

Министерство образования и науки РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ИиУС

_____ А.В. Бушманов

«__» _____ 2010 г.

Учебно-методический комплекс дисциплины

Обработка экспериментальных данных

для направления подготовки 230100.68

Информатика и вычислительная техника

Составитель: Ерёмина В.В.

2010 г.

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета*

Обработка экспериментальных данных для направления подготовки 230100.68 «Информатика и вычислительная техника»: учебно-методический комплекс дисциплины. / Еремина В.В. – Благовещенск. Изд-во Амурского гос. ун-та, 2010. – 42 с.

Учебно-методическое пособие содержит: рабочую программу преподавания дисциплины; методические указания и учебные задания для выполнения курса практических и лабораторных работ.

1. Рабочая программа

По дисциплине:	Обработка экспериментальных данных
Для направления подготовки магистра:	230100.68 – Информатика и вычислительная техника
Курс: 6	Семестр: С
Лекции: 18 (час.)	Экзамен: нет
Практические занятия: 18 (час.)	Зачет: С семестр
Лабораторные занятия: 36 (час.)	
Самостоятельная работа: 62 (час.)	
Всего часов: 134 (час.)	
Составитель: Ерёмина В.В.	

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

1.1. Цель преподавания дисциплины

Изучение способов выявления закономерностей в характеристиках исследуемых объектов и процессов.

1.2. Задачи изучения дисциплины

По завершению курса «Обработка экспериментальных данных», обучаемые должны приобрести устойчивые знания по организации регистрации первичных параметров, их сбора и обработки.

1.3. Перечень разделов (тем) необходимых дисциплин

1.3.1. Математический анализ: интегральное исчисление; графики функций.

1.3.2. Теория вероятностей и математическая статистика.

1.3.3. Пакеты прикладных программ.

2. Содержание дисциплины

2.1. Региональный компонент

Дисциплины по выбору

2.2. Лекционные занятия

2.2.1. Тема 1. Общая характеристика экспериментальных данных: источники и вид представления экспериментальных данных; цели обработки экспериментальных данных; задачи формирования и обработки экспериментальных данных – 2 ч.

- 2.2.2. Тема 2. Базовые понятия и операции экспериментальных данных: эмпирическая функция распределения; оценки параметров распределения и их свойства; оценка моментов и квантилей распределения – 4 ч.
 - 2.2.3. Тема 3. Проверка статистических гипотез: сущность задачи проверки статистических гипотез; типовые распределения; проверка гипотез о законе распределения – 4 ч.
 - 2.2.4. Тема 4. Методы оценки параметров распределения: точечная оценка параметров распределения; интервальная оценка параметров распределения – 4 ч.
 - 2.2.5. Тема 5. Аппроксимация закона распределения экспериментальных данных: задачи аппроксимации; аппроксимация на основе основных распределений; аппроксимация на основе специальных рядов; аппроксимация на основе универсальных свойств – 4 ч.
- 2.3. Практические занятия
- 2.3.1. Практическое занятие 1. Определение характеристик случайных величин на основе опытных данных: генеральные и выборочные совокупности; частота, относительная частота; статистическая функция – 2 ч.
 - 2.3.2. Практическое занятие 2. Определение характеристик случайных величин на основе опытных данных: среднее значение случайной величины; дисперсия и среднее квадратичное отклонение случайной величины – 2 ч.
 - 2.3.3. Практическое занятие 3. Определение характеристик случайных величин на основе опытных данных: моменты случайной величины по данным выборки; асимметрия и эксцесс – 2 ч.
 - 2.3.4. Практическое занятие 4. Распределение с равномерной плотностью – 2 ч.
 - 2.3.5. Практическое занятие 5. Распределение Пуассона – 2 ч.
 - 2.3.6. Практическое занятие 6. Нормальное распределение – 2 ч.
 - 2.3.7. Практическое занятие 7. Распределение Шарлье – 2 ч.
 - 2.3.8. Практическое занятие 8. Критерии согласия Пирсона и Романовского – 2 ч.
 - 2.3.9. Практическое занятие 9. Простейшие способы обработки опытных данных – 2 ч.
- 2.4. Лабораторные занятия
- 2.4.1. Лабораторная работа 1. Расчет характеристик дискретной случайной величины – 4 ч.
 - 2.4.2. Лабораторная работа 2. Выравнивание статистических распределений – 4 ч.
 - 2.4.3. Лабораторная работа 3. Проверка гипотезы о виде закона распределения вероятностей результата измерения – 4 ч.
 - 2.4.4. Лабораторная работа 4. Определение интервальных оценок параметров распределения – 4 ч.

- 2.4.5. Лабораторная работа 5. Многократные измерения с равноточными значениями отсчета – 4 ч.
- 2.4.6. Лабораторная работа 6. Многократные измерения с неравноточными значениями отсчета – 4 ч.
- 2.4.7. Лабораторная работа 7. Обработка результатов двух серий измерений – 4 ч.
- 2.4.8. Лабораторная работа 8. Обеспечение требуемой точности при многократном измерении – 4 ч.
- 2.4.9. Лабораторная работа 9. Обработка экспериментальных данных, входящих в неравно рассеянные серии – 4 ч.
- 2.5. Самостоятельная работа студентов
 - 2.5.1. Интерполяция функций с помощью приближения сплайнами – 30 ч.
 - 2.5.2. Подбор параметров способом наименьших квадратов – 32 ч.
Рекомендуемая литература:
 1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. – 231 с.
 2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003. – 272 с.
 3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. высшая математика в упражнениях и задачах: Высшая школа, 1997. – 240 с.
 4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
 5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.
 6. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1998. – 198 с.
 7. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшее образование, 2001. – 302 с.
- 2.6. Вопросы к зачету
 - 2.6.1. Источники и вид представления экспериментальных данных
 - 2.6.2. Цели обработки экспериментальных данных
 - 2.6.3. Задачи формирования и обработки экспериментальных данных
 - 2.6.4. Эмпирическая функция распределения
 - 2.6.5. Оценки параметров распределения и их свойства
 - 2.6.6. Оценка моментов и квантилей распределения
 - 2.6.7. Сущность задачи проверки статистических гипотез
 - 2.6.8. Типовые распределения
 - 2.6.9. Проверка гипотез о законе распределения
 - 2.6.10. Точечная оценка параметров распределения
 - 2.6.11. Интервальная оценка параметров распределения

- 2.6.12. Задачи аппроксимации
 - 2.6.13. Аппроксимация на основе основных распределений
 - 2.6.14. Аппроксимация на основе специальных рядов
 - 2.6.15. Аппроксимация на основе универсальных свойств
 - 2.7. Оценочные критерии
- Обучаемый получает зачет по изучаемой дисциплине в случае, если он свободно владеет основными теоретическими понятиями и определениями, а также умеет правильно использовать рассмотренные практические методы.

3. Учебно-методические материалы по дисциплине

3.1. Используемая и рекомендуемая литература

Основная:

- 3.1.1. Половко А.М. Mathematica для студентов: учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 558 с.
- 3.1.2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – М. Юрайт: Высшее образование, 2009. – 480 с.
- 3.1.3. Куликов Е.И. Прикладной статистический анализ: учебное пособие. – М.: Горячая линия – Телеком, 2008. – 463 с.
- 3.1.4. Смолянцов Н.К. Matlab: программирование на Visual C++, Borland JBuilder, VBA: учебник. – М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2009. – 456 с.
- 3.1.5. Мятлев В.Д. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: учебное пособие. – М.: Академия, 2009. – 320 с.
- 3.1.6. Кудлаев Э.М. Разделимые статистики и их применения: монография. – М.: Либроком, 2009. – 215 с.
- 3.1.7. Димидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009. – 672 с.
- 3.1.8. Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента: учебное пособие. – СПб.: Лань, 2008. – 118 с.
- 3.1.9. Кацко И.А., Паклин Н.Б. Практикум по анализу данных на компьютере: учебно-практическое пособие. – М.: КолосС, 2009. – 279 с.

Дополнительная:

- 3.1.10. Боровиков В.П., Боровиков И.П. STATISTICA – Статистический анализ и обработка данных в среде Windows. – М.: Информационно-издательский дом "Филинь", 1998.
- 3.1.11. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1999.
- 3.1.12. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. – М.: Финансы и статистика, 1998.
- 3.1.13. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики. – М.: Финансы и статистика, 1999.

- 3.1.14. Иванов А.Ю., Полковников С.П., Ходасевич Г.Б. Военно-технические основы построения и математическое моделирование перспективных средств и комплексов автоматизации. – СПб.: ВАС, 1997.
- 3.1.15. Скрипник В.М., Назин А.Е. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. – Минск: Наука и техника, 1981.
- 3.2. Учебные пособия:
- 3.2.1. Карточки с заданиями и методическими указаниями по выполнению лабораторных работ.

4. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля				
			Практические	Лабораторные		Содержание	Часы					
1	2	3	4	5	6	7	8	9				
1	1	2.2.1	2.3.1	2.4.1	3.2.1	2.5.1	30	злр ¹				
2												
3	2	2.2.2	2.3.2	2.4.2	3.2.1			2.5.1	30	злр		
4												
5												
6												
7	3	2.2.3	2.3.4	2.4.4	3.2.1					2.5.1	30	злр сб ²
8												
9												
10	4	2.2.4	2.3.5	2.4.5	3.2.1							2.5.2
11												
12												
13												
14	5	2.2.5	2.3.6	2.4.6	3.2.1	2.5.2	32	злр				
15												
16												
17												
18			2.3.8	2.4.8	3.2.1			2.5.2	32	злр сб		
16												
17			2.3.9	2.4.9	3.2.1					2.5.2	32	злр Зач ³
18												

¹ Защита отчета о выполнении лабораторной работы

² Собеседование по результатам самостоятельной работы студентов

³ Зачет по изучаемой дисциплине

2. Конспект лекций

Тема 1. Общая характеристика экспериментальных данных

1.1 Источники и вид представления экспериментальных данных

Экспериментальные исследования событий и процессов основаны на наблюдениях, в ходе которых регистрируются различные факты искусственного и естественного происхождения.

Источниками экспериментальных данных являются:

1. результаты наблюдения за реальными объектами и протекающими в них процессами. Наблюдения могут проводиться в ходе испытаний или в ходе обычной эксплуатации;
2. результаты моделирования объектов. В первую очередь к ним следует отнести результаты имитационного моделирования;
3. технические, экономические, научные отчеты и обзоры, публикуемые в различных изданиях, например, сведения о результатах испытаний или о характеристиках однотипных устройств различных производителей;
4. результаты опросов специалистов и другие источники.

Обработка ЭД, получаемых от различных источников, имеет много общего. Однако организация сбора и интерпретации ЭД специфична для конкретной предметной области. В дальнейшем обработка ЭД будет рассматриваться применительно к результатам наблюдения за функционированием АСОИУ, ее элементов или их моделей.

Вид ЭД определяет форму представления, степень зависимости от времени, характер данных.

Одной из основных форм является символьная, которая включает представление данных в виде чисел, двоичных величин или текста. Для задания значений соответствующих величин применяются различные шкалы измерений. Описательные (качественные) признаки измеряются на основе номинальных и порядковых шкал. Номинальные шкалы обеспечивают только группирование объектов по признаку наличия у них некоторых общих свойств, но не позволяют проводить ранжирование объектов. Порядковые шкалы обеспечивают возможность упорядочивания данных по признакам "больше", "меньше", "равно", но при этом не указывается, на сколько одно значение признака больше или меньше другого.

Количественные свойства отображаются числами в относительных или абсолютных шкалах измерений. В относительных шкалах точки начала отсчета и масштаб измерений имеют условный характер. Например, температуру мож-

но измерять в относительных шкалах по Цельсию, Реомюру, Фаренгейту. Исходя из этого, результаты количественного сравнения величин зависят от используемой шкалы, а некоторые операции над количественными признаками недопустимы. Например, температура одного объекта выше температуры другого на три градуса Цельсия, эти три градуса не равны трем градусам шкалы Фаренгейта. Бессмысленно говорить, во сколько раз температура одного объекта выше температуры другого, в частности, нельзя сказать, что температура $+10$ С в два раза выше, чем $+5$ С. Абсолютная шкала обеспечивает однозначное представление точки отсчета и масштаба. Примерами абсолютных шкал является шкала температур по Кельвину, шкала вероятностей. Эти шкалы позволяют дать однозначные ответы на вопросы о том, на сколько или во сколько раз одна величина больше (меньше) другой. Именно применение относительных и абсолютных шкал дает возможность проводить количественную обработку ЭД. Но при обработке следует применять только те операции, которые допускаются применяемой шкалой измерений.

Количественные характеристики (параметры) представимы дискретными или непрерывными величинами. Дискретные параметры принимают только отдельные значения, без промежуточных значений между ними. Часто дискретные параметры имеют такое большое количество допустимых значений, что их на практике считают квазинепрерывными. Непрерывные параметры способны принимать любые значения из некоторого допустимого диапазона. В процессе обработки непрерывные величины всегда округляют и представляют ограниченным числом разрядов, т. е. они становятся квазинепрерывными. На практике ЭД отображают с разрядностью, обеспечивающей относительную погрешность не более единиц или десятых долей процента.

Экспериментальные данные могут быть представлены не только в символической, но и в других формах: графической (графики, осциллограммы, штриховые рисунки, цветные изображения и полутоновые рисунки); *аудиоданных*. Такие данные обрабатывают непосредственно или предварительно преобразуют в числовую форму.

В дальнейшем рассматривается только числовая форма представления данных как универсальная и широко распространенная форма представления информации, количественно характеризующая параметры объектов и процессов. А сами параметры считаются непрерывными величинами, если особо не оговорено иное. Обработка данных, представленных в других формах, обладает существенной спецификой и требует отдельного рассмотрения.

Результаты наблюдений носят детерминированный или случайный характер. Большинство событий и процессов в автоматизированных системах можно считать случайными. Именно на обработке таких данных сосредоточено внимание в пособии.

Существенной особенностью задач оценивания параметров АСОИУ является наличие цензурирования, под которым понимается отсутствие в результатах наблюдений каких-либо элементов. Цензурирование возникает по ряду причин, например, как следствие разновременности начала и окончания работы различных устройств или из-за того, что время свершения некоторого события выходит за пределы периода наблюдения. Обработка таких ЭД требует применения специального математического аппарата.

1.2 Цели обработки экспериментальных данных

Основные показатели АСОИУ, например, показатели производительности и надежности, носят вероятностный характер и не могут быть непосредственно измерены. Для их оценки следует применять косвенные способы на основе регистрации соответствующих первичных параметров и последующей обработки накопленных данных с привлечением специальных математических методов. Иначе говоря, ЭД представляют собой лишь наборы возможных случайных значений показателей, зарегистрированных в некоторые моменты времени. Например, продолжительность наработок до отказа некоторой совокупности однотипных устройств можно рассматривать как множество возможных случайных значений показателя "наработка до отказа". Именно по наработкам и необходимо оценить значение этого показателя. Сам показатель как случайная величина характеризуется законом распределения, моментами распределения или другими параметрами, которые и следует определить.

Основными целями обработки ЭД являются следующие:

- оценка значений показателей качества средств, комплексов или системы в целом. На стадиях создания такая оценка проводится в интересах обоснования принимаемых решений по построению объектов, проверки показателей на соответствие требованиям, выявления существенных факторов, влияющих на функционирование объектов, выявления причин несоответствия требованиям. На стадии эксплуатации обработка ЭД проводится также для решения задач управления объектом: изменения режимов работы объекта; изменения порядка обработки информации; обоснования данных для модернизации объекта (изменения конфигурации технических и программных средств); адаптации объекта к условиям функционирования;
- сжатие информации о функционировании объекта, ее обобщение для последующего применения в интересах исследования подобных объектов, обоснования данных для создания новых систем;
- выявление закономерностей функционирования объекта в конкретных условиях эксплуатации, т. е. установление зависимостей между параметрами объекта, внешней среды и показателями качества объекта. Выявленные закономерности применяют для поиска оптимальных значений

параметров при синтезе новых систем, для упрощенного описания объекта в модели суперсистемы;

- выявление существенных параметров системы и внешней среды;
- изучение типологии объектов (распознавание образов, классификация объектов);
- прогнозирование развития объектов в интересах организационного и технологического управления.

Следует помнить, что результаты обработки ЭД не гарантируют достоверного описания неизвестных показателей или закономерностей, их необходимо рассматривать только лишь как более-менее удачную аппроксимацию соответствующих характеристик.

Необходимость сбора и обработки ЭД обусловлена объективными обстоятельствами, так как действительные значения показателей качества сложных объектов обычно существенно отличаются от рассчитанных на стадиях проектирования. Эти различия являются следствием ряда причин:

- на стадиях проектирования нет достаточно полных и точных представлений о характеристиках процессов, протекающих в объекте и во внешней среде, поэтому при проектировании приходится вводить существенные допущения и ограничения. На практике часть принятых допущений оказывается не вполне справедливой;
- с вводом в действие объекта внешняя среда постепенно меняет свои характеристики, например, меняются стиль и методы работы пользователей, появляются дополнительные потребности в решении задач. Такие изменения заранее предусмотреть невозможно;
- условия эксплуатации, квалификация обслуживающего персонала в разных организациях имеют свою специфику;
- в ходе эксплуатации изменяются характеристики технических, программных и информационных средств, меняется их взаимное отображение. Эти обстоятельства приводят к изменению характеристик потоков запросов на решение задач и параметров их обслуживания.

Таким образом, фактические значения показателей качества не только отличаются от расчетных, но и меняются с течением времени, имеют свои особенности для одних и тех же типов объектов, эксплуатируемых в различных организациях, претерпевают колебания, зависящие от времени, характера выполняемых на объекте работ.

В зависимости от стадии жизненного цикла АСОИУ задачи обработки ЭД имеют ряд особенностей. На стадии создания имеется принципиальная воз-

возможность проведения активных и пассивных экспериментов. Понятие "активный" подразумевает возможность выбора объема экспериментов, последовательности и значений характеристик воздействий на объект по желанию исследователя. Проведение активных экспериментов позволяет расширить диапазон условий, при которых проводится оценивание качества. А специальным образом подобранные условия проведения исследования и порядок задания внешних воздействий, т. е. рационально обоснованные планы экспериментов, обеспечивают взаимную статистическую независимость результатов испытаний. Эти обстоятельства значительно облегчают обработку ЭД, повышают качество получаемых оценок, позволяют разделить влияние различных факторов при построении модели функционирования объекта. Активные эксперименты в основном проводятся на завершающих стадиях создания в виде испытаний опытных образцов, фрагментов систем и т. п. Вопросы постановки активных экспериментов, методов обработки их результатов изучаются в рамках специальной теории планирования экспериментов.

Реальные условия эксплуатации объекта в конкретной организации могут отличаться от предполагаемых при проведении испытаний. В связи с этим, показатели, установленные в ходе испытаний, несут в себе известную долю абстракции. На стадии создания время испытаний весьма ограничено, что не дает возможности сформировать большой объем ЭД для полноценной оценки искомым показателей.

В пассивных экспериментах количество наблюдений, последовательность и значения воздействий определяются реальной обстановкой использования объектов. Иначе говоря, исследователь практически лишен возможности управления качеством и количеством ЭД.

На стадии эксплуатации возможности проведения активных экспериментов значительно ограничены или вообще отсутствуют, что обычно приводит к взаимной зависимости результатов наблюдений. Наличие такой зависимости затрудняет обработку полученных данных, а игнорирование данного обстоятельства приводит к смещению значений получаемых оценок, невозможности разделения влияния различных факторов на показатели функционирования и к другим нежелательным последствиям. Нестационарные условия эксплуатации, влияние на объекты периодических или нерегулярно изменяющихся воздействий (трендов) обуславливают необходимость рассмотрения характеристик не как случайных величин, а как случайных функций. Однако из-за слабой разработанности методов и средств оценки параметров случайных процессов по результатам наблюдения обычно предполагается, что процесс функционирования объекта носит стационарный или кусочно-стационарный характер.

1.3 Задачи формирования и обработки экспериментальных данных

Экспериментальная оценка качества предполагает решение ряда взаимосвязанных задач. К этим задачам следует отнести:

- составление перечня регистрируемых параметров, необходимых для вычисления оценок показателей АСОИУ;
- выбор моментов и способов регистрации первичных параметров;
- выбор или разработку методов преобразования ЭД для оценивания требуемых показателей;
- разработку алгоритмов измерения, создание программных, информационных и других средств, реализующих соответствующие процедуры регистрации, хранения, обработки и выдачи данных. Эта группа задач носит прикладной характер и далее не рассматривается.

Составление перечня регистрируемых параметров (определение информационной потребности) включает в себя несколько этапов.

1. Определение состава свойств объекта и внешней среды, подлежащих экспериментальному оцениванию. В этот состав следует включать только необходимые свойства, так как расширение перечня ведет к существенному усложнению задачи, а также к большим накладным расходам ресурсов АСОИУ на оценивание в ущерб выполнению основных функций.
2. Последовательная декомпозиция сложных свойств до уровня простых, однозначно характеризующих соответствующими показателями. Перечень свойств следует определять с детализацией для АСОИУ в целом и для исследуемых ее компонентов. В результате выполнения данного этапа будет построено дерево свойств исследуемого объекта, корнем которого выступает качество объекта, а листьями – его простые свойства.
3. Выбор показателей, характеризующих каждое свойство или их группы, с учетом специфики реализации конкретных функций объекта. Например, специфическими показателями оцениваются свойства надежности непрерывно и дискретно выполняемых функций.
4. Формирование статистического определения каждого оцениваемого показателя и детализация каждого параметра до уровня таких величин, которые могут быть измерены (зарегистрированы) в ходе наблюдения за работой объекта.
5. Объединение первичных регистрируемых параметров, используемых при оценке различных показателей, что и дает информационную потребность. В ходе объединения следует учитывать неоднородность компонент АСОИУ по назначению и режимам работы. Игнорирование неоднородности приводит к смещению оценок.

Выбор моментов и способов регистрации первичных параметров основывается на анализе состава регистрируемых сведений, возможностей аппаратных и программных средств конкретной АСОИУ. Для регистрации первичных параметров нецелесообразно создавать или применять специальную аппаратуру, лучше использовать программные средства. Часть таких средств входит в состав типовых операционных систем, для их применения требуется провести всего лишь настройку. Другие средства подлежат разработке.

Существуют два основных способа регистрации – регистрация системных событий и периодическая регистрация.

Первый способ предусматривает выполнение операций регистрации первичных сведений (проведение измерений) в ходе выполнения управляющих программ операционной системы или программ прикладных задач. Таким образом регистрируются моменты прихода заявок на решение задач, появление сигналов прерываний от схем контроля и другие подобные события.

Второй способ предполагает включение специальной программы регистрации через определенные промежутки времени. Эта программа производит “моментные снимки” состояния соответствующих элементов АСОИУ. “Фотографированию” подлежат различного рода системные таблицы, отражающие состояние очередей, устройств и т. д.

Достоинством первого способа является высокая точность регистрации измеряемых величин. Однако реализация этого способа сложнее, чем второго, поскольку требуется включение соответствующих программных компонентов во множество других программ. Это усложняет организацию их разработки и увеличивает потребности в ресурсах на создание и выполнение. Кроме того, применение первого способа затрудняет проведение модернизации измерительных средств (приходится перерабатывать большой объем программ).

Второй способ существенно проще в реализации и модификации, так как средства измерений остаются относительно автономными в конструктивном отношении и в отношении включения их в работу. Эти средства в случае необходимости проще модернизировать или отключить, в частности, при возникновении перегрузки системы. Применение данного способа предполагает выбор некоторого спектра частот включения в работу средств регистрации в соответствии с инерционностью процессов, протекающих в исследуемом объекте и во внешней среде. Например, понятно, что интенсивность изменения состояния очередей запросов существенно выше, чем интенсивность отказов устройств. Выбор частоты регистрации проводят с учетом минимизации затрат ресурсов комплекса на проведение измерений при обеспечении заданной точности регистрации параметров.

Учитывая достоинства и недостатки указанных способов, их следует применять совместно: одна часть сведений регистрируется на основе системных событий, а другая – на основе моментных снимков.

Информационная потребность и совокупность способов регистрации первичных параметров составляют модель наблюдаемости АСОИУ.

Результатами выполнения процедур регистрации являются совокупности данных, характеризующие системные события или состояния ресурсов системы в определенный момент времени.

Выбор или разработка методов преобразования ЭД для оценивания требуемых показателей предполагает формализацию описания процедур первичной, предварительной и основной обработки результатов регистрации.

Первичная обработка данных направлена на преобразование зарегистрированных величин к виду, удобному для последующего хранения и обработки. При этом не требуется применения сложного математического аппарата. В ходе первичной обработки данные подвергаются "сжатию" (например, результат регистрации заносится в соответствующий классификационный разряд статистического ряда) и записываются в специальные массивы, хранящиеся в основной или внешней памяти ЭВМ.

Основная особенность алгоритмов регистрации и первичной обработки состоит в необходимости их реализации в реальном масштабе времени с жесткими ограничениями на время включения и выполнения. При этом они не должны вносить заметных искажений в выполнение основных программ АСОИУ.

Предварительная обработка данных связана с их обобщением, сортировкой по системным событиям и периодам наблюдения.

Основная обработка зарегистрированных данных направлена на определение тех показателей и функций, которые вытекают из целей экспериментального исследования. Реализация соответствующих процедур предусматривает широкое использование сложного математического аппарата с большим объемом вычислений.

Предварительная и основная обработка выполняются в фоновом режиме, поэтому они не предъявляют жестких требований к ресурсам АСОИУ. Эта обработка вообще может проводиться на других вычислительных средствах вне реального масштаба времени.

Выполнение процедур регистрации и обработки неизбежно связано с внесением ошибок. Источниками ошибок являются:

- инструментальные ошибки. Связаны с погрешностью процедур регистрации (например, с задержками включения в работу) и возможными

сбоями в их выполнении. Эти ошибки в основном носят случайный характер;

- методические ошибки. Определяются принятыми допущениями и ограничениями используемых методов первоначальной и предварительной обработки (представление непрерывных величин дискретными значениями, обобщение измерений в виде классификационного статистического ряда и т. д.). Методические ошибки имеют как случайный, так и систематический характер.

В дальнейшем будем считать, что по каждой оцениваемой характеристике формируется совокупность наблюдений $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящая из множества результатов регистрации. Отметим ряд основных свойств данной совокупности:

- конкретные значения являются результатом проявления одной и той же закономерности;
- совокупность состоит из варьирующихся величин, отличающихся своими значениями. Свойство вариации вызывает необходимость обработки всего множества наблюдений (если бы элементы совокупности были тождественны друг другу, то не было бы потребности обрабатывать всю совокупность);
- результаты регистрации носят случайный характер и содержат в себе неустраняемые ошибки.

Результаты обработки ЭД носят частный характер, и без должного обоснования по ним нельзя делать обобщающие выводы относительно аналогичных объектов, функционирующих в других условиях.

Тема 2. Базовые понятия и операции экспериментальных данных

2.1. Эмпирическая функция распределения

Методы обработки ЭД опираются на базовые понятия теории вероятностей и математической статистики. К их числу относятся понятия генеральной совокупности, выборки, эмпирической функции распределения.

Под генеральной совокупностью понимают все возможные значения параметра, которые могут быть зарегистрированы в ходе неограниченного по времени наблюдения за объектом. Такая совокупность состоит из бесконечного множества элементов. В результате наблюдения за объектом формируется ограниченная по объему совокупность значений параметра x_1, x_2, \dots, x_n . С формальной точки зрения такие данные представляют собой выборку из генеральной совокупности. Будем считать, что выборка содержит полные наработки до системных событий (цензурирование отсутствует). Наблюдаемые значения x_i

называют вариантами, а их количество – объемом выборки n . Для того чтобы по результатам наблюдения можно было делать какие-либо выводы, выборка должна быть репрезентативной (представительной), т. е. правильно представлять пропорции генеральной совокупности. Это требование выполняется, если объем выборки достаточно велик, а каждый элемент генеральной совокупности имеет одинаковую вероятность попасть в выборку.

Под распределением понимают соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами или частостями. Пусть n_x – количество наблюдений, при которых случайные значения параметра X меньше x . Частость события $X < x$ равна n_x / n . Это отношение является функцией от x и от объема выборки: $F_n(x) = n_x / n$. Функция $F_n(x)$ определяется по ЭД, поэтому ее называют эмпирической функцией распределения. В отличие от эмпирической функции $F_n(x)$ функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют теоретической функцией распределения, она характеризует не частость, а вероятность события $X < x$. Из теоремы Бернулли вытекает, что частость $F_n(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ при неограниченном увеличении n . Следовательно, при большом объеме наблюдений теоретическую функцию распределения $F(x)$ можно заменить эмпирической функцией $F_n(x)$.

График эмпирической функции $F_n(x)$ представляет собой ломаную линию. В промежутках между соседними членами вариационного ряда $F_n(x)$ сохраняет постоянное значение. При переходе через точки оси x , равные членам выборки, $F_n(x)$ претерпевает разрыв, скачком возрастающая на величину $1/n$, а при совпадении l наблюдений – на l/n .

2.2. Оценки параметров распределения и их свойства

Значение параметра, вычисленное по ограниченному объему ЭД, является случайной величиной, т. е. значение такой величины от выборки к выборке может меняться заранее не предвиденным образом. Следовательно, в результате обработки ЭД определяется не значение параметра T , а только лишь его приближенное значение. Получить статистическую оценку параметра теоретического распределения означает найти функцию от имеющихся результатов наблюдения, которая и даст приближенное значение искомого параметра. Различают два вида оценок – точечные и интервальные. Точечными называют такие оценки, которые характеризуются одним числом. При малых объемах выборки точечные оценки могут значительно отличаться от истинных значений параметров, поэтому их применяют при большом объеме выборки. Интервальные оценки задаются двумя числами, определяющими вероятный диапазон возможного значения параметра. Эти оценки применяются для малых и для больших выборок. Рассмотрим вначале точечные оценки.

Применительно к каждому оцениваемому параметру закона распределения генеральной совокупности существует множество функций, позволяющих вычислить искомые значения. Например, оценку математического ожидания

можно вычислить, взяв среднее арифметическое выборочных значений, половину суммы крайних членов вариационного ряда, средний член выборки и т.д. Указанные функции отличаются качеством оценок и трудоемкостью реализации.

Качество оценок характеризуется такими свойствами, как состоятельность, несмещенность, эффективность и достаточность.

Состоятельность характеризует сходимость по вероятности оценки $\hat{\theta}$ к истинному значению параметра θ при неограниченном увеличении объема выборки n . Свойство состоятельности проявляется при неограниченном увеличении n , а при небольших объемах ЭД наличие этого свойства еще недостаточно для применения оценки.

Несмещенность характеризует отсутствие систематических (в среднем) отклонений оценки от параметра при любом конечном, в том числе и малом, объеме выборки. Использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, приводит к систематическим ошибкам. Не всегда наличие смещения плохо. Оно может быть существенно меньше погрешности регистрации значений параметра или давать дополнительную гарантию выполнения требований к значению параметра (если даже при положительном смещении оценка $\hat{\theta}$ меньше предельно допустимого значения, то несмещенное значение тем более будет отвечать этому условию). В таких ситуациях допустимо применение смещенных оценок, если они вычисляются проще, чем несмещенные. Но даже несмещенная оценка может быть удалена от истинного значения.

Эффективность характеризует разброс случайных значений оценки около истинного значения параметра. Среди всех оценок следует выбрать ту, значения которой теснее сконцентрированы около оцениваемого параметра. Для многих применяемых способов оценивания выборочные распределения параметров асимптотически нормальны, поэтому часто мерой эффективности служит дисперсия оценки. В таком понимании эффективная оценка – это оценка с минимальной дисперсией. При неограниченном увеличении n эффективная оценка является и состоятельной.

Достаточность характеризует полноту использования информации, содержащейся в выборке. Другими словами, оценка $\hat{\theta}$ будет достаточной, если все другие независимые оценки на основе данной выборки не дают дополнительной информации об оцениваемом параметре. Эффективная оценка обязательно является и достаточной.

Рассмотренные свойства применимы также и к ЭД, которые характеризуются многомерными распределениями вероятностей.

Подходы к формированию оценок разработаны в теории несмещенных оценок, предложенной А. Н. Колмогоровым и С. Рао. В данной теории предпо-

лагается известным с точностью до параметра T вид функции плотности распределения наблюдаемой величины $f(x, T)$. Вид распределения устанавливается исходя из априорных соображений, например, на основе общепринятых суждений о характере безотказной работы технических средств. Тогда задача сводится к нахождению такой функции от результатов наблюдений, которая дает несмещенную и эффективную оценку.

Тема 3. Проверка статистических гипотез

3.1. Сущность задачи проверки статистических гипотез

Статистическая гипотеза представляет собой некоторое предположение о законе распределения случайной величины или о параметрах этого закона, формулируемое на основе выборки. Примерами статистических гипотез являются предположения: генеральная совокупность распределена по экспоненциальному закону; математические ожидания двух экспоненциально распределенных выборок равны друг другу. В первой из них высказано предположение о виде закона распределения, а во второй – о параметрах двух распределений. Гипотезы, в основе которых нет никаких допущений о конкретном виде закона распределения, называют непараметрическими, в противном случае – параметрическими.

Гипотезу, утверждающую, что различие между сравниваемыми характеристиками отсутствует, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными колебаниями в выборках, на основании которых производится сравнение, называют нулевой (основной) гипотезой и обозначают H_0 . Наряду с основной гипотезой рассматривают и альтернативную (конкурирующую, противоречащую) ей гипотезу H_1 . И если нулевая гипотеза будет отвергнута, то будет иметь место альтернативная гипотеза.

Различают простые и сложные гипотезы. Гипотезу называют простой, если она однозначно характеризует параметр распределения случайной величины. Сложной гипотезой будет предположение о распределении случайной величины X по нормальному закону, если не фиксируются конкретные значения математического ожидания и дисперсии.

Проверка гипотезы основывается на вычислении некоторой случайной величины – критерия, точное или приближенное распределение которого известно. Обозначим эту величину через z , ее значение является функцией от элементов выборки $z=z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Процедура проверки гипотезы предписывает каждому значению критерия одно из двух решений – принять или отвергнуть гипотезу. Тем самым все выборочное пространство и соответственно множество значений критерия делятся на два непересекающихся подмножества S_0 и S_1 . Если значение критерия z попадает в область S_0 , то гипотеза принимается, а если в область S_1 , – гипотеза отклоняется. Множество S_0 называется об-

ластью принятия гипотезы или областью допустимых значений, а множество S_1 – областью отклонения гипотезы или критической областью. Выбор одной области однозначно определяет и другую область.

Принятие или отклонение гипотезы H_0 по случайной выборке соответствует истине с некоторой вероятностью и, соответственно, возможны два рода ошибок. Ошибка первого рода возникает с вероятностью α тогда, когда отвергается верная гипотеза H_0 и принимается конкурирующая гипотеза H_1 . Ошибка второго рода возникает в том случае, когда принимается неверная гипотеза H_0 , в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1 . Доверительная вероятность – это вероятность не совершить ошибку первого рода и принять верную гипотезу H_0 . Вероятность отвергнуть ложную гипотезу H_0 называется мощностью критерия.

3.2. Типовые распределения

При проверке гипотез широкое применение находит ряд теоретических законов распределения. Наиболее важным из них является нормальное распределение. С ним связаны распределения хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, а также интеграл вероятностей. Для указанных законов функции распределения аналитически не представимы. Значения функций определяются по таблицам или с использованием стандартных процедур пакетов прикладных программ. Указанные таблицы обычно построены в целях удобства проверки статистических гипотез в ущерб теории распределений – они содержат не значения функций распределения, а критические значения аргумента.

3.3. Проверка гипотез о законе распределения

Обычно сущность проверки гипотезы о законе распределения ЭД заключается в следующем. Имеется выборка ЭД фиксированного объема, выбран или известен вид закона распределения генеральной совокупности. Необходимо оценить по этой выборке параметры закона, определить степень согласованности ЭД и выбранного закона распределения, в котором параметры заменены их оценками.

Сопоставляя возможности различных критериев, необходимо отметить следующие особенности. Критерий Пирсона устойчив к отдельным случайным ошибкам в ЭД. Однако его применение требует группирования данных по интервалам, выбор которых относительно произволен и подвержен противоречивым рекомендациям. Критерий Колмогорова слабо чувствителен к виду закона распределения и подвержен влиянию помех в исходной выборке, но прост в применении. Критерий Мизеса имеет ряд общих свойств с критерием Колмогорова: оба основаны непосредственно на результатах наблюдения и не требуют построения статистического ряда, что повышает объективность выводов; оба не учитывают уменьшение числа степеней свободы при определении параметров распределения по выборке, а это ведет к риску принятия ошибочной гипотезы.

Их предпочтительно применять в тех случаях, когда параметры закона распределения известны априори, например, при проверке датчиков случайных чисел.

При проверке гипотез о законе распределения следует помнить, что слишком хорошее совпадение с выбранным законом распределения может быть обусловлено некачественным экспериментом (“подчистка” ЭД) или предвзятой предварительной обработкой результатов (некоторые результаты отбрасываются или округляются).

Выбор критерия проверки гипотезы относительно произволен. Разные критерии могут давать различные выводы о справедливости гипотезы, окончательное заключение в таком случае принимается на основе неформальных соображений. Точно также нет однозначных рекомендаций по выбору уровня значимости.

Тема 4. Методы оценки параметров распределения

4.1. Точечная оценка параметров распределения

Точечная оценка предполагает нахождение единственной числовой величины, которая и принимается за значение параметра. Такую оценку целесообразно определять в тех случаях, когда объем ЭД достаточно велик. Причем не существует единого понятия о достаточном объеме ЭД, его значение зависит от вида оцениваемого параметра (к этому вопросу предстоит вернуться при изучении методов интервальной оценки параметров, а предварительно будем считать достаточной выборку, содержащую не менее чем 10 значений). При малом объеме ЭД точечные оценки могут значительно отличаться от истинных значений параметров, что делает их непригодными для использования.

Задача точечной оценки параметров в типовом варианте постановки состоит в следующем [3].

Имеется: выборка наблюдений (x_1, x_2, \dots, x_n) за случайной величиной X . Объем выборки n фиксирован.

Известен вид закона распределения величины X , например, в форме плотности распределения $f(T, x)$, где T – неизвестный (в общем случае векторный) параметр распределения. Параметр является неслучайной величиной.

Требуется найти оценку параметра T закона распределения.

Ограничения: выборка представительная.

Существует несколько методов решения задачи точечной оценки параметров, наиболее употребительными из них являются методы максимального (наибольшего) правдоподобия, моментов и квантилей.

Метод максимального правдоподобия позволяет получить состоятельные, эффективные (если таковые существуют, то полученное решение даст эффективные оценки), достаточные, асимптотически нормально распределенные оценки. Этот метод может давать как смещенные, так и несмещенные оценки. Смещение удается устранить введением поправок. Метод особенно полезен при малых выборках.

Метод моментов позволяет получить состоятельные, достаточные оценки, они при довольно общих условиях распределены асимптотически нормально. Смещение удается устранить введением поправок. Эффективность оценок невысокая, т.е. даже при больших объемах выборок дисперсия оценок относительно велика (за исключением нормального распределения, для которого метод моментов дает эффективные оценки). В реализации метод моментов проще метода максимального правдоподобия. Напомним, что метод целесообразно применять для оценки не более чем четырех параметров, так как точность выборочных моментов резко падает с увеличением их порядка.

Сущность метода квантилей схожа с методом моментов: выбирается столько квантилей, сколько требуется оценить параметров; неизвестные теоретические квантили, выраженные через параметры распределения, приравниваются к эмпирическим квантилям. Решение полученной системы уравнений дает искомые оценки параметров.

Метод квантилей позволяет получить асимптотически нормальные оценки, однако они несут в себе некоторый субъективизм, связанный с относительно произвольным выбором квантилей. Эффективность оценок не выше метода моментов. Определение оценок может приводить к необходимости численного решения достаточно сложных систем уравнений.

Оценки, вычисленные на основе различных методов, различаются. Универсального ответа на вопрос, какой из рассмотренных методов лучше или следует ли положиться на данный метод при решении любой задачи, нет. Значение оценки в каждом конкретном случае (для разных выборок) отличается от истинного значения параметра на неизвестную величину, иначе говоря, существует некоторая доля неопределенности в знании действительного значения параметра. Качество оценок можно определить косвенно путем проверки согласованности эмпирических данных и теоретического закона распределения.

4.2. Интервальная оценка параметров распределения

Интервальный метод оценивания параметров распределения случайных величин заключается в определении интервала (а не единичного значения), в котором с заданной степенью достоверности будет заключено значение оцениваемого параметра. Интервальная оценка характеризуется двумя числами – концами интервала, внутри которого предположительно находится истинное значение параметра. Иначе говоря, вместо отдельной точки для оцениваемого параметра можно установить интервал значений, одна из точек которого явля-

ется своего рода "лучшей" оценкой. Интервальные оценки являются более полными и надежными по сравнению с точечными, они применяются как для больших, так и для малых выборок. Совокупность методов определения промежутка, в котором лежит значение параметра T , получила название методов интервального оценивания. К их числу принадлежит метод Неймана.

Тема 5. Аппроксимация закона распределения экспериментальных данных

5.1. Задачи аппроксимации

Конкретное содержание обработки одномерных ЭД зависит от поставленных целей исследования. В простейшем случае достаточно определить первый момент распределения, например, среднее время обработки запросов к распределенной базе данных. В других случаях требуется установить вероятностно-временные характеристики распределения, например, оценить вероятность своевременной обработки запросов или вероятность безотказной работы системы в течение заданного периода времени. Для нахождения таких значений требуется знание закона распределения как наиболее полной характеристики соответствующей случайной величины.

В классической математической статистике предполагается известным вид закона распределения и производится оценка значений его параметров по результатам наблюдений. Но обычно заранее вид закона распределения неизвестен, а теоретические предположения не позволяют его однозначно установить. Обработка ЭД также не позволит точно вычислить истинный закон распределения показателя. В таком случае следует говорить только об аппроксимации (приближенном описании) реального закона некоторым другим, который не противоречит ЭД и в каком-то смысле похож на этот неизвестный истинный закон.

В соответствии с этими положениями постановка задачи аппроксимации закона распределения ЭД формулируется следующим образом.

Имеется выборка наблюдений (x_1, x_2, \dots, x_n) за случайной величиной X . Объем выборки n фиксирован.

Необходимо подобрать закон распределения (вид и параметры), который бы в статистическом смысле соответствовал имеющимся наблюдениям.

Ограничения: выборка представительная, ее объем достаточен для оценки параметров и проверки согласованности выбранного закона распределения и ЭД; плотность распределения унимодальная.

5.2. Аппроксимация на основе типовых распределений

Задача аппроксимации на основе типовых распределений решается итерационно и включает выполнение трех основных шагов:

- предварительного выбора вида закона распределения;
- определения оценок параметров закона распределения;
- оценки согласованности закона распределения и ЭД.

Если заданный уровень согласованности достигнут, то задача считается решенной, а если нет, то шаги повторяются снова, начиная с первого шага, на котором выбирается другой вид закона, или начиная со второго – путем некоторого уточнения параметров распределения.

Выбор вида закона распределения осуществляется посредством анализа гистограммы распределения, оценок коэффициентов асимметрии и эксцесса. По степени "похожести" гистограммы и графиков плотностей распределения типовых законов или по "близости" значений оценок коэффициентов и диапазонов их теоретических значений выбираются распределения – кандидаты для последующей оценки параметров.

После выбора подходящего вида распределения производится оценка его параметров, используя методы максимального правдоподобия, моментов или квантилей. В целях упрощения решения задачи в табл. 5.2 приведены расчетные формулы для вычисления оценок параметров типовых распределений.

Применительно к выбранному закону распределения производится проверка гипотезы о том, что имеющаяся выборка может принадлежать этому закону. Если гипотеза не отвергается, то можно считать, что задача аппроксимации решена. Если гипотеза отвергается, то возможны следующие действия: изменения значений оценок параметров распределения; выбор другого вида закона распределения; продолжение наблюдений и пополнение выборки. Конечно, такой подход не гарантирует нахождение "истинного" или даже подбора подходящего закона распределения.

Преимущество применения типовых законов распределения состоит в их хорошей изученности и возможности получения состоятельных, несмещенных и относительно высоко эффективных оценок параметров. Однако рассмотренные выше типовые законы распределения не обладают необходимым разнообразием форм, поэтому их применение не дает необходимой общности представления случайных величин, которые встречаются при исследовании систем.

5.3. Аппроксимация на основе специальных рядов

Типовые ряды, известные из математического анализа (ряды Тейлора, Фурье), не подходят для описания функций распределений, так как не обладают свойствами, присущими этому виду функций. Для подобного описания предложены специальные функции, например, основанные на полиномах Чебышева – Эрмита.

Ряд Грама – Шарлье целесообразно использовать для описания распределений, близких к нормальному. В других случаях начинают проявляться серъ-

езные недостатки: ряд может вести себя нерегулярно (увеличение количества членов ряда иногда снижает точность аппроксимации); ошибки аппроксимации возрастают с удалением от центра распределения; сумма конечного числа членов ряда при большой асимметрии распределения приводит к отрицательным значениям функций, особенно на краях распределений. Этот ряд применяют только при весьма умеренном коэффициенте асимметрии, не превышающем 0,7. Следовательно, применение рядов тоже не обеспечивает необходимой общности решения задач аппроксимации.

5.4. Аппроксимация на основе универсальных семейств распределений

Существуют различные подходы к построению универсальных семейств распределений. Рассмотрим два наиболее типичных. Первый подход является дальнейшим развитием метода моментов, а второй основан на замене исходной выборки другой, распределение которой является стандартным.

Аппроксимация на основе семейства распределений К. Пирсона

В рамках первого подхода одно из универсальных семейств распределений предложил К. Пирсон. Моменты распределения случайной величины, даже если все они существуют, не характеризуют полностью этого распределения, но они определяют его однозначно при некоторых условиях, которые выполняются почти для всех используемых на практике распределений. Иначе говоря, при решении задач обработки ЭД знание моментов эквивалентно знанию функции распределения и совпадение значений первых r моментов двух распределений говорит о приблизительной одинаковости распределений. Не зная точно вид функции распределения, но, найдя r первых моментов, можно подобрать другое распределение с теми же первыми моментами. Практически такая аппроксимация оказывается хорошей при совпадении первых трех – четырех моментов.

Анализ характерных черт функций плотности унимодальных распределений показывает, что эти распределения начинаются с нуля, поднимаются до максимума, а затем уменьшаются снова до нуля. Это означает, что для описания подобных функций плотности распределений $f(x)$ необходимо выбрать такие уравнения, для которых $df(x)/dx=0$ при следующих условиях: $f(x)=0$, тогда по крайней мере на одном краю распределения будет соприкосновение с осью абсцисс высшего порядка; $x=a$, где величина a соответствует моде распределения. Этим условиям для центрированной переменной x удовлетворяет дифференциальное уравнение $df / dx = (x-a)f / (b_0 + b_1x + b_2x^2)$, решение которого приводит к семейству распределений Пирсона. Действительно, в этом уравнении $df(x)/dx$ равно нулю, если $f(x)=0$ или $x=a$. Семейство распределений Пирсона включает не только унимодальные, но и распределения, имеющие U-образную форму (две моды).

Аппроксимация на основе семейства распределений Джонсона

Этот универсальный вид аппроксимации основан на таком преобразовании $g(x)$ исходной случайной величины X (заданной в некотором интервале), которое позволит рассматривать результат преобразования как стандартизованную случайную величину, распределенную по нормальному закону. Данное преобразование допустимо при следующих условиях: функция плотности распределения случайной величины X является унимодальной; функция $g(x)$ является монотонной на заданном интервале; область значений функции $g(x)$ лежит в диапазоне. Указанным условиям отвечает система функций, предложенная Джонсоном. Достоинство данного подхода состоит в том, что значения эмпирической функции распределения случайной величины X вычисляются как значения функции нормального распределения.

Возможности распределений Джонсона по описанию статистических данных практически эквивалентны распределениям Пирсона. Функции распределения Джонсона в явном виде представить нельзя, да в этом и нет необходимости, так как расчет значений функций распределения осуществляется на основе нормального распределения.

Определение моментов или построение функции правдоподобия для распределений Джонсона достаточно трудоемко. Для целей аппроксимации проще использовать метод квантилей. Количество используемых квантилей и соответственно уравнений равно количеству определяемых параметров распределения.

Следует учитывать, что рассмотренные универсальные способы аппроксимации не являются всеобъемлющими – существуют случайные величины, распределение которых плохо описывается указанными зависимостями. В первую очередь к ним относятся случайные величины с усеченными законами распределения.

3. Лабораторные занятия

Лабораторная работа № 1.

Числовые характеристики. Среднее арифметическое n случайных величин определяется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

или

$$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{m_n}{n} \quad (2)$$

где $\frac{m_i}{n}$ - частота появления значения x_i

Несмещенной оценкой дисперсии является среднеквадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

Кроме определения числовых характеристик для достижения наглядности строят различные графики статистического распределения, из которых чаще всего используют полигон, гистограмму и кумулятивную кривую.

Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки, изображающие интервалы вариационного ряда, а вычеты равны частотам или частотам соответствующих интервалом, деленным на ширину интервала.

Полигон представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i ; m_i)$. Для интервального ряда строят полигон, соединяя отрезками точки с координатами $(x_{io.}, m_i)$ или $(x_{io.}, p_i)$.

Кумулятивная кривая - это кривая накопленных частот или накопленных частостей. Если вариационный ряд дискретный, то кривая представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i, m_i^{нак})$ или $[x_i, F_n(x)]$. Для интервального вариационного ряда строят ступенчатую кривую. Ширина каждой ступеньки равна величине интервала, а ее высота - соответствующему данному интервалу значений накопленной частоты или частости.

Задание: По данным примера 1 вычислить среднее арифметическое, выборочную дисперсию и построить гистограмму и статистическую функцию распределения.

Указание: Количество интервалов определяется по формуле Старджесса:

$$r = 1 + 3,3 \lg n \quad (4)$$

Ширина интервала определяется по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r} \quad (5)$$

Для удобства вычисления значения границ интервала, частоту попадания в интервалы и середину интервалов свести в таблицу 1.

Таблица 1

Принцип интервалов $x_i - x_{i+1}$	Середина интервалов x_{oi}	Частота попадания в интервалы m_i	Статистическая вероятность p_i
1	2	3	4

Для построения статистической функции распределения можно воспользоваться формулой

$$F_{i+1}(x_i) = P_i + F_i(x_i)$$

где $F_i(x_i) = 0$

Пример 1. Произведено 50 измерений напряжения радиосигнала одним и тем же прибором. Результаты измерения приведены в таблице 1 приложения 1.

Массив экспериментальных данных взять в соответствии с вариантом, заданным преподавателем или в соответствии с шифром студента.

Лабораторная работа № 2

Выравнивание статистических распределений

При использовании вероятностных методов оценки полученных результатов важной задачей является нахождение функции распределения по данному статистическому ряду. Такая операция называется выравниванием статистического распределения, а искомую функцию распределения, или плотность распределения называют выравнивающими.

Вид полигона или гистограммы позволяют сделать вывод о возможности выравнивания с помощью того или иного закона распределения.

Выравнивание статистического распределения проводится в следующем порядке:

- 1) выбирают теоретический закон распределения;
- 2) вычисляют параметры распределения;
- 3) строят графики выравнивающей функции распределения $F(x)$ или плотности $f(x)=p(x)$ для значений x_i , где x_i - варианта, или для значений x_{io} , где x_{io} - середина интервала (для интервального вариационного ряда);
- 4) сравнивают графики теоретической функции распределения $F(x)$ и эмпирической $F'(x)$ или $f(x)=p(x)$ и гистограммы.

Сравнение графиков показывает, насколько теоретический закон распределения удовлетворительно отражает экспериментальные данные. Если расхождение между $F(x)$ и $F'(x)$ невелико, можно считать, что $F(x)$ определено правильно.

Выравнивающая функция распределения сглаживает все те случайные отклонения, свойственные $F'(x)$, которые происходят из-за ограниченного объема наблюдений.

Задание: По данным примера 1 выровнять статистический ряд.

Решение:

1. Построить гистограмму. По виду гистограммы (определить) выбрать теоретический закон распределения. Если закон распределения нормальный, то его плотность равна:

$$f(x) = p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

2. Вычислить $m_x = \bar{x}$ и σ .

3. Вычислить $f(x)$ для середин интервалов. Для этого вводят переменную

$$t = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sigma} \quad (7)$$

и, используя свойство нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot f(t)$$

по приложению 2 найдем значения $f(t)$.

В случае использования интервалов применяют зависимость

$$f(x) = \frac{h}{\sigma} \cdot f(t),$$

где h - ширина интервала.

Для удобства, вычисления свести в таблицу 2.

Таблица 2.

Середины интервалов x_{io}	$t_i = \frac{(x_{io} - \bar{x})}{\sigma}$	$f(t)$	$f(x) = \frac{h}{\sigma} \cdot f(t)$	$F(x)=F(t)$

$F(x)=F(t)$ - значения теоретической функции распределения, найденное по таблицам функции Лапласа (приложение 3), где $F(t) = 0,5 + \Phi(t)$.

4. Построить графики теоретической функции распределения $F(x)$ и эмпирической $F'(x)$.

5. Для построения значений $F'(x)$ можно воспользоваться данными первой работы.

Лабораторная работа № 3

Проверка гипотезы о виде закона распределения вероятностей результата измерения

Проверка гипотезы о виде закона распределения вероятности результатов измерения осуществляется с помощью критериев согласия. Порядок проверки гипотезы о виде закона распределения с помощью критериев согласия может быть следующей:

- 1) выбирают меру расхождения между теоретическим и эмпирическим законами распределения u ;
- 2) задают уровень значимости критерия α ;
- 3) вычисляют меру расхождения для исследуемого статистического распределения u_3 ;
- 4) находят табличное значение u_α , отвечающее заданному уровню значимости α ;
- 5) делают вывод относительно проверяемой гипотезы о согласованности теоретического и эмпирического распределений:
если $u_3 > u_\alpha$ – гипотеза отклоняется;
если $u_3 < u_\alpha$ – гипотеза принимается.

Проверка гипотезы о согласованности теоретического и эмпирического распределении с помощью критерия Пирсона

Критерий согласия Пирсона (критерий χ^2) используется достаточно часто при интервальной оценке и при числе $n \geq 50$. В критерии Пирсона расхождение задают в виде

$$u = \chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} \quad (8)$$

где m_i – частота;

P_i – вероятность попадания в i -ый интервал;

r – число интервалов;

n – объем наблюдений.

При $n \rightarrow \infty$ случайная величина $u = \chi^2$ имеет распределение Пирсона с $K=r-3$ степенями свободы, где K – число параметров распределения.

Проверка гипотезы о согласованности теоретического и эмпирического распределений с помощью критерия Пирсона осуществляется в следующем порядке:

- 1) результаты наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n группируют в интервальный вариационный ряд;
- 2) строят гистограмму или полигон;
- 3) выдвигают гипотезу о виде закона распределения и определяют его параметры;

- 4) задают уровень значимости критерия α (приложение 5, учебник);
 5) определяют теоретическую вероятность попадания случайной величины X в каждый интервал

$$f(x) = p(x) = \frac{h}{\sigma} \cdot f(t). \quad (9)$$

- 6) определяют величину расхождения χ^2_{α} ;
 7) определяют число степеней свободы $S = k - r - 1$.
 Для нормального распределения принимают; $S = r - 3$.

8) по таблицам уровня значимости критерия α распределения $P(\chi^2)$ находят значение χ^2_{α} , по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы S ;

9) делают вывод о проверяемой гипотезе:

если $\chi^2_{\alpha} > \chi^2_{\alpha}$ - гипотезу отвергают;

если $\chi^2_{\alpha} < \chi^2_{\alpha}$ - гипотезу принимают.

Задание: по данным примера 1 проверить гипотезу о согласованности эмпирического распределения с теоретическим. Вычисления сводим в таблицу 3.

Таблица 3

Границы интервалов $x_i; x_{i+1}$	Частота m_i	Середина интервала x_{io}	$t_i = \frac{x_{io} - \bar{x}}{\sigma}$	$f(t_i)$
1	2	3	4	5
$P_i = \frac{h}{\sigma} \cdot f(t_i)$	nP_i	$m_i - nP_i$	$(m_i - nP_i)^2$	$\frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}$
6	7	8	9	10

Значения функции $f(t_i)$ определяем по приложению 3 (раздат. материал).

Суммирование чисел в графах 9 или 10 дает χ^2_{α} .

Сделать вывод о согласованности эмпирического закона распределения с теоретическим.

Проверка гипотезы о согласованности эмпирического и теоретического распределения по составному критерию

Для проверки нормальности закона распределения результата измерения по составному критерию рассчитывается соотношение

$$d = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (11)$$

и проверяется выполнение условия

$$d_{min} \leq d \leq d_{max} \quad (12)$$

где d_{min} и d_{max} зависят от вероятности P , с которой принимается решение.

Значения d_{min} и d_{max} находим по таблице 4.

Если условие выполняется, то дополнительно проверяются “хвосты” теоретического и эмпирического законов распределения вероятности. При $10 \leq n \leq 20$ считается допустимым отклонение одного из независимых значений результата измерения x_i от \bar{x} больше, чем на $2,5S$, а при $20 < n < 50$ допускается не более 2-х отклонений, т.е. проверяется условие

$$|x_i - \bar{x}| \geq 2,5S.$$

(13)

При выполнении обоих условий гипотеза о согласованности эмпирического и теоретического распределения принимается с вероятностью

$$p \geq p^* + p^{*x} - 1,$$

где p^* – вероятность, с которой определяются d_{min} и d_{max} , $p^{*x} = 0,98$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то гипотеза не принимается.

Таблица 4

n	$p^* = 0,90$		$p^* = 0,95$		$p^* = 0,99$	
	d_{min}	d_{max}	d_{min}	d_{max}	d_{min}	d_{max}
11	0.7409	0.8899	0.7153	0.9073	0.6675	0.9359
16	0.7452	0.8733	0.7236	0.8884	0.6829	0.9137
21	0.7495	0.8631	0.7304	0.8768	0.6950	0.9001
26	0.7530	0.8570	0.7360	0.8686	0.7040	0.8901
31	0.7559	0.8511	0.7404	0.8625	0.7110	0.8827
36	0.7583	0.8468	0.7440	0.8578	0.7167	0.8769
41	0.7604	0.8436	0.7470	0.8540	0.7216	0.8722
46	0.7621	0.8409	0.7496	0.8508	0.7256	0.8682
51	0.7360	0.8385	0.7518	0.8481	0.7291	0.8648

Задание: По данным примера 2 проверить гипотезу о нормальности закона распределения вероятности результата измерения по составному критерию.

Пример 2. Повторные измерения силы тока дали следующие результаты, представленные в таблице 2 приложения 1 (раздат. материал), массив экспериментальных данных взять в соответствии со своим вариантом.

Лабораторная работа № 4

Определение интервальных оценок параметров распределения

Суть интервальной оценки параметров распределения состоит в том, чтобы построить интервал значений, в котором с заданной вероятностью будет находиться параметр распределения. Такой интервал называется доверительным, а

его границы – верхними и нижними доверительными границами. С вероятностью $P = 1 - \alpha$ доверительный интервал содержит известное значение параметра.

Вероятность P называют доверительной, а α - уровнем значимости.

Порядок получения интервальной оценки параметров распределения может быть следующей:

1. определяют оценку среднего значения результата измерения

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. определяют оценку среднего квадратического отклонения результата измерения

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

3. устанавливают закон распределения результата измерения и проверяют согласованность эмпирического распределения с теоретическим
4. если закон распределения результата измерения нормальный, то определяют стандартное отклонение по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

если закон распределения результата измерения отличный от нормального, то определяют стандартное отклонение по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2)}$$

5. задают доверительную вероятность $P = 1 - \alpha$
6. для определения доверительного интервала используют соотношение:

$$\varepsilon = t_p S_x$$

где ε - полуширина доверительного интервала;

t_p - аргумент функции Лапласа, отвечающий вероятности $(1+P)/2$, который в литературе называют квантилью нормального распределения, если закон распределения нормальный. Если эмпирическое распределение подчинится закону распределения вероятности Стьюдента, то t_p - аргумент интегральной функции распределения Стьюдента.

Если эмпирическое распределение подчиняется иному закону, то t_p – аргумент, входящий в неравенство Чебышева.

Значение аргумента t_p определяют по таблицам функции Лапласа, Стьюдента и неравенства Чебышева.

При нормальном распределении t_p определяют по таблицам Лапласа (приложение 2, учебник), как:

$$\Phi(t) = \frac{1+p}{2} \quad \text{или} \quad 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$

Можно также записать

$$\Phi(x) = \frac{1+p}{2}$$

С учетом этого находят соответствующие вероятности

$$\frac{1+p}{2}$$

значение $x = t_p$.

В то же время

$$\varepsilon = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Поэтому доверительной вероятности p отвечает доверительный интервал, равный

$$\left[\bar{x} - t_p \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_p \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

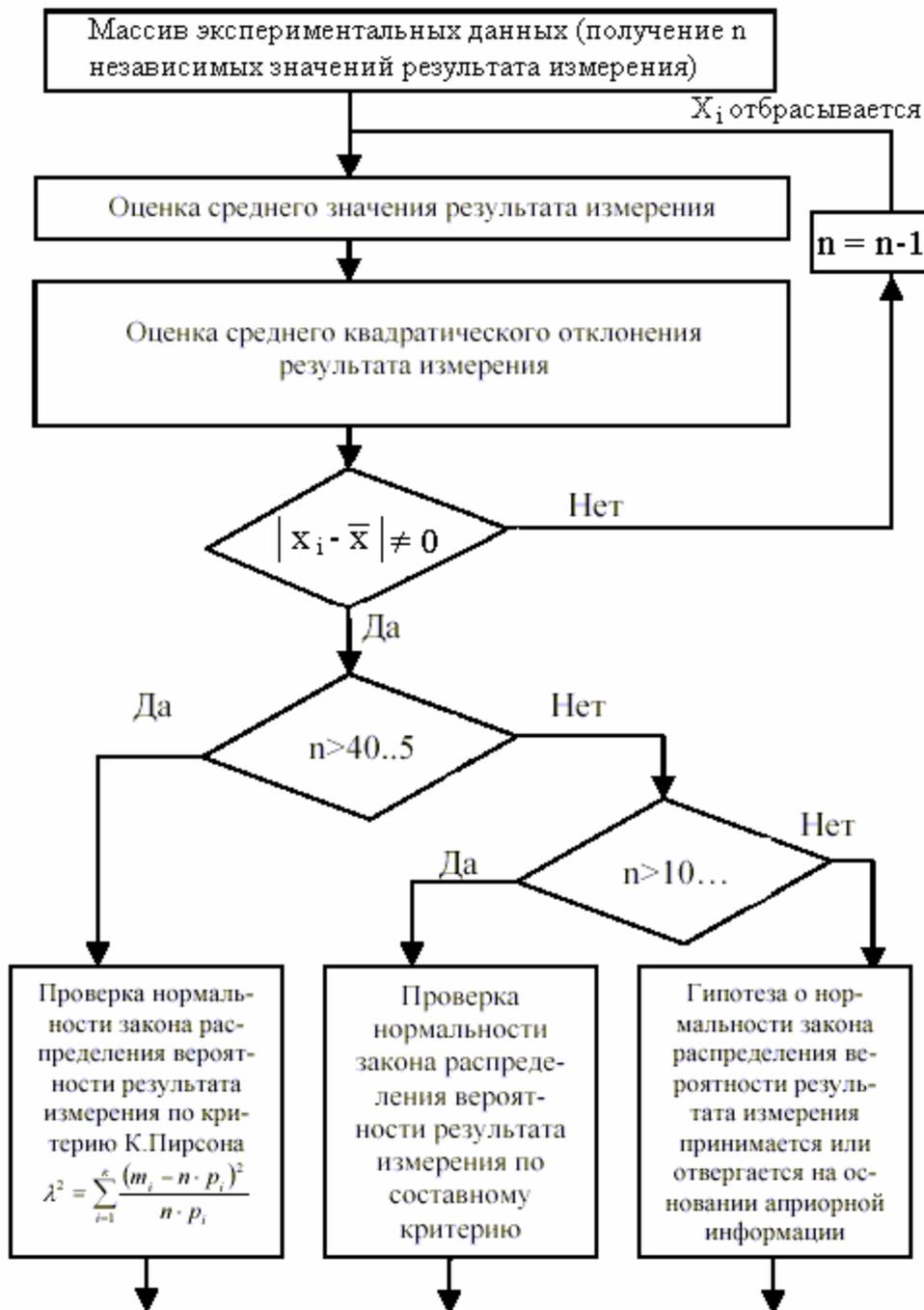
Задание: По данным примера 1 найти доверительный интервал.

Лабораторная работа № 5

Обработка экспериментальных данных.

Многokратные измерения с равноточными значениями отсчета

Порядок выполнения многократного измерения при равноточных значениях отсчета приведен на рис. 1.



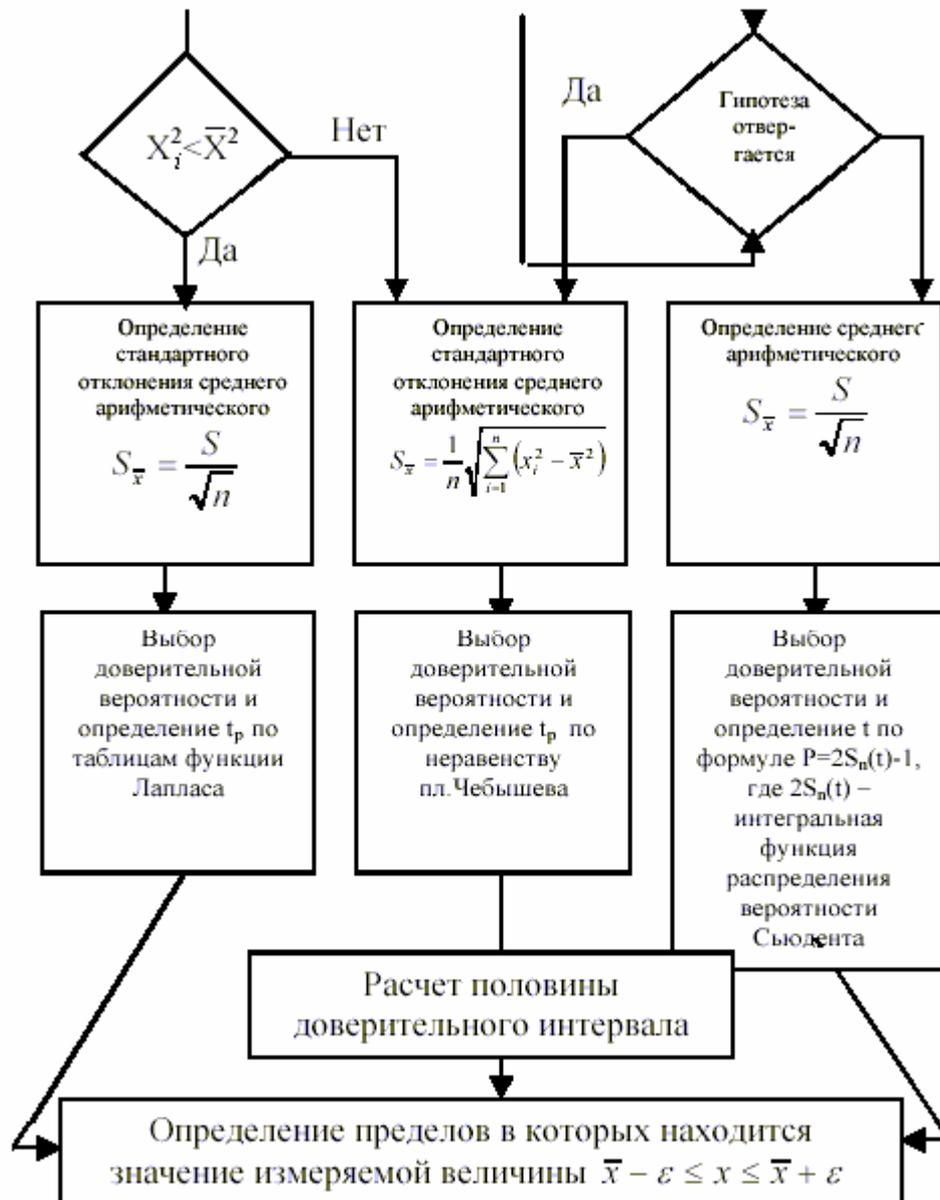


Рис. 1

Задание: По данным примера 3 найти результат измерения.

Пример 3. При проведении исследования образцовых резисторов было произведено по 50 измерений одной и той же величины. Числовые значения результатов измерения сопротивления приведены в таблице 3 приложения 1.

Лабораторная работа № 6

Обработка экспериментальных данных.

Многократные измерения с неравноточными значениями отсчета

При многократных измерениях с неравноточными значениями отсчета несмещенной оценкой среднего значения результата измерения является среднее взвешенное. Среднее взвешенное определяется по формуле:

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{xi}^2} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{xi}^2}},$$

где x_i – отдельные значения результата измерения;

$\frac{1}{\sigma_{xi}^2}$ – дисперсия отдельных значений результата измерения.

Дисперсия среднего взвешенного определяется по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{xi}^2}}$$

Нормированный вес каждого отдельного результата измерения определяется по формуле:

$$g_i = \frac{\frac{1}{\sigma_{xi}^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{xi}^2}}$$

При условии $\sum_{i=1}^n g_i = 1$ среднее взвешенное будет определяться по формуле:

$$\bar{x} \approx \sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i$$

Задание: По данным примера 4 найти результат многократного измерения при неравноточных значениях отсчета.

Пример 4. Измерения образцовой меры длины, выполненные приборами разной точности дали следующие результаты, приведенные в таблице 4 приложения 1.

Известно, что результат измерения вертикальным оптиметром подчиняется нормальному закону распределения вероятности со стандартным отклонением S_1 , при измерении машиной типа Цейсс – соответственно, S_2 ; машиной типа СИП – S_3 ; миниметром с ценой деления 1 мкм – S_4 .

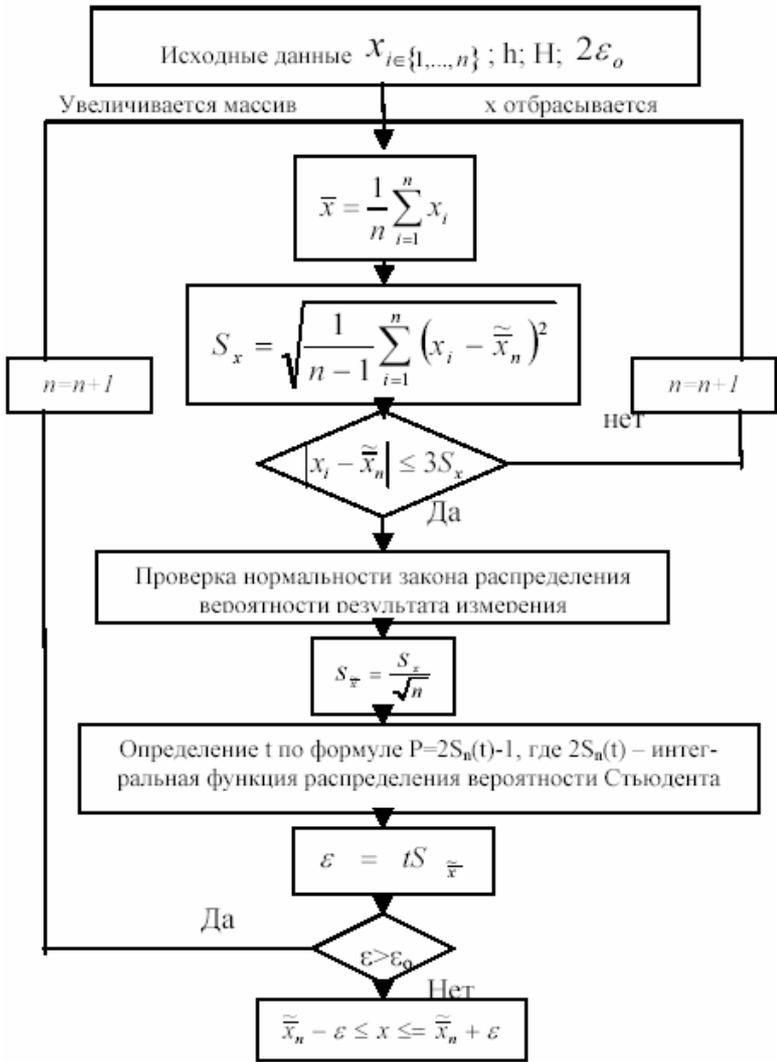
Каково отклонение результата измерения от номинального значения?

Лабораторная работа № 8

Обеспечение требуемой точности при многократном измерений

Многократные измерения одного и того же размера позволяет обеспечить требуемую точность. Поскольку ширина доверительного интервала зависит от количества экспериментальных данных, то увеличивая n можно добиться наперед заданного условия $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Алгоритм обработки экспериментальных данных при обеспечении требуемой точности измерения представлен на рис.



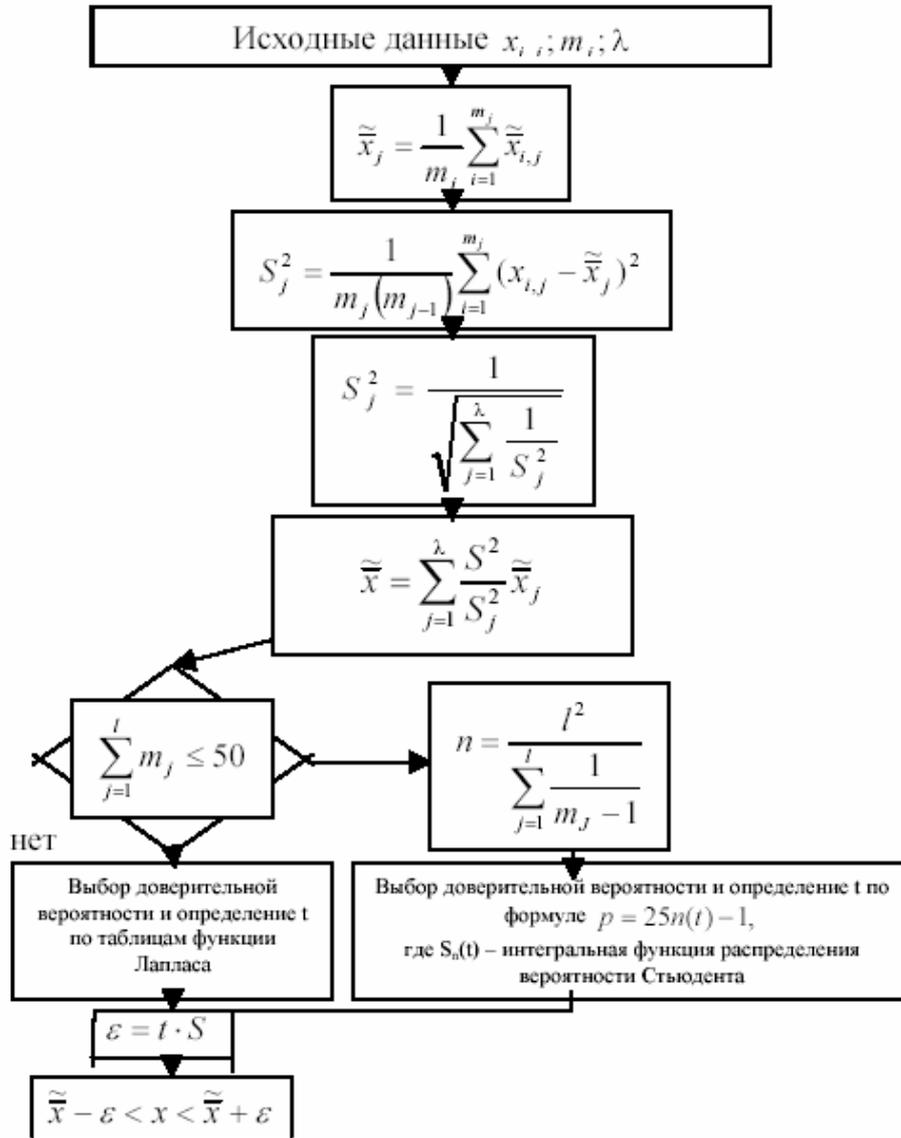
Задание. По данным примера 7 определить результат измерения, если с вероятностью 0,95 точность измерения должна быть не ниже $2\varepsilon_0 = 2 \text{ см}$.

Пример 7. В таблице 7 приложения 1 приведены 10 независимых числовых значений результата измерения линейного размера (в сантиметрах). Определить его длину $2\varepsilon_0 = 2 \text{ см}$.

Лабораторная работа № 9

Обработка экспериментальных данных, входящих в
неравнорассеянные серии

Порядок обработки экспериментальных данных $x_i \in \{1, \dots, n\}$, входящих в $j \in \{1, \dots, \lambda\}$ неравнорассеянных серии с незначимым различием средних арифметических представлен на рис.



Задание. По данным примера 6 определить результат измерения неравнорассеянных серий измерений.

Пример 6. Результаты двух неравнорассеянных серии измерений с незначимым различием средних арифметических представлены в таблице 6 приложения 1. Определить результат измерения.

Содержание

Рабочая программа	3
Конспект лекций	9
Лабораторные занятия	28

Виктория Владимировна ЕРЕМИНА
*доцент кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ,
кандидат физико-математических наук, доцент*

Обработка экспериментальных данных для направления подготовки магистров
230100.68 – «Информатика и вычислительная техника»:
учебно-методический комплекс дисциплины.

Издательство АмГУ.