

Министерство образования Российской Федерации  
Амурский государственный университет

**ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ**

Учебное пособие для студентов специальности 01.07.00 – физика

Благовещенск  
2007

Учебное пособие по курсу «Физика полупроводников и диэлектриков».  
Под редакцией Ваниной Е.А.. Благовещенск: Амурский гос. Ун-т. 2007. - 57с.

Составители:

Ванина Е.А., Темников В.С., Копылова И.Б.

Содержит краткую теорию по основным разделам курса «Физика полупроводников и диэлектриков», примеры решения задач по теории полупроводников. Для студентов специальности 01.07.00 – физика.

Рецензент: С.В. Ланкин, профессор, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой общей физики БГПУ,

Амурский государственный университет, 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Распределение электронов и дырок.....	4
2. Рекомбинация носителей заряда.....	14
3. Диффузия и дрейф носителей заряда.....	21
4.Эффект Холла в полупроводниках.....	28
5. Поверхностные явления.....	34
6. Термоэлектрические явления.....	43
7. Фотоэлектрические явления.....	49
8. Задачи для самостоятельного решения .....	53
9. Литература.....	.54
Приложение 1.....	55
Приложение 2.....	56

## 1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК

Распределение электронов и дырок по уровням подчиняется статистике Дирака, т.к. их можно уподобить квантовым частицам. Концентрация электронов  $n$  в зоне проводимости и концентрация дырок  $p$  в валентной зоне равны соответственно

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} f_n(E_n(\vec{k})), \quad (1.1a)$$

$$p = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} f_p(E_p(\vec{k})); \quad (1.1б)$$

интегрирование производится по зоне Бриллюэна;  $f_n(E)$  и  $f_p(E)$  – функции распределения электронов и дырок по энергиям, равные

$$f_n(E) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-F)}}, \quad f_p(E) = 1 - f_n(E); \quad (1.2)$$

$\vec{k}$  – квазиволновой вектор, который играет роль непрерывного квантового числа,  $\beta = 1/kT$ ,  $F$  – уровень Ферми,  $E_n(\vec{k})$  и  $E_p(\vec{k})$  – закон дисперсии электронов и дырок.

Особый интерес в связи с формулами (1.1a) и (1.1б) представляет поведение функций  $E_n(\vec{k})$  и  $E_p(\vec{k})$  вблизи дна зоны проводимости и потолка валентной зоны. Если дну зоны проводимости соответствует одна точка в зоне Бриллюэна, то это (в кубическом кристалле) должна быть точка  $\vec{k} = 0$ . Тогда для невырожденной зоны

$$E_n(\vec{k}) = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}, \quad (1.3a)$$

где  $E_c$  и  $m_n$  – постоянные,  $m_n > 0$ .

Если дну зоны проводимости соответствует несколько точек в зоне Бриллюэна,  $\vec{k}^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2 \dots$ ), то (по-прежнему для невырожденной зоны)

$$E_{n,\alpha}(\vec{k}) = E_c + \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar^2 (k_i - k_i^\alpha)^2}{2m_i}, \quad m_i > 0. \quad (1.3б)$$

Величина  $E_c$  соответствует дну зоны,  $m_n$  называется эффективной массой электронов, в анизотропном случае (1.3б) величины  $m_i$  представляют собой

компоненты тензора эффективных масс  $m_{ij}$ ,  $m_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{\partial^2 E_n(\vec{k})}{\partial k_i \partial k_j}$ , приведенного к

главным осям. В системе главных осей имеем

$$\begin{aligned} m_{xx} = m_x, & \quad m_{yy} = m_y, & \quad m_{zz} = m_z, \\ m_{xy} = m_{xz} = \dots = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Аналогичные соотношения имеют место для дырок в валентной зоне

$$E_p(\vec{k}) = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p} \quad (1.3в)$$

в изотропном случае и

$$E_{p,\alpha}(\vec{k}) = E_v - \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar^2 (k_i - k_i^\alpha)^2}{2m_i} \quad (1.3г)$$

в анизотропном случае. Величина  $E_g = E_c - E_v$  называется шириной запрещенной зоны. В случае вырожденных зон равенства (1.3а), (1.3б) несправедливы и зависимость  $E(\vec{k})$  дается более сложными формулами.

Например, если у потолка валентной зоны имеются две вырожденные при  $\vec{k} = 0$  изотропные зоны, то закон дисперсии  $E_p(\vec{k})$  вблизи края зон имеет вид

$$E_p(\vec{k}) = E_v - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ Ak^2 \pm \left[ B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_x^2 k_z^2 + k_y^2 k_z^2) \right]^{1/2} \right\}, \quad (1.3д)$$

причем знак плюс относится к зоне так называемых «легких» дырок, а знак минус – к зоне «тяжелых» дырок,  $m_0$  – масса свободного электрона в вакууме.

В ряде полупроводников с узкой запрещенной зоной даже при небольшом удалении от экстремума существенно сказывается непараболичность зоны. Если предположить, что отклонения от параболичности связаны с взаимодействием

двух зон – валентной зоны и зоны проводимости, а все остальные зоны расположены достаточно далеко, то закон дисперсии в рассматриваемых зонах можно приближенно записать в виде

$$E(\vec{k}) = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} + \frac{1}{2} \left( \pm \sqrt{E_g^2 + \frac{8}{3} P^2 k^2} - E_g \right). \quad (1.3e)$$

Здесь знак плюс относится к зоне проводимости, знак минус – к валентной зоне, а  $P$  – параметр, характеризующий взаимодействие зон. Закон дисперсии (1.3e)

был предложен Кейном. Вводя в (1.3e)  $m(0) = \frac{3\hbar^2 E_g}{4P^2}$  – значение эффективной массы вблизи края зоны, при  $m(0) \ll m_0$  получаем

$$E(\vec{k}) = E_c + \frac{1}{2} \left( \pm \sqrt{E_g^2 + \frac{2\hbar^2 k^2 E_g}{m(0)}} - E_g \right). \quad (1.3ж)$$

Закон дисперсии в таком виде выполняется достаточно хорошо для зон проводимости ряда полупроводников с узкими запрещенными зонами (например, антимонида индия).

Для простой параболической зоны (1.3a) концентрация электронов дается выражением

$$n = N_c F_{\frac{1}{2}}(\eta), \quad \eta = \frac{F - E_c}{kT}, \quad (1.5)$$

где величина

$$N_c = 2 \left( \frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (1.6)$$

называется эффективной плотностью состояний в зоне проводимости, а  $F_{\frac{1}{2}}(\eta)$  – интеграл Ферми (см. Приложение 1). В частности, в отсутствие вырождения формула (1.5) принимает вид (см. (П. 2))

$$n = N_c e^{\eta} \quad (1.7)$$

В случае более сложной зависимости  $E(\vec{k})$  концентрация может, тем не менее, даваться выражениями (1.5) и (1.6) с заменой  $m_n$  на некоторую величину  $m_d$ ,

называемую эффективной массой плотности состояний. Так, в случае (1.3б)

$$m_d = Q^{2/3} (m_x m_y m_z)^{1/3}, \quad (1.8)$$

где  $Q$  – число эквивалентных минимумов в зоне проводимости (см. задачу 1).

Выражения (1.5), (1.6), (1.7) и (1.8) после замены соответствующих индексов будут справедливы и для дырок. При этом  $\eta = \frac{E_v - F}{kT}$ .

Основным соотношением, используемым для определения уровня Ферми, служит условие электрической нейтральности:

$$p + \sum_j z_j N_j - n = 0. \quad (1.9)$$

Здесь  $z_j$  – заряд локализованных примесей  $j$ -го сорта в единицах заряда электрона (с учетом знака),  $N_j$  – концентрация примеси сорта  $j$ .

Степени заполнения примесных уровней даются выражениями:

$$\frac{N_\delta^0}{N_\delta^+} = g_\delta e^{\frac{F-E_\delta}{kT}}, \quad \frac{N_a^-}{N_a^0} = \frac{1}{g_a} e^{\frac{F-E_a}{kT}}, \quad (1.10)$$

где  $N_\delta^0$ , ( $N_a^0$ ) и  $N_\delta^+$ , ( $N_a^-$ ) – число нейтральных и заряженных доноров (акцепторов),

$g_\delta$  ( $g_a$ ) – фактор вырождения примесного уровня

$E_\delta$  ( $E_a$ ) – энергия донорного (акцепторного) примесного уровня.

Параметры  $E_\delta$ ,  $E_a$ ,  $g_\delta$  и  $g_a$  в каждом отдельном случае должны определяться из опыта. В простейшем случае, когда вырождение примесного уровня связано только со спином электрона, фактор вырождения равен двум.

### Примеры решения задач

*Задача 1.* Найти связь концентрации с уровнем Ферми и определить эффективную массу плотности состояний электронов в германии и кремнии; закон дисперсии в зоне проводимости имеет вид (1.3б). Известно, что поверхности постоянной энергии в  $\vec{k}$ -пространстве имеют вид эллипсоидов

вращения, в германии  $Q=4$ , поперечная масса  $m_t=1,64m_0$ , продольная масса  $m_l=0,19m_0$ , в кремнии  $Q=6$ ,  $m_t=0,19m_0$ ,  $m_l=0,98m_0$  ( $m_0$  – масса покоя свободного электрона).

Решение.

Полная концентрация  $n$  электронов в зоне проводимости равна сумме концентраций  $n^\alpha$  в отдельных под-зонах. Количество таких под-зон равно числу  $Q$  значений волнового вектора  $\vec{k}^\alpha$ , соответствующих дну зоны проводимости,

$$n = \sum_{\alpha=1}^Q n^\alpha.$$

Согласно (1.3б) закон дисперсии электронов для под-зоны с номером  $\alpha$  имеет вид

$$E_n(\vec{k}) = E_c + \frac{\hbar^2(k_x - k_x^\alpha)^2}{2m_t} + \frac{\hbar^2(k_y - k_y^\alpha)^2}{2m_t} + \frac{\hbar^2(k_z - k_z^\alpha)^2}{2m_l}.$$

Концентрацию электронов в этой под-зоне найдем, используя соотношения (1.1а) и (1.2)

$$\begin{aligned} n^\alpha &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} f_{n,\alpha}(E_{n,\alpha}(\vec{k})) = \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \left\{ 1 + \exp \left[ \beta \left( E_c - F + \frac{\hbar^2(k_x - k_x^\alpha)^2}{2m_t} + \frac{\hbar^2(k_y - k_y^\alpha)^2}{2m_t} + \frac{\hbar^2(k_z - k_z^\alpha)^2}{2m_l} \right) \right] \right\}^{-1} = \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar^3} (8m_t^2 m_l)^{3/2} (kT)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \left\{ 1 + \exp \left[ \beta (E_c - F + x^2 + y^2 + z^2) \right] \right\}^{-1} = \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\pi^{3/2}}{\hbar^3} (8m_t^2 m_l)^{1/2} (kT)^{3/2} F_{1/2}[\beta(F - E_c)] = 2 \left( \frac{(m_t^2 m_l)^{1/3} kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2}[\beta(F - E_c)] \end{aligned}$$

Результат интегрирования по  $\vec{k}$  не зависит от выбора пределов интегрирования, если эти пределы лежат вне области занятых состояний. Это имеет место в большинстве практически интересных случаев, поэтому мы не совершаем ошибки, выполняя интегрирование по  $\vec{k}$  в бесконечных пределах.

Таким образом, полная концентрация электронов в зоне проводимости равна

$$n = Q \cdot n^\alpha = 2 \left( \frac{Q^{2/3} (m_i^2 m_l)^{1/3} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2} [\beta(F - E_c)]$$

или

$$n = 2 \left( \frac{m_d kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2} [\beta(F - E_c)]$$

(сравните с (1.5)), где величина

$$m_d = Q^{2/3} (m_i^2 m_l)^{1/3}$$

– есть эффективная масса плотности состояний. В германии (Ge)

$$m_d = 0,56m_0.$$

В кремнии (Si)

$$m_d = 1,08m_0.$$

*Задача 2.* Найти положение уровня Ферми и температурную зависимость концентрации в собственном полупроводнике в невырожденном случае. Как изменится концентрация электронов при изменении температуры от 200 до 300 К, если  $E_g = (0,785 - \xi T)$  эВ? Изменением ширины запрещенной зоны с увеличением температуры пренебречь.

Решение.

Запишем условие электронейтральности (1.9) для собственного полупроводника. Примеси в собственном полупроводнике отсутствуют, поэтому

$$n = p.$$

В невырожденном случае из соотношений (1.5), (1.6) и (1.7) получим

$$n = 2 \left( \frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{F-E_c}{kT}}, \quad p = 2 \left( \frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_v-F}{kT}}.$$

Тогда

$$2 \left( \frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{F-E_c}{kT}} = 2 \left( \frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{E_v-F}{kT}}.$$

Отсюда

$$e^{\frac{2F-(E_c-E_v)}{kT}} = \left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{3/2}$$

и, следовательно,

$$F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p}{m_n}.$$

Концентрацию электронов проводимости можно получить, подставив энергию Ферми в выражение для концентрации, однако, проще заметить, что  $n = n_i \equiv \sqrt{np}$ . Получим

$$n = 2 \left( \frac{\sqrt{m_n m_p} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2kT}}, \quad (1)$$

где  $E_g = E_c - E_v$  – ширина запрещенной зоны полупроводника. Отношение концентраций при различных температурах равно

$$\frac{n_2}{n_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)},$$

$$\frac{n_{300}}{n_{200}} = \left( \frac{300}{200} \right)^{3/2} e^{-\frac{0,785}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \left( \frac{1}{300} - \frac{1}{200} \right)} = 3,6 \cdot 10^3.$$

*Задача 3.* Подвижность электронов в чистом Ge при комнатной температуре (300 К) равна 3800 см<sup>3</sup>/В·с. Найти удельное сопротивление такого материала при комнатной температуре и при 30 К, считая, что подвижность меняется с температурой по закону  $\mu = aT^{-3/2}$ , где  $a$  – постоянная. Эффективную массу электронов положить равной  $0,56m_0$ , а эффективную массу дырок – равной  $0,37m_0$ . При всех рассматриваемых температурах считать, что

ширина запрещенной зоны линейно меняется с температурой  $E_g = (0,785 - 4 \cdot 10^{-4} T)$  эВ, а отношение подвижностей электронов и дырок для простоты принять постоянным и равным  $b = \frac{\mu_n}{\mu_p} = 2,1$ .

Решение.

Удельная проводимость полупроводника обусловлена наличием электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне:

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = en\mu_n + ep\mu_p.$$

Для чистого германия (Ge) ( $n = p$ ) с учетом отношения подвижностей электронов и дырок получим его удельное сопротивление

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{b}{(b+1)en\mu_n}.$$

Подставляя теперь выражение для концентрации электронов проводимости в невырожденном полупроводнике (см. задачу 2), получим

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{b}{2(b+1)e\mu_n} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{\sqrt{m_n m_p} kT} \right)^{3/2} e^{\frac{E_g}{2kT}}.$$

При 300 К  $E_g = 0,665$  эВ, а при 30 К  $E_g = 0,773$  эВ и, соответственно,

$$\rho_{300} = 57 \text{ Ом}\cdot\text{см},$$

$$\rho_{30} = 1,2 \cdot 10^{61} \text{ Ом}\cdot\text{см}.$$

Последнюю цифру, разумеется, нельзя принимать всерьез: в таких условиях играют роль примеси и, может быть, иные структурные дефекты. Однако проведенная оценка показывает, сколь сильно влияет температура на сопротивление собственного полупроводника.

*Задача 4.* Исследовать температурный ход уровня Ферми в примесной области для невырожденного полупроводника, содержащего один тип одновалентных доноров в концентрации  $N_D$ .

Решение.

Запишем условие электронейтральности (1.9) для полупроводника с донорной примесью

$$n = N_{\delta}^{+} + p.$$

Электроны проводимости в таком полупроводнике образуются за счет ионизации примеси и переходов из валентной зоны с образованием дырки.

При температурах, обуславливающих отсутствие вырождения донорного уровня лишь очень небольшая часть электронов способна попасть в зону проводимости из валентной зоны, таким образом,  $p \ll n$  и концентрацией дырок можно пренебречь,

$$n \approx N_{\delta}^{+}.$$

Для концентрации электронов согласно (1.7) и (1.5) имеем

$$n = N_c e^{\eta}, \quad \eta = \frac{F - E_c}{kT}.$$

Число заряженных доноров найдем из общего количества донорной примеси  $N_{\delta} = N_{\delta}^{+} + N_{\delta}^0$ . Воспользуемся формулой (1.10)

$$\frac{N_{\delta} - N_{\delta}^{+}}{N_{\delta}^{+}} = g_{\delta} e^{\frac{F - E_{\delta}}{kT}},$$

откуда

$$N_{\delta}^{+} = \frac{N_{\delta}}{1 + g_{\delta} e^{\frac{F - E_{\delta}}{kT}}} = \frac{N_{\delta}}{1 + g_{\delta} e^{\eta} e^{\frac{E_c - E_{\delta}}{kT}}}.$$

Таким образом,

$$N_c e^{\eta} = \frac{N_{\delta}}{1 + g_{\delta} e^{\eta} e^{\frac{E_c - E_{\delta}}{kT}}}.$$

Решение полученного уравнения, квадратичного относительно  $e^{\eta}$ , дает

$$e^{\eta} = \frac{1}{2g_{\delta}} e^{-\frac{E_c - E_{\delta}}{kT}} \left( \sqrt{1 + 4 \frac{N_{\delta}}{N_c} g_{\delta} e^{\frac{E_c - E_{\delta}}{kT}}} - 1 \right),$$

откуда

$$F = E_{\delta} + kT \ln \left[ \frac{1}{2g_{\delta}} \left( \sqrt{1 + 4 \frac{N_{\delta}}{N_c} g_{\delta} e^{\frac{E_c - E_{\delta}}{kT}}} - 1 \right) \right].$$

При  $T \rightarrow 0$   $N_c \ll N_{\delta} e^{\frac{E_c - E_{\delta}}{kT}}$  и

$$F = \frac{E_c + E_{\delta}}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_{\delta}}{g_{\delta} N_c(T)}.$$

При более высоких температурах, когда  $N_c \ll N_{\delta} e^{\frac{E_c - E_{\delta}}{kT}}$ , имеем

$$F = E_c - kT \ln \frac{N_c(T)}{N_{\delta}}.$$

Таким образом, при повышении температуры уровень Ферми сначала возрастает от  $\frac{E_c + E_{\delta}}{2}$ , а затем, пройдя через максимум, начинает почти линейно убывать с температурой до тех пор, пока концентрация дырок не станет заметной. Примерный ход уровня Ферми показан на рис. 1.

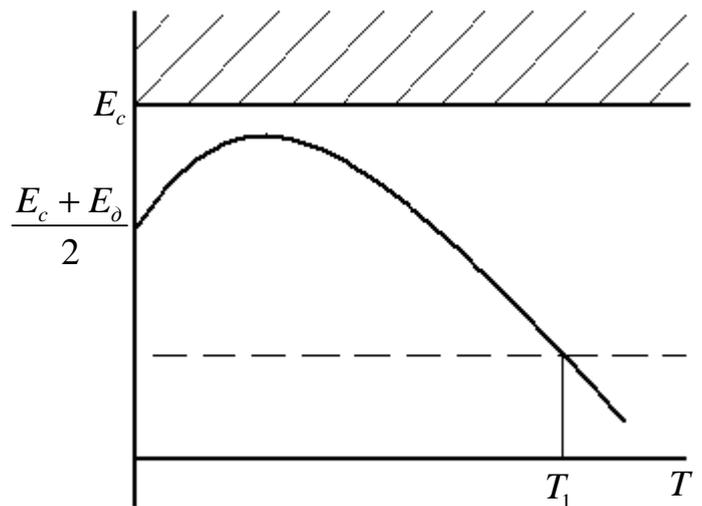


Рис. 1

### Литература

[1], глава 5; [3], §1; [4], глава 3,6; [5], §19; [6], глава 5, §1-5.

## 2. РЕКОМБИНАЦИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

Рекомбинацией называется переход электрона из зоны проводимости в валентную зону. При отклонении концентраций носителей заряда от равновесных значений  $n_0$  и  $p_0$  нарушается баланс между процессами тепловой генерации, с одной стороны, и захватом носителей на локальные центры или убылью носителей за счет межзонных переходов, с другой стороны. Становятся отличными от нуля абсолютные скорости рекомбинации электронов  $u_p$  и дырок  $u_n$ , равные результирующему числу захватов носителей в  $1 \text{ см}^3$  в 1 сек. Равенствами

$$-\left(\frac{\partial \Delta n}{\partial t}\right)_{рек} = u_n = \frac{\Delta n}{\tau_n}; \quad -\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t}\right)_{рек} = u_p = \frac{\Delta p}{\tau_p} \quad (2.1)$$

определяются времена жизни электронов и дырок  $\tau_n$  и  $\tau_p$  (в нестационарных условиях имеет смысл говорить только об их мгновенных значениях). Величины  $\tau_n$  и  $\tau_p$  зависят, в общем случае, от  $\Delta n$  и  $\Delta p$ . Так, если преобладают процессы прямой межзонной рекомбинации, то

$$u_n = u_p = a(np - n_0p_0), \quad (2.2)$$

где  $a$  – постоянная.

Во многих случаях рекомбинация осуществляется путем захвата свободных носителей дефектами решетки (называемыми еще центрами захвата или ловушками), дающими локальные энергетические уровни в запрещенной зоне. В простом случае, когда в невырожденном полупроводнике имеются в концентрации  $N_t$  центры захвата одного типа, дающие один локальный уровень  $E_t$ , в стационарных условиях справедливо выражение

$$u_n = u_p = u = N_t \frac{\alpha_n \alpha_p (np - n_0 p_0)}{\alpha_n (n + n_1) + \alpha_p (p + p_1)}. \quad (2.3)$$

$$\text{Где} \quad n_1 = N_c e^{\frac{E_t - E_c}{kT}}, \quad p_1 = \frac{p_0 n_0}{n_1} = \frac{n_i^2}{n_1} \quad (2.4)$$

В значение  $E_t$  включено слагаемое  $kT \ln g$ , учитывающее вырождение

состояний ловушки (сравните с (1.10)),  $\alpha_n$  и  $\alpha_p$  – коэффициенты захвата электронов и дырок. Полезно ввести также сечения захвата

$$S_n = \frac{\alpha_n}{v_T}, \quad S_p = \frac{\alpha_p}{v_T}, \quad (2.5)$$

где  $v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$  – «тепловая» скорость свободного электрона.

Пусть концентрация  $N_t$  мала, так что можно пренебречь неравновесной концентрацией электронов на ловушках,

$$\frac{\Delta n_t}{\Delta p} = -\frac{\Delta p_t}{\Delta p} = \frac{N_t}{n_0 + n_1} \cdot \frac{\alpha_n n_1 - \alpha_p n_0}{\alpha_p (p_0 + p_1) + \alpha_n \left( n + n_1 + \frac{N_t}{n_0 + n_1} \right)}. \quad (2.6)$$

Это – случай, когда отсутствует прилипание носителей. При этом

$$\tau = \frac{\tau_{n0} (p_0 + p_1 + \Delta n) + \tau_{p0} (n_0 + n_1 + \Delta n)}{n_0 + p_0 + \Delta n}, \quad (2.7)$$

где величины

$$\tau_{n0} = \frac{1}{N_t \alpha_n}, \quad \tau_{p0} = \frac{1}{N_t \alpha_p} \quad (2.8)$$

Являются временем жизни пар носителей при слабом возбуждении в униполярных материалах р- и n-типа соответственно. Если центр захвата создает в запрещенной зоне два локальных уровня  $E_1$  и  $E_2$ , то при небольшом отклонении от равновесия и в отсутствие заметного прилипания

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1 + \frac{n_0}{p_0}}{1 + \frac{p_1}{p_0} + \frac{p_1 p_2}{p_0^2}} N_t \left( \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{n1}} + \frac{1}{\alpha_{p1}} \frac{n_1}{p_0}} + \frac{\frac{p_1}{p_0}}{\frac{1}{\alpha_{n2}} + \frac{1}{\alpha_{p2}} \frac{n_2}{p_0}} \right) \quad (2.9)$$

где вторые индексы у коэффициентов захвата указывают, на какой уровень захватывается носитель, а величины  $n_1, n_2, p_1, p_2$  определены аналогично (2.4) с заменой  $E_t$  на  $E_1$  или  $E_2$ .

Пусть в полупроводнике помимо центров, через которые идет

рекомбинация и которые сами по себе не вызывают заметного прилипания, имеются еще ловушки, способные захватывать только, например, электроны из зоны проводимости и отдавать их обратно. Тогда в образце n-типа при малом отклонении от равновесия справедливы выражения

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = u_n &= \frac{\Delta n}{\tau_r} + \frac{\Delta n}{\tau_1} - \frac{\Delta n_t}{\tau_2}, \\ -\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = u_p &= \frac{\Delta n}{\tau_r}, \quad \Delta n_t = \Delta p - \Delta n, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\tau_r$  – рекомбинационное время жизни, среднее  $\tau_1$  – время захвата электрона на уровень прилипания,  $\tau_2$  – среднее время выброса обратно.

### Примеры решения задач

*Задача 1.* В момент времени  $t_1 = 10^{-4}$  с после выключения равномерной по объему генерации электронно-дырочных пар неравновесная концентрация носителей оказалась в 10 раз больше, чем в момент  $t_2 = 10^{-3}$  с. Определить время жизни  $\tau$ , если уровень возбуждения невелик и рекомбинация идет через простые дефекты.

Решение.

Релаксация неравновесной концентрации подчиняется уравнениям (2.1).

Для дырок, например,

$$\frac{d\Delta p}{dt} = -\frac{\Delta p}{\tau},$$

откуда

$$\Delta p(t) = \Delta p(0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\frac{\Delta p(t_1)}{\Delta p(t_2)} = e^{\frac{t_2 - t_1}{\tau}},$$

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{\Delta p(t_1)}{\Delta p(t_2)}} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{2,31} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

*Задача 2.* Вычислить относительное изменение проводимости  $\Delta\sigma/\sigma_0$  для n-Ge при стационарном освещении с интенсивностью  $I = 5 \cdot 10^{15}$  квантов на  $1 \text{ см}^2$  в 1 с. Коэффициент поглощения  $\alpha = 100 \text{ см}^{-1}$ ; толщина образца мала по сравнению с  $\alpha^{-1}$ ; рекомбинация происходит на простых дефектах;  $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $\tau = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .

Решение.

В стационарных условиях процессы оптической генерации электронно-дырочных пар и их рекомбинации уравниваются друг друга. Для дырок имеем

$$u_p = g_p, \quad u_p = \frac{\Delta p}{\tau}, \quad g_p = \alpha I,$$

где  $g_p$  – число дырок, генерируемых в единицу времени в единице объема.

Поэтому

$$\Delta p = \alpha I \tau = 100 \cdot 5 \cdot 10^{15} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

Аналогичные выражения можно записать и для электронов. Относительное изменение проводимости для n-Ge равно

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{e\Delta n\mu_n + e\Delta p\mu_p}{en_0\mu_n} = \frac{\Delta p}{n_0} \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{10^{14}}{10^{15}} \left(1 + \frac{1}{2,1}\right) = 0,15.$$

Здесь  $b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$  – отношение подвижностей электронов и дырок в германии.

*Задача 3.* В n-Ge с шириной запрещенной зоны  $E_g = (0,785 - 4 \cdot 10^{-4}T)$  эВ имеются центры рекомбинации с  $N_t = 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$  и  $E_t = (E_c + E_v)/2$ . При 300 К сечения захвата электронов и дырок одинаковы, при малых отклонениях от равновесия  $\tau = 10^{-4} \text{ с}$ ,  $\rho = 5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . Найти сечение захвата  $S$ .

Решение.

В условиях слабого возбуждения величинами  $\Delta n$  и  $\Delta p$  в формуле (2.7) можно пренебречь, тогда, учитывая (2.8) запишем

$$\tau = \frac{1}{\alpha N_t} \frac{n_0 + n_1 + p_0 + p_1}{n_0 + p_0},$$

где  $\alpha = \alpha_n = \alpha_p$ , по условию задачи. Вычислим вошедшие сюда концентрации.

Подавляющий вклад в проводимость образца n-типа при данной температуре ( $T \ll E_g/2k$ ) вносит электронная составляющая

$$\frac{1}{\rho} = en_0\mu_n,$$

откуда

$$n_0 = \frac{1}{\rho e \mu_n} \approx 3,3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

Концентрацию дырок найдем как

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0},$$

где, (см. задачу 2 предыдущего раздела),

$$n_i = 2 \left( \frac{\sqrt{m_n m_p} kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g(T)}{2kT}} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

Значения эффективных масс электрона и дырки взяты из приложения 2.

Получим

$$p_0 \approx 1,2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}.$$

Из (2.4) с учетом условий задачи следует

$$n_1 = 2 \left( \frac{m_n kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g(T)}{2kT}} \approx 2,8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

$$p_1 = \frac{n_i^2}{n_1} = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом,

$$\alpha = \frac{1}{\tau N_t} \frac{n_0 + n_1 + p_0 + p_1}{n_0 + p_0} \approx 2,3 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3/\text{с},$$

$$S = \frac{\alpha}{v_T} = \alpha \sqrt{\frac{m_0}{3kT}} \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.$$

*Задача 4.* Определить, как зависят от времени концентрации избыточных носителей в полупроводнике n-типа после прекращения стационарной генерации, создававшей слабое отклонение от равновесия. Считать известными рекомбинационное время  $\tau_r$ , время захвата на уровне прилипания  $\tau_1$  и время обратного выброса  $\tau_2$ .

Решение.

По аналогии с уравнением (2.10) можно написать

$$\frac{d\Delta n}{dt} = g - u_n = g - \frac{\Delta p}{\tau_r}, \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p}{dt} = g - \frac{\Delta p}{\tau_r} - \frac{\Delta p}{\tau_1} + \frac{\Delta p_t}{\tau_2}, \quad \Delta p_t = \Delta n - \Delta p. \quad (2)$$

В стационарных условиях

$$\Delta p = g\tau_r, \quad \Delta p_t = \frac{\tau_2}{\tau_1} \Delta p, \quad \Delta n = \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \Delta p.$$

Поведение  $\Delta n$  и  $\Delta p$  в процессе релаксации описывается линейными комбинациями двух экспоненциальных функций времени:

$$\Delta n = Ae^{-k_1 t} + Be^{-k_2 t}, \quad \Delta p = Ce^{-k_1 t} + De^{-k_2 t}.$$

Продифференцировав (2) и выразив  $d\Delta n/dt$  из (1), получим характеристическое уравнение

$$k^2 - \frac{k}{\tau_g} + \frac{1}{\tau_2 \tau_r} = 0,$$

где

$$\frac{1}{\tau_g} = \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}.$$

Корни уравнения

$$k_{1,2} = \frac{1}{2\tau_g} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau_g^2} - \frac{1}{\tau_r\tau_2}}.$$

Из уравнения (1) следует, что

$$C = \tau_r k_1 A, \quad D = \tau_r k_2 B,$$

а из начальных условий

$$C + D = g\tau_r, \quad A + B = g\tau_r \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right).$$

Отсюда и определяются коэффициенты; окончательный ответ имеет вид

$$\Delta n = \frac{g\tau_r}{k_1 - k_2} \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{\tau_r} - k_2 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \right] e^{-k_1 t} + \left[ k_1 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) - \frac{1}{\tau_r} \right] e^{-k_2 t} \right\},$$
$$\Delta p = \frac{g\tau_r^2}{k_1 - k_2} \left\{ k_1 \left[ \frac{1}{\tau_r} - k_2 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \right] e^{-k_1 t} + k_2 \left[ k_1 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) - \frac{1}{\tau_r} \right] e^{-k_2 t} \right\}.$$

### Литература

[1], глава 8, §4,13; [3], §2; [4], глава 5; [5], §24; [6], глава 5, §11.

### 3. ДИФФУЗИЯ И ДРЕЙФ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

При неоднородном распределении носителей заряда в образце возникают диффузионные токи. Плотности диффузионных электронного и дырочного токов определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}\vec{j}_{n\text{дифф}} &= eD_n \text{grad } n, \\ \vec{j}_{p\text{дифф}} &= -eD_p \text{grad } p,\end{aligned}\quad (3.1)$$

где  $e$  – абсолютная величина заряда электрона,  $D_n$  и  $D_p$  – коэффициенты диффузии электронов и дырок,  $n$  и  $p$  – их концентрации. Полные плотности электронного и дырочного токов в рассматриваемых условиях складываются из диффузионной и дрейфовой составляющих:

$$\begin{aligned}\vec{j}_n &= eD_n \text{grad } n + en\mu_n \vec{E}, \\ \vec{j}_p &= -eD_p \text{grad } p + ep\mu_p \vec{E}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь  $\mu_n$  и  $\mu_p$  – подвижности электронов и дырок.

В состоянии равновесия ток в униполярном, например электронном, полупроводнике отсутствует:

$$\vec{j}_n = \vec{j}_{n\text{дифф}} + \vec{j}_{n\text{др}} = 0.\quad (3.3)$$

Вычислив концентрацию электронов по формуле (1.5) с учетом сдвига дна зоны проводимости на величину  $-e\varphi(r)$ , где  $\varphi$  – электростатический потенциал, найдем по формуле (3.1)

$$\vec{j}_{n\text{дифф}} = \frac{e^2 D_n}{kT} \frac{dn}{d\eta} \text{grad } \varphi,\quad (3.4)$$

где  $\eta = \frac{F - E_c}{kT}$ .

Отсюда на основании уравнений (3.2) и (3.3) получаем

$$D_n = \frac{n\mu_n kT}{e \frac{dn}{d\eta}}.\quad (3.5)$$

Аналогичное соотношение получается и для дырок:

$$D_p = -\frac{p\mu_p kT}{e \frac{dp}{d\eta}}. \quad (3.6)$$

В случае невырожденных полупроводников, когда справедлива формула (1.7), равенства (3.5) и (3.6) переходят в соотношения Эйнштейна:

$$D_n = \frac{\mu_n kT}{e}, \quad D_p = \frac{\mu_p kT}{e}. \quad (3.7)$$

Кинетика электронов и дырок описывается уравнениями непрерывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= g - \frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e} \operatorname{div} \vec{j}_n, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= g - \frac{\Delta p}{\tau_p} - \frac{1}{e} \operatorname{div} \vec{j}_p. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Где  $\Delta n$  и  $\Delta p$  – разности между концентрациями электронов и дырок  $n$  и  $p$  и их равновесными значениями  $n_0$  и  $p_0$ ;  $g$  – число электронно-дырочных пар, генерируемых в единицу времени в единице объема образца.

В случае оптической генерации

$$g = \gamma \alpha I e^{-\alpha x}, \quad (3.9)$$

где  $\gamma$  – квантовый выход,  $\alpha$  – коэффициент поглощения света,  $I e^{-\alpha x}$  – плотность потока квантов. Далее,  $\tau_n$  и  $\tau_p$  – времена жизни электронов и дырок (вычисляемые по формулам (2.1) и (2.3)). При рассмотрении процессов диффузии обычно вводят характерные величины размерности длины:

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}, \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p}, \quad (3.10)$$

которые называются диффузионными длинами электронов и дырок соответственно.

К уравнениям (3.8) и (3.2) следует добавить еще в случае нарушения электрической нейтральности уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} E = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (3.11)$$

где  $\rho$  – плотность электрического заряда, а  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость полупроводника.

Заметим, однако, что довольно часто можно считать выполненным условие локальной электронейтральности полупроводника. В отсутствие прилипания, т. е. при  $\tau_n = \tau_p = \tau$ , это означает, что

$$\Delta n = \Delta p, \quad \rho = 0, \quad \operatorname{div}(\vec{j}_n + \vec{j}_p) = 0 \quad (3.12)$$

Диффузия и дрейф электронов и дырок взаимосвязаны. При диффузии возникает добавочное электрическое поле, тормозящее более быстро диффундирующие носители и подтягивающее более медленные. Распространение единого нейтрального фронта избыточных носителей описывается, согласно (3.8) и (3.12), следующим уравнением:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g - \frac{\Delta p}{\tau} + \operatorname{div}(D \operatorname{grad} \Delta p) - \mu \vec{E} \operatorname{grad} \Delta p, \quad (3.13)$$

где  $D$  – коэффициент биполярной диффузии,  $\mu$  – биполярная дрейфовая подвижность:

$$D = \frac{n+p}{\frac{n}{D_p} + \frac{p}{D_n}}, \quad \mu = \frac{n-p}{\frac{n}{\mu_p} + \frac{p}{\mu_n}}. \quad (3.14)$$

Характерной длиной этого процесса является длина биполярной диффузии  $L$ :

$$L = \sqrt{D\tau}. \quad (3.15)$$

Уравнение биполярной диффузии значительно упрощается в тех случаях, когда  $D$  – константа. Это имеет место, когда сильно преобладают носители одного типа, при этом  $D$  есть коэффициент диффузии неосновных носителей, или в условиях собственной проводимости:

$$n = p, \quad D = \frac{2D_n D_p}{D_n + D_p}, \quad (3.16)$$

при этом  $\mu = 0$ .

Наконец, необходимо сформулировать граничные условия к уравнению (3.13). У поверхности полупроводника происходит рекомбинация избыточных носителей заряда. Обозначим через  $u_s$  число пар, рекомбинирующих за 1 с на  $1 \text{ см}^2$  поверхности. Определим скорость поверхностной рекомбинации  $s$  (с

размерностью см/с), связанную с  $u_s$  соотношением

$$s = \frac{u_s}{\Delta n} = \frac{u_s}{\Delta p}, \quad (3.17)$$

где  $\Delta n = \Delta p$  – концентрация избыточных носителей у поверхности. Электроны и дырки, рекомбинирующие на поверхности, поставляются туда поверхностной генерацией и потоками избыточных носителей, направленными к поверхности. Поэтому граничное условие на поверхности полупроводника р-типа имеет вид

$$g_s = \frac{1}{e} \vec{j}_n \vec{V} + s \Delta n, \quad (3.18)$$

где  $\vec{V}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Далее, граничное условие для плотностей тока носителей на контакте полупроводника будем формулировать, задавая значение коэффициента инжекции  $\gamma$ , определяемого как отношение плотности тока неосновных носителей к полной плотности тока.

### Примеры решения задач

*Задача 1.* Вычислить коэффициент диффузии электронов в невырожденном германии при комнатной температуре ( $\mu_n = 3800 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ).

Решение.

Используя соотношение Эйнштейна (3.7), получим

$$D_n = \frac{\mu_n kT}{e} = 98 \text{ см}^2/\text{с}.$$

*Задача 2.* Вычислить коэффициент диффузии электронов в случае полного вырождения. Закон дисперсии электронов имеет вид (1.3а),  $\mu_n = 300 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ,  $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ,  $m_n = 0,2m_0$ .

Решение.

Согласно формуле (3.5)

$$D_n = \frac{n\mu_n kT}{e \frac{dn}{d\eta}}, \quad (1)$$

где  $\eta = \frac{F - E_c}{kT}$ . Далее, на основании (1.5) и (П.3) найдем

$$n = \frac{8\pi(2m_n kT)^{3/2}}{3h^3} \eta^{3/2},$$

откуда

$$\eta = \left( \frac{3h^3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{1}{2m_n kT} \cdot n^{2/3},$$

$$\frac{1}{kT} \frac{dn}{d\eta} = 3m_n \left( \frac{3h^3}{8\pi} \right)^{-2/3} n^{1/3}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$D_n = \frac{h^2}{3e} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{\mu_n}{m_n} n^{2/3} = 3,6 \text{ см}^2/\text{с}.$$

**Задача 3.** Найти концентрацию неравновесных носителей на поверхности толстого образца n-Ge (рис. 2), если генерация пар равномерна по объему;  $g_0 = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}/\text{с}$ , время жизни дырок  $\tau_p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ , скорость поверхностной рекомбинации  $s = 5 \cdot 10^2 \text{ см}/\text{с}$ ,  $D_p = 49 \text{ см}^2/\text{с}$ .

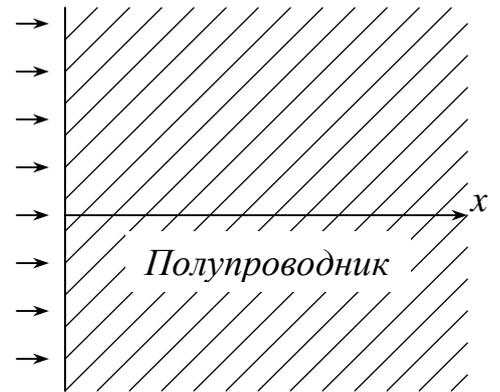


Рис. 2

**Решение.**

Уравнение непрерывности (3.8) для данной задачи записывается следующим образом (см. рис. 2):

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0.$$

Граничные условия таковы:

$$D_p \left. \frac{d\Delta p}{dx} \right|_{x=0} = s \Delta p|_{x=0},$$

$$\Delta p \rightarrow g_0 \tau_p \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Решение уравнения имеет вид

$$\Delta p(x) = g_0 \tau_p + C_1 e^{-\frac{x}{L_p}} + C_2 e^{\frac{x}{L_p}}.$$

Из граничных условий, находим

$$C_2 = 0, \quad -\frac{D_p}{L_p} C_1 = s(C_1 + g_0 \tau_p), \quad C_1 = -\frac{g_0 \tau_p^2 s}{L_p + s \tau_p},$$

так что

$$\Delta p(x) = g_0 \tau_p \frac{s \tau_p \left( 1 - e^{-\frac{x}{L_p}} \right) + L_p}{L_p + s \tau_p}$$

и

$$\Delta p(0) = g_0 \tau_p \frac{L_p}{L_p + s \tau_p}.$$

В рассматриваемых условиях имеем

$$\Delta p(0) = 0,88 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}.$$

*Задача 4.* Определить распределение неравновесных дырок в длинном нитевидном образце n-Ge при стационарной инжекции дырок в точку и при наличии электрического поля  $E = 5$  В/см вдоль образца. Температура комнатная, полупроводник невырожден,  $L_p = 0,09$  см.

Решение.

Уравнение непрерывности (3.13) в данном случае приводится к виду

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - E \mu \frac{d\Delta p}{dx} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0, \quad x \neq 0,$$

или

$$\frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{eE}{kT} \frac{d\Delta p}{dx} - \frac{\Delta p}{L_p^2} = 0, \quad x \neq 0.$$

На больших расстояниях от точки инъекции неравновесная концентрация  $\Delta p$  должна обращаться в нуль. Уравнению удовлетворяют решения вида (рис. 3)

$$\Delta p = \begin{cases} \Delta p_0 e^{k_1 x}, & x < 0, \\ \Delta p_0 e^{k_2 x}, & x > 0, \end{cases}$$

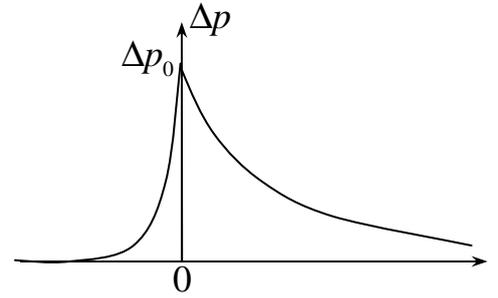


Рис. 3

где

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{eE}{kT} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{eE}{kT}\right)^2 + \frac{1}{L_D^2}},$$

$\Delta p_0$  – значение  $\Delta p$  в точке инъекции  $x = 0$ .

Введем обозначения  $l = kT/eE$ ,  $L_E = E\mu_p\tau_p$  ( $L_E$  – дрейфовая длина). Тогда легко найти

$$k_{1,2} = \frac{1}{2l} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4l}{L_E}} \right).$$

В наших условиях

$$l = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ см},$$

$$L_E = \frac{eEL_p^2}{kT} = 1,57 \text{ см}.$$

Так как  $l/L_E \ll 1$ , можно считать, что

$$k_1 \approx \frac{1}{l}, \quad k_2 \approx -\frac{1}{L_E}.$$

### Литература

[1], глава 8, §5,6; [3], §3; [4], глава 5; [6], глава 9, §11.

#### 4. ЭФФЕКТ ХОЛЛА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Если в полупроводнике течет ток, то помещение его в магнитное поле приведет к появлению э.д.с. на поверхностях, перпендикулярных направлению вектора напряженности магнитного поля. Этот эффект называется эффектом Холла. Так как в однородном и изотропном полупроводнике, находящемся под действием электрического поля  $\vec{E}$  и слабого магнитного поля  $\vec{H}$ , перпендикулярного  $\vec{E}$  имеется два вида зарядов, то можно определить плотности тока носителей следующим образом:

$$\vec{j}_n = ne\mu_n \left\{ \vec{E} \left[ 1 - \eta_n \left( \frac{\mu_{nH} H}{c} \right)^2 \right] - \frac{\mu_{nH}}{c} [\vec{E} \times \vec{H}] \right\}, \quad (4.1)$$

$$\vec{j}_p = pe\mu_p \left\{ \vec{E} \left[ 1 - \eta_p \left( \frac{\mu_{pH} H}{c} \right)^2 \right] + \frac{\mu_{pH}}{c} [\vec{E} \times \vec{H}] \right\}. \quad (4.2)$$

Где  $\mu_{nH}$  и  $\mu_{pH}$  – холловские подвижности, а  $\eta_n$  и  $\eta_p$  – константы, зависящие от длин свободного пробега носителей энергии. Магнитное поле считается слабым, если выполняются условия

$$\mu_{nH} H / c \ll 1 \text{ и } \mu_{pH} H / c \ll 1, \text{ тогда}$$

приведенных формулах, можно отбросить члены выше второго порядка.

На рис. 4 напряжение Холла возникает между боковыми торцами образца  $V_H$ , холловское поле  $E_y$  действует в направлении оси  $y$ . Отношение

$$R = \frac{cE_y}{j_x H} \quad (4.3)$$

Называется постоянной Холла ( $j_x$  – плотность тока вдоль оси  $x$ ). Связь между  $E_x$  и  $j_x$  имеет вид

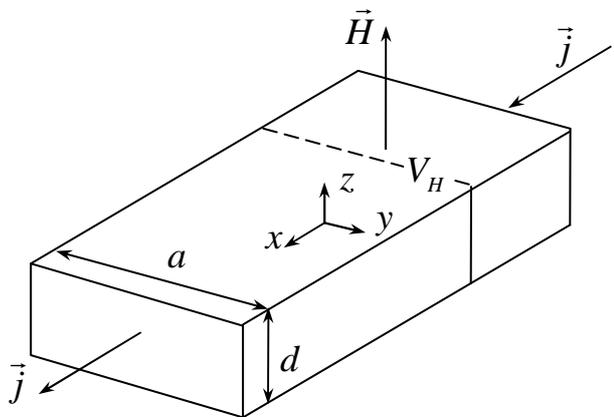


Рис. 4

ОТ

В

$$j_x = (\sigma_0 + \Delta\sigma)E_x, \quad (4.4)$$

где  $\sigma_0$  – проводимость при  $H = 0$ ,  $\Delta\sigma$  - относительное изменение проводимости, которое в слабом магнитном поле выражается следующим образом:

$$-\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \xi R_0^2 \sigma_0^2 \frac{H^2}{c^2}. \quad (4.5)$$

Где  $R_0$  – значение постоянной Холла при  $H \rightarrow 0$ , а  $\xi$  – коэффициент магнетосопротивления.

В случае неоднородного невырожденного полупроводника ( $n$  и  $p$  зависят от координат) в формуле (4.1) следует заменить

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}_n^* = \vec{E} + \frac{kT}{e} \text{grad} \ln n, \quad (4.1a)$$

а в формуле (4.2)

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}_p^* = \vec{E} - \frac{kT}{e} \text{grad} \ln p. \quad (4.2a)$$

Если магнитное поле велико, то соотношения (4.1) и (4.2) можно переписать следующим образом:

$$\vec{j}_n = \frac{ne\mu_n}{1 + \left(\frac{\mu_n H}{c}\right)^2} \left\{ \vec{E} - \frac{\mu_n}{c} [\vec{E} \times \vec{H}] \right\}, \quad (4.6)$$

$$\vec{j}_p = \frac{pe\mu_p}{1 + \left(\frac{\mu_p H}{c}\right)^2} \left\{ \vec{E} + \frac{\mu_p}{c} [\vec{E} \times \vec{H}] \right\}. \quad (4.7)$$

Если грань образца осветить, то возникает поток носителей, отклоняемый магнитным полем, возникает без приложения внешнего поля  $E_x$  (рис. 5). Если одна грань изолированного прямоугольного образца освещается светом, то возникают неравновесные пары электронов и дырок, неравномерно распределенные по объему. В направлении оси  $x$  создаются

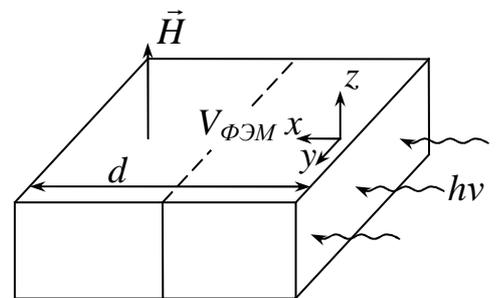


Рис.5

диффузионные потоки, а под влиянием магнитного поля, отклоняющего их вдоль оси  $y$ , возникает напряжение фотоэлектромагнитного эффекта (ФЭМ)  $V_{\text{ФЭМ}}$  между торцами образца, перпендикулярными оси  $y$ . В стационарных условиях при достаточно больших размерах образца можно записать:

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \frac{dE_y}{dx} = 0,$$

т. е. поле  $E_y$  постоянно везде. Рассматриваемую систему можно описать уравнениями:

$$\frac{1}{e} \text{div } \vec{j}_n = \frac{\Delta n}{\tau_n} = \frac{\Delta p}{\tau_p} = -\frac{1}{e} \text{div } \vec{j}_p, \quad (4.8)$$

$$j_{nx} + j_{px} = 0. \quad (4.9)$$

Для данных выражений справедливо, что изменение заполнения уровней прилипания пропорционально избыточным концентрациям. При малых магнитных полях можно в выражениях для плотностей тока

$$\vec{j}_n = \vec{j}_n^* - \frac{\mu_{nH}}{c} [\vec{j}_n^* \times \vec{H}], \quad \vec{j}_n^* = ne\mu_n \vec{E} + eD_n \text{grad } n, \quad (4.10)$$

$$\vec{j}_p = \vec{j}_p^* + \frac{\mu_{pH}}{c} [\vec{j}_p^* \times \vec{H}], \quad \vec{j}_p^* = pe\mu_p \vec{E} - eD_p \text{grad } p \quad (4.11)$$

пренебречь в первом приближении членами с  $H$ . Определим  $\Delta n$ ,  $\Delta p$ , решив одномерную задачу с граничными условиями (генерации на поверхности)

$$g = -\frac{1}{e} j_{nx} + s_0 \Delta n, \quad x = 0;$$

$$0 = \frac{1}{e} j_{nx} + s_d \Delta n, \quad x = d.$$

Теперь плотность тока ФЭМ-эффекта  $j_y$  (или поле ФЭМ-эффекта  $E_y$  при

$\int_0^d j_y dx = 0$ ) можно найти из уравнения

$$j_y = eE_y (n\mu_n + p\mu_p) + \frac{eH(\mu_{nH} + \mu_{pH})}{c} D_n^* \frac{dn}{dx}. \quad (4.12)$$

Где  $n = n_0 + \Delta n$ ,  $D$  – коэффициент биполярной диффузии (3.14) и

$$D_n^* = D \frac{n\tau_p + p\tau_n}{\tau_n(n+p)}. \quad (4.13)$$

### Примеры решения задач

*Задача 1.* В образце n-типа плотность тока вдоль оси  $x$  (см. рис. 4) есть  $j_x = 0,1 \text{ А/см}^2$ . Магнитное поле по оси  $z$   $H = 796 \text{ А/см}$ . В условиях рассеяния на колебаниях решетки  $\mu_{nH} = 1,18\mu_n$ . Определить холловское напряжение  $V_H$  и постоянную  $R$ , если  $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и размер образца в направлении  $y$  равен  $a = 0,5 \text{ см}$ .

Решение.

Напряжение  $V_H$  и поле  $E_y$  определяются из условия  $j_y = 0$ . Пренебрегая в уравнении (4.1) членами порядка  $H^2$ , получаем

$$j_x = en_0\mu_n E_x,$$

$$j_y = 0 = en_0\mu_n \left( E_y + \frac{\mu_{nH}}{c} E_x H \right).$$

Отсюда

$$E_y = -\frac{\mu_{nH}H}{c} E_x = -\frac{\mu_{nH}H}{c} \frac{j_x}{en_0\mu_n}$$

и

$$R = -\frac{\mu_{nH}}{\mu_n} \frac{1}{n_0 e} = 7,38 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{Кл},$$

$$V_H = -\frac{\mu_{nH}}{\mu_n} \frac{aj_x H}{n_0 e c} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

*Задача 2.* При наложении на образец p-типа магнитного поля

$H_z = 3180$  А/см, поперечного направлению тока, сопротивление увеличилось на 0,22%. Определить коэффициент магнетосопротивления  $\xi_p$  и коэффициент  $\eta_p$  (в формулах (4.1) и (4.2)), если  $\mu_{pH} = 2240$  см<sup>2</sup>/В·с.

Решение.

Из уравнения (4.2), в пренебрежении членами порядка  $H^3$ , следует

$$E_y = \beta E_x, \quad j_{px} = p e \mu_p E_x [1 - \beta^2 (\eta_p - 1)],$$

где  $\beta = \mu_{pH} H / c$ .

Отсюда ввиду малости относительного изменения  $\rho = 1/\sigma$

$$-\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = (\eta_p - 1)\beta^2, \quad \beta^2 = \left(\frac{\mu_{pH} H}{c}\right)^2 = 8 \cdot 10^{-3}$$

и  $\eta_p = 1,3$ . По формуле (4.3)  $R_0 = \frac{c\beta}{\sigma_0 H}$ , поэтому  $R_0^2 \sigma_0^2 \frac{H^2}{c^2} = \beta^2$  и, согласно

определению (4.5)

$$\xi_p = \eta_p - 1 = 0,3.$$

*Задача 3.* Определить постоянную Холла в InSb при 300 К, содержащем акцепторы в концентрации  $N_a = 5 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>, если отношение холловских подвижностей к дрейфовым равно 1,18;  $\mu_n/\mu_p = 80$ . Магнитное поле слабое,  $n_i = 1,6 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>, акцепторы считать полностью ионизированными.

Решение.

Возьмем у-компоненту суммы уравнений (4.1) и (4.2):

$$0 = j_{ny} + j_{py} = e(n\mu_n + p\mu_p)E_y + e(n\mu_n\mu_{nH} - p\mu_p\mu_{pH})\frac{E_x H}{c}.$$

Отсюда

$$E_y = \frac{p - nb^2}{p + nb} \frac{\mu_{nH} H}{c} E_x.$$

По формуле (4.3)

$$R = \frac{cE_y}{\sigma_0 E_x H} = \frac{cE_y}{H(n\mu_n + p\mu_p)E_x} = \frac{cE_y}{HE_x} \frac{1}{e\mu_p(p+nb)} = \frac{p-nb^2}{(p+nb)^2} \frac{\mu_{pH}}{\mu_p} \frac{1}{e}.$$

Определим  $p$  и  $n$  из условия нейтральности:

$$p = n + N_a = \frac{n_i^2}{p} + N_a.$$

Отсюда

$$p = \frac{N_a}{2} + \sqrt{\frac{N_a^2}{4} + n_i^2} = 5,47 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

Знак корня отвечает условию  $p > 0$

$$n = 0,47 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

Окончательно получаем

$$R = -1190 \text{ см}^3/\text{Кл}.$$

*Задача 4.* Определить напряжение ФЭМ-эффекта между торцами массивного кубического образца, если  $\beta = 0,07$ , максимальная концентрация избыточных носителей (на поверхности)  $\Delta n(0) = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , образец n-типа,  $\rho_0 = 1,6 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ ,  $D_p = 45 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $b = 2,1$ .

Решение.

Интегрируя уравнение (4.12) по  $x$  от  $x=0$  до  $x=d$  (см. рис. 5), получим

$$0 = \sigma_0 E_y d + \frac{eH(\mu_{nH} + \mu_{pH})}{c} D_p \Delta n(0).$$

Так как образец – куб, то  $E_y d = V_{\text{ФЭМ}}$ , и

$$V_{\text{ФЭМ}} = -\rho_0 e \beta (1+b) D_p \Delta n(0) = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

### Литература

[2], глава 5, §2,3; [3], §4; [4], глава 11; [6], глава 6, §4.

## 5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Наличие на поверхности полупроводника поверхностных состояний приводит к образованию двойного слоя электрического заряда. В зависимости от того, являются ли они акцепторами или донорами, поверхность заряжается отрицательно или положительно. При этом в приповерхностной области возникает слой объемного заряда. Возникающее электрическое поле вызывает изгиб энергетических зон вверх, в случае акцепторных состояний, и вниз, в случае донорных поверхностных состояний;

$$\begin{aligned} E_c(\vec{r}) &= E_{c0} - e\varphi(\vec{r}), \\ E_v(\vec{r}) &= E_{v0} - e\varphi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

В области объемного заряда концентрации электронов и дырок зависят от координат. Для невырожденных полупроводников эти зависимости имеют вид

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= N_c e^{\frac{F - E_{c0} + e\varphi(\vec{r})}{kT}} = n e^{\frac{e\varphi(\vec{r})}{kT}}, \\ p(\vec{r}) &= N_v e^{\frac{E_{v0} - F - e\varphi(\vec{r})}{kT}} = p e^{\frac{e\varphi(\vec{r})}{kT}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для определения электростатического потенциала  $\varphi(\vec{r})$  следует решить уравнение Пуассона с граничными условиями, определяемыми условиями задачи:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \operatorname{grad} \varphi, \quad (5.3)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость,

$$\rho = e \left[ N_d^+(\vec{r}) - N_a^-(\vec{r}) + p(\vec{r}) - n(\vec{r}) \right], \quad (5.4)$$

величины  $n(\vec{r})$  и  $p(\vec{r})$  определяются формулами (5.2), а концентрации ионизованных доноров и акцепторов в области пространственного заряда вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N_d^+ &= \frac{N_d}{1 + e^{\frac{F - E_d + e\varphi(\vec{r})}{kT}}}, \\ N_a^- &= \frac{N_a}{1 + e^{\frac{E_a - F - e\varphi(\vec{r})}{kT}}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Где  $E_a = E_a^* + kT \ln g_a$ ,  $E_d = E_d^* + kT \ln g_d$ ,  $E_a^*$  и  $E_d^*$  – энергии акцепторных и донорных уровней в объеме полупроводника,  $g_a$  и  $g_d$  – кратности вырождения акцепторного и донорного уровней.

Ширина области пространственного заряда характеризуется длиной экранирования, или дебаевской длиной  $L_D$ . Для электронного полупроводника она равна

$$L_D = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{4\pi e^2 n}}, \quad (5.6)$$

для собственного полупроводника

$$L_D = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{8\pi e^2 n_i}} \quad (5.7)$$

Если нет внешнего электрического поля, то полупроводник в целом нейтрален. Условие электронейтральности для одномерного полубесконечного полупроводникового образца (этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем) с поверхностью при  $x = 0$  ( $0 \leq x \leq \infty$ ) имеет вид

$$\int_0^{\infty} \rho(x) dx + Q_s = 0, \quad (5.8)$$

где  $Q_s$  – поверхностная плотность заряда в поверхностных состояниях.

Избыточные концентрации электронов и дырок в слое пространственного заряда вычисляются по формулам:

$$\Delta N = \int_0^{\infty} [n(x) - n] dx, \quad \Delta P = \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx, \quad (5.9)$$

где  $n$  и  $p$  – концентрации электронов и дырок в объеме.

Поверхностная проводимость  $G$  определяется как

$$G = e\mu_n^* \Delta N + e\mu_p^* \Delta P, \quad (5.10)$$

где  $\mu_n^*$  и  $\mu_p^*$  – эффективные подвижности электронов и дырок в слое пространственного заряда. Часто полагают, что они равны значениям подвижности в объеме образца.

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Определить форму зон, если к полупроводнику с собственной проводимостью нормально к его поверхности приложено постоянное электрическое поле  $E$  (рис. 6), настолько слабое, что везде в полупроводнике  $\frac{e \cdot \varphi}{kt} \ll 1$ . Найти скачок потенциала на поверхности, если  $E = 160$  В/см,  $n_i = 2,0 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>,  $\varepsilon = 16$ ,  $T = 300$  К.

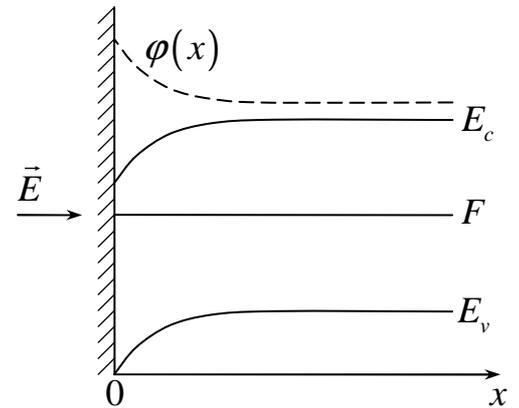


Рис. 6.

Решение.

Запишем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$\rho = e[p(x) - n(x)], \quad (1)$$

где

$$p(x) = n_i e^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}}, \quad n(x) = n_i e^{\frac{e\varphi(x)}{kT}}.$$

Здесь  $n_i$  – концентрация электронов (или дырок) в объеме под областью пространственного заряда.

Подставляя (2) в (1), находим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} n_i \left( e^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}} - e^{\frac{e\varphi(x)}{kT}} \right) \approx \frac{8\pi e^2 n_i}{\varepsilon kT} \varphi.$$

Поскольку

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon kT}{8\pi e^2 n_i}},$$

получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\varphi}{L_D^2} = 0. \quad (3)$$

Так как потенциал определен с точностью до константы, мы можем считать его равным нулю в глубине образца. Далее, нормальная составляющая вектора электрической индукции должна быть непрерывна (нет поверхностных зарядов).

Поэтому граничные условия имеют вид (см. рис. 6)

$$\begin{cases} \varphi = 0, & x \rightarrow \infty, \\ E = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dx}, & x = 0. \end{cases}$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 e^{-\frac{x}{L_D}} + C_2 e^{\frac{x}{L_D}}.$$

Из граничных условий находим

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{EL_D}{\varepsilon},$$

$$\varphi(x) = \frac{EL_D}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{L_D}}.$$

На основании (5.1) и (4) получаем

$$\begin{cases} E_c = E_{c0} - \frac{eL_D E}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{L_D}}, \\ E_v = E_{v0} - \frac{eL_D E}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{L_D}}. \end{cases}$$

Скачок потенциала на поверхности равен

$$\Delta\varphi = \frac{EL_D}{\varepsilon} = 0,76 \text{ мВ.}$$

*Задача 2.* Найти изменение работы выхода электронов, если на поверхности полупроводника адсорбированы молекулы с дипольным моментом  $d = el = 10^{18}$  ед. CGSE и плотностью  $N = 10^{12} \text{ см}^{-2}$  (рис. 7).

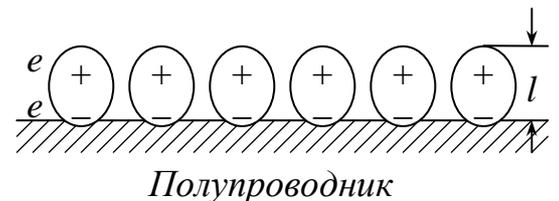


Рис. 7.

Решение.

Изменение работы выхода равно величине загиба зон на поверхности

(см. рис. 7):

$$\Delta\Phi = -e\varphi.$$

В рассматриваемом случае  $\varphi$  – скачок потенциала двойного слоя  $\varphi = 4\pi m$ , где  $m$  – мощность двойного слоя ( $m = Nd$ ,  $d = el$ ,  $l$  – плечо дипольной молекулы), т. е.

$$\varphi = 4\pi Nd.$$

Отсюда

$$\Delta\Phi = -4\pi eNd = -3,78 \cdot 10^{-3} \text{ эВ.}$$

*Задача 3.* Определить заряд в поверхностных состояниях, если к электронному полупроводнику нормально к его поверхности прикладывается постоянное электрическое поле  $E = 5 \cdot 10^3$  В/см ( $\varphi > 0$ ) и при этом поверхностная проводимость оказывается равной  $10^{-6}$  Ом $^{-1}$ . Считать, что всюду в полупроводнике выполнено условие  $\frac{e \cdot \varphi}{kt} \ll 1$ ;  $n = 5 \cdot 10^{14}$  см $^{-3}$ ,  $\varepsilon = 16$ ,  $\mu^* = \mu_n = 3800$  см $^2$ /В·с,  $T = 300$  К. Считать доноры в полупроводнике полностью ионизированными.

Решение.

Граничное условие в точке  $x = 0$  к уравнению Пуассона имеет вид

$$4\pi Q_s = \varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_2 E_2, \quad (1)$$

где  $E_1 = E$  – внешнее электрическое поле,  $\varepsilon_1 = 1$ ,

$$E_2 = -\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon = 16.$$

Уравнение Пуассона записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad \rho = e \left( n - ne^{\frac{e\varphi}{kT}} \right),$$

где  $n = N_D$ , или, поскольку  $\frac{e \cdot \varphi}{kt} \ll 1$ ,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{4\pi e^2 n \varphi}{\varepsilon k T} = \frac{\varphi}{L_D^2}.$$

Интегрируя это уравнение с граничными условиями

$$\begin{cases} x = 0, & \varphi = \varphi_s, \\ x \rightarrow \infty, & \varphi \rightarrow 0, \end{cases}$$

находим

$$\varphi = \varphi_s e^{-\frac{x}{L_D}},$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \varphi dx = \varphi_s L_D. \quad (2)$$

Запишем выражение для поверхностной проводимости:

$$G = e\mu_n \int_0^{\infty} [n(x) - n] dx + e\mu_p \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx.$$

Вторым слагаемым здесь можно пренебречь, поскольку  $n \gg p$  и  $n(x) \gg p(x)$  (зоны загнуты вниз). Используя формулу (2), получим

$$G = e\mu_n n \int_0^{\infty} \frac{e\varphi}{kT} dx = e\mu_n n \frac{e\varphi_s}{kT} L_D.$$

Отсюда

$$\varphi_s = \frac{G kT}{e \mu_n n L_D} = \frac{4\pi G L_D}{\varepsilon \mu_n} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Заряд в поверхностных состояниях найдем из граничного условия (1):

$$Q_s = eN = \frac{E - \varepsilon \frac{\varphi_s}{L_D}}{4\pi},$$

откуда

$$N = 1,1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}.$$

*Задача 4.* Определить скорость поверхностной рекомбинации  $s$  для

тонкой и длинной пластины, длина и ширина которой много больше ее толщины  $2a = 0,5$  мм. Скорости поверхностной рекомбинации для обеих сторон пластины одинаковы. Эффективное время жизни неравновесных носителей в пластине  $\tau_1 = 125$  мкс, объемное время жизни, измеренное для толстого образца, равно  $\tau_p = 250$  мкс. Использовать условие  $\frac{sa}{D_p} \ll 1$ .

Решение.

Вычислим изменение со временем концентрации избыточных носителей после выключения источника генерации, который равномерно освещал образец:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p} - \operatorname{div} \vec{j}_p, \quad \vec{j}_p = -D_p \operatorname{grad} \Delta p. \quad (1)$$

Граничные условия таковы:

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} = \mp s\Delta p \quad \text{при} \quad x = \pm a \quad (2)$$

(ось  $x$  направлена перпендикулярно поверхности пластины). Из (1) следует

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p}. \quad (3)$$

Уравнение (3) решаем методом разделения переменных

$$\Delta p = \varphi(t)\psi(x). \quad (4)$$

Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi = D_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \varphi - \frac{\varphi \psi}{\tau_p},$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\tau_p} = D_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\psi} = \text{const.}$$

Эту постоянную обозначим через  $-1/\tau_s$  и введем обозначение

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_s}.$$

Тогда уравнение, зависящее от времени, примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\tau} = 0.$$

Его частное решение

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5)$$

Уравнение, зависящее от  $x$ , имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau_s D_p} \psi = 0.$$

Его решение

$$\psi(x) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_s D_p}}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_s D_p}}\right). \quad (6)$$

Решение должно быть симметрично относительно точки  $x=0$ , поскольку по условию задачи обе стороны пластины имеют одинаковые скорости поверхностной рекомбинации. Поэтому  $B=0$  и из формул (4), (5) и (6) следует

$$\Delta p = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_s D_p}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7)$$

Из граничных условий (2) на основании (7) получаем

$$D_p A \sin\left(\frac{a}{\sqrt{\tau_s D_p}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1}{\sqrt{\tau_s D_p}} = s A \cos\left(\frac{a}{\sqrt{\tau_s D_p}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

или

$$\frac{a}{\sqrt{\tau_s D_p}} \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{\tau_s D_p}} = \frac{sa}{D_p}.$$

Введем обозначение

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{\tau_s D_p}}.$$

Тогда

$$\eta \operatorname{tg} \eta = \frac{sa}{D_p}. \quad (8)$$

Трансцендентное уравнение (8) имеет бесконечное число корней  $\eta$  (а

следовательно, и  $\tau_s$ ):  $\eta_1, \eta_2, \dots$ , причем  $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3, \dots$ . Решение уравнения (3) может быть записано теперь в виде

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_{sj} D_p}}\right) e^{-\frac{t}{\tau_j}}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что слагаемые, соответствующие корням высших порядков, затухают со временем быстрее, чем решение, отвечающее первому корню. Поэтому для не очень малых  $t$  (т. е. после начального переходного процесса) всеми слагаемыми, кроме соответствующего первому корню уравнения (8), можно пренебречь. Тогда

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_{s1}},$$

где

$$\frac{1}{\tau_{s1}} = \frac{\eta_1^2 D_p}{a^2}.$$

В случае малых  $s$ , таких, что  $\frac{sa}{D_p} \ll 1$ , в уравнении (8) для наименьшего корня

можно взять  $\operatorname{tg} \eta \approx \eta$ . Тогда

$$\frac{a^2}{\eta_1^2 D_p} = \frac{sa}{D_p}$$

и

$$s = \frac{a}{\tau_{s1}} = a \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_p} \right) = 100 \text{ см/с.}$$

### Литература

[1], глава 8, §11,12; [3], §5; [4], глава 8; [5], §32; [6], глава 7, §3.

## 6. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

При наличии градиента температуры в образце может возникнуть термоэлектрическое поле. Основной характеристикой такого поля является дифференциальная термоэлектродвижущая сила, которую для одного типа носителей заряда можно определить выражением

$$\alpha = \pm \frac{k}{e} \left( \frac{Q^*}{kT} \pm \eta \right). \quad (6.1)$$

где знак совпадает со знаком носителей заряда,  $\eta = F/kT$ ,  $F$  – уровень Ферми,  $Q^*$  – энергия переноса. В изотропном случае энергия переноса равна

$$Q^* = \frac{q}{\sigma}. \quad (6.2a)$$

В последней формуле

$$\sigma = \left\langle \frac{e\tau}{m^*} \right\rangle, \quad (6.3a)$$

$$q = \left\langle \frac{e\tau}{m^*} \cdot E \right\rangle, \quad (6.3b)$$

знак  $\langle \rangle$  означает интегрирование по энергиям с весом  $\frac{k^3(E)}{3\pi^2} \cdot \left( -\frac{\partial f}{\partial E} \right)$ :

$$\langle A(E) \rangle = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty dE \cdot k^3(E) \left( -\frac{\partial f}{\partial E} \right) A(E),$$

$f$  – функция Ферми (1.2),  $\tau$  – время релаксации, зависящее от квазиимпульса (энергии) по закону

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{dE}{dk} \cdot k^{2(r-1)}, \quad (6.4)$$

а  $m^*$  – величина, имеющая размерность массы и определяемая соотношением

$$m^* \vec{v} = \hbar \vec{k} \quad \left( \vec{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \right). \quad (6.5)$$

Вообще говоря, величина  $m^*$  зависит от энергии, однако в простейшем случае квадратичного закона дисперсии она постоянна и совпадает с эффективной

массой носителей  $m_d$

$$m^* = \hbar^2 k \left. \frac{dk}{dE} \right|_{E=F} = m_d$$

В формуле (6.4) величина  $r$  определяется механизмом рассеяния импульса носителей. При рассеянии носителей на акустических колебаниях решетки -  $r = 0$ , при рассеянии на оптических колебаниях решетки -  $r = 1$ , при температуре, превышающей температуру Дебая  $T_D$ , при  $T < T_D$  -  $r = 1/2$ , а при рассеянии на заряженных примесях -  $r = 2$ .

Если в системе имеется несколько типов носителей заряда, то полная термоэдс равна

$$\alpha = \sum_i \frac{\sigma_i}{\sigma} \alpha_i, \quad (6.6)$$

где  $\sigma_i$  и  $\alpha_i$  – проводимость и термоэдс, связанные с  $i$ -м сортом носителей,  $\sigma$  – полная проводимость, и суммирование проводится по всем типам носителей.

При низких температурах в чистых материалах термоэдс может значительно превышать величину, даваемую формулой (6.1), вследствие эффекта увлечения носителей фононами. Для «фононной» составляющей термоэдс в этом случае имеет место выражение

$$\alpha_\phi = a \frac{v_s l_\phi}{\mu T}, \quad (6.7)$$

где  $v_s$  – скорость звука,  $l_\phi$  – длина свободного пробега фононов,  $\mu$  – подвижность носителей заряда,  $a$  – множитель, определяющий относительный вклад рассеяния на акустических колебаниях в полную вероятность рассеяния носителей. Если все рассеяние носителей происходит на акустических колебаниях решетки, то множитель  $a$  порядка единицы.

В магнитном поле термоэдс по-прежнему дается выражением (6.1), в котором

$$Q^* = \frac{\sigma_1 q_1 + \sigma_2 q_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (6.2б)$$

где

$$\sigma_1 = \left\langle \frac{e\tau}{m^*} \frac{1}{1 + \omega^2} \right\rangle, \quad \sigma_2 = \left\langle \frac{e\tau}{m^*} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \right\rangle, \quad (6.3\text{в})$$

$$q_1 = \left\langle \frac{e\tau}{m^*} E \frac{1}{1 + \omega^2} \right\rangle, \quad q_2 = \left\langle \frac{e\tau}{m^*} E \frac{\omega}{1 + \omega^2} \right\rangle, \quad (6.3\text{г})$$

$$\omega = \frac{eH}{m^* c} \tau.$$

Здесь мы рассматриваем область не слишком сильных магнитных полей, когда можно пренебречь квантованием энергии электронов в магнитном поле. Условие применимости формул (6.2б), (6.3в) и (6.3г) имеет вид

$$\frac{eH}{m^* c} \leq kT$$

### Примеры решения задач

*Задача 1.* Получить выражение для термоэдс в отсутствие магнитного поля для носителей с квадратичным законом дисперсии. Оценить термоэдс типичного металла ( $m_{мет} = m_0$ ,  $n_{мет} = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ) при комнатной температуре и сравнить ее с термоэдс вырожденного полупроводника n-типа ( $m_{nn} = 0,2m_0$ ,  $n_{nn} = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ). Считать, что рассеяние в обоих случаях происходит на заряженной примеси.

Решение.

Из формул (6.2а), (6.3а) и (6.3б) получаем

$$Q^* = \frac{\int_0^{\infty} dE \cdot \frac{df}{dE} \cdot E^{r+2}}{\int_0^{\infty} dE \cdot \frac{df}{dE} \cdot E^{r+1}} = kT(r+2) \cdot \frac{F_{r+1}(\eta)}{F_r(\eta)}. \quad (1)$$

Отсюда

$$\alpha = -\frac{k}{e} \left[ (r+2) \frac{F_{r+1}(\eta)}{F_r(\eta)} - \eta \right].$$

В вырожденном случае выражение для  $\alpha$  переходит в следующее

$$\alpha = \frac{\pi^2 k}{3e\eta} (r + 1).$$

Для типичного металла, используя значение

$$\frac{k}{e} = 86,3 \text{ мкВ/К},$$

получаем

$$\alpha_{мет} = -8,2 \text{ мкВ/К}.$$

Отношение термоэдс металла к термоэдс вырожденного полупроводника равно

$$\frac{\alpha_{мет}}{\alpha_{nn}} = \frac{m_{мет}}{m_{nn}} \left( \frac{n_{nn}}{n_{мет}} \right)^{2/3} = 5 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, вследствие большой концентрации свободных электронов в металлах термоэдс металлов значительно меньше термоэдс полупроводников.

*Задача 2.* Качественно представить на графике температурную зависимость термоэдс германия р-типа в примесной и собственной областях.

Решение.

Когда температура не слишком велика, так что концентрация дырок много больше концентрации электронов, основной вклад в термоэдс дают дырки (см. формулу (6.6)). В примесной области концентрация дырок  $p_0$  остается почти постоянной, а термоэдс положительна и равна

$$\alpha = \frac{k}{e} \left( \ln \frac{N_v(T_0)}{p_0} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_0} + \frac{Q_p^*}{kT} \right).$$

В этой области термоэдс медленно растет с температурой. В собственной области в термоэдс дают вклад оба типа носителей

$$\alpha = \frac{k}{e} \left( \frac{b-1}{b+1} \frac{E_g}{2kT} + \frac{3}{4} \ln \frac{m_n}{m_p} - \frac{b}{b+1} \frac{Q_n^*}{kT} - \frac{1}{b+1} \frac{Q_p^*}{kT} \right).$$

Здесь  $b$  – отношение подвижностей электронов и дырок, а  $Q_n^*$  и  $Q_p^*$  – энергии переноса для электронов и дырок соответственно. Вплоть до весьма высоких

температур основную роль в круглой скобке играет первый член, и поскольку в германии  $b > 1$ , то термоэдс отрицательна и убывает по абсолютной величине при возрастании температуры. Где-то в области промежуточных температур при переходе от примесной проводимости к собственной термоэдс меняет знак. Примерный ход термоэдс представлен на рис. 8.

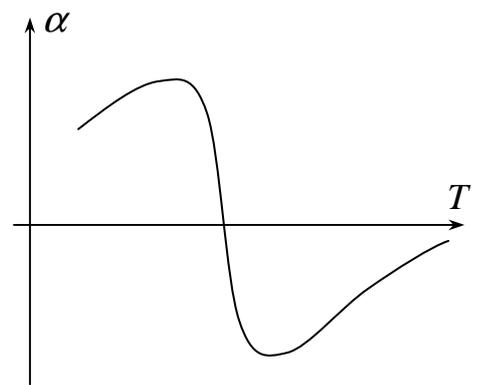


Рис. 8.

*Задача 3.* Оценить величину «фононной» составляющей термоэдс германия n-типа при температуре 20 К. В исследуемом образце подвижность электронов в основном определяется рассеянием на акустических колебаниях и равна  $4 \cdot 10^5$  см<sup>2</sup>/В·с, а рассеяние фононов происходит на стенках образца. Поперечные размеры образца порядка 1 мм, а скорость звука  $5 \cdot 10^5$  см/с.

Решение.

Поскольку подвижность электронов определяется рассеянием на акустических колебаниях,  $a \approx 1$  и, полагая  $l_\phi \sim 0,1$  см, из (6.7) получаем

$$\alpha_\phi \approx \frac{v_s l_\phi}{\mu T} \approx 10 \text{ мВ/К.}$$

*Задача 4.* Измерения термоэдс в полупроводнике p-типа в сильном магнитном поле ( $\omega \gg 1$ ) при комнатной температуре показали, что в исследуемой области полей термоэдс не зависит от магнитного поля и равна 475 мкВ/К. На основе этих измерений найти эффективную массу дырок, если концентрация их равна  $5,6 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>. Закон дисперсии дырок считать квадратичным.

Решение.

Для носителей с квадратичным законом дисперсии из формул (6.2б), (6.3в), (6.3г) получаем в случае сильных магнитных полей, когда  $\sigma_2 \gg \sigma_1$ ,  $q_2 \gg q_1$ ,

$$Q^* = \frac{q_2}{\sigma_2} = \frac{\int_0^\infty dE \cdot \left(-\frac{df}{dE}\right) \cdot E \cdot k^3(E)}{\int_0^\infty dE \cdot \left(-\frac{df}{dE}\right) \cdot k^3(E)} = \frac{5}{2} kT \cdot \frac{F_{5/2}(\eta)}{F_{3/2}(\eta)}.$$

Отсюда следует, что термоэдс

$$\alpha(\infty) = \frac{k}{e} \cdot \left[ \frac{5 F_{5/2}(\eta)}{2 F_{3/2}(\eta)} + \eta \right]$$

в области полей  $\omega \gg 1$  не зависит от магнитного поля, а также от механизма рассеяния. Последнее обстоятельство делает измерения термоэдс в сильных полях удобным способом определения эффективных масс носителей заряда. Для невырожденного газа

$$\alpha(\infty) = \frac{k}{e} \cdot \left( \frac{5}{2} + \eta \right).$$

Из этой формулы находим  $\eta = 3$ ; таким образом, предположение о том, что дырочный газ невырожден, хорошо оправдано. Зная концентрацию дырок, нетрудно найти эффективное число дырок  $N_v = p \cdot e^\eta = 1,18 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , откуда  $m_p = 0,6m_0$ .

### Литература

[1], глава 6; [2], глава 7, §4; [3], §6; [4], глава 9; [6], глава 6, §3.

## 7. ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

При освещении полупроводникового образца возможен переход носителей в зону проводимости. При этом даже в отсутствие внешнего электрического поля возможно существование тока, за счет появления фотоэдс. Этот эффект возникает на границе полупроводников с различным типом проводимости. Помимо дембер-эффекта, обусловленного неоднородным распределением избыточных носителей, фотоэдс может еще возникнуть вследствие неоднородности материала полупроводника. Для простоты будем рассматривать только одномерную задачу, когда как равновесные концентрации  $n_0$  и  $p_0$ , так и неравновесные  $n = n_0 + \Delta n$  и  $p = p_0 + \Delta p$  зависят только от координаты  $x$ . В этом случае фотоэдс выражается следующим образом:

$$E = \int dx \frac{D_p \frac{dp}{dx} - D_n \frac{dn}{dx}}{\mu_n n + \mu_p p}, \quad (7.1)$$

где интегрирование ведется вдоль всей цепи, включающей образец. Если справедливы соотношения Эйнштейна (3.7), то

$$E = \frac{kT}{e} \int dx \frac{\frac{dp}{dx} - b \frac{dn}{dx}}{bn + p}, \quad b = \frac{\mu_n}{\mu_p}. \quad (7.2)$$

Можно явно выделить из  $E$  слагаемое  $E_1$  (вентильную фотоэдс), связанное с неоднородностью образца (исходим из формулы (7.2)):

$$E = E_1 + E_2, \quad (7.3)$$

$$E_1 = \frac{kT}{e} \int dx \frac{1+b}{bn+p} \Delta n \frac{d \ln n_0}{dx},$$

$$E_2 = \frac{kT}{e} \int dx \frac{1-b}{bn+p} \frac{d \Delta n}{dx}. \quad (7.4)$$

### Примеры решения задач

*Задача 1.* Найти фотоэдс в полупроводнике с униполярной проводимостью при произвольной степени вырождения.

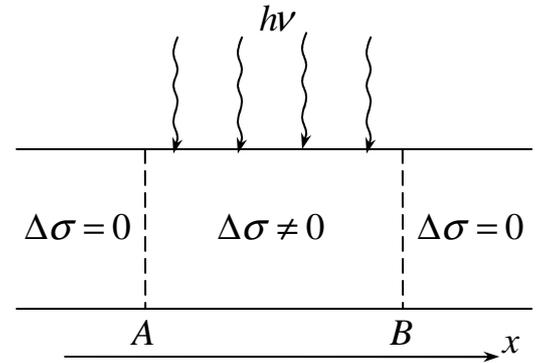
Решение.

Рассмотрим полупроводник, например, р-типа. Тогда в формуле (7.1) следует положить  $n = 0$ :

$$E = \oint \frac{D_p}{\mu_p} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} dx = \oint \frac{D_p}{p\mu_p} dp.$$

Подынтегральное выражение есть однозначная функция  $p$  (сравните с (3.6)), и интеграл по всему контуру тождественно равен нулю, что свидетельствует о существенно биполярном характере фотоэдс.

*Задача 2.* Вычислить фотоэдс в образце n-Ge при  $T = 300$  К, если его средняя часть (рис. 9) освещена так, что в ней  $\Delta\sigma = 0,2 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ , а вне ее  $\Delta\sigma = 0$ . В отсутствие освещения удельное сопротивление в сечении В  $\rho_{0,B} = 5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ .



Решение.

Рис. 9.

Вычислим сначала вентиляющую фотоэдс  $E_1$  по формуле (7.3), опустив в ней  $p_0$ :

$$E_1 = \frac{kT}{e} \int_A^B \frac{b+1}{bn_0 + (b+1)\Delta n} \frac{\Delta n}{n_0} \frac{dn_0}{dx} dx = \frac{kT}{e} \Delta n \frac{b+1}{b} \int_A^B \frac{n_0^{-1} dn_0}{n_0 + \frac{b+1}{b} \Delta n} =$$

$$= \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \frac{b+1}{b} \frac{\Delta n}{n_{0,A}}}{1 + \frac{b+1}{b} \frac{\Delta n}{n_{0,B}}} = \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{0,A}}}{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{0,B}}}.$$

Второе слагаемое  $E_2$  вычислим, разбивая интеграл в (7.4) на два, по двум участкам малой ширины  $2\varepsilon$  вблизи  $A$  и  $B$ , где  $\frac{d\Delta n}{dx} \neq 0$ :

$$E_2 = -\frac{kT}{e} \frac{b-1}{b+1} \left[ \int_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + \frac{bn_0}{b+1}} + \int_{B-\varepsilon}^{B+\varepsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + \frac{bn_0}{b+1}} \right] =$$

$$= -\frac{kT}{e} \frac{b-1}{b+1} \left[ \ln \frac{\Delta n + \frac{bn_{0,A}}{b+1}}{\frac{bn_{0,A}}{b+1}} + \ln \frac{\Delta n + \frac{bn_{0,B}}{b+1}}{\frac{bn_{0,B}}{b+1}} \right] = -\frac{kT}{e} \frac{b-1}{b+1} \ln \frac{1 + \frac{b+1}{b} \frac{\Delta n}{n_{0,A}}}{1 + \frac{b+1}{b} \frac{\Delta n}{n_{0,B}}}.$$

Складывая  $E_1$  и  $E_2$ , находим

$$E = \frac{2}{b+1} \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma\rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma\rho_{0,B}} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$$

**Задача 3.** Вычислить для случая однородного возбуждения вентильную фотоэдс, возникающую в р-п-переходе в Ge при 75 К. Освещается (рис. 10) участок n-области, прилегающий к р-п-переходу; в нем  $\Delta n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , вне его  $\Delta n = 0$ . В глубине n-области  $n = n_n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , в р-области  $p_p = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ;  $\mu_n = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ;  $b = 0,5$ .

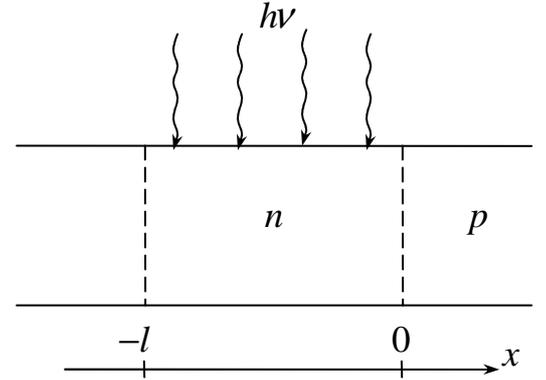


Рис. 10.

**Решение.**

По формуле (7.3) находим

$$E_1 = \frac{kT}{e} \frac{b+1}{b} \Delta n \int_{-l}^0 dx \frac{1}{n_0 \left( n_0 + \Delta n \frac{b+1}{b} \right)} \frac{dn_0}{dx} =$$

$$= \frac{kT}{e} \frac{b+1}{b} \Delta n \int_{n_n}^{n_p} \frac{dn_0}{n_0 \left( n_0 + \Delta n \frac{b+1}{b} \right)} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_p \left( n_n + \Delta n \frac{b+1}{b} \right)}{n_n \left( n_p + \Delta n \frac{b+1}{b} \right)}.$$

В рассматриваемых условиях (см. таблицу, приложение 2) на основании формулы (1) задачи 2 первого раздела имеем

$$n_i = 10^{-7} \text{ см}^{-3},$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{n_n} = 10^{-29} \text{ см}^{-3},$$

$$\frac{kT}{e} = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

В результате получим

$$E_1 \approx -0,11 \text{ В.}$$

*Задача 4.* Вычислить фотоэдс в условиях задачи 2, но при наличии прилипания, считая  $\tau_p/\tau_n = 10$ .

Решение.

Подобно тому как получают формулы (7.3) и (7.4) из (7.2), в нашем случае, при  $\Delta p = \Delta n \tau_p/\tau_n$ , находим

$$E_1 = \frac{kT}{e} \int dx \frac{b + \tau_p/\tau_n}{bn_0 + (b + \tau_p/\tau_n)\Delta n} \frac{\Delta n}{n_0} \frac{dn_0}{dx},$$

$$E_2 = \frac{kT}{e} \int dx \frac{\tau_p/\tau_n - b}{bn_0 + (b + \tau_p/\tau_n)\Delta n} \frac{d\Delta n}{dx}.$$

Далее, аналогично задаче 2 получаем

$$E_1 = \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma\rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma\rho_{0,B}},$$

$$E_2 = \frac{\tau_p/\tau_n - b}{\tau_p/\tau_n + b} \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma\rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma\rho_{0,B}}.$$

Окончательно

$$E = E_1 + E_2 = \frac{2\tau_p/\tau_n}{b + \tau_p/\tau_n} \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma\rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma\rho_{0,B}} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$$

### Литература

[1], глава 8, §15-17; [2], глава 6, § 5; [3], §7; [4], глава 10; [5], §25; [6] глава 8, §5,7,8.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Германиевый кристалл, ширина  $\Delta E$  запрещенной зоны в котором равна 0,72 эВ, нагревают от температуры  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  до температуры  $t_2 = 15^\circ\text{C}$ . Во сколько раз возрастет его удельная проводимость?

2. При нагревании кремниевого кристалла от температуры  $t_1 = 0^\circ$  до температуры  $t_2 = 10^\circ\text{C}$  его удельная проводимость возрастает в 2,28 раза. По приведенным Данным определить ширину  $\Delta E$  запрещенной зоны кристалла кремния.

3. p-n-переход находится под обратным напряжением  $U = 0,1$  В. Его сопротивление  $R_1 = 692$  Ом. Каково сопротивление  $R_2$  перехода при прямом напряжении?

4. Металлы литий и цинк приводят в соприкосновение друг с другом при температуре  $T = 0$  К. На сколько изменится концентрация электронов проводимости в цинке? Какой из этих металлов будет иметь более высокий потенциал?

5. Сопротивление  $R_1$  p-n-перехода, находящегося под прямым напряжением  $U = 1$  В, равно 10 Ом. Определить сопротивление  $R_2$  перехода при обратном напряжении.

6. Найти минимальную энергию  $W_{min}$  необходимую для образования пары электрон—дырка в кристалле СаAs, если его удельная проводимость  $\gamma$  изменяется в 10 раз при изменении температуры от 20 до  $3^\circ\text{C}$ .

7. Сопротивление  $I$  кристалла PbS при температуре  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  равно  $10^4$  Ом. Определить его сопротивление  $R_2$  при температуре  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ .

8. Каково значение энергии Ферми  $E_F$  у электронов проводимости двухвалентной меди? Выразить энергию Ферми в джоулях и электрон-вольтах.

9. Прямое напряжение  $U$ , приложенное к p-n-переходу, равно 2 В. Во сколько раз возрастет сила тока через переход, если изменить температуру от  $T_1 = 300$  К до  $T_2 = 273$  К?

## ЛИТЕРАТУРА

- 1.Смит Р.. Полупроводники. М.: Изд-во иностранной литературы. 1962. 468 с..
- 2.Иванов Г.А., Лужковский В.Г.. Полупроводники. Л.: ЛГПИ им. А.И.Герцена. 1975. 225 с..
- 3.Бонч-Бруевич В.Л., Звягин И.П., Карпенко И.В., Миронов А.Г.. Сборник задач по физике полупроводников. М.: изд-во «Наука». 1968. 112 с..
- 4.Петровский В.И. Электронная теория полупроводников. Минск: изд-во БГУ им. В.И. Ленина.1973. 264 с..
- 5.Митрофанов В.В., Фогель В.А.. Физика и химия полупроводников. Л.: изд-во «Судостроение». 1965. 219с..
6. Данлэп У. Введение в физику полупроводников. М.: Изд-во иностранной литературы. 1959. 424 с..
7. Физика. Методические указания и контрольные задания. Под ред. А.Г.Чертова. М.: Высшая школа. 1987. 208 с..

### Некоторые свойства интегралов Ферми

Интеграл Ферми  $F_j(\eta)$  определяется соотношением

$$F_j(\eta) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^j d\varepsilon}{1 + e^{\varepsilon-\eta}}, \quad (\text{П.1})$$

где  $\Gamma(j+1)$  – гамма-функция. В классическом пределе, когда величина  $\eta$  отрицательна и достаточно велика по абсолютной величине,

$$F_j(\eta) \approx e^\eta. \quad (\text{П.2})$$

Для больших положительных  $\eta$  (в статистике этому соответствует случай почти полного вырождения) имеет место асимптотический ряд

$$F_j(\eta) = \frac{\eta^{j+1}}{\Gamma(j+2)} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6\eta^2} \frac{\Gamma(j+2)}{\Gamma(j)} + \dots \right). \quad (\text{П.3})$$

Для интеграла Ферми  $F_{1/2}(\eta)$  часто бывает полезна следующая приближенная формула:

$$F_{1/2}(\eta) \approx \frac{e^\eta}{1 + 0,27e^\eta}, \quad (\text{П.4})$$

дающая при  $\eta \leq 1,3$  ошибку, не превосходящую 3 %. При  $\eta \geq 1$  приближенная формула

$$F_{1/2}(\eta) = \frac{4\eta^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{1,15}{\eta^2} \right) \quad (\text{П.5})$$

также дает ошибку не более 3 %. Таким образом, приближенные формулы (П.4) и (П.5) перекрывают весь интервал значений от случая сильного вырождения до невырожденного классического случая.

Для оценки интегралов, содержащих функцию Ферми или ее производные, в случае сильного вырождения часто используется разложение

$$F_j(\eta) = \int_{-\infty}^\infty d\varepsilon \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{1}{1 + e^{\varepsilon-\eta}} = -G(\infty) + G(\eta) + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2} + \dots \quad (\text{П.6})$$

Здесь  $G(\varepsilon)$  – произвольная функция энергии, плавная вблизи точки  $\varepsilon = \eta$ .

**Некоторые параметры полупроводниковых материалов**

	$E_g$ , эВ	$m_{dn}/m_0$	$m_{dp}/m_0$	$\mu_n$ , см <sup>2</sup> /В·с	$\mu_p$ , см <sup>2</sup> /В·с
Ge	0,74	0,56	0,37	3800	1800
Si	1,16	1,08	0,59	1450	500
InSb	0,22	0,013	0,4	78000	750
InAs	0,43	0,023	0,41	33000	460
InP	1,40	0,067	—	4600	150
GaSb	0,80	0,047	0,23	4000	1400
GaAs	1,52	0,068	0,5	8800	400

*Примечание 1.* В таблице приведены значения ширины запрещенной зоны при 77 К, полученные из оптических измерений.

*Примечание 2.* В таблице приведены значения подвижностей электронов и дырок при комнатной температуре (300 К).

Сведения об авторах

**Елена Александровна Ванина**

И.о. зав. Кафедрой теоретической и экспериментальной физики АмГУ, канд.  
Физ.-мат. наук, доцент;

**Валентин Сергеевич Темников**

Ассистент кафедры теоретической и экспериментальной физики АмГУ;

**Ирина Борисовна Копылова,**

Доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики АмГУ, канд.  
физ.-мат. наук.