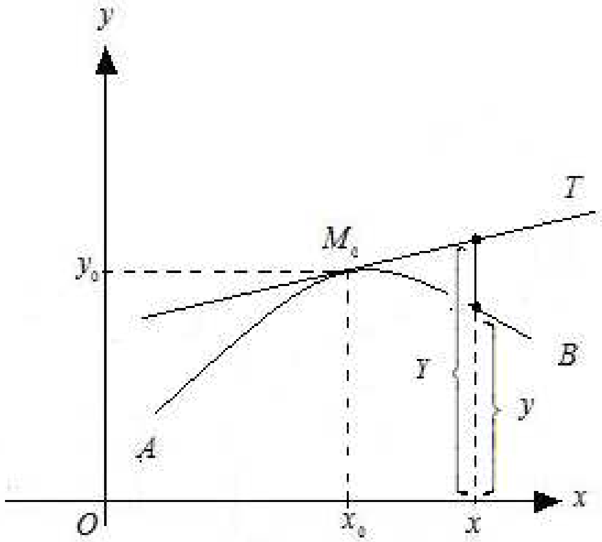


Рисунок 21.

Если обозначить через y и Y соответственно ординаты точек на кривой AB и касательной M_0T, то определение вогнутости (выпуклости) кривой в данной точке можно аналитически высказать так:

Кривая $y = f(x)$ называется вогнутой (выпуклой) в точке $M_0(x_0, y_0)$ или, как говорят, в точке x_0, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ этой точки, что для всех $x \neq x_0$, взятых на этой окрестности, разность $y - Y$, где y и Y вычислены при одной и той же абсциссе x, положительна (отрицательна).

Если кривая $y = f(x)$ вогнута (выпукла) вверх в каждой точке некоторого промежутка, то она называется вогнутой (выпуклой) на этом промежутке.

Достаточный признак вогнутости выпуклости кривой в данной точке устанавливается следующим утверждением.

Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ данной точки x_0 производную, а в самой этой точке ещё и вторую производную, причём отличную от нуля, то кривая, являющаяся графиком данной функции, вогнута в точке x_0, если $f''(x_0) > 0$, и выпукла, если $f''(x_0) < 0$.

Введем теперь понятие точки перегиба кривой. Пусть кривая $y = f(x)$ задана на каком-либо промежутке и x_0 - некоторая внутренняя точка этого промежутка. Предположим, что данная кривая имеет касательную в каждой точке, абсцисса которой x принадлежит некоторой окрестности точки x_0, причём будем ещё предполагать, что никакая из этих касательных не перпендикулярна к оси OX, кроме, быть может, касательной в точке M_0 с абсциссой x_0. Это означает, что функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке x рассматриваемой окрестности, кроме точки x_0, для того случая, когда соответствующая касательная перпендикулярна оси OX.

Точка M_0 данной кривой $y = f(x)$ (равно, как соответствующая ей абсцисса x_0) называется точкой перегиба этой кривой, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех x, для которых $x_0 - \delta < x < x_0$, кривая $y = f(x)$ вогнута (выпукла), а для всех x, для которых $x_0 < x < x_0 + \delta$, она выпукла (вогнута).

Точка перегиба кривой, следовательно, есть такая точка M_0, проходя через которую кривая из вогнутой (выпуклой) становится выпуклой (вогнутой) (рис.22).

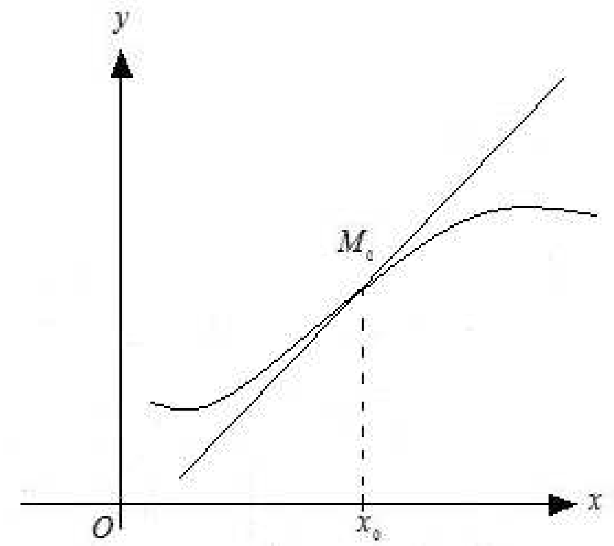


Рисунок 22.

Если M_0 - точка перегиба кривой $y = f(x)$, то говорят также, что в этой точке данная кривая имеет перегиб.

Пример 1. Дана кривая $y = f(x) = x^3$ (рис. 23). Она в точке $x_0 = 0$ имеет перегиб. Действительно, $f''(x) = 6x$ отрицательна для всех $x < 0$ и положительна для всех $x > 0$, так что данная кривая при $x < 0$ (то есть в $(-\infty;0]$) выпукла, а при $x > 0$ (то есть в $(0;\infty)$) вогнута; так как, кроме того, кривая имеет касательную в точке $x_0 = 0$, то эта кривая имеет в данной точке перегиб.

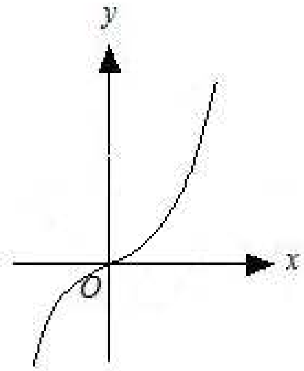


Рисунок 23.

Точка перегиба кривой характеризуется следующим необходимым признаком. Если в точке x_0 перегиба кривой $y = f(x)$ вторая производная функции $f(x)$ вторая производная функции $f(x)$ существует и непрерывна, то она необходимо обращается в этой точке в нуль:

$$f''(x_0) = 0.$$

Условие $f''(x_0) = 0$, являясь необходимым, не является, однако, достаточным для наличия у кривой $y = f(x)$ точки перегиба при $x = x_0$.

<u>Пример 2</u>. Рассмотрим кривую $y = f(x) = x^4$. Здесь имеем: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$. При $x_0 = 0$ $f''(x_0) = 0$. Однако в точке $x_0 = 0$ данная кривая перегиба не имеет. Действительно, для $x \neq x_0$ $f''(x) > 0$, и кривая в каждой точке, отличной от x_0 (как, впрочем, и в самой точке x_0), вогнута (рис. 24).

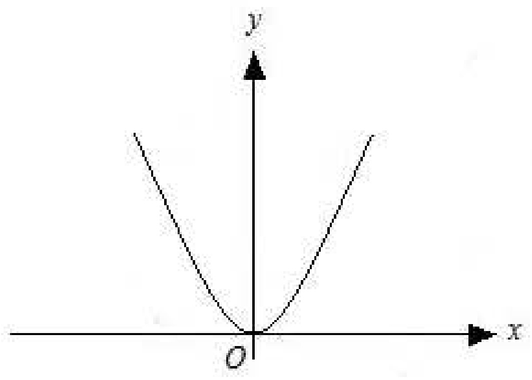


Рисунок 24.

С другой стороны, кривая может иметь перегиб также и в тех точках, где $f''(x)$ вовсе не существует.

<u>Пример 3.</u> Рассмотрим кривую

$$y = f(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

(рис. 25). Имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},\ f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$$

(для $x \neq 0$). В точке $x_0 = 0$ $f''(x)$ не существует. Однако эта точка является точкой перегиба кривой. Действительно, $f''(x) < 0$ для $x < 0$, а тогда кривая

$y = f(x)$ при $x < 0$ выпукла, а при $x > 0$ вогнута, и точка $x_0 = 0$ есть точка перегиба данной кривой (так как, кроме того, касательная к кривой в точке с абсциссой $x_0 = 0$ существует).

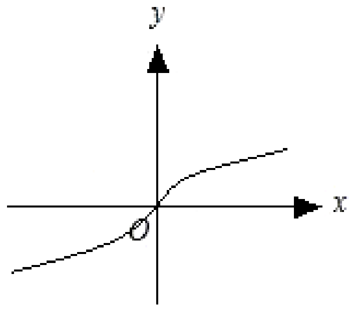


Рисунок 25.

Итак, точки перегиба данной кривой $y = f(x)$ следует искать только среди точек, в которых производная $f''(x)$ либо равна нулю, либо вовсе не существует. Такие точки будем называть подозрительными на перегиб.

Достаточный признак существования у данной кривой точки перегиба формулируется следующим образом. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 имеет вторую производную за исключением, быть может, самой точки $x = x_0$ (причём кривая $y = f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0; f(x_0)))$, и эта производная сохраняет тот или иной определенный знак при $x_0 - \delta < x < x_0$, а так же некоторый определенный знак при $x_0 < x < x_0 + \delta$. Тогда если вторая производная $f''(x)$ при переходе x через точку $x = x_0$ меняет знак, то эта точка будет точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Отсюда следует правило отыскания точек перегиба, точек выпуклости и вогнутости кривой.

Чтобы найти точки перегиба кривой $y = f(x)$ и установить, в каких точках вогнута (выпукла), следует:

1. найти все точки, подозрительные на перегиб, для чего:

а) найти вторую производную функции $y = f(x)$ и вычислить действительные корни уравнения $f''(x) = 0$;

б) найти точки, в которых вторая производная не существует.

2. Исследовать производную $f''(x)$ на изменение знака при переходе x через каждую подозрительную на перегиб точку.

Если при переходе x через x_0 (где x_0 - точка, подозрительная на перегиб) вторая производная меняет знак, то $x = x_0$ есть точка перегиба данной кривой; в противном случае эта точка не является точкой перегиба кривой.

Для тех значений x, для которых $f''(x) > 0$, кривая $y = f(x)$ вогнута, а для тех x, для которых $f''(x) < 0$, - кривая выпукла.

При выполнении исследований по п. 2 сформулированного правила полезно иметь в виду следующее замечание. Пусть мы имеем для данной кривой $y = f(x)$ лишь конечное число точек, подозрительных на перегиб. Расположим эти точки в порядке возрастания:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n .$$

Тогда внутри каждого интервала $(x_{k-1}; x_k)$, а также для значений $x < x_1$ и $x > x_2$ (из области определения функции), производная $f''(x)$ будет существовать и сохранять постоянной знак. Поэтому для определения знака этой производной при значениях $x < x_k$, но достаточно близких к x_k, можно определить знак производной в любой точке θ'_k, удовлетворяющий условию $x_{k-1} < \theta'_k < x_k$, а для определения знака $f''(x)$ при значениях $x > x_k$, но достаточно близких к x_k, можно определить знак $f''(x)$ в любой точке θ''_k, удовлетворяющей условию $x_k < \theta''_k < x_{k+1}$.

<u>Пример 4.</u> Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Решение. Функция y имеет во всех точках производную $y' = 4x^3 - 12x$, и, значит, рассматриваемая кривая имеет в каждой точке касательную.

Находим:

$$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1) .$$

Корни уравнения

$$12(x-1)(x+1) = 0$$

будут: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Точек, в которых вторая производная не существует, нет.

Исследуем вторую производную y'' на изменение знака при переходе x через каждой её корень.

Если $x < -1$, то $y'' > 0$ и кривая для этих значений x вогнута, а если $-1 < x < 1$, то $y'' < 0$, и кривая выпукла. Так как при переходе x через значение $x = -1$ вторая производная меняет знак, то $x = -1$ - точка перегиба данной кривой.

Далее, для $x > 1$ имеем $y'' > 0$, и кривая вогнута для этих x. Производная y'' меняет знак, когда x переходит через точку $x = 1$. Следовательно, и точка $x = 1$ - точка перегиба исследуемой кривой (рис. 26).

Результаты исследования оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1;1)	1	$(1;\infty)$
y''	$y'' > 0$	$y'' = 0$	$y'' < 0$	$y'' = 0$	$y'' > 0$
y	*вогнута*	***перегиб***	*выпукла*	***перегиб***	*вогнута*

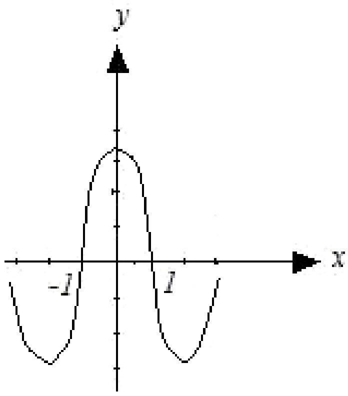


Рисунок 26.

Упражнения для самостоятельной работы.

Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривые со следующими уравнениями:

а) $y = x^3 - 6x + 2$;

б) $y = x^4 - 24x^2 + 70$;

в) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$;

г) $y = x^4 e^{-x}$.

§ 21. Исследование функции. Построение графиков.

Если не пользоваться понятием производной, то, занимаясь исследованием функций, можно ставить перед собой и решать примерно следующие задачи:

1) Определить область существования функции (если эта область пряио не задана).

2) Пользуясь соответствующими определениями, узнать, не является ли функция монотонной, чётной, нечётной, периодической, ограниченной, неограниченной.

3) Исследовать функцию на непрерывность; найти её точки разрыва (если таковые имеются).

4) Выяснить поведение функции $f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to +\infty, x \to -\infty)$ (если эта функция определена для как угодно больших по абсолютной величине значений аргумента).

5) Найти асимптоты графика.

Если воспользоваться установленными при этом свойствами функции и вычислить ещё несколько её значений при (вообще говоря) произвольных значениях аргумента, то можно построить приближенный график исследуемой функции, который в наглядной форме изобразит её поведение.

Выше мы рассмотрим применения понятие производной к изучению некоторых свойств функции. Этими применениями существенно расширилась программа исследования функции. В неё теперь, кроме указанного выше, можно включить:

1) Определение интервалов возрастания и убывания функции.

2) Отыскание её точек экстремума.

3) Нахождения точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости для графика данной функции.

Исследование функции при помощи понятия производной даёт по сравнению с предыдущими средствами исследования более качественную характеристику хода изменения функции, а вследствие этого позволяет и более точно построить график исследуемой функции.

На основании оказанного выше можно указать следующий примерный план исследования данной функции $f(x)$ и построения её графика:

1) Найти область определения функции (если она не указана прямо вместе с заданием функции).

2) Исследовать функцию на непрерывность и найти её точки разрыва (если они существуют).

3) Узнать, не является ли данная функция чётной ил нечётной, и, следовательно, не будет ли кривая, являющаяся графиком, данной функции, располагаться симметрично относительно оси OY или начала координат.

4) Выяснить, не является ли исследуемая функция периодической.

5) Исследовать функцию на экстремум, а также на возрастание и убывание.

6) Выяснить поведение функции при $x \to \infty$ $(+\infty; -\infty)$ если функция определена для как угодно больших по абсолютной величине значений аргумента.

7) Исследовать функцию на существование у её графика точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости.

8) Исследовать функцию на наличие у её графика асимптот.

9) Найти (если это нетрудно) действительные корни функции $f(x)$ (когда они существуют) и тем самым определить точки пересечения соответствующего графика с осью OX.

10) Вычислить значение функции на одном или обоих концах промежутка задания функции, если областью определения функции является полусегмент или сегмент.

11) Вычислить дополнительно ещё несколько значений функции, назначая аргументу x произвольные, вообще говоря, значения (из области определения функции); в частности, вычислить значение $f(0)$, если оно существует.

Тем самым будет найдено ещё несколько точек графика изучаемой функции (и, в частности, точка пересечения графика с осью ординат).

Следует заметить, что на практике часто нет необходимости проводить исследование по всем этим пунктам без исключения; удобно иногда бывает также изменить порядок исследования.

Пример 1. Исследовать функцию $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ и построить её график.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty;+\infty)$. Так как $f(x) = f(-x)$, то функция $f(x)$ чётная (и, следовательно, график функции симметричен относительно оси OY). Поэтому данную функцию достаточно исследовать лишь на полусегменте $[0;\infty)$.

Находим последовательно первую и вторую производные от $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \; f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Первая производная существует в любой точке x и обращается в нуль только при $x = 0$. При $x = 0$ $f(x)$ имеет минимум (равный -1), являющийся вместе с тем и наименьшим значением функции. Ввиду того, что при $x > 0$ $f'(x) > 0$, функция $f(x)$ возрастает на $[0;\infty)$.

Далее,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1,$$

откуда следует, что прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой для кривой $y = f(x)$. При этом

$$f(x) - 1 = \frac{-2}{x^2 + 1} < 0,$$

значит, кривая $y = f(x)$ лежит для всех x под асимптотой.

Вторая производная y'' существует в $[0;\infty)$ и обращается в нуль при $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, причём для $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $y'' > 0$, и, следовательно, для этих значений x

кривая вогнута, а для $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $y'' < 0$ и, значит, кривая для этих x выпукла. Отсюда при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ данная кривая имеет перегиб. При этом $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}$.

В силу чётности функции $f(x)$ на $(-\infty;+\infty)$ заключаем: функция $f(x)$ на $(-\infty;0)$ убывает; в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ кривая $y = f(x)$ имеет перегиб, причём на $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}})$ она выпукла, а на $(-\frac{1}{\sqrt{3}};0)$ - вогнута; $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}$.

Непосредственно ясно, что при $x = \pm 1$ функция обращается в нуль. Значит, кривая пересекает ось OX дважды: в точке (-1;0) и в точке (1;0).

Вычислим дополнительно ещё несколько значений функции, например, при $x = \pm\frac{1}{2}$ $f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{5}$; при $x = \pm 2$ $f(\pm 2) = \frac{3}{5}$; при $x = \pm 3$ $f(\pm 3) = \frac{4}{5}$.

Строим график функции (рис. 27).

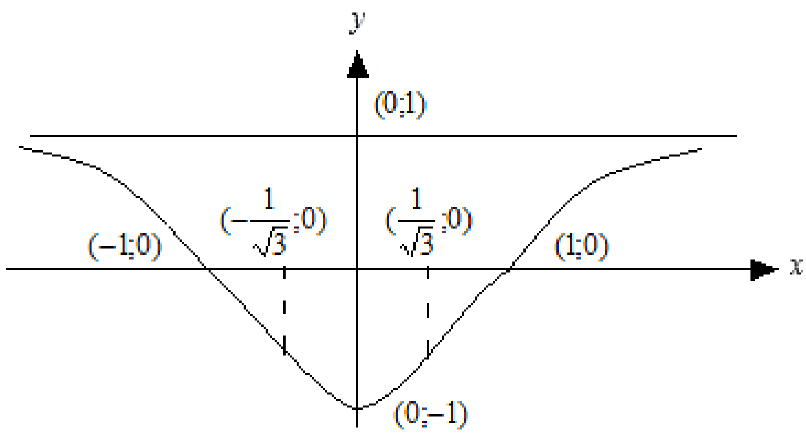


Рисунок 27.

<u>Пример 2.</u> Исследовать функцию $y = f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ и построить её график.

Решение. Функция определена и непрерывна в интервале $(0;\infty)$. Только при одном значении $x = e$ она обращается в нуль. Следовательно, только в одной точке $(e;0)$ кривая $y = f(x)$ пересекает ось OX. При $0 < x < e$ $f(x)$ положительна, а поэтому рассматриваемая кривая для этих значений x лежит над

OX; для $x > e$ $f(x) < 0$, и значит, при таких значениях x данная кривая лежит под осью OX. Находим $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$

Производная существует во всей области определения $f(x)$ и обращается в нуль только при $x = e^2$. При этом для $0 < x < e^2$ $f'(x) < 0$, а для $x > e^2$ $f'(x) > 0$. Следовательно, в интервале $(0; e^2)$ функция $f(x)$ убывает, в интервале $(e^2; \infty)$ - возрастает, а при $x = e^2 \approx 7{,}39$ имеет минимум:

$$f_{\min}(e^2) = -e^{-2} \approx -0{,}14.$$

Находим вторую производную $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{5 - 2\ln x}{x^3}.$$

Вторая производная существует в $(0; \infty)$ и обращается в нуль только при $x = e^2\sqrt{e} \approx 12{,}18$, причём для $0 < x < e^2\sqrt{e}$ $f''(x) > 0$, и, следовательно, для этих значений x кривая $y = f(x)$ вогнута, а для $x > e^2\sqrt{e}$ $f''(x) < 0$, и, значит, для этих x кривая выпукла. Поэтому при $x = e^2\sqrt{e}$ имеет точку изгиба кривой. При этом $f(e^2\sqrt{e}) = -\dfrac{3}{2e^2\sqrt{e}} \approx -0{,}12$.

Далее имеем:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - \ln x}{x} = +\infty.$$

Значит кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную $x = 0$.

Для уточнения хода кривой вычислим ещё несколько значений функции:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 2e, \quad f(1) = 1, \quad f(e^3) = -2e^{-3}.$$

Строим график данной функции (рис.28).

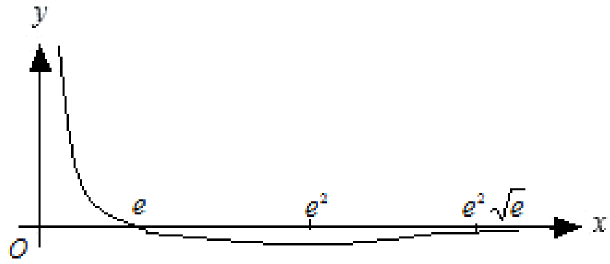


Рисунок 28.

Упражнения для самостоятельной работы.

Исследовать приведенные ниже функции и построить соответствующие им графики:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$;

б) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$;

в) $y = e^{2x-x^2}$;

г) $y = x^2 \ln x$;

д) $y = x\sqrt{1-x}$.

Задачи для практических занятий.

Занятие 1.

Тема: Понятие производной.

1. Найти производную от функции $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, пользуясь определением производной.

2. Дана функция $y = f(x) = \ln x$. Показать, что производная от данной функции имеет вид $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

3. Вычислить угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x) = 2 + x - x^2$ в точке $x_0 = 2$.

4. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3.

5. Показать, что угловой коэффициент касательной к гиперболе $y = \frac{4}{x}$, проведённой в точке $M(2;2)$ равен: -1.

6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2 + 16t - t^2$. В какой момент времени скорость будет равна нулю? Найти скорость точки в момент $t = 9$.

7. Колесо радиуса *R* катится по прямой. Угол φ поворота колеса за t секунд определяется уравнением $\varphi(t) = t + \frac{t^2}{2}$. Найти скорость и ускорение движения центра колеса.

8. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $S_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $S_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$. Найти ускорение точек в тот момент, когда скорости их равны.

9. Доказать, что движение по кубическому закону $S = at^3 + bt^2 + ct + d$ происходит с ускорением, меняющимся линейно.

10. Движение точки по оси x задано законом $x(t) = \frac{10}{t} - 1$. Найти мгновенную скорость в момент: $t = 1, t = 2, t = 3$.

11. Точка движется прямолинейно по закону $S = \sqrt{t}$. Доказать, что движение замедленное и что ускорение пропорционально кубу скорости.

12. Высота камня, брошенного вертикально вверх со скоростью v_0 с начальной высоты от земли h_0, меняется по закону $x = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $g = 10 м/c^2$ - ускорение силы тяжести.

а) Найти зависимость скорости камня от времени;

б) При $h_0 = 20 м$, $v_0 = 8 м/c$, найти скорость камня через 2 секунды. Зачем указано значение h_0? Через какое время камень упадёт на землю?

в) На какой высоте скорость обратится в 0?

г) Показать, что энергия камня $E = \frac{mv^2}{2} + mgh$ (где m - масса камня) не зависит от времени.

13. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента $t = 0$, задаётся формулой $q = 3t^2 + t + 2$. Найти силу тока в момент времени t

14. В какие моменты времени ток в цепи равен нулю, если количество электричества, протекающего через проводник, задаётся формулой:

а) $q = t + \frac{k}{t}$;

б) $q = t - \sqrt{t} + 1$.

15. Пусть $Q(\tau)$ - количество теплоты, которое необходимо при нагревании 1 кг воды от 0° до τ° (по Цельсию). Известно, что в диапазоне $0 \le \tau \le 95$ формула $Q(\tau) = 0{,}396\tau + 2{,}081 \cdot 10^{-3}\tau^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}\tau^3$ даёт хорошее приближение к истинному значению $Q(\tau)$. Найти, как зависит теплоёмкость воды от температуры.

16. Длина стержня меняется в зависимости от температуры по закону $l = l_0 + 0{,}001t + 0{,}0001t^2$. Найти коэффициент линейного расширения при $t = 5^\circ C$.

17. Что будет производной площади круга как функции от радиуса и почему?

18. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y = |x - 3|$;

б) $y + 4 = |x|$;

в) $y = -|x| - 1$.

19. Определить точку, в которой не существует производная данной функции $y = |5 - x|$.

20. Указать точку, в которой не существует производная данной функции $y - 6 = |x|$.

21. Дана функция $y = \begin{cases} x^2, x \le 2; \\ x - 2, x > 2. \end{cases}$ Имеет ли функция производную в точке $x = 2$?

22. Дана функция $y = \begin{cases} x, x \le 3; \\ -x + 9, x > 3. \end{cases}$ Имеет ли функция производную в точке $x = 3$?

23. Пусть $y = \begin{cases} x^3, x > 2; \\ 9, x = 2; \\ 8, x < 2. \end{cases}$ Имеет ли функция производную в точке $x = 2$?

Занятие 2.

Тема: Общие правила дифференцирования. Производная элементарных функций.

1. Показать, что $(2u + v)' = 2u' + v'$, учитывая, что функция $u = f(x)$, $v = g(x)$ имеют производные в заданной области D.

2. Показать, что $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, используя правила дифференцирования.

3. Найти производные следующих функций:

1) $y = 5x^4 - 7x^2 - x$;

2) $y = x^5 + 4x^4 - x^2 + 2x - 5$;

3) $y = \dfrac{2x^3}{3} - 3x^2 + 16x - 1$;

4) $y = 2 - \dfrac{x}{2} - x^2$;

5) $y = 3x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{3x}$;

6) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

7) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[3]{x} + x\sqrt{x}$;

8) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2} + 3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$;

9) $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

10) $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^3}$;

11) $y=\dfrac{x}{7}-\dfrac{7}{x}$;

12) $y=\sqrt[5]{x^3}+\dfrac{\sqrt{x}}{4}-\dfrac{3}{x^2}$;

13) $y=\dfrac{x^6}{2}-\dfrac{3}{x^2}+\sqrt{5x}$;

14) $y=(x^2-1)(x^2+1)$;

15) $y=(x+\sqrt{x})^2$;

16) $y=\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^2-3x-8)$;

17) $y=\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$;

18) $y=\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x})$;

19) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$;

20) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$;

21) $y=\dfrac{x-2}{2x^2-1}$;

22) $y=\dfrac{x}{x-1}$;

23) $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}$;

24) $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$;

25) $y=\dfrac{10x^4-3x^2}{3x^2-1}$;

26) $y=\dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{1-x}$;

27) $y=\sqrt{x}+\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$;

28) $y=\sin x\cos x$;

29) $y=tgx+ctgx$;

30) $y=\dfrac{tgx}{x}$;

31) $y=1+x+5\sin 2x$;

32) $y=\dfrac{2}{tgx}-\dfrac{1}{x^7}$;

33) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

34) $y=\dfrac{x\sin x}{1+tgx}$;

35) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$;

36) $y=x\arcsin x$;

37) $y=x\arccos x+\sin x arctgx$;

38) $y=\sqrt{x}arcctgx$;

39) $y=\dfrac{x^2}{\log_3 x}$;

40) $y=x\lg x$;

41) $y = x \sin x \ln x$;

42) $y = xe^x$;

43) $y = \dfrac{x^3 + 2^x}{e^x}$;

44) $y = 10^{2x} - \dfrac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$;

45) $y = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$;

46) $y = \dfrac{x - 1}{\log_2 x}$;

47) $y = \dfrac{x^2}{arctgx}$;

48) $y = \dfrac{e^x \cos x}{x}$;

49) $y = \dfrac{1}{\ln x}$;

50) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$.

4. Найти производные $y = f(x)$ в заданной точке x_0:

1) $y = f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$, $x_0 = 1$;

2) $y = 2^3 - x^2$, $x_0 = 1$;

3) $y = x^2 + 3 + \dfrac{2x}{x + 1}$, $x_0 = 1$

4) $y = 7 \sin x + 3x^3$, $x_0 = 0$;

5) $y = \sqrt{2} \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$, $x_0 = \sqrt{2}$;

6) $y = f(x) = (x^2 + 3x + 15) tgx$, $x_0 = 0$;

7) $y = \dfrac{e^x + 3x}{\cos x}$, $x_0 = 0$;

8) $y = \dfrac{1}{\pi} x^2 \sin x$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$;

9) $y = x^2 \ln x + \ln 3$, $x_0 = 1$;

10) $y = e^{\sin x} + e^{\cos x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Занятие 3.

<u>Тема:</u> Производная сложной функции.

1. Найти производные следующих функций:

1) $y=(5+2x)^{10}$;

2) $y=(1-x^2)^2(1-x^3)^3$;

3) $y=\frac{1-x-x^2}{(1-x)^2}$;

4) $y=\frac{x^3}{(1-x)^2}$;

5) $y=(1-2x^{\frac{1}{2}})^4$;

6) $y=\sqrt{1-x^2}$;

7) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

8) $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;

9) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^3}}$;

10) $y=(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}$;

11) $y=\cos^2 x$;

12) $y=\sin 3x-\sin(\sin x)$;

13) $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$;

14) $y=5\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{1}{x}$;

15) $y=\frac{1}{4}tg^4 x$;

16) $y=\arcsin(x-1)arctg(x-1)$;

17) $y=arcctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

18) $y=\sqrt{\ln x}$;

19) $y=\ln tgx$;

20) $y=\log_3(x^2-1)$;

21) $y=(1+\ln\sin x)^5$;

22) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;

23) $y=10^{2x-3}$;

24) $y=\sin e^x$;

25) $y=e^{\arcsin x}$;

26) $y=x^2 e^{-\frac{x^2}{4}}$;

27) $y=sh^2 x+ch^2 x$;

28) $y=\log_7(x^2-\sin x)$;

29) $y=x\cdot 8^{\sqrt{x}}$;

30) $y=\ln(\ln x)$;

31) $y=arctg\frac{1+x}{1-x}$;

32) $y=\ln tg\frac{x}{2}$;

33) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$;

34) $y=(\arccos\frac{1}{x})^6$;

35) $y=\sqrt[3]{x(1-x)^2}$;

36) $y=\sqrt{\sin\frac{\pi}{10}-\ln\frac{3}{x}}$;

37) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;

38) $y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;

39) $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$;

40) $y=e^{arctg\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$;

41) $y=\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}$;

42) $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$;

43) $y=\dfrac{1}{arctg3^{-2x}}$;

44) $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$;

45) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+ctgx}-\log_2\left(\dfrac{x^2-2}{6}\right)$;

46) $y=\ln tg\dfrac{x}{3}-ctgx\ln(1+\sin 2x)-x$;

47) $y=5^{\sin x\sqrt{1-x^2}}$;

48) $y=\dfrac{1+xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}$;

49) $y=\arcsin^2 x^2+arcctg(2e^x+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1})$;

50) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

51) $y=\dfrac{e^x arctgx}{\ln^5 x}$;

52) $y=\ln\sqrt{1-tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

2. Вычислить значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной.

1) $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x},\quad f'(3)=?$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}},\quad f'(1)=?$;

3) $f(x)=\sin 4x\cos 4x,\quad f'(\dfrac{\pi}{3})=?$;

4) $f(x)=\sin^2 x^2,\quad f'(0)=?$;

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}},\quad f'(0)=?$;

6) $f(x)=2^{x-2x^2-1},\quad f'(0)=?$;

7) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}},\quad f'(\pi)=?$;

8) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sin^2 x},\quad f'(\dfrac{\pi}{2})=?$.

3. Убедиться в том, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет заданному соотношению:

1) $y = \ln\frac{1}{1+x}, \quad xy' + 1 = e^y$;

2) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1-x^2)y' - xy = 1$;

3) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}, \quad 2y = xy' + \ln y'$;

4) $y = tg\ln 3x, \quad 1 + y^2 = xy'$;

5) $y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}, \quad \ln x + y^3 - 3xy^2y' = 0$;

6) $y = e^{tg\frac{x}{2}}, \quad y'\sin x = y\ln y$;

7) $y = e^{x+x^2} + 2e^x, \quad y' - y = 2xe^{x+x^2}$;

8) $y = (x+1)^{13}(e^x - 1), \quad y' - \frac{13y}{x+1} = e^x(1+x)^{13}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + x}}, \quad 2(\sin x)\cdot y' + y\cos x = y^3(x\cos x - \sin x)$;

10) $y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1}, \quad 1 + y^2 + xyy' = 0$.

Задание 4.

Тема: Производные высших порядков.

1. Найти производную указанного порядка:

1) $y = e^{2x-1}, \quad y'' = ?$;

2) $y = (x^2+1)^3, \quad y'' = ?$;

3) $y = (1+x^2)arctgx, \quad y'' = ?$;

4) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = ?$;

5) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = ?$;

6) $y = \cos^2 x, \quad y'' = ?$;

7) $y = x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)), \quad y'' = ?$;

8) $y = \arcsin(3\sin x), \quad y'' = ?$;

9) $y=\dfrac{1}{4+\sqrt{x}}$, $y''=?$;

10) $y=x\cos x^2$, $y'''=?$;

11) $y=\dfrac{\log_2 x}{x^3}$, $y'''=?$;

12) $y=(2x+3)\ln^2 x$, $y'''=?$;

13) $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y'''=?$;

14) $y=\dfrac{1}{x}\sin 2x$, $y'''=?$;

15) $y=(3x-7)\cdot 3^{-x}$, $y'''=?$;

16) $y=e^{-2x}\sin(2+3x)$, $y^{IV}=?$;

17) $y=xe^{-x}$, $y^{(4)}=?$;

18) $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{(4)}=?$;

19) $y=e^{-x}(\cos 2x-3\sin 2x)$, $y^{IV}=?$;

20) $y=(1-x-x^2)e^{\frac{x-1}{2}}$, $y^{IV}=?$;

21) $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y^{V}=?$;

22) $y=\dfrac{1}{1-x}$, $y^{(5)}=?$;

23) $y=\sqrt{4-x^2}$, $y^{V}=?$.

2. Найти $y^{(n)}$ для следующих функций:

1) $y=3e^{-x}$;

2) $y=\sin 2x+\cos 7x$;

3) $y=\log_a x$;

4) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

5) $y=\ln(5x-1)$;

6) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

7) $y=\sqrt{x}$;

8) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

9) $y=shx$;

10) $y=x\cos 2x$;

11) $y=e^x\ln x$;

12) $y=x\ln x$;

13) $y=\cos x\cdot chx$;

14) $y=\sin 2x\cos 4x$;

15) $y=(1+x^2)tgx$.

3. Доказать, что функция $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ удовлетворяет условию

$2y'^2=(y-1)y''$.

4. Убедиться, что функция $y=e^x\sin x$ удовлетворяет соотношению

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

а функция $y = e^{-x}\sin x$ - соотношению $y'' + 2y' - 2y = 0$.

5. Доказать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ удовлетворяет условию

$$y^3 y'' + 1 = 0.$$

6. Убедиться, что функция $y = \cos e^x + \sin e^x$ удовлетворяет условию $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

7. Доказать, что функция $y = (x^2 - 1)^n$ удовлетворяет соотношению

$$(x^2 - 1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

8. Убедиться в том, что функция $y = \sin(n \arcsin x)$ удовлетворяет соотношению $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

9. Доказать, что выражение $S = \dfrac{y'''}{y'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^2$ не изменится, если заменить y на $\dfrac{1}{y}$, то есть если положить $y = \dfrac{1}{z}$, то $\dfrac{z'''}{z'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{z''}{z'}\right)^2 = S$.

10. Решить задачи:

1) Точка движется прямолинейно, причём $S = \dfrac{4}{3}t^3 - t + 5$. Найти ускорение движения в конце второй минуты (S выражено в метрах, t - в секундах).

2) Точка движется прямолинейно, причём $S = \dfrac{2}{9}\sin\dfrac{\pi t}{2} + S_0$. Найти ускорение в конце первой секунды (S выражено в см, t - в секундах).

3) Точка движется прямолинейно, причём $S = \sqrt{t}$. Убедиться в том, что движение – замедленное и ускорение пропорционально кубу скорости v.

4) Баржу, палуба которой на 4 м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот со скоростью 2 м/сек. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на 8 м (по горизонтали).

5) Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\sin \omega t$. Определить ускорение движения в момент времени $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Показать, что ускорение движения пропорционально отношению x.

6) Движение точки по оси OX определяется формулой $x = (t-2)e^{-t}$. Определить ускорение движения в те моменты, когда точка меняет направление движения.

7) Показать, что если тело движется по закону $S = ae^{t} + be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

Задание 5.

Тема: Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

1. Продифференцировать данные функции, используя правило логарифмического дифференцирования.

1) $y = x^{x^2}$;

2) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

3) $y = (\ln x)^{x}$;

4) $y = (\arcsin x)^{e^x}$;

5) $y = x^{\arcsin x}$;

6) $y = (x-5)^{chx}$;

7) $y = (x^4 + 5)^{ctgx}$;

8) $y = (x^8 + 1)^{tgx}$;

9) $y = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$;

10) $y = 19^{x^{19}} \cdot x^{19}$;

11) $y = x^{\ln x}$;

12) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

13) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

14) $y = \dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^2}$;

15) $y = \sqrt[x]{(x+1)^2}$;

16) $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$;

17) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$;

18) $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

19) $y = \dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$;

20) $y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3 + \dfrac{1}{x}}$;

21) $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; 22) $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$;

23) $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$; 24) $y=\dfrac{(3x+\sqrt{x})(2x^2-1)}{\sqrt{x^2+2}}$;

25) $y=\dfrac{(x+3)^7\sqrt[5]{(2x-1)^3}}{\sqrt[7]{(2x+7)^2}}$.

2. Найти производные y'_x и y''_{xx} от функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=t-t^4 \\ y=t^2-t^3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=t^2+t+1 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x=e^t \\ y=\arcsin t \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x=arctgt \\ y=\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2+\cos t \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=arctgt \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t} \\ y=\dfrac{t-1}{t} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$; 11) $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1} \\ y=\ln t \end{cases}$; 12) $\begin{cases} x=sht \\ y=tht \end{cases}$;

13) $\begin{cases} x=\sin x \\ y=\ln\cos t \end{cases}$; 14) $\begin{cases} x=sh^2t \\ y=\dfrac{1}{ch^2t} \end{cases}$; 15) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin^4\dfrac{t}{2} \end{cases}$;

16) $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=tg^2t \end{cases}$; 17) $\begin{cases} x=cht \\ y=\sqrt[3]{sh^2t} \end{cases}$; 18) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-arctgt \end{cases}$;

19) $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$; 20) $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$.

Из уравнений, параметрически задающих функцию, исключить параметр:

1) $\begin{cases} x=3t \\ y=6t-t^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin 2t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=t^2 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = tgt \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

4. Найти значение параметра, соответствующее заданным координатам точки на линии, уравнение которой дано в параметрической форме:

1) $x = t^2 + 2t,\ \ y = t^3 + t,\ \ (3;2)$;

2) $x = t^2 - 1,\ \ y = t^3 - t,\ \ (0;0)$;

3) $x = 3(2\cos t - \cos 2t),\ \ y = 3(2\sin t - \sin 2t),\ \ (-9;0)$.

Задание 6.

Тема: Понятие дифференциала функции. Теорема о средних значениях. Теорема Тейлора для многочленов.

1. Найти приращение функции $y = x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной. Вычислить Δy, если $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1;0{,}01$. Какова будет ошибка значения Δy, если ограничиться членом, содержащим Δx в первой степени?

2. Дана функция $y = x^3 + 2x$. Найти значения приращения и его линейной главной части, соответствующие изменению x от $x = 2$ до $x = 2{,}1$.

3. Какое приращение получает функция $y = 3x^2 - x$ при переходе независимой переменной от значения $x = 1$ к значению $x = 1{,}02$.

4. Найти приращение ΔV объёма V шара при изменении радиуса $R = 2$ на ΔR. Вычислить ΔV, если $\Delta R = 0{,}5;0{,}1;0{,}01$. Какова будет ошибка значения ΔV, если ограничиться членом, содержащим ΔR в первой степени?

5. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить:

1) $\Delta f(1)$;

2) $df(1)$

и сравнить их, если:

а) $\Delta x = 1$;

б) $\Delta x = 0{,}1$;

в) $\Delta x = 0{,}01$.

6. Вычислить без помощи таблиц:

а) $\sqrt[3]{1{,}02}$;

б) $\sin 29^\circ$;

в) $\cos 151^\circ$;

г) $arctg 1{,}05$;

д) $\lg 11$;

е) $\arcsin 0{,}4983$;

ж) $\sqrt{120}$;

з) $\sqrt[7]{100}$.

7. $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$. Подсчитать приближенно $f(1{,}05)$.

8. Найти дифференциалы следующих функций:

1) $y = (1 + x - x^2)^3$;

2) $y = \dfrac{1}{x}$;

3) $y = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$;

4) $y = 5^{\ln tgx}$;

5) $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}$;

6) $y = \sqrt{\arcsin x} + (arctgx)^2$;

7) $y = 3^{-\frac{1}{x^2}} + 3x^3 - 4\sqrt{x}$;

8) $y = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$;

9) $y = shx - xchx$;

10) $y = th^3 x^6$.

9. Найти:

а) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

б) $d(\sqrt{a^2+x^2})$;

в) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

г) $d\left(\ln(1-x^2)\right)$;

д) $d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$.

10. Убедиться в том, что $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ удовлетворяет соотношению $2x^2dy=(x^2y^2+1)dx$.

11. Убедиться в том, что функция y, определенная уравнением $arctg\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, удовлетворяет соотношению $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

12. $y=3^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Вычислить dy при $x=1$ и $dx=0{,}2$.

13. В круговом секторе радиуса $R=100$ см и центральный угол $\alpha=60^\circ$. Насколько изменится площадь этого сектора, если:

а) радиус его R увеличить на 1 см;

б) угол α уменьшить на $30'$?

14. Период колебания маятника (в секундах) определяется по формуле $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l - длина маятника в см, $g=981 см/сек^2$ - ускорение силы тяжести. Насколько нужно изменить длину маятника $l=20$ см, чтобы период T увеличился на 0б05 сек?

15. Проверить применимость теоремы Ролля к следующим функциям:

а) $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ на [-1;2];

б) $f(x)=\ln\sin x$ на $[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}]$;

в) $f(x)=4^{\sin x}$ на $[0;\pi]$;

г) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$ на [1;2];

д) $f(x)=(x-1)(x-2)$ на [1;2].

16. Функция $y=\dfrac{2-x^2}{x^4}$ принимает равные значения на концах интервала [-1;1]. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде в интервале [-1;1] в нуль не обращаться, и объяснить такое уклонение от теоремы Ролля.

17. Написать формулу Лагранжа для функций:

а) $y=\sin 3x$ на $[x_1;x_2]$;

б) $y=x(1-\ln x)$ на $[a;b]$.

18. Рассмотрим функцию $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$. Эта функция дифференцируема при любом x. Напишем для неё формулу Лагранжа в интервале

$[0;x]: f(x)-f(0)=xf'(\xi)\ \ (0<\xi<x)$.

будем иметь:

$$x^2\sin\frac{1}{x}=x(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}),$$

откуда

$$\cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{\xi}.$$

Заставим теперь x стремиться к нулю, тогда будем стремиться к нулю и ξ, и получим:

$$\lim_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0.$$

Объяснить этот парадоксальный результат.

19. Написать формулу Коши и найти C для функций:

$f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\cos x$ на $[0;\dfrac{\pi}{2}]$.

20. Построить график функции $y = |x-1|$ на отрезке [0;3]. Почему здесь нельзя провести касательную, параллельную хорде? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполняется?

21.В какой точке касательная к кривой $y = 4 - x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2;0)$ и $B(1;3)$? Пояснить графически.

22. Разложить многочлен $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ по степеням двучлена $x+1$.

23. Найти три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

24. Разложить многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ по степеням двучлена $x-4$.

25. Разложить многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x+1$ и вычислить приближённо $f(0{,}34)$ с точностью до 0,001.

26. Разложить многочлен $x^{10} - 3x^6 + 1$ по степеням двучлена $x-1$

27. $f(x)$ - многочлен четвертой степени. Зная, что:

$$f(2) = -1,\ \ f'(2) = 0,\ \ f''(2) = 2,\ \ f'''(2) = -12,\ \ f^{IV}(2) = 24,$$

вычислить $f(-1),\ f'(0),\ f''(1)$.

Задание 7.

<u>Тема:</u> Касательная и нормаль к кривой. Правило Лопиталя.

1. Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

1) $y = 2x^2 + 3x - 1,\ \ x_0 = -2$;

2) $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32,\ \ x_0 = 4$;

3) $y = \dfrac{4x - x^2}{4},\ \ x_0 = 2$;

4) $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x},\ \ x_0 = 64$;

5) $y = x - x^3, \ \ x_0 = -1$;

6) $y = 2x + \dfrac{1}{x}, \ \ x_0 = 1$;

7) $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2}, \ \ x_0 = 2$;

8) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \ \ x_0 = -2$;

9) $y = \dfrac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, \ \ x_0 = 1$;

10) $y = (x-3)^{\frac{2}{3}}, \ \ x_0 = 11$;

11) $y = 3e^x + 3e, \ \ x_0 = 1$;

12) $y = \sin(x + \pi) + 1, \ \ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

13) $y = \sin^2 x, \ \ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

14) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}, \ \ x_0 = 0$;

15) $y = \ln(2e - x), \ \ x_0 = e$;

16) $y = 1 - \sqrt[3]{(x-2)^2}, \ \ x_0 = 2$;

17) $y = e^{1-x^2}$, в точках пересечения с прямой $y = 1$;

18) $y = \arccos 3x$, в точке пересечения с осью OX;

19) $y = yg2x$ в начале координат;

20) $y = x^2 \ln x, \ \ x_0 = 1$.

2. Составить уравнение касательной и нормали к данным линиям, уравнения которых заданы параметрически, в указанных точках.

1) $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, t = 0$;

2) $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}, y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}, t=1$;

3) $x=1-t^2, y=t-t^3, t=2$;

4) $x=2e^t, y=e^{-t}, t=0$;

5) $x=\sin t, y=5^t, t=0$;

6) $x=\sqrt{3}\cos t, y=\sin x, t=\frac{\pi}{3}$;

7) $x=2\ln ctgt+1, y=tgt+ctgt, t=\frac{\pi}{4}$;

8) $x=\ln(1+t^2), y=t-arctgt, t=1$;

9) $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, t=1$;

10) $x=\sin t, y=\cos 2t, t=\frac{\pi}{6}$.

3. В какой точке касательная к параболе $y=x^2+4x$ параллельна оси OX.

4. Написать уравнение касательной к графику функций:

а) $y=x-2x^2$, параллельно прямой $y=-7x$;

б) $y=3x-x^2-2$, параллельно прямой $y=-3x-5$;

в) $y=\frac{x}{x-1}$, параллельно прямой $y=4x+3$;

г) $y=x^3+3x^2-5$, параллельно прямой $y=24x+1$.

5. Определить координаты точек пересечения с осью OY тех касательных к графику функции $y=\frac{x+4}{x-5}$, которые образуют угол $\frac{3\pi}{4}$ с осью OX.

6. Найти угол, который образует с осью OX касательная, проведённая к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $y=5-0{,}5x^2, x_0=-\sqrt{3}$;

б) $y=x^3, x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $y = x^3, x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Найти сумму длин отрезков, отсекаемых на осях координат касательной, проведенной к кривой $y = x^3 + 3x - 2$ через точку $M_0(1;2)$.

8. В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°?

9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (0;5) и параллельной касательной к графику функции $y = x^3 - x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

10. К графику функции $f(x) = 2x^4 - x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ в точке $x = 0$ проведена касательная. Найти расстояние от начала координат до этой касательной.

11. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

12. Найти площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $M(3;2)$.

13. К гиперболе $y = \frac{4}{x}$ проведены касательные: одна в точке $M(2;2)$, а другая – параллельно прямой $y = -4x$. Найти площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

14. Вычислить пределы следующих функций, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{chx - \cos x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x} - e^{8x}}{\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x - 3^x}{tgx}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 6x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xctgx - 1}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x - 7^{\sin x}}{x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-shx}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin 9x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$; 20) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-1}{\sin x-\cos x}$; 21) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$;

22) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\cos x\ln(x-7)}{\ln(e^x-e^7)}$; 23) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$; 24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;

25) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\dfrac{1-\sin 4x}{(8x-\pi)^2}$; 26) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; 27) $\lim\limits_{x\to 1`}\dfrac{\ln(1-x)-tg\dfrac{\pi x}{2}}{ctg\pi x}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+x}{x^3}$; 29) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x^2+x}{x^3+1}$; 30) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{4x^2+1}$; 32) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{\ln(1+\dfrac{1}{x})}$; 33) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7}{x^2+7+e^{2x}}$.

34) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; 35) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 36) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; 38) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; 39) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

40) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; 41) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}\right)$; 42) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

43) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\dfrac{x}{2}$; 44) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$; 45) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{x}{7}$;

46) $\lim\limits_{x\to\infty}x^n e^{-x}$; 47) $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2arctgx)\ln x]$; 48) $\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]$;

49) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$; 50) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$; 51) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;

52) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$; 53) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$; 54) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$;

55) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$; 56) $\lim\limits_{x\to\infty}(thx)^{x}$; 57) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$;

58) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$; 59) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$; 60) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$;

61) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; 62) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$; 63) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$;

64) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$; 65) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$; 66) $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{1}{x}}$;

67) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$; 68) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; 69) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(ctgx)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$;

70) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 71) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)^{cthx}$; 72) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Занятие 8.

Тема : Экстремумы функций одной переменной. Наибольшее и наименьшее значение функции. Промежутки монотонности.

1. Показать, что функция $y=2x^3+3x^2-12x+1$ убывает в интервале (-2;1).

2. Показать, что функция $y=x^3+x$ везде возрастает.

3. Показать, что функция $y=arctgx-x$ везде убывает.

4. Показать, что функция $y=\frac{x^2-1}{x}$ возрастает в любом интервале, не содержащим точку $x=0$.

5. Исследовать на монотонность функцию $y=x^3-3x^2-9x+14$.

6. Определить интервалы монотонности следующих функций:

1) $y=x^4-2x^2-5$; 2) $y=3x-x^3$;

3) $y=\frac{2x}{1+x^2}$; 4) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$;

5) $y=x-e^{x}$; 6) $y=2x^2-\ln x$;

7) $y = \dfrac{x^2}{2^x}$;

8) $y = x + \sin x$;

9) $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$;

10) $y = x^2 - \ln x^2$;

11) $y = \sqrt[3]{(2x-5)(5-x)^2}$;

12) $y = x\sqrt{3x - x^2}$.

7. Доказать следующие неравенства:

1) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 1$;

2) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

3) $2x\,arctgx \ge \ln(1+x^2)$;

4) $tgx > x + \dfrac{x^3}{3}, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

5) $\sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}, \quad x > 0$;

6) $chx > 1 + \dfrac{x^2}{2}, \quad x \ne 0$.

8. Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $y = x^2 + 4x + 5$;

2) $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$;

3) $y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$;

4) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$;

5) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;

6) $y = x^2(1-x)$;

7) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$;

8) $y = x\sqrt[3]{x-1}$;

9) $y = xe^{-x}$;

10) $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$;

11) $y = x - arctg2x$;

12) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

13) $y = x - \ln(1+x)$;

14) $y = \dfrac{9}{5\sqrt{2x^3 - 15x^2 + 35x - 13}}$.

15) $y = \dfrac{13}{\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}x^6 - 15x^4 + \dfrac{135}{2}x^2 - 3}}$.

9. Производная квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ в точках 3 и 8 равна соответственно 10 и 5. Найти точку экстремума функции и указать, является ли она максимумом или минимумом.

10. Функция $y=(x-a)(x^2-1)$ имеет минимум в точке $x=\frac{1}{9}$. В какой точке у неё максимум?

11. При каких a функции $y=-x^3+3ax+5$ и $y=x^2+(a+1)x$ имеют минимум в одной и той же точке?

12. Найти точки остановки тела, двигающегося по следующему закону:

1) $S=2t-1+\dfrac{1}{4t+1}$;

2) $S=\dfrac{1}{(t-2)^2}-\dfrac{1}{t^2}$;

3) $S=\dfrac{t}{t^2-2t+1}$.

13. Функция $y=|\ln x|$ не дифференцируема в точке $x=1$. Имеет ли данная функция экстремум в точке $x=1$?

14. Исследовать функцию $y=0{,}8x^5+x^4+3x^3+2x^2+4x$ на возрастание (убывание) и экстремумы.

15. Найти наибольшие и наименьшие значения данных функций в указанных интервалах:

1) $y=x^3-6x^2+1$ на [-1;2];

2) $y=5x-\dfrac{5}{3}x^3$ на [0;2];

3) $y=7+4x^3-x^4$ на [-1;3];

4) $y=\dfrac{2x^2-9x-2}{x^2-5x-6}$ на [0;5];

5) $y=x+2\sqrt{x}$ на [0;4];

6) $y=\sqrt{100-x^2}$ на [-6;8];

7) $y=x-\sin x$ на $[0;2\pi]$;

8) $y=\sin 3x-3\sin x$ на $[0;\dfrac{3\pi}{2}]$;

9) $y=x^3(8-x)$ на [0;7];

10) $y=2^x$ на [-1;5];

11) $y=arctg\dfrac{1-x}{1+x}$ на [0;1];

12) $y=|x^2-3x+2|$ на [-10;10];

13) $y=(x-3)^2e^{|x|}$ на [-1;4].

16. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

17. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму?

18. Найти такие неотрицательные числа a и b, сумма которых равна 136, чтобы выражение $ab - a^2$ принимало наибольшее значение.

19. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+1}$-ю часть курса, а забывает $\frac{1}{25}t$-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

20. Через точку (3;5) провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом так, чтобы площадь треугольника, образованного ею с осями координат, была наименьшей.

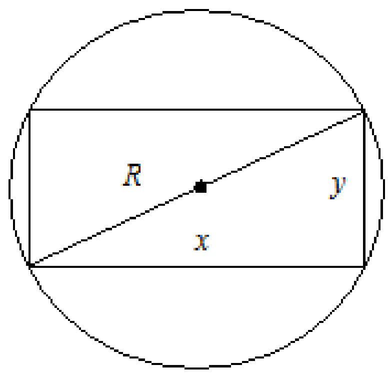
21. Решёткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

22. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.

23. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, которой можно вписать в эллипс с осями $2a$ и $2b$.

24. Окно имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом. Периметр окна равна. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

25. В сопротивлении материалов доказывают, что сопротивление изгибу балки прямоугольного сечения пропорционально её ширине x и квадрату её высоты $y: P = kxy^2$ (рис.). Какое сечение должна иметь балка наибольшего сопротивления изгибу, вырезанная из цилиндрического бревна радиуса R?



26. Найти высоту конуса наибольшего объёма, образующая которого имеет длину $l = \sqrt{3}$ см.

27. Найти радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, которой можно вписать в шар радиуса R.

28. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен пошло наибольшее количество материала.

29. Объём правильной четырёхугольной призмы 8 $см^3$. Какую длину должны иметь сторона основания, и высота призмы, чтобы площадь её поверхности была наименьшей?

30. В основании пирамиды прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 см. Высота пирамиды 6 см. Найти наибольший объём пирамиды.

31. Вписать в конус с высотой H и радиусом основания R цилиндр наибольшего объёма.

32. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит ось которого направлена перпендикулярно плоскости круга и проходит через его центр, выражается формулой:

$$F = \frac{cx}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

где a - радиус круга, x - расстояние от центра круга до магнита и c - постоянна. При каком значении x эта сила будет наибольшей?

33. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты $H = 2000$ м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с.Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ $м/с^2$, и пренебрегая сопротивлением воздуха. Найти наибольшую кинетическую энергию тела.

34. В точках A и B находятся источники света силы соответственно F_1 и F_2. На отрезке $AB = a$ найти наименее освещенную точку M (освещённость

точки обратно пропорциональна квадрату расстояния r её от источника света: $E = \frac{mF}{r^2}$, где $m = const$).

35. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R. При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшая? (Освещённость прямо пропорционально косинусу угла падения лучом света и обратно пропорционально квадрату расстояния от источника: $E = \frac{k\cos\varphi}{r^2}$, где $k = const$).

36. Стоимость плавания корабля в течение часа определяется формулой $a + bv^3$, где a и b - постоянные, а v - скорость корабля (первое слагаемое связано с расходами на амортизацию и содержание команды, а второе с расходом топлива). При какой скорости судно пройдёт расстояние l с наименьшими затратами?

37. Вблизи завода A проводится по намеченной прямой к городу B железная дорога. Под каким углом α к проектируемой железной дороге нужно провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешёвой, если стоимость перевозки 1 тонны – километра по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге.

38. На двух стройплощадках возводятся два одноэтажных склада общей площадью 600 $м^2$. Стоимость постройки склада прямо пропорциональна квадрату его площади. Кроме того, известно, что строительство 1 $м^2$ на второй площадке обходится на 40 % дороже, чем на первой. Какой должны быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была наименьшей?

39. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объёма V. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна p_1 руб. , а стенок - p_2 руб.. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

40. На странице книге печатный текст должен занимать S квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое – по

b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

41. Известна функция прибыли $П(x) = R(x) - C(x)$, где $R(x)$ - доход, $C(x)$ - издержки. Найти максимум прибыли, если доход и издержки определяются формулами соответственно: $R(x) = -x^2 + 5x$, $C(x) = 13x - 7x^2 + x^3$.

42. В краткосрочном плане производственная функция зависит только от численности персонала x фирмы и имеет вид $Q(x) = 4{,}5x^2 - 0{,}5x^3$. Требуется определить численность персонала, при которой выпуск продукции достигается максимального значения.

43. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 6x + 0{,}1x^3$, где x - объём выпускаемой продукции в усл. ед. $(x > 0)$. Найти оптимальный для производителя объём выпуска продукции и соответствующая ему прибыль, если $p = 486$ ден. ед. (Прибыль $П(x) = 486x - C(x)$).

44. Издержки производства составляют $C = 3x^2 + 18x$ (руб./час), объём выпускаемой продукции $Q = 2 + 6x$ (у.е./час), где x (руб./час) – количество вложенных в производство инвестиций. Цена единицы продукции $p = 12$ руб. Найти оптимальное количество инвестиций в производство.

Индивидуальные задания.

Вариант 1.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{1 + x^2}{\sqrt{x}}$;

б) $y = \ln \arcsin x^3$;

в) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$;

г) $y = (tgx)^{\ln x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 7x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x \ln x^2$, $x \in [e^{-1}; e]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$ в заданной точке $x_0 = 16$.

6. Решить задачу: Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 6t + 11$, $S_2(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - t^2 + 5t + 6$ (время t измеряется в секундах; пути S_1 и S_2 - в метрах). Найти ускорение материальных точек в тот момент, когда их скорости одинаковы.

7. Разложить многочлен $f(x) = 2x^6 - x^3 + 3$ по степеням двучлена $x - 2$ и вычислить приближенно $f(1{,}02)$ с точностью до 0,001.

8. Найти приближенное значение функции $y = arctgx$ в точке $x = 0{,}97$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$;

б) $y = x^3 + 3x + 2$;

в) $y = \ln(x^2 + x - 2)$

10. Решить задачу: Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечение будет наибольшей?

Вариант 2.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = x^5 \cdot e^{x+1}$;

б) $y = \sin^2 \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$;

в) $\begin{cases} x = 5t^3, \\ y = 3t^2 + 4t \end{cases}$;

г) $y = x^{\sin^2 x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4e^x + x^2}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{\frac{1}{\frac{\pi}{4} - x}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$$y = \frac{12}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \arccos x^2$, $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2t\cos t \\ y = 2t\sin t \end{cases}$ в заданной точке $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Решить задачу: Закон движения точки по оси OX даётся формулой $x = 10t + 5t^2$, где t - время в секундах, x - расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \le t \le 20 + \Delta t$, если:

а) $\Delta t = 1$;

б) $\Delta t = 0{,}01$.

Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

7. Разложить многочлен $f(x) = x^{11} + 3x^6 + 1$ по степеням двучлена $x + 1$ и вычислить приближенно $f(0{,}27)$ с точностью до 0,01.

8. Найти приближенное значение функции $y = \sin x$ в точке $x = 359^{\circ}$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^2 - 4x$;

б) $y = \dfrac{x^3 + 8}{3x}$;

в) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$.

10. Решить задачу: Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещённую точку, если силы света источников относятся, как 27:8.

Вариант 3.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sqrt{x}}$;

б) $y = 2^{\arcsin\sqrt{x}}$;

в) $\begin{cases} x = 2t^2 - t, \\ y = t + \sin t \end{cases}$;

г) $y = (\arcsin x)^x$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - 1}{\sin x - \cos x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} tgx \cdot \ln x$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = \sqrt[3]{(2x^3 - 9x^2 - 60x + 5)^2}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \dfrac{1}{\cos x}$, $x \in [\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$ в заданной точке $x_0 = 1$.

6. Решить задачу: Измерение величины заряда на обкладках конденсатора показали, что заряд q меняется со временем по закону:

$$q(t) = 3{,}05 + 6{,}11t - \frac{0{,}8}{t+1}$$

($t \le 10$, время в секундах, заряд в микрокулонах). Найти закон изменения силы тока.

7. Разложить многочлен $f(x) = 2 - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4$ по степеням двучлена $x - 3$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \arcsin x$ в точке $x = 0{,}51$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^2 - 12x + 21$;

б) $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2}$;

в) $y = e^{2x - x^2}$.

10. Решить задачу: В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить его радиус.

Вариант 4.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = (x^2 + 1)tgx$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$;

в) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$;

г) $y = (tgx)^{arctgx}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x - 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x^6 - 5x^4 + 5x^3 - 1,\quad x \in [0;2]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$ в заданной точке (0;0).

6. Решить задачу: Точка движется по параболе $y = 8x - x^2$ так, что её абсцисса изменяется по закону $x = \sqrt{t}$ (x измеряется в метрах, t - в секундах). Какова скорость изменения ординаты точки через 9 секунд после начала движения?

7. Разложить многочлен $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ по степеням двучлена $x-2$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[4]{x}$ в точке $x = 15{,}8$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 + 6x + 14$;

б) $y = \dfrac{4x^2}{x^3 - 1}$;

в) $y = (3x^2 + 4)e^{-x^2}$

10. Решить задачу: Найти максимум прибыли, если доход и издержки определяются формулами соответственно:

$R(q) = 70q + q^2$ и $C(q) = q^3 - 23q^2 - 170q + 6750$

(прибыль $\Pi(q) = R - C$).

Вариант 5.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{\ln x + 1}{x^2 + 1}$;

б) $y = \ln\dfrac{x+5}{x-5}$;

в) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - 4t \end{cases}$;

г) $y = (\cos x)^{\ln x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{4x} - x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{2x}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = (x-2)^{\frac{2}{3}}(2x+1)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in [0{,}01;100]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ в заданной точке $x_0 = 4$.

6. Решить задачу: Количество тепла Q Дж, необходимое для нагревания 1 кг воды от 0° С до t° С, определяется формулой $Q = t + 2\cdot 10^{-5}t^2 + 3\cdot 10^{-7}t^3$. Определить теплоёмкость воды при $t = 100^\circ$ С.

7. Разложить многочлен $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$ по степеням двучлена $x-1$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \ln tgx$ в точке $x = 47^\circ 15'$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^2(x-1)$;

б) $y = \dfrac{x^4}{x^3+64}$;

в) $y = 5xe^{-\frac{x}{3}}$.

10. Решить задачу: Потенциал в точке M электрического поля, образованного зарядом e, равен $\frac{e}{r}$, где r – расстояние от точки M до заряда. В точках O_1 и O_2, удаленных друг от друга на a, помещены заряды e_1 и e_2 одинакового знака. В какой точке отрезка O_1O_2 потенциал суммарного электрического поля будет наименьшим.

Вариант 6.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \sin x \cdot arctgx$;

б) $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$;

в) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = arctgt \end{cases}$;

г) $y = (x^2+4)^{tgx}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - \sqrt{8x}}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[4]{x} \cdot \ln x$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = x^2(1 - x\sqrt{x})$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x\sqrt[3]{x-1},\ \ x \in [0;9]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = 2tgt \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$$

в заданной точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

6. Решить задачу: Масса $m(t)$ радиоактивного вещества изменяется по закону $m = m_0 \cdot 2^{\frac{t_0 - t}{T}}$, где t – время, m_0 - масса в момент времени t_0, T – период по-

лураспада. Доказать, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству веществ. Найти коэффициент пропорциональности.

7. Разложить многочлен $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ по степеням двучлена $x - 2$ и вычислить приближенно $f(2{,}1)$ с точностью до $0{,}001$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 125{,}1324$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 - 3x + 10$;

б) $y = \dfrac{4x}{4 - x^2}$;

в) $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$

10. Решить задачу: Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч., составляет $90 + 0{,}4v^2$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

Вариант 7.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$;

б) $y = \ln^2 arctg\dfrac{x}{2}$;

в) $\begin{cases} x = \cos x, \\ y = t + \sin t \end{cases}$;

г) $y = (tgx)^{\arcsin x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 7}{x^2 + e^x + 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(tgx - \dfrac{1}{\cos x} \right)$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = x + \sqrt{3 - x}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $x \in [0;1]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 \arcsin\dfrac{x}{2}$ в заданной точке $x_0 = \sqrt{3}$.

6. Решить задачу: Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/сек. На какой высоте *x* оно будет через *t* секунд? Определить скорость и ускорение движения. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте?

7. Разложить многочлен $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ по степеням двучлена $x - 3$ и вычислить приближенно $f(0{,}39)$ с точностью до 0,01.

8. Найти приближенное значение функции $y = tgx$ в точке $x = 44^\circ 50'$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = (x + 3)(x - 2)^2$;

б) $y = \dfrac{-x^2}{2(x^2 + 10)}$;

в) $y = 3xe^{\frac{x^2}{2}}$.

10. Решить задачу: Периметр равнобедренного треугольника равен 2р. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объём тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

Вариант 8.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = (x^3 + x^2)\cos x$;

б) $y = \ln^2 \sin\dfrac{1}{x}$;

в) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 - t \end{cases}$;

г) $y=(\cos x)^{arctgx}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(x-3)}{x-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y=\ln(x^2+1)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=2x^3+3x^2-12x+1,\quad x\in[-1;5]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ в заданной точке $\left(1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. Решить задачу: Сосуд в форме полушара радиуса R см наполняется водой с постоянной скоростью a л/сек. Определить скорость повышения уровня на высоте уровня h см и показать, что она обратно пропорциональна площади свободной поверхности жидкости. *Указание*: Объём шарового сегмента $V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$. Обе часть этого равенства надо продифференцировать по t, причём $\dfrac{dV}{dt}=a$ (по условию).

7. Разложить многочлен $f(x)=4-4x-3x^2+2x^3+x^4$ по степеням двучлена $x+2$.

8. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ в точке $x=0{,}15$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=x^3+3x-4$;

б) $y=\dfrac{4x^2-9}{2x^3}$;

в) $y = x - \ln(x+9)$.

10. Решить задачу: Производственная функция Q зависит от числа работающих x и имеет вид $Q(x) = 24x^2 - 0{,}8x^3$, где Q – выпуск продукции, x –число работающих.Найти численность работающих, при которой выпуск Q достигает максимального значения.

Вариант 9.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$;

б) $y = 2^{ctg^2 4x}$;

в) $\begin{cases} x = t + t^2, \\ y = 2t + t^4 \end{cases}$;

г) $y = (arctgx)^{x^2}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - x - 1}{\sin 2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1)$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = \dfrac{x}{\ln x}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = 4x^6 - x^3 + 3, \quad x \in [0;1]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2^{-x^2}\sin \pi x$ в заданной точке $x_0 = 0$.

6. Решить задачу: Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью a м/сек. На какой высоте x он будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения снаряда. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

7. Разложить многочлен $f(x) = x^5 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12$ по степеням двучлена $x - 3$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \lg x$ в точке $x = 61$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 - 3x + 12$;

б) $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$;

в) $y = 2xe^{-\frac{3x^2}{2}}$.

10. Решить задачу: Если батарея с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r замкнута проводником с сопротивлением R, то мощность получающегося тока W выражается формулой $W = \dfrac{E^2 R}{(R + r)^2}$. При каком значении R мощность будет наибольшей?

Вариант 10.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x^3 + 1}$;

б) $y = \log_3(x^3 - \sin x)$;

в) $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t \end{cases}$;

г) $y = (tg(2x + 1))^{x^2+1}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - \sqrt{ax^3}}{\sqrt{ax} - x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = x^3 + 9x^2 + 24x - 5$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \sqrt[3]{x^2} - x, \quad x \in [0;1]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$ в заданной точке $x_0 = 1$.

6. Решить задачу: Колебательное движение материальной точки совершается по закону $x = a\cos\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в точках $x = \pm a$ и $x = 0$.

7. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 7x + 1$ по степеням двучлена $x - 5$.

8. Найти приближенное значение функции $y = x^6$ в точке $x = 1{,}002$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x(x^2 - 9)$;

б) $y = \dfrac{x^2 + x + 3}{x - 3}$;

в) $y = \dfrac{e^{3x} + e^{-3x}}{6}$.

10. Решить задачу: Найти наибольший объём правильной треугольной пирамиды, у которой периметр боковой грани равен 6 см.

Вариант 11.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$;

б) $y = tg^2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;

в) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin t \end{cases}$;

г) $y = (x^2\ )^x$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x - x^2}{e^{2x} + x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{5}{x^2}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x^3 e^{-x}$, $x \in [-1;4]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2} \\ y = \dfrac{3 + 2\ln t}{t} \end{cases}$ в заданной точке $t_0 = 1$.

6. Решить задачу: Тело движется по прямой OX по закону $x = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

7. Разложить многочлен $f(x) = x + 36x^2 - x^3 - x^5$ по степеням двучлена $x - 5$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[4]{x}$ в точке $x = 0{,}86$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 + 5x - 4$;

б) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$;

в) $y = \ln(x^2 - 3x)$.

10. Решить задачу: Требуется построить несколько одинаковых домов с общей площадью 40000 $м^2$. Затраты на постройку одного дома, имеющего S $м^2$ площади, складывается из стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$. Стоимость наземной

части составляет 32% стоимости фундамента для дома площадью 1600 $м^2$. Определить, сколько нужно построить одинаковых домов, чтобы сумма затрат была наименьшей.

Вариант 12.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=\sqrt{x+1}\cdot e^x$;

б) $y=e^{tg^2\frac{x}{2}}$;

в) $\begin{cases} x=5t^3, \\ y=3t^2+4t \end{cases}$;

г) $y=x^{\sin^2 x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y=x\cdot e^{-x}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in[-2;2]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=4ctgx-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ в заданной точке $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

6. Решить задачу: Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x=A(1-e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

7. Разложить многочлен $f(x)=x^7-5x^5-15x^3+x+30$ по степеням двучлена $x+6$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1{,}001$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 + 9x^2$;

б) $y = \frac{x^3}{x^3 - 64}$;

в) $y = x - \ln(x-5)$.

10. Решить задачу: Объём добычи щебня Q (т/час) зависит от количества вложенного труда x (чел./час) так: $y = 5\sqrt{x}$. Цена щебня 80 у.е./т, зарплата рабочего 40 у.е./час. Кроме зарплаты, другие издержки не учитывается. Найти оптимальное количество вложенного труда (рабочих) (х – число рабочих, функция прибыли $П(x) = 80 \cdot 5\sqrt{x} - 40x$).

Вариант 13.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = (x^2 + 1)tgx$;

б) $y = \ln arctg(3x + 4)$;

в) $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = 4t^2 - 4t \end{cases}$;

г) $y = x^{\cos^3 x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 4x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot tgx$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$, $x \in [-1;3]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ в заданной точке $t_0 = -\frac{\pi}{3}$.

6. Решить задачу: Количество электричества q (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q = 3t^2 + 2t$. Найти силу тока в конце пятой секунды.

7. Разложить многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ по степеням двучлена $x - 7$ и вычислить приближенно $f(0{,}92)$ с точностью до 0,01.

8. Найти приближенное значение функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$ в точке $x = 1{,}97$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = (x-1)^2(x+2)$;

б) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 5}$;

в) $y = (x-1)e^{3x+1}$.

10. Решить задачу: Три бригады должны выполнить работу. Первая бригада делает в день 200 деталей, вторая – на *m* деталей меньше, чем первая (0<*m*<200), а третья – на *5m* деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют $\frac{1}{5}$ всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся $\frac{4}{5}$ работы. На сколько деталей в день меньше должна делать вторая бригада, чем первая, чтобы вся работа была выполнена указанным способом как можно скорее?

Вариант 14.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = (x+1)\ln x$;

б) $y = \sqrt[3]{x^4 - 4}$;

в) $\begin{cases} x = 2t + t^4, \\ y = t + t^2 \end{cases}$;

г) $y = (x-1)^{x^3-1}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = x \ln x$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $x \in [-2;2]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \ln \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$ в заданной точке $x_0 = 0$.

6. Решить задачу: Человек, рост которого 1,7 м, удаляется от источника света, находящегося на высоте 3 м, со скоростью 6,34 км/час. С какой скоростью перемещается тень его головы?

7. Разложить многочлен $f(x) = 3x^8 - 4x^3 + 12x^2 + 1$ по степеням двучлена $x + 8$.

8. Найти приближенное значение функции $y = 5\sqrt{x}$ в точке $x = 4{,}02$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \dfrac{(x-2)^2 (x+4)}{4}$;

б) $y = \dfrac{x^3}{8 - x^3}$;

в) $y = \ln \dfrac{x-1}{x-2}$.

10. Решить задачу: В шар радиуса R вписан цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность. Найти объём этого цилиндра.

Вариант 15.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$;

б) $y = \sin^3 e^{4x}$;

в) $\begin{cases} x = -\sin t \\ y = \cos t \end{cases}$;

г) $y = (arctgx)^{\sqrt{x}}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{7}{x}\right)^x$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = 2\sin x - \sin 2x, \quad x \in [0; \dfrac{3\pi}{2}]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t} \\ y = \dfrac{t-1}{t} \end{cases}$ в заданной точке $t_0 = -1$.

6. Решить задачу: Тело массой 25 г движется прямолинейно по закону $S = \ln(1+t^2)$, где S изменяется в метрах, t – в секундах. Найти кинетическую энергию тела $\dfrac{mv^2}{2}$ через 2 секунды после начала движения.

7. Разложить многочлен $f(x) = 1 - x^2 - x^4 + 4x^3 + x^6$ по степеням двучлена $x-1$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \dfrac{5}{x}$ в точке $x = 9{,}004$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = 4x^3 - 12x + 3$;

б) $y = \dfrac{x^4 + 3}{2x^2}$;

в) $y = x + \ln(x^2 - 4)$.

10. Решить задачу: Картина высотой 1,4 м повещена на стену так, что её нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдается. На каком расстоянии от стены должен вставать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т.е. чтобы угол зрения был наибльшим).

Вариант 16.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{x-1}{e^x}$;

б) $y = \ln^2(x - \sqrt{x})$;

в) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$;

г) $y = (\sin x)^{tgx}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{2x} + x^2}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = x^2 \cdot e^{-x}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad x \in [-3;1]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 ctg \pi x$ в заданной точке $x_0 = \frac{1}{4}$.

6. Решить задачу: Одна сторона прямоугольника имеет постоянную величину $a = 10$ см, а другая b изменяется, возрастая с постоянной скоростью прямоугольника и его скорость в тот момент, когда $b = 30$ см?

7. Разложить многочлен $f(x) = x^7 - \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x + 0{,}1$ по степеням двучлена $x + 2$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \cos x$ в точке $x = 32^\circ$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$;

б) $y = \dfrac{x^3}{2(x^2 - 4)}$;

в) $y = \ln \dfrac{x}{x - 1}$.

10. Решить задачу: В краткосрочном плане производственная функция Q (у.е.) зависит от вложенных дополнительных инвестиций K (тыс. у.е.) и имеет вид $Q = 2K(520 - K)$. Требуется определить оптимальное количество вложенных инвестиций, при которых Q выпуск продукции достигает максимального значения.

Вариант 17.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{\ln 2x}{x^2 - 3}$;

б) $y = \sqrt[3]{tg(x^2 + 2x)}$;

в) $\begin{cases} x = e^{-t\cos t} \\ y = e^t \sin t \end{cases}$;

г) $y = (\sin x)^{(x-1)}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\arcsin(3-x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = \sqrt[5]{x^3 - 3x^2 - 9x + 10}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$, $x \in [-4;4]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ в заданной точке $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2} \right)$.

6. Решить задачу: Вращающееся колесо задерживается тормозом. Угол φ, на который колесо поворачивается в течение t секунд, определяется равенством $\varphi = 1 + 2t - 5t^2$. Найти угловое ускорение движения ($\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ рад/сек^2) через 2 секунды после включения тормоза.

7. Разложить многочлен $f(x) = x^{11} + 5x^5 - 3x^3 + x - 11$ по степеням двучлена $x - 6$.

8. Найти приближенное значение функции $y = x^4$ в точке $x = 0,99$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = (x-2)(x-1)(x+1)$;

б) $y = \sqrt[3]{1-x}$;

в) $y=\frac{e^x}{1+x}$.

10. Решить задачу: Три пункта A, B и C расположены так, что $\angle ABC=60^\circ$. Из пункта A выходит автомобиль, а одновременно из пункта B – поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/час, поезд – по направлению к C со скоростью 50 км/час. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если AB=200 км?

Вариант 18.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{x}$;

б) $y=3^{\ln\sin 2x}$;

в) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t^2 \end{cases}$;

г) $y=(tgx)^{\ln x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y=1-(x-3)^{\frac{3}{2}}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x,\quad x\in[0;\frac{\pi}{2}]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}$ в заданной точке $x_0=2\ln 2$.

6. Решить задачу: По оси OX движутся две точки, имеющие законы движения: $x=100+5t$ и $x=\frac{1}{2}t^2$, где $t\geq 0$ С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи (t измеряется в секундах, x – в метрах)?

7. Разложить многочлен $f(x)=-7-3x+2x^2+x^3-7x^5$ по степеням двучлена $x-3$ и вычислить приближенно $f(1{,}01)$ с точностью до 0,01.

8. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt{\frac{x+3}{x}}$ в точке $x=1{,}04$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=3x^3+6x^2$;

б) $y=\dfrac{x^4}{x^3-27}$;

в) $y=\ln(9-x^2)$.

10. Решить задачу: Найти наибольшую длину бревна, которое можно сплавлять из канала шириной a в канал шириной b. Стенки канала прямолинейны и отходят друг от друга под прямым углом.

Вариант 19.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{1-x^2}{\sqrt[3]{x^2}}$;

б) $y=3^{\arccos\sqrt{x}}$;

в) $\begin{cases} x=\sin^2 2t \\ y=t-\cos t \end{cases}$;

г) $y=(\cos x)^{(x-1)}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{10x-1}-2x}{7x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$$y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \frac{5x}{1+x^2}$, $x \in [-2;2]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$ в заданной точке $t_0 = 2$.

6. Решить задачу: Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 10 см/сек. С какой скоростью растёт объём шара в момент, когда радиус его становится равным 10 см?

7. Разложить многочлен $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - 2x^4 + x^3 - 9x^2 - x + 20$ по степеням двучлена $x+2$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \arcsin x$ в точке $x = 0{,}4983$.

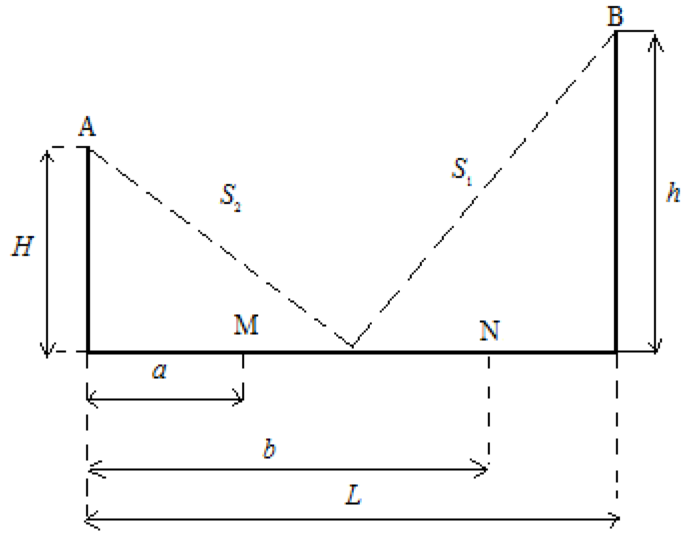
9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = (x-3)^2(x+1)$;

б) $y = \frac{-3}{x^2 - 6x + 9}$;

в) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

10. Решить задачу: Рыбаку нужно переправиться с острова *A* на остров *B* (рис.). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега *MN*. Найти наикратчайший путь рыбака $S = S_1 + S_2$, если $a = 200$, $b = 300$, $H = 400$, $h = 300$, $L = 700$.



Вариант 20.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=(x-1)^6 e^{\frac{1}{x}}$;

б) $y=\ln\dfrac{x^2-5}{x^2+5}$;

в) $\begin{cases} x=5t^3 \\ y=t^2+\cos t \end{cases}$;

г) $y=(arcctgx)^{x^2}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{x^2}}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{x^2-1}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y=\sqrt[3]{x^2}-1$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=2x+\cos 2x,\quad x\in[-\dfrac{3\pi}{4};\pi]$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{5-x^2}$ в заданной точке $x_0=1$.

6. Решить задачу: Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S=\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$, где t измеряется в секундах, S – в метрах. Определить скорость и ускорение движения в конце второй секунды.

7. Разложить многочлен $f(x)=5-x+x^5-5x^{10}$ по степеням двучлена $x+1$ и вычислить приближенно $f(0{,}73)$ с точностью до 0,001.

8. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt[6]{x}$ в точке $x=726$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=x^3-12x+3$;

б) $y=\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $y=e^{\frac{3}{3-x}}$.

10. Решить задачу: Если левый конец балки опёрт, а правый заделан, уравнение прогиба балки таково: $y=\dfrac{Q}{48EJl}(2x^4-3lx^3+l^3x)$. Найдите наибольший прогиб этой балки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – С.-П.: Изд-во «Профессия», 2001.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. – М.: Наука, 1982.

3. Виноградова И. А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1. – М.: «Высшая школа», 2000.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 9-е изд. – М.: Наука, 1977.

5. Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1,2. – М.: Наука, 1984.

6. Ильген В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.

7. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1,2. – М.: Физматлит, 2002.

8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Ч.1. – М.: Физматлит, 2003.

9. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – М.: «Высшая школа», 1983.

10. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис Пресс, 2007.

11. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике – М.: Физматгиз, 1967.

12. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1,2. – 3-е изд., перераб. и доп.-М.: Наука, 1983.

13. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.

14. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – 2-е изд., перераб. – М.: Изд-во МФТИ, 2000.

16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2,3. – 5-е изд. – М.: Наука, 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Анна Павловна Филимонова,
канд. физ-мат. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ
Светлана Владимировна Костенко,
кафедры общей математики и информатики АмГУ
Анна Владимировна Павельчук,
ассистент кафедры общей математики и информатики АмГУ
Анжелика Владимировна Голик,
ст.преподаватель кафедры общей математики и информатики АмГУ

Дифференцирование функций одной переменной с приложениями. Практикум.