

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального  
образования  
«Амурский государственный университет»  
(ГОУВПО «АмГУ»)

РАДИОФИЗИКА И ЭЛЕКТРОНИКА  
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
для направления подготовки 010600.68- «Прикладные математика и  
физика»

Утвержден на заседании кафедры теоретической и  
экспериментальной физики

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.,  
(протокол № \_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. )

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Е.А. Ванина

Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
инженерно-физического факультета  
Амурского государственного  
университета

***Ульянычев В.Н.***

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Радиофизика и электрогника» для направления подготовки 010600.68 «Прикладные математика и физика». – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011.

Учебно-методические рекомендации ориентированы на оказание помощи магистрантам очной формы обучения по направлению подготовки 010600.68 «Прикладные математика и физика» для формирования знаний по основам библиографии. В комплексе отражены основные направления научной деятельности преподавателей факультета.

Амурский государственный университет, 2011.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Рабочая программа	4
2. Лекции	10
3. Приложения	129
4. Вопросы к экзамену	103
5. Критерий оценки знаний студентов	136
6. Билеты	104

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального  
образования  
«Амурский государственный университет»  
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по УР

\_\_\_\_\_ В.В.

Проказин

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2010

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине «Радиофизика и электроника»

Направление подготовки 010600.68 - «Прикладные математика и физика»

Курс 6, семестр – 11, экзамен 11 семестр

Лекции – 36 часов;

Практические занятия – 18 часов;

Самостоятельная работа – 96 часов;

Всего – 150 часов

Составитель: канд. физ.-мат. наук, Ульянычев Н.В.

Инженерно-физический факультет

Кафедра теоретической и экспериментальной физики

Благовещенск

2010

Рабочая программа составлена на основании Федерального государственного

образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 010600.68 - «Прикладные математика и физика»

Разработчик: канд. физ.-мат. наук, Н. В. Ульянычев.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г. (протокол № \_\_\_\_ )

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ (Е. А.Ванина)

Рабочая программа рассмотрена на заседании учебно-методического совета направления подготовки 010600.68 - «Прикладные математика и физика»

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г. (протокол № \_\_\_\_ )

Председатель УМСМ \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_)

Рабочая программа переутверждена на заседании кафедры от \_\_\_\_\_ протокол № \_\_\_\_\_

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ И.О.Ф.  
подпись, дата

Начальник учебно-методического управления \_\_\_\_\_  
(подпись, И.О.Ф.)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**СОГЛАСОВАНО**

Заведующий выпускающей кафедрой

\_\_\_\_\_  
(подпись, И.О.Ф.)

## **ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Цель изучения дисциплины:** сформировать представления о современной радиоэлектронной технике, принципах работы, анализа и синтеза радиоэлектронных схем, о проведении физического эксперимента, автоматизации технологических процессов, компьютерном моделировании.

### **Задачи:**

1. Сформировать минимум физических, системно-теоретических и фактических знаний, позволяющих понимать и анализировать процессы, происходящие в радиоэлектронных цепях различного назначения.
2. Сформировать навыки использования радиоэлектронной аппаратуры для проведения физического эксперимента.

## **СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Лекции - 36 часов**

### **Введение**

#### **Глава 1. Основы теории колебаний (2 часа)**

- 1.1. Собственные колебания
- 1.2. Вынужденные колебания
- 1.3. Колебания в нелинейной системе
- 1.4. Параметрические колебания
- 1.5. Автоколебания

#### **Глава 2. Основы теории регистрирующих приборов (2 часа)**

- 2.1. Спектральные и временные преобразования
- 2.2. Типы регистрирующих приборов
- 2.3. Модуляция и преобразование сигналов
- 2.4. Нелинейные преобразования

#### **Глава 3. Основы теории волн (2 часа)**

- 3.1. Волновое уравнение для электромагнитных и звуковых волн
- 3.2. Решения волнового уравнения и основные характеристики волн
- 3.3. Пространственная структура волнового поля
- 3.4. Теория излучения
- 3.5. Метод Кирхгофа. Функция Грина волнового уравнения
- 3.6. Разложение волнового поля по плоским волнам

Глава 4. Приемно-передающие устройства и преобразование волновых сигналов (10 часов)

- 4.1. Принцип работы оптического квантового генератора (лазера)
- 4.2. Модуляция и передача оптического излучения
- 4.3. Прием и преобразование оптического излучения . Волоконно-оптические линии связи
- 4.4. Излучение и прием СВЧ и УК радиоволн. Антенны и распространение радиоволн

#### Раздел 1. Особенности диапазона СВЧ.

Уравнения для электромагнитного поля в средах с потерями. Граничные условия. Характеристики плоской волны, распространяющейся в среде с потерями

#### Раздел 2. Линии передачи СВЧ

Типы линий передачи СВЧ. Особенности распространения поля в волноводах - прямоугольного и круглого сечения в присутствии потерь. Эквивалентные параметры линии передачи (ЛП). Многосвязные ЛП - коаксиальная, полосковая.

#### Раздел 3. Объемные резонаторы (ОР)

Назначение и типы ОР. ОР простой формы и сложной - с зазором. Резонансная частота. Добротность.

#### Раздел 4. Элементы тракта СВЧ

Узкополосное согласование. Трансформаторы сопротивлений. Согласованные нагрузки, изоляторы, разъемы, переходы между линиями передачи разных типов. Отражающие неоднородности в трактах. Атенюаторы.

#### Раздел 5. Многополюсники СВЧ

Принципы матричного анализа работы многополюсников. Матрицы рассеяния и передачи. Направленные ответвители, мосты.

#### Раздел 6. Фильтры СВЧ

Назначение фильтров СВЧ. Требования к частотным характеристикам фильтров. Конструкции фильтров СВЧ на основе низкочастотных прототипов.

#### Раздел 7. Ферритовые устройства СВЧ

Невзаимные устройства. Намагниченный феррит в поле СВЧ. Устройства с поперечно намагниченным ферритом - фазовращатели, вентили, циркуляторы. Устройства с продольно намагниченным ферритом. Управляемые фильтры на ферритовых резонаторах.

- 4.5. Распространение СВЧ и УК радиоволн в земной атмосфере

- 4.6. Излучение и прием акустических волн

### **Глава 5. Волновая диагностика объектов и сред (10 часов)**

Эффективная площадь рассеяния. Уравнение радиолокации и факторы, влияющие на величину ЭПР. Матрица рассеяния. Частотные характеристики рассеяния, переходная и импульсная характеристики.

Строгие методы теории дифракции

Уравнения поля и граничные условия. Условия на ребре и на бесконечности. Дифракция плоских волн на бесконечном круговом цилиндре. Преобразование Ватсона. Дифракция на сфере (решение Ми). Дифракция на полуплоскости (метод Винера-Хопфа). Метод перевала. Дифракция на клине (решение в виде ряда и интеграл Зоммерфельда).

#### Приближенные методы теории дифракции

Метод физической оптики (метод Кирхгофа). Асимптотические методы вычисления интегралов, содержащих быстроосциллирующие функции (обзор). Дифракция на полуплоскости, клине и бесконечном цилиндре в приближении Кирхгофа. Приближенное выражение для поля, рассеянного телом конечных размеров. Дифракция на сфере, плоской прямоугольной пластинке, на конечном цилиндре и на конусе в приближении Кирхгофа. Метод физической теории дифракции (метод Уфимцева). Дифракция на конусе и сферическом сегменте в приближении физической теории дифракции. Понятие о геометрической теории дифракции. Отражение от тел с покрытиями. Приближенные граничные условия для тонких слоев.

5.1. Классификация волновых методов диагностики

5.2. Импульсные измерения

5.3. Доплеровские измерения

5.4. Спектральные измерения

5.5. Рассеяние волн в неоднородной среде

5.6. Введение в томографию. Основные методы квантовой радиофизики и их применения в различных областях науки и техники.

Электронные и ядерные моменты.

Феноменологическая теория магнитных резонансов.

Уравнение Блоха. Анализ поведения вектора  $M$  на основе уравнений Блоха. Уравнение Блоха во вращающейся системе координат (компоненты вектора  $M$ ). Динамическая восприимчивость  $s$  и ее компоненты.

Общее решение уравнений Блоха и схема его вывода. Стационарные решения для слабых и произвольных радиочастотных полей.

Интенсивность сигнала магнитного резонанса в жидкостях и твердых телах (на основе анализа стационарного решения уравнения Блоха).

Спиновая температура и явление насыщения.

Ширина и форма сигнала магнитного резонанса. Условия медленного прохождения через резонанс. Искажение формы сигнала. "Вигли".

Методы квантовой радиофизики.

1. Ядерный магнитный резонанс ( ЯМР ) на атомных и молекулярных пучках.



2. Ядерный магнитный резонанс в конденсированных средах, физические принципы явления ЯМР. Ядерная магнитная релаксация. Особенности ЯМР в твердых телах. Особенности сигналов ЯМР при наличии макроскопической упорядоченности. Другие применения ЯМР. Химические смещения сигналов ЯМР. Косвенные спин-спиновые взаимодействия. Динамический ЯМР.

Электронный парамагнитный резонанс ( ЭПР ). Особенности физических принципов и сигналов ЭПР. Ширина и форма линии ЭПР.  $g$  - фактор. Сверхтонкая структура спектров. Ферромагнитный резонанс.

Ядерный квадрупольный резонанс ( ЯКР ). Физические принципы явления ЯКР. Уровни энергии и частота. Факторы, влияющие на параметры сигналов ЯКР. Основные применения ЯКР.

Двойные и комбинированные резонансы. Общее определение. Эффект Оверхаузера ( электронно-ядерный резонанс ). Ядерно-ядерный резонанс. Оптическая ориентация спинов ( спин-фотонный ) резонанс. Акустический ( спин-фононый ). Применение двойных резонансов.

Микроволновая газовая радиоспектроскопия. Суть метода. Исследование спин-орбитальных взаимодействий ( Лэмбовско-Резерфордский сдвиг). Вращательные спектры. Колебательные спектры. Вращательно-колебательные спектры ( инверсионные ).

Основные системы квантовой электроники. Спиновые генераторы (генератор Шмельцера, генератор с динамической поляризацией ядер). Мазеры (двух- и трех -уровневые мазеры). Квантовые парамагнитные усилители.

Квантовая магнитометрия. Физические основы. Магнитометрия сильных магнитных полей. Особенности ЯМР и ЭПР в Земном поле. Основные применения.

Проявления макроскопического движения спинов в методах квантовой радиофизики. Влияние на параметры сигналов поглощения, свободной прецессии и спинового эха. Кинематическое спиновое эхо. Применение для расходомеров, в гидродинамике, в качестве корпускулярных гироскопов и др.

## **Глава 6. Основы обработки волновых сигналов (10часов)**

Раздел 1 Особенности радио-диапазона частот. Классификация сигналов и радиотехнических цепей.

Раздел 2.Спектральный анализ периодических сигналов - ряд Фурье. Спектральная функция. Пример обобщенных функций - дельта-функция Дирака. Спектральные характеристики неинтегрируемых сигналов.

Раздел 3. Амплитудно модулированные (АМ) сигналы. Однотональная модуляция. Амплитудно манипулированный сигнал. Балансная АМ. Однополосная АМ.

Раздел 4. Угловая модуляция (УМ). Однотональная модуляция при малом и большом индексах модуляции. Двухсигнальная УМ.

Раздел 5. Сигналы с ограниченным спектром. Идеальные сигналы. Теорема Котельникова. Дискретные сигналы. Дискретный канал связи. Спектр амплитудно-импульсно модулированного сигнала. Восстановление аналогового сигнала.

Раздел 6. Цифровой канал связи. Аналогово-цифровое и цифроаналоговое преобразование. Спектр цифрового сигнала. Цифровой (дискретный) трансверсальный фильтр. Цифровой рекурсивный фильтр.

Раздел 6. Шумы в радиотехнических цепях. Белый шум. Элементы теории случайных процессов: характеристики случайных процессов - плотность вероятности, среднее статистическое значение, дисперсия, автокорреляционная функция, - и их измерение. Теорема Винера-Хинчина. Тепловой шум. Энергетический спектр. Формула Найквиста. Дробовый шум.

6.1. Корреляционный прием и адаптивная фильтрации

6.2. Акустоэлектронные устройства аналоговой обработки сигналов

6.3. Интерферометрия и оптическая обработка сигналов

6.4. Основы Фурье-оптики

### **Самостоятельная работа -96 часов**

Приемно-передающие устройства  
и преобразование волновых сигналов (48 часов)

#### **Раздел 8. Твердотельные приборы СВЧ.**

Диоды СВЧ. Особенности и области использования (на примерах варакторов, p-i-n и параметрических диодов).

Туннельный диод. Качественная картина работы. Особенности ВАХ. Лавинно-пролетные диоды. Принцип действия. Уравнение лавины. Эквивалентные схемы области умножения и области дрейфа. Характеристики и области использования ЛПД.

Диоды Ганна. Качественная картина работы. Параметры. Режимы работы (доменный, с гашением домена, ОНОЗ).

Биполярные транзисторы. Эквивалентная схема, ее параметры. Частотные ограничения. Методы улучшения частотных свойств.

Полевые транзисторы. Принцип работы и эквивалентная схема. Пути и методы улучшения частотных свойств ПТ.

#### **Раздел 9. Электровакуумные приборы СВЧ.**

Клистроны.

Особенности и разновидности клистронов. Принцип действия пролетного двухрезонаторного клистрона. Кинематическая теория двухрезонаторного клистрона. Пространственно-временная и фазовая диаграммы движения электронов, выражения для конвекционного и наведенного токов, активная электронная проводимость, зоны генерации, КПД. Методы повышения коэффициента усиления и КПД многорезонаторных

к. (рекуперация, улучшение группировки электронов). Клистрон с распределенным взаимодействием, твистроны. Параметры и области использования пролетных клистронов.

Принцип действия отражательного клистрона. Анализ характеристик на основе электронных проводимостей. Параметры и области использования отражательных клистронов.

Магнетроны.

Устройство, особенности движения электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях. Парабола критического режима. Виды колебаний, разделение видов. Взаимодействие электронов с ВЧ полем, электронные спицы. Фазовые условия самовозбуждения магнетрона, пороговые прямые. Параметры магнетронов (выходная мощность, КПД, частота генерации). Параметры и области использования промышленных магнетронов. Коаксиальные и обращенные магнетроны. Магнетроны, настраиваемые напряжением (митроны).

Лампы бегущей и обратной волны.

Разновидности и принцип действия ЛБВ О-типа. Линейная теория ЛБВ. Дисперсионное уравнение. Виды волн в ЛБВ.

Характеристики и параметры ЛБВ (коэффициент усиления, частотная характеристика, КПД). Области использования.

Устройство и особенности ламп обратной волны (ЛОВ). Лампы бегущей и обратной волн М-типа. Устройство ЛБВМ, траектории электронов.

Гироприборы. Лазеры на свободных электронах

Гиротроны (мазеры на циклотронном резонансе). Анализ процессов в гиротроне. Образование электронных сгустков. Разновидности гиротронов. Характеристики гиротронов и их применение.

Лазеры на свободных электронах (ЛСЭ). Взаимодействие электромагнитной волны с электронами в ЛСЭ. Характеристики ЛСЭ и их применение.

## **Распространение э.м. волн в различных средах (48 часов)**

### **Раздел 10. Электромагнитные волны**

Уравнения для электромагнитных волн в среде. Дисперсионное уравнение для нормальных электромагнитных волн. Закон дисперсии и поляризация волн

Различные постановки задачи о нормальных электромагнитных волнах. Декремент затухания волны и глубина затухания поля

Комплексный показатель преломления. Основные понятия оптики материальных сред

Комплексный характер тензора  $\epsilon_{ij}(k, \omega)$

Соотношения симметрии Онсагера

Понятие о гиротропных и негиротропных средах

Примеры определения функций линейной реакции и их фурье-компонент

Соотношения Крамерса - Кронига

Изотропная негиротропная среда

Анизотропная негиротропная среда

Гиротропная среда со слабой пространственной дисперсией.

Вращение плоскости поляризации

Магнитополяризованные среды

Магнитооптические эффекты. Круговое магнитное двупреломление (эффект Фарадея). Линейное магнитное двулучепреломление (эффект Коттона - Мутона - Фогта)

Роль взаимодействия магнитного поля волны со средой.

Магнитополяризованная среда как бигиротропная среда

Энергетические потери быстрых заряженных частиц, движущихся в среде

Энергия электромагнитного поля в материальных средах

Простейшие модели материальных сред. Методика расчета материальных уравнений

### **Раздел 11. Свойства твердых тел**

Неполярные диэлектрики:

Модель упруго связанных электронов

Диэлектрическая проницаемость в периодическом поле  $E(\omega)$

Поглощение и аномальная дисперсия

Локальное электрическое поле в поляризованной среде. Поправка

Лоренц - Лоренца. Сдвиг резонансных частот

Полярные диэлектрики

Дебаевская теория диэлектрической релаксации

Релаксационный максимум поглощения

Качественная модель. Оценка времени релаксации

Проводники в переменном поле

Простейшая модель проводящей среды

Диэлектрическая проницаемость проводника

Проводимость в переменном поле

Характерные значения параметров для металлов и полупроводников

Поверхностный импеданс и его поведение при нормальном и аномальном скин-эффектах

Плазма

Плазма как среда с экранированным взаимодействием зарядов

Гидродинамическая модель плазмы и вычисление диэлектрической проницаемости с учетом пространственной дисперсии

Продольные электромагнитные волны в плазме - плазмоны

Экранирование заряда в плазме. Дебаевский радиус

Затухание плазменных волн. Бесстолкновительное затухание Ландау

Сверхпроводники

Явление сверхпроводимости

Идеальный проводник. "Вмораживание" магнитного поля  
Эффект Мейснера. Уравнение Лондонов  
Качественное описание природы сверхпроводящего состояния  
Квантово-механическое обобщение уравнения Лондонов.  
Квантование магнитного потока  
Захват магнитного потока сверхпроводящим контуром  
Высокотемпературные сверхпроводники

## **Вопросы к экзамену по курсу "Радиофизика и электроника"**

### **Основы теории колебаний**

1. Собственные колебания
2. Вынужденные колебания
3. Колебания в нелинейной системе
4. Параметрические колебания
5. Автоколебания

### **Основы теории регистрирующих приборов**

6. Спектральные и временные преобразования
7. Квазистатические приборы
8. Сейсмические приборы
9. Баллистические приборы
10. Резонансные приборы
11. Модуляция и преобразование сигналов
12. Нелинейные преобразования (детектирование, гетеродинирование)

### **Основы теории волн**

13. Волновое уравнение для электромагнитных волн
14. Волновое уравнение для упругих волн
15. Решения волнового уравнения и основные характеристики волн
16. Пространственная структура волнового поля
17. Теория излучения
18. Метод Кирхгофа. Функция Грина волнового уравнения
19. Разложение волнового поля по плоским волнам

### **Приемно-передающие устройства и преобразование волновых сигналов**

20. Принцип работы оптического квантового генератора (лазера)
21. Модуляция и передача оптического излучения
22. Прием и преобразование оптического излучения
23. Излучение и прием СВЧ и УК радиоволн

24. Распространение СВЧ и УК радиоволн в земной атмосфере
25. Излучение и прием акустических волн

#### **Волновая диагностика объектов и сред**

26. Классификация волновых методов диагностики
27. Импульсные измерения
28. Доплеровские измерения
29. Спектральные измерения
30. Рассеяние волн в неоднородной среде
31. Введение в томографию

#### **Основы обработки волновых сигналов**

32. Корреляционный прием и адаптивная фильтрация
33. Акустоэлектронные устройства аналоговой обработки сигналов
34. Интерферометрия и оптическая обработка сигналов
35. Основы Фурье-оптики

### **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

### **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

#### **Основная литература**

1. Александров А.Ф. Радиофизика. Физика электронных пучков и основы высокочастотной электроники: учеб. пособие: рек. УМО/А.Ф. Александров, М.В.Кузелев.- М.: Книжный дом Университет, 2007.- 299с..
2. Горелик ГН.С. Колебания и волны: введение в акустику, радиофизику и оптику: учеб.пособие: рек УМО/ Г.С. Горелик; под ред С.М.Рытова, - 3-е изд.. – М.:Физматлит, 2007.- 656с..
3. З.Гусев В.Г. Электроника и микропроцессорная техника аб учеб.: п. Мин. Обр. РФ/ В.Г.Гусев, Ю.М.Гусев. -5-е изд.. стер..-М.: Высш. Шк., 2008.-799с..

#### **Дополнительная литература**

1. Теория цепей СВЧ: Учеб. пособие / В. В. Тюрнев. Красноярск: ИПЦ КГТУ Чижик В. И. Квантовая радиофизика. СПбГУ, ФИЗМАТЛИТ®, 2004.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. - М.: Университетская книга, 2005.
3. Дудкин В.И., Пахомов Л.Н. Квантовая электроника. Приборы и их применение. М.: Издательство «Физматкнига», 2008
4. Розеншер Э. Оптоэлектроника. Пер. с фр., 2-е издание, испр., - М.: Техносфере, 2006.
5. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.

6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988.
7. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987.
8. Антенны и устройства СВЧ: Учеб. пособие для вузов / Под. ред. Д.И. Воскресенского. – М.: Радио и связь, 1994.
9. Захаров В.Е. Основы статистической радиофизики: Учебное пособие / Калинингр. ун-т. - Калининград, 1997.
10. Радиотехнические системы: Учеб. для вузов / Под ред. проф. Ю.М. Казаринова. – М.: Высш. шк., 1990.

Зачетов - нет, рефератов - нет, практических (семинарских) занятий - нет

## Конспект лекций по курсу "Радиофизика и электроника"

### Глава 1. Основы теории колебаний

Волновые процессы представляют собой колебания, распространяющиеся в пространстве. Поэтому, прежде чем приступить к изучению непосредственно волновых процессов и технических устройств, использующих волны различной природы, следует познакомиться с основами теории колебаний. Все колебательные и волновые процессы, встречающиеся в природе и технике, можно разделить на *периодические* и *непериодические*. Непериодические процессы чаще всего на практике сводятся к сумме (интегралу) периодических процессов, поскольку любая функция, описывающая колебательный или волновой процесс, при помощи *спектральных преобразований* представляется через ее гармонические (синусоидальные) составляющие.

Математически периодическая функция  $x(t)$  задается условием  $x(t) = x(t + T)$  при любом значении  $t$ , где  $T$  - период. Этому условию должны удовлетворять и периодические колебательные процессы. На практике это условие точно не выполняется, поскольку идеально периодических процессов в природе не существует. Поэтому мы будем иметь дело с процессами, *близкими к периодическим*, или *квазипериодическими*. Примером идеального периодического процесса являются колебания *линейного гармонического осциллятора*, или *математического маятника*. Однако такие колебания должны иметь бесконечно малую амплитуду и в колебательной системе должны отсутствовать энергетические потери. В настоящей главе мы кратко рассмотрим теорию основных видов колебаний: *собственные колебания*, *вынужденные колебания*, *параметрические колебания*, *автоколебания*. И проанализируем основные физические особенности колебательных процессов, которые в дальнейшем пригодятся нам при изучении теории и практики волновых процессов.

## 1.1. Собственные колебания

Для анализа колебаний в системе с одной степенью свободы используется следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1)$$

В этом уравнении функция  $f(x)$  описывает колебания физической величины во времени, а коэффициенты  $\delta$  и  $\omega_0$  определяют параметры этих колебаний. Величина  $\delta$  называется коэффициентом затухания, а  $\omega_0$  - собственная частота колебательной системы. Для традиционных примеров механической или электрической колебательных систем - пружинного маятника и электрического колебательного контура, эти величины, соответственно, выражаются следующим образом:

$$\delta = \frac{h}{2m} \text{ или } \delta = \frac{R}{2L}; \quad (1.2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ или } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Здесь  $k$  - коэффициент упругости,  $m$  - масса,  $L$  - индуктивность и  $C$  - емкость электрического контура,  $h, R$  - коэффициент механического трения и активное электрическое сопротивление.

Решение однородного линейного дифференциального уравнения (1.1) ищется в виде  $Ae^{\lambda t}$ . Подставив это выражение

в (1.1), получаем характеристическое уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.3)$$

Характеристическое уравнение (1.3) имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega, \quad (1.4)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица, а

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.5)$$

Общее решение уравнения (1.1) можно записать в виде

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}), \quad (1.6)$$

где  $C_1, C_2$  - константы, зависящие от начальных условий. В общем случае эти величины комплексны, однако мы ищем действительное решение  $x(t)$  и тогда они должны являться комплексно-сопряженными величинами и их можно заменить через вещественные константы  $A_0, \varphi_0$  с помощью равенств

$$2C_1 = A_0 e^{-i\varphi_0} \quad \text{и} \quad 2C_2 = A_0 e^{i\varphi_0}.$$

После этого перепишем решение (1.6) в вещественной форме:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi_0). \quad (1.7)$$

Решение описывает собственные экспоненциально затухающие колебания, частота которых зависит от затухания в соответствии с (1.5). Иногда говорят, что решение (1.7) описывает “затухающую синусоиду”, однако это справедливо только в случае слабого затухания, когда выполняется условие



$$\left| \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right| \ll 1. \quad (1.8)$$

Такой колебательный процесс можно также назвать *квазигармоническим*.

Иногда колебательную систему вместо коэффициента затухания характеризуют обратной величиной

$$\tau_0 = \frac{1}{\delta} = \frac{2m}{h} = \frac{2L}{R}, \quad (1.9)$$

которую называют “*постоянной времени*” системы. Эта величина показывает временной интервал, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Часто вместо величин  $\tau_0, \delta$  используют безразмерную величину

$$\vartheta = \delta T = 2\pi \frac{\delta}{\omega}, \quad (1.10)$$

которую называют *декрементом* затухания ( $T$  - период). Декремент - величина обратная количеству периодов, в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Приведем типичные значения декремента для некоторых колебательных систем:

1. Акустические колебательные системы  $\sim 10\%$ .
2. Электрические контуры  $\sim 2-5\%$ .
3. Камертон  $\sim 0,1\%$ .
4. Кварцевая пластина  $\sim 10^{-2} - 10^{-3} \%$ .

В заключение приведем решение  $x(t)$  уравнения (1.1) в общем виде с учетом начальных условий. Пусть

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \dot{x}_0. \quad (1.11)$$

Тогда, подставив эти значения в (1.7) при  $t = 0$ , получим:

$$A_0^2 = x_0^2 + \frac{(x_0\delta + \dot{x}_0)^2}{\omega^2}; \quad (1.12)$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{x_0\delta + \dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Используя (1.12) в (1.7), окончательно имеем:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0\delta + \dot{x}_0)^2}{\omega^2}} e^{-\delta t} \cos \left[ \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \cdot t - \arctg \frac{x_0\delta + \dot{x}_0}{\omega x_0} \right]. \quad (1.13)$$

## 1.2. Вынужденные колебания

Для анализа вынужденных колебаний в системе с одной степенью свободы используется уравнение, аналогичное (1.1), но с правой частью  $F(t)$ , описывающей внешнее воздействие на систему:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (1.14)$$

Если на систему действует гармоническая сила частотой  $\Omega$ , то

$$F(t) = f_0 \cos \Omega t. \quad (1.15)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму решения однородного уравнения и частного решения  $x_1(t)$  неоднородного:

$$x(t) = x_1(t) + A e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.16)$$

При наличии затухания собственные колебания в системе со временем исчезают и колебания определяются только вынужденной составляющей  $x_1(t)$ .

Перепишем (1.14 - 1.15) в комплексной форме:

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = f_0 e^{i\Omega t}. \quad (1.17)$$

Частное решение (1.17) будем искать в виде  $y_1 = A_1 e^{i\Omega t}$ , где  $A_1$  - комплексная величина. После подстановки этого выражения в (1.17) гармонический множитель  $e^{i\Omega t}$  сократится, и мы получаем уравнение для  $A_1$ :

$$A_1(-\Omega^2 + 2\delta i\Omega + \omega_0^2) = f_0. \quad (1.18)$$

Представив комплексную величину в виде  $A_1 = A_{01} e^{i\varphi}$ , найдем вещественные выражения для амплитуды и фазы вынужденных колебаний:

$$A_{01} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \delta^2}}; \quad (1.19)$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (1.20)$$

Окончательно для вынужденной составляющей колебаний в (1.16) получим

$$x_1(t) = A_{01} \cos(\Omega t - \varphi_1). \quad (1.21)$$

Теперь проанализируем общее решение (1.16). Предположим, что имеют место нулевые начальные условия и затухание в системе пренебрежимо мало:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \delta = 0. \quad (1.22)$$

Из (1.16, 1.21 и 1.22) следует

$$x(0) = A_{01} + A = 0; \quad (1.23)$$

$$\dot{x}(0) = -A \sin \varphi = 0, \quad \varphi = 0.$$

С учетом (1.23) общее решение (1.16) имеет вид

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t), \quad (1.24)$$

и это решение после элементарных тригонометрических преобразований преобразуется в произведение двух синусов:

$$x(t) = \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \left( \sin \frac{\omega_0 - \Omega}{2} t \right) \left( \sin \frac{\omega_0 + \Omega}{2} t \right). \quad (1.25)$$

Если выполняется условие

$$\gamma = \frac{\Omega}{\omega_0} \approx 1, \quad (1.26)$$

т.е. собственная частота и частота внешнего воздействия не слишком сильно отличаются ( $\omega_0 \approx \Omega$ ), то колебания в системе, описываемые (1.25), представляют собой биения (рис. 1.1).

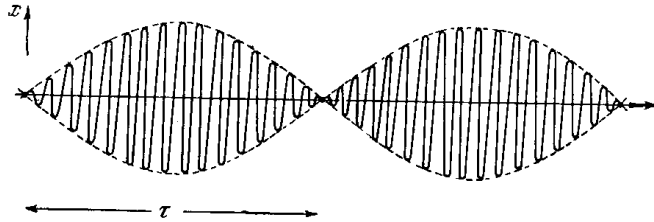


Рис. 1.1

Решение можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой  $\omega = (\omega_0 + \Omega)/2$  и переменной амплитудой, которая меняется с периодом  $\tau$  и частотой биений  $\frac{2\pi}{\tau} = \omega_0 - \Omega$ .

Решение (1.25) позволяет проанализировать временное поведение колебательной системы при резонансных условиях. Заметим, что если  $\Omega \rightarrow \omega_0$ , то амплитуда биений вырастает (разность квадратов частот стоит в знаменателе (1.25), а их период увеличивается). Перепишем (1.25) в виде

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0 + \Omega} \frac{\left( \sin \frac{\omega_0 - \Omega}{2} t \right)}{\frac{\omega_0 - \Omega}{2} t} \left( \sin \frac{\omega_0 + \Omega}{2} t \right), \quad (1.27)$$

и в этом выражении перейдем к пределу  $\Omega \rightarrow \omega_0$ . Тогда получим, что в любой конечный промежуток времени амплитуда колебаний линейно нарастает (рис.1.2):

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} t (\sin \omega_0 t). \quad (1.28)$$

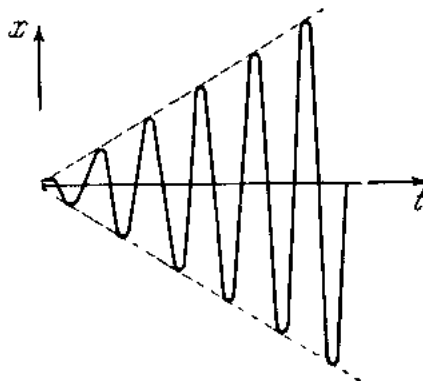


Рис. 1.2

Таким образом, физический смысл резонанса при нулевых начальных условиях состоит в нарастании амплитуды колебаний в системе под действием внешней силы. Если затухание отсутствует, то такое нарастание может продолжаться до бесконечности. При наличии затухания ( $\delta \neq 0$ ) амплитуда колебаний нарастает до определенной величины, которая определяется добротностью колебательной системы:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (1.29)$$

Максимальную амплитуду вынужденных колебаний в системе с затуханием можно определить из зависимости (1.19) для  $A_{01}(\Omega)$ . Если продифференцировать подкоренное выражение в знаменателе (1.19) и определить экстремум, то максимум амплитуды будет соответствовать резонансной частоте

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (1.30)$$

Из выражений (1.19-1.20) вытекают важные физические особенности резонанса:

1. При наличии затухания максимальная амплитуда вынужденных колебаний достигается на частоте, которая несколько отличается от собственной частоты колебательной системы (см. формулу 1.5):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

2. Имеется сдвиг фаз между смещением и скоростью (в механической колебательной системе) или напряжением и током (в электрическом колебательном контуре).

В зависимости от конкретных задач резонансом можно считать или совпадение частоты внешнего воздействия с собственной частотой системы или возникновение колебаний максимальной амплитуды. С увеличением добротности системы максимум амплитуды приближается к значению  $\gamma=1$  (см. 1.26). На рис.1.3 представлены резонансные кривые для нормированной амплитуды

$$u = \omega_0^2 \frac{A_{01}}{f_0}. \quad (1.31)$$

Если в (1.31) для  $A_{01}(\Omega)$  использовать выражение (1.19), то получим

$$u(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \quad (1.32)$$

В (1.31) считается, что внешнее воздействие на систему меняется по гармоническому закону вокруг постоянной составляющей  $f_0 = \omega_0^2 A_{01}(0)$ , что соответствует  $u(0) = 1$ . Пунктиром на рис.1.3 обозначено положение максимума амплитуды в зависимости от добротности системы.

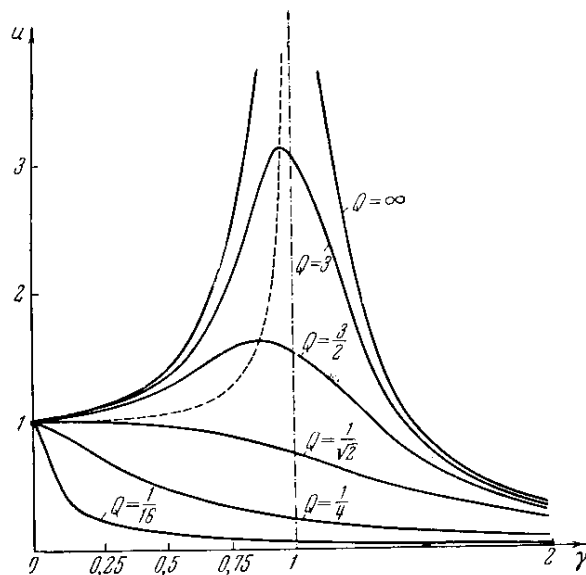


Рис. 1.3

### 1.3. Колебания в нелинейной системе

Выше мы ограничивались рассмотрением малых колебаний в системе, когда ее поведение описывается линейным дифференциальным уравнением. Если амплитуда колебаний конечна, то линейное приближение “не работает”.

В качестве примера рассмотрим колебания пружинного маятника, когда сила упругости пружины нелинейно зависит от ее деформации. Поведение такой системы описывается следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} f(x) = 0, \quad (1.33)$$

где функция  $f(x)$  представляет собой упругую силу, действующую на груз массой  $m$ . В частном случае, при отсутствии затухания и при малых отклонениях от положения равновесия  $f(x) = kx$  ( $k$  - коэффициент упругости), и система совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Умножим обе части уравнения (1.33) на  $\dot{x}$  и проинтегрируем его по времени. Получим следующее уравнение:

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^x f(x) dx = E_0. \quad (1.34)$$

Рассмотрим его физический смысл. Первый член в правой части представляет собой кинетическую энергию системы. Интеграл от силы между начальной и текущей  $x_0, x$  координатами есть работа этой силы. В случае, если сила потенциальна, работа может быть представлена в виде разности конечной и начальной потенциальной энергии системы  $U(x)$ :

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = U(x) - U(x_0). \quad (1.35)$$

В уравнении (1.34)  $E_0$  представляет собой произвольную константу интегрирования. Ее значение и физический смысл можно выяснить, если

считать  $x_0$  положением равновесия колебательной системы и положить потенциальную энергию  $U(x_0) = 0$ . В этом случае в точке  $x = x_0$  интеграл в уравнении равен нулю, а константа  $E_0$  равняется кинетической энергии. Таким образом, эта величина в общем случае является полной энергией консервативной системы, а уравнение (1.34) описывает закон сохранения.

Перепишем уравнение (1.34) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U(x)]}, \quad (1.36)$$

или

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U(x)]}}. \quad (1.37)$$

Пусть  $x_1, x_2$  - крайние значения отклонения системы от положения равновесия. Проинтегрировав последнее уравнение в этих пределах, получим:

$$\frac{1}{2}T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - U(x)]}}. \quad (1.38)$$

Здесь  $T$  - полный период колебаний. Из этого уравнения вытекают два принципиальных следствия:

1. Если известна функция, описывающая потенциальную энергию системы, то можно аналитически рассчитать период колебаний. При этом необходимо учитывать, что крайние значения колебаний  $x_1, x_2$  могут быть найдены из условия

$$U(x_1) = U(x_2) = E_0, \quad (1.39)$$

соответствующего максимальной потенциальной энергии колебательной системы.

2. Для нелинейной системы период колебаний в общем случае зависит от их амплитуды.

Решение (1.38) позволяет определить период колебаний, однако не помогает найти функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую нелинейному уравнению колебаний (1.33). Решение уравнения (1.33), как правило, ищется приближенными методами.

Одним из наиболее распространенных приближенных методов для решения нелинейных дифференциальных уравнений является *метод малого параметра* (метод теории возмущений). Кратко рассмотрим суть этого метода, который позволяет оценить основные физические особенности нелинейных колебаний конечной амплитуды.

Пусть точка  $x_0$  соответствует положению равновесия колебательной системы и находится в начале координат, т.е.

$$f(x_0) = f(0) = 0. \quad (1.40)$$

Тогда нелинейную функцию  $f(x)$  в окрестности точки  $x = 0$  можно разложить в ряд

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \dots \quad (1.41)$$

Здесь и далее функции со штрихами подразумевают дифференцирование по координате. Учитывая, что  $f(0) = 0, f'(0) = C_1 = \omega_0^2, f''(0) = C_2, \dots$ , и подставив (1.41) в (1.33), получим:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}(C_2 x^2 + \dots). \quad (1.42)$$

В общем случае метод малого параметра заключается в том, что нелинейное уравнение (1.33) сводится к неоднородному уравнению колебаний с нелинейной правой частью в виде степенного ряда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu(x) = \mu_1 x^2 + \mu_2 x^3 + \dots \quad (1.43)$$

При этом считается, что

$$\omega_0^2 A_0 \gg \mu_1 A_0^2 \gg \mu_2 A_0^3 \dots, \quad (1.44)$$

где  $A_0$  - амплитуда колебаний решения однородного уравнения линейного осциллятора:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.45)$$

Решение уравнения (1.43) ищется в виде суммы общего решения (1.45) однородного уравнения и частных решений неоднородного уравнения. При этом правая часть уравнения включает неизвестную искомую функцию  $x(t)$  и для нахождения частных решений предварительно необходимо ее определить.

Для простоты ограничимся квадратичным членом в правой части (1.42). Смысл приближения малого параметра или теории возмущений состоит в следующем: в силу условий (1.44) частное решение неоднородного уравнения  $x_1(t)$  заведомо значительно меньше, чем решение (1.45), и поэтому появление дополнительного члена в правой части не влияет на основное решение (1.45). Вследствие этого правая часть формируется из основного решения однородного уравнения

$$x_1(t) \Rightarrow \mu x^2 \approx \mu [A_0 \cos(\omega_0 t)]^2 \approx \mu \frac{A_0^2}{2} [\cos(2\omega_0 t) + 1]. \quad (1.46)$$

Построив таким образом правую часть уравнений (1.42 - 1.43), далее можно искать общее решение в виде:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_1(t), \quad (1.47)$$

как и решения для вынужденных колебаний в линейной системе.

Выражение (1.46) определяет основные физические особенности колебаний в нелинейной системе. Если амплитуда колебаний конечна, то нелинейность системы проявляется в появлении составляющих колебаний на кратных основной частоте  $\omega_0$  частотах:  $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ . Кроме того, в общем решении  $x(t)$  появляется постоянная составляющая, не зависящая от времени (см. 1.46). С увеличением амплитуды колебаний  $A_0$  эти нелинейные гармоники растут по амплитуде быстрее, чем колебания основной частоты, поскольку их амплитуда имеет квадратичную или более высокую степенную зависимость от  $A_0$ . Это, как и увеличение нелинейных характеристик системы (изменение

соотношений между  $\omega_0, \mu_1, \mu_2 \dots$ ), приводит к искажению колебаний и их все большему отклонению от гармонического вида. Для иллюстрации формы нелинейных искажений гармонических колебаний на рис.1.4 приведена сумма (кривая 3) гармоник основной (кривая 1) и удвоенной (кривая 2) частоты при амплитуде второй гармоники  $A_1 = \frac{1}{4} A_0$ ;

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + A_1(t) \cos(2\omega_0 t)$$

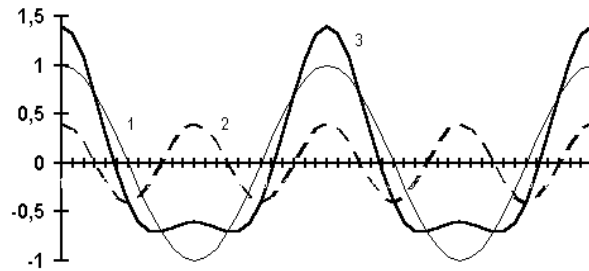


Рис. 1.4

Далее мы еще будем рассматривать частотный состав и искажения колебаний в нелинейной системе, поскольку возникновение гармоник, колебаний суммарных и разностных частот, а также постоянных составляющих имеет принципиальное значение в таких практических приложениях, как детектирование, гетеродинирование, выпрямление электрических сигналов.

#### 1.4. Параметрические колебания

До сих пор мы рассматривали *собственные* и *вынужденные* колебания. При собственных колебаниях система изолирована и колебания происходят за счет трансформации энергии, полученной системой в начальный момент времени. При вынужденных колебаниях на систему непрерывно действует внешняя сила, которая обеспечивает поступление энергии в колебательную систему. Кроме этих видов существует еще один широко распространенный вид колебаний, при котором внешнее воздействие на систему происходит неявно: непосредственно на систему силы не действуют, но параметры колебательной системы зависят от времени. При этом, соответственно, от времени зависят и коэффициенты уравнения, описывающего колебания:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (1.48)$$

Колебания в такой системе могут быть затухающими и нарастающими и носят название *параметрических* колебаний. Явление возникновения нарастающих колебаний при параметрическом воздействии на систему называют *параметрическим возбуждением* или *параметрическим резонансом*.

Рассмотрим простейший и наиболее показательный пример параметрических колебаний - раскачивание качелей. Качели можно считать математическим маятником с переменной длиной, и его колебания



описываются уравнением (1.48). Пусть длина маятника  $l$  меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$ :

$$l = l_0 + a \cos \Omega t . \quad (1.49)$$

При этом изменения длины маятника малы, т.е. выполняется условие

$$\frac{a}{l_0} = \mu \ll 1. \quad (1.50)$$

Для зависимости собственной частоты колебательной системы  $\omega(t)$  с учетом условия (1.50) можно записать:

$$\omega^2(t) = \frac{g}{l_0 + a \cos \Omega t} \approx \frac{g}{l_0} \left( 1 - \frac{a}{l_0} \cos \Omega t \right) = \omega_0^2 (1 - \mu \cos \Omega t). \quad (1.51)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$  и учитывается, что

$$\frac{1}{1+x} \approx (1-x) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Перепишем окончательно уравнение (1.48) с учетом (1.51):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (\mu \cos \Omega t) x. \quad (1.52)$$

Уравнение (1.52) представляет собой однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. В теории дифференциальных уравнений его решения достаточно хорошо изучены. Однако для простоты мы воспользуемся малостью правой части (1.52) и проанализируем его как неоднородное уравнение колебаний. Для его решения, как и для нелинейного уравнения, можно использовать теорию возмущений.

Пусть решение однородного уравнения есть

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Подставим это решение в правую часть (1.52) и после простейших тригонометрических преобразований получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \frac{A_0}{2} \mu \{ \cos[(\Omega - \omega_0)t - \varphi] + \cos[(\Omega + \omega_0)t + \varphi] \}. \quad (1.53)$$

Таким образом, частные решения неоднородного уравнения (1.53) дадут нам колебания в параметрической системе на *комбинационных частотах*

$$\omega = \omega_0 \pm \Omega .$$

Частоту изменения параметров системы  $\Omega$  часто называют *частотой параметрической накачки*. Особое значение имеет случай, когда частота накачки близка к удвоенной частоте собственных колебаний:

$$\Omega \approx 2\omega_0. \quad (1.54)$$

При выполнении условия (1.54) первый член в правой части (1.53) имеет частоту, равную собственной частоте системы и реализуются условия параметрического резонанса, т.е. в системе возникают нарастающие колебания.

На примере маятника с переменной длиной мы рассмотрели возможность возникновения параметрического резонанса в колебательной системе без затухания. На практике возникновение нарастающих по амплитуде колебаний (*параметрическое возбуждение* системы) происходит в том случае, если энергия, поступающая в систему за счет параметрической накачки, превышает потери при затухании, то есть амплитуда накачки должна превышать

некоторый порог, который определяется добротностью колебательной системы. Условия возникновения (генерации) устойчивых колебаний мы рассмотрим на примере автоколебаний.

### 1.5. Автоколебания

Автоколебаниями принято называть периодический процесс в колебательной системе, частота которого определяется внутренними параметрами системы, а поступление энергии для поддержания устойчивых колебаний осуществляется за счет обратной связи между колебательной системой и источником энергии. Рассмотрим пример автоколебаний в механической системе.

Пусть на гладкий вращающийся вал насажена муфта, составляющая одно целое с маятником (рис. 1.5). Автоколебания в такой системе могут возникать за счет того, что сила трения муфты о вал имеет нелинейную зависимость от частоты  $\omega = \Omega - \dot{\varphi}$ . Здесь  $\Omega$  - угловая скорость вращения вала и  $\dot{\varphi}$  - угловая скорость движения маятника при колебаниях.

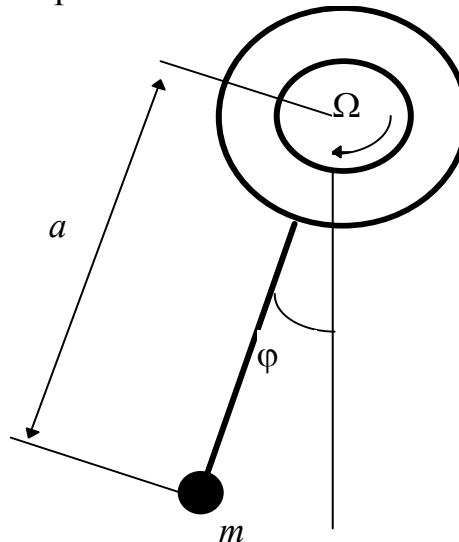


Рис. 1.5

Уравнение вращательного движения маятника в этих условиях можно записать следующим образом:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mga\varphi = f(\Omega - \dot{\varphi}), \quad (1.55)$$

где  $I$  - момент инерции маятника,  $b$  - коэффициент трения, определяющий момент силы трения (кроме трения о вал), ( $m$  - масса,  $g$  - ускорение свободного падения,  $a$  - расстояние от центра тяжести маятника до оси вращения) - величины, определяющие момент силы тяжести. Учитываем, что колебания имеют малую амплитуду ( $\varphi \approx \sin\varphi$ ). В правой части (1.55) стоит момент силы трения маятника о вал, зависящий от относительной угловой скорости движения  $\omega = \Omega - \dot{\varphi}$ . Режим автоколебаний может возникнуть в том случае, если зависимость момента силы трения от относительной угловой скорости имеет “падающий” участок, как на рис. 1.6.

Такая ситуация вполне может быть практически реализована: сила трения покоя имеет максимальную величину, затем, с увеличением угловой скорости, сила трения уменьшается, а при больших скоростях - опять увеличивается.

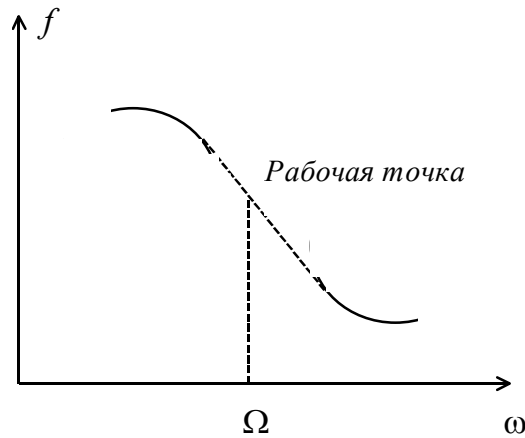


Рис. 1.6

Выберем угловую скорость вращения вала так, чтобы она соответствовала почти линейному участку зависимости и предположим, что угловая скорость движения маятника мала по сравнению со скоростью вращения вала  $\Omega \gg \dot{\phi}$ . Положение равновесия маятника на характеристике  $f(\omega)$  принято называть “рабочей точкой” (см. рис.1.6). Возле этой точки момент силы трения можно разложить в ряд:

$$f(\omega) = f(\Omega) + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{\Omega} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\right)_{\Omega} \dot{\phi}^2 + \dots \quad (1.56)$$

Будем в правой части (1.55) учитывать только первый линейный член разложения с коэффициентом

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{\Omega} = \alpha .$$

Тогда, вводя новую переменную

$$y = \phi - \frac{f(\Omega)}{mga} ,$$

уравнение (1.55) можно привести к виду:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (1.57)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2I}(b + \alpha); \quad \omega_0^2 = \frac{mga}{I}. \quad (1.58)$$

Таким образом, мы пришли к линейному уравнению колебаний, коэффициент затухания которых зависит от выбора “рабочей точки” на характеристике  $f(\omega)$ . Для зависимости рис.1.6  $\alpha < 0$ , поэтому мы можем получить и “идеальные” незатухающие колебания ( $\alpha = -b$ ), и колебания с отрицательным затуханием, т.е. усиливающиеся колебания ( $|\alpha| > b$ ). В последнем случае амплитуда колебаний согласно решению (1.57) может увеличиваться до бесконечности. На практике амплитуда колебаний достигает конечной величины и более не нарастает, поскольку колебания становятся нелинейны и необходимо учитывать члены более высокого порядка в разложении (1.56).

Традиционно для анализа автоколебаний в разложении (1.56) учитывается три члена:

$$f(\omega) = f(\Omega) + \mu_1 \dot{\phi} - \mu_2 \dot{\phi}^3. \quad (1.59)$$

Из разложения (1.59) следует два принципиально важных положения:

1. Автоколебания всегда требуют учета нелинейности, а значит, в автоколебательной системе не может существовать “чистых” синусоидальных колебаний. Автоколебательный процесс будет близким к синусоидальному или “квазигармоническим”.

2. В разложении (1.59) отсутствует квадратичный член. Это связано с выбором “рабочей точки”. Она выбирается на линейном спадающем участке характеристики, т.е. близко к точке перегиба зависимости  $f(\omega)$ . В точке перегиба вторая производная равна нулю, а первая и третья производные в разложении (1.56) имеют разные знаки.

Эти два положения - общие особенности уравнений автоколебаний любого типа: механических, электромагнитных.

Используя (1.59) в правой части уравнения (1.55) вместо линейного уравнения (1.57), получим:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = (\mu_1 - \mu_2 \dot{y}^2) \dot{y}. \quad (1.60)$$

Мы получили это уравнение для колебаний маятника, однако автоколебания в электрическом генераторе синусоидальных сигналов описывается уравнением, полностью аналогичным (1.60).

Для решения (1.60) мы воспользуемся широко распространенным в теории колебаний и волн *методом медленно меняющихся амплитуд (ММА)*. Для анализа слабо нелинейных процессов этот метод используется также часто, как

и метод теории возмущений, который мы использовали выше. Ищем решение (1.60) в виде

$$y(t) = A(t)\cos\omega t. \quad (1.61)$$

При этом мы предполагаем, что имеем дело с квазигармоническими колебаниями, и  $A(t)$ - медленно меняющаяся амплитуда колебаний. Это означает, что за период колебаний его амплитуда меняется пренебрежимо мало. Это условие записывается в виде

$$\frac{dA}{dt} \ll \omega A; \quad \frac{d^2 A}{dt^2} \ll \omega^2 A. \quad (1.62)$$

Подставив (1.61) в (1.60), получим:

$$\begin{aligned} & -2\frac{dA}{dt}\sin\omega t + \frac{d^2 A}{dt^2}\cos\omega t = \\ & = \left[ \mu_1 - \mu_2 \left( -\omega A \sin\omega t + \frac{dA}{dt} \cos\omega t \right)^2 \right] \times \left( -\omega A \sin\omega t + \frac{dA}{dt} \cos\omega t \right). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Далее, если учесть условия (1.62) и провести тригонометрические преобразования, получим из (1.63) следующее уравнение:

$$\left( 2\frac{dA}{dt} - \mu_1 A + \frac{3}{4}\mu_2 \omega^2 A^3 \right) \sin\omega t = \frac{1}{4}\mu_2 \omega^2 A^3 \sin 3\omega t + \text{малые}. \quad (1.64)$$

В правой части уравнения (1.64), вследствие кубичной нелинейности образовался член, ответственный за колебания на утроенной частоте  $3\omega$ . Далее, как и в методе теории возмущений, мы будем искать решение для основной гармоники колебаний частотой  $\omega$  и пренебрежем искажениями колебаний за счет правой части уравнения.

Тогда из (1.64) следует однородное нелинейное уравнение для амплитуды колебаний  $A(t)$ :

$$2\frac{dA}{dt} - \mu_1 A + \frac{3}{4}\mu_2 \omega^2 A^3 = 0. \quad (1.65)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка допускает разделение переменных и может быть легко решено. Перепишем (1.65) после разделения переменных:

$$t = 2 \int_{A(0)=a}^A \frac{dA}{\left( \mu_1 - \frac{3}{4}\mu_2 \omega^2 A^2 \right) A}.$$

Вычисляя интеграл, можно получить зависимость амплитуды колебаний от времени:

$$A(t) = \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\frac{3}{4}\mu_2 \omega^2 - \left( \frac{3}{4}\mu_2 \omega^2 - \frac{\mu_1}{a^2} \right) e^{-\mu_1 t}}}. \quad (1.66)$$

На рис. 1.7 приведено поведение решения (1.66). Величина  $a$  - начальная амплитуда колебаний.

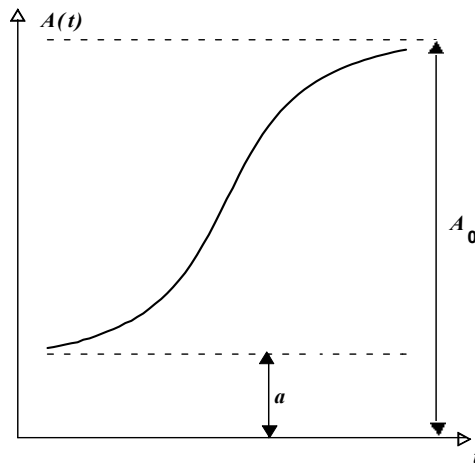


Рис. 1.7

Как видно из рис.1.7, амплитуда колебаний сначала все быстрее нарастает, а затем “насыщается” и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к пределу, который можно легко рассчитать из решения (1.66):

$$A(t) \rightarrow A_0 = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\mu_1}{3\mu_2}}. \quad (1.67)$$

Величина  $A_0$  характеризует *установившуюся или стационарную амплитуду автоколебаний*. Она не зависит от начальных условий (начальной амплитуды  $a$ ), а определяется собственной частотой колебательной системы  $\omega$  и выбором рабочей точки (коэффициентами разложения  $\mu_1, \mu_2$ ).

## Глава 2. Основы теории регистрирующих приборов

### 2.1. Спектральные и временные преобразования

Анализ колебаний и волн можно проводить в рамках *временного*, или *частотного (спектрального)*, подхода. Мы уже столкнулись с их различием при рассмотрении резонансных явлений при вынужденных колебаниях. Когда мы пользовались частотным подходом, то получили при резонансе колебания бесконечной амплитуды, что не имеет физического смысла. В рамках же временного подхода мы получили более обоснованное представление о резонансе как о линейном нарастании колебаний во времени. В некоторых случаях происходит наоборот: частотный подход оказывается более наглядным и удобным.

До сих пор мы рассматривали гармонические или квазигармонические колебательные процессы. На практике при регистрации колебаний и волн приходится сталкиваться временными зависимостями самой разной формы. Например, современная цифровая электронная техника все чаще вместо синусоидальных сигналов использует прямоугольные импульсы или их периодические последовательности. Вследствие этого важнейшим элементом анализа волновых и колебательных процессов является их представление в спектральной форме.

Пусть  $x = f(t)$  - периодическая функция с периодом  $T$ . Тогда она может быть представлена суммой гармонических составляющих:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (2.1)$$

где частота  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Среднее значение или постоянная составляющая функции определяется первым членом в разложении:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt. \quad (2.2)$$

Амплитуды гармонических составляющих рассчитываются следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt. \quad (2.3)$$

Совокупность величин  $a_n, b_n$  называется *спектром* функции  $f(t)$ , а величины  $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  - *амплитудным спектром*. Для удобства спектральное разложение (2.1) часто используется в комплексном представлении:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\Omega t}, \quad (2.4)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\Omega t} dt. \quad (2.5)$$

Разложения (2.1, 2.5) называются разложением в *ряд Фурье*. Обычно разложением в ряд Фурье пользуются для периодических функций, непериодические функции разлагают при помощи *интеграла или интегрального преобразования Фурье*. Это представление можно использовать для любой ограниченной функции, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = A < \infty. \quad (2.6)$$

На практике условие (2.6) всегда выполняется, поскольку любой сигнал или воздействие имеют конечную длительность и амплитуду. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.7)$$

где функцию  $G(i\omega)$  называют *плотностью комплексного спектра* и вычисляют по формуле

$$G(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.8)$$

Эта комплексная функция может быть представлена в виде

$$G(i\omega) = G_0(\omega) e^{i\varphi(\omega)}. \quad (2.9)$$

Таким образом, любая функция  $f(t)$  представляется в виде бесконечной суммы (интеграла)

$$f(t) = \sum dA \cos [\omega t + \varphi(\omega)], \quad (2.10)$$

где

$$dA(\omega) = \frac{d\omega}{\pi} G_0(\omega) \quad (2.11)$$

называется *плотностью амплитудного спектра*, а  $\varphi(\omega)$  - *спектром фаз*. Выражение (2.10) полностью соответствует разложению в ряд Фурье (2.1) с



той разницей, что спектр периодической функции является *дискретным*, а спектр непериодической - *сплошным*.

Теперь рассмотрим особенности спектрального и временного анализа колебательных систем. Если на такую систему производится гармоническое воздействие  $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ , то для амплитуды колебаний  $A$  в системе можно написать следующее уравнение:

$$A(-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2) = f_0. \quad (2.12)$$

В зависимости от частоты внешнего воздействия комплексная амплитуда меняется по закону

$$A(i\omega) = \frac{f_0}{K(i\omega)}, \quad (2.13)$$

где величину

$$K(i\omega) = -\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2 \quad (2.14)$$

называют *динамической жесткостью* системы. Обратную величину называют *спектральной передаточной функцией*:

$$B(i\omega) = \frac{1}{K(i\omega)}. \quad (2.15)$$

Если теперь мы будем считать, что внешнее воздействие на систему  $f(t)$  представляет собой не одну гармонику, а функцию со спектром  $G(i\omega)$ , то вместо (2.13) можно записать

$$A(i\omega) = \frac{G(i\omega)}{K(i\omega)}. \quad (2.16)$$

Тогда с учетом (2.15) колебания в системе будут иметь временную зависимость  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(i\omega)G(i\omega)e^{i\omega t} d\omega$ . (2.17)

Функцию (2.17) называют *откликом* линейной системы на воздействие  $f(t)$  (рис.2.1).

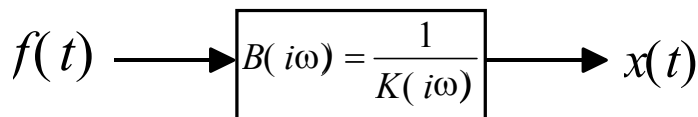


Рис. 2.1

Если обозначить соответствие временной функции спектру

$$f(t) \div G(i\omega),$$

то

$$x(t) \div B(i\omega)G(i\omega). \quad (2.18)$$

В общем случае параметры системы могут зависеть от времени, т.е. система *нестационарна*, тогда

$$B(i\omega) = B(i\omega, t).$$

Пусть на систему воздействует бесконечно короткий импульс в виде дельта-функции:

$$f(t) = \delta(t - t_0). \quad (2.19)$$

Спектр дельта-функции представляет собой постоянную величину:

$$\delta(t - t_0) \div G(i\omega) = 1, \quad (2.20)$$

то есть она состоит из бесконечного набора гармонических составляющих с одинаковой амплитудой. Используя (2.18) и учитывая (2.20), мы получим следующий отклик системы на внешнее воздействие:

$$h(t) \div B(i\omega). \quad (2.21)$$

С другой стороны, любая функция  $f(t)$  (по определению) может быть выражена через дельта-функцию следующим образом:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\delta(t - \theta)d\theta. \quad (2.22)$$

В математике существует теорема о свертке, гласящая, что спектр от свертки двух функций есть произведение спектров каждой из них. Тогда вместо (2.18) с учетом (2.21) для отклика системы на произвольную функцию можно написать:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)h(t - \theta)d\theta. \quad (2.23)$$

Таким образом, для получения временного отклика системы на произвольное воздействие достаточно знать функцию  $h(t)$ , которая является откликом на дельта-функцию и спектр которой соответствует спектральной передаточной функции системы. Функция  $h(t)$  называется *функцией Грина* и очень широко используется при анализе колебательных и волновых процессов.

## 2.2. Типы регистрирующих приборов

Рассмотрим характеристики приборов, предназначенных для измерения переменных величин в колебательных или волновых процессах. Пусть  $y$  - измеряемая величина, если  $x$  - показания прибора, то функция  $x = f(y)$  называется *тарировкой* прибора, а получение этой функции при эталонных измерениях - *градуировкой* прибора. Основными характеристиками прибора являются:

1. *Диапазон изменения* измеряемой величины  $y$ .
2.  $\frac{\partial x}{\partial y}$  - *чувствительность прибора*.
3.  $\frac{\Delta y}{y}$  - *точность* прибора, где  $\Delta y$  - минимальная величина, которую может отметить прибор.

Поскольку мы рассматриваем приборы для измерения переменных величин, то нас будут интересовать зависимости от времени  $x(t), y(t)$  и их связь между собой. Будем анализировать характеристики приборов на простейшем примере деформируемой пружины (рис. 2.2).

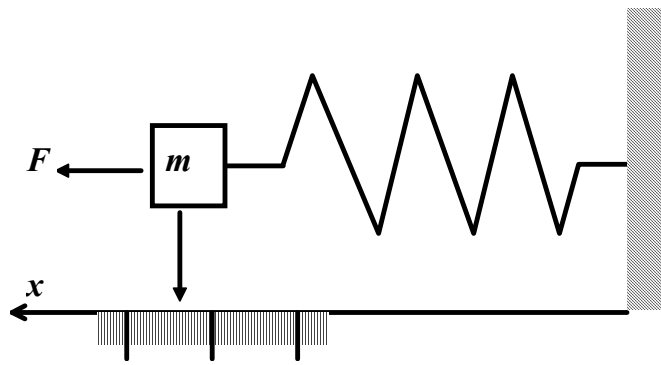


Рис. 2.2

Будем считать, что  $F$  - сила, вызываемая измеряемой величиной  $y$ . Такой прибор будет “идеальным”, если в нем отсутствует трение, действуют линейные упругие силы  $F = kx$ , и пружина невесома ( $m = 0$ ). На практике все эти условия не выполняются. Причем аналогичные ограничения имеют не только механические, но и электронные приборы. Все они обладают сопротивлением, нелинейными ограничениями, инерционностью. В зависимости от того, какие физические величины прибор измеряет и какие из перечисленных выше ограничений проявляются в приборе прежде всего, разделим регистрирующие приборы на четыре типа: квазистатические, сейсмические, баллистические и резонансные.

### Квазистатические приборы

Квазистатическими приборами называются такие приборы, которые измеряют переменные величины как постоянные. Проанализируем ограничения, которые могут возникнуть, если рассматривать прибор, показанный на рис.2.2.

Уравнение для изменения показаний  $x(t)$  в зависимости от внешнего воздействия представляет собой уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \quad (2.24)$$

Важнейшей характеристикой прибора является статическая чувствительность, которая обратно пропорциональна жесткости пружины:

$$\frac{\partial x}{\partial F} = \frac{1}{k}, \quad (2.25)$$

как следует из определения линейной силы упругости,  $F = kx$ . С другой стороны, если решать уравнение (2.24) и использовать формулы (2.13 - 2.15) с определением динамической жесткости системы, то получим, что прибор может считаться квазистатическим, если

$$\frac{\partial x}{\partial F} = \frac{1}{k} \approx \frac{1}{K(i\omega)}. \quad (2.26)$$

Чтобы система откликнулась на переменное воздействие как на постоянное, динамическая жесткость системы должна быть приблизительно равна

статической жесткости и слабо зависеть от частоты. Эти условия могут быть сформулированы несколькими способами:

$$\begin{aligned} |m\ddot{x}| &\ll |kx|, \\ |b\dot{x}| &\ll |kx|; \end{aligned} \quad (2.27)$$

или через частоту внешнего воздействия  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} m\Omega^2 &\ll k, \\ b\Omega &\ll k. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Если мы используем стандартные обозначения, то (2.27 - 2.28) переписутся в виде

$$\omega_0 \gg \Omega \text{ или } \gamma = \frac{\Omega}{\omega_0} \ll 1, \quad \gamma \ll Q, \quad (2.29)$$

где  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$  - добротность системы. Таким образом, если собственная частота прибора гораздо больше частоты регистрируемых колебаний, и добротность системы достаточно велика, квазистатический прибор будет регистрировать гармонический процесс достаточно точно. Для регистрации негармонического процесса необходимо, чтобы все спектральные составляющие процесса удовлетворяли условию (2.29). Оказывается очень сложно удовлетворить оба условия (2.29) для процесса с широким частотным спектром. Для иллюстрации этого противоречия обратимся к рис.1.3 первой главы. Первое из условий (2.29) определяет требования к амплитудам спектральных составляющих, которые воспроизводятся прибором. Для того чтобы искажения регистрируемого процесса не происходило, нужно, чтобы кривые рис.1.3 имели достаточно широкий участок, максимально близкий к горизонтальному (все гармоники воспроизводятся с одинаковой чувствительностью). Как видно из рисунка, наиболее близкий к горизонтальному участок имеют кривые с  $Q \approx 1$ . Но тогда второе условие (2.29) выполняется только в узком диапазоне  $\gamma \ll 1$ . В этом заключается основное противоречие: *чем точнее прибор воспроизводит широкополосный процесс, тем меньше его чувствительность.*

Проанализируем теперь, как квазистатический прибор регистрирует непериодические процессы. Для этого рассмотрим воздействие на систему в виде скачка (рис.2.3). Математически такой скачок выражается функцией

$$F(t) = \Theta(t - t_0), \quad (2.30)$$

где  $t_0$  - момент скачка. Такой скачок, как и дельта-функция, имеет равномерный спектр. Решение уравнения (2.24) с правой частью (2.30) может быть легко получено через спектральное представление, через формулы динамической жесткости, или через функцию Грина (см. предыдущий параграф) во временном представлении:

$$x(t) = \frac{F}{k} \left[ 1 - \frac{\omega}{\omega_0} e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) \right]. \quad (2.31)$$

Здесь использованы стандартные обозначения:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \delta = \frac{b}{2m}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{\delta}. \quad (2.32)$$

Решение (2.31) легко можно интерпретировать физическими соображениями. После скачкообразного воздействия в системе возникают затухающие колебания вокруг нового положения равновесия, которое определяется высотой скачка:

$$x(t) = \frac{F}{k} \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

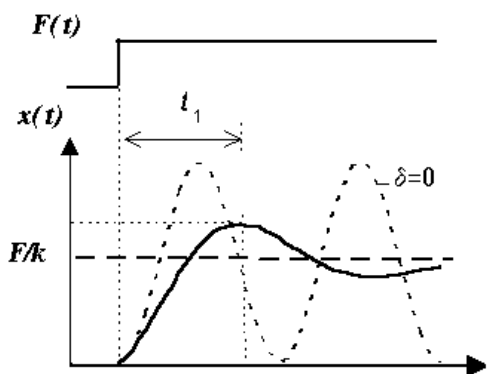


Рис. 2.3

На рис.2.3 показано, как на показания прибора может влиять затухание. Согласно (2.31) максимальное отклонение прибора от начального значения наступает через отрезок времени  $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ , который связан с собственной частотой системы и, соответственно, затуханием. При отсутствии затухания (рис.2.3, пунктир) максимальное отклонение прибора в два раза превышает предельное отклонение и показания будут испытывать колебания с постоянной амплитудой. Отклик системы неадекватен воздействию. При наличии затухания время срабатывания прибора  $t_1$  увеличится, однако прибор более правильно отражает регистрируемое воздействие (сплошная зависимость на рис.2.3). Таким образом, мы получили подтверждение того, что для квазистатических приборов наличие активного затухания принципиально необходимо, хотя оно и меняет временные и частотные характеристики прибора.

К наиболее распространенным квазистатическим приборам можно отнести емкостные микрофоны, датчики давления (мембранные, пьезоэлектрические), акселерометры (приборы для измерения ускорений), большинство оптических приборов, измеряющих механические смещения или вибрации.

### *Сейсмические приборы*

Сейсмические приборы, или приборы, работающие по принципу сейсмографа, объединяет то, что они используются для измерения вибраций тех тел, на которых они сами расположены или закреплены. Это прежде всего приборы для измерения вибраций на железнодорожном, воздушном или водном транспорте. Принципы работы таких приборов можно рассматривать на примере рис.2.2, если предположить, что жесткая стенка, к которой

крепится пружина, движется, и ее смещение описывается законом  $y(t)$ . В этом случае тело на пружине движется под действием упругих сил и сил инерции и его уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -m\ddot{y} \quad (2.34)$$

Рассмотрим движение по гармоническому закону:

$$y = A \cos \Omega t, \quad (2.35)$$

тогда вместо (2.34) можно записать

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mA\Omega^2 \cos \Omega t, \quad (2.36)$$

а решение этого уравнения –

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi_0) + \frac{A\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}} \cos(\Omega t - \varphi). \quad (2.37)$$

Здесь первый член представляет собой собственные затухающие колебания системы с фазой, определяемой начальными условиями, а второй член - вынужденные колебания, фаза которых зависит от добротности и отношения собственной и вынуждающей частот:

$$\varphi = \arctg \frac{\gamma}{Q(1-\gamma^2)}. \quad (2.38)$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$x_0 = A \frac{\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}} \quad (2.39)$$

и ее частотная зависимость показаны на рис.2.4.

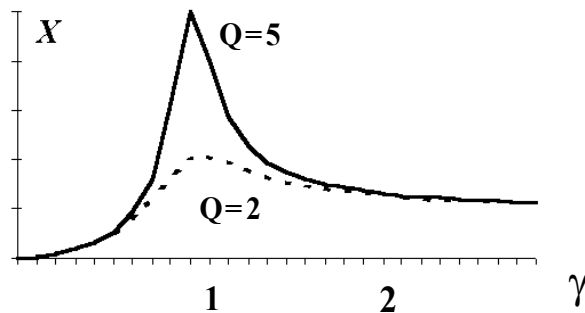


Рис. 2.4.

Отличие частотной характеристики такого прибора от прибора квазистатического заключается в том, что горизонтальный участок частотной характеристики достигается при  $\gamma \gg 1$ , то есть прибор лучше регистрирует высокие частоты (сравним зависимости рис.1.3 и 2.4). Заметим, что на высоких частотах вибрации  $\Omega$  амплитуда вынужденных колебаний приближается к  $A$ , а фаза  $\varphi \rightarrow \pi$ . Таким образом, на частотах, превышающих собственную частоту прибора, сейсмограф или другой прибор для измерения вибраций достаточно точно воспроизводят амплитуду колебаний, но с противоположным знаком.

## Баллистические приборы

Баллистические приборы предназначены для измерения импульса сил, действующих в течение короткого времени. Для анализа работы таких приборов обратимся опять к системе, представленной на рис.2.2. Пусть на систему действует импульс силы  $F = f(t)$ . Если длительность импульса  $\tau$  (рис.2.5), то

$$\int_0^{\tau} f(t)dt = mv(\tau). \quad (2.40)$$

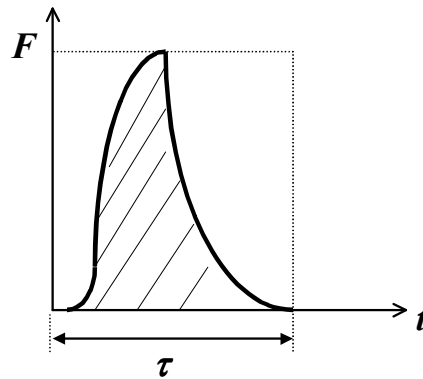


Рис. 2.5

Движение системы описывается уравнением для вынужденных колебаний (1.14) с правой частью, соответствующей (2.40). Если время действия  $\tau \ll T$ , где  $T$  - период собственных колебаний системы, то можно считать, что за время действия импульса система успевает лишь набрать начальную скорость

$$v_0 = \frac{1}{m_0} \int_0^{\tau} f(t)dt, \quad (2.41)$$

но смещение через этот промежуток времени мало:  $x \approx 0$ . Тогда решением уравнения будет решение для свободных собственных колебаний (1.13) с начальными условиями  $\dot{x}_0 = v_0$ ,  $x_0 = 0$ . Это решение имеет вид:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.42)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Таким образом, амплитуда собственных колебаний системы будет прямо пропорциональна начальной скорости  $\dot{x}_0 = v_0$  и, значит, импульсу силы (см. формулу 2.41). Мы уже сталкивались с импульсным воздействием на такую систему, когда рассматривали действие на квазистатический прибор скачка силы. Согласно решению (2.42), время от начала импульса до первого максимума колебаний системы

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\delta} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \sqrt{4Q^2 - 1}, \quad (2.43.)$$

а амплитуда первого максимума

$$A_1 = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin \alpha = \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\delta \alpha}{\omega}} \sin \alpha. \quad (2.43)$$

Здесь  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\delta}$ . Таким образом, начальную скорость, а значит, и импульс силы можно оценивать через максимальную амплитуду колебаний:

$$v_0 = \beta A_1, \quad (2.44)$$

где

$$\beta = \frac{\omega}{\sin \alpha} e^{\frac{\delta \alpha}{\omega}}.$$

При получении (2.44) мы использовали выражение (2.41). При этом сделано следующее допущение: *в течение времени  $\tau$  на массу действует импульс силы рис.2.5, однако мы пренебрегаем действием сил трения и упругости пружины в течение этого времени.* Оценим возможность такого допущения и ошибки, к которым оно приводит.

Для простоты будем считать, что импульс длительности  $\tau$  имеет прямоугольную форму с амплитудой  $F$ , равной максимальной амплитуде импульса (см. рис.2.5, пунктир) в этом случае импульс силы (заштрихованная площадь импульса на рисунке) увеличивается приблизительно в два раза. Тогда скорость через промежуток времени, соответствующий длительности импульса, составляет  $v_0 = \frac{F\tau}{m}$ , а смещение  $x = \frac{F\tau^2}{2m}$ . Рассчитаем силу упругости пружины в момент окончания импульса:

$$kx = \frac{1}{2} \frac{k}{m} F\tau^2 = \frac{1}{2} \omega^2 F\tau^2 = 2\pi^2 F \left( \frac{\tau}{T} \right)^2. \quad (2.45)$$

Таким образом, сила упругости во время действия импульса отличается от него на множитель, пропорциональный квадрату отношения длительности импульса к периоду собственных колебаний системы. Аналогичные оценки можно сделать и для силы трения. Следовательно, в предположении  $\tau \ll T$ , сделанном нами в начале рассмотрения, соотношение (2.44) справедливо для баллистических приборов.

## Резонансные приборы

Наиболее чувствительными из рассматриваемых нами регистрирующих приборов являются резонансные приборы. Они широко используются для регистрации волновых и колебательных процессов. Однако их главной особенностью является то, что без искажений они позволяют воспроизводить лишь узкополосные воздействия и сигналы, в спектре которых преобладают гармонические составляющие с частотами, близкими к собственной резонансной частоте прибора. Рассмотрим основные свойства и ограничения таких приборов.



Важнейшим свойством резонансного прибора является *избирательность*. Пусть на простейший резонансный приемник (рис. 2.6) поступает сигнал, представляющий из себя конечный набор гармоник с разными амплитудами и фазами:

$$\xi(t) = \sum_n \xi_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n), \quad (2.46)$$

тогда из теории вынужденных колебаний для линейной колебательной системы мы можем получить следующее выражение для выходного сигнала:

$$V(t) = \sum_n \xi_n \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + \frac{\gamma_n^2}{Q^2}}} \cos(\Omega_n t - \psi_n). \quad (2.47)$$

Здесь  $\gamma_n = \frac{\Omega_n}{\omega}$ , где  $\omega$  – собственная частота колебательного контура, а  $Q$  – его добротность. Проанализируем случай, когда сигнал состоит из двух синусоидальных составляющих (см. спектр сигнала на рис. 2.6). На выходе прибора амплитуды каждой из составляющих имеют следующий вид:

$$V_{1,2} = \frac{\xi_{1,2}}{\sqrt{(1-\gamma_{1,2}^2)^2 + \frac{\gamma_{1,2}^2}{Q^2}}}. \quad (2.48)$$

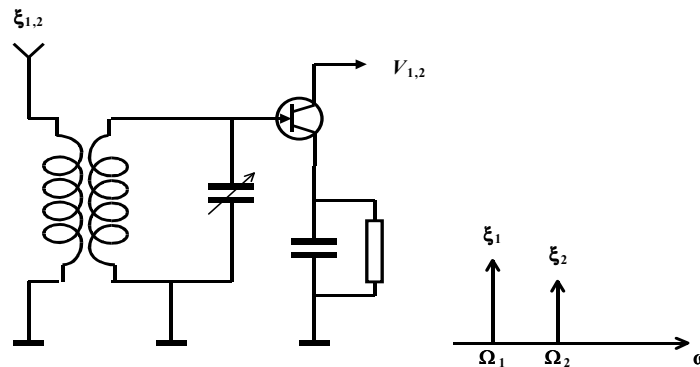


Рис. 2.6

Предположим теперь, что резонансный прибор настроен на частоту  $\omega = \Omega_1$ , а вторая частота отличается от нее на величину  $\Delta\omega = \Omega_2 - \Omega_1$ . Кроме того, будем считать, что амплитуды гармонических составляющих

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi. \quad (2.49)$$

Такая ситуация отвечает, например, случаю приема радиосигнала с двух передающих станций, вещающих на разных частотах, но с одинаковой мощностью и расположенных на одинаковом расстоянии от приемника. В этом случае в формуле (2.48)

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1 + \Delta\gamma,$$

а если частотная расстройка  $\Delta\omega$  мала, то можно считать, что

$$\gamma_2^2 \approx 1 + 2\Delta\gamma. \quad (2.50)$$

С учетом этого для сигнала, настроенного на резонансную частоту, получим:

$$V_1 = \xi Q, \quad (2.51)$$

а для сигнала с частотой  $\omega = \Omega_2$  амплитуда результирующего сигнала на выходе прибора

$$V_2 = \xi Q \frac{1}{\Delta\gamma \sqrt{Q^2 + \frac{1}{(2\Delta\gamma)^2}}}. \quad (2.52.)$$

Таким образом, отношение амплитуд гармонических частотных составляющих на выходе прибора определяется добротностью и частотной расстройкой:

$$\frac{V_1}{V_2} \approx \Delta\gamma \sqrt{Q^2 + \frac{1}{(2\Delta\gamma)^2}}. \quad (2.53)$$

Формула (2.53) и определяет избирательность резонансного прибора: способность регистрировать воздействие конкретной частоты и при этом не регистрировать воздействия на других, отличающихся от резонансной, частотах. Если считать, что амплитуда результирующего сигнала на резонансной частоте должна превышать другой сигнал не менее чем в два раза, то это накладывает ограничение на частотную расстройку и добротность колебательного контура (колебательной системы):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} > \frac{1}{2Q}. \quad (2.54)$$

Другими словами, необходимая избирательность резонансного прибора обеспечивается при условии, если частотная расстройка превышает полуширину резонансной кривой. Чем выше добротность системы, тем выше чувствительность прибора (см. формулу 2.51) и тем выше его избирательность.

Противоположные требования возникают, если необходимо обеспечить *неискажаемость* регистрируемого воздействия. Если продолжить рассмотрение примера с приемником рис.2.6, то необходимо помнить, что для передачи информации гармонический сигнал с несущей частотой  $\omega$  будет промодулирован, т.е. его спектр имеет конечную ширину и не может быть представлен в виде одной гармонической составляющей. Для примера рассмотрим сигнал на входе резонансного прибора в виде

$$\xi(t) = \xi_0(1 + k\cos\Omega t)\cos\omega t, \quad (2.55)$$

где  $k < 1$ . Такой амплитудно-моделированный с частотой  $\Omega$  сигнал можно преобразовать к виду

$$\xi(t) = \xi_0 \cos\omega t + \frac{\xi_0 k}{2} \cos(\omega + \Omega)t + \frac{\xi_0 k}{2} \cos(\omega - \Omega)t. \quad (2.56)$$

Следовательно, кроме гармоники на несущей частоте  $\omega$ , в спектре регистрируемого сигнала будут присутствовать составляющие на частотах  $\omega \pm \Omega$  с амплитудой  $\frac{\xi_0 k}{2}$ . Чтобы регистрирующий прибор не искажал входной сигнал, соотношение между амплитудами этих частотных составляющих и сигналом на резонансной частоте должно сохраняться. Но, как мы показали выше, если частотная расстройка (спектральная ширина сигнала, которая в данном случае равна  $\Omega$ ) превышает полуширину резонансной кривой, то сигнал будет искажаться. Отсюда можно сформулировать условие неискажаемости:

$$\frac{2\Omega}{\omega} > \frac{1}{Q}. \quad (2.58)$$

Таким образом, мы можем сформулировать основное противоречие в работе резонансных приборов: для качественного приема модулированных сигналов необходимо уменьшить добротность колебательной системы, что неизбежно приводит к потере чувствительности прибора.

Кроме того, при регистрации резонансным прибором воздействий с конечной спектральной шириной возникают также фазовые (временные) искажения.

Для иллюстрации этого рассмотрим *прием радиоимпульсов* при помощи резонансного приемника. Радиоимпульсом мы будем далее называть гармонический сигнал, амплитуда которого имеет импульсную *огibaющую*. Прямоугольный радиоимпульс, амплитуда которого имеет постоянную величину  $\xi_0$  в течение всей *длительности импульса*  $T$  показан на рис.2.7. Если *частоту заполнения* (несущую частоту)  $\Omega$  считать частотой внешнего воздействия на колебательную систему, то при нулевых начальных условиях (в момент начала импульса) решение для сигнала на выходе приемника будет иметь вид

$$V(t) = \xi_0 Q \left[ -\cos \Omega t + e^{-\delta t} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2} \cos(\omega t - \arctg \frac{\delta}{\omega}) \right]. \quad (2.59)$$

Решение представляет собой сумму вынужденных и собственных колебаний. Если добротность колебательного контура высока ( $Q \gg 1$ ), то сдвиг фаз между собственными и вынужденными колебаниями мал ( $\frac{\delta}{\omega} \ll 1$ ). Тогда при резонансных условиях ( $\Omega \approx \omega_0$ ) решение (2.59) можно переписать в очень простом виде:

$$V = -\xi_0 Q [1 - e^{-\delta t}] \cos \Omega t. \quad (2.60)$$

После момента появления радиоимпульса на входе колебательного контура колебания на выходе будут нарастать до амплитуды  $\xi_0 Q$ , а затем, после окончания внешнего воздействия, собственные колебания в контуре будут затухать по экспоненциальному закону (рис.2.7).

Таким образом, условие неискажаемости прямоугольного радиоимпульса резонансным приемником определяется постоянной времени колебательного контура

$$\tau_0 = \frac{1}{\delta} = \frac{2Q}{\Omega} \ll T. \quad (2.61)$$

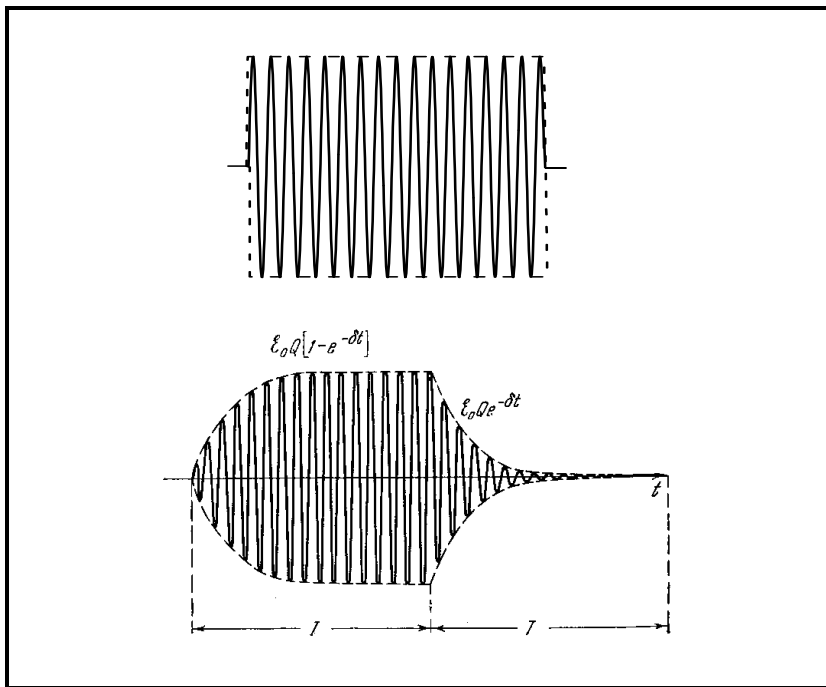


Рис. 2.7

### 2.3. Модуляция и преобразование сигналов

Выше мы рассмотрели спектр амплитудно-модулированного сигнала. Кроме амплитудной модуляции, на практике часто используется частотная и фазовая модуляция гармонических сигналов. Сигнал, фаза которого промодулирована

по гармоническому закону, имеет вид:

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha \sin \Omega t). \quad (2.62)$$

С другой стороны, сигнал (2.62), имеющий фазовую модуляцию, можно рассматривать как частотно-модулированный сигнал, частота которого меняется во времени следующим образом:

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \Omega t\right). \quad (2.63)$$

Величина  $\alpha$  называется глубиной фазовой модуляции, а соответствующая ей глубина частотной модуляции определяется, соответственно, как  $\alpha' = \frac{\alpha}{\omega_0}$  (см.

2.63). При условии  $\omega_0 \gg \Omega$ , когда частота фазовой модуляции мала по сравнению с несущей частотой сигнала, вместо (2.63) можно записать:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\omega_0} \Omega t\right), \quad (2.64)$$

то есть мы имеем сигнал с линейной модуляцией частоты или линейно частотно-модулированный сигнал (ЛЧМ), которые очень часто применяются в радиотехнике.

Таким образом, можно считать, что фазовая и частотная модуляция сигнала отличаются лишь глубиной модуляции, которая определяется соотношением между модулирующей и несущей частотами.

Рассмотрим спектральный состав модулированного по фазе сигнала, аналогично тому, как раньше мы оценили ширину спектра при амплитудной модуляции. Формулу для модулированного по фазе сигнала (2.62) можно переписать в следующем виде:

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\alpha \sin \Omega t) - \xi_0 \sin(\omega_0 t) \sin(\alpha \sin \Omega t). \quad (2.65)$$

Мы хотим оценить спектр  $\xi(\tau)$ , для этого следует преобразовать тригонометрические функции  $\sin(\alpha \sin \varphi)$  и  $\cos(\alpha \sin \varphi)$  по известным из теории формулам:

$$\cos(\alpha \sin \varphi) = I_0(\alpha) + 2I_2(\alpha) \cos 2\varphi + \dots; \quad (2.66)$$

$$\sin(\alpha \sin \varphi) = 2I_1(\alpha) \sin \varphi + 2I_3(\alpha) \sin 3\varphi + \dots$$

Здесь  $I_n(\alpha)$  - функции Бесселя порядка  $n$ , которые хорошо известны в теории специальных функций и табулированы в большинстве справочников. Таким образом, модулированный по фазе сигнал, используя (2.65 - 2.66) можно разложить в ряд по гармоническим составляющим, то есть определить его спектр:

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi_0 [ & I_0(\alpha) \cos \omega t - I_1(\alpha) \cos(\omega - \Omega)t + I_1(\alpha) \cos(\omega + \Omega)t + \\ & + I_2(\alpha) \cos(\omega - 2\Omega)t + I_2(\alpha) \cos(\omega + 2\Omega)t - \dots ]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Из (2.67) следует, что в спектре модулированного по фазе сигнала присутствуют составляющие на частотах  $\omega \pm n\Omega$  с амплитудами  $I_n(\alpha)$ . Соотношение между амплитудами спектральных составляющих зависит от глубины модуляции  $\alpha$ , поскольку функции Бесселя разных порядков по-разному зависят от аргумента. При  $\alpha \ll 1$  выполняется условие  $I_0(\alpha) \gg I_1(\alpha) \gg I_2(\alpha) \dots$ . Тогда, если пренебречь членами ряда (2.67) с  $n > 1$ , кроме гармоники несущей частоты в спектре будут присутствовать составляющие на частотах  $\omega \pm \Omega$ , как и в амплитудно-модулированном сигнале. Однако, если амплитуда фазовой модуляции не мала, то необходимо учитывать все члены ряда (2.67), и спектр частотно - и фазово-модулированного сигнала оказывается заведомо шире, чем при амплитудной модуляции

## 2.4. Нелинейные преобразования

На основе приближенных методов нелинейной теории колебаний, таких, как метод малого параметра, можно рассматривать нелинейные преобразования сигналов, повсеместно используемые в радиотехнике и приборостроении. Пусть внешнее воздействие на колебательную систему приводит к возникновению колебаний конечной амплитуды (нелинейных колебаний). Тогда вместо уравнения вынужденных колебаний (1.14), в правой части уравнения появляется нелинейная функция  $F = F(x, t)$ , в которую, наряду с вынуждающим воздействием, входят члены, ответственные за нелинейность колебательной системы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(x, t). \quad (2.68)$$

Мы уже сталкивались с такой ситуацией на простейшем примере колебаний пружинного маятника, когда сила деформации пружины нелинейно зависит от вынуждающей силы (см. формулы 1.42 - 1.43). В этом случае методом малого параметра решение (2.68) ищется в виде:

$$x = \mu_0 + \mu_1 F + \mu_2 F^2 + \mu_3 F^3 + \dots \quad (2.69)$$

Предположим теперь, что вынуждающая сила не является чисто гармонической и имеет конечный спектр. В простейшем случае двух гармонических составляющих

$$F(t) = A\sin\Omega_1 t + B\sin\Omega_2 t. \quad (2.70)$$

Ограничимся для простоты квадратичным членом в (2.69). Тогда, подставив (2.70), получим:

$$\mu_2 F^2 = \mu_2 [A^2 \sin^2 \Omega_1 t + B^2 \sin^2 \Omega_2 t + 2AB (\sin \Omega_1 t) \sin \Omega_2 t]. \quad (2.71)$$

Первые два квадратичных члена (2.71) после тригонометрических преобразований дают в решении (2.68) постоянную составляющую и гармонические колебания на удвоенной частоте  $2\Omega_1, 2\Omega_2$ , а третий (перекрестный) член - колебания на суммарной и разностной частотах  $\Omega_2 \pm \Omega_1$ . Таким образом, если в правой части уравнения (2.68) учитывать все члены разложения (2.69), то в общем решении уравнения будут присутствовать вынужденные колебания на частотах

$$n\Omega_1, n\Omega_2, m\Omega_2 \pm n\Omega_1, \quad (2.72)$$

при  $n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Гармоники с нулевой частотой  $n, m = 0$  представляют собой постоянные составляющие, которые всегда присутствуют в нелинейных колебательных системах, в частности, на этом основаны диодные выпрямители переменного тока.

Предположим теперь, что на нелинейную систему подается сигнал частоты  $\omega$ , модулированный с частотой  $\Omega \ll \omega$ . В спектре такого сигнала, как мы выяснили раньше, присутствуют частоты  $\omega, \omega \pm \Omega$ . Разностная частота между этими спектральными составляющими как раз и является частотой модуляции  $\Omega$ . Таким образом, на выходе нелинейной системы возникает сигнал, пропорциональный огибающей промодулированного сигнала, то есть система позволяет выделить низкочастотную составляющую. Такой процесс в радиотехнике называется *детектированием* сигнала. На рис.2.8 показано детектирование сигнала на основе нелинейной вольт - амперной характеристики диода. Если после такого детектора в радиотехнической схеме поставить фильтр, который будет подавлять все высшие гармоники сигнала  $\omega, 2\omega$  и т.д., то на выходе фильтра получим сигнал с частотой огибающей  $\Omega$ . Необходимо только иметь в виду, что вместо идеальной "кусочно-линейной" характеристики, показанной на рисунке, диодная характеристика имеет плавный нелинейный характер.

Совершенно аналогичный принцип работы имеют устройства для преобразования частоты - частотные умножители, которые служат для выделения кратных частот  $\omega, 2\omega, \dots$ , или супергетеродин, выделяющий сигнал разностной частоты  $\omega - \Omega$  между слабым принимаемым сигналом частоты  $\omega$  и сигналом гетеродина (генератора с установленной частотой  $\Omega$ ). В супергетеродине используется тот факт, что амплитуда сигнала на разностной частоте в соответствии с (2.71) пропорциональна не только амплитуде принимаемого сигнала, но и амплитуде сигнала гетеродина.

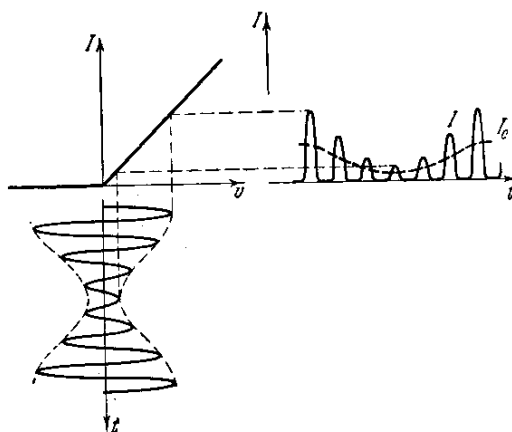


Рис.2.8

Следовательно, выделение сигнала разностной частоты сопровождается возможностью зарегистрировать амплитудные и фазовые характеристики слабого сигнала, если амплитуда и фаза сигнала гетеродина известны.

### Глава 3. Основы теории волн

#### 3.1. Волновое уравнение для электромагнитных и звуковых волн

##### Электромагнитные волны

Исходной системой уравнений для ЭМ поля являются уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (3.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (3.2)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad (3.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{j}$  - плотности токов и,  $\rho$ - электрических зарядов;  $\mathbf{E}$  - напряженности электрического и,  $\mathbf{H}$  - магнитного полей;  $\mathbf{D}$  - векторы электрической и  $\mathbf{B}$  - магнитной индукции;  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  связаны с уравнением непрерывности

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

которое выражает закон сохранения заряда в замкнутом объеме. Уравнения (3.1 - 3.5) дополняются материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

где  $\varepsilon$  - электрическая,  $\mu$  - магнитная проницаемость и,  $\sigma$  - проводимость среды. Исключим из системы вектор  $\mathbf{B}$ , для чего применим операцию  $\text{rot}$  к обеим частям уравнения (3.2). Учитывая, что

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E},$$

получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.7)$$

Если  $\sigma = 0$ , то есть среда не обладает проводимостью, то вектор  $\mathbf{E}$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

Такому же уравнению удовлетворяет и вектор  $\mathbf{H}$ .

### *Упругие волны в твердом теле*

Пусть положение частицы твердого тела характеризуется вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}$  - перемещение частицы. Запишем второй закон Ньютона

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial a_k}, \quad (3.9.1)$$

где  $a_k = x, y, z$  - координаты,  $\sigma_{ik}$  - тензор упругих напряжений. Здесь и далее по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование, то есть в правой части (3.9.1) сила, действующая на частицу среды в направлении оси  $a_i$ , определяется производными элемента тензора напряжений по всем трем осям. В свою очередь, упругие напряжения  $\sigma_{ik}$  определяются деформацией среды. Линейный тензор деформаций имеет вид

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right). \quad (3.9.2)$$

Элементы матрицы  $U_{ik}$  с повторяющимися индексами ( $i = k$ ) определяют продольные деформации (деформации сжатия и растяжения), а ( $i \neq k$ ) - поперечные сдвиговые деформации (изгибные деформации). Связь между элементами тензора напряжений и деформаций носит название закона Гука:

$$\sigma_{ik} = k U_{ii} \delta_{ik} + 2\mu \left( U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} U_{ii} \right), \quad (3.9.3)$$

где  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера (единичная диагональная матрица  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$  и  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ). Величины  $k$  и  $\mu$  характеризуют упругие свойства твердого тела и носят соответственно названия модуля всестороннего сжатия и модуля сдвига. Подставляя (3.9.3) в (3.9.1), получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left( k + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_i \partial a_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k}. \quad (3.9.4)$$

Если направление смещения частиц среды  $U_i$  совпадает с направлением распространения волны  $\xi$ , из (3.9.4) получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left( k + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2}. \quad (3.9.5)$$

А если  $U_i$  направлено перпендикулярно к  $\xi$ , (3.9.4) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2}. \quad (3.9.6)$$

Таким образом, мы получили волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн в твердом теле с соответствующими скоростями:



$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left( k + \frac{4}{3} \mu \right)} ; \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} .$$

Заметим, что для продольных и сдвиговых волн всегда выполняется соотношение  $c_l > c_t$ .

### *Акустические волны в жидкостях и газах*

Для описания движения жидкости или газа используются уравнения для скорости частиц  $U$ , плотности  $\rho$  и давления  $P$ . Они связаны уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = 0, \quad (3.10.1)$$

движения (второй закон Ньютона)

$$\rho \left[ \frac{dU}{dt} \right] = F = -\bar{\nabla} P + F_{mp} \quad (3.10.2)$$

и состояния

$$P = P(\rho). \quad (3.10.3)$$

В уравнении движения в левой части полная производная скорости по времени может быть переписана в правой части (3.10.2)

$$F_{mp} = \eta \Delta U + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} U. \quad (3.10.4)$$

Этот член описывает внутреннее трение в жидкости и газе и определяется вязкими свойствами среды.  $\xi, \eta$  – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости;  $\eta$  и  $\xi$  используются при определении тензора вязкого напряжения, аналогичного тензору упругих напряжений в твердом теле (3.9.3). При выводе волнового уравнения внутренним трением можно пренебречь ( $\xi, \eta = 0$ ). Процессы сжатия и расширения в звуковой волне можно считать обратимыми и описывать адиабатическим уравнением состояния

$$P = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (3.10.5)$$

Здесь  $P_0, \rho_0$  – равновесные давление и плотность,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме. Пусть отклонения величин  $P, \rho, U$  от равновесного состояния  $P_0, \rho_0$  и  $U_0 = 0$  малы:

$$P = P_0 + P' ; \quad \rho = \rho_0 + \rho' ; \quad \frac{P'}{P_0} \approx \frac{\rho'}{\rho_0} \approx \mu \ll 1. \quad (3.10.6)$$

Тогда, подставляя (3.10.6) в систему (3.10.1 – 3.10.3) и пренебрегая вязкостью и всеми членами, имеющими порядок  $\mu$  больше единицы ( $\mu^2, \mu^3 \dots = 0$ ), получим линейную систему:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} U = 0 ; \quad \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = -\bar{\nabla} P ; \quad P' = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho'. \quad (3.10.7)$$

Если в системе (3.10.7) продифференцировать первое уравнение по времени и исключить  $U$ , мы приходим к волновому уравнению для возмущения плотности среды:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 ; \quad c^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (3.10.8)$$

Аналогичные уравнения можно вывести из (3.10.7) для колебательной скорости  $U$  и давления  $P'$ .

### 3.2. Решения волнового уравнения и основные характеристики волн

Энергия электромагнитных и упругих волн

Выведем соотношения для энергии электромагнитных и акустических волн.

Для электромагнитных волн такие соотношения могут быть получены из универсальных уравнений Максвелла (3.1–3.4). Для простоты мы будем считать, что среда, в которой распространяются электромагнитные волны, не обладает проводимостью (в ней отсутствуют свободные заряды), и волны распространяются без затухания. С учетом материальных соотношений (3.6) уравнения Максвелла приводятся к следующему виду:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ; \quad (3.11)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ; \quad (3.12)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 ; \quad (3.13)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 . \quad (3.14)$$

Умножим первое из уравнений (3.11–3.12) на  $\mathbf{E}$ , а второе – на  $\mathbf{H}$ , а после этого вычтем одно уравнение из другого. В результате получим следующее выражение:

$$\mathbf{E} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad (3.15)$$

которое можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \right) + \text{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = 0 . \quad (3.16)$$

Это выражение и представляет собой записанный в дифференциальной форме закон сохранения энергии электромагнитного поля в единице объема. Заметим, что формула (3.16) полностью аналогична уравнению непрерывности (3.5), которое описывает закон сохранения заряда, или уравнению (3.10.1), которое описывает закон сохранения массы. Перепишем (3.16) в соответствующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \text{div } \mathbf{S} = 0 , \quad (3.17)$$

где

$$W = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} ; \quad (3.18)$$

$$\mathbf{S} = \text{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (3.19)$$

Величина  $W$  определяет плотность энергии электромагнитного поля в единичном объеме, а вектор  $S$  характеризует энергию, вытекающую из объема за единицу времени. Его называют плотностью потока энергии, или вектором Умова–Пойнтинга.

Обе эти величины имеют квадратичную зависимость от напряженности электрического и магнитного полей, а значит, если электромагнитные поля будут меняться по гармоническому закону, и зависимость энергии волн от частоты будет иметь квадратичный характер.

Пусть

$$\begin{aligned} E &= E(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t} ; \\ H &= H(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t} . \end{aligned}$$

Тогда, для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении, выражение (3.19) можно преобразовать к виду:

$$S = \frac{1}{8\pi} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \varepsilon |E|^2 \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{v}W , \quad (3.20)$$

где вектором  $\mathbf{v}$  обозначена фазовая скорость электромагнитной волны в среде:

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = |\mathbf{v}| . \quad (3.21)$$

Таким образом, поток энергии, переносимый волной, пропорционален энергии волны в единице объема (энергии колебаний) и скорости распространения волны в среде. Окончательно перепишем (3.17) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}W) = 0 . \quad (3.22)$$

Заметим, что при выводе (3.22) мы не учитывали затухания волн, то есть энергию, которую волна передает среде.

Вывод закона сохранения энергии для упругих (акустических волн) можно провести совершенно аналогично, если использовать исходные уравнения (3.10.1–3.10.3), которые мы использовали ранее для вывода волнового уравнения: уравнение непрерывности (закон сохранения массы), уравнение движения и уравнение состояния:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} U = 0 ; \quad \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla P ; \quad P' = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho' . \quad (3.23)$$

Напомним, что при выводе уравнений (3.23) мы пользовались приближением малых амплитуд, то есть считали, что отклонения давления и плотности среды  $P', \rho'$  от их равновесного состояния  $P_0, \rho_0$  малы, а колебательная скорость частиц среды  $U$  гораздо меньше скорости распространения волны  $c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$ .

Если второе уравнение из (3.23) умножить на  $U$ , то, используя уравнение состояния и учитывая перечисленные ограничения для малых возмущений среды, первое уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho' U) = 0. \quad (3.24)$$

В дифференциальном законе сохранения энергии акустических волн (3.24) плотность энергии  $W$  представляет собой сумму из двух членов:

$$W = \frac{\rho_0 U^2}{2} + \frac{c^2}{2\rho_0} \rho'^2, \quad (3.25)$$

первый из которых соответствует кинетической энергии колебаний частиц среды, а второй – потенциальной энергии деформации. Безразмерный параметр, который характеризует возмущение среды при прохождении упругой волны и который мы изначально считали малой величиной, можно записать в виде

$$\frac{U}{c} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{P'}{c^2 \rho_0} \ll 1. \quad (3.26)$$

Эта величина называется *акустическим числом Маха* и служит критерием линейности (при малых значениях) или нелинейности акустических процессов. В линейном приближении выражение (3.26) позволяет установить связь между избыточным давлением, плотностью, колебательной и фазовой скоростью в акустической волне:

$$P' = c\rho_0 U. \quad (3.27)$$

С учетом (3.27) закон сохранения энергии в дифференциальной форме (3.24) можно привести к окончательному виду:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} S = 0, \quad (3.28)$$

где плотность потока связана с плотностью энергии традиционным образом:

$$S = cW \frac{r}{r}. \quad (3.29)$$

Кроме того, формула (3.27) позволяет получить полную плотность акустической энергии в простейшей форме.

$$W = \rho_0 U^2. \quad (3.30)$$

Заметим, что здесь наблюдается полная аналогия с акустических (упругих) волн электромагнитными волнами любых диапазонов, в том числе и для оптического: как известно, полная энергия светового фотона  $E = mc^2$ , если рассматривать свет как частицу.

### *Решения волнового уравнения*

Мы получили единое волновое уравнение для плоских волн различной природы, распространяющихся вдоль оси  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.31)$$

где  $\varphi$  - изменяющаяся по волновым законам величина (переменная плотность, давление или колебательная скорость для звуковой волны,

переменное ЭМ поле и т.д.), а  $c$  - скорость распространения соответствующей волны в среде.

В сферических координатах, когда волны распространяются симметрично в радиальном направлении ( $r$  - радиус),

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (3.32)$$

Если в (3.32) подставить  $\varphi = f(r,t)/r$ , то для  $f(r,t)$  получим уравнение (3.31), то есть решение для сферически симметричной волны отличается только убыванием амплитуды по закону  $1/r$ . Будем искать решение волнового уравнения (3.31) в виде

$$\varphi = e^{i\omega t} \cdot f(x). \quad (3.33)$$

Подставив (3.33) в (3.31) и исключив экспоненциальный множитель, получим уравнение для  $f(x)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \quad (3.34)$$

Это уравнение имеет решение  $f_0 e^{ikx}$  и  $f_0 e^{-ikx}$ , описывает пространственную структуру волнового поля. Здесь  $k^2 = \omega^2/c^2$  называется волновым числом,  $\omega$  - круговая или циклическая частота волны,  $f_0$  - амплитуда волны. Таким образом, с учетом (3.33), решение уравнения (3.31) представляется в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\varphi(x,t) = f_0 e^{i(\omega t - kx)} + f_0 e^{i(\omega t + kx)}. \quad (3.35)$$

Совершенно аналогично, используя подстановку  $\varphi(r,t) = f(r,t)e^{i\omega t}$  можно решать и трехмерные волновые уравнения (3.8), (3.10.8). В этом случае получим трехмерное уравнение для волнового поля

$$\Delta f + k^2 f = 0. \quad (3.36)$$

Это уравнение носит название уравнения Гельмгольца и используется для описания неоднородных волновых полей. Далее мы изучим некоторые свойства его решений.

### Поглощение и дисперсия

При выводе волнового уравнения для ЭМ поля мы пренебрегли проводимостью среды ( $\sigma = 0$  в уравнении (3.7), а при выводе уравнения для упругих волн в жидкости - силами вязкого трения ( $F_{mp} = 0$  в уравнении (3.10.2). С учетом проводимости уравнение для ЭМ волн имеет вид (3.7):

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.37)$$

А уравнение для акустических волн с учетом вязкости получается из системы (3.10.1)–(3.10.3) при  $\xi, \eta \neq 0$ :

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{b}{c^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta U = 0, \quad (3.38)$$

где  $b = \xi + \frac{4}{3}\eta$  - диссипативный коэффициент. Учет  $F_{mp}$  при выводе (3.38)

похож на преобразования тензора упругих напряжений для твердого тела, поэтому коэффициент также зависит от объемного и сдвигового коэффициента вязкости, как и скорость продольной волны в твердом теле от модуля сжатия и сдвига.

В обоих уравнениях (3.37, 3.38) к волновому уравнению добавляется член с первой производной по времени. Поэтому, подстановка  $E, U = f(r, t)e^{i\omega t}$  приводит (3.37, 3.38) к уравнению Гельмгольца с комплексным волновым числом :

$$\Delta f + k^2 f = 0 \quad ; \quad k = k_r + i\delta, \quad (3.39)$$

при этом

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \quad \text{для ЭМ волн,} \quad (3.40)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - i \frac{b\omega}{c^2\rho} \right)^{-1} ; \quad k \approx \frac{\omega}{c} \left( 1 + i \frac{b\omega}{2c^2\rho} \right) \quad \text{для ЗВ.} \quad (3.41)$$

С учетом теплопроводности уточненное значение

$$b = \xi + \frac{4}{3}\eta + \chi \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right),$$

где  $\chi$  - коэффициент теплопроводности.

Использование комплексного значения  $k$  в решении (3.35) приводит к появлению действительного множителя  $e^{-\delta x}$ , который отвечает за экспоненциальное пространственное затухание волнового поля. Таким образом, мнимая часть комплексного волнового числа имеет физический смысл декремента затухания, и окончательное выражение для плоской волны, распространяющейся в направлении  $x$ , принимает в действительных величинах вид

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 e^{-\delta x} \cos(\omega t \pm kx + \psi_0), \quad (3.42)$$

где  $\psi_0$  - начальная фаза волны. Зависимость волнового числа от частоты волны  $k = k(\omega)$  называется дисперсионным соотношением, а среды, в которых эта зависимость носит нелинейный характер (когда скорость  $c = c(\omega)$ ), - диспергирующими.

### Поляризация ЭМ волн

Пусть направление распространения плоской ЭМ волны совпадает с осью  $x$ . Разложим вектор  $E$  в плоскости  $x, y$ :

$$E_x = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \text{Re } a_1 \exp(-i\omega t - i\varphi_1); \quad (3.43)$$

$$E_y = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \text{Re } a_2 \exp(-i\omega t - i\varphi_2).$$

Здесь  $\tau = t - z/c$ ;  $a_1, a_2$  - амплитуды;  $\varphi_1, \varphi_2$  - фазы. Исключив из (3.43) множитель  $\exp(-i\omega\tau)$ , получим уравнение эллипса:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{a_1 a_2} \cos \Delta = \sin^2 \Delta ; \Delta = \varphi_2 - \varphi_1 . \quad (3.44)$$

Если  $\Delta = \pm \pi/2$ , уравнение (3.44) переходит в следующее:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 1 ,$$

то есть оси эллипса совпадают с осями координат, а при  $a_1 = a_2$  эллипс вырождается в окружность. В случае  $\Delta = \pi n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , из (3.44) следует

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 \pm \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 0 .$$

Это уравнение двух прямых.

Состояние поляризации волны удобно характеризовать множителем поляризации

$$P = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2} e^{i\Delta} . \quad (3.45)$$

При комплексном  $P$  волна имеет эллиптическую или круговую поляризацию, при действительном  $P$  - линейную.

### 3.3. Пространственная структура волнового поля

#### *Отражение плоской волны от границы раздела сред*

Пусть на плоскую границу раздела из полупространства ( $z > 0$ ) падает плоская монохроматическая волна с волновым числом  $k$ . За границей раздела ( $z = 0$ ) распространяется прошедшая через границу волна с волновым числом  $k_1$ . Решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

для полупространства  $z > 0$  представляется в виде суммы падающей и отраженной волны

$$\varphi_2 = \varphi_0 [\exp(-ikz \cos \theta) + V \exp(ikz \cos \theta)] \exp(ikx \sin \theta) , \quad (3.46.1)$$

где  $V, \theta$  - коэффициент отражения волны и угол падения.

Преломленная волна в нижней среде  $z < 0$  запишется в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 W \exp[ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)] , \quad (3.46.2)$$

где  $\theta_1, W$  - угол преломления и коэффициент прохождения (коэффициент прозрачности границы). Волновое поле однородно вдоль оси  $x$ , поэтому на

границе выполняется условие постоянства горизонтальной составляющей волнового вектора

$$k \sin \theta = k_1 \sin \theta_1 . \quad (3.46.3)$$

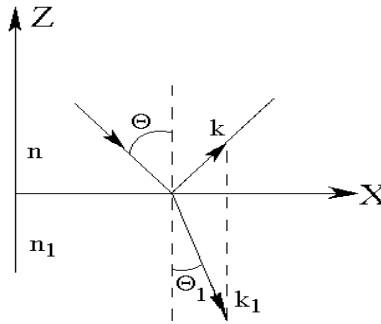


Рис.3.1

Это выражение носит название закона преломления Снелля. В силу этого падающая и прошедшая волна имеют одинаковые зависимости от координаты  $k : \exp[ik_x x]$ . Следовательно, задача о наклонном падении волны на границу может рассматриваться как задача о нормальном (вертикальном) отражении и прохождении волны с волновым числом  $k_z = k \cos \theta$  (см.3.46.1–3.46.2). Из условия непрерывности волнового поля на границе

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Big|_{z=0} \quad (3.46.4)$$

получим связь между коэффициентами прохождения и отражения:

$$1 + V = W , \quad (3.46.5)$$

а при условии непрерывности производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$

можно получить их выражения в зависимости от нормальной составляющей волнового числа:

$$V = \frac{k_z - k_{1z}}{k_z + k_{1z}} ; W = \frac{2k_z}{k_z + k_{1z}} . \quad (3.46.6)$$

Вместо (3.46.6) на практике часто используются зависимости коэффициентов отражения и прохождения от характеристических импедансов сред:

$$V = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} ; W = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (3.46.7)$$

Для ЭМ волн  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ , а для акустических -  $Z = \rho c$ .

### Поле в волноводах и резонаторах

Пусть волна распространяется в плоскости  $x, z$  между двумя идеально отражающими границами ( $z = 0, z = a$ ). Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.47.1)$$

должно удовлетворять граничным условиям

$$\varphi(x, 0, t) = 0 ; \varphi(x, a, t) = 0 \quad (3.47.2)$$



Ищем решение в виде  $\varphi = \varphi(z)e^{i(\omega t - kx)}$ . Для удовлетворения (3.47.2) получим  $\varphi(z) = \varphi_0 \sin k_z z$ ;  $k_z a = \pi n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . То есть поле в волноводе имеет поперечную структуру в виде стоячей волны с волновым числом  $k_z$ , когда между стенками волновода "укладывается" целое число полуволн. Подставив решение в (3.47.1) получим характеристическое уравнение

$$-k^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2 = 0 \quad (3.47.3)$$

из которого следует

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2} \quad (3.47.4)$$

Если электромагнитная волна распространяется в волноводе без затухания, то волновое число  $k$  - действительная величина, а подкоренное выражение в (3.47.4) не должно быть отрицательным. Отсюда вытекает условие  $\omega \geq \frac{\pi c}{a} n$ .

То есть в волноводе не может распространяться волна с частотой меньшей некоторой частоты  $\omega_0$  ( $n=1$ ), которая называется граничной частотой волновода. Этой частоте соответствует максимальная длина волны  $\lambda_0 = 2a$ . С другой стороны, общее решение волнового уравнения (3.47.1) представляет собой сумму решений

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \exp[i(\omega t - k_n x)], \quad (3.47.5)$$

где  $k_n^2 = \omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2$ .

Выражение (3.47.5) называется разложением волнового поля по нормальным волнам, а каждый член ряда часто называют модами волновода. Предположим теперь, что волновое поле однородно вдоль оси  $x$ , то есть волны в этом направлении не распространяются, в (3.47.1)  $\partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$ . Тогда рассмотренная задача определяет одномерный закрытый резонатор, а (3.47.4) при  $k=0$  переходит в условие для собственных частот резонатора:

$$\omega_n = \frac{\pi c n}{a}. \quad (3.47.6)$$

### *Лучевое приближение в теории волн*

Если скорость и направление распространения волны в среде зависят от координат, то среда называется неоднородной и пространственное поле монохроматической волны описывается решениями уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + k^2(\mathbf{R})\varphi = 0 \quad \mathbf{R} = (x, y, z). \quad (3.48.1)$$

Будем искать его решение в виде

$$\varphi(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp(ik_0 \psi(\mathbf{R})), \quad (3.48.2)$$

где  $A(\mathbf{R}), \psi(\mathbf{R})$  - действительные амплитуда и фаза волны. Лучевое или геометрическое приближение предполагает, что в каждой точке траектории луча волна может считаться плоской, другими словами, амплитуда на расстояниях порядка длины волны может считаться постоянной

$$|\text{grad } A| \ll k_0 A,$$

а фаза является линейной функцией координат:

$$\psi(\mathbf{R}) = \mathbf{mR} = m_x x + m_y y + m_z z; \quad \text{grad } \psi = \text{const.}$$

Математически эти условия могут быть записаны следующим образом:

$$|\text{grad } k| \ll k; \quad |\text{grad } \psi| \ll k_0 \psi. \quad (3.48.3)$$

Будем искать решение уравнения (3.48.1) в виде ряда по степеням  $1/k_0$ :

$$\varphi(\mathbf{R}) = \left[ A_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0} A_1(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0^2} A_2(\mathbf{R}) + \dots \right] \exp[ik_0 \psi(\mathbf{R})]. \quad (3.48.4)$$

Подставляя (3.48.4) в (3.48.1) и приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях  $\frac{1}{k_0}$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{k^2(\mathbf{R})}{k_0^2} - (\nabla \psi)^2 \right] A_0 &= 0; \\ A_0 \Delta \psi + 2 \nabla A_0 \nabla \psi &= 0; \\ A_0 \Delta \psi + 2 \nabla A_1 \nabla \psi &= i \Delta A_0. \end{aligned} \quad (3.48.5)$$

Первое и второе уравнение (3.48.5) в лучевом приближении определяют соответственно фазу и амплитуду волны и называются уравнением эйконала и уравнением переноса.

Рассмотрим распространение волн в слоисто-неоднородной среде. Пусть волна распространяется в плоскости  $x, z$  и ее скорость неоднородна по одной координате - в уравнении (3.48.1)  $k = k(z)$ . В этом случае уравнение эйконала (3.48.5) принимает вид

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{k^2(z)}{k_0^2}. \quad (3.48.6)$$

Пусть неоднородная среда занимает полупространство  $z > 0$  ( $n=1$  при  $z < 0$ ) и в нее попадает волна под углом  $\theta_0$  при  $z=0$  (рис.3.2).

Поскольку среда однородна в направлении  $x$ , то вдоль всего луча выполняется соотношение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P_x = \text{const} = n \sin \theta = \sin \theta_0,$$

а уравнение (3.48.6) может быть переписано в виде

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = n^2(z) - \sin^2 \theta_0 = n^2(z) \cos^2 \theta(z). \quad (3.48.7)$$

Таким образом, для плоско - слоистой среды уравнение эйконала выражает закон преломления Снелля (3.46.3).

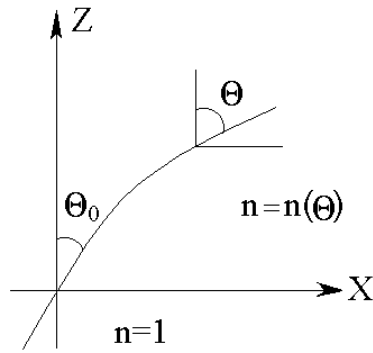


Рис.3.2

Запишем его окончательное решение для фазы волны в виде

$$\psi = x \sin \theta_0 \pm \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz. \quad (3.48.8)$$

Подставив это решение во второе уравнение системы (3.48.5), получим решение уравнения переноса для амплитуды волны вдоль луча:

$$A = [A_0 / \sqrt{n \cos \theta}] = A_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/4}. \quad (3.48.9)$$

Знак перед корнем в (3.48.8) определяется направлением распространения волны вдоль луча (в положительном или отрицательном направлении оси  $z$ ). Окончательно, с учетом (3.48.8–3.48.9) поле в слоистой среде в лучевом приближении может быть записано в виде

$$\varphi(x, z) = [\exp(ik_0 x \sin \theta_0)] f(z),$$

где  $f(z)$  является приближенным решением уравнения  $f'' + k^2(z)f = 0$ .

$$f(z) = \frac{A_0}{(n^2 - \sin^2 \theta_0)^{1/4}} \exp \left[ \pm ik_0 \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right]. \quad (3.48.10)$$

Решение (3.48.10) известно также как приближенное решение Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна (ВКБ-приближение), которое в большинстве практических приложений достаточно хорошо описывает волновое поле в слоисто-неоднородной среде.

### 3.4. Теория излучения

Рассматривая структуру волнового поля в среде, до сих пор мы решали однородное волновое уравнение, то есть мы изучали *распространение* волн, не задаваясь вопросом об их *источниках*. Теперь мы рассмотрим решения волнового уравнения в том случае, когда в некоторой области пространства расположены источники волн.

Сначала проанализируем излучение электромагнитных волн. Пусть источник электромагнитного поля излучает гармонические волны на частоте  $\omega$ , тогда поле в среде представляется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Для того чтобы в среде возникли электромагнитные волны, в некоторой области должны существовать “сторонние” электрические заряды с

плотностью  $\rho_c(\mathbf{r})$ , и эти заряды должны двигаться под действием сторонних сил, создавая токи с плотностью  $\mathbf{j}_c(\mathbf{r})$ . Величины  $\rho_c, \mathbf{j}_c$  необходимо учесть в уравнениях Максвелла (3.1–3.4), которые с учетом (3.49) приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c; \quad (3.50)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}; \quad (3.51)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho_c; \quad (3.52)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (3.53)$$

Необходимо сразу отметить, что в уравнениях (3.50–3.53) мы для простоты не учитываем собственную проводимость среды ( $\sigma, \rho = 0$ ), однако это не ограничивает нашего рассмотрения, поскольку излучение волн в среде с затуханием можно учитывать, используя комплексные значения диэлектрической и магнитной проницаемости  $\varepsilon, \mu$ .

Сторонние токи и заряды связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_c + \operatorname{div} \mathbf{j}_c = 0. \quad (3.54)$$

Из этого уравнения следует, что величины  $\rho_c, \mathbf{j}_c$  можно выразить через один вектор  $\mathbf{P}$ :

$$\rho_c = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{j}_c = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{P}. \quad (3.56)$$

Учитывая (3.54–3.56), можно показать, что этот вектор характеризует поляризацию сторонних зарядов, служащих источником излучения электромагнитных волн:

$$\mathbf{P} = \int_V (\rho_c \mathbf{r}) dV. \quad (3.57)$$

Например, в простейшем случае дипольного излучения из (3.57) следует, что вектор поляризации равен электрическому моменту диполя. В общем случае эта величина характеризует распределение токов и зарядов в излучающей антенне.

Используя уже известную процедуру, из уравнений Максвелла (3.50–3.53) мы можем получить волновые уравнения для электрического и магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -i4\pi \mu \frac{\omega}{c^2} \mathbf{j}_c - i \frac{4\pi}{\omega c} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{j}_c; \quad (3.58)$$

$$\Delta \mathbf{H} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}_c. \quad (3.59)$$

Таким образом, мы получили неоднородные волновые уравнения, в правых частях которых стоят некоторые функции от координат и времени  $\mathcal{Q}_{l,2}$ , которые описывают пространственную структуру источников:

$$\mathcal{Q}_{l,2}(x, y, z) = \mathcal{Q}_{l,2}\{\mathbf{P}(\mathbf{r})\}. \quad (3.60)$$

Совершенно аналогичные уравнения могут быть получены для любого типа волн и любой величины  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , которая меняется по волновым законам в процессе распространения волн.

При выводе (3.58–3.59) мы считаем, что зависимость от времени гармоническая:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{Q}(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t}, \quad (3.61)$$

поэтому решение волнового уравнения (3.58) или (3.59) для искомой  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  с правой частью (3.61) можно искать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t}. \quad (3.62)$$

Если подставить (3.62) в волновое уравнение, то окончательно получим для распределения амплитуды волнового поля в пространстве неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = \mathcal{Q}(\mathbf{r}). \quad (3.63)$$

Обратим внимание на тот факт, что при распространении плоской волны в направлении  $\mathbf{r}$  ( $\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2}$ ) неоднородное уравнение Гельмгольца полностью аналогично уравнению вынужденных колебаний с той разницей, что изменения искомой величины зависят не от времени, а от координаты.

Для определения волнового поля в любой точке пространства, в зависимости от того, какие параметры имеет источник излучения, достаточно решить уравнение (3.63) с известной правой частью.

### 3.5. Метод Кирхгофа. Функция Грина волнового уравнения

Для решения неоднородного уравнения Гельмгольца (3.63) с произвольной правой частью (с пространственным распределением источников) найдем сначала его решение для “точечного” источника излучения. Такой подход аналогичен тому, как мы искали функцию отклика колебательной системы, воздействуя на нее бесконечно коротким импульсом ( $\delta$ -функцией). Далее, зная отклик системы на такое воздействие, мы могли легко получить решение для поведения системы под произвольным воздействием (см. п. 2.1). Для задач теории волн такой математический подход является отражением известного в физике *принципа Гюйгенса*: волновое поле в каждой точке пространства является суперпозицией (суммой) волновых полей от точечных источников.

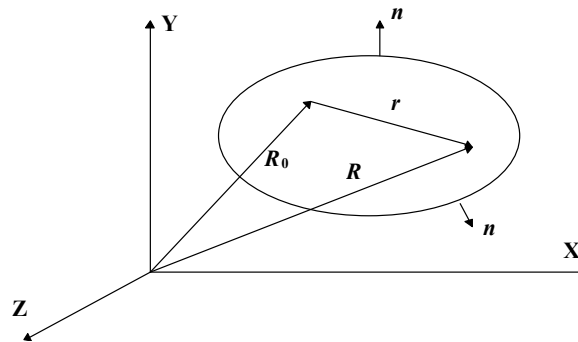


Рис. 3.3

Пусть точечный источник излучения находится в пространстве в точке с радиус-вектором  $R_0$  (Рис.3.3). Нам необходимо найти волновое поле в точке с текущей координатой  $R$ . В этом случае функция источника задается  $\delta$ -функцией:

$$Q(\mathbf{R}) = -4\pi\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|), \quad (3.64)$$

а уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\Delta\phi + k^2\phi = -4\pi\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|). \quad (3.65)$$

Частным решением такого уравнения является функция

$$G(r) = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.66)$$

где  $r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|$ . Функцию (3.66) называют *функцией Грина для свободного пространства*, и она описывает поле точечного источника единичной амплитуды. Это частное решение имеет очень большое значение в теории волн, поскольку в любой точке пространства волновое поле можно представить в виде суммы (или интеграла, если источник поля непрерывный):

$$\phi(\mathbf{R}) = \sum_i A_i \frac{e^{ikr_i}}{r_i}, \quad (3.67)$$

где  $r_i = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|$ , а  $A_i(\mathbf{R}_i)$  - распределение амплитуды по источникам. Вычисление (3.67) - непростая задача, для решения которой используются различные методы, из которых наиболее часто применяется *метод Кирхгофа*.

Метод Кирхгофа основывается на *теореме Грина*, согласно которой непрерывные комплексные функции координат  $G(\mathbf{R}), \varphi(\mathbf{R})$  внутри некоторого объема  $V$  (см. рис.3.3) могут быть выражены через их значения на поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем:

$$\int_V (G\Delta\varphi - \varphi\Delta G) dV = \oint_S \left( G \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (3.68)$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial n}$  означает дифференцирование по нормали к поверхности.

Применим эту теорему к волновым полям, которые описываются решениями уравнения Гельмгольца. Пусть функция  $\varphi(\mathbf{R})$  пространственная структура распространяющихся волн и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \quad (3.69)$$

а  $G(\mathbf{R})$  - функция Грина свободного пространства (3.66). Используя (3.65) и (3.69) в (3.68), можно получить:

$$4\pi \int_V \varphi(\mathbf{R}) \delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|) dV_0 = \oint_S \left( G \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (3.70)$$

или окончательно:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( G \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (3.71)$$

Таким образом, *волновое поле в любой точке внутри объема можно получить через значения волнового поля на поверхности, ограничивающей этот объем.* Формула (3.71) носит название *интегральной теоремы Кирхгофа–Гельмгольца*. Проиллюстрируем возможности ее практического применения.

Прежде всего рассмотрим волновое поле сферически-симметричного источника, для которого  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ . Таким источником может быть, например, пульсирующая сфера, излучающая звук в окружающую среду (рис.3.4).

Для функции Грина мы можем записать следующее выражение:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.72)$$

Если использовать (3.72) в интегральной теореме (3.71), то поле в произвольной точке можно рассчитать по формуле

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \left( ik - \frac{1}{r} \right) \varphi \right] \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad (3.73)$$

где, с учетом симметрии, интегрирование по поверхности сферы  $S$  можно заменить интегрированием по телесному углу  $\Omega$ :

$$dS = 4\pi r^2 d\Omega. \quad (3.74)$$

Использование формулы (3.73) с учетом (3.74) позволяет сформулировать общее для всех волновых задач условие убывания волнового поля на бесконечности:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi \right) r = 0. \quad (3.75)$$

Выражение (3.75) называется *условием излучения Зоммерфельда*. Этому условию удовлетворяет поле точечного источника (3.66), и физический смысл которого заключается в том, что волны от любого излучателя конечного размера убывают с расстоянием за счет угловой расходимости излучения.

Применим теперь интегральную теорему (3.73) к анализу акустического излучения пульсирующей сферы радиуса  $R_0$  (рис. 3.4). Пусть нас будет интересовать волновое поле на малом расстоянии от поверхности сферы и длина волны излучения будет меньше размеров сферы. Тогда, при условиях

$$\frac{r}{R_0} \ll 1, \quad kr \gg 1, \quad (3.76)$$

вычисление (3.73) приблизительно дает:

$$\varphi(\mathbf{R}) \approx \varphi(R_0) e^{ikR}, \quad (3.77)$$

где  $\varphi(R_0)$  - волновое поле на поверхности сферы. Таким образом, вблизи поверхности звук не уменьшается с расстоянием, если радиус кривизны волнового фронта гораздо больше длины звуковой волны (волна почти плоская).

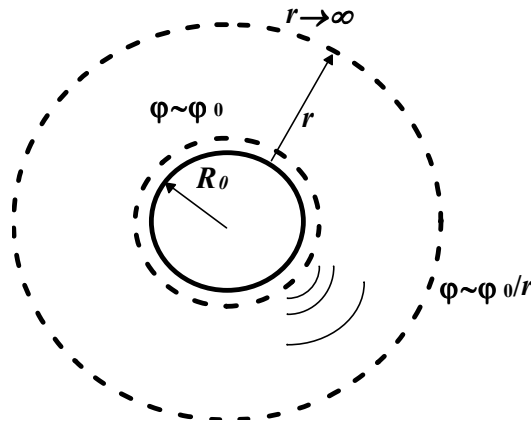


Рис. 3.4



В противоположном случае, когда нас интересует поведение излучения на больших расстояниях

$$\frac{r}{R_0} \gg 1, \quad (3.78)$$

из (3.73) следует, что волновое поле ведет себя как поле точечного источника:

$$\varphi(R) \approx \varphi(R_0) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (3.79)$$

Интегральную теорему Кирхгофа–Гельмгольца можно использовать и в других случаях, например, для расчета дифракции плоской волны на отверстии в экране (см.рис. 3.5).

Пусть плоская волна с волновым числом  $k$  падает на экран с отверстием под углом  $\theta$ . Тогда, если для интегрирования в (3.71) использовать полусферу бесконечного радиуса, как это показано на рис.3.5, с учетом условия излучения (3.75) интегрирование по этому участку поверхности дает нулевой вклад. Если второй частью поверхности считать плоскость экрана, то волновое поле не равно нулю только в области отверстия, поэтому амплитуда волн, прошедших через отверстие в любой точке за экраном, будет определяться интегралом (3.71) по плоскости  $Z=0$  в пределах отверстия.

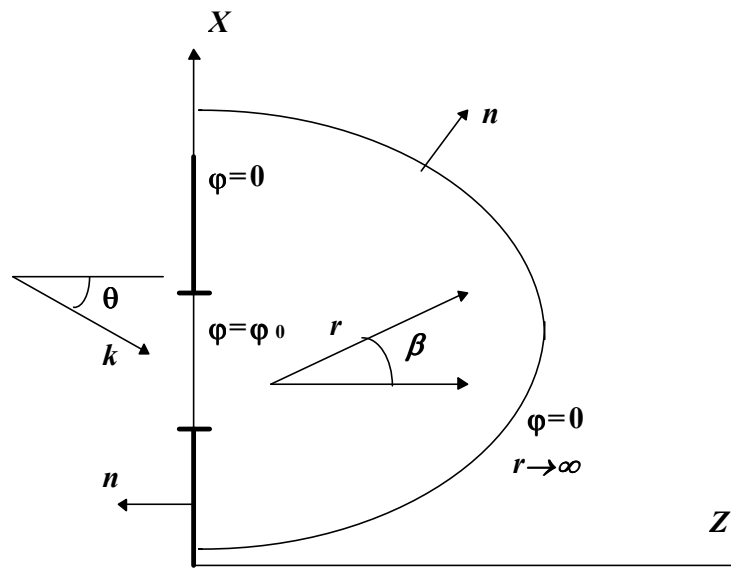


Рис. 3.5

Рассмотрим волновое поле на достаточно большом расстоянии от экрана ( $kr \gg 1$ ). Пусть на экран падает плоская волна

$$U(r) = U_0(x, y, z) \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\}, \quad (3.80)$$

тогда для расчета по формуле (3.71) можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\partial r}{\partial z} = -\cos\alpha; \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial z} \approx -ik_z U = -ikU \cos\beta; \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} = -\left(ik - \frac{1}{r}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos\alpha. \quad (3.83)$$

Здесь мы используем следующие соотношения:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}; \quad (3.84)$$

$$r = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}, \quad (3.85)$$

где  $\zeta, \eta$  - координаты источников излучения в пределах отверстия в плоскости экрана  $Z=0$ . Использование соотношений (3.81–3.85) в интегральной теореме (3.71) дает возможность рассчитать поле за экраном в любой, достаточно далеко удаленной точке:

$$U(x, y, z) = \frac{k}{4\pi i} \int_S (\cos\beta - \cos\alpha) U(\zeta, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} d\eta d\zeta. \quad (3.86)$$

Следовательно, метод Кирхгофа позволяет рассчитать волновые поля с учетом *дифракции*. Результат интегрирования (3.86) рассмотрим в следующем разделе.

### 3.6. Разложение волнового поля по плоским волнам

#### Дифракция Френеля и Фраунгофера

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$  и проходящую через отверстие в непрозрачном экране, расположенном в плоскости  $z=0$ . Пусть  $U_0(x, y, 0)$  - амплитуда волнового поля в плоскости экрана.

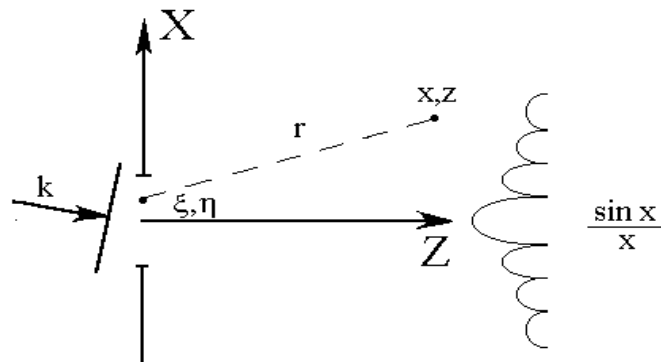


Рис. 3.6

Произведем двумерное Фурье-преобразование функции  $U_0(x, y, 0)$  :

$$U_0(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(k_x, k_y) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y \quad (3.87.1)$$

где

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y, 0) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy. \quad (3.87.2)$$

Функция  $F_0(k_x, k_y)$  называется *угловым (пространственным) спектром* функции  $U_0(x, y, 0)$ . Действительно, подынтегральное выражение в (3.87.1) представляет собой комплексную амплитуду плоской гармонической волны в

плоскости  $z=0$  с компонентами волнового вектора  $k_x, k_y$  и  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$  и амплитудой  $F_0(k_x, k_y)$ .

Пусть плоская волна падает нормально на экран со щелью, ширина которой равна  $a$ , а края параллельны оси  $y$  (см. рис.3.6). Тогда пространственный спектр волнового поля в плоскости экрана есть

$$\Phi(k_x) = F_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-ik_x x} dx = \frac{\sin(k_x a/2)}{\pi k_x}. \quad (3.87.3)$$

Если бы угловой спектр был бы известен при любом  $z$ , то волновое поле  $U(x, y, z)$  определялось бы выражением (3.87.1) где вместо  $F_0(k_x, k_y)$  используется  $F_0(k_x, k_y, z)$ . Подставив это выражение в уравнение Гельмгольца, получим для  $F(k_x, k_y, z)$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2)F = 0. \quad (3.87.4)$$

Решая это уравнение при условии  $F(k_x, k_y, 0) = F_0(k_x, k_y)$ , найдем частное решение, соответствующее волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$

$$F(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y) \exp\{i z \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\}. \quad (3.87.5)$$

Угловой спектр по мере удаления точки наблюдения от плоскости экрана меняется.

Пусть  $\xi, \eta$  - координаты точки в плоскости экрана. Будем искать волновое поле  $U(x, y, z)$  в точках, лежащих вблизи оси  $Z$ , расстояние которых до экрана значительно больше размера отверстия, т.е.

$$\frac{|x-\xi|}{z} \ll 1; \quad \frac{|y-\eta|}{z} \ll 1; \quad R(x, y, z) = z + \frac{1}{2} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{z} + \dots \quad (3.87.6)$$

Используя (3.87.6, 3.87.5 и 3.87.1), можно получить выражение для волнового поля  $U(x, y, z)$ , которое называется приближением Френеля:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right) \iint U(\xi, \eta) \exp\left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z}\right) \times \exp[-i2\pi(f_x \xi + f_y \eta)] d\xi d\eta \quad (3.87.7)$$

Здесь  $\lambda$  - длина волны,  $f_x, f_y$  - пространственные частоты, которые определяют угол наблюдения к оси  $z$ :  $f_x = x/\lambda z$ ;  $f_y = y/\lambda z$ . Подробный вывод выражения (3.87.7) выходит за рамки настоящего курса.

Большое значение в поведении (3.87.7) имеет волновой параметр  $D = \frac{\lambda z}{\pi a^2}$  ( $a = \max(\xi, \eta)$ ). На расстоянии до экрана, соответствующем  $D \sim 1$ , поле определяется интегралом (3.87.7) и эта область называется областью дифракции Френеля. Область значений  $D \gg 1$  называется областью дифракции Фраунгофера. В этой области

$$\exp\left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z}\right) \approx 1$$

и (3.87.7) преобразуется к виду

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right) (2\pi)^2 F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y), \quad (3.87.8)$$

где  $F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y)$  – угловой спектр функции  $U_0(\xi, \eta)$ .

**Таким образом, угловое распределение поля в области дифракции Фраунгофера определяется пространственным спектром поля в плоскости экрана. Например, для щели угловое распределение описывается выражением (3.87.3) и имеет чередующиеся максимумы и минимумы (рис.3.6).**

Совершенно аналогично можно рассматривать поля плоского излучателя конечных размеров или волнового пучка (например, лазерного луча) конечного диаметра.

## **Глава 4. Приемно-передающие устройства и преобразование волновых сигналов**

### **4.1. Принцип работы оптического квантового генератора (лазера)**

Работа лазера основана на вынужденном испускании световых фотонов под действием внешнего электромагнитного поля. Пусть атомы среды могут находиться в двух состояниях с энергиями  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (рис 4.1) и при переходе из одного состояния в другое излучать фотон с энергией  $\Delta\varepsilon = \hbar\omega$ , где  $\hbar, \omega$  – постоянная Планка и частота. В состоянии термодинамического равновесия для числа атомов  $N$ , находящихся в этих энергетических состояниях,  $N_2 > N_1$ . Поскольку полная вероятность поглощения или излучения фотонов пропорциональна соответственно числу частиц на нижнем или верхнем энергетическом уровне, среда в равновесном состоянии будет поглощать излучение. Если в веществе созданы такие условия, что  $N_2 > N_1$ , излучение в нем будет усиливаться. Такое состояние вещества называется инверсным (обращенным) или состоянием с инверсией заселенностей. Для ее создания к данному веществу, называемому *активной средой*, необходимо подводить энергию, вызывающую возбуждение атомов. Такой процесс получил название *накачки*.

Суть вынужденного или индуцированного излучения состоит в том, что взаимодействие фотона определенной энергии с возбужденным атомом вещества порождает еще фотон с такой же энергией (а значит, и частотой). Вероятность вынужденного испускания фотонов пропорциональна спектральной плотности излучения  $\rho(\omega)$  (число фотонов с частотой  $\omega$ ). Усиление излучения в инверсной среде происходит за счет того, что число актов вынужденного испускания  $N_2\rho$  превосходит число актов поглощения  $N_1\rho$ . В результате интенсивность излучения в среде возрастает по

экспоненциальному закону  $I = I_0 \exp(\alpha z)$ , где  $I_0$  - интенсивность входной волны,  $z$  - пройденное волной расстояние,  $\alpha \approx N_2 - N_1$  коэффициент квантового усиления.

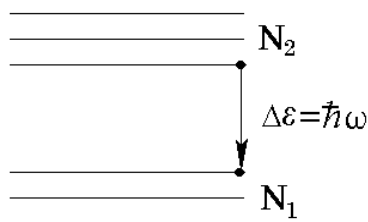


Рис.4.1

Первая из особенностей лазерного излучения - его *монохроматичность*, то есть практически излучение имеет одну единственную частоту. Это объясняется тем, что фотоны в лазерном пучке имеют одинаковую энергию. Флуктуации частоты возникают за счет того, что малая часть атомов дает свободное (спонтанное) излучение. Лазерное излучение занимает очень узкую полосу частот,  $10^{-3}$  Гц. *Когерентность* и *малая угловая расходимость* лазерного излучения означают, что в лазерном пучке электромагнитные волны имеют в поперечном сечении пучка практически одинаковую фазу (плоский волновой фронт). Эти свойства достигаются за счет того, что активная среда с инверсной заселенностью помещается между двумя зеркалами, одно из которых - полупрозрачное (рис.4.2). Поток фотонов отражается от зеркал и усиливается при многократном прохождении через активную среду.

Таким образом, работа лазера основана на принципе *открытого резонатора*. В зависимости от способа создания инверсной заселенности лазерное излучение может генерироваться в непрерывном или импульсном режиме.

Для непрерывной генерации инверсия в среде постоянно поддерживается накачкой.

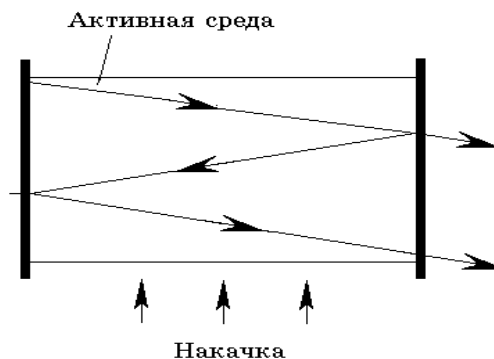


Рис.4.2

Импульсный режим может определяться как импульсным возбуждением лазера, так и специальными условиями генерации.

При импульсном возбуждении лазера лавинообразно возникает поток фотонов в резонаторе, который прекращается, когда активная среда возвращается в равновесное состояние. Такой режим называется режимом *свободной генерации*. На практике короткие лазерные импульсы высокой мощности и малой длительности (обычная величина - десятки нс) формируются в режиме *модулированной добротности*. Для этого перед началом возбуждающего импульса полупрозрачное зеркало лазерного резонатора закрывается специальным оптическим затвором, который нарушает резонансные условия (меняет добротность резонатора). При этом с началом возбуждающего импульса начинается монотонное нарастание инверсной заселенности, в резонаторе накапливается энергия, но генерация лазерного импульса начинается только с открытием оптического затвора. Для сверхкоротких пикосекундных импульсов достижимая мощность излучения -  $10^{12}$  Вт.

В конце настоящего пособия в приложении приведена таблица с параметрами некоторых лазеров.

#### **4.2. Модуляция и передача оптического излучения**

Для передачи информации или формирования оптического излучения с заданными параметрами применяются специальные оптические затворы или модуляторы, которые обеспечивают *амплитудную, фазовую, частотную или поляризационную модуляцию*. Для видимого и инфракрасного (ИК) диапазонов ( $10^{14}$ – $10^{15}$  Гц) верхний предел частоты модуляции достигает  $10^{13}$  Гц. Непосредственное измерение фазы и поляризации оптического излучения практически трудно осуществить, поэтому все виды модуляции специальными техническими средствами преобразуются в амплитудную модуляцию. Соответствующее устройство помещается обычно перед приемником оптического излучения.

Простейшим амплитудным модулятором света является механическое устройство, обеспечивающее периодическое прерывание светового потока. Для этой цели применяются вращение и колебание заслонок, призм, зеркал, дисков с отверстиями и диафрагм с переменной прозрачностью. Для осуществления высокочастотной амплитудной модуляции, а также для преобразования фазовой и поляризационной модуляции в амплитудную, используют физические эффекты, состоящие в изменении оптических свойств некоторых веществ под влиянием внешних электрических, магнитных или механических воздействий (электрооптический, магнитооптический или упругооптический эффекты). Для такой модуляции применяют управляемый *двулучепреломляющий* элемент из материала, обладающего естественной или наведенной анизотропией. Электромагнитные волны взаимно перпендикулярной поляризации распространяются в таком веществе с разной скоростью (обыкновенный и необыкновенный лучи), при

этом разность фаз между ними на выходе зависит от внешнего управляющего поля, например электрического (электрооптический эффект). Широкое распространение получили модуляторы на основе эффекта Керра, который состоит в возникновении двойного лучепреломления в оптически изотропных средах (жидкостях, стеклах, некоторых кристаллах) под воздействием внешнего электрического поля. При этом разность коэффициентов преломления для обыкновенной и необыкновенной волн пропорциональна квадрату напряженности электрического поля :  $\Delta n = kn_0 E^2$  , где  $n_0$  - показатель преломления вещества в отсутствии поля,  $k$  - постоянная Керра. Схема модулятора приведена на рис. 4.3.

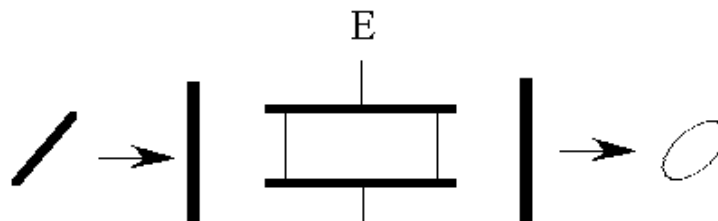


Рис.4.3

Управляющий элемент (ячейка Керра) представляет собой конденсатор, заполненный прозрачным изотропным веществом. Его помещают между двумя взаимно перпендикулярными поляризаторами и в отсутствие управляющего поля поляризованный первым поляризатором свет не проходит через второй поляризатор. При включении электрического поля, составляющего угол  $45^\circ$  с линейно поляризованным светом, волна в ячейке Керра становится эллиптически поляризованной и на выходе устройства появляется излучение, интенсивность которого пропорциональна управляющему полю. В зависимости от вещества в ячейке Керра максимальная прозрачность достигается при напряжении на электродах 3–30кВ.

Для передачи оптического излучения широкое распространение получили волоконно-оптические световоды. Оптические волокна представляют собой тонкие диэлектрические нити (цилиндры) с коэффициентом преломления  $n_1$ , покрытые слоем из материала с коэффициентом преломления  $n_2 < n_1$  (рис.4.4). В диэлектрических волноводах электромагнитное поле существует как внутри диэлектрика, так и во внешнем пространстве. Этим они отличаются от волноводов с металлическими отражающими стенками. Математические расчеты для структуры волнового поля в таком волноводе могут проводиться совершенно аналогично расчетам для металлического волновода, приведенным в части (3.3) с той лишь разницей, что на краях волновода для решения уравнения Гельмгольца необходимо использовать другие граничные условия. Для диэлектрических волноводов характерно малое затухание электромагнитных волн, поскольку в них отсутствуют омические потери, которые неизбежно возникают в металлических волноводах и связаны с конечной проводимостью их направляющих поверхностей.

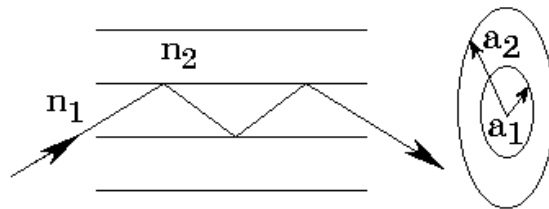


Рис.4.4

Лучи, распространяющиеся под достаточно малыми углами к оси волоконного световода, испытывают полное внутреннее отражение на границе между сердцевиной и оболочкой и распространяются только по сердцевине. В зависимости от назначения световода диаметр сердцевины составляет от единиц до сотен мкм, а оболочки - от десятков до тысяч мкм. Модовая структура поля в световоде определяется диаметром сердцевины и разностью показателей преломления  $n_1 - n_2$ . Для конкретной длины волны света можно добиться одномодового режима распространения излучения в световоде. Могут быть изготовлены световоды с многослойным (ступенчатым) или с плавным (градиентным) профилем показателя преломления. Минимальные потери в таких световодах составляют обычно десятые доли децибелл на километр, ширина полосы пропускания - 30-50 МГц·км для световодов со ступенчатым профилем, 400-600 МГц·км - для световодов с градиентным профилем. Материалами для световодов служат кварцевое или другие виды стекол. Для сохранения поляризации излучения используются одномодовые световоды, поперечное сечение которых несимметрично, то есть вместо окружности поверхность сердцевины представляет из себя эллипс.

Переход к волоконно-оптическим световодам позволяет значительно уменьшить потери световой энергии при ее передаче на большие расстояния, а также передавать ее по криволинейным трассам. Кроме того, волоконные световоды обладают высокой технологичностью и относительной дешевизной при промышленном изготовлении.

### 4.3. Прием и преобразование оптического излучения

Наиболее широко применяемыми приемниками оптического излучения являются полупроводниковые оптоэлектронные приборы. Работа оптоэлектронных приборов (фоторезисторы, фотодиоды, фототранзисторы, фототиристоры) основана на использовании *внутреннего фотоэффекта*, который состоит в том, что под действием излучения в полупроводниках происходит генерация пар носителей заряда - электронов и дырок. Эти дополнительные носители увеличивают электрическую проводимость. Такая добавочная проводимость, обусловленная действием фотонов, получила название *фотопроводимости*.

Простейшим оптоэлектронным прибором является фоторезистор, который представляет собой полупроводниковый резистор, сопротивление которого



меняется под действием излучения. Устройство фоторезистора и схема его включения показаны на рис.4.5. Если облучения нет, то фоторезистор имеет сопротивление  $R_T = 10^4 - 10^7$  Ом, которое называется темновым сопротивлением. Интегральной чувствительностью

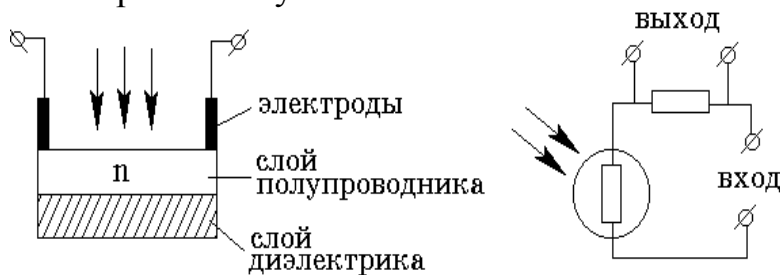


Рис.4.5

фоторезистора называется отношение фототока  $I$  к вызвавшему его потоку белого (немонохроматического) света  $\Phi$ . Для фоторезисторов используются различные полупроводники, например, сернистый свинец наиболее чувствителен к инфракрасным, а сернистый кадмий - к видимым лучам. Стандартной характеристикой фоторезистора является его удельная чувствительность, то есть интегральная чувствительность, отнесенная к одному вольту приложенного напряжения:

$$S = \frac{I}{\Phi U}.$$

$S$  обычно составляет несколько сотен или тысяч микроампер на вольт-люмен. Недостатками фоторезисторов являются высокая чувствительность сопротивления к изменению температуры и их большая инерционность, которая связана с большим временем рекомбинации электронов и дырок после прекращения облучения. Практически фоторезисторы применяются лишь на частотах не выше единиц килогерц. Наиболее распространенными из оптоэлектронных приборов являются фотодиоды. Устройство планарного фотодиода отличается от устройства фоторезистора на приведенном рисунке тем, что слой диэлектрика заменен на слой  $p$ -полупроводника. Один из электродов находится на его нижней грани. В качестве фотодиода может использоваться обычный диод, в котором под действием светового потока возникает внутренний фотоэффект. В фотодиодном режиме световой поток управляет обратным током диода, то есть генерация светом электронов и дырок приводит к значительному изменению проводимости электронно-дырочного перехода при приложении обратного напряжения. Интегральная чувствительность фотодиодов составляет десятки миллиампер на люмен. Она зависит от длины волны излучения и имеет максимум на некоторой длине волны, которая зависит от свойств полупроводника. Инерционность фотодиодов невелика. Они могут работать на частотах до сотен МГц, а фотодиоды с повышенным быстродействием имеют граничные частоты до десятков ГГц. Рабочее

напряжение фотодиодов - 10-30 В, темновой ток - 20 мкА для германиевых приборов и 2 мкА - для кремниевых. Ток при освещении - сотни микроампер.

Для приема и преобразования слабого светового излучения, когда интенсивность света ниже порога чувствительности оптоэлектронных приборов, используются приборы, основанные на *фотоэлектронной эмиссии* (внешний фотоэффект). Фотоэлектронная эмиссия состоит в испускании электронов (фотоэлектронов) твердыми телами под действием излучения. При этом энергия фотоэлектронов не зависит от интенсивности излучения, а определяется только энергией (частотой) фотонов.



Рис.4.6

Наиболее распространенным вакуумным фотоэлектронным прибором является фотоэлектронный умножитель (ФЭУ). Устройство коробчатого ФЭУ показано на рис.4.6. Прибор состоит из фото катода, нескольких (до 20) электродов (динодов) и коллектора. Диноды обладают высоким коэффициентом  $S_3$  вторичной электронной эмиссии, то есть способностью излучать несколько электронов при попадании на них электрона с достаточной кинетической энергией. Напряжение на каждом из динодов относительно фото катода на 50-100 В больше, чем у предыдущего. Свет, попадающий на катод, вырывает из него электроны, и их количество увеличивается за счет вторичной эмиссии при движении от динода к диноду. Коэффициент усиления электронного тока  $K = S_3 N$  ( $N$  - число динодов) достигает значений  $10^9$ - $10^{11}$ . Поэтому даже отдельные фотоэлектроны, образованные на фото катоде, создают на выходе ФЭУ импульс тока большой амплитуды.

#### 4.4. Излучение и прием СВЧ и УК радиоволн.

Радиоволнами принято называть электромагнитные волны в широком диапазоне частот - от нескольких Гц до  $6 \cdot 10^{12}$  Гц. Деление радиоволн на диапазоны, установленные международным регламентом радиосвязи, приведено в таблицах, приведенных в приложении. Хотя в радиотехнических системах используют разные диапазоны частот, все более широкое применение получают радиоволны дециметрового, сантиметрового, а в последние годы

- и миллиметрового диапазона. Прежде всего это связано с возможностью передачи на этих диапазонах больших объемов информации за меньшее время. Микроэлектронные устройства СВЧ обладают меньшими габаритами и высокой технологичностью при массовом промышленном изготовлении. Кроме того, в СВЧ диапазоне антенны могут создавать узконаправленное излучение с лучом шириной до долей градуса и усиливать сигнал в десятки и сотни тысяч раз. Это позволяет использовать антенну не только для излучения и приема радиоволн, но и для пеленгации, борьбы с помехами, обеспечения электромагнитной совместимости (ЭМС) систем и т.д.

Для передачи СВЧ излучения в трактах приемо-передающих радиосистем используются волноводные линии передачи, в которых место полых металлических волноводов все более занимают диэлектрические волноводные структуры разных типов. В регулярном диэлектрическом волноводе (ДВ) возможны два режима распространения: без вытекания волн, когда отражение полное, и с вытеканием волн, когда оно неполное (рис.4.7).

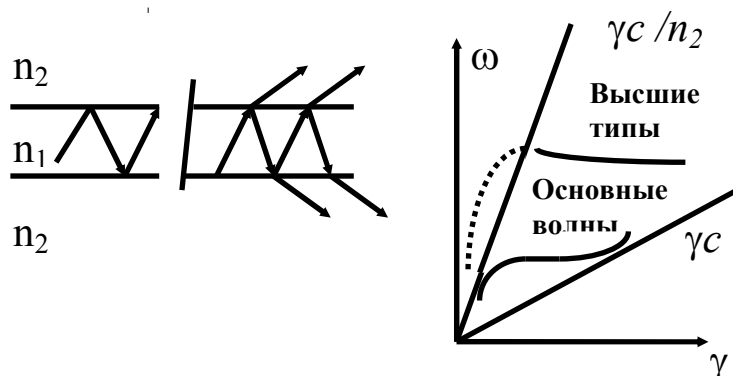


Рис.4.7

Вытекание волн, т.е. излучение электромагнитной энергии за границы волновода, сопровождает распространение высших мод ДВ, для которых угол падения на границу оказывается меньше критического угла полного внутреннего отражения. Продольная составляющая  $\gamma$  волнового вектора оказывается комплексным числом и его мнимая часть  $\text{Im } \gamma$  определяет уменьшение амплитуды ЭМ волны в процессе распространения в волноводе. Связь между частотой и волновым числом  $\gamma$  (дисперсионная зависимость) ДВ показаны на рис.4.7.

ДВ могут иметь круглое, эллиптическое или прямоугольное сечение, а также состоять из диэлектрических материалов с различными свойствами (композиционные ДВ). В технике СВЧ все более широкое применение находят *планарные волноводные структуры*, которые сочетают в себе элементы ДВ и металлических волноводов. На рис.4.8 показаны сечения наиболее распространенных линий передачи такого типа: щелевой и микрополосковой (МПЛ). Стрелками показана напряженность ЭМ поля в основной моде. Разработка планарных линий передачи различных типов позволяет создавать

миниатюрные базовые элементы для устройств СВЧ с хорошей воспроизводимостью параметров, низкой стоимостью и технологичностью при промышленном изготовлении.

Планарные (интегральные, печатные) элементы СВЧ представляют собой тонкий слой металла, нанесенный на лист диэлектрика (подложки) с диэлектрической проницаемостью 10 и более.

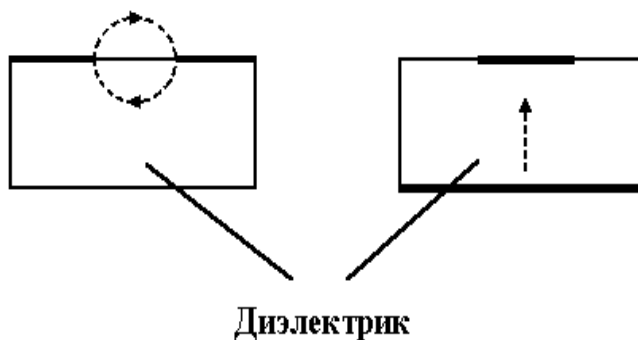


Рис.4.8

На практике в МПЛ применяют подложки с меньшей диэлектрической проницаемостью, например из плавленного кварца ( $\epsilon = 3.78$ ). Поскольку печатные элементы СВЧ могут излучать энергию в пространство, на их основе создают элементарные плоскостные излучатели и антенные решетки.

Важнейшей характеристикой антенно-фидерного устройства, обеспечивающего излучение и прием радиоволн, является диаграмма направленности (ДН) - угловое распределение поля излучения. В практике часто используют диаграмму направленности по мощности - угловое распределение мощности излучения. Любая направленная антенна имеет лепестковую форму диаграммы направленности. Если синфазно складываются поля всех элементов, то соответствующий им максимум называется главным. На рис.4.9 показаны диаграмма направленности в цилиндрических координатах и ее сечение - в декартовой системе координат.

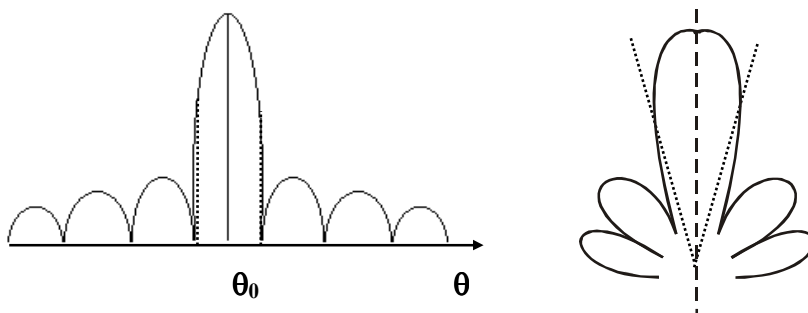


Рис.4.9

Так как основная часть мощности, излучаемой или принимаемой антенной, концентрируется в главном лепестке, направленность излучения характеризуют шириной главного лепестка на уровне половинной мощности  $\theta_0$  (или на уровне -3дБ) от максимума. Величина  $\theta_0$  может быть оценена в радианах по формуле  $\theta_0 \approx \lambda/L$ , где  $\lambda$  - длина волны излучения,  $L$  - поперечные размеры (*апертура*) антенны. Это соотношение носит общий характер и справедливо для любых распределенных источников волн (смотри параграф о дифракции). В любую антенную систему входит один или несколько (в антенных решетках - сотни) элементарных приемно-передающих элементов - слабонаправленная антенна. На рис.4.10 показаны наиболее распространенные элементарные излучатели: щелевой, рупорный, вибраторный.

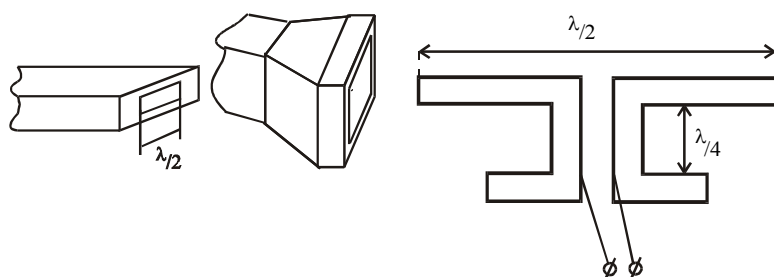


Рис.4.10

Вибраторный и щелевой излучатели работают по принципу резонансного дипольного излучения. Вибратор представляет собой электрический, а щелевой излучатель – магнитный диполь. Поскольку размер диполя составляет половину длины волны излучения, вдоль оси диполя излучение не распространяется, так как волны, распространяющиеся в двух противоположных направлениях от его полюсов, оказываются в противофазе. Таким образом, диаграмма направленности такого излучателя представляется в форме восьмерки. Щелевой излучатель представляет собой диполь, расположенный в отражающей плоскости, поэтому его диаграмма направленности составляет половину такой восьмерки. Вибраторный излучатель часто помещают на расстоянии четверти длины волны излучения от отражателя для создания такого же однонаправленного излучения. Ширина единственного лепестка такой антенны мало отличается от  $180^\circ$ . Диаграмма направленности рупорной антенны определяется *шириной раскрыва* (апертурой) рупора и составляет обычно десятки градусов. На принципе дипольного излучения основаны и печатные излучатели разных форм. На рис.4.11 показаны щелевой, вибраторный и спиральный печатные излучатели.

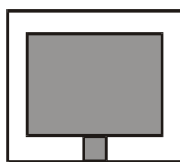
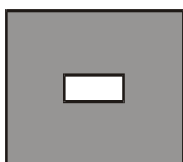


Рис.4.11

Для формирования узконаправленного излучения в антенно-фидерном устройстве формируется система, фокусирующая поле элементарных излучателей. Наиболее распространенный тип остронаправленных СВЧ антенн - зеркальные антенны. Основными типами зеркальных антенн являются одно- и двухзеркальные с различными профилем и формой зеркал. В фокусе зеркала помещается система облучателей.

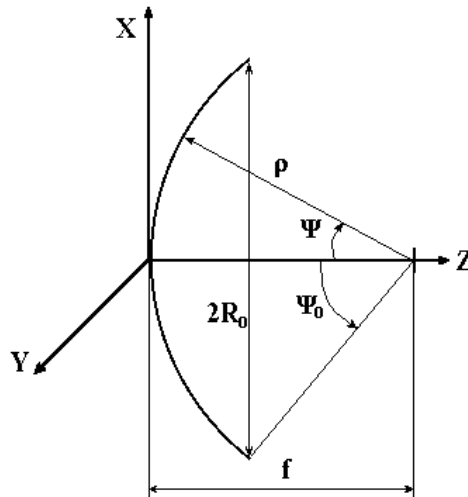


Рис.4.12

Уравнение поверхности обычной параболической антенны (рис.4.12) в прямоугольной системе координат имеет вид  $x^2 + y^2 = 4fz$ , а в сферической  $(\rho, \psi, \xi)$  – с центром в фокусе  $f \cos \text{ec}^2(\psi/2)$ , где  $f$  - фокусное расстояние параболоида. Угловой размер и радиус  $R_0$  раскрыва зеркала связаны соотношением

$$\sin \psi_0 = \frac{R_0}{f} [1 + (R_0/2f)^2]. \quad (4.4.1)$$

Следовательно, для проектирования зеркала необходимо выбрать значение параметров  $f, R_0, \psi$ . Они определяются требованиями к техническим характеристикам антенны и параметрами используемого элементарного облучателя.

Сканирование, то есть угловое перемещение диаграммы направленности, осуществляется механическим вращением всей зеркальной антенны или, в пределах небольших углов, перемещением облучателя в фокальной плоскости зеркала.

С развитием антенной техники все более широкое распространение получают фазированные антенные решетки (ФАР), которые представляют собой систему из большого числа элементарных приемно-передающих элементов. Формирование диаграммы направленности и сканирование осуществляется в ФАР за счет фазового сдвига сигнала на каждом

элементарном излучателе. При большом количестве элементов решетки и достаточной апертуре таким образом, согласно принципу Гюйгенса (см. параграф 3.5), может быть сформирован любой волновой фронт, а значит, и диаграмма направленности.

Антенные решетки классифицируют по способу возбуждения. Различают так называемый пространственный способ возбуждения, при котором антенная решетка, как и зеркальная, возбуждается облучателем. В этом случае возможны два варианта ФАР: проходной (а) и отражательный (б)(рис.4.13). Второй способ возбуждения - фидерный, при котором решетку возбуждают системой линий передачи СВЧ (рис.4.13,в). При этом возможны следующие схемы питания излучателей - последовательная (показанная на рисунке), параллельная, двоично-этажная.

ФАР принято также классифицировать по типу используемых излучателей. В качестве элементов ФАР применяют антенны с различными частотными свойствами, поляризацией и диаграммой направленности.

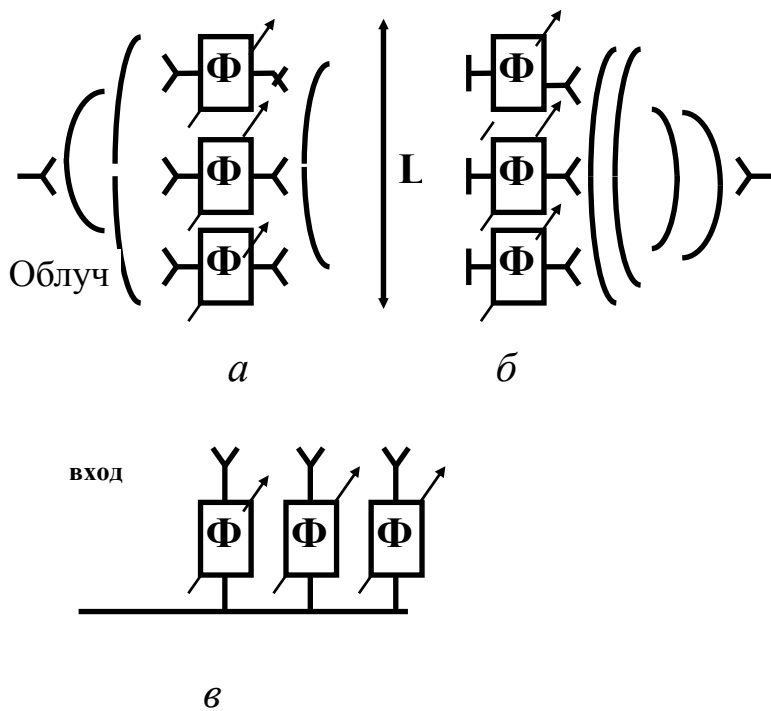


Рис.4.13

Ширина ДН излучателя в решетке должна быть не менее углового сектора сканирования. Так как на практике большой интерес представляют ФАР с широкоугольным сканированием, то чаще всего используются печатные, щелевые, вибраторные и другие слабонаправленные элементы. В настоящее время имеются ФАР с ДН в десятые доли градуса.

#### 4.5. Распространение СВЧ и УК радиоволн в земной атмосфере

Земную атмосферу по плотности и составу газов, температурному режиму, электрическим и другим физическим свойствам подразделяют на три основных слоя: тропосферу (до высот 10-15 км), стратосферу (до 50-60 км), ионосферу (до 1000 км). При распространении радиоволн на приземных трассах (исключая спутниковые системы связи и телекоммуникаций) достаточно рассмотреть радиофизические свойства тропосферы. При этом общие закономерности влияния атмосферы на распространение радиоволн оказываются применимы для любого расположения корреспондентов (источников и приемников радиоволн). Условия распространения СВЧ- и УК-радиоволн (см. таблицу диапазонов в приложении) в тропосфере определяются очень многими факторами: рефракцией, отражением от земной поверхности, рассеянием и поглощением в облаках, рассеянием на атмосферных образованиях - каплях дождя, снеге и граде и т.д. Учет всех этих факторов одновременно практически не представляется возможным и в расчетах чаще всего учитывается два фактора, оказывающие наибольшее влияние, - отражение от поверхности Земли и рефракция. Радиофизические свойства тропосферы характеризуются коэффициентом преломления  $n$ , связанным с диэлектрической проницаемостью тропосферы соотношением  $n = \varepsilon^{1/2}$ . Так как  $n$  мало отличается от единицы, то для удобства пользуются индексом преломления  $N = (n - 1)10^6$ . Изменения температуры, давления и влажности от точки к точке в толще тропосферы обуславливают изменение в пространстве индекса преломления  $N$ , который можно вычислить из полуэмпирической формулы Дебая

$$N = \frac{77}{T} \left( p + \frac{4810}{T} q \right), \quad (4.5.1)$$

где  $T$  - температура, К;  $p$  - атмосферное давление, мб;  $q$  - давление водяного пара (влажность), мб.

При определении условий распространения радиоволн важно знать не только значение индекса преломления у поверхности Земли, но и распределение его среднего значения по высоте. При решении ряда задач в первом приближении принимают, что с увеличением высоты температура уменьшается линейно (6,5<sup>0</sup>С на км), давление уменьшается по барометрическому закону, влажность убывает по экспоненциальному закону. Это приводит к стандартной экспоненциальной модели тропосферы, принятой Международным консультативным комитетом по радио (МККР):

$$N(h) = N_3 \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \quad (4.5.2)$$

где  $H = 7,65$  - масштаб высоты, км;  $h$  - текущая высота, км.



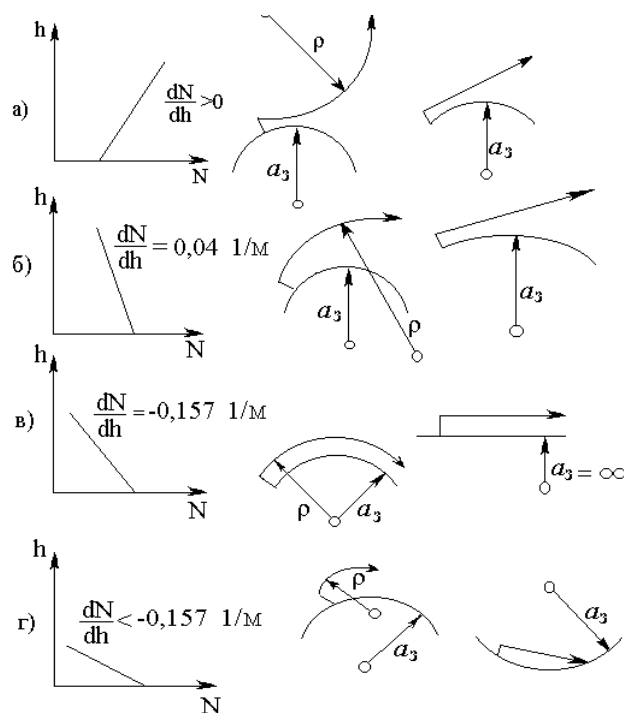


Рис.4.14

В зависимости от значения градиента индекса преломления тропосферную рефракцию разделяют на отрицательную и положительную, а положительную, в свою очередь, на нормальную, критическую и сверхрефракцию. На рис.4.14 приведены соответствующие им профили индекса преломления и формы трасс (лучей) распространения радиоволн над поверхностью Земли.

Отрицательная рефракция характеризуется тем, что траектория радиоволн обращена выпуклостью вниз (радиус кривизны луча  $\rho < 0$ ). На практике встречается редко. Нормальная рефракция характеризуется  $\rho = 0$ , т.е. имеет место при распространении радиоволн в стандартной нормальной тропосфере. В случае критической рефракции радиус кривизны луча равен радиусу земного шара  $\rho = a_3$  и радиоволны распространяются параллельно земной поверхности. Сверхрефракция возникает при  $\rho < a_3$ , что является условием волноводного распространения радиоволн (рис.4.15).

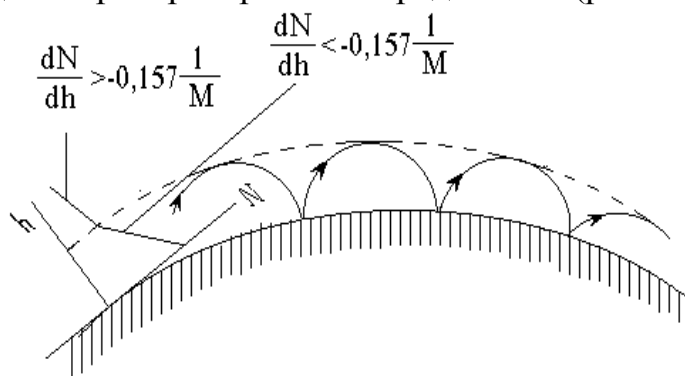


Рис.4.15

Рефракция приводит к изменению дальности прямой видимости (дальность радиогоризонта)  $r_0$ , которая выражается через высоты корреспондентов следующим образом:

$$r_0 = \sqrt{2R}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), \quad (4.5.3)$$

где  $h_1, h_2$  - высота источника и приемника радиоволн,  $R$  - радиус Земли, без учета рефракции  $R = a_3 = 6730$  км, и  $r_0$  выражает расстояние между корреспондентами по прямому лучу, проходящему по касательной к поверхности Земли. При наличии рефракции дальность радиогоризонта зависит от кривизны трассы (луча) и в формуле (4.5.3) используется эквивалентный радиус Земли, определяемый из соотношения

$$R = \frac{a_3}{1 - a_3/\rho}. \quad (4.5.4)$$

Таким образом, условия распространения радиоволн вдоль поверхности Земли определяются соотношением между ее радиусом и радиусом кривизны радиотрассы. Поэтому при практических расчетах чаще всего Землю можно считать плоской, а ее кривизну учитывать в высотном поведении индекса рефракции. Для этой цели используется приведенный индекс рефракции  $M$ , который линейно увеличивается с высотой  $h$  над поверхностью Земли:

$$M = (N + h/a_3) \cdot 10^6. \quad (4.5.5)$$

При отсутствии рефракции прямой луч, вышедший из источника параллельно Земле, отклоняется от нее за счет ее кривизны (рис.4.15). Использование при расчетах модифицированного индекса рефракции  $M$  при  $N=0$  приведет к такому же отклонению луча по мере распространения вдоль плоской поверхности Земли.

Рассмотрим изменение амплитуды радиоволн по мере изменения расстояния между источником и приемником излучения. Если в качестве источника радиоволн используется элементарный излучатель с широкой диаграммой направленности, то, начиная с малых расстояний, излучение будет иметь сферическую расходящуюся амплитуду волнового поля будет убывать с расстоянием по закону  $1/R$  (см. ч. 1 настоящего курса). Здесь  $R^2 = r^2 + z^2$  - расстояние между корреспондентами, которое выражается через суммарную высоту источника и приемника  $z = h_1 + h_2$ , и расстояние вдоль поверхности Земли  $r$  (рис.4.16).

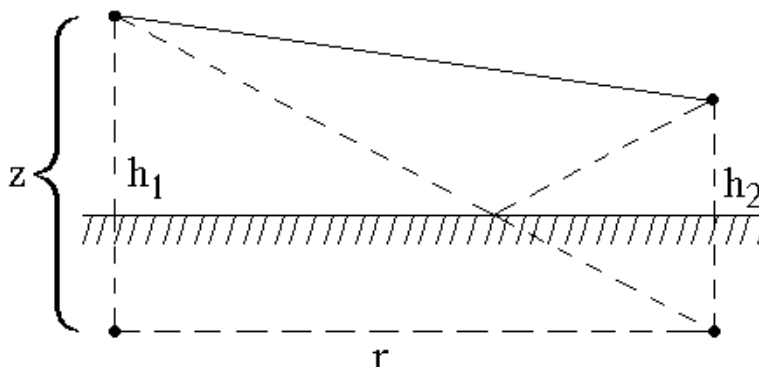


Рис.4.16

Поэтому пространственное поведение волнового поля  $U(r, z)$  в общем случае описывается формулой

$$U(r, z) = \frac{e^{ikR}}{R} W(r, z). \quad (4.5.6)$$

Здесь  $W(r, z)$  называется функцией ослабления и является медленно изменяющейся функцией координат. В практических расчетах функция ослабления определяется, как правило, двумя факторами: электрическими свойствами земной поверхности и рефракцией в земной атмосфере. Со свойствами поверхности связаны потери при отражении от нее радиоволн, а рефракция меняет угловую расходимость лучей и, соответственно, пространственное убывание волнового поля. Рефракция сказывается на больших расстояниях, порядка дальности радиогоризонта, и в пределах прямой видимости ее можно не учитывать, считая все лучи, по которым распространяются радиоволны, прямыми.

Электрические свойства Земной поверхности задаются в виде значения ее электрического импеданса  $Z_3 = 1/\sqrt{\varepsilon_3}$ , где  $\varepsilon_3 = \varepsilon + i4\pi\sigma/\omega$  - комплексная диэлектрическая проницаемость земной поверхности, учитывающая ее проводимость и зависящая от частоты излучения. Поскольку проводимость почвы (водной поверхности) достаточно высока, в большинстве практических случаев можно считать  $Z_3 \ll 1$ . Тогда, в пренебрежение рефракцией, для функции ослабления используется простое выражение

$$W(r, z) = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + Z_3}, \quad (4.5.7)$$

где  $\cos \theta = z/r$  - определяет угол падения волны на поверхность Земли (рис.4.16). Учитывая (4.5.6), пространственное поведение волнового поля описывается отражательной формулой

$$U(r, z) = \frac{e^{ikR}}{R} \left( 1 + \frac{\cos \theta - Z_3}{\cos \theta + Z_3} \right) = \frac{e^{ikR}}{R} (1 + F). \quad (4.5.8)$$

То есть сигнал в приемнике радиоволн представляет собой сумму волны, поступившей непосредственно от излучателя, и волны, отраженной от поверхности Земли с коэффициентом отражения  $F$ . Коэффициент отражения  $F$  зависит от угла падения и электрических свойств поверхности. Если поверхность идеально проводящая:  $Z_3 = 0$  ( $\varepsilon = \infty$ ), то  $F = 1$ .

Формула (4.5.8) может использоваться для достаточно больших длин радиоволн и малой высоты  $h_1$  или  $h_2$  одного из корреспондентов, когда разность расстояний, проходимых волной по прямому лучу и лучу, отраженному от поверхности Земли, составляет меньше длины волны. Для СВЧ и УК радиоволн обычно приходится учитывать, что прямой и отраженный сигналы поступают в приемник не синфазно, это приводит к их интерференции. Окончательно отражательную формулу можно использовать в виде

$$U(r, z) = \frac{e^{ikR}}{R} (1 + F \cos \Delta\varphi), \quad (4.5.9)$$

где  $\Delta\varphi = L/\lambda$ ,  $L$  - длина волны излучения и  $\lambda$  - разность длин прямого и отраженного луча. При расчетах в этом случае может быть учтена рефракция, которая влияет на величину  $L$ . Для вычисления разности фаз  $\Delta\varphi$  при произвольном высотном профиле индекса рефракции атмосферы  $N$  необходимо пользоваться формулами геометрической оптики (см. ч. 1 настоящего курса).

#### 4.6. Излучение и прием акустических волн

Акустические волны частотой ниже 16 Гц принято называть инфразвуком, 16 Гц - 20 КГц - звуком, 20 КГц -  $10^9$  Гц - ультразвуком, выше  $10^9$  - гиперзвуком. Акустические волны обладают слабой дисперсией, то есть скорость звука мало меняется с частотой. В приложении приведены таблицы скоростей звука в жидкостях, газах и твердых телах, которые позволяют рассчитать длины акустических волн.

Наиболее широкое распространение в качестве источников и приемников акустических волн получили *электроакустические преобразователи* (ЭП) - устройства для преобразования электрической энергии в акустическую и наоборот, энергии упругих волн - в электрическую - практически во всех перечисленных диапазонах. Звуковое поле, создаваемое излучателем, сильно зависит от его формы и вида колебаний, а также от частоты, определяющей соотношение между размерами излучателя и длиной волны излучаемых им акустических волн. Для излучателей, размеры которых гораздо больше длины волны, давление  $p$  и колебательная скорость частиц среды  $v$  на поверхности излучателя синфазны и для них выполняется соотношение  $p/v = \rho c$ , где  $Z = \rho c$  - акустическое сопротивление или импеданс среды, который определяется как произведение плотности на скорость звука. Для плоской монохроматической волны акустическая интенсивность (удельная мощность на единицу площади) задается соотношением

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 = \frac{P_0^2}{2 \rho_0 c} = \frac{1}{2} \rho c v_0^2. \quad (4.6.1)$$

Из (4.6.1) следует, что интенсивность излучения определяется плотностью кинетической энергии частиц среды  $\rho v^2/2$ , умноженной на скорость акустической волны. В случае, когда давление и колебательная скорость в излучаемой акустической волне не синфазны (а это происходит в той или иной степени всегда из-за конечных размеров излучателя), импеданс  $Z$  становится комплексной величиной, и удельная мощность излучения в этом случае рассчитывается по формуле

$$W = \frac{1}{2} Z v_0^2, \quad (4.6.2)$$

$v_0$  - амплитуда колебательной скорости на излучающей поверхности. Для элементарного акустического излучателя - пульсирующей сферы радиуса  $a$  - удельный акустический импеданс

$$Z = \frac{P}{v} \Big|_{z=a} = -\frac{ipcka}{1+(ka)^2} + \frac{\rho c(ka)^2}{1+(ka)^2}. \quad (4.6.3)$$

Здесь  $k = 2\pi/\nu$  - волновое число излучения. Действительная часть и абсолютная величина мнимой части, рассчитанные по формуле (4.6.3) показаны на рис.4.17.

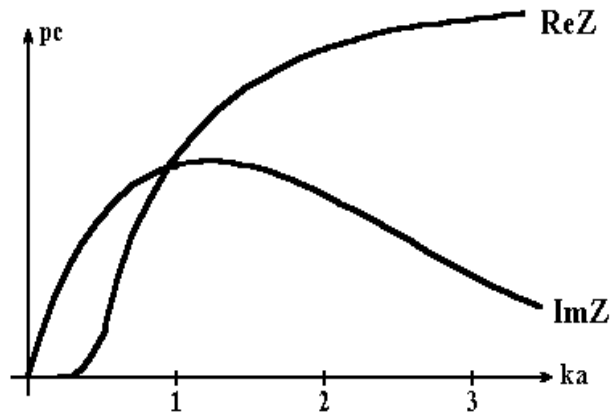


Рис.4.17

При  $ka \ll 1$ , то есть при малых по сравнению с длиной волны размерах излучателя,  $\text{Re}Z = \rho c(ka)^2$ . Для плоского поршня радиуса  $a$ , который колеблется в жестком экране, при условии  $ka \ll 1$ ,  $\text{Re}Z = \rho c(ka)^2/2$ , а при  $ka \gg 1$  он создает почти плоскую волну,  $Z \sim \rho c$ , и для удельной излучаемой мощности выполняется соотношение (4.6.1).

Для возбуждения и приема акустических колебаний звуковых и ультразвуковых частот в воздушной среде чаще всего используются *электродинамические преобразователи*. Основой конструкции таких преобразователей является помещенный в магнитное поле проводник (в виде витка или катушки), по которому протекает переменный ток. Если электродинамический преобразователь используется для излучения звука, то его действие основано на электродинамическом эффекте - возникновении силы, действующей на проводник с током в магнитном поле. Широкополосные излучатели выполняются в виде звуковой катушки из нескольких десятков витков, помещенной в радиальный зазор магнита и связанной с бумажным диффузором (в конусных громкоговорителях) или с металлической мембраной (в рупорных громкоговорителях). Действие электродинамических приемников звука основано на явлении электромагнитной индукции: при движении в магнитном поле в проводнике возникает ток, пропорциональный скорости изменения магнитного потока. В таких приемниках звуковая катушка, помещенная в магнитное поле, соединяется с принимающей звук диафрагмой. Эффективность электродинамического преобразования может характеризоваться коэффициентом электромеханической трансформации

$$n = \frac{F}{i} \Big|_{v=0} = \frac{U}{v} \Big|_{i=0} = BL, \quad (4.6.4)$$

где  $U$  - напряжение на преобразователе,  $B$  - индукция в зазоре магнитной цепи,  $L$  - длина проводника,  $F$  - сила, действующая на замороженную ( $v=0$ ) механическую систему при протекании по проводнику тока  $i$ . Электроакустические преобразователи, работающие в режиме приема звуковых колебаний, характеризуются еще и чувствительностью  $\gamma = v/P$  в режиме холостого хода (при отсутствии электрической нагрузки). Здесь  $P$  - давление на главной оси диаграммы направленности преобразователя на определенном расстоянии от него (для воздушных микрофонов калибровочное расстояние - 1м).

Как правило, анализ работы электроакустического преобразователя удается свести к расчету эквивалентной электромеханической схемы.

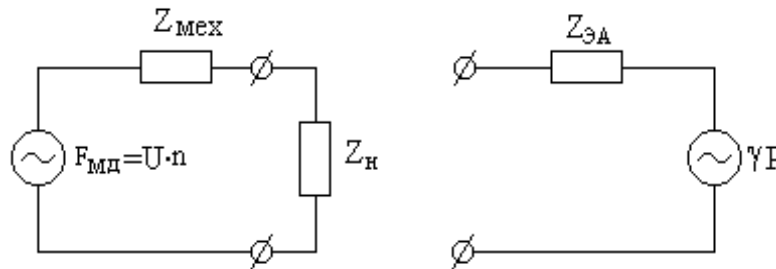


Рис.4.18

На рис.4.18 показаны упрощенные эквивалентные схемы приемника и излучателя акустических волн. Здесь  $Z_{ЭА}$  - внутреннее сопротивление приемника,  $F$  - механодвижущая сила,  $Z_н$  - акустический импеданс излучателя,  $Z_{мех}$  - внутреннее механическое сопротивление излучателя:

$$|Z_{мех}| = r_{мн} \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} + \frac{f_0}{f} \right)}. \quad (4.6.5)$$

Здесь  $Q$  - добротность механической системы,  $f_0$  - ее резонансная частота,  $r_{мн}$  - активное механическое сопротивление излучателя (трение).

Кроме диаграммы направленности и частотной характеристики электроакустические излучатели характеризуются максимальной излучаемой мощностью и КПД - часть электрической энергии, которая преобразуется в акустическую энергию. Электродинамические преобразователи, которые применяются для излучения звука в газовые среды на частотах от десятков Гц до десятков кГц имеют КПД около 10% и мощность порядка десятков Вт.

Для возбуждения и приема ультразвуковых волн в жидких и твердых средах чаще всего используются пьезоэлектрические преобразователи. Система уравнений, связывающая электрические и механические величины в пьезоэлектриках в простейшем одномерном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= cS - eE; \\ D &= eS + \varepsilon E, \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

где  $S = dU/dX$  - деформация,  $\sigma$  - упругое напряжение,  $E$  - напряженность электрического поля и  $D$  - электрическая индукция,  $\varepsilon$  - диэлектрическая

проницаемость и  $e$  - пьезоэлектрическая константа, определяющая свойства пьезоэлектрика,  $c$  - модуль упругости. Если  $e=0$ , то система (4.6.6) вырождается в обычные уравнения, описывающие диэлектрические свойства среды и закон Гука. Из (4.6.6) следует, что возникающие в пьезоэлектрике механические деформации сопровождаются образованием электрических полей, и наоборот, при приложении электрического поля возникают механические деформации. Используя (4.6.6) при выводе волнового уравнения для упругих волн в пьезоэлектрике (см. разд. 3.1), можно получить выражение для скорости звука  $v$  :

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c \left( 1 + \frac{e^2}{c\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad v^2 = \frac{c}{\rho} \left( 1 + \frac{e^2}{c\varepsilon} \right), \quad (4.6.7)$$

$\rho$  - плотность. Из (4.6.7) видно, что наличие пьезоэффекта повышает жесткость пьезоэлектрика, увеличивая фазовую скорость звука на величину порядка  $K^2 = \frac{e^2}{c\varepsilon}$ . Эта величина носит название коэффициента электромеханической связи пьезоэлектрика и даже для сильных пьезоэлектриков (пьезокерамика, ниобат лития -  $\text{LiNbO}_3$ )  $K < 0,5$ . Наиболее распространенным пьезокристаллом является кварц ( $\text{SiO}_2$ ).

Простейший пьезоэлектрический преобразователь представляет собой пьезоэлектрическую пластину, на которую с двух сторон нанесены тонкие металлические электроды. При приложении к электродам переменного электрического напряжения в пластине за счет пьезоэффекта возникают упругие колебания. Электрическое поле, направленное нормально к электродам, в зависимости от пьезосвойств кристалла может вызывать как продольные, так и поперечные деформации ( $U_L, U_s$ , рис.4.19).

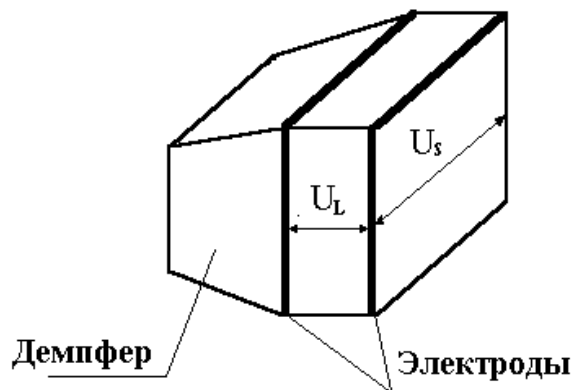


Рис.4.19

Для подавления излучения в противоположном направлении и повышения эффективности преобразования пьезопластина крепится на специальном демпфере, обладающем соответствующим акустическим сопротивлением (импедансом). Для эффективной работы преобразователя необходимо, чтобы максимальная амплитуда механических колебаний

достигалась на краях пьезопластины. При этом смещения частиц на противоположных краях пластины должны иметь разные знаки в соответствии с полярностью электрического напряжения. Эти условия выполняются тогда, когда в пластине устанавливаются стоячие упругие волны, а частота колебаний  $f$  и толщина пластины  $L$  удовлетворяют условиям

$$L = \frac{\lambda}{2}(2n+1); \quad f = \frac{v(2n+1)}{2L}, \quad (4.6.8)$$

где  $\lambda = v/f$  - длина волны,  $v$  - скорость поперечной или продольной волны в пьезоматериале. На рис.4.20 приведено мгновенное распределение смещений частиц по толщине пьезокристалла.

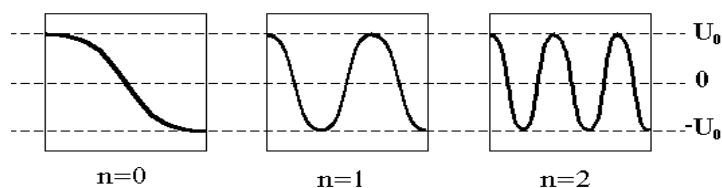


Рис.4.20

Таким образом, работа пьезоэлектрического преобразователя носит резонансный характер и максимальная эффективность преобразования достигается при  $n = 0$ .

Эффективность работы пьезоэлектрического преобразователя оценивается, как правило, коэффициентом взаимного преобразования акустической  $W_{AK}$  электрической  $W_{э}$  энергии, дБ:

$$K = \frac{W_{AK}}{W_{э}}. \quad (4.6.9)$$

В диапазоне ультразвуковых частот 1-50 МГц, который чаще всего используется в жидкостях и твердых телах на практике, величина  $K$  для разного вида пьезопреобразователей меняется от единиц до нескольких десятков дБ.

## Глава 5. Волновая диагностика объектов и сред

### 5.1. Классификация волновых методов диагностики

С развитием современной техники волны различной природы и диапазонов - радио, оптические, ультразвуковые - находят все более широкое применение для получения информации о свойствах различных сред и объектов. Волновые методы и устройства лежат в основе радиолокации, ультразвуковой и оптической спектроскопии, ультразвуковой медицинской диагностики, радиометрии, неразрушающего контроля (дефектоскопии) и т.д. Работа устройств и систем волновой диагностики



(зондирования) может быть основана на рассеянии (отражении) волн, их затухании, рефракции, измерении скорости их распространения, измерении частоты и интенсивности волн, излучаемых элементами объекта или среды. Все перечисленные эффекты в той или иной степени присущи волнам любой природы при распространении в любой среде. Поэтому, если метод диагностики основан на одном из таких эффектов, необходимо либо учитывать остальные особенности распространения волн, либо создавать условия, когда некоторыми из них можно пренебречь.

В силу указанных причин и многообразия волновых методов их строгой единой классификации не существует. Приведем несколько основных признаков, которыми можно характеризовать волновые методы и устройства:

1. Физическая природа и диапазон волн, которые используются для получения информации о среде или объекте. Методы, использующие электромагнитное излучение, можно разделить на рентгеновские, оптические, СВЧ и т.д., акустические методы - на гиперзвуковые, ультразвуковые, звуковые и т.д.

В последние годы интенсивно развиваются смешанные методы зондирования, использующие волны различной природы:

**ОПТИКОАКУСТИЧЕСКИЕ** методы основаны на возбуждении звука в среде лазерным излучением. Используются тогда, когда традиционные акустические излучатели не позволяют создать акустический сигнал нужных параметров в необходимой пространственной области.

**АКУСТООПТИЧЕСКИЕ** методы основаны на модуляции (дифракции, рассеянии) оптического излучения на акустических волнах. В этом случае оптическое излучение служит для регистрации упругих колебаний вместо акустических приемников.

**РАДИОАКУСТИЧЕСКИЙ** метод основан на модуляции упругими волнами электромагнитного излучения радиодиапазона. Применяется, в частности, для зондирования земной атмосферы.

Список смешанных методов может быть продолжен. Поскольку они основаны на взаимном преобразовании сигналов различной природы, некоторые из них используются для аналоговой обработки информации. Наиболее широкое распространение в этой области получили **АКУСТОЭЛЕКТРОННЫЕ** устройства, в основе которых лежит распространение ультразвука в пьезоэлектрических материалах. Возникающие при этом электрические поля могут взаимодействовать с электронами проводимости, если пьезоэлектрик обладает проводящими свойствами (пьезополупроводник), или взаимодействовать с материалами, находящимися в контакте с пьезоэлектриком.

2. Волновые методы диагностики и зондирования разделяются на **АКТИВНЫЕ** и **ПАССИВНЫЕ**. Активные методы предусматривают излучение в среду или облучение объекта волновым сигналом с заданными параметрами с последующим приемом и обработкой результирующего сигнала, прошедшего через среду или объект (рассеянного, отраженного,

диссипирующего и т.д.). Пассивные методы не требуют излучающих устройств и основаны на анализе собственного излучения среды или объекта.

3. Названные выше методы волновой диагностики могут различаться по способу обработки сигналов. Обычно разделяют **ВРЕМЕННЫЕ** и **СПЕКТРАЛЬНЫЕ** методы регистрации и анализа волновых сигналов. Наиболее распространенным из временных методов является активное импульсное зондирование, когда в среду излучается волновой импульс, а информация о среде или объекте может быть получена по времени его прихода в точку приема и искажению его формы. Спектральные методы основаны на том, что с частотой волны меняются и все характеристики ее распространения в среде или рассеяния на объекте. Поэтому, зондируя (при активном методе) среду или объект сигналами разных частот, можно получить информацию об их свойствах. Большинство пассивных методов основано на спектральном анализе волновых сигналов. Сразу необходимо уточнить, что при таком разделении временные и спектральные измерения подразумевают параметры волн, распространяющихся в среде, а не математический способ преобразования сигналов после их приема. Спектральная обработка, преобразование Фурье, частотная фильтрация повсеместно применяются и при временных измерениях. Например, при импульсном зондировании, анализ формы принимаемого импульса практически невозможен без его спектрального преобразования.

## ***5.2. Импульсные измерения***

Импульсное зондирование используется для электромагнитных и акустических волн практически всех диапазонов. В радиодиапазоне наиболее характерным примером импульсных измерений является радиолокация. Ультразвуковые импульсные измерения широко используются в промышленной дефектоскопии и медицинской диагностике. С возникновением лазеров, работающих в режиме модулированной добротности и генерирующих короткие импульсы в оптическом диапазоне, импульсный метод все более широко применяется при оптическом зондировании.

На рис.5.1 приведена принципиальная схема импульсного зондирования. Для радио - и акустических волн зондирующий сигнал, как правило, представляет собой радиоимпульс, т.е. синусоидальный сигнал фиксированной амплитуды и длительности. Частота сигнала, определяющая длину волны излучения, называется несущей частотой или частотой заполнения. Радиоимпульс подается на излучающее устройство (для ЭМ волн - антенна, для упругих волн - акустический излучатель). Для оптического диапазона роль генератора ( $\Gamma$ ) импульсов и излучателя играет лазер, работающий в импульсном режиме.

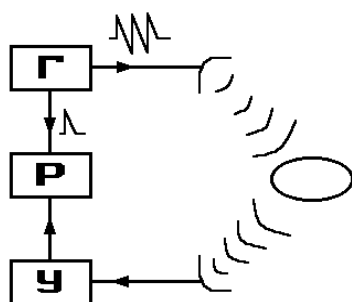


Рис.5.1.

Волновой импульс после распространения в среде поступает в приемное устройство (антенна, микрофон, оптический приемник) и преобразуется в электрический сигнал, который после усиления (У) подается на вход регистрирующего (Р) устройства (осциллограф, аналого-цифровой преобразователь и компьютер). Для определения временного положения регистрируемого импульса относительно момента его излучения в среду в излучающем тракте вместе с зондирующим импульсом формируется импульс синхронизации, который подается непосредственно в приемный тракт (например, для запуска развертки осциллографа или запуска АЦП).

Наиболее широко распространен импульсный радиолокационный или эхо-метод зондирования, основанный на отражении волнового импульса от объекта или неоднородности среды. В этом случае излучатель и приемник излучения в схеме, представленной на рис.5.1, совмещены (приемно-передающая антенна или акустический преобразователь) или расположены достаточно близко друг от друга. Временная задержка между зондирующим и принимаемым импульсом определяется скоростью распространения волны в среде и расстоянием до отражающего объекта, а амплитуда результирующего импульса - его отражающими свойствами. Посылка зондирующего импульса осуществляется периодически, что позволяет получать информацию о временных изменениях среды или объекта и, при изменении направления зондирования, реализовать обзор (сканирование) некоторой пространственной области.

Глубина (дальность) импульсного зондирования определяется уменьшением амплитуды волнового импульса при его распространении. Такое уменьшение происходит вследствие затухания волны, ее рассеянии на неоднородностях, угловой расходимости излучения. Поскольку затухание и рассеяние в среде растет с увеличением несущей частоты волны, размеры пространственной области зондирования в этом случае уменьшаются. Дальность зондирования может быть увеличена за счет увеличения интенсивности импульсного излучения и чувствительности приемника, уменьшения диаграммы направленности излучателя. Однако для фиксированной несущей частоты эти характеристики ограничены и определяют ДИНАМИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН зондирующего устройства, -

отношение верхнего и нижнего пределов амплитуды импульсного волнового сигнала.

Важнейшей характеристикой является РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ импульсных устройств, - минимальные размеры объекта или неоднородности, которые могут быть зарегистрированы. Как правило, разрешение вдоль направления зондирования определяется длительностью импульса: чем меньше длительность зондирующего сигнала, тем более мелкие неоднородности можно различить и тем выше разрешающая способность. Поперечное разрешение увеличивается с уменьшением ширины волнового пучка, которая связана с апертурой и диаграммой направленности излучателя. В радиоимпульсе должно вмещаться хотя бы несколько периодов волны несущей частоты, поэтому продольная разрешающая способность импульсного устройства на фиксированной частоте ограничена. Поперечные размеры волнового пучка также ограничены частотой волнового сигнала.

Таким образом, для увеличения разрешающей способности импульсного устройства необходимо увеличивать частоту и, соответственно, уменьшать длину волны излучения. При этом увеличивается затухание и рассеяние сигнала, что приводит к уменьшению дальности зондирования. Это справедливо для волновой диагностики любой физической природы и составляет основную принципиальную проблему при технических разработках.

Диапазон частот зависит от назначения импульсной системы зондирования. В радиодиапазоне радиолокационные станции работают на частотах от единиц МГц (коротковолновой, дециметровый диапазон) до десятков ГГц (сантиметровый диапазон). Гидролокаторы, излучающие звук в водную среду, имеют рабочие частоты от единиц Гц до десятков кГц. В ультразвуковых импульсных устройствах, как правило, несущая частота составляет от единиц до десятков МГц. Импульсы именно таких частот составляют основу ультразвуковой дефектоскопии и ультразвуковой медицинской диагностики.

### ***5.3. Доплеровские измерения***

Если излучатель и приемник волновых сигналов двигаются относительно друг друга, или объект, рассеивающий волновой сигнал, находится относительно их в движении, то частота принимаемого сигнала отличается от излучаемой частоты на величину, которая зависит от относительных скоростей источника, приемника и рассеивающего объекта. Это явление носит название ЭФФЕКТА ДОПЛера, а величина называется доплеровским частотным сдвигом. Поскольку измерение доплеровского сдвига позволяет получить информацию о скорости облучаемого объекта, эффект Доплера широко используется при волновой диагностике.

При движении источника измененная частота  $\omega$  волны связана с частотой излучения формулой

$$\omega = \omega_0 \frac{1}{1 - \frac{v_{II}}{c} \cos \theta}, \quad (5.1)$$

где  $v_{II}$  - скорость источника,  $c$  - скорость волны в среде,  $\theta$  - угол между направлением скорости источника и направлением от источника к приемнику. При движении приемника измененная частота

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{v_{II}}{c} \cos \theta_1 \right), \quad (5.2)$$

где  $v_{II}$  - скорость приемника,  $\theta_1$  - угол между скоростью приемника и направлением от источника к приемнику. При приеме неподвижным приемником волны, рассеянной на движущемся объекте, измененная частота рассеянной волны

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_1}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta_2}, \quad (5.3)$$

где  $v$  - скорость объекта,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  - углы между направлением скорости объекта и, соответственно, направлением падающей и рассеянной от объекта волны. Формулы, описывающие доплеровский сдвиг частоты, используются в полной форме, соответствующей (5.1–5.3) только для акустических волн. Для электромагнитных волн используется формула (5.1) как для случая движущегося источника, так и для движущегося приемника. Величина в этом случае заменяется на относительную скорость источника и приемника  $v$ . Это связано с неизменностью величины скорости электромагнитных волн. Кроме того, скорость электромагнитных волн превышает скорость звука в 105 раз, поэтому соотношение  $\frac{v}{c} \ll 1$  выполняется для электромагнитных волн при любых условиях. Используя малое значение этого параметра в формуле (5.1), из нее легко можно получить формулу (5.2).

На практике доплеровские измерения чаще всего используются в радиолокационном варианте, то есть измеряется доплеровский сдвиг волны, рассеянной на движущемся объекте, когда источник и приемник совмещены в пространстве. В этом случае пользуются следующей формулой для величины доплеровского сдвига несущей частоты:

$$\Delta\omega = 2\omega_0 \frac{v}{c} \cos \theta. \quad (5.4)$$

Если скорость движения объекта меньше скорости звука, то формула (5.4) справедлива и для акустических волн.

Наиболее простым и характерным примером использования доплеровских измерений является радар автоинспекции, служащий для измерения скорости автомобилей. Принципиальная схема его устройства приведена на рис. 5.2. Непрерывный сигнал несущей частоты, составляющей единицы ГГц (дециметровый или сантиметровый диапазон), формируется генератором на

диоду Ганна (генератор высокой частоты - ГВ) и подается на приемно-передающую антенну (рупорную).

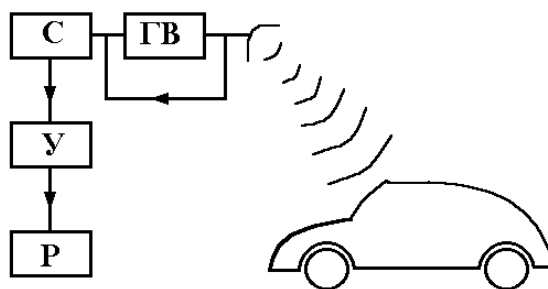


Рис.5.2

Небольшая часть энергии излучаемого сигнала через специальный ответвитель подается на вход смесителя (С). Туда же подается и принимаемый сигнал, отраженный от движущегося объекта (автомобиля) и отличающийся по частоте на величину доплеровского сдвига. Смеситель представляет собой элемент с нелинейной вольтамперной характеристикой (диод), поэтому на его выходе возникает напряжение, пропорциональное произведению излучаемого и принимаемого сигналов, в частности синусоидальный сигнал на разностной частоте, соответствующей доплеровскому сдвигу (десятки или сотни Гц). Такое выделение разностной частоты принято называть гетеродинированием. Выделенный сигнал поступает на усилитель низкой частоты (У) и подается на регистрирующее устройство (Р). На индикаторе регистрирующего устройства высвечивается величина доплеровского сдвига сигнала, пропорциональная скорости движения объекта.

Приведенная схема доплеровских измерений позволяет получить только частотный сдвиг, то есть измерить скорость облучаемого объекта. Поскольку радар излучает сигнал в непрерывном режиме, в фазе регистрируемого сигнала разностной частоты не содержится информации о дальности до объекта. На практике, для получения информации о положении и скорости объекта, обычно используется импульсно-доплеровский метод зондирования, совмещающий импульсную и доплеровскую схему измерений. При этом пространственное положение объекта определяется по времени прихода в приемник зондирующего импульса, а его скорость - по доплеровскому сдвигу его частоты заполнения. Принцип и технические методы регистрации этих величин остаются прежними. Импульсные доплеровские измерения широко используются в радиолокации и медицинской ультразвуковой диагностике. Доплеровский сдвиг частоты возникает не только при поступательном, но и при колебательном движении облучаемого объекта, поэтому доплеровские измерения находят широкое применение в промышленных устройствах для регистрации и измерения вибраций.

#### 5.4. Спектральные измерения

Как уже отмечалось выше, спектральные методы волновой диагностики (или спектроскопия) основаны на том факте, что с изменением частоты меняются все характеристики распространения волны в среде (при пассивном методе измерений - характеристики излучения среды или объекта). Спектральные измерения используются во всех диапазонах электромагнитных и акустических волн, как правило, - для определения структуры или свойств среды. Круг спектральных методов измерений настолько широк, что с трудом поддается единой классификации. Общим для всех методов остается только то, что в приемной аппаратуре анализируются соотношения амплитуд или интенсивностей отдельных частотных составляющих волн (спектры).

Анализ спектра волнового сигнала может осуществляться в приемном тракте различной последовательностью:

1. Волновой сигнал всего диапазона частот попадает через широкополосный приемник в регистрирующую аппаратуру, где и реализуется его разложение на спектральные составляющие.

2. Прием волн производится узкополосным резонансным преобразователем с одновременным измерением амплитуды сигнала. В этом случае спектр сигнала может быть получен при последовательном изменении резонансной частоты приемника в необходимом диапазоне, то есть путем частотного сканирования.

В традиционной оптической спектроскопии исследование спектров рассеяния, поглощения, излучения позволяет получить информацию об уровнях энергии атомов, молекул и образованных из них макроскопических систем. Поскольку частота электромагнитных волн оптического диапазона очень высока, непосредственные частотные или фазовые измерения практически невыполнимы. В этом случае спектральный анализ осуществляется путем пространственного разделения волн различных частот. Для этого используются явления дисперсии (преломляющие призмы) или дифракции (дифракционные решетки), которые меняют направление распространения волн в зависимости от их частоты. После этого определить интенсивность (спектральную плотность) отдельных частотных составляющих можно очень многими, достаточно простыми и эффективными способами.

Для электромагнитных волн радиодиапазона и акустических волн, когда их диапазон позволяет осуществлять непосредственные фазовые и частотные измерения, реализуются обе названные последовательности спектральной обработки. С развитием вычислительной техники стали широко использоваться цифровые методы, когда сигнал записывается, оцифровывается и далее анализируется при использовании спектрального преобразования Фурье. Для аналоговой спектральной обработки чаще всего используется принцип гетеродинамирования, который позволяет осуществлять автоматическое частотное сканирование и выделение частотных составляющих сигнала.

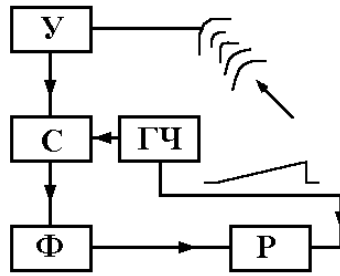


Рис.5.3

На рис 5.3 приведена схема использования гетеродирования для анализа спектра сигнала. Пусть в приемный тракт поступает широкополосный сигнал, частота  $f$  которого меняется в диапазоне  $\Delta f = f_2 - f_1$ . Через широкополосный усилитель (У) сигнал подается на вход смесителя (С). В качестве гетеродина здесь используется генератор линейно-частотно-модулированного (ЛЧМ) сигнала (Г), на выходе которого формируется синусоидальный сигнал постоянной амплитуды, частота которого меняется во времени по линейному закону  $F(t) = f_0 + gt$ . Длительность ЛЧМ сигнала  $T$  соответствует частотному диапазону анализируемого сигнала:  $gT = \Delta f$ . На выходе смесителя возникает сигнал разностной частоты  $f - F(t)$ , который подается на узкополосный фильтр (Ф), настроенный на частоту  $f_0 - f_1$ . Поскольку амплитуда сигнала разностной частоты на выходе смесителя пропорциональна произведению входных сигналов, а амплитуда ЛЧМ сигнала постоянна, то амплитуда сигнала на выходе фильтра меняется во времени в соответствии с изменением амплитуды частотных составляющих анализируемого сигнала при частотном сканировании в диапазоне  $\Delta f$ . Если в качестве регистрирующего устройства (Р) используется электронно-лучевая трубка осциллографа, то его развертка должна запускаться синхронизованным с ЛЧМ-сигналом пилообразным напряжением с длительностью  $T$ . Тогда на экране осциллографа регистрируется спектральная плотность входного сигнала в диапазоне, соответствующем пределам изменения частоты ЛЧМ-сигнала.

Большое количество спектральных методов основано на явлении волнового резонанса. Если объект или неоднородность среды имеют конечные размеры, то при прохождении (отражении от них) волны определенной частоты они приобретают свойства открытого резонатора, то есть резко меняют характеристики рассеяния (поглощения, пропускания) излучения. Это справедливо для волн любой природы и диапазона. Характерным примером таких измерений может служить резонансный метод в ультразвуковой промышленной дефектоскопии. В резонансном толщиномере - дефектоскопе (рис.5.4) ультразвуковой преобразователь (УП) излучает в изделие акустические волны с переменной частотой генератора частотно-модулированных колебаний (ГЧ).



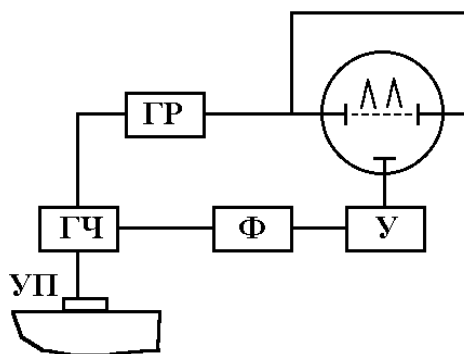


Рис.5.4

В момент резонанса, когда по толщине изделия укладывается целое число полувольт, импеданс преобразователя резко уменьшается, поскольку его реактивная составляющая обращается в ноль. В этот момент, кроме увеличения амплитуды упругих колебаний в изделии, резко увеличивается ток в выходной цепи генератора, и этот сигнал, через фильтр (Ф) и усилитель (У) подается на регистрирующее устройство. Если регистрирующим устройством служит осциллограф, то его развертка запускается генератором развертки (ГР), синхронизованным с ГЧ. Таким образом измеряются значения резонансных частот, амплитуда и форма резонансных пиков.

На примере резонансного дефектоскопа можно проанализировать возможности спектральных измерений:

1. Если известна скорость акустических волн в образце, можно определить его толщину.

2. При известной толщине образца можно определить скорость звука, а значит, упругие свойства материала.

3. Если внутри образца (изделия) имеются дефекты или неоднородности, изменятся не только резонансные частоты, но и амплитуда и форма резонансных пиков. В зависимости от размеров и свойств дефекта, некоторые резонансные пики вообще могут исчезнуть.

4. Спектральная ширина резонансных кривых характеризует добротность объемного резонатора, которая, в свою очередь, связана с коэффициентом затухания акустических волн. А измерение коэффициента затухания позволяет получить информацию о вязкости и теплопроводности среды.

Здесь названы лишь некоторые возможности конкретного примера спектральных измерений. Дополнительная информация о структуре исследуемого образца может быть получена в спектроскопических исследованиях при изменении внешних условий: давления, температуры и т.д. В таких исследованиях, как правило, измеряются на абсолютные значения параметров, а их приращения, величина которых может быть очень малой. Именно поэтому требования к точности спектральной аппаратуры достаточно высоки. Например, разрешающая способность аппаратуры для измерения приращения скорости звука в биологических средах должна быть не хуже

$10^{-6}$  -  $10^{-7}$  при точности абсолютных измерений скорости ультразвуковых волн не хуже  $10^{-4}$  -  $10^{-5}$ . Точность измерения коэффициента затухания при этом должна быть не менее 2-5% при точности относительных измерений 0,2-0,5%.

Мы рассмотрели пример акустических спектральных измерений, однако основные принципы справедливы и для электромагнитных волн.

### 5.5. Рассеяние волн в неоднородной среде

Выше было показано, как активный метод зондирования позволяет определить скорость и пространственное положение объекта, отражающего волновой сигнал. При этом необходимо принимать во внимание протяженность объекта, а также тот факт, что резные его участки могут иметь разные отражательные свойства. Любая неоднородность среды, в которой распространяется волна, изменяет пространственную структуру волнового поля и может служить источником информации при измерениях.

Из теории волн следует, что неоднородность среды при распространении волны любой природы определяется изменением в пространстве волнового числа или, другими словами, скорости распространения волны. Проиллюстрировать отражение волны от пространственной неоднородности среды проще всего на примере отражения короткого волнового импульса от ступенчатой неоднородности (рис.5.5,*a*).

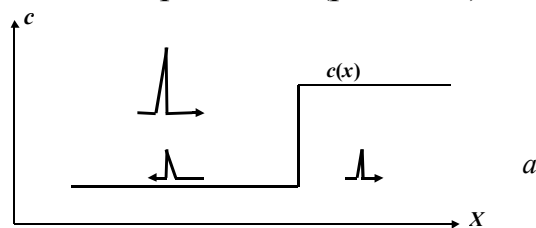


Рис. 5.5

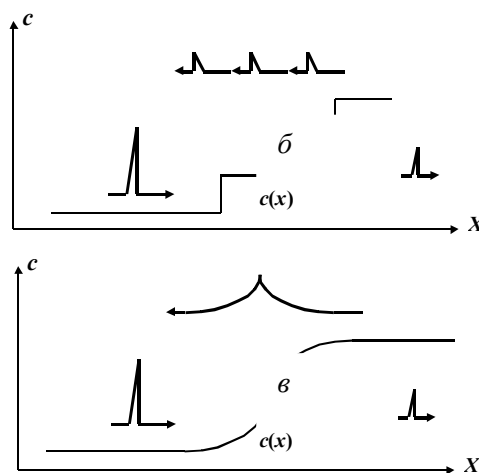


Рис. 5.5

Пусть импульс распространяется вдоль оси  $X$ , и скорость его распространения  $c(x)$  испытывает в некоторой точке скачок  $\Delta c = c_2 - c_1$ . В

теоретической части мы показали, что коэффициент отражения  $R$  гармонической волны на границе сред связан с изменением скорости следующим соотношением:

$$R = \frac{\Delta c}{c_1 + c_2}. \quad (5.5)$$

Показанное на рис.5.5,а скачкообразное изменение скорости и является границей раздела сред с разными акустическими свойствами. Таким образом, коэффициент отражения импульса от ступенчатой неоднородности пропорционален величине скачка  $\Delta c = c_2 - c_1$ . При этом коэффициент прохождения волны (амплитуда прошедшего за неоднородность импульса) составляет

$$W = 1 - R. \quad (5.6)$$

Если неоднородность среды представить в виде нескольких ступенчатых изменений скорости распространения, то отраженный сигнал будет иметь вид соответствующей последовательности импульсов, амплитуда каждого из которых пропорциональна величине отражающего скачка скорости (рис.5.5,б). Здесь необходимо учитывать, что прохождение через каждую неоднородность сопровождается амплитудными потерями в соответствии с (5.6) и амплитуда отраженного от каждой последующей “ступеньки” импульса будет уменьшаться. Кроме того, отраженный от второго скачка импульс при обратном распространении снова отражается от первого скачка и это приводит к возникновению второго импульса, распространяющегося в направлении оси  $X$  и т.д. Таким образом, структура отраженного и прошедшего через неоднородность волнового сигнала оказывается в общем случае очень сложной.

Если представить плавную неоднородность среды в виде бесконечного числа малых ступенчатых изменений скорости, то распространение короткого импульса в виде  $\delta$ - функции даст отраженный сигнал, форма которого будет приблизительно определяться производной скорости в пространстве  $R(x) \rightarrow \frac{\partial c}{\partial x}$  (см. рис.5.5,в). Это будет выполняться в том случае, если в процессе распространения проходящая через неоднородность волна почти не претерпевает изменений, то есть  $R(x) \ll 1$ . В этом случае и вторичные “переотражения” сигнала могут не учитываться, поскольку их амплитуда будет пропорциональна  $R^2$ . Такое приближение чаще всего используется для получения информации при волновом зондировании неоднородных сред и называется *приближением Борна* или *приближением однократного рассеяния*.

Противоположный случай реализуется тогда, когда в формуле (5.5)  $\Delta c \rightarrow c$  и  $R \rightarrow 1$ . Эти условия соответствуют отражению волны от границы раздела сред с разными волновыми свойствами (отражение звука, распространяющегося в воздухе, от твердого препятствия, отражение электромагнитных волн от металлической поверхности и т.д.). Кроме того, коэффициент отражения от границы сред зависит от знака приращения скорости ( $\Delta c \rightarrow -c$ ,  $R \rightarrow -1$ , например, звук отражается от границы твердое тело-воздух при падении на нее со стороны твердого тела или свет отражается от границы стекло-воздух со

стороны стекла). В общем случае эти предельные положительные или отрицательные значения коэффициента отражения волны от неоднородности соответствуют изменению фазы отраженной волны. Из теории волн следует, что коэффициент отражения является комплексной величиной и может быть представлен в виде

$$R_o(\Delta c) = R(\Delta c)e^{i\varphi(\Delta c)}, \quad (5.7)$$

а при  $\Delta c \rightarrow -c$ ,  $R \rightarrow -1$  это выражение можно представить как

$$R_o = -\text{Re} e^{i\varphi} = \text{Re} e^{i(\varphi-\pi)}. \quad (5.8)$$

Таким образом, получение информации о неоднородности среды по форме отраженного сигнала является очень сложной задачей. Прежде всего, зондирующий импульс может быть бесконечно коротким и всегда имеет конечную длительность. Поэтому, если неоднородность имеет размеры меньше его длительности (две “ступеньки” на расстоянии, меньшем пространственной длины импульса на рис.5.5,б то форма импульса искажается. В зависимости от волновых свойств неоднородности (знака производной  $\frac{\partial c}{\partial x}$ ) в соответствии с (5.7) меняется фаза отраженного сигнала, что также приводит к искажению его формы и времени прихода в регистрирующее устройство.

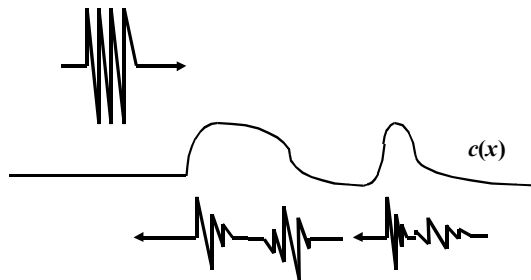


Рис. 5.6

Если в неоднородной среде распространяется конечный импульс с гармоническим заполнением (радиоимпульс), то отраженный сигнал представляет собой квазигармонический сигнал, модулированный по амплитуде и фазе. Соответствующая картина показана на рис.5.6. В практических приложениях такой сигнал чаще всего детектируется, а его амплитудная огибающая служит показателем неоднородности среды. Так устроены радиолокационные системы, гидроакустические радары, приборы для ультразвуковой медицинской диагностики, дефектоскопы. При этом для выделения подвижных объектов и неоднородностей анализируется также фаза (частота) рассеянного сигнала.

## 5.6. Введение в томографию

Слово “томография” происходит от греческого слова “τομοσ” -долька, тонкий срез. Томография - достаточно широкое понятие. С математической точки зрения под томографией подразумевается *численное восстановление функции по ее линейным или плоскостным интегралам*, или, другими словами, *восстановление структуры пространственного объекта по его проекциям*. Для широкого круга читателей этот термин связан с *рентгенодиагностикой*, где используется термин *компьютерная томография (КТ)*. В рентгенодиагностике используется один из многих вариантов томографии - *трансмиссионная КТ*. Тонкий пучок рентгеновских лучей сканирует сечение тела (возможно, под разными углами), изменение интенсивности прошедших через тело лучей фиксируется и обрабатывается на компьютере для восстановления пространственной структуры. Кроме этого типа томографии, аналогичные задачи - *задачи восстановления неоднородности среды по структуре волнового поля (обратные задачи)* - используются в самых разных областях: сейсмологии, океанологии, неразрушающем контроле, ультразвуковой медицинской диагностике и т.д. Эти задачи очень разнообразны и сложны, поэтому мы рассмотрим лишь некоторые основные понятия на простейших примерах.

Прежде всего мы ограничимся задачей на плоскости - когда пространственная структура объекта описывается функцией двух координат, а ее восстановление производится по набору функций (проекций) от одной переменной. Рассмотрим основные особенности такой задачи на примере трансмиссионной томографии.

Пусть плоский пучок рентгеновских лучей с интенсивностью  $I_0$  проходит через объект в виде прямоугольного треугольника (рис.5.7,*a*) в плоскости  $(X,Y)$ . Пусть  $\delta(y)$ - коэффициент затухания излучения в объекте. Интенсивность прошедшего через треугольник излучения в плоскости регистрации имеет зависимость  $I = I(x)$ , поскольку по сечению пучка меняется длина  $L(x)$  прохождения через поглощающую среду. Предположим, что коэффициент затухания в объекте постоянен:  $\delta(y) = \delta_0 = \text{const}$ . Тогда простейшей задачей томографии (обратной задачей) является получение размеров треугольника и значения  $\delta_0$  по функции  $I(x)$ .

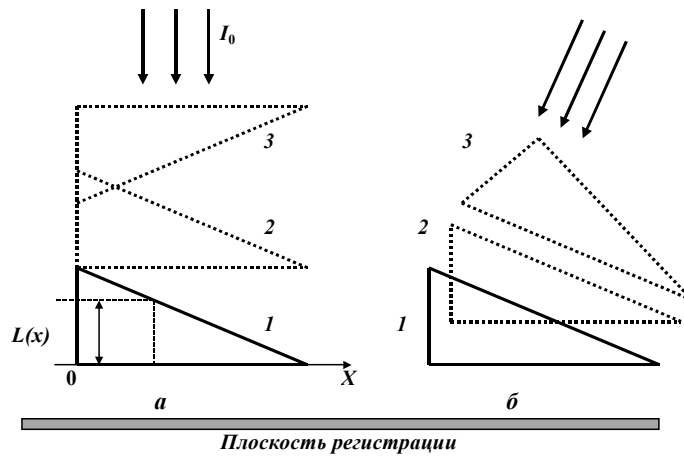


Рис.5.7

При прохождении малого слоя поглощающей среды  $\Delta y$  изменение интенсивности излучения пропорционально толщине этого слоя и коэффициенту затухания

$$\frac{\Delta I}{I} = \delta(y) \Delta y. \quad (5.9)$$

Если проинтегрировать (5.9) по вертикальной координате вдоль каждого из лучей, составляющих поперечное сечение пучка, получим изображение объекта в плоскости регистрации:

$$P(x) = \frac{I(x)}{I_0} = \exp \left\{ - \int_{L(x)} \delta(y) dy \right\}. \quad (5.10)$$

Выражение (2) составляет основу трансмиссионной томографии: по известной функции  $P(x)$  необходимо получить функцию  $\delta(y)$ . При  $\delta(y) = \delta_0 = \text{const}$  интегрирование (5.10) дает

$$\delta_0 L(x) = -\ln P(x). \quad (5.11)$$

Даже в этом простейшем случае решение задачи возможно только при определенных условиях: для получения формы треугольника (функции  $L(x)$ ) необходимо знать значение коэффициента затухания, или наоборот - для нахождения коэффициента затухания необходимо знать форму объекта. Кроме того, если внимательно проанализировать задачу, то окажется, что в данной постановке (на рис.5.7,а) существует бесконечное число треугольных объектов, которые в плоскости регистрации дают одинаковую проекцию  $P(x)$ . Действительно, изображения треугольников 1, 2, 3 на рис.5.7 будут совпадать. При этом объект может вообще не быть треугольником, лишь бы расстояние между его краями менялось по линейному закону  $L(x)$ . Если облучать объект под другим углом, как это показано на рис.5.7 б, то проекция в плоскости регистрации будет другой, однако проблемы с неоднозначностью восстановления объекта останутся.

Таким образом, восстановление объекта в данном случае требует от нас информации об обеих проекциях, полученных под разными углами. При этом

мы должны заранее предположить, что объект является треугольником с прямыми границами и постоянным коэффициентом затухания внутри него. Или - нам потребуется значительно большее число изображений объекта. Следовательно - для решения обратной задачи нам необходима априорная информация (*a priori* - по-латински - “из предшествующего”). Таким свойством обладает абсолютное большинство задач томографии. В математике эти задачи называют *некорректными*. Их основные свойства - *неоднозначность решения*, также тот факт, что *бесконечно малые погрешности в исходных данных могут привести к конечным погрешностям в результате вычислений*. Простой пример - малые изменения коэффициента затухания  $\delta(y)$  в выражении (5.10) за счет интегрирования по лучу  $L(x)$  могут приводить к значительным изменениям изображения в плоскости регистрации  $P(x)$ .

Развитие методов решения обратных задач представляет собой большой раздел современной математической физики и дискретной математики. В практических приложениях такие теоретические исследования позволяют создавать оптимальные *схемы сканирования* для различных видов томографии.

Кроме рассмотренной нами трансмиссионной томографии широкое распространение получила *эмиссионная* томография. Она используется в ядерной медицине, оптической и радиотеплолокации (радиометрии). Отличие эмиссионной томографии состоит в том, что она представляет собой типичный пример пассивных измерений - для восстановления информации об объекте используется его собственное излучение (рентгеновское, оптическое, СВЧ). Например, в ядерной медицине задача состоит в том, чтобы найти пространственное распределение радиоактивного препарата внутри тела по интенсивности излучения, измеряемого вне тела. Как и все задачи пассивного волнового зондирования, такая задача оказывается сложнее рассмотренной выше и в плоском случае вместо выражения (5.10) изображение в плоскости регистрации будет иметь вид

$$I(x) = \int_{L(x)} F(x,a) \exp \left\{ - \int_{L(x,0)}^{L(x,a)} \delta(y) dy \right\} da, \quad (5.12)$$

где  $a$  - текущая координата источника излучения,  $F(x,a)$ -искомая функция пространственной плотности распределения источников,  $L(x,a)$ - описывает каждый луч, вдоль которого распространяется излучение и интегрирование по нему производится до текущей координаты источника  $a$ . В общем случае коэффициент поглощения  $\delta(y)$ - неизвестная функция, которая также требует восстановления. Если считать  $\delta(y)$  пренебрежимо малой величиной, то мы приходим в (4) к линейному интегралу, который ничем не отличается от задачи (5.10).

Еще один вид обратных задач, получивших широкое практическое распространение, - *акустическая (рефракционная) томография (АТ)*. Этот вид томографии отличается тем, что в нем используется приближение геометрической оптики. В таких задачах интегрируется фаза волновых сигналов вдоль лучей (траекторий) распространения волны. Лучи при этом

представляют собой кривые, форма которых зависит от скорости (коэффициента преломления) среды. Этот коэффициент преломления и является искомой величиной, пространственное распределение которой необходимо восстановить. Исходными данными в таких задачах являются временные задержки (фаза) волновых сигналов, распространяющихся вдоль различных лучей, или углы прихода лучей в различные точки пространства. Методы рефракционной томографии получили широкое распространение в сейсмологии (для исследования земной коры), физике атмосферы (для восстановления высотных атмосферных показателей при ее просвечивании в оптическом или радиодиапазоне), океанологии (для восстановления профилей плотности, солености, температуры в глубине Мирового океана по условиям распространения звуковых волн).

Проанализируем возможности рефракционной томографии на примере редкой задачи, которая имеет аналитическое решение и не требует использования сложных численных методов.

Геометрия задачи показана на рис.5.8. Пусть в плоско-слоистую среду в плоскости  $(X,Z)$  при  $z=0$  в верхнюю полуплоскость падает волна под углом  $\theta=\theta_0$ . В нижней полуплоскости показатель преломления постоянен и  $n=n_0$ . В верхней полуплоскости показатель преломления зависит только от вертикальной координаты:  $n=n(z)$  при  $z>0$  (отсюда и происходит термин “плоско-слоистая среда”).

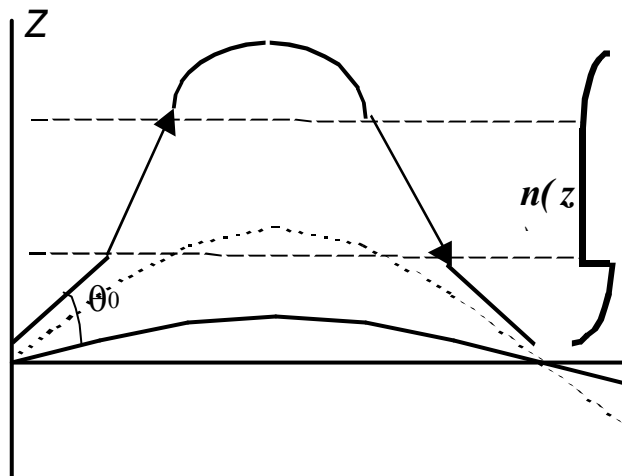


Рис.5.8

Возможный профиль показателя преломления и ход лучей показан на рис.5.8. Если показатель преломления в целом растет при  $z>0$ , то лучи загибаются и возвращаются в плоскость  $z=0$  на некотором расстоянии  $x$ . Глубина проникновения волны в неоднородную среду (верхняя точка траектории луча) зависит как от профиля показателя преломления, так и от начального угла  $\theta_0$ .



В приближении геометрической оптики, которое мы рассматривали в начале настоящей книги, для плоско-слоистой среды уравнение эйконала выражает закон преломления Снеллиуса. Запишем его в следующем виде:

$$n_0 \cos \theta_0 = n(z) \cos \theta(z) = \text{const} . \quad (5.13)$$

Из (5) можно вывести уравнение траектории луча

$$\text{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \cos^2 \theta_0}}{\frac{n_0}{n} \cos \theta_0} = \frac{dz}{dx} . \quad (5.14)$$

Интегрирование (5.14) дает

$$x = \int \frac{\cos \theta_0 dz}{\sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 - \cos^2 \theta_0}} + \text{const} . \quad (5.15)$$

Выражения (5.14),(5.15) описывают траектории лучей в зависимости от начального угла  $\theta_0$ . Интегрирование в (5.15) необходимо проводить до верхней точки траектории луча  $z = z_{\text{max}}$  и обратно - до  $z = 0$ . Точка  $z = z_{\text{max}}$  соответствует следующему условию:

$$\frac{n(z_{\text{max}})}{n_0} = \cos \theta_0 . \quad (5.16)$$

Поскольку траектория луча для плоско-слоистой среды симметрична относительно максимума, (5.15) окончательно принимает вид

$$\Delta x = x - x_0 = 2 \int_0^{z_{\text{max}}} \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{n(z)}{\rho}\right)^2 - 1}} . \quad (5.17)$$

Здесь  $x_0, x$  - точки, соответствующие выходу и приходу лучей на плоскость  $z = 0$  (рис.5.8), величина  $\rho = n_0 \cos \theta_0$  называется *прицельным параметром* луча. Из (5.17) следует, что траектория каждого луча будет определяться своей областью интегрирования по вертикальной координате, а значит, своим диапазоном изменения показателя преломления  $n(z)$ . Если прицельный параметр велик (излучение попадает в неоднородную среду под малым углом к плоскости  $z = 0$ ), то траектория луча определяется показателем преломления в приграничной области и не зависит от того, как  $n(z)$  меняется при больших значениях вертикальной координаты. Этому соответствует нижний луч на рисунке. С уменьшением прицельного параметра лучи “захватывают” все большую область изменения  $n(z)$ , и в их траектории заложена соответствующая информация о профиле показателя преломления (верхний луч на рисунке). Расстояние, соответствующее возвращению луча в плоскость  $z = 0$ , зависит от прицельного параметра ( $\Delta x = \Delta x(\rho)$ ) и определяется интегралом (5.17) по области от  $z = 0$  до  $z = z_{\text{max}}$ .

Покажем, что уравнение (5.17) позволяет решить обратную задачу - восстановить профиль  $n(z)$ , если известна зависимость  $\Delta x = \Delta x(\rho)$ . Такая задача

полностью аналогична задаче о нахождении периода колебательной системы по ее потенциальной энергии. Соответствующую зависимость мы вывели в первой главе настоящего пособия:

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{[E_0 - U(x)]}}. \quad (5.18)$$

Здесь  $x_1, x_2$  - крайние значения отклонения системы от положения равновесия,  $T$  - полный период колебаний,  $E_0$  - полная энергия системы,  $U(x)$  - потенциальная энергия (см. рис.5.9).

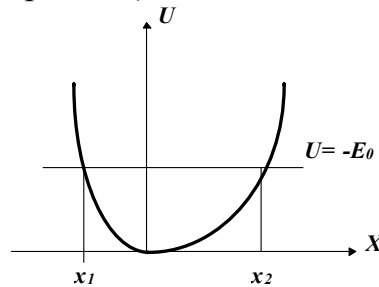


Рис.5.9

Если сопоставить выражения (5.17) и (5.18), то мы увидим, что пространственные колебания луча в слоистой среде описываются таким же уравнением, как колебания частицы в потенциальной яме, показанной на рисунке. Прицельный параметр (функция начального угла  $\theta_0$ ) соответствует полной энергии системы  $E_0$ , а высотная зависимость показателя преломления  $n(z)$  - потенциальной функции  $U(x)$ . Предельные значения амплитуды колебаний  $x_1, x_2$  могут быть найдены из условия:

$$U(x_1) = U(x_2) = E_0, \quad (5.19)$$

что соответствует условию (5.15) для высшей точки траектории луча. Амплитуда колебаний (а значит - и их период) зависит от энергии системы. Покажем, как по известной зависимости  $T(E)$  можно восстановить из (5.18) неизвестную потенциальную функцию  $U(x)$ .

Преобразуем интегральное уравнение (5.18). Будем рассматривать в нем координату как функцию от потенциальной энергии  $x(U)$ . Эта функция двужначна, каждому значению потенциальной энергии соответствуют две точки на оси  $x$ . В (5.18) необходимо произвести замену переменной интегрирования

$$dx = \frac{dx}{dU} dU,$$

а интегрирование проводить отдельно по двум ветвям  $x = x_1(U)$  и  $x = x_2(U)$  (см. рис.5.9). Если учесть условие для “точек поворота” (5.19), то (5.18) вычисляется как сумма двух интегралов:

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} = \\ &= \sqrt{2m} \int_0^E \left( \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right) \frac{dU}{\sqrt{E-U}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Разделим обе стороны этого равенства на  $\sqrt{\alpha - E}$ , где  $\alpha$  - параметр, и проинтегрируем по  $E$  от 0 до  $\alpha$ :

$$\int_0^{\alpha} \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^{\alpha} \int_0^E \left( \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right) \frac{dUdE}{\sqrt{(E - U)(\alpha - E)}}. \quad (5.21)$$

Теперь, если поменять порядок интегрирования в двойном интеграле, получим:

$$\int_0^{\alpha} \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^{\alpha} \left( \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right) dU \int_U^{\alpha} \frac{dE}{\sqrt{(E - U)(\alpha - E)}}. \quad (5.22)$$

В полученном виде интегрирование легко может быть проведено аналитически. Интеграл по  $dE$  является табличным и равен  $\pi$ , а интегрирование по  $dU$  после этого становится тривиальным. Окончательно имеем

$$\int_0^{\alpha} \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi\sqrt{2m} [x_2(\alpha) - x_1(\alpha)], \quad (5.23)$$

при условии, что  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Теперь осталось только заменить обозначения  $\alpha$  на  $U$ :

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U - E}}. \quad (5.24)$$

Преобразование, в результате которого мы выразили подынтегральную функцию в (5.18) в виде (5.24), в литературе носит название *преобразования Абеля*. Необходимо отметить, что по известной функции  $T(E)$  (периоду колебаний) мы получили разность  $x_2(U) - x_1(U)$ , то есть изменение ширины потенциальной ямы с ее глубиной, а не саму форму потенциальной функции  $x(U)$ . Сама форма потенциальной функции остается неопределенной, то есть можно подобрать любое количество потенциальных ям с одинаковой зависимостью периода колебаний (5.24). Многозначность исчезает, если потребовать симметричности потенциальной функции или если одна из ветвей  $x(U)$  известна. Как раз такой случай и рассмотрен нами при решении обратной задачи рефракции (5.17). Одной из “стенок” потенциальной ямы в этом случае является граница слоисто-неоднородной среды  $z = 0$ . Это и есть априорная информация, определяющая условие корректности поставленной задачи. По аналогии с приведенным выше преобразованием (5.18)-(5.24) выражение (9) можно преобразовать к виду

$$z(n) = \int_{n_0}^n X(\rho) d\rho, \quad (5.25)$$

где функция  $X(\rho)$  в целом соответствует подынтегральному выражению в (5.24).

Таким образом на примере решения обратной задачи рефракции мы показали возможности томографии. То, что для слоистой среды такую задачу удастся решить аналитически (получить в явном виде искомую функцию неоднородности среды от измеряемых параметров) является, скорее, исключением из правил. Как мы уже отмечали, большинство задач томографии некорректны и требуют специальной процедуры - *регуляризации*. Эта процедура подразумевает нахождение условий, при которых задача имеет

однозначное решение. При этом для решения интегральных уравнений типа (5.10), (5.12) используются достаточно сложные численные методы.

## Глава 6. Основы обработки волновых сигналов

### 6.1. Корреляционный прием и адаптивная фильтрация

Как мы показали выше, при импульсном волновом зондировании неоднородных сред происходит искажение формы зондирующего импульса и для повышения разрешающей способности волновых устройств необходима обработка регистрируемых сигналов для выделения амплитудных фронтов, фазы сигнала и т.д. Чаще всего такая обработка аналогична выделению сигнала на фоне шума и основана на принципе *корреляционного приема* или *оптимальной фильтрации* сигнала. Рассмотрим простейший алгоритм такой обработки.

Пусть на вход приемника (антенну радиолокатора, акустический микрофон и.д.) поступает сигнал  $f(t)+N(t)$ , где  $f(t)$  - полезный, содержащий информацию сигнал с конечным спектром  $G(\omega)$ , а  $N(t)$  - широкополосный белый шум с равномерным спектром:

$$\begin{aligned} f(t) &\div G(\omega), \\ N(t) &\div Q(\omega) = Q_0. \end{aligned}$$

Тогда для полезного сигнала и его мгновенной интенсивности  $I(t)$  можно записать:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ I(t) &= f^2(t). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Если  $S(t)$  - интересующий нас полезный сигнал, соответствующий отклику приемной системы на входное воздействие  $f(t)$ , то для его интенсивности можно привести следующие спектральные выражения:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad (6.2)$$

$$I_0(t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)^2, \quad (6.3)$$

где  $B(\omega)$  - спектральная передаточная функция приемника (см. раздел настоящего пособия о спектральном преобразовании сигналов):

$$S(t) \div B(\omega) G(\omega). \quad (6.4)$$

С учетом (6.3) отношение интенсивности полезного сигнала к интенсивности шума на выходе приемника можно записать в виде

$$\left( \frac{C}{\text{Ш}} \right)_{\text{ВЫХ}} = \frac{I_0(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 Q(\omega) d\omega}, \quad (6.5)$$

где в знаменателе стоит спектральное выражение для интенсивности шума  $N(t)$ . Целью обработки сигнала и выделения сигнала из шума является

получение максимального отношения (6.5) за счет выбора спектральной передаточной функции  $B(\omega)$ . Для оценки числителя в (6.5) используем известное в математике *неравенство Коши–Буняковского*, согласно которому квадрат от интеграла (6.3) может быть больше произведения его составляющих:

$$I_0(t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)G(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right)^2 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \right). \quad (6.6)$$

Если мы будем считать, что шум имеет равномерный спектр ( $Q(\omega) = Q_0$ ), то тогда, вынося эту величину за знак интеграла в знаменателе (6.5) и учитывая (6.6), мы можем оценивать отношение сигнал/шум при помощи следующей формулы:

$$\left( \frac{C}{Ш} \right)_{\text{ВЫХ}} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)^2 d\omega}{Q_0}. \quad (6.7)$$

Величины  $B(\omega)$  и  $G(\omega)$  - комплексные, а знак равенства в формуле (6.6) и максимум соотношения сигнал/шум в (6.7) достигается тогда, когда эти величины при умножении под интегралом являются комплексно-сопряженными. Это условие может быть сформулировано следующим образом:

$$B(\omega) = AG^*(\omega)e^{-i\omega t_0} = AG(-\omega)e^{-i\omega t_0}, \quad (6.8)$$

где  $t_0$ ,  $A$  - произвольные постоянные. Это условие для спектральной (частотной) передаточной функции приемника обеспечивает, таким образом, *оптимальную фильтрацию* сигнала. А фильтр, удовлетворяющий условию (6.8), называют *согласованным*.

Перейдем теперь от спектрального к временному рассмотрению поведения сигнала при оптимальном (согласованном) приеме. Подставив выражение (6.8) для частотной характеристики оптимального фильтра в формулу для результирующего сигнала (6.2), получим:

$$S(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (6.9)$$

Из (6.9) следует, что на выходе согласованного фильтра сигнал достигает максимума в момент  $t = t_0$  и, кроме того, сигнал  $S(t)$  оказывается симметричным относительно этого момента времени. Запишем выражение для сигнала  $S(t)$  через входной сигнал  $f(t)$  и временную функцию отклика приемника:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)H(t-\tau)d\tau, \quad (6.10)$$

где функция отклика соответствует спектральной передаточной функции

$$H(t) \div B(\omega). \quad (6.11)$$

Таким образом, для осуществления оптимальной фильтрации необходимо рассчитывать интегральную свертку (6.10) двух функций - входного сигнала  $f(t)$  и функции отклика, которая должна представлять собой *инвертированный (перевернутый) во времени входной сигнал*:

$$H(t) \rightarrow f(-t). \quad (6.12)$$

Проиллюстрируем работу оптимального фильтра на примере симметричного прямоугольного сигнала. Соответствующие временные зависимости показаны на рис.6.1.

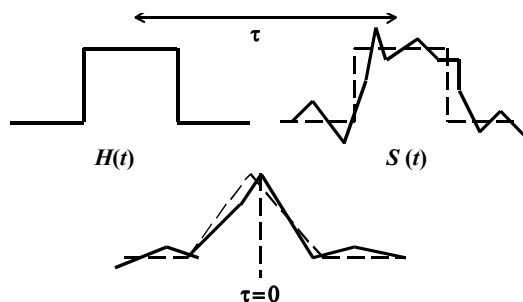


Рис. 6.1

Пусть временная задержка  $\tau$  между искаженным принимаемым сигналом и прямоугольной функцией отклика равномерно уменьшается. Интеграл свертки между этими импульсами пропорционален площади их пересечения и представляет собой треугольный импульс. Вершина этого треугольного импульса будет соответствовать моменту, когда прямоугольные импульсы полностью пересекутся. Таким образом, оптимальная фильтрация не только позволяет получить максимальное отношение сигнал/шум на выходе приемника, но и зафиксировать момент времени  $t=t_0$  его максимального отклика. Зафиксировать этот момент времени можно с большей точностью, чем, например, измерить момент прихода искаженного переднего фронта входного сигнала (см. рис.6.1).

Рассмотрим алгоритм оптимального приема сигнала при импульсном волновом зондировании (рис.6.2). Пусть в среду посылается импульсный сигнал  $S_0(t)$ , а после его прихода в приемник он приобретает форму  $S(t)$ . Поскольку нам заранее не известна степень искажения зондирующего импульса, то в простейшем случае в качестве оптимального (согласованного) отклика приемной системы можно использовать сам зондирующий сигнал.

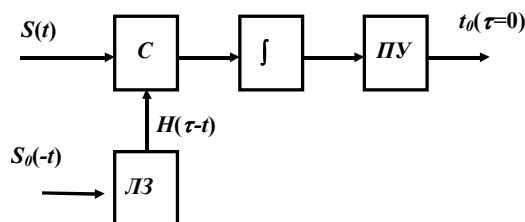


Рис. 6.2

Для этого зондирующий сигнал через управляемую линию задержки (ЛЗ) подается на смеситель (С) вместе с принимаемым сигналом. Сигнал со смесителя, пропорциональный произведению этих сигналов подается на интегратор, осуществляющий суммирование (накопление) сигнала, и затем пороговое устройство (ПУ, или пиковый детектор) выделяет максимальное

значение полученной таким образом свертки (6.10), в зависимости от значения управляемой временной задержки  $\tau$ .

Приведенный на рис.6.2 алгоритм широко используется на практике. При этом преобразование свертки сигналов часто необходимо осуществлять в режиме реального времени (как, например, в радиолокации, - при осуществлении слежения за быстро движущимся объектом). В этом случае необходимо производить операцию свертки в аналоговой форме, поскольку несущие частоты сигналов очень высоки и их оцифровка и цифровая обработка затруднительны.

Для аналоговой обработки высокочастотных сигналов используются специальные волновые методы и устройства, на принципах действия которых мы кратко остановимся в следующем разделе.

## 6.2. Акустоэлектронные устройства аналоговой обработки сигналов

Как мы показали выше, для осуществления оптимальной фильтрации необходимо выполнить временную задержку сигналов и их интегрирование (свертку) с функцией отклика, форма которой должна подбираться специально для каждого принимаемого сигнала. Для осуществления этих операций можно использовать аналоговые акустоэлектронные устройства на *поверхностных акустических волнах (ПАВ)*.

Принцип действия акустоэлектронных устройств основывается на том, что при распространении упругих волн в пьезоэлектриках деформации в акустической волне сопровождаются возникновением *квазистатических* электрических полей. Сопровождающие ультразвуковые волны электрические поля удобнее всего регистрировать у поверхности пьезоэлектрического материала, поэтому в ультразвуковых акустоэлектронных устройствах чаще всего используются ПАВ. Рассмотрим коротко, что представляет собой *поверхностная акустическая волна Рэлея*, которая используется в акустоэлектронике.

Пусть упругие волны распространяются вдоль границы твердого тела  $Z = 0$  в направлении оси  $X$ . Для продольной и поперечной волн можно записать следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2}, \quad (6.13)$$

где  $U_j = U_l, U_t$ . Для геометрии задачи, представленной на рис.6.3,  $U_l = U_x, U_t = U_z$ , а скорость распространения волны  $c$  может принимать два значения:

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left( k + \frac{4}{3} \mu \right)} \quad ; \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (6.14)$$

Здесь  $\rho_0, k, \mu$  - плотность и постоянные упругости. Таким образом, для поперечной и продольной упругой волны можно записать *два волновых уравнения*, когда они распространяются *внутри твердого тела*. В том случае, когда волна распространяется *вблизи поверхности* твердого тела, к волновым уравнениям (6.13) необходимо добавить граничные условия при  $Z = 0$ :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad (6.15)$$

где механические напряжения связаны с деформацией следующим образом:

$$\sigma_{zz} = k \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right);$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right). \quad (6.16)$$

Мы рассматриваем распространение волны вдоль оси  $X$ , и все величины в волне не зависят от координаты  $Y$  ( $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ), однако даже в этом случае, если рассматривать отдельно продольные и поперечные волны  $U_l = U_x, U_t = U_z$ , все граничные условия (6.15) не могут быть удовлетворены (смещения  $U_x, U_z$  оказываются связаны между собой в соответствии с (6.16). Таким образом, вблизи поверхности необходимо рассматривать смещение частиц среды в виде суммы продольной и поперечной векторной составляющей:

$$U = U_x + U_z. \quad (6.17)$$

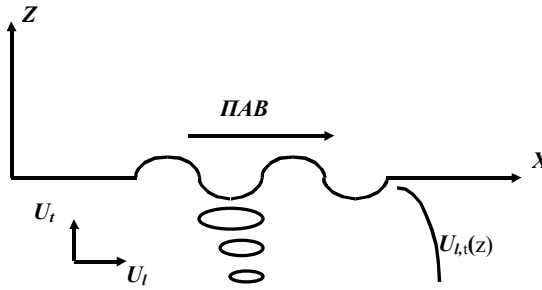


Рис. 6.3

Считая, что поверхностная волна меняется во времени по гармоническому закону

$$U(r,t) = U(x,z)e^{i\omega t}, \quad (6.18)$$

получим для продольной и поперечной составляющей ПАВ уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega}{c_l} \right)^2 U_x = 0; \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega}{c_t} \right)^2 U_z = 0. \quad (6.20)$$

Если считать, что поверхностная волна распространяется в образце со скоростью  $c$ , то решение уравнений (6.19 – 6.20) необходимо искать в виде:

$$U(x,z) = U(z) \exp\left(i \frac{\omega}{c} x\right). \quad (6.21)$$

Тогда, подставив (6.21) в (6.19 – 6.20), получим уравнения для продольной и поперечной составляющих в поверхностной волне Рэлея (рис.6.3):

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = \omega^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_l^2} \right) U_x; \quad (6.22)$$



$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = \omega^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_t^2} \right) U_z. \quad (6.23)$$

Решения (6.22 – 6.23) определяют поведение продольной и сдвиговой составляющей в направлении “глубины” образца:

$$U_x(z) = A_1 \exp(-n_1 z); \quad (6.24)$$

$$U_z(z) = A_2 \exp(-n_2 z). \quad (6.25)$$

Здесь  $A_1, A_2$  - произвольные постоянные, которые определяются начальными условиями, а затухание колебаний в направлении, перпендикулярном границе, определяется величинами

$$n_1 = \omega \sqrt{\left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_t^2} \right)}, \quad (6.26)$$

$$n_2 = \omega \sqrt{\left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_t^2} \right)}. \quad (6.27)$$

Заметим, что в решении (6.24 – 6.25) мы учли только тот случай, когда решения экспоненциально убывают при  $z \rightarrow \infty$ . Кроме того, если в (6.26 – 6.27)  $c > c_t, c_l$ , то решения (6.24 – 6.25) будут представлять собой экспоненты с мнимым показателем, то есть, гармонические волны, распространяющиеся вдоль оси  $Z$ . Это означает, что в данном случае решения представляют собой объемную волну.

Таким образом, мы получили условие для скорости поверхностной волны Рэлея:  $c < c_t < c_l$ . Это вполне соответствует простейшим физическим соображениям: скорость акустической волны определяется упругостью среды, но у границы на каждый элемент образца со стороны свободной поверхности упругие силы не действуют, поэтому и скорость поверхностной волны меньше, чем скорость объемной волны. С другой стороны, если скорость распространения упругой волны у поверхности меньше, то, по законам рефракции, волна “прижимается” к поверхности.

Соотношение между амплитудами продольных и поперечных колебаний в поверхностной волне может быть получено, если использовать связь между ними в граничных условиях (6.15 – 6.16). Окончательно мы получим, что движение частиц образца в поверхностной волне происходит по эллипсам, что соответствует сложению продольных и поперечных колебаний, сдвинутых по фазе. При этом амплитуда колебаний убывает с расстоянием от поверхности, как это показано на рис.6.3.

Волны Рэлея могут распространяться в любом упругом теле, в том числе и в земной коре, где они обязательно учитываются при сейсмологических исследованиях.

Для практических приложений наибольший интерес представляют ПАВ в пьезоэлектрических материалах, где существуют простые и эффективные способы их возбуждения и приема. Такой механизм возбуждения и приема ПАВ показан на рис.6.4. На поверхность пьезоэлектрического материала (*пьезоподложки*) наносятся металлические электроды. Если на последовательность электродов подается переменное напряжение так, чтобы

потенциалы соседних электродов имели разные знаки, то в пьезоподложке возникают электрические поля  $E$ , которые сопровождаются упругими напряжениями  $\sigma$ . В общем случае структура электрических полей и, соответственно, деформаций оказывается достаточно сложной, однако приближенно, когда коэффициент электромеханической связи (см. раздел о пьезоэлектрических преобразователях) мал, считается, что деформация возникает на границах электродов. Тогда ПАВ имеет форму последовательных импульсов разной полярности, расстояние между которыми определяется размерами и расстоянием между электродами (рис.6.4).

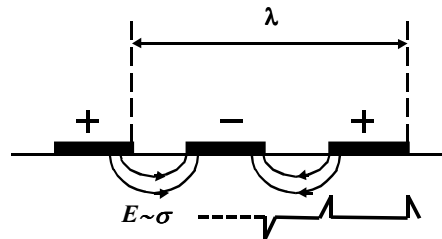


Рис.6.4

Последовательность импульсов, показанная на рис.6.4, представляет собой функцию отклика преобразователя, - форму сигнала ПАВ при импульсном воздействии. Если на электроды подается гармонический сигнал, то такая последовательность электродов будет обладать резонансными свойствами. Предположим, что сигнал противоположного знака подается на следующий после излучающего ПАВ электрод через время, соответствующее прохождению расстояния в половину длины волны. Тогда сигнал ПАВ от предыдущего электрода усилится. Таким образом, спектральная передаточная функция и, соответственно, резонансные свойства последовательности таких электродов будут определяться их размерами и количеством, а общая энергия излученной ПАВ связана с длиной электродов в направлении, перпендикулярном направлению распространения.

На описанном выше принципе основаны встречно-штыревые преобразователи ПАВ (ВШП). Ультразвуковая линия задержки (ЛЗ) с ВШП показана на рис.6.5.

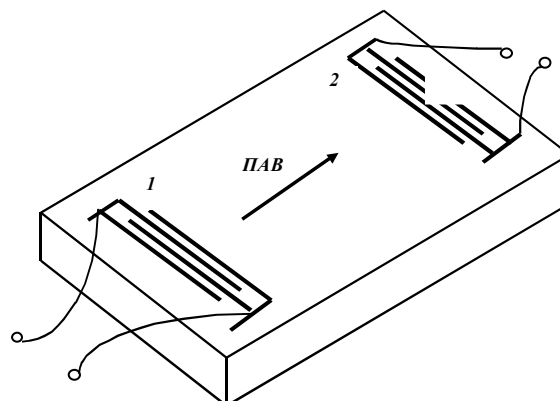


Рис. 6.5

Такое устройство выполняет одновременно две функции: оно работает как линия задержки и фильтр. Скорость ПАВ в пьезокристаллах, из которых изготавливаются пьезоподложки, составляет  $(4 - 5)10^5$  см/с, что на пять порядков ниже скорости электромагнитных волн. Поэтому устройство обеспечивает задержку порядка десяти микросекунд на каждый сантиметр распространения ПАВ между ВШП (1 и 2 на рис.6.5) .

С другой стороны, пусть  $S(t)$ - сигнал ПАВ, возбужденный входным преобразователем,  $t_1, t_2, t_3, \dots$  - моменты времени, когда сигнал приходит на первый, второй, третий электроды выходного (приемного) ВШП. Если  $I_1, I_2, I_3, \dots$  - длина каждого из этих электродов, то сигнал на выходном ВШП в последовательные моменты времени будет представлять собой сумму:

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(t_1) &= S(t_1)I_1; \\ S_{\text{вых}}(t_2) &= S(t_2)I_1 + S(t_1)I_2; \\ S_{\text{вых}}(t_3) &= S(t_3)I_1 + S(t_2)I_2 + S(t_1)I_3 \dots \end{aligned} \quad (6.28)$$

Если формулы (5.36) записать в непрерывном интегральном виде, то получим:

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t-\tau)I(\tau)d\tau, \quad (6.29)$$

где функция отклика  $I(\tau) = I\left(\frac{r}{c}\right)$  определяется формой электродов в преобразователе и скоростью распространения ПАВ  $c$  в направлении  $r$  .

Таким образом, линия задержки на ПАВ может служить еще и фильтром, функция отклика которого задается формой ВШП. Изменение формы ВШП называется *аподизацией* фильтра и ее пример показан на рис.6.5, где в выходном преобразователе “вырезан” треугольник. Начиная с некоторого момента времени площадь электродов уменьшается по линейному закону, в соответствии с этим меняется и функция отклика фильтра  $I(\tau)$ , которую для фильтров на ПАВ называют иногда *функцией аподизации*.

Еще более широкими возможностями обладают *нелинейные акустоэлектронные устройства на основе слоистой структуры пьезоэлектрик-полупроводник*. Такое устройство, которое называется *акустоэлектронным конвольвером* (convolution - свертка), показано на рис.6.6. В конвольвере на пьезоэлектрическую подложку между ВШП (1,2) помещается полупроводниковый кристалл (кремний Si на рисунке), или полупроводниковая диодная матрица.

ВШП служат входными преобразователями, а результирующий сигнал снимается со сплошных электродов на поверхности полупроводника и нижней плоскости подложки. Рассмотрим принцип работы такого устройства.

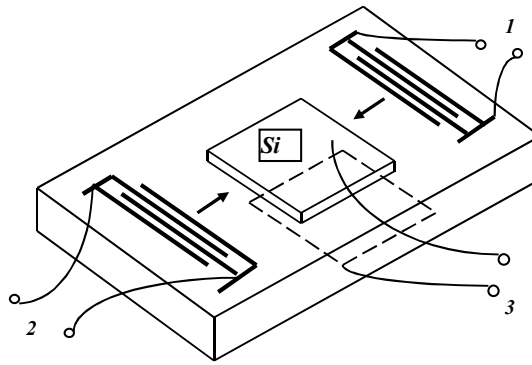


Рис. 6.6

Излучаемые преобразователями 1 и 2 ПАВ сопровождаются квазистатическими переменными электрическими полями, которые распространяются вместе с поверхностной волной над поверхностью подложки. В полупроводнике эти электрические поля могут взаимодействовать между собой и создавать локальные переменные токи, которые зависят от напряженности электрического поля и проводящих свойств полупроводника. Пусть переменное электрическое поле ПАВ имеет вид

$$E(r,t) = E_0 \exp(\omega t \pm kr), \quad (6.30)$$

где  $\omega$  - частота и  $k$  - волновое число ПАВ, а разные знаки соответствуют поверхностным волнам, распространяющимся навстречу друг другу. Для локальной плотности тока в полупроводнике справедлива следующая зависимость от электрического поля:

$$j(r,t) = q\mu(n_0 + n_E)E(r,t), \quad (6.31)$$

где  $q$  - заряд,  $\mu$  - подвижность и  $n_0$  - равновесная концентрация свободных носителей заряда в полупроводнике (электронов и дырок). Произведение этих величин определяет равновесную проводимость полупроводника. Но концентрация носителей в каждой точке полупроводника может меняться на добавочную величину  $n_E$ , которая определяется внешним электрическим полем  $n_E \sim E(r,t)$ . Таким образом, эта добавка создает нелинейную зависимость тока в полупроводнике от приложенного к нему внешнего электрического поля: второй член в (6.31) дает

$$j_N \sim E^2(r,t). \quad (6.32)$$

Такой механизм называется *токовой*, или *концентрационной*, нелинейностью полупроводника. По аналогии с нелинейными элементами в колебательных системах, в результате проявления этой нелинейности в полупроводнике конвольвера возникает сигнал, пропорциональный произведению электрических полей ПАВ, распространяющихся навстречу друг другу в пьезоподложке:

$$j_N(t) = AE_- \exp(\omega t - kr) * E_+ \exp(\omega t + kr) = AE_+ E_- \exp(2\omega t), \quad (6.33)$$

где  $E_+, E_-$  - амплитуды полей встречных ПАВ, а коэффициент пропорциональности  $A$  определяется свойствами слоистой структуры. Главной особенностью формулы (6.33) является то, что нелинейная составляющая тока не зависит от координаты  $r$ , т.е. ток удвоенной частоты оказывается

однородным по всей площади полупроводника при взаимодействии встречных волн одинаковой частоты. В результате, если на каждый из входных ВШП подать сигналы одинаковой частоты, то выходной сигнал, снимаемый со сплошного электрода на полупроводнике, будет зависеть от произведения амплитуд этих сигналов и площади полупроводника. Если входные сигналы представляют собой радиоимпульсы, то *площадь их взаимодействия меняется во времени в процессе их распространения*. Таким образом, если  $S_1(t), S_2(t)$  - огибающие входных сигналов, то на выходе мы получим сигнал их свертки:

$$S_{\text{вых}}(t) = A \int_{-a}^{+a} S_2(2t - \tau) S_1(\tau) d\tau. \quad (6.34)$$

Здесь пределы интегрирования ограничиваются размерами полупроводника. Коэффициент 2 в аргументе свертки соответствует сжатию сигнала во времени в два раза. Это связано с удвоенной скоростью распространения ПАВ навстречу друг другу.

Следовательно, акустоэлектронный конвольвер позволяет в реальном времени осуществлять основную операцию оптимальной фильтрации сигнала таким образом, что функция отклика фильтра может задаваться произвольно. В этом случае, когда для обработки конкретного сигнала подбирается соответствующая ему функция отклика, принято говорить об *адаптивной* фильтрации.

### **6.3. Интерферометрия и оптическая обработка сигналов**

Из оптических приборов для диагностики различных объектов наиболее широкое распространение получили *интерферометры* - приборы для точного измерения малых смещений (длин, углов, пространственных неоднородностей), а также для измерения коэффициентов преломления прозрачных сред. Все интерферометры основаны на едином принципе и различаются лишь конструктивно. В их основе лежит интерференция когерентного (чаще всего - лазерного) излучения, отраженного или прошедшего в разной пространственной области исследуемого объекта. Поэтому интерферометры позволяют регистрировать пространственные неоднородности, сопоставимые с длиной волны оптического излучения.

В промышленности интерферометры используются для контроля качества обработки поверхностей образцов. Рассмотрим классическую схему *микроскопа Линника* (комбинация интерферометра Майкельсона и микроскопа), показанную на рис.6.7.

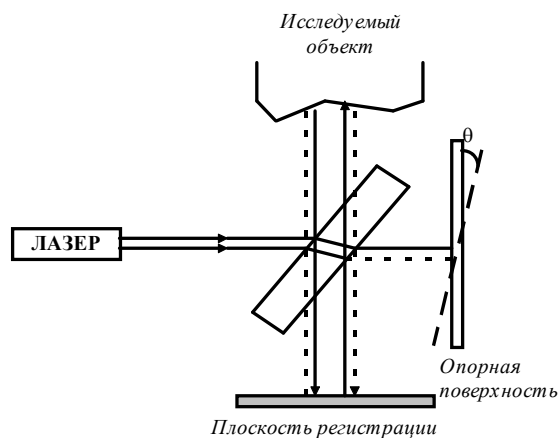


Рис.6.7

Когерентное (монохроматическое) оптическое излучение попадает на *расщепитель* после чего частично попадает на опорную поверхность, а другая часть оптического пучка падает на исследуемый объект. В качестве расщепителя используется наклонная плоскопараллельная пластина или граница двух совмещенных призм с *полупрозрачным слоем*. В качестве такого слоя используется тонкий слой серебра, на котором происходит “раздвоение” оптического пучка за счет частичного отражения.

В качестве *опорной поверхности* в интерферометре используется плоское зеркало, угол наклона которого  $\theta$  может меняться в малых пределах при настройке прибора.

Оптические лучи, отраженные от опорной поверхности и исследуемого объекта, после вторичного прохождения через расщепитель дают интерференционную картину в *плоскости регистрации*. Интерференционная картина представляет собой систему чередующихся полос различной интенсивности (рис. 6.8, *а*). Если на поверхности объекта существуют дефекты или плавные пространственные неоднородности, то они приводят к искажению интерференционной картины, как это показано на рис. 6.8,*б*.

**Для наблюдения искажений интерференционной картины в микроинтерферометрах используется увеличительная система оптических линз. В частности, в плоскости регистрации устанавливается окуляр микроскопа.**

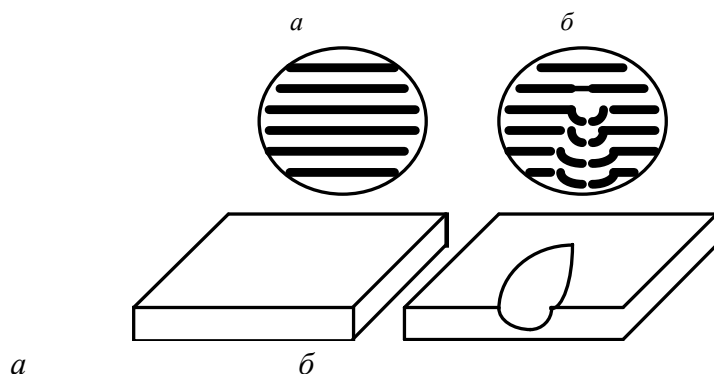


Рис.6.8

Интерферометры позволяют определять незначительные изменения показателя преломления вещества в зависимости от изменения температуры, давления, примесей и т.д. Такие интерферометры получили название *интерференционных рефрактометров*. В таких приборах на пути интерферирующих лучей помещают образцы с известным ( $n_0$ ) и неизвестным ( $n_x$ ) показателями преломления. Пусть два таких образца помещены в интерферометре, показанном на рис. 6.7. Толщина обоих образцов  $L$ . Один из них находится на месте исследуемого образца и за ним располагается плоское зеркало. Второй помещен перед опорной поверхностью. Интерференционная картина искажается возникающей оптической разностью хода  $\Delta = 2L(n_x - n_0)$ . Сдвиг интерференционных полос зависит от разности хода лучей  $\Delta$  и длины волны излучения  $\lambda$ . Этот сдвиг можно характеризовать величиной

$$M = \frac{\Delta}{\lambda} = 2L(n_x - n_0)/\lambda .$$

Величина  $M$  показывает, на какую часть ширины интерференционной полосы смещается интерференционная картина. Например, при смещении интерференционной картины на 0,2 полосы, при длине волны  $\lambda = 0,5$  мкм и размерах образца  $L = 5$  см, изменения показателя преломления составляют  $(n_x - n_0) = 10^{-6}$ . Таким образом, рефрактометры позволяют отслеживать изменения показателя преломления с очень высокой точностью.

#### **6.4. Основы Фурье – оптики**

Интерферометрия является только одним из методов, в котором используются фазовые оптические измерения. Как мы уже отмечали раньше, *временные* оптические частоты настолько высоки, что для фазовых измерений в оптическом диапазоне практически всегда используется явление интерференции, то есть измеряется *пространственное* распределение волнового поля. С другой стороны, скорость оптических процессов настолько высока, что для некоторых задач аналоговая оптическая обработка информации оказывается гораздо предпочтительней, чем попытки использовать современную цифровую электронно-вычислительную технику. Чаще всего оптические методы используются для предварительной аналоговой обработки информации и ее представления в пригодном для дальнейшей обработки на ЭВМ виде.

Выше мы уже рассмотрели возможности аналоговой обработки сигналов на примере акустоэлектронных устройств. В настоящем параграфе мы познакомимся с примерами обработки оптических изображений и пространственной фильтрации. Эту область аналоговой обработки сигналов часто называют *Фурье-оптикой*.

В главе, посвященной использованию метода Кирхгофа в теории волн, мы показали, что в результате разложения волнового поля по плоским волнам может возникать дифракционная картина, представляющая из себя

пространственное преобразование Фурье от поля в плоскости источника. В основе Фурье-оптики лежит тот факт, что преломление когерентного света в стандартной линзе приводит к оптическому преобразованию Фурье. Ниже мы покажем, что *распределение амплитуд света в задней фокальной плоскости линзы представляет собой двумерное комплексное преобразование Фурье от распределения амплитуды света в передней фокальной плоскости этой линзы.*

Прямое и обратное преобразования Фурье являются основой спектрального представления сигналов. Поэтому аналоговый прибор, позволяющий осуществлять такую операцию, дает возможность выполнять многие важнейшие операции по обработке информации, такие, как фильтрация, корреляция, свертка и т.д.

Проанализируем важнейшие свойства одномерного преобразования Фурье:

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \exp(-j2\pi x_1 v) dx_1. \quad (6.35)$$

Здесь  $f(x_1)$  - входная функция, а  $F(v)$  - ее Фурье-образ. Тогда обратное преобразование записывается в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(j2\pi xv) dv. \quad (6.36)$$

В табл.1 приведены некоторые основные преобразования Фурье и их физический смысл.

**Таблица 1**

Входная функция $f(x)$	Фурье-образ $F(u)$	Физический смысл
$\delta(x)$	1	Точка в $x$ переходит в постоянную в $u$
1	$\delta(u)$	Постоянная в $x$ переходит в точку в $u$
$ag(x)$	$aG(u)$	Линейность преобразования (умножение на постоянную)
$g(ax)$	$\frac{1}{ a } G\left(\frac{u}{a}\right)$	Закон масштабирования
$g(x - a)$	$e^{-j2\pi au} G(u)$	Закон сдвига
$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$	$\text{sinc}(au) = \frac{\sin(\pi au)}{\pi au}$	$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{для }  x/a  \leq 1/2 \\ 0 & \text{для остальных} \end{cases}$
$xf(x)$	$\frac{\partial F(u)}{\partial u}$	Дифференцирование



$g(x)f(x)$	$F(u) * G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta)G(\eta-u)d\eta$	Теорема о свертке
------------	---------------------------------------------------------------	-------------------

Если считать  $x_1, v$  координатами, соответственно, в передней и задней фокальной плоскости линзы, то физический смысл типичных Фурье-преобразований из табл.1 проясняет заключенный в них процесс.

Прежде всего мы увидим, что каждая точка  $v$  в задней плоскости преобразования содержит вклад от каждой точки  $x_1$  входной плоскости и наоборот. Первая пара преобразований утверждает, что точка с координатой  $x_1$  во входной плоскости создает однородный отклик в плоскости преобразования или что светящаяся точка преобразуется в плоскую волну. Последняя пара преобразований утверждает, что умножение во входной плоскости эквивалентно свертке двух сигналов в плоскости преобразования. Ниже мы рассмотрим эти процессы более подробно.

Рассмотрим более подробно на простейшем примере линзы операцию преобразования Фурье, выполняемую оптическим процессором. Пусть изображение во входной фокальной плоскости линзы  $P_1(z=0)$  создает плоская волна с волновым числом  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$ -длина волны. Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль главной оптической оси линзы, а также под некоторым углом  $\varphi$  к ней в плоскости  $x_1 = 0$  (рис.6.9).

Волновое поле оптического излучения в этих случаях будет описываться следующими выражениями:

$$A(x, y, z) = \exp(jk_{1,2}z) = \begin{cases} \exp(jk_1 z) = \exp(j \frac{2\pi}{\lambda} z) \\ \exp(jk_2 z) = \exp\left(j \frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} z + j \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} y\right). \end{cases} \quad (6.37)$$

Пусть точки, в которых фокусируются плоские волны в задней фокальной плоскости линзы, имеют координаты  $(x_2 = 0, y_2 = 0)$  и  $(x_2 = 0, y_2 = a)$ .

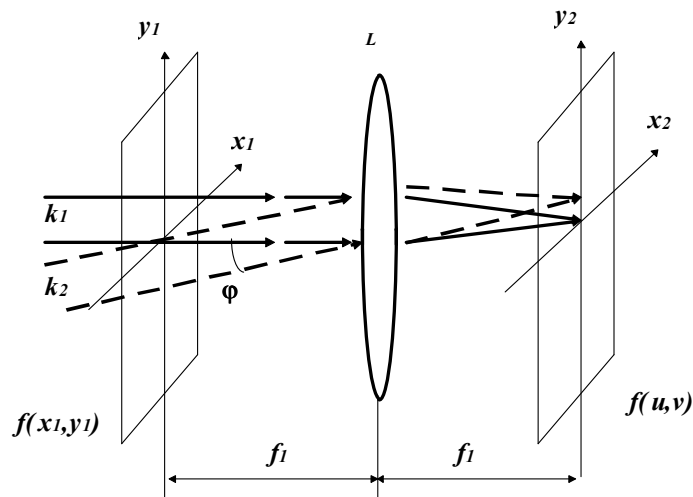


Рис.6.9

Угол распространения входной наклонной волны связан с координатами фокуса  $y_2 = a$  в плоскости  $P_2$  соотношением

$$\frac{a}{f_1} = \sin \varphi, \quad (6.38)$$

где  $f_1$  - фокусное расстояние линзы.

Волновое поле в фокусе линзы представляет собой сумму полей от всех источников, поэтому для получения выражения для поля в фокусах, находящихся в плоскости  $P_2$ , необходимо интегрировать выражения (6.37) с учетом преломляющих свойств линзы (6.38). При этом мы учтем представление Дельта-функции через интеграл Фурье:

$$\delta(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jxv) dx. \quad (6.39)$$

Кроме того, используем обозначение  $\frac{y_2}{\lambda f_1} = v$ . После интегрирования поле в плоскости  $P_2$  описывается следующим выражением:

$$A(x, y, z) = F(v) = \begin{cases} \delta(v) \\ \delta(v - \frac{a}{\lambda f_1}) \end{cases}. \quad (6.40)$$

Таким образом мы получили преобразование, полностью соответствующее преобразованию Фурье и подтверждающее, что обыкновенная линза является простейшим Фурье-процессором.

По аналогии с приведенными выражениями двумерное изображение во входной плоскости  $f(x_1, y_1, z=0)$  в плоскости  $P_2$  будет представлять собой двумерное преобразование Фурье:

$$F(u, v) = F\left(\frac{x_2}{\lambda f_1}, \frac{y_2}{\lambda f_1}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1) \exp(-j2\pi(x_1 u + y_1 v)) dx_1 dy_1. \quad (6.41)$$

Здесь  $u, v$  - пространственные частоты, имеющие размерность обратной длины, как и волновое число излучения.  $x_2 = u\lambda f_1, y_2 = v\lambda f_1$  - координаты в плоскости  $P_2$ .

Для входного точечного источника в плоскости  $P_1$  с координатами  $(x_1, y_1) = (a, b)$  выражение (6.41) принимает вид

$$\delta(x_1 - a, y_1 - b) \leftrightarrow \exp[-j2\pi(au + bv)] = \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax_2}{f_1} + \frac{by_2}{f_1}\right)\right], \quad (6.42)$$

где  $\leftrightarrow$  обозначает пару Фурье-преобразований.

### *Голография и адаптивная фильтрация*

Если за плоскостью преобразования  $P_2$  поместить вторую преобразующую линзу, то распределение амплитуды света в выходной плоскости  $P_3$  будет двойным преобразованием Фурье от входного изображения  $g(x_1, y_1)$  (см. рис.6.10). При этом изображение в плоскости  $P_3$  будет полностью перевернутым и коэффициент его увеличения будет определяться отношением фокусных расстояний линз. Такой процесс имеет место в диапроекторе.

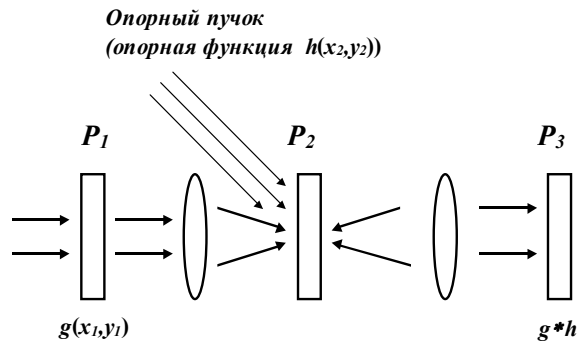


Рис.6.10

Внесение изменений в Фурье-образ  $G(u,v)$  в плоскости  $P_2$  приводит нас к возможности обработки оптических изображений. Действительно, если, например, на главной оптической оси в плоскости  $P_2$  поместить непрозрачный точечный экран, мы задержим постоянную пространственную составляющую входного изображения  $g(x_1, y_1)$  (равномерную засветку) и пропустим только переменные пространственные гармоники. Таким образом мы уменьшим общую яркость изображения, но увеличим его контрастность. По сути, мы осуществим элементарную фильтрацию. Если в плоскости  $P_2$  находится линейный фильтр, пропускание которого увеличивается с увеличением расстояния от центра (главной оси), то в плоскости  $P_3$  мы будем наблюдать продифференцированный входной сигнал (см. табл.1). Таковыми могут быть простейшие методы пространственных преобразований оптических изображений.

Функция пропускания в плоскости  $P_2$  (фильтрующая функция)  $H(u,v)$  может быть достаточно сложной и в наиболее интересных случаях она должна быть комплексной, то есть содержать информацию о фазе световой волны в каждой точке плоскости.

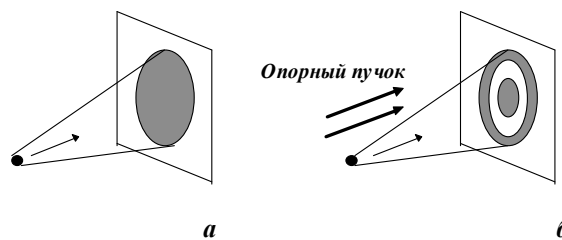


Рис.6.11

Чтобы понять, как комплексную функцию можно представить на плоскости, рассмотрим простейший пример *голографии*, с помощью которой на плоскости фиксируется не только амплитуда (интенсивность) волны, но и ее фаза. Таким образом записывается вся информация о волне (holos - по-гречески “весь”). Примером является изображение светящейся точки на плоскости (рис.6.11). Если точка достаточно удалена, ее изображение на плоскости будет представлять собой почти равномерную освещенную поверхность, и в этом

изображении не содержится информации об объемных свойствах источника излучения, т. е. о расстоянии до этой точки (рис. 6.11,а). При голографической записи вместе с излучением источника на поверхность направляется плоский пучок монохроматического излучения (опорный пучок, рис. 6.11,б). В результате интерференции опорного пучка и излучения точечного источника в плоскости изображения формируется *голограмма* в виде концентрических колец, толщина и диаметр которых определяются фазой и углом падения излучения источника на плоскость. Эти параметры уже несут информацию об объемных свойствах источника, в данном случае - о расстоянии до точки излучения. Если затем осветить такое плоское изображение опорным пучком, то в отраженном или проходящем свете, в результате дифракции плоской волны на таком экране, возникнет действительное или мнимое изображение светящейся точки. Расстояние до нее будет полностью соответствовать исходному расстоянию до первичного источника.

Для более строгого понимания того, как в голограмме фиксируется фаза волны, обратимся снова к рис.6.10. Пусть входная пространственная функция  $g(x_1, y_1)$  в плоскости  $P_2$  имеет изображение  $G(u, v)$ . Все детекторы света записывают только интенсивность  $|G(u, v)|^2$ , теряя, таким образом, информацию о фазе волны  $\varphi(u, v)$ , которая присутствует в сигнале, если его представлять в полной форме:

$$G(u, v) = |G(u, v)| \exp[j\varphi(u, v)] . \quad (6.43)$$

Для того чтобы зарегистрировать фазу так же, как и амплитуду сигнала, фаза не записывается в пространстве непосредственно, а создается такой волновой фронт, чтобы в плоскости регистрации  $P_2$  амплитудное распределение волнового поля содержало легко воспроизводимую информацию о фазе. Для этого к полезному сигналу  $G(u, v)$  добавляется опорный волновой фронт  $H(u, v)$ . Для исключения потери информации необходимое требование

$$|H(u, v)|^2 > |G(u, v)|^2 . \quad (6.44)$$

Изображение, которое регистрируется в плоскости  $P_2$ , описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} |G_H(u, v)|^2 &= |G(u, v) + H(u, v)|^2 = \\ &= |G(u, v)|^2 + |H(u, v)|^2 + G^*(u, v)H(u, v) + G(u, v)H^*(u, v), \end{aligned} \quad (6.45)$$

где индекс  $H$  обозначает голограмму, а звездочка - комплексное сопряжение. Здесь использован тот факт, что квадрат модуля комплексной величины есть по определению ее произведение на комплексно-сопряженную величину. Первые два члена в (6.45) представляют собой сумму интенсивностей полезного и опорного сигнала, а в третьем и четвертом члене заключена информация о фазе. В целом голограмма представляет собой вещественное распределение интенсивности. Для получения информации о фазе волнового фронта эту голограмму освещают копией опорного пучка  $H(u, v)$ . В этом случае

функция  $|G_H(u,v)|^2$  описывает амплитудное пропускание экрана в плоскости  $P_2$ , а распределение света за голограммой будет:

$$\begin{aligned} H(u,v)|G_H(u,v)|^2 = \\ = [|G(u,v)|^2 + |H(u,v)|^2]H(u,v) + \\ + G^*(u,v)H(u,v)H(u,v) + G(u,v)|H(u,v)|^2. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Первый член в (6.46) является просто опорной волной, амплитуда которой промодулирована в соответствии с коэффициентом пропускания экрана  $P_2$ , как если бы он был дважды проэкспонирован отдельно опорным и входным сигналом.

Последний четвертый член в (6.46) представляет собой необходимую комплексную функцию  $G(u,v)$ , содержащую полную информацию (включая фазу) об исходной волне. Сигнал оказывается промодулирован по амплитуде интенсивностью опорного пучка  $|H(u,v)|^2$ . Однако это препятствие легко устраняется, если опорный пучок пространственно однороден:  $|H(u,v)|^2 = \text{const}$ . Просто в качестве опорного сигнала в голографии чаще всего используется плоская волна.

Интересную физическую интерпретацию имеет третий член в выражении (6.46) – входная функция входит в него в комплексно-сопряженной форме  $G^*(u,v)$ , которая соответствует исходной волне, выходящей в другую сторону от опорного пучка. Этот член может использоваться для построения голографического изображения в отраженном свете. Четвертый и третий члены в (6.46) обычно называют *прямой* и *сопряженной* волнами.

Рассмотренный нами пример голограммы является классической *линзовой голограммой Фурье*. Другие типы голограмм используют различные виды записи исходного и опорного сигналов и, соответственно, другие формы считывания информации. Принцип формирования объемного изображения остается прежним.

Схему из двух линз на рис.6.9, которую мы использовали для формирования голограммы, можно использовать и для адаптивной фильтрации. Если в плоскости  $P_2$  при помощи опорной функции  $h(x_2, y_2)$  формируется произведение спектров входного и опорного сигналов, то согласно свойствам преобразования Фурье в плоскости  $P_3$  образуется свертка этих сигналов

$$H(u,v) * G(u,v) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(\xi - x_3, \eta - y_3) d\eta d\xi. \quad (6.47)$$

Если опорная функция  $h(x_2, y_2)$  подобрана в виде комплексно-сопряженной функции к входному сигналу, то (6.47) соответствует адаптивной фильтрации исходного изображения  $g(x_1, y_1)$ .

## Приложения

### Формулы векторной алгебры и анализа.

1. Свойство смешанного произведения векторов:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

2. Разложение двойного векторного произведения:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

3. Определение векторного оператора набла:

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$  - единичные векторы декартовой ортогональной системы координат.

4. Определение операции градиента:

$$\mathbf{grad} \varphi = \nabla \varphi$$

5. Определение операции дивергенции:

$$\mathbf{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

6. Определение операции ротора:

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

7. Векторные тождества:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{0},$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

$$\nabla(\varphi \psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi,$$

$$\nabla(\varphi \mathbf{A}) = \varphi(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi,$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}),$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \nabla) \times \mathbf{A} + (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi(\nabla \times \mathbf{A}) - (\nabla \varphi) \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

## Приложения

### Диапазоны длин электромагнитных волн

Диапазон	Длина волн вакууме	Частота колебаний
Сверхдлинные волны (СДВ)	100-10 км	3-30 кГц
Длинные волны (ДВ)	10-1 км	30-300 кГц
Средние волны (СВ)	1000-100 м	300-3000 кГц
Короткие волны (КВ)	100-10 м	3-30 МГц
Ультракороткие волны (УКВ):		
метровые	10-1 м	30-300 МГц
дециметровые	10-1 дм	300-3000 МГц
сантиметровые	10-1 см	3-30 ГГц
миллиметровые	10-1 мм	30-300 ГГц
субмиллиметровые	1-0.5 мм	300-6000 ГГц

### Скорость звука в газах при 0°С

Газ	с, м/с
Азот	334
Кислород	316
Воздух	331
Гелий	965
Водород	1284
Неон	435
Метан	430
Аммиак	415
Углекислый газ	259
Ионистый водор	157

## Диапазоны частот электромагнитных волн

№	Полоса частот	Название полс частот	Диапазон длин волн	Название диапазона
1	3-30 Гц	крайне низкие КНЧ	100-10 Мм	декамегаметровые
2	30-300 Гц	сверхнизкие С	10-1 Мм	мегаметровые
3	0,3-3 кГц	инфранизкие ИНЧ	1000-100 м	гектокилометровые
4	3-30 кГц	очень низкие ОВЧ (VLF)	100-10 км	мириаметровые
5	30-300 кГц	низкие НЧ (LF)	10-1 км	километровые
6	300-3000 кГц	средние (MF)	1000-100 м	гектометровые
7	3-30 МГц	высокие ВЧ (HF)	100-10 мм	декаметровые
8	30-300 МГц	очень высокие ОВЧ (VHF)	10-1 м	метровые
9	300-3000 МГц	ультравысокие УВЧ (UHF)	10-1 дм	дециметровые
10	3-30 ГГц	сверхвысокие СВЧ (SHF)	10-1 см	сантиметровые
11	30-300 ГГц	крайне высокие КВЧ (EHF)	10-1 мм	миллиметровые
12	300-3000 ГГц		10-0,1 мм	децимиллиметровые

Скорость звука в жидкостях при 20°С

Жидкость	с, м/с
Вода	1490
Ацетон	1190
Бензол	1324
Спирт этиловый	1180
Тотулол четыреххлористый	1324
Углерод	920



Ртуть	1453
Глицерин	1923

Скорость звука в некоторых твердых телах

Материал	$c_1$ , м/с	$c_t$ , м/с	$c_{ср}$ , м/с
Кварц плавленный	5970	3762	5760
Бетон	4200-5300	-	-
Плексигал	2670-2680	1100-1121	1840-2140
Полистирол	2350-2380	1120	1860-2240
Стекло пирекс	5640	3280	5170
Стекло крон	5100-6120	2840-3550	4540-5300
Стекло флинт	3760-4800	2380-2560	3490-4550
Тефлон	1340	-	-
Эбонит	2405	-	-
Железо	5835-5950	3180-3240	5000-5200
Золото	3200-3240	1200	2030
Магний	5765	3065	4600-4970
Платина	3260-3960	1670-1730	2690-2800
Свинец	1960-2400	700-790	1200-1320
Цинк	4170-4210	2440	3700-3850
Никель	5630	2960	4785-4973
Серебро	3650-3700	1600-1690	2610-2800
Углеродистые стали	-	-	5099-5177
Нержавеющая сталь	-	-	5039
Титан BT-1	-	-	5072
Медь М-2	-	-	3842
Латунь Л59	4600	2080	3450
Алюминиевый сплав АМГ	6320	3190	5200

### Скорость звука в некоторых монокристаллах

Кристалл	Направление распространения	Тип волны	с, м/с
Кварц ( $\text{SiO}_2$ )	вдоль оси Z >>	продольная	6330
		поперечная	4620
	вдоль оси X >>	продольная	5600
		поперечная	5050
	>>	быстрая	
		поперечная медленная	3500
Рубин ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	вдоль оси C >>	продольная	11240
		поперечная	7800
Ниобат лития ( $\text{LiNbO}_3$ )	вдоль оси C >>	продольная	7330
		поперечная	3580
Сульфит кадмия ( $\text{CdS}$ )	вдоль оси C >>	продольная	4500
		поперечная	1860
Железоиттриевый гранат ( $\text{MgAl}_2\text{O}_4$ )	вдоль оси X >>	поперечная	3840
		продольная	8830
	вдоль оси [100] >>	поперечная	6540
		продольная	10600
>>	вдоль оси [111] >>	поперечная	5100

## Жидкостные лазеры

Длительность импульсов	Частота повторения Гц	Мощность	Расходимость излучения, мрад
0,1-10 мкс	0,1-500	$10^4-10^6$	2-4
-	-	0,1-1	0,2

## Полупроводниковые лазеры

Длительность импульсов, нс	Частота повторения Гц	Мощность	Расходимость излучения, град
100-200	500-5000	10-50 Вт	4-6
-	-	0,1-1Вт	4-6
3	-	200 кВт	4-6

## Газовые лазеры

Активная среда	Способ возбуждения	Длина волны, нм	Режим	Длительность импульсов	Частота повторения Гц	Мощность	Расходимость излучения, мрад
He+Ne	газовый разряд	0,63;	непрерывный	-	-	1-50 мВт	0,5-3
CO <sub>2</sub>	газовый разряд в отпаянной трубке	1,5; 3,3; 6,6	непрерывный	-	-	5-100 Вт	2-10
>	газовый разряд с прокачкой смеси электроионизационный	10,6	непрерывный	-	-	$10^2-10^4$ Вт	2-10
>	газодинамический	10,6	импульсный	1-50 мкс	25	$10^6$ Вт	2-10
>	химический	10,6	импульсный	20 мкс	-	$10^8$ Вт	2-10
>	химический	10,6	непрерывный	-	-	100 кВт	2-10
>	фотосенсициация	0,6	непрерывный	-	-	10 кВт	1
>	фотосенсициация	2,6-3,5	импульсный	1 мкс	-	$10^8$ Вт	1
HF	фотосенсициация	0,6	непрерывный	-	-	10 кВт	-
		2,6-3,5	импульсный	20 нс	-	$2 \cdot 10^{11}$ Вт	-
		1,315	импульсный	1 мкс-1 мс	-	$10^5-10^7$ Вт	1

Твердотельные лазеры

Активная среда	Способ возбуждения	Длина волны, нм	Режим	Длительность импульсов, нс	Частота повторения, Гц	Мощность, Вт	Расходимость излучения, мрад	Способ возбуждения Активная среда	Длина волны, мкм	Режим, мкм	
Рубин	ламповая накачка	0,694	импульсный свободной генерации	1-0,5 мс	0,001-1	$10^5-10^6$	10-40	Неорганические жидкости и (>50) Органические	ламповая накачка лазерная накачка лазерная накачка	0,22-0,86	импульсный
Стекло с примесью Nd	ламповая накачка	12,058	импульсный свободной генерации	1-3 мс	1-2	$10^5-10^6$	3-15	Активная среда	инжекция носителей через р-,п-переходы	0,7-0,9	импульсный непрерывный
			импульсный с модулированной добротностью	20 нс		$10^6-10^9$	1-3		электронным пучком	0,49-0,69	импульсный
			режим	3-30 нс	0,001-0,1	$10^8-5 \cdot 10^{10}$	0.5-1				
						$10^{11}-10^{13}$					

## **Вопросы к экзамену по курсу "Радиофизика и электроника"**

### **Основы теории колебаний**

1. Собственные колебания
2. Вынужденные колебания
3. Колебания в нелинейной системе
4. Параметрические колебания
5. Автоколебания

### **Основы теории регистрирующих приборов**

6. Спектральные и временные преобразования
7. Квазистатические приборы
8. Сейсмические приборы
9. Баллистические приборы
10. Резонансные приборы
11. Модуляция и преобразование сигналов
12. Нелинейные преобразования (детектирование, гетеродинирование)

### **Основы теории волн**

13. Волновое уравнение для электромагнитных волн
14. Волновое уравнение для упругих волн
15. Решения волнового уравнения и основные характеристики волн
16. Пространственная структура волнового поля
17. Теория излучения
18. Метод Кирхгофа. Функция Грина волнового уравнения
19. Разложение волнового поля по плоским волнам

### **Приемно-передающие устройства и преобразование волновых сигналов**

20. Принцип работы оптического квантового генератора (лазера)
21. Модуляция и передача оптического излучения
22. Прием и преобразование оптического излучения
23. Излучение и прием СВЧ и УК радиоволн
24. Распространение СВЧ и УК радиоволн в земной атмосфере
25. Излучение и прием акустических волн

### **Волновая диагностика объектов и сред**

26. Классификация волновых методов диагностики
27. Импульсные измерения
28. Доплеровские измерения
29. Спектральные измерения
30. Рассеяние волн в неоднородной среде
31. Введение в томографию

## Основы обработки волновых сигналов

32. Корреляционный прием и адаптивная фильтрация
33. Акустоэлектронные устройства аналоговой обработки сигналов
34. Интерферометрия и оптическая обработка сигналов
35. Основы Фурье-оптики

### КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Оценка	Полнота, системность, прочность знаний	Обобщенность знаний
«5»	Изложение полученных знаний в устной, письменной или графической форме, полное, в системе, в соответствии с требованиями учебной программы; допускаются единичные несущественные ошибки, самостоятельно исправляемые студентами.	Выделение существенных признаков изученного с помощью операций анализа и синтеза; выявление причинно-следственных связей; формулировка выводов и обобщений; свободное оперирование известными фактами и сведениями с использованием сведений из других предметов.
«4»	Изложение полученных знаний в устной, письменной и графической форме, полное, в системе, в соответствии с требованиями учебной программы; допускаются отдельные несущественные ошибки, исправляемые студентами после указания преподавателя на них.	Выделение существенных признаков изученного с помощью операций анализа и синтеза; выявлений причинно-следственных связей; формулировка выводов и обобщений, в которых могут быть отдельные несущественные ошибки; подтверждение изученного известными фактами и сведениями.
«3»	Изложение полученных знаний неполное, однако это не препятствует усвоению последующего программного – материала; допускаются отдельные существенные ошибки, исправление с помощью преподавателя.	Затруднения при выполнении существенных признаков изученного, при выявлении причинно-следственных связей и формулировке выводов.
«2»	Изложение учебного материала неполное, бессистемное, что препятствует усвоению последующей учебной	Бессистемное выделение случайных признаков изученного; неумение производить простейшие операции анализа и

	информации; существенные ошибки, неисправляемые даже с помощью преподавателя.	синтеза; делать обобщения, выводы.
«1»	Полное незнание и непонимание учебного материала (студент не может ответить ни на один поставленный вопрос).	_____

**Зачет и экзамен** – итоговая аттестация по дисциплине. Оценка (зачет) по этим видам контроля складывается из текущей работы студента в семестре, промежуточного контроля, самостоятельной работы и ответа на экзамене (зачете) (40% - промежуточный контроль знаний студентов, 60% - результаты итогового зачета (экзамена)).

Кафедра имеет право перераспределить это соотношение до 10%.

**Промежуточный контроль** – осуществляется два раза в семестр в виде контрольных точек. Преподаватель проверяет знания студентов в виде контрольных работ, тестов и др. по блоку изученной дисциплины. Фиксируется в журналах успеваемости, находящихся в деканатах. Результаты учитываются при допуске к сдаче зачета или экзамена.

### Билеты к экзаменам

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 1	
1. Собственные колебания 2. Метод Кирхгофа. Функция Грина волнового уравнения	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 2	
1. Вынужденные колебания 2. Разложение волнового поля по плоским волнам	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 3	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Колебания в нелинейной системе</li> <li>2. Принцип работы оптического квантового генератора (лазера)</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 4	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Параметрические колебания</li> <li>2. Модуляция и передача оптического излучения</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 5	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Автоколебания</li> <li>2. Прием и преобразование оптического излучения</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 6	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Спектральные и временные преобразования</li> <li>2. Излучение и прием СВЧ и УК радиоволн</li> </ol>	



<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 7	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Квазистатические приборы</li> <li>2. Распространение СВЧ и УК радиоволн в земной атмосфере</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 8	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Сейсмические приборы</li> <li>2. Излучение и прием акустических волн</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 9	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Баллистические приборы</li> <li>2. Классификация волновых методов диагностики</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 10	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Резонансные приборы</li> <li>2. Импульсные измерения</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 11	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Модуляция и преобразование сигналов</li> <li>2. Доплеровские измерения</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 12	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Нелинейные преобразования (детектирование, гетеродинирование)</li> <li>2. Спектральные измерения</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 13	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Волновое уравнение для электромагнитных волн</li> <li>2. Рассеяние волн в неоднородной среде</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " _____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 14	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Волновое уравнение для упругих волн</li> <li>2. Введение в томографию</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 15	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Решения волнового уравнения и основные характеристики волн</li> <li>2. Корреляционный прием и адаптивная фильтрация</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 16	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Пространственная структура волнового поля</li> <li>2. Акустоэлектронные устройства аналоговой обработки сигналов</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 17	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Теория излучения</li> <li>2. Интерферометрия и оптическая обработка сигналов</li> </ol>	

<u>Амурский Государственный Университет</u>	
Утверждено на заседании кафедры " ____ " _____ 2010г. Заведующий кафедрой "Утверждаю"	Кафедра ТиЭФ Факультет инженерно-физический Курс 6 Дисциплина - "Радиофизика и электроника"
Экзаменационный билет № 18	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Метод Кирхгофа. Функция Грина волнового уравнения</li> <li>2. Основы Фурье-оптики</li> </ol>	

