Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой АТППиЭ
__________А.Н.Рыбалев
«____»__________2007 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
«Моделирование систем»

для специальности

22.03.01 – Автоматизация технологических процессов и производств

Составитель: А.А. Степанова

Благовещенск

2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
энергетического факультета
Амурского государственного университета

А.А. Степанова

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Моделирование систем» для студентов очной формы обучения специальности 22.03.01 – Автоматизация технологических процессов и производств – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007.

Учебно-методический комплекс ориентирован на оказание помощи студентам очной формы обучения по специальности 22.03.01 – Автоматизация технологических процессов и производств для формирования специальных знаний в области моделирования производственных, технических, экономических и информационных систем.

Аннотация

Настоящий УМКД предназначен в помощь студентам очной формы обучения по специальности 22.03.01 – Автоматизация технологических процессов и производств при изучении дисциплины «Моделирование систем».

При его написании учитывались рекомендации из положения «Об учебно-методическом комплексе дисциплины». УМКД разрабатывался на основе утвержденных в установленном порядке Государственного образовательного стандарта, типовых учебных планов и рабочей программы дисциплины, а также нормативных документов Министерства образования и науки Российской Федерации по вопросам организации учебно-воспитательного процесса.

Содержание

1. Программа дисциплины, соответствующая требованиям государственного образовательного стандарта.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель Департамента
образовательных программ и стандартов
профессионального образования
_______________ Л.С.Гребнев
«____»______________ 2001 г.

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Рекомендуется Минобразованием России
для направлений подготовки дипломированных специалистов
651900 АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ
и бакалавров и магистров 550200 - АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины

Целью преподавания дисциплины является обучение студентов основным принципам, способам и методам математического моделирования, необходимых при создании систем и средств автоматизации и управления.

Задача изучения дисциплины состоит в освоении базовых принципов и методов построения и исследования математических моделей систем и средств автоматизации и управления.

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения дисциплины выпускник должен

знать: принципы и методы построения (формализации) и исследования математических моделей систем, их формы представления и преобразования;

уметь использовать методы математического моделирования при разработке систем и средств автоматизации и управления;

иметь представление об основных программных средствах, используемых при моделировании.

3. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
Общая трудоемкость дисциплины	170	8			
Аудиторные занятия	102	8			
Лекции	68	8			
Лабораторные работы (ЛР)	24	8			
Самостоятельная работа	68	8			
Курсовой проект (работа)	10	8			
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	Экзамен, зачет	8			

4. Содержание дисциплины

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Раздел дисциплины	Лекции	ПЗ (или С)	ЛР
1.	Введение	*		
2.	Основные этапы и принципы построения математических моделей систем	*		*
3.	Анализ математических моделей систем	*		*
4.	Статистическое моделирование систем	*		*
5.	Обработка и анализ результатов моделирования	*		*
6.	Программные средства моделирования систем	*		*
7.	Заключение	*		

1. Введение

Моделирование как метод научного познания. Физический эксперимент — вычислительный эксперимент. Методологическая основа моделирования. Классификация моделей и виды моделирования. Использование моделирования при исследовании и проектировании систем управления. Предмет дисциплины и связь ее с другими дисциплинами.

2. Основные этапы и принципы построения математических моделей систем

Элементы теории подобия. Изоморфизм математических моделей. Теоремы подобия. Этапы моделирования систем управления. Построение концептуальных моделей систем и их формализация. Требования к моделям: адекватность, полнота и гибкость модели, структура и длительность разработки модели, грубость. Непрерывные и дискретные детерминированные модели, непрерывные и дискретные стохастические модели. Агрегативные модели. Модели сложных систем. Иерархия моделей. Декомпозиция и редукция моделей. Хаотические модели. Модели распределенных систем. Модели сетей.

3. Анализ математических моделей систем

Задачи анализа. Структурный и параметрический методы анализа моделей. Анализ математической модели в статическом режиме. Итерационные методы. Анализ математической модели в динамическом режиме. Методы численного моделирования, устойчивость методов. Жесткие модели.

4. Статистическое моделирование систем

Сущность метода статистического имитационного моделирования. Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации. Моделирование случайных воздействий на систему управления.

5. Обработка и анализ результатов моделирования

Планирование вычислительного эксперимента. Задачи и методы обработки и представления результатов моделирования. Статистический анализ результатов моделирования.

6. Программные средства моделирования систем

Моделирование систем и языки моделирования. Особенности использования алгоритмических языков общего назначения и языков имитационного моделирования. Пакеты прикладных программ моделирования динамических систем и их особенности. Инструментальная вычислительные среды и моделирующие интерактивные средства. Программные средства моделирования узлов и связей в управляющих, информационных и вычислительных сетях.

7. Заключение

Перспективы использования компьютерного моделирования для интерактивного анализа и автоматизированного проектирования систем управления.

5. Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ
1	2	Исследование поведения подобных моделей систем
2	3	Исследование структурных свойств линейных и нелинейных моделей систем методами структурного анализа
3	3	Исследование равновесных режимов нелинейных моделей систем в зависимости от начальных состояний и уровней внешних воздействий
4	3	Исследование влияния методов численного моделирования на динамику нелинейных моделей систем
5	3	Исследование чувствительности поведения моделей систем к нестабильным факторам
6	3	Исследование влияния периода квантования на динамику дискретной модели системы
7	3	Исследование поведения жестких моделей систем
8	3	Исследование моделей сложных систем методами декомпозиции и редукции
9	3	Исследование поведения хаотических моделей систем
10.	2	Моделирование конечного автомата
11.	4,5	Генерирование потоков случайных событий
12	6	Имитационное моделирование системы массового обслуживания
13.	6	Моделирование фрагмента информационно вычислительной сети

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

6.1. Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1. Веников В.А., Веников Т.В. Теория подобия и моделирования. М.: Высш. шк., 1986.
2. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. Вып. 1, 1994; Вып. 2, 1996.
3. Егоренков Д.Л., Фрадков А.Л., Харламов В.Ю. Основы математического моделирования с примерами на языке MATLAB: Учебн. Пособие / Под ред. А.Л. Фрадкова. СПб.: Изд-во БГТУ, 1996.

б) дополнительная:

1. Советов Б.Я.,Яковлев С.А. Моделирование систем: Учеб. для вузов. М.: Высш.шк. , 1998.
2. Советов Б.Я.,Яковлев С.А. Моделирование систем. Практикум: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш.шк. , 1999.

3. Мирошников А.Н., Румянцев С.Н. Моделирование систем управления технических средств транспорта: Учебн. пособие. СПб: Элмор, 1999.
4. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учебн. пособие. М: Финансы и статистика, 1999.
5. Вабищевич П.Н. Численное моделирование: Учебн. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993.
6. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997.
7. Гультяев А.К. MATLAB 5.2 Имитационное моделирование в среде Windows: Практическое пособие. СПб.: КОРОНА, 1999.
8. Медведев В.С., Потёмкин В.Г.Control System Toolbox.MATLAB5 для студентов. М.: ДИАЛОГ-МИФИ,1999.
9. “Математическое моделирование” // РАН. М.

6.2. Средства обеспечения освоения дисциплины.

Расчетные компьютерные программы:

MATLAB; SIMULINK; MATHCAD; MAPLE; MATHEMATICA;

CLASSiC (разработка Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета “ЛЭТИ”).

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины.

Компьютерный класс.

Программа составлена в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по направлению подготовки дипломироваенного специалиста 651900 - АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ и бакалавра 550200 - АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

Программу составили:

Душин С.Е., д.т.н., доцент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета

Кузьмин Н.Н., к.т.н., доцент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета

Ломакин М.С., д.т.н., профессор Московского государственного горного университета

Программа одобрена на совместном заседании учебно-методических советов по направлению 550200 и специальностям 2101, 2106, 2108 15.11.2000 г. , протокол № 2.

Председатель совета УМО по образованию в области автоматики, электроники, микроэлектроники и радиотехники

____

Д.В.Пузанков

2. Рабочая программа дисциплины.

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Амурский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-научной работе
Е.С. ~~Астапова~~____________________
личная подпись, И.О.Ф

«__»________________200_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине «Моделирование систем»

для специальности 22.03.01 «Автоматизация технологических процессов и производств»

_Курс 4___ Семестр 7, 8

Лекции 46________________(час.) Экзамен 8

Практические занятия 16 (час.) Зачет 7

Лабораторные занятия 15______________(час.) Курсовая работа 8

Самостоятельная работа 68____________(час.)

Всего часов 145

Составитель А.А.Степанова, старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники
(И.О.Ф., должность, ученое звание)

Факультет Энергетический

Кафедра автоматизации производственных процессов и электротехники

2007 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для специальности 22.03.01 – Автоматизация технологических процессов и производств

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры энергетики

«_____»________________200_ г. (протокол №______)

Зав.кафедрой_________________________(А.Н. Рыбалев)

Рабочая программа одобрена на заседании учебно-методического совета направления (специальности)__________________________________

«_______»________________200_ г. (протокол №________)

Председатель УМС____________________________(____________________)

СОГЛАСОВАНО

Начальник УМУ

____

«___»_______________200_г.

СОГЛАСОВАНО

Начальник УМС факультета

____

«___»_______________200_г.

СОГЛАСОВАНО

Заведующий выпускающей кафедры

____

«___»_______________200_г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания дисциплины. Целью изучения дисциплины является приобретение студентами знаний о принципах и методах построения математических моделей объектов и систем управления, их исследовании на основе алгоритмизации решения моделей с применением современных ЭВМ.

1.2 Задачи изучения дисциплины . Задача изучения дисциплины состоит в освоении базовых принципов и методов решения с помощью ЭВМ задач математического моделирования производственных процессов и систем управления.

1.3 Дисциплины, освоение которых необходимо при изучении данной дисциплины:

«Высшая математика»

«Физика»

«Программирование и основы алгоритмизации»

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Стандарт: ОПД.Ф.09 Моделирование систем:

Классификация моделей и виды моделирования; примеры моделей систем; основные положения теории подобия; этапы математического моделирования; принципы построения и основные требования к математическим моделям систем; цели и задачи исследования математических моделей систем; общая схема разработки математических моделей; формализация процесса функционирования системы; понятие агрегативной модели; формы представления математических моделей; методы исследования математических моделей систем и процессов, Имитационное моделирование; методы упрощения математических моделей; технические и программные средства моделирования.

2.2 Наименование тем, их содержание и объем в часах

Тема 1.

Основные понятия теории моделирования систем (4 часа)

Методологическая основа моделирования. Принципы системного подхода в моделировании систем. Общая характеристика проблемы моделирования систем. Классификация видов моделирования систем.

Тема 2.

Элементы теории подобия (2 часа)

Понятие подобия. Виды подобия. Теория подобия. Основные положения теории подобия.

Тема 3.

Математические схемы моделирования систем (2 часа)

Основные подходы к построению математических моделей систем. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы). Дискретно-детерминированные модели (F-схемы). Дискретно-стохастические модели (Р-схемы). Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы). Сетевые модели (N-схемы). Комбинированные модели (А-схемы).

Тема 4.

Теория массового обслуживания (4 часа)

Основные компоненты моделей массового обслуживания. СМО при наличии входного и выходного потоков; СМО с приоритетами. Анализ очередей. Принятие решений с использованием моделей массового обслуживания.

Тема 6.

Принципы построения имитационных моделей (4 часа)

Общая характеристика имитационного моделирования. Элементы имитационных моделей. Базовый алгоритм моделирования. Варианты моделей обслуживания заявок. Методы генерации случайных чисел. Эксперименты над моделями.

Тема 5.

Статистическое моделирование систем (2 часа)

Общая характеристика метода статистического моделирования. Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации.

Проверка и улучшение качества последовательностей псевдослучайных чисел. Моделирование случайных воздействий на системы.

Тема 7.

Инструментальные средства моделирования систем (2 часа)

Основы систематизации языков имитационного моделирования. Сравнительный анализ языков имитационного моделирования. Пакеты прикладных программ моделирования систем. Базы данных моделирования. Гибридные моделирующие комплексы.

Тема 8.

Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем (2 часа)

Методика разработки и машинной реализации моделей систем. Построение концептуальных моделей систем и их формализация. Алгоритмизация моделей систем и их машинная реализация. Получение и интерпретация результатов моделирования систем.

Тема 9.

Планирование машинных экспериментов с моделями систем (2 часа)

Методы теории планирования эксперимента. Стратегическое планирование машинных экспериментов с моделями систем. Тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем.

Тема 10.

Постановка модельных исследований в задачах научно-технического эксперимента (2 часа)

Построение и взаимодействие моделей. Теория и эксперимент в познании. Подобие и моделирование в научно-технических исследованиях. Классификация видов подобия и моделирования.

Тема 11.

Достоверность моделирования (2 часа)

Условия получения подобия моделей. Точность воспроизведения критериев подобия. Погрешности воспроизведения отдельных параметров, входящих в критерии подобия. Применение подобия и моделирования в некоторых особых случаях.

Тема 12.

Обработка и анализ результатов моделирования систем (2 часа)

Особенности фиксации и статистической обработки результатов моделирования систем. Анализ и интерпретация результатов машинного моделирования. Обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем.

Тема 13.

Моделирование систем с использованием типовых математических схем (4 часа)

Иерархические модели процессов функционирования систем. Моделирование процессов функционирования систем на базе Q-схем. Моделирование процессов функционирования систем на базе N-схем. Моделирование процессов функционирования систем на базе A-схем.

Тема 14.

Моделирование для принятия решений при управлении (2 часа)

Гносеологические и информационные модели при управлении. Модели в адаптивных системах управления. Моделирование в системах управления в реальном масштабе времени.

Тема 15.

Использование метода моделирования при разработке автоматизированных систем (2 часа)

Общие правила построения и способы реализации моделей систем. Моделирование при разработке распределенных автоматизированных систем и информационных сетей. Моделирование при разработке организационных и производственных систем.

Тема 16.

Алгоритмы решения линейных оптимизационных задач (4 часа)

Теоретические основы линейного программирования. Алгебраический метод. Метод декомпозиции. Двойственность и анализ моделей на чувствительность. Транспортная модель. Сетевые модели.

2.3 Практические занятия (16 часов)

№ темы	Название темы	Кол-во часов
1	Линейная оптимизационная модель.	4
2	Сетевые модели. Календарное планирование	2
3	Модели распределения ресурсов	2
4	Модели массового обслуживания	4
5	Имитационные модели	2
6.	Модели информационных систем	2

Цель практических занятий – научить студентов составлять математические модели систем, определять их характеристики; выполнять обработку результатов и расчет эффективности.

2.4 Лабораторные занятия (16 часов)

№ темы	Название темы	Кол-во часов
1	Построение линейной оптимизационной модели средствами Excel	4
2	Построение линейной оптимизационной модели в пакете MATLAB	2
3	Построение линейной оптимизационной модели в пакете MATHCAD	2
4	Построение имитационной модели средствами Excel	2
5	Построение имитационной модели в пакете MATHCAD	2
6	Построение имитационной модели в пакете MATLAB	2
5	Построение функциональной модели информационной системы в пакете BPWin	2

2.5 Курсовой проект

Курсовой проект посвящен построению математической модели и проектированию системы для ее расчета и оптимизации. В рамках курсового проекта решаются следующие задачи:

- выбор типа математической модели, соответствующей данной задаче
- составление математической модели
- разработка алгоритма расчета параметров модели с использованием стандартных методик
- реализация алгоритма в выбранной системе проектирования.

2.6 Самостоятельная работа студентов

Тематика и распределение времени на самостоятельную работу студентов представлена в разделе 4.

2.7 Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний

К промежуточным формам контроля знаний относятся:

- блиц-опрос на лекциях по пройденному материалу;
- решение домашних заданий с последующей их проверкой на практических занятиях.

2.8 Вопросы к экзамену

1. Методологическая основа моделирования.
2. Принципы системного подхода в моделировании систем.
3. Общая характеристика проблемы моделирования систем.
4. Классификация видов моделирования систем.
5. Понятие подобия. Виды подобия.
6. Теория подобия. Основные положения теории подобия.
7. Основные подходы к построению математических моделей систем.
8. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы).
9. Дискретно-детерминированные модели (F-схемы).
10. Дискретно-стохастические модели (P-схемы).
11. Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы).
12. Сетевые модели (N-схемы).
13. Комбинированные модели (A-схемы).

14. Построение концептуальных моделей систем и их формализация.

15. Общая характеристика метода статистического моделирования.

16. Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации.

17. Основные компоненты моделей массового обслуживания.

18. СМО при наличии входного и выходного потоков; СМО с приоритетами.

19. Принятие решений с использованием моделей массового обслуживания.

20. Общая характеристика имитационного моделирования. Элементы имитационных моделей.

21. Базовый алгоритм моделирования. Варианты моделей обслуживания заявок.

22. Методы генерации случайных чисел. Эксперименты над моделями.

23. Основы систематизации языков имитационного моделирования. Сравнительный анализ языков имитационного моделирования.

24. Методы теории планирования эксперимента.

25. Стратегическое и тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем.

26. Построение и взаимодействие моделей.

27. Условия получения подобия моделей. Точность воспроизведения критериев подобия.

28. Особенности фиксации и статистической обработки результатов моделирования систем.

29. Анализ и интерпретация результатов машинного моделирования. Обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем.

30. Моделирование процессов функционирования систем на базе Q-схем.

31. Моделирование процессов функционирования систем на базе N-схем.

32. Моделирование процессов функционирования систем на базе A-схем

33. Гносеологические и информационные модели при управлении.

34. Модели в адаптивных системах управления.

35. Моделирование в системах управления в реальном масштабе времени.

36. Общие правила построения и способы реализации моделей систем.

37. Моделирование при разработке распределенных автоматизированных систем и информационных сетей.

38. Моделирование при разработке организационных и производственных систем.

3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1. Основная литература

1. Рыжиков Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. — СПб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2004. — 384 с, ил.

2. Веников В.А., Веников Т.В. Теория подобия и моделирования. М.: Высш. шк., 1986.

3. Советов Б.Я.,Яковлев С.А. Моделирование систем: Учеб. для вузов. М.: Высш.шк. , 1998.

3.2 Дополнительная литература

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Matlab 7. – М.:НТ Пресс, 2006 – 464с.

2. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MathCad 12. – М.:НТ Пресс, 2005 – 345с.

3. Додж М. Стинсон К. Эффективная работа с Microsoft Excel 2000 – СПб: Издательство «Питер», 2000. – 1056 с.

4. Горшков А.Ф., Евтеев Б.В., Коршунов В.А. Компьютерное моделирование менеджмента: Учебное пособие – М.: Издательство «Экзамен», 2004. – 528с.

5. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2-х книгах, Кн.1,2. – М.:Мир,1985.

4. СРЕДСТВА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Расчетные компьютерные программы:

MATLAB; MATHCAD; EXCEL; BPWIN

5. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Компьютерный класс.

4 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Формы контроля
			практич. (семин.)	лаборат.		содержание	час.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7 семестр								
1	1	**Основные понятия теории моделирования систем.** Методологическая основа моделирования. Принципы системного подхода в моделировании систем.	Линейная оптимизационная модель.			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .
3	1	**Основные понятия теории моделирования систем.** Общая характеристика проблемы моделирования систем. Классификация видов моделирования систем.	Линейная оптимизационная модель.			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .
5	2	**Элементы теории подобия** Понятие подобия. Виды подобия. Теория подобия. Основные положения теории подобия.	Сетевые модели. Календарное планирование			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .
7	3	**Математические схемы моделирования систем** Основные подходы к построению математических моделей систем. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы). Дискретно-детерминированные модели (F-схемы).	Модели распределения ресурсов			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .
9	4	**Теория массового обслуживания** Основные компоненты моделей массового обслуживания. СМО	Модели массового обслуживания			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		при наличии входного и выходного потоков; СМО с приоритетами.						
11	4	**Теория массового обслуживания** Анализ очередей. Принятие решений с использованием моделей массового обслуживания.	Модели массового обслуживания			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .
13	5	**Принципы построения имитационных моделей .** Общая характеристика имитационного моделирования. Элементы имитационных моделей. Базовый алгоритм моделирования.	Имитационные модели			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .
15	5	**Принципы построения имитационных моделей** Варианты моделей обслуживания заявок. Методы генерации случайных чисел. Эксперименты над моделями.	Модели информационных систем			Подготовка к контрольной работе	2	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача практических заданий .
8 семестр								
1	6	**Статистическое моделирование систем** Общая характеристика метода статистического моделирования. Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации. Моделирование случайных воздействий на системы.		Построение линейной оптимизационной модели средствами Excel		Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
2	7	**Инструментальные средства моделирования систем** Основы систематизации языков имитационного моделирования. Сравнительный анализ языков имитационного моделирования.				Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	7	**Инструментальные средства моделирования систем** Пакеты прикладных программ моделирования систем. Базы данных моделирования. Гибридные моделирующие комплексы.		Построение линейной оптимизационной модели средствами Excel		Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
4	8	**Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем** Методика разработки и машинной реализации моделей систем. Построение концептуальных моделей систем и их формализация. Алгоритмизация моделей систем и их машинная реализация. Получение и интерпретация результатов моделирования систем.				Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
5	9	**Планирование машинных экспериментов с моделями систем** Методы теории планирования эксперимента. Стратегическое планирование машинных экспериментов с моделями систем. Тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем.		Построение линейной оптимизационной модели в пакете MATLAB		Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
6	10	**Постановка модельных исследований в задачах научно-технического эксперимента** Построение и взаимодействие моделей. Теория и эксперимент в познании. Подобие и моделирование в научно-технических исследованиях.				Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		Классификация видов подобия и моделирования.						
7	11	**Достоверность моделирования** Условия получения подобия моделей. Точность воспроизведения критериев подобия. Погрешности воспроизведения отдельных параметров, входящих в критерии подобия. Применение подобия и моделирования в некоторых особых случаях.		Построение линейной оптимизационной модели в пакете MATHCAD		Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
8	12	**Обработка и анализ результатов моделирования систем** Особенности фиксации и статистической обработки результатов моделирования систем. Анализ и интерпретация результатов машинного моделирования. Обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем				Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	3	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
9	13	**Моделирование систем с использованием типовых математических схем** Иерархические модели процессов функционирования систем. Моделирование процессов функционирования систем на базе Q-схем.		Построение имитационной модели средствами Excel		Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	4	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
10	13	**Моделирование систем с использованием типовых математических схем** Моделирование процессов функционирования систем на базе N-схем. Моделирование				Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	4	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		процессов функционирования систем на базе А-схем.						
11	14	**Моделирование для принятия решений при управлении** Гносеологические и информационные модели при управлении. Модели в адаптивных системах управления. Моделирование в системах управления в реальном масштабе времени.		Построение имитационной модели в пакете MATHCAD		Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	4	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
12	15	**Использование метода моделирования при разработке автоматизированных систем** Общие правила построения и способы реализации моделей систем. Моделирование при разработке распределенных автоматизированных систем и информационных сетей.				Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	4	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
13	15	**Использование метода моделирования при разработке автоматизированных систем** Моделирование при разработке организационных и производственных систем.		Построение имитационной модели в пакете MATLAB		Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	4	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
14	16	**Алгоритмы решения линейных оптимизационных задач (4 часа)** Теоретические основы линейного программирования. Алгебраический метод. Метод декомпозиции.				Подготовка к контрольной работе. Выполнение КР.	4	Контрольная точка и тестирование №1,проверка контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.
15	16	**Алгоритмы решения линейных**		Построение функциональной		Подготовка к контрольной работе.	4	Контрольная точка и тестирование №1,проверка

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		оптимизационных задач Двойственность и анализ моделей на чувствительность. Транспортная модель. Сетевые модели.		модели информационной системы в пакете BPWin		Выполнение КР.		контрольной работы, сдача лабораторных заданий . Проверка курсовой работы.

3. График самостоятельной работы студентов по дисциплине на каждый семестр с указанием ее содержания, объема в часах, сроков и форм контроля.

№ темы	*Содержание*	*Объем, час*	*Срок, уч. недели*	*Форма контроля*
1	Решение задач по составлению линейной оптимизационной модели	4	1-3	Проверка контрольной работы
2	Решение задач по календарному планированию	2	5	Проверка контрольной работы
3	Решение задач по составлению модели распределения ресурсов	2	7	Проверка контрольной работы
4	Решение задач по составлению модели массового обслуживания	4	11	Проверка контрольной работы
5	Решение задач по составлению имитационной модели	4	15	Проверка контрольной работы
6	Выполнение курсовой работы	34	15	Защита курсовой работы
7	Выполнение индивидуальных заданий по моделированию на ЭВМ	18	1-15	Проверка на практ. занятиях

4. Методические рекомендации по проведению семинарских и практических занятий.

Практические занятия предусмотрены в рабочей программе в объеме 16 часов. Тематика практических занятий представлена в таблице.

№ темы	Название темы	Кол-во часов
1	Линейная оптимизационная модель.	4
2	Сетевые модели. Календарное планирование	2
3	Модели распределения ресурсов	2
4	Модели массового обслуживания	4
5	Имитационные модели	2
6.	Модели информационных систем	2

Цель практических занятий – научить студентов составлять математические модели систем, определять их характеристики; выполнять обработку результатов и расчет эффективности.

На практических занятиях помимо решения задач у доски рекомендуется проведение контрольной работы по изученной теме.

5. Методические рекомендации по проведению лабораторных занятий.

Лабораторные занятия предусмотрены в рабочей программе в объеме 15 часов. Тематика лабораторных занятий представлена в таблице.

№ темы	Название темы	Кол-во часов
1	Построение линейной оптимизационной модели средствами Excel	4
2	Построение линейной оптимизационной модели в пакете MATLAB	2
3	Построение линейной оптимизационной модели в пакете MATHCAD	2
4	Построение имитационной модели средствами Excel	2

5	Построение имитационной модели в пакете MATHCAD	2
6	Построение имитационной модели в пакете MATLAB	2
5	Построение функциональной модели информационной системы в пакете BPWin	2

Лабораторные занятия проводятся в компьютерном классе с использованием программ Excel, MathCad, Matlab, BPWin. По каждой работе оформляется отчет, работа защищается, сиудент выполняет индивидуальное задание.

Список рекомендуемой литературы

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Matlab 7. – М.:НТ Пресс, 2006 – 464с.
2. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MathCad 12. – М.:НТ Пресс, 2005 – 345с.
3. Додж М. Стинсон К. Эффективная работа с Microsoft Excel 2000 – СПб: Издательство «Питер», 2000. – 1056 с.

6. Конспект лекций

ТЕМА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

(4 часа)

1. **Методологическая основа моделирования**
2. **Принципы системного подхода в моделировании систем**
3. **Общая характеристика проблемы моделирования систем**
4. **Классификация видов моделирования систем**

1. Методологическая основа моделирования

Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется *объектом* (лат. *objection* — предмет). Выработка методологии направлена на упорядочение получения и обработки информации об объектах, которые существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой.

В научных исследованиях большую роль играют *гипотезы*, т. е. определенные предсказания, основывающиеся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Быстрая и полная проверка выдвигаемых гипотез может быть проведена в ходе специально поставленного эксперимента. При формулировании и проверке правильности гипотез большое значение в качестве метода суждения имеет аналогия.

Аналогией называют суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов, причем такое сходство может быть существенным и несущественным. Необходимо отметить, что понятия существенности и несущественности сходства или различия объектов условны и относительны. Существенность сходства (различия) зависит от уровня абстрагирования и в общем случае определяется конечной целью проводимого исследования. Современная научная гипотеза создается, как правило, по аналогии с проверенными на практике научными положениями. Таким образом, аналогия связывает гипотезу с экспериментом.

Оригинал. В теории моделирования под *оригиналом* понимается объект, определенные свойства (аспекты) которого подлежат изучению методом моделирования. В общем случае понятие оригинала может иметь достаточно широкую интерпретацию, охватывающую как реально существующие, так и проектируемые объекты (системы, подсистемы, элементы), явления, режимы и процессы, происходящие в них.

Для однозначной интерпретации применяемых терминов под *системой* понимается совокупность компонентов (составных частей), которая рассматривается как единое целое и организована для решения определенных функциональных задач (достижения целей функционирования) так, что два любых ее компонента взаимосвязаны некоторым системообразующим отношением; в системе могут быть выделены *подсистемы* — относительно самостоятельные части системы, функционально связанные между собой, и *элементы* — компоненты системы, принимаемые в данной постановке задачи как неделимые на более мелкие составляющие.

Под *явлением* понимается совокупность процессов, сопутствующих работе (функционированию или поведению) системы и проявляющихся в виде изменений состояний или режимов этой системы; соответственно *режим* — это состояние системы, определяющееся множеством различных процессов и зависящее от собственных параметров системы и параметров возмущающих воздействий. Различают установившиеся и переходные режимы системы: под *установившимся режимом* понимается такое состояние системы, при котором параметры режима постоянны или незначительно изменяются около некоторого среднего значения; под *переходным режимом* — такое состояние системы, при котором происходят непрерывные последовательные изменения параметров режима, обусловленные изменением начальных условий или появлением возмущающих воздействий и приводящие к отклонениям режима от его установившегося значения.

Изменения данного состояния или режима системы, происходящие и во времени, и в пространстве, характеризуются некоторыми показателями, которые называются *текущими переменными* или *обобщенными координатами.* При этом под *процессом* понимается закономерное последовательное изменение относительно самостоятельной группы параметров режима, называемой *параметрами процесса*. Совокупность процессов реализуется в системе, состоящей из элементов и характеризуемой *параметрами системы* (параметрами элементов системы и параметрами связей между ними).

При исследовании механических явлений параметрами процессов являются силы, скорости, ускорения, а параметрами системы — массы тел, коэффициенты трения, вязкости жидкостей и т. п. Для электрической системы параметры процессов — это мощности, токи, напряжения и т.д., а параметры системы — сопротивления, проводимости, коэффициенты трансформации и т. п.; в более общем случае под параметрами системы могут пониматься показатели, количественно определяющиеся физическими свойствами элементов системы, схемой их соединения и рядом допущений, на основании которых данный процесс выделяется из явления или режима и рассматривается как относительно самостоятельный.

Системы, в которых параметры постоянны на всем интервале времени существования изучаемого процесса или изменяются независимо от его протекания, называются соответственно *линейными системами* или *системами с переменными параметрами*. Системы, у которых хотя бы один параметр изменяется в функции одного или нескольких других параметров, называются *нелинейными системами*.

Для математического описания процесса необходимо ввести систему координат, в которой записывается система уравнений, связывающих между собой параметры процесса и системы. Формы записи уравнений процесса могут быть различными в зависимости от вида системы, поставленной задачи и выбранной системы координат.

Наглядной физической интерпретацией математического описания процесса являются схемы замещения, которые обычно выделяют только соответствующий аспект явления или отражают какие-либо частные соотношения и взаимодействия существенные для изучаемого процесса. Если например, протяженная линия электропередачи замещается цепочечной схемой, то в ней правильно отражается распределение тока и напряжения вдоль линии; однако распространение фронта волн напряжений и токов может быть отражено в такой схеме только условно.

Модель (лат. *modulus* — мера) — это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала. Под моделью обычно понимается вспомогательный объект, находящийся в определенном соответствии с изучаемым объектом-оригиналом и более удобный для решения задач конкретного исследования Отражая отдельные особенности поведения объекта-оригинала модель имеет некоторые идентичные черты с оригиналом и служит для получения такой информации о нем, которую затруднительно либо невозможно получить путем непосредственного исследования представления о модели чаще всего ассоциируются с техническими средствами, применяемыми для построения соответствующего «эквивалента» объекта исследования, в том или ином смысле адекватного ему, но практически более удобного для решения поставлена. Однако понятие модели принципиально существенно шире: функции модели может выполнять не только специально созданная экспериментальная установка, но и наблюдаемое явление, и символическое (знаковое) описание оригинала (текстовое описание, математическое уравнение чертеж, схема и т. п.), и мысленный образ и т. д. Поэтому в общем случае *модель* - это явление, техническое устройство, знаковое образование или иной условный образ, которые находятся в определенном соответствии (сходстве) с изучаемым объектом-оригиналом и способны замещать оригинал в процессе исследования, давая о нем необходимую информацию.

Первоначально, в процессе создания, модель выполняет преимущественно отображающие функции — отражает определенную часть свойств оригинала. Далее, при проведении исследований, модель преимущественно реализует функции, имеющие в некотором смысле прогностический характер — функции «предсказания» по результатам моделирования особенностей поведения оригинала в ситуациях иных, нежели те, на основании которых строилась модель. При этом сведения, полученные посредством моделирования, объективно представляют собой сведения о свойствах самой модели, которая теперь уже является самостоятельным объектом исследования. Эти сведения далее должны быть «перенесены» на оригинал с целью предсказания его свойств или характеристик на основе определенных правил перехода от параметров, характеризующих модель, к параметрам, характеризующим оригинал, т. е. правил установления взаимооднозначного соответствия между оригиналом и моделью. При разработке таких правил и способов их реализации понятия оригинала и модели рассматриваются в органическом единстве; это и обусловливает необходимость конкретизации понятия модели в соотнесении с адекватной физической реализацией — оригиналом.

Моделирование представляет собой метод исследования свойств определенного объекта посредством изучения свойств другого объекта, более удобного для решения задач исследования и находящегося в определенном соответствии с первым объектом. В общетеоретическом смысле моделирование означает отображение или воспроизведение определенных сторон действительности для изучения интересующих исследователя объективных закономерностей; соответственно и метод моделирования — это метод опосредованного познания объективной реальности, которая проявляется в виде взаимосвязанной совокупности свойств объекта исследования, отражающей различные аспекты его взаимодействия с внешней средой, существования и развития. При решении практических задач в общем случае под *моделированием* понимается изучение моделируемого объекта (оригинала), базирующееся на взаимооднозначном соответствии определенной части свойств оригинала и замещающего его при исследовании объекта (модели) и включающее в себя построение модели, изучение ее и перенос полученных сведений на моделируемый объект-оригинал.

Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется *моделированием*. Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом *адекватность* модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

Аналитические и имитационные методы. Исторически первым сложился *аналитический подход* к исследованию систем, когда ЭВМ использовалась в качестве вычислителя по аналитическим зависимостям. Анализ характеристик процессов функционирования больших систем с помощью только аналитических методов исследования наталкивается обычно на значительные трудности, приводящие к необходимости существенного упрощения моделей либо на этапе их построения, либо в процессе работы с моделью, что может привести к получению недостоверных результатов.

Поэтому в настоящее время наряду с построением аналитических моделей большое внимание уделяется задачам оценки характеристик больших систем на основе *имитационных моделей,* реализованных на современных ЭВМ с высоким быстродействием и большим объемом оперативной памяти. Причем перспективность имитационного моделирования как метода исследования характеристик процесса функционирования больших систем возрастает с повышением быстродействия и оперативной памяти ЭВМ, с развитием математического обеспечения, совершенствованием банков данных и периферийных устройств для организации диалоговых систем моделирования. Это, в свою очередь, способствует появлению новых «чисто машинных» методов решения задач исследования больших систем на основе организации имитационных экспериментов с их моделями. Причем ориентация на автоматизированные рабочие места на базе персональных ЭВМ для реализации экспериментов с имитационными моделями больших систем позволяет проводить не только анализ их характеристик, но и решать задачи структурного, алгоритмического и параметрического синтеза таких систем при заданных критериях оценки эффективности и ограничениях.

Достигнутые успехи в использовании средств вычислительной техники для целей моделирования часто создают иллюзию, что применение современной ЭВМ гарантирует возможность исследования системы любой сложности. При этом игнорируется тот факт, что в основу любой модели положено трудоемкое по затратам времени и материальных ресурсов предварительное изучение явлений, имеющих место в объекте-оригинале. И от того, насколько детально изучены реальные явления, насколько правильно проведена их формализация и алгоритмизация, зависит в конечном итоге успех моделирования конкретного объекта.

Средства моделирования систем. Расширение возможностей моделирования различных классов больших систем неразрывно связано с совершенствованием средств вычислительной техники и техники связи. Перспективным направлением является создание для целей моделирования иерархических многомашинных вычислительных систем и сетей.

При создании больших систем их компоненты разрабатываются различными коллективами, которые используют средства моделирования при анализе и синтезе отдельных подсистем. При этом разработчикам необходимы оперативный доступ к программно-техническим средствам моделирования, а также оперативный обмен результатами моделирования отдельных взаимодействующих подсистем. Таким образом, появляется необходимость в создании диалоговых систем моделирования, для которых характерны следующие особенности: возможность одновременной работы многих пользователей, занятых разработкой одной или нескольких систем, доступ пользователей к программно-техническим ресурсам системы моделирования, включая, базы данных и знаний, пакеты прикладных программ моделирования, обеспечение диалогового режима работы с различными вычислительными машинами и устройствами, включая цифровые и аналоговые вычислительные машины, установки натурного и физического моделирования, элементы реальных систем и т. п., диспетчирование работ в *системе моделирования* и оказание различных услуг пользователям, включая обучение работе с диалоговой системой моделирования при обеспечении дружественного интерфейса.

В зависимости от специфики исследуемых объектов в ряде случаев эффективным оказывается моделирование на аналоговых вычислительных машинах (АВМ). При этом надо иметь в виду, что АВМ значительно уступают ЭВМ по точности и логическим возможностям, но по быстродействию, схемной простоте реализации, сопрягаемости с датчиками внешней информации АВМ превосходят ЭВМ или по крайней мере не уступают им.

Для сложных динамических объектов перспективным является моделирование на базе гибридных (аналого-цифровых) вычислительных комплексов. Такие комплексы реализуют преимущества цифрового и аналогового моделирования и позволяют наиболее эффективно использовать ресурсы ЭВМ и АВМ в составе единого комплекса. При использовании гибридных моделирующих комплексов упрощаются вопросы взаимодействия с датчиками, установленными на реальных объектах, что позволяет, в свою очередь, проводить комбинированное моделирование с использованием аналого-цифровой части модели и натурной части объекта. Такие гибридные моделирующие комплексы могут входить в состав многомашинного вычислительного комплекса, что еще больше расширяет его возможности с точки зрения моделируемых классов больших систем.

2. Принципы системного подхода в моделировании систем

В настоящее время при анализе и синтезе сложных (больших) систем получил развитие *системный подход*, который отличается от классического (или индуктивного) подхода. Последний рассматривает систему путем перехода от частного к общему и синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых раздельно. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, причем исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Объект моделирования. Специалисты по проектированию и эксплуатации сложных систем имеют дело с системами управления различных уровней, обладающими общим свойством — стремлением достичь некоторой цели. Эту особенность учтем в следующих определениях системы. *Система* S — целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы. *Внешняя среда* E — множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием.

В зависимости от цели исследования могут рассматриваться питые соотношения между самим объектом S и внешней средой E. Таким образом, в зависимости от уровня, на котором находится наблюдатель, объект исследования может выделяться по-разному и могут иметь место различные взаимодействия этого объекта с внешней средой.

С развитием науки и техники сам объект непрерывно усложняется, и уже сейчас говорят об объекте исследования как о некоторой сложной системе, которая состоит из различных компонент, взаимосвязанных друг с другом. Поэтому, рассматривая системный подход как основу для построения больших систем и как базу создания методики их анализа и синтеза, прежде всего необходимо определить само понятие системного подхода.

Системный подход — это элемент учения об общих законах развития природы и одно из выражений диалектического учения. Можно привести разные определения системного подхода, но наиболее правильно то, которое позволяет оценить познавательную сущность этого подхода при таком методе исследования систем, как моделирование. Поэтому весьма важны выделение самой системы S и внешней среды E из объективно существующей реальности и описание системы исходя из общесистемных позиций.

При системном подходе к моделированию систем необходимо прежде всего четко определить цель моделирования. Поскольку невозможно полностью смоделировать реально функционирующую систему (систему-оригинал, или первую систему), создается модель (система-модель, или вторая система) под поставленную проблему. Таким образом, применительно к вопросам моделирования цель возникает из требуемых задач моделирования, что позволяет подойти к выбору критерия и оценить, какие элементы войдут в создаваемую модель M. Поэтому необходимо иметь критерий отбора отдельных элементов в создаваемую модель.

Подходы к исследованию систем. Важным для системного подхода является определение *структуры системы* — совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие. Структура системы может изучаться извне с точки зрения состава отдельных подсистем и отношений между ними, а также изнутри, когда анализируются отдельные свойства, позволяющие системе достигать заданной цели, т. е. когда изучаются функции системы. В соответствии с этим наметился ряд подходов к исследованию структуры системы с ее свойствами, к которым следует прежде всего отнести структурный и функциональный.

При *структурном подходе* выявляются состав выделенных элементов системы S и связи между ними. Совокупность элементов и связей между ними позволяет судить о структуре системы. Последняя в зависимости от цели исследования может быть описана на разных уровнях рассмотрения. Наиболее общее описание структуры — это топологическое описание, позволяющее определить в самых общих понятиях составные части системы и хорошо формализуемое на базе теории графов.

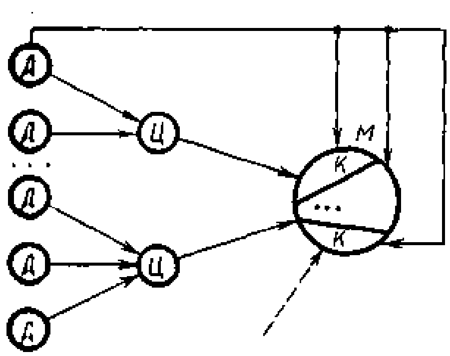
Менее общим является функциональное описание, когда рассматриваются отдельные функции, т. е. алгоритмы поведения системы, и реализуется *функциональный подход*, оценивающий функции, которые выполняет система, причем под функцией понимается свойство, приводящее к достижению цели. Поскольку функция отображает свойство, а свойство отображает взаимодействие системы S с внешней средой E, то свойства могут быть выражены в виде либо некоторых характеристик элементов 5ад и подсистем 5,- системы, либо системы S в целом.

При наличии некоторого эталона сравнения можно ввести количественные и качественные характеристики систем. Для количественной характеристики вводятся числа, выражающие отношения между данной характеристикой и эталоном. Качественные характеристики системы находятся, например, с помощью метода экспертных оценок.

Проявление функций системы во времени $S(t)$, т. е. *функционирование системы*, означает переход системы из одного состояния в другое, т. е. движение в пространстве состояний Z. При эксплуатации системы S весьма важно качество ее функционирования, определяемое показателем эффективности и являющееся значением критерия оценки эффективности. Существуют различные подходы к выбору критериев оценки эффективности. Система S может оцениваться либо совокупностью частных критериев, либо некоторым общим интегральным критерием.

Следует отметить, что создаваемая модель *М* с точки зрения системного подхода также является системой, т. е. $S' = S'(M)$, и может рассматриваться по отношению к внешней среде *Е*. Наиболее просты по представлению модели, в которых сохраняется прямая аналогия явления. Применяют также модели, в которых нет прямой аналогии, а сохраняются лишь законы и общие закономерности поведения элементов системы *S*. Правильное понимание взаимосвязей как внутри самой модели *М*, так и взаимодействия ее с внешней средой *Е* в значительной степени определяется тем, на каком уровне находится наблюдатель.

Простой подход к изучению взаимосвязей между отдельными частями модели предусматривает рассмотрение их как отражение связей между отдельными подсистемами объекта. Такой классический подход может быть использован при создании достаточно простых моделей. Процесс синтеза модели *М* на основе классического (индуктивного) подхода представлен на рис. 1.1, *а*.



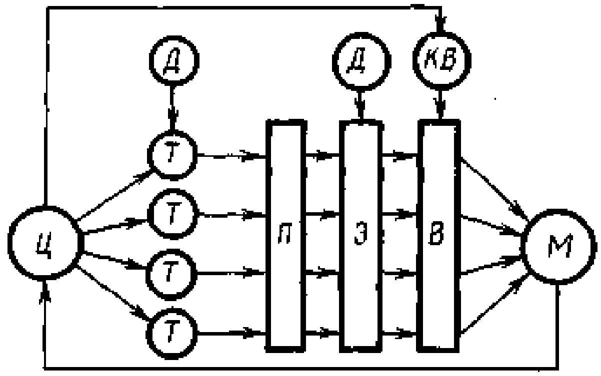
Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы, т. е. выбираются исходные данные *Д* для моделирования и ставятся цели *Ц*, отображающие отдельные стороны процесса моделирования. По отдельной совокупности исходных данных *Д* ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы, на базе этой цели формируется некоторая компонента *К* будущей модели. Совокупность компонент объединяется в модель *М*.

Таким образом, разработка модели M на базе классического подхода означает суммирование отдельных компонент в единую модель, причем каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели. Поэтому классический подход может быть использован для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта. Для модели сложного объекта такая разобщенность решаемых задач недопустима, так как приводит к значительным затратам ресурсов при реализации модели на базе конкретных программно-технических средств. Можно отметить две отличительные стороны классического подхода: наблюдается движение от частного к общему, создаваемая модель (система) образуется путем суммирования отдельных ее компонент и не учитывается возникновение нового системного эффекта.

С усложнением объектов моделирования возникла необходимость наблюдения их с более высокого уровня. В этом случае наблюдатель (разработчик) рассматривает данную систему .V как некоторую подсистему какой-то метасистемы, т. е. системы более высокого ранга, и вынужден перейти на позиции ноною системного подхода, который позволит ему построить не только исследуемую систему, решающую совокупность задач, по и создавать систему, являющуюся составной частью метасистемы. Например, если ставится задача проектирования АСУ предприятием, то с позиции системного подхода нельзя забывать о том, что эта система является составной частью АСУ объединением.

Системный подход получил применение в системотехнике в связи с необходимостью исследования больших реальных систем, когда сказалась недостаточность, а иногда ошибочность принятия каких-либо частных решений. На возникновение системного подхода повлияли увеличивающееся количество исходных данных при разработке, необходимость учета сложных стохастических связей в системе и воздействий внешней среды E. Все это заставило исследователей изучать сложный объект не изолированно, а во взаимодействии с внешней средой, а также в совокупности с другими системами некоторой метасистемы.

Системный подход позволяет решить проблему построения сложной системы с учетом всех факторов и возможностей, пропорциональных их значимости, на всех этапах исследования системы S и построения модели M. Системный подход означает, что каждая система S является интегрированным целым даже тогда, когда она состоит из отдельных разобщенных подсистем. Таким образом, в основе системного подхода лежит рассмотрение системы как интегрированного целого, причем это рассмотрение при разработке начинается с главного — формулировки цели функционирования. Процесс синтеза модели M на базе системного подхода условно представлен на рис. 1.1, *б*.



На основе исходных данных *Д*, которые известны из анализа внешней системы, тех ограничений, которые накладываются на систему сверху либо исходя из возможностей ее реализации, и на основе цели функционирования формулируются исходные требования *Т* к модели системы *S*. На базе этих требований формируются ориентировочно некоторые подсистемы *П*, элементы *Э* и осуществляется наиболее сложный этап синтеза — выбор *В* составляющих системы, для чего используются специальные критерии выбора *КВ*.

При моделировании необходимо обеспечить максимальную эффективность модели системы. Эффективность обычно определяется как некоторая разность между какими-то показателями ценности результатов, полученных в итоге эксплуатации модели, и теми затратами, которые были вложены в ее разработку и создание.

Стадии разработки моделей. На базе системного подхода может быть предложена и некоторая последовательность разработки моделей, когда выделяют две основные стадии проектирования: макропроектирование и микропроектирование.

На стадии макропроектирования на основе данных о реальной системе *S* и внешней среде *Е* строится модель внешней среды, выявляются ресурсы и ограничения для построения модели системы, выбирается модель системы и критерии, позволяющие оценить адекватность модели *М* реальной системы *S*. Построив модель системы и модель внешней среды, на основе критерия эффективности функционирования системы в процессе моделирования выбирают оптимальную стратегию управления, что позволяет реализовать возможности модели по воспроизведению отдельных сторон функционирования реальной системы S.

Стадия микропроектирования в значительной степени завили от конкретного типа выбранной модели. В случае имитационной модели необходимо обеспечить создание информационного, м«тематического, технического и программного обеспечений системы моделирования. На этой стадии можно установить основные характеристики созданной модели, оценить время работы с ней и затраты ресурсов для получения заданного качества соответствия модели процессу функционирования системы *S*.

Независимо от типа используемой модели *M* при ее построении необходимо руководствоваться рядом принципов системного подхода:

1) пропорционально-последовательное продвижение по этапам и направлениям создания модели;

2) согласование информационных, ресурсных, надежностных и других характеристик;

3) правильное соотношение отдельных уровней иерархии в системе моделирования;

4) целостность отдельных обособленных стадий построения модели.

Модель *M* должна отвечать заданной цели ее создания, поэтому отдельные части должны компоноваться взаимно, исходя из единой системной задачи. Цель может быть сформулирована качественно, тогда она будет обладать большей содержательностью и длительное время может отображать объективные возможности данной системы моделирования. При количественной формулировке цели возникает целевая функция, которая точно отображает наиболее существенные факторы, влияющие на достижение цели.

Построение модели относится к числу системных задач, при решении которых синтезируют решения на базе огромного числа исходных данных, на основе предложений больших коллективов специалистов. Использование системного подхода в этих условиях позволяет не только построить модель реального объекта, но и на (пне этой модели выбрать необходимое количество управляющей информации в реальной системе, оценить показатели ее функционирования и тем самым на базе моделирования найти наиболее эффективный вариант построения и выгодный режим функционирования реальной системы S.

3. Общая характеристика проблемы моделирования систем

С развитием системных исследований, с расширением экспериментальных методов изучения реальных явлений все большее значение приобретают абстрактные методы, появляются новые научные дисциплины, автоматизируются элементы умственного труда. Важное значение при создании реальных систем *S* имеют математические методы анализа и синтеза, целый ряд открытий базируется на чисто теоретических изысканиях. Однако было бы неправильно забывать о том, что основным критерием любой теории является практика, и даже сугубо математические, отвлеченные науки базируются в своей основе на фундаменте практических знаний.

Экспериментальные исследования систем. Одновременно с развитием теоретических методов анализа и синтеза совершенствуются и методы экспериментального изучения реальных объектов, появляются новые средства исследования. Однако эксперимент был и остается одним из основных и существенных инструментов познания. Подобие и моделирование позволяют по-новому описать реальный процесс и упростить экспериментальное его изучение. Совершенствуется и само понятие моделирования. Если раньше моделирование означало реальный физический эксперимент либо построение макета, имитирующего реальный процесс, то в настоящее время появились новые виды моделирования, в основе которых лежит постановка не только физических, но также и математических экспериментов.

Познание реальной действительности является длительным и сложным процессом. Определение качества функционирования большой системы, выбор оптимальной структуры и алгоритмов поведения, построение системы S в соответствии с поставленной перед нею целью — основная проблема при проектировании современных систем, поэтому моделирование можно рассматривать как один из методов, используемых при проектировании и исследовании больших систем.

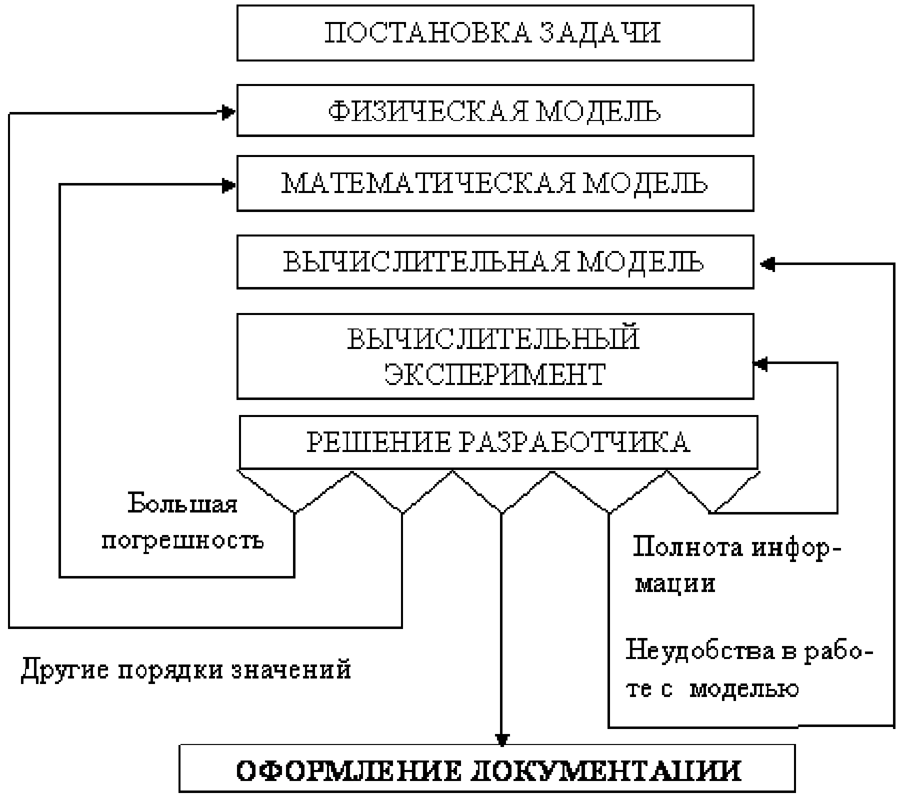
Моделирование базируется на некоторой аналогии реального и мысленного эксперимента. *Аналогия* — основа для объяснения изучаемого явления, однако критерием истины может служить только практика, только опыт.

Хотя современные научные гипотезы могут создаться чисто теоретическим путем, но, по сути, базируются на широких практических знаниях. Для объяснения реальных процессов выдвигаются гипотезы, для подтверждения которых ставится эксперимент либо проводятся такие теоретические рассуждения, которые логически подтверждают их правильность. В широком смысле под *экспериментом* можно понимать некоторую процедуру организации и наблюдения каких-то явлений, которые осуществляют в условиях, близких к естественным, либо имитируют их.

Различают *пассивный эксперимент*, когда исследователь наблюдает протекающий процесс, и *активный*, когда наблюдатель вмешивается и организует протекание процесса. В последнее время распространен активный эксперимент, поскольку именно на его основе удается выявить критические ситуации, получить наиболее интересные закономерности, обеспечить возможность повторения эксперимента в различных точках и т. д.

Физический и вычислительный эксперимент. При конструировании модели любого физического объекта в начале разрабатывается его физическая модель, в которой описывается принцип действия. Затем разрабатывается математическая модель, в которой устанавливаются количественные зависимости между входными и выходными параметрами объекта. На основе математической модели разрабатывается вычислительная модель, представляющая собой программу для ЭВМ. Имея вычислительную модель, можно проводить вычислительный эксперимент - исследование характеристик объекта путём многократного выполнения программы вычислительной модели при разных исходных данных.

Если движение и преобразование информации в рамках вычислительной модели имитирует физические процессы в объекте моделирования, то вычислительный эксперимент называется имитационным моделированием.



Процесс конструирования модели

Итерационный процесс разработки моделирования отражён на рисунке. Если результаты вычислительного эксперимента радикально не согласуются с результатами физического эксперимента, то выдвигается новая гипотеза физической модели. Если результаты вычислительного эксперимента согласуются с результатами физического эксперимента, но погрешность превышает допустимые нормы, то корректируется математическая модель. Если же процесс моделирования недостаточно робастный и требует от пользователя много трудовых затрат, а от ЭВМ - больших ресурсов, то требуется корректировка вычислительной модели.

Построение моделей-аналогов основывается на свойстве изоморфизма (одинаковости) математического описания процессов различной физической природы. Например, взаимосвязи приложенной силы, массы тела и его ускорения для механической системы, напряжения, индуктивности и скорости изменения тока во времени для электрической цепи, теплового потока, теплоемкости и скорости изменения температуры во времени для тепловой системы описываются одинаковыми математическими соотношениями. Используя свойство изоморфизма, можно с помощью одних объектов (чаще всего электрических цепей) исследовать процессы в объектах другой физической природы (тепловых, механических, гидравлических и др.).

В основе любого вида моделирования лежит некоторая *модель,* имеющая соответствие, базирующееся на некотором общем качестве, которое характеризует реальный объект. Объективно реальный объект обладает некоторой формальной структурой, поэтому для любой модели характерно наличие некоторой структуры, соответствующей формальной структуре реального объекта, либо изучаемой стороне этого объекта.

В основе моделирования лежат *информационные процессы,* поскольку само создание модели M базируется на информации о реальном объекте. В процессе реализации модели получается информация о данном объекте, одновременно в процессе эксперимента с моделью вводится управляющая информация, существенное место занимает обработка полученных результатов, т. е. информация лежит в основе всего процесса моделирования.

Характеристики моделей систем. В качестве объекта моделирования выступают сложные организационно-технические системы, которые можно отнести к классу больших систем. Более того, по своему содержанию и созданная модель M также становится системой $S(M)$ и тоже может быть отнесена к классу больших систем, для которых характерно следующее.

1. Цель функционирования, которая определяет степень целенаправленности поведения модели M. В этом случае модели могут быть разделены на одноцелевые, предназначенные для решения одной задачи, и многоцелевые, позволяющие разрешить или рассмотреть ряд сторон функционирования реального объекта.

2. Сложность, которую, учитывая, что модель M является совокупностью отдельных элементов и связей между ними, можно оценить по общему числу элементов в системе и связей между ними. По разнообразию элементов можно выделить ряд уровней иерархии, отдельные функциональные подсистемы в модели M, ряд входов и выходов и т. д., т. е. понятие сложности может быть идентифицировано по целому ряду признаков.

3.Целостность, указывающая на то, что создаваемая модель M является одной целостной системой $S(M)$, включает в себя большое количество составных частей (элементов), находящихся в сложной взаимосвязи друг с другом.

4. Неопределенность, которая проявляется в системе: по состоянию системы, возможности достижения поставленной цели, методам, решения задач, достоверности исходной информации и т. д. Основной характеристикой неопределенности служит такая мера информации, как энтропия, позволяющая в ряде случаев оценить количество управляющей информации, необходимой для достижении заданного состояния системы. При моделировании основная цель — получение требуемого соответствия модели реальному объекту и в этом смысле количество управляющей информации и модели можно также оценить с помощью энтропии и найти то предельное минимальное количество, которое необходимо для получения требуемого результата с заданной достоверностью. Таким образом,

понятие неопределенности, характеризующее большую систему, применимо к модели M и является одним из ее основных признаков.

5. Поведенческая страта, которая позволяет оценить эффективность достижения системой поставленной цели. В зависимости от наличия случайных воздействий можно различать детерминированные и стохастические системы, по своему поведению — непрерывные и дискретные и т. д. Поведенческая страта рассмотрения системы S позволяет применительно к модели M оценить эффективность построенной модели, а также точность и достоверность полученных при этом результатов. Очевидно, что поведение модели M не обязательно совпадает с поведением реального объекта, причем часто моделирование может быть реализовано на базе иного материального носителя.

6.Адаптивность, которая является свойством высокоорганизованной системы. Благодаря адаптивности удается приспособиться к различным внешним возмущающим факторам в широком диапазоне изменения воздействий внешней среды. Применительно в модели существенна возможность ее адаптации в широком спектре возмущающих воздействий, а также изучение поведения модели в изменяющихся условиях, близких к реальным. Надо отметить, что существенным может оказаться вопрос устойчивости модели к раз личным возмущающим воздействиям. Поскольку модель M —сложная система, весьма важны вопросы, связанные с ее существованием, т. е. вопросы живучести, надежности и т. д.

7.Организационная структура системы моделирования, которая во многом зависит от сложности модели и степени совершенства средств моделирования. Одним из последних достижений в области моделирования можно считать возможность использования имитационных моделей для проведения машинных экспериментов. Необходимы оптимальная организационная структура комплекса технических средств, информационного, математического и программного обеспечений системы моделирования $S'(M)$, оптимальная организация процесса моделирования, поскольку следует обращать особое внимание на время моделирования и точность получаемых результатов.

8.Управляемость модели, вытекающая из необходимости обеспечивать управление со стороны экспериментаторов для получения возможности рассмотрения протекания процесса в различных условиях, имитирующих реальные. В этом смысле наличие многих управляемых параметров и переменных модели в реализованной системе моделирования дает возможность поставить широкий эксперимент и получить обширный спектр результатов. Управляемость системы тесно связана и со степенью автоматизации
моделирования. В настоящее время получили применение системы моделирования, отличающиеся высокой степенью автоматизации процесса моделирования, когда наряду с программными средствами управления

машинным моделированием используется возможность мультимедийного общения исследователя с процессом моделирования.

9. Возможность развития модели, которая исходя из современного уровня науки и техники позволяет создавать мощные системы моделирования S(M) для исследования многих сторон функционирования реального объекта. Однако нельзя при создании системы моделирования ограничиваться только задачами сегодняшнего дня. Необходимо предусматривать возможность развития системы моделирования как по горизонтали в смысле расширения спектра изучаемых функций, так и по вертикали в смысле расширения числа подсистем, т. е. созданная система моделирования должна позволять применять новые современные методы и средства. Естественно, что интеллектуальная система моделирования может функционировать только совместно с коллективом людей, поэтому к ней предъявляют эргономические требования.

Цели моделирования систем. Одним из наиболее важных аспектов построения систем моделирования является проблема цели. Любую модель строят в зависимости от цели, которую ставит перед ней исследователь, поэтому одна из основных проблем при моделировании — это проблема целевого назначения. Подобие процесса, протекающего в модели М, реальному процессу является не целью, а условием правильного функционирования модели, и поэтому в качестве цели должна быть поставлена задача изучения какой-либо стороны функционирования объекта.

Для упрощения модели М цели делят на подцели и создают более эффективные виды моделей в зависимости от полученных подцелей моделирования. Можно указать целый ряд примеров целей моделирования в области сложных систем. Например, для АСУ предприятием весьма существенно изучение процессов оперативного управления производством, оперативно-календарного планирования, перспективного планирования и здесь также могут быть успешно использованы методы моделирования.

Если цель моделирования ясна, то возникает следующая проблема, а именно проблема построения модели М. Построение модели оказывается возможным, если имеется информация или выдвинуты гипотезы относительно структуры, алгоритмов и параметров исследуемого объекта. На основании их изучения осуществляется идентификация объекта. В настоящее время широко применяют различные способы оценки параметров: по методу наименьших квадратов, по методу максимального правдоподобия, байесовские, марковские оценки.

Если модель М построена, то следующей проблемой можно считать проблему работы с ней, т. е. реализацию модели, основные задачи которой — минимизация времени получения конечных результатов и обеспечение их достоверности.

Для правильно построенной модели *М* характерным является то, что она выявляет лишь те закономерности, которые нужны исследователю, и не рассматривает свойства системы *S,* не существенные для данного исследования. Следует отметить, что оригинал и модель должны быть одновременно сходны по одним признакам и различны по другим, что позволяет выделить наиболее важные изучаемые свойства. В этом смысле модель выступает как некоторый «заместитель» оригинала, обеспечивающий фиксацию и изучение лишь некоторых свойств реального объекта.

Таким образом, характеризуя проблему моделирования в целом, необходимо учитывать, что от постановки задачи моделирования до интерпретации полученных результатов существует большая группа сложных научно-технических проблем, к основным из которых можно отнести следующие: идентификацию реальных объектов, выбор вида моделей, построение моделей и их машинную реализацию, взаимодействие исследователя с моделью в ходе машинного эксперимента, проверку правильности полученных в ходе моделирования результатов, выявление основных закономерностей, исследованных в процессе моделирования. В зависимости от объекта моделирования и вида используемой модели эти проблемы могут иметь разную значимость.

В одних случаях наиболее сложной оказывается идентификация, в других — проблема построения формальной структуры объекта. Возможны трудности и при реализации модели, особенно в случае имитационного моделирования больших систем. При этом следует подчеркнуть роль исследователя в процессе моделирования. Постановка задачи, построение содержательной модели реального объекта во многом представляют собой творческий процесс и базируются на эвристике. И в этом смысле нет формальных путей выбора оптимального вида модели. Часто отсутствуют формальные методы, позволяющие достаточно точно описать реальный процесс. Поэтому выбор той или иной аналогии, выбор того или иного математического аппарата моделирования полностью основывается на имеющемся опыте исследователя и ошибка исследователя может привести к ошибочным результатам моделирования.

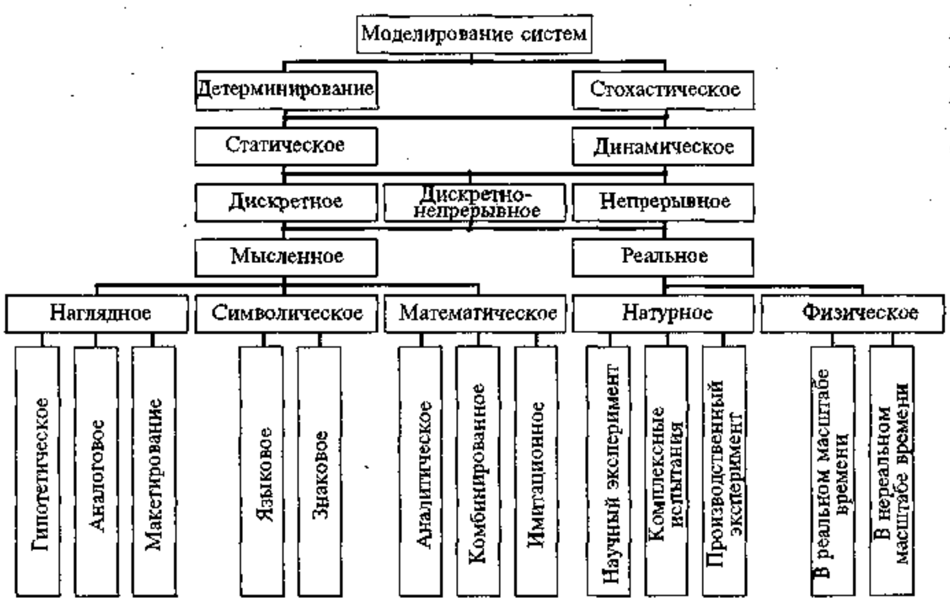
Средства вычислительной техники, которые в настоящее время широко используются либо для вычислений при аналитическом моделировании, либо для реализации имитационной модели системы, могут лишь помочь с точки зрения эффективности реализации сложной модели, но не позволяют подтвердить правильность той или иной модели. Только на основе обработанных данных, опыта исследователя можно с достоверностью оценить адекватность модели по отношению к реальному процессу.

Если в ходе моделирования существенное место занимает реальный физический эксперимент, то здесь весьма важна и надежность используемых инструментальных средств, поскольку сбои и отказы программно-технических средств могут приводить к искаженным течениям выходных данных, отображающих протекание процесса. 11 в этом смысле при проведении физических экспериментов необходимы специальная аппаратура, специально разработанное математическое и информационное обеспечение, которые позволяют реализовать диагностику средств моделирования, чтобы отсеять те ошибки в выходной информации, которые вызваны неисправностями функционирующей аппаратуры. В ходе машинного эксперимента могут иметь место и ошибочные действия человека-оператора. В этих условиях серьезные задачи стоят в области эргономического обеспечения процесса моделирования.

4. Классификация видов моделирования систем

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при т мене одного объекта другим точно таким же. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта.

Классификационные признаки. В качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели и разделить модели в соответствии с этим признаком на полные, неполные и приближенные. В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем. Классификация видов моделирования систем S приведена на рис.



В зависимости от характера изучаемых процессов в системе S все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.

Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т. е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий. *Стохастическое* моделирование отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, т. е. набор однородных реализаций.

Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а *динамическое* моделирование отражает поведение объекта во времени.

Д*искретное моделирование* служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно *непрерывное* моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а *дискретно-непрерывное моделирование* используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

В зависимости от формы представления объекта (системы S) можно выделить мысленное и реальное моделирование.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания. Например, на базе мысленного моделирования могут быть проанализированы многие ситуации микромира, которые не поддаются физическому эксперименту. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного, символического и математического.

При *наглядном моделировании* на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. В основе *гипотетического моделирования* исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Гипотетическое моделирование используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов. С усложнением объекта используют аналогии последующих уровней, когда аналоговая модель отображает несколько либо только одну сторону функционирования объекта.

Существенное место при мысленном наглядном моделировании занимает *макетирование*. Мысленный макет может применяться в случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать проведению других видов моделирования. В основе построения мысленных макетов также лежат аналогии, однако обычно базирующиеся на причинно-следственных связях между явлениями и процессами в объекте. Если ввести условное обозначение отдельных понятий, т. е. знаки, а также определенные операции между этими знаками, то можно реализовать *знаковое моделирование* и с помощью знаков отображать набор понятий — составлять отдельные цепочки из слов и предложений. Используя операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств, можно в отдельных символах дать описание какого-то реального объекта.

В основе *языкового моделирования* лежит некоторый тезаурус. Последний образуется из набора входящих понятий, причем этот набор должен быть фиксированным. Следует отметить, что между тезаурусом и обычным словарем имеются принципиальные различия. Тезаурус — словарь, который очищен от неоднозначности, т. е. в нем каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие, хотя в обычном словаре одному слову могут соответствовать несколько понятий.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.

Математическое моделирование. Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы S математическими методами, включая и машинные, должна быть проведена формализация этого процесса, т. е. построена математическая модель.

Под *математическим моделированием* будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения ной задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для *аналитического моделирования* характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т. п.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик;

б) численным, когда, не умея решать уравнений в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных;

в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы S. Однако такие зависимости удается получить только для сравнительно простых систем. При усложнении систем исследование их аналитическим методом наталкивается на значительные трудности, которые часто бывают непреодолимыми. Поэтому, желая использовать аналитический метод, в этом случае идут на существенное упрощение первоначальной модели, чтобы иметь возможность изучить хотя бы общие свойства системы. Такое исследование на упрощенной модели аналитическим методом помогает получить ориентировочные результаты для определения более точных оценок другими методами. Численный метод позволяет исследовать по сравнению с аналитическим методом более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят частный характер. Численный метод особенно эффективен при использовании ЭВМ.

В отдельных случаях исследования системы могут удовлетворить и те выводы, которые можно сделать при использовании качественного метода анализа математической модели. Такие качественные методы широко используются, например, в теории автоматического управления для оценки эффективности различных вариантов систем управления.

В настоящее время распространены методы машинной реализации исследования характеристик процесса функционирования больших систем. Для реализации математической модели на ЭВМ необходимо построить соответствующий моделирующий алгоритм.

При *имитационном моделировании* реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы S во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательном и протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы S.

Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др., которые часто создает трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование — наиболее эффективный метод исследования больших систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

Когда результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели процесса функционирования системы S, являются реализациями случайных величин и функций, тогда для нахождения характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение с последующей статистической обработкой информации и целесообразно в качестве метода машинной реализации имитационной модели использовать метод статистического моделирования. Первоначально был разработан метод статистических испытаний, представляющий собой численный метод, который применялся для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадали с решениями аналитических задач (такая процедура получила название метода Монте-Карло). Затем пот прием стали применять и для машинной имитации с целью исследования характеристик процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, т. е. появился метод статистического моделирования. Таким образом, методом статистического моделирования будем в дальнейшем называть метод машинной реализации имитационной модели, и методом статистических испытаний (Монте-Карло) — численный метод решения аналитической задачи.

Метод имитационного моделирования позволяет решать задачи диализа больших систем S, включая задачи оценки: вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено также в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, когда требуется создать систему, с заданными характеристиками при определенных ограничениях, которая является оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности.

При решении задач машинного синтеза систем на основе их имитационных моделей помимо разработки моделирующих алгоритмов для анализа фиксированной системы необходимо также разработать алгоритмы поиска оптимального варианта системы. Далее в методологии машинного моделирования будем различать два основных раздела: статику и динамику,— основным содержанием которых являются соответственно вопросы анализа и синтеза систем, заданных моделирующими алгоритмами.

Комбинированное (аналитико-имитационное) *моделирование* при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей проводится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. Такой комбинированный подход позволяет охватить качественно новые классы систем, которые не могут быть исследованы с использованием только аналитического и имитационного моделирования в отдельности.

Другие виды моделирования. При *реальном моделировании* используется возможность исследования различных характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части. Такие исследования могут проводиться как на объектах, работающих в нормальных режимах, так и при организации специальных режимов для оценки интересующих исследователя характеристик (при других значениях переменных и параметров, в другом масштабе времени и т. д.). Реальное моделирование является наиболее адекватным, но при этом его возможности с учетом особенностей реальных объектов ограничены. Например, проведение реального моделирования АСУ предприятием потребует, во-первых, создания такой АСУ, а во-вторых, проведения экспериментов с управляемым объектом, т. е. предприятием, что в большинстве случаев невозможно. Рассмотрим разновидности реального моделирования.

Натурным моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия. При функционировании объекта в соответствии с поставленной целью удается выявить закономерности протекания реального процесса. Надо отметить, что такие разновидности натурного эксперимента, как *производственный эксперимент и комплексные испытания*, обладают высокой степенью достоверности.

С развитием техники и проникновением вглубь процессов, протекающих в реальных системах, возрастает техническая оснащенность современного *научного эксперимента*. Он характеризуется широким использованием средств автоматизации проведения, применением весьма разнообразных средств обработки информации, возможностью вмешательства человека в процесс проведения эксперимента, и в соответствии с этим появилось новое научное направление — автоматизация научных экспериментов.

Отличие эксперимента от реального протекания процесса заключается в том, что в нем могут появиться отдельные критические ситуации и определяться границы устойчивости процесса. В ходе эксперимента вводятся новые факторы и возмущающие воздействия в процессе функционирования объекта. Одна из разновидностей эксперимента — комплексные испытания, которые также можно отнести к натурному моделированию, когда вследствие повторения испытаний изделий выявляются общие закономерности о надежности этих изделий, о характеристиках качества и т. д. В этом случае моделирование осуществляется путем обработки и обобщения сведений, проходящих в группе однородных явлений. Наряду со специально организованными испытаниями возможна реализация натурного моделирования путем обобщения опыта, накопленного в ходе производственного процесса, т. е. можно говорить о производственном эксперименте. Здесь на базе теории подобия обрабатывают статистический материал по производственному процессу и получают его обобщенные характеристики.

Другим видом реального моделирования является *физическое*, отличающееся от натурного тем, что исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием. В процессе физического моделирования задаются некоторые характеристики внешней среды и исследуется поведение либо реального объекта, либо его модели при заданных или создаваемых искусственно воздействиях внешней среды. Физическое моделирование может протекать в *реальном и нереальном* (псевдореальном) *масштабах времени*, а также может рассматриваться без учета времени. В последнем случае изучению подлежат так называемые «замороженные» процессы, которые фиксируются в некоторый момент времени. Наибольшие сложность и интерес с точки фения верности получаемых результатов представляет физическое моделирование в реальном масштабе времени.

С точки зрения математического описания объекта и в зависимости от его характера модели можно разделить на модели аналоговые (непрерывные), цифровые (дискретные) и аналого-цифровые (комбинированные). Под *аналоговой* моделью понимается модель, которая описывается уравнениями, связывающими непрерывные не личины. Под *цифровой* понимают модель, которая описывается уравнениями, связывающими дискретные величины, представленные в цифровом виде. Под *аналого-цифровой* понимается модель, которая может быть описана уравнениями, связывающими непрерывные и дискретные величины.

Особое место в моделировании занимает кибернетическое моделирование, в котором отсутствует непосредственное подокне физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. В этом случае стремятся отобразить лишь некоторую ФУНКЦИЮ и рассматривают реальный объект как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов, и моделируют некоторые связи между выходами и входами. Чаще всего при использовании кибернетических моделей проводят анализ поведенческой стороны объекта при различных воздействиях внешней среды. Таким образом, в основе кибернетической модели лежит отражение некоторых информационных процессов управления, что позволяет оценить поведение реального объекта. Для построения имитационной модели в этом случае необходимо выделить исследуемую функцию реального объекта, попытаться формализовать эту функцию в виде некоторых операторов связи между входом и выходом и воспроизвести на имитационной модели данную функцию, причем на базе совершенно иных математических соотношений и иной физической реализации процесса.

ТЕМА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

(2 часа)

1. **Понятие подобия**
2. **Виды подобия**
3. **Теория подобия.**
4. **Основные положения теории подобия.**

1. Понятие подобия. Понятие подобие первоначально заимствовано из геометрии. Содержание понятия геометрического подобия в простейшем случае состоит в следующем: треугольники (а также многоугольники с одинаковым числом сторон) подобны, если у них соответственные углы

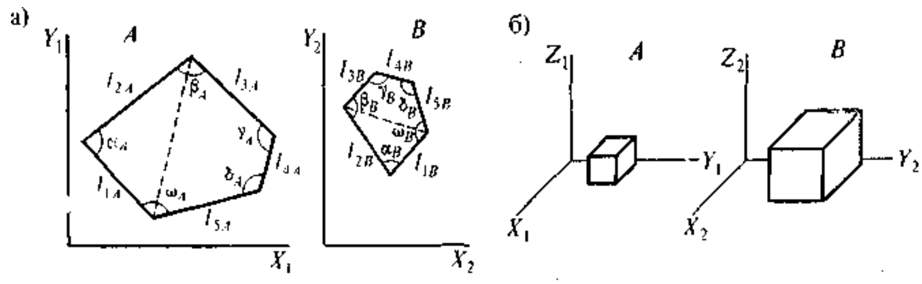


Рис. 1.1

равны и сходственные стороны пропорциональны (рис. 1.1, а), т. е. если

Подобие, таким образом, означает существование определенных масштабных соотношений вида (1.1) для параметров сходственных элементов (длин сторон, углов) сопоставляемых объектов — многоугольников, которые определяют правила перехода от параметров одного из объектов к сходственным параметрам другого; масштабные коэффициенты (масштабы) m_l и m_μ, характеризующие пропорциональность сходственных параметров, могут быть также названы коэффициентами подобия.

$$\left.\begin{aligned} &l_{1A}/\,l_{1B}=l_{2A}/\,l_{2B}=l_{3A}/\,l_{3B}=l_{4A}/\,l_{4B}=l_{5A}/\,l_{5B}=m_l;\\ &\alpha_A/\alpha_B=\beta_A/\beta_B=\gamma_A/\gamma_B=\delta_A/\delta_B=\omega_A/\omega_B=m_\mu=1.\end{aligned}\right\}$$

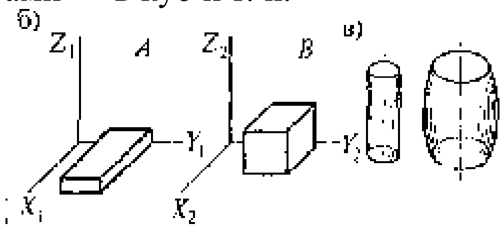
Условия подобия вида (1.1 а) можно сформулировать иначе, если ввести в рассмотрение систему прямоугольных координат X, Y. При геометрическом подобии все координаты X_{IA}, Y_{IA} первого многоугольника пропорциональны соответствующим координатам X_{IB}, Y_{IB} второго многоугольника, т. е. выполняются соотношения

$$x_{iA}/\,x_{iB}=m_x;\ y_{iA}/\,y_{iB}=m_y;\ m_x=m_y,$$

где X_I, Y_I — координаты любой точки, находящейся на отрезках прямых, определяющих контуры соответствующего (А или В) многоугольника; $т_x$ и $т_y$ — масштабы.

Геометрическое подобие может существовать не только в двумерном пространстве (на плоскости), но и в пространствах большей размерности. Для трехмерного пространства, например, в прямоугольных декартовых координатах (оси X, Y, Z попарно перпендикулярны друг другу) геометрическое подобие двух объектов (материальных систем) означает, что все пространственные координаты первого объекта пропорциональны сходственным пространственным координатам второго объекта.

Дальнейшим развитием и обобщением понятия геометрического подобия является понятие аффинного подобия, при котором допускается неравенство масштабов по отдельным координатным осям X, У и Z. В этом случае геометрические фигуры или пространственные объекты как бы деформируются: круг превращается в эллипс, параллелепипед с неравными ребрами — в куб и т. п.



Для сходственных точек x_{iA} и x_{iB}, y_{iA} и y_{iB}, z_{iA} и z_{iB}, трехмерного координатного пространства в прямоугольных декартовых координатах при аффинном подобии будут справедливы соотношения

$$x_{iA}/x_{iB} = m_x;\ y_{iA}/y_{iB} = m_y;\ z_{iA}/z_{iB} = m_z;\ m_x \neq m_y \neq m_z,$$

При этом возникает необходимость введения специальных преоб-разующих (обычно нелинейных) функций, устанавливающих закономерности аффинного преобразования на плоскости или в пространстве.

Понятие подобия физических процессов (объектов) является развитием понятия аффинного подобия. Любой конкретный физический процесс φ_0 характеризуется определенной функциональной зависимостью F между некоторой совокупностью параметров P_1, P_2, …, P_j, ..., $P_п$. Эта функциональная зависимость φ_0 = F (P_1, …, P_j, ..., $P_п$) может быть отображена графически в соответствующем n-мерном координатном пространстве x_1,… x_j… x_n, в котором участвующие в процессе φ_0 параметры (P_1, …, P_j, ..., $P_п$ соотнесены с соответствующими координатными осями x_1,… x_j… x_n, (в частном случае, когда одним из участвующих в процессе параметров P_j- является время t, ось координат X) = t). Аналогично в том же координатном пространстве может быть отображен процесс Φ_o = F (R_1, …, R_j, ..., $R_п$), характеризуемый сходственными с φ_0 параметрами. Если при этом все сходственные параметры (пространственные координаты) пропорциональны, т. е. если

$$P_1/R_1 = m_1, \ldots\ldots\ P_j/R_j = m_j, \ldots\ldots\ldots\ P_n/R_n = m_n,$$

то процессы φ_0 и Фо подобны.

Однако не все масштабные коэффициенты m_1 ...,m_j, ..., m_n физического процесса могут принимать независимые значения вследствие того, что взаимозависимы определенные значения параметров, характеризующих конкретный физический процесс (при произвольном выборе, например, сопротивления некоторого активного элемента и напряжения на нем ток, проходящий через этот элемент, и мощность, потребляемая им, имеют определенные значения). Это предопределяет возможность введения некоторых обобщенных характеристик подобных процессов, являющихся функциями групп зависимых и независимых параметров, — критериев подобия; в отличие от масштабных коэффициентов, в общем случае численно различных для определенных групп сопоставляемых подобных процессов, критерии подобия принимают одинаковые значения для всех подобных процессов в сходственных точках обобщенного пространства параметров $x_1,\ldots x_j\ldots x_n$.

Пропорциональность параметров — частный случай подобия физических процессов. В общем случае процессы будут подобны, если существует некоторое соответствие сходственных величин сопоставляемых систем: положений точек, геометрических размеров, параметров систем и параметров процессов. Поэтому и понятия сходственных точек и сходственных величин, известные из геометрии, значительно сложнее в теории подобия физических явлений: сходственными точками пространства, времени и параметров процесса будут такие величины, при которых их значениям в одной системе так или иначе соответствуют значения в другой системе.

Соответствие между сходственными величинами может устанавливаться и при переменных масштабах (например, зависящих от какого-либо параметра процесса) — это будут особые виды подобия: нелинейное, функциональное и т. д.

В связи с этим в общем случае под подобием понимается такое взаимооднозначное соответствие между сопоставляемыми объектами (процессами), при котором функции или правила перехода от параметров, характеризующих в том или ином смысле один из объектов, к параметрам, в том же смысле характеризующим другой объект, известны, а математические описания (если они имеются или потенциально могут быть получены) допускают их преобразование к тождественному виду.

2. Виды подобия. Дифференциация видов подобия осуществляется главным образом по двум основным признакам: по степени соответствия параметров оригинала и модели (абсолютное подобие и неабсолютное или практическое подобие, которое может быть полным, неполным и приближенным) и по адекватности физической природы подобных явлений (математическое подобие и физическое подобие, которое может быть механическим, тепловым, электрическим и т. п.); возможны также и иные варианты дифференциации видов подобия.

А бсолютное подобие характеризуется тем, что в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства параметры P_j процессов и элементов в одной системе находятся в определенном соответствии со сходственными параметрами R_j в другой системе, т. е.

$P_j/R_j = m_j$, j=1,2,3…n=1,n,

причем возможно $m_j, = const$, $m_j = var$, $m_j = F(Pj\text{-}r, Pj+k,\ldots)$ и т. д.

Таким образом, оригинал и модель будут абсолютно подобны, если существует полное соответствие геометрических размеров сопоставляемых систем и изменяющихся во времени и в пространстве величин, т. е. процессов, протекающих в этих системах.

При абсолютном подобии оригинал и модель должны быть структурно и физически идентичны; различны лишь значения параметров, характеризующих как собственно элементы, так и связи между ними. Сопоставляемые процессы описываются одинаковыми функциональными зависимостями, пропорционально различающимися значениями аргументов: на модели процесс воспроизводится без каких-либо искажений по отношению к процессу в оригинале и отличается от него лишь масштабом.

Следует подчеркнуть, что если из абсолютного физического подобия процессов следует идентичность описывающих их математических соотношений, то обратное утверждение в общем случае неверно: идентичность форм записи математических уравнений еще не означает подобия процессов, поскольку характер протекания процесса определяется не только видом функциональной зависимости между участвующими в нем параметрами, но и соотношениями их конкретных значений.

Абсолютное подобие, требующее, по сути дела, тождества явлений, на практике представляет собой в значительной мере абстрактное понятие: свойственное абсолютному подобию тождество явлений в пространстве и во времени, получаемое после изменения масштаба, реализуется только в геометрических построениях и отдельных видах математического подобия.

Реально исследователь, как правило, не имеет возможности оперировать со сходными во всех деталях явлениями при решении конкретных задач. Поэтому при применении теории подобия для решения технических задач возникает необходимость введения понятия практического подобия; различают полное, неполное и приближенное практическое подобие.

Полное подобие — это подобие протекания во времени и в пространстве только тех процессов, которые существенны для данного исследования и с достаточной полнотой характеризуют изучаемое явление применительно к конкретной постановке задачи исследования.

Неполное подобие — это подобие протекания процессов только во времени или только в пространстве.

Приближенное подобие характеризуется существованием упрощающих допущений, приводящих к различию процессов, принимаемых в качестве подобных, т. е. к таким искажениям одного из этих процессов, которые полагаются допустимыми на основании предварительных оценок, полученных при дополнительных исследованиях; приближенное подобие может быть как полным, так и неполным.

С точки зрения адекватности физической природы подобных явлений различают два основных вида подобия — физическое и математическое.

Физическое подобие достигается при одинаковой физической природе подобных явлений, оно может быть полным, неполным и приближенным.

Математическое подобие требует соответствия сходственных параметров сравниваемых процессов различной физической природы; математическое подобие может быть полным, неполным, приближенным.

По мере развития представлений об особенностях функционирования и закономерностях развития сложных систем различных категорий понятие подобия приобретает все более широкое содержание, охватывая объекты, явления и процессы, по обычным представлениям не подобные. В связи с этим вводится понятие особых видов подобия, к которым относятся квазиподобие, основанное на использовании переменных масштабных коэффициентов; эквивалентное подобие, устанавливающее подобие явлений, описанных не одинаковыми, а только в том или ином смысле эквивалентными уравнениями (эквивалентность может достигаться и искусственно путем нелинейно подобных преобразований); функциональное подобие, выявляемое с точки зрения выполнения сопоставляемыми объектами сходственных функций при соответствующих воздействиях; кибернетическое подобие, требующее подобной реакции подобных объектов на изменения внешней среды и подобной структуры управления посредством существенных для изучаемого явления обратных связей; интегральное и другие виды подобия.

Появление особых видов подобия тесно связано с развитием методологии моделирования и как научного понятия, и как прикладного средства исследования. При этом методы теории подобия начинают применяться не только для организации эксперимента, обработки и интерпретации его результатов, но и для повышения эффективности решения расчетно-вычислительных задач и задач управления.

3. Теория подобия. В общем случае теория подобия — это теория, дающая возможность установить наличие подобия или позволяющая разработать способы получения его. Соотношения между моделью и оригиналом, выявляемые теорией подобия, могут быть различными: в виде простых масштабных соотношений, показывающих, во сколько раз тот или иной элемент модели больше либо меньше соответствующего элемента оригинала (например, при геометрическом подобии); в виде сложных функциональных зависимостей групп параметров сопоставляемых объектов (например, критерии подобия, при определенных условиях численно одинаковые для всех подобных процессов). В ряде случаев такие зависимости могут и не иметь представлений в явной математической форме (например, при проверке действия лекарственного препарата, предназначенного для человека, на животных: последние в этом случае являются моделью оригинала, способной замещать его в данной конкретной постановке задачи исследования).

В задачи теории подобия входит широкий спектр проблем, связанных как с вопросами реализации технических средств моделирования, так и с вопросами обработки и интерпретации экспериментальной информации:

установление условий подобия; установление условий распространения результатов единичного расчетно-аналитического или физического эксперимента, выполненного при данных параметрах, на результаты других (не проводившихся) экспериментов; установление условий, при которых возможны обобщения экспериментальных и расчетных данных; определение технических характеристик моделирующих средств и т. д.

Необходимость постановки и решения проблемы обобщения конкретных расчетно-экспериментальных результатов, полученных при определенных значениях параметров конкретного процесса, на группу подобных ему процессов обусловлена следующим. Единичный эксперимент дает вполне определенный результат, который в ряде случаев удовлетворяет инженера при решении частной задачи. Однако при этом единичный эксперимент определяет поведение объекта именно в «единичных» условиях. В итоге кажущийся на первый взгляд достаточным результат (который нередко достигается в процессе длительной и кропотливой работы по организации и обеспечению расчетно-экспериментальных исследований, анализа и интерпретации полученных данных) фактически имеет небольшую практическую ценность. Единичный результат не расширяет представлений исследователя не только с научной, но и с чисто прагматической точки зрения обеспечения технико-экономической эффективности и информационной ценности выполненных исследований: он не указывает, что же будет происходить при изменениях параметров исследуемой системы или параметров ее режима. Необходимо провести большой объем исследований, чтобы выявить влияние различных факторов и их изменений, которые могут происходить в разнообразных сочетаниях, причем заранее неизвестно, как и в какой последовательности надо изменять эти факторы и какие их сочетания эквивалентны.

Во всяком инженерном или научном исследовании задача ставится следующим образом. Имеется некоторый объект изучения, в котором происходят интересующие исследователя явления. Каждое явление состоит из множества процессов, которые в зависимости от поставленной задачи можно с той или иной степенью приближения выделить для самостоятельного изучения, хотя, вообще говоря, они связаны между собой. Однако с полным правом из изучаемого объекта всегда можно выделить практически независимые процессы. Например, в дальней линии электропередачи инженер с полным основанием выделяет процессы, связанные с распространением электромагнитных волн в пространстве вдоль проводов, и тепловые процессы, связанные с нагреванием этих проводов. Делать совместные эксперименты (физические или расчетные) для одновременного изучения этих процессов было бы не только практически бессмысленно, но с инженерной точки зрения и неграмотно.

При проведении любого исследования предварительные знания об изучаемом объекте могут быть двух видов:

1) неполные знания, когда заранее известно только, в чем заключается интересующий процесс, какой параметр процесса или функция нескольких параметров (целевая функция) являются объектом исследования. Точно, или чаще предположительно, при этом устанавливается, от каких других параметров процесса и системы зависит интересующий параметр или целевая функция. Это предположение, по существу, означает, что исследователь уже каким-то путем получил некоторые знания о механизме изучаемого процесса. Эти знания в рассматриваемом случае находятся, однако, не на таком уровне, чтобы их можно было представить с необходимой исследователю полнотой с помощью каких-либо физических уравнений (дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных), описывающих математически с достаточной степенью достоверности исследуемый процесс;

2) полные знания, когда исследуемый процесс описан математически с помощью уравнений.

Исходным при описании физического процесса является дифференциальное уравнение, отражающее главные, т. е. интересующие исследователя информационные свойства объектов через свойства выявляемых этими уравнениями процессов. Успех составления таких уравнений, правильное и вместе с тем достаточно простое отражение в них главных свойств реального процесса почти полностью зависят от знаний и способностей исследователя.

Успех дальнейшего изучения процесса с помощью полученного дифференциального уравнения, т. е. успех проведения математического эксперимента, зависит, во-первых, от четкости и глубины понимания существа применяемой методики и, во-вторых, от умения учитывать логические, качественные предпосылки и допущения, входящие в виде связей между параметрами системы, процесса и их производными. Для того чтобы выяснить и глубоко понять эти связи, опять-таки необходимо рассмотрение не единичного уравнения, а класса уравнений данного типа.

Результаты любого конкретного эксперимента отражают индивидуальные особенности данного явления и не позволяют определить, какие из этих особенностей наиболее существенны для явления в целом и как их изменение отразится на его развитии.

Строго говоря, каждое конкретное явление и каждый конкретный процесс являются самостоятельными объектами изучения. Это приводит к органическим недостаткам, казалось бы, простых и ясных методов исследования, что, в свою очередь, вызывает затруднения, которые не всегда ощущаются практиками, но проявляются в том, что существенно тормозят создание новых процессов и новых аппаратов. Очевидно, было бы важно дополнить экспериментальные физические и математические исследования научно обоснованным методом обобщения единичного исследования.

Чтобы получить обобщенный подход и реализовать его (реализация производится теориями подобия и планирования эксперимента, т. е. теорией эксперимента), следует вспомнить, что и при установлении влияющих факторов без использования дифференциальных уравнений, и при составлении этих уравнений исследователь ориентируется на общие законы природы, которым придается форма, отвечающая специфическим особенностям исследуемого процесса.

Рассматривая эти процессы с точки зрения фундаментальных законов физики, естественно приходится отвлекаться от многих конкретных черт, присущих явлению и входящим в него процессам. Общие законы физики являются результатом широкого обобщения опытных данных. Приложение их к изучаемым процессам позволяет получить наиболее общие связи между существенными параметрами процесса. Именно по этой причине в дифференциальном уравнении, записанном в общем виде, не имеется каких-либо конкретных сведений об отдельных величинах, в него входящих. Параметры процесса и системы, входящие в состав уравнений, могут принимать различные значения, каждое из которых отвечает какому-то единичному процессу. Отсюда следует, что отдельное дифференциальное уравнение (или их система) является математической моделью класса процессов. Под классом в данном случае понимается вся совокупность процессов, характеризуемых их одинаковым внутренним механизмом. Соответственно этому при интегрировании любого дифференциального уравнения получается бесчисленное множество различных решений, удовлетворяющих этому уравнению. Чтобы получить из этого множества возможных решений одно частное, соответствующее определенному конкретному процессу, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся в исходном (общем) дифференциальном уравнении. Для этого надо знать все конкретные особенности данного процесса, выделяющие его из всего класса однородных процессов. Дифференциальное уравнение или его решение в совокупности с дополнительными условиями, называемыми условиями однозначности, определяют единичный процесс. Условия однозначности отражают особенности конкретного процесса, которые не зависят от механизма процесса, общего для всего класса процессов, и задаются в связи с условиями конкретной задачи.

Конкретный процесс характеризуется индивидуальными признаками, выделяющими его из класса процессов, и происходит в системе, обладающей определенными физическими свойствами; поэтому для описания его необходимо знать все параметры системы (ее физические, материальные характеристики), существенные для рассмотрения. Конкретный процесс существует и развивается во времени и в пространстве. Для определения состояния системы в некоторый момент времени необходимо знать ее состояние в предшествующий момент, принимаемый за начальный, поэтому условия однозначности должны включать в себя временные и пространственные характеристики системы в начальный момент времени (в ряде случаев может изучаться развитие процесса или только во времени, или только в пространстве).

Изучаемая система всегда в той или иной мере взаимодействует с окружающей средой. Часто это взаимодействие и является причиной возникновения исследуемого процесса или особенностей его протекания, поэтому, для того чтобы характеризовать полностью изучаемый процесс, необходимо знать условия на тех границах, где система соприкасается со средой — граничные условия. Переход от класса явлений к единичному явлению осуществляется присоединением к дифференциальному уравнению условий однозначности. Тем самым из бесчисленного множества явлений данного класса, например распространения энергии в линии электропередачи, выделяется одно конкретное явление, из которого, в свою очередь, выделяются конкретные процессы. Распространить результаты единичного опыта на все процессы класса невозможно, так как внутри любого класса имеются процессы, весьма не схожие. Поэтому вводится понятие группы явлений (более узкое понятие, чем понятие класса, но более широкое, чем понятие единичного явления).

4. Основные положения теории подобия. Основные положения теории подобия (теоремы подобия и дополнительные положения к ним) определяют свойства подобных объектов исследования (систем, процессов, явлений) и указывают требования, при удовлетворении которых один из объектов может рассматриваться как модель (оригинал) по отношению к остальным.

Основной характеристикой подобных объектов являются критерии подобия, с помощью которых устанавливаются закономерности взаимооднозначного соответствия модели и оригинала. В наиболее широко распространенном случае критерии подобия — это идентичные по форме алгебраической записи и равные численно для подобных объектов безразмерные степенные комплексы (произведения или отношения) определенных групп параметров, характеризующих эти объекты. Критерии подобия могут быть установлены и в тех случаях, когда математическое описание объекта исследования известно и когда такое описание отсутствует.

Первая теорема подоби.: явления, подобные в том или ином смысле (полно, приближенно, физически, математически и т. д.), имеют определенные сочетания параметров, называемые критериями подобия, численно одинаковые для подобных явлений. Первая теорема подобия называется также теоремой Ньютона пли Ньютона—Бертрана.

Вторая теорема подобия. В основной формулировке эта теорема, чаще встречающаяся под названием π-теоремы, имеет следующий вид: всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено функциональной зависимостью между критериями подобия, полученными из участвующих в процессе параметров.

Третья теорема подобия. В наиболее распространенной формулировке третья теорема имеет следующий вид: необходимыми и достаточными условиями для создания подобия являются пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия сопоставляемых явлений. Третья теорема подобия именуется также обратной теоремой подобия или теоремой Кирпичева—Гухмана.

Дополнительные положения теории подобия. Эти положения распространяют три основные теоремы подобия на системы сложные, системы с нелинейными или переменными параметрами, анизотропные системы (с различными свойствами по различным координатам) и системы, заданные вероятностно-статистическими характеристиками; этими же положениями охватываются геометрически неподобные системы, а также системы, для которых понятие подобия интерпретируется шире, чем постоянство масштабных коэффициентов в сходственных точках пространства параметров в сходственные моменты времени.

В общем случае дополнительные положения теории подобия формулируются следующим образом:

—подобие сложных геометрически подобных и изотропных систем с детерминировано- определенными линейными или постоянными параметрами, образованных несколькими соответственно подобными по отдельности подсистемами, обеспечивается, если выполняется дополнительное условие подобия всех сходственных элементов, являющихся общими для этих подсистем;

—условия подобия сложных геометрически подобных и изотропных систем с детерминированно определенными линейными и постоянными параметрами могут быть распространены на сложные системы с нелинейными или переменными параметрами, заданными детерминированно, если выполняется дополнительное условие совпадения относительных характеристик сходственных параметров, являющихся нелинейными или переменными;

—условия подобия детерминированно определенных геометрически подобных изотропных сложных систем могут быть распространены на анизотропные геометрически подобные сложные системы, заданные детерминированно, если выполняется дополнительное условие обеспечения одинаковой относительной анизотропии в сопоставляемых системах;

—условия подобия детерминированно определенных геометрически подобных анизотропных сложных систем с переменными или нелинейными параметрами могут быть распространены на геометрически неподобные сложные системы с детерминированно определенными параметрами, если выполняется дополнительное условие обеспечения такого нелинейного подобия пространства параметров, при котором существуют подобные изменения параметров процесса в сходственных точках этого пространства;

—условия подобия сложных геометрически неподобных анизотропных систем с детерминированно определенными нелинейными или переменными параметрами могут быть распространены на системы с вероятностно (статистически) определенными параметрами, если выполняются дополнительные условия совпадения плотностей вероятностей сходственных параметров и пропорциональности их статистических моментов, степени масштабных коэффициентов при которых совпадают с порядками соответствующих моментов.

ТЕМА 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ
(2 часа)

1. Основные подходы к построению математических моделей систем.
2. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)
3. Дискретно-детерминированные модели (F-схемы)
4. Дискретно-стохастические модели (P-схемы)
5. Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы)
6. Сетевые модели (N-схемы)
7. Комбинированные модели (A-схемы)

Математическая схема – звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействий внешней среды, т.е. имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема - математическая модель».

Модель объекта моделирования, т. е. системы S, можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

совокупность *входных воздействий* на систему

$x_i \in X$, $i=\overline{1,n_x}$

совокупность *воздействий внешней среды*

$v_l \in V$, $l=\overline{1,n_v}$

совокупность *внутренних (собственных) параметров* системы

$h_k \in H$, $k=\overline{1,n_H}$

совокупность *выходных характеристик* системы

$y_j \in Y$, $j=\overline{1, n_Y}$

В практике моделирования объектов в области системотехники и системного анализа на первоначальных этапах исследования системы рациональнее использовать *типовые математические схемы:* дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания, сети Петри и т. д.

При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно-детерминированный (например, дифференциальные уравнения); дискретно-детерминированный (конечные автоматы); дискретно-стохастический (вероятностные автоматы); непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания); обобщенный, или универсальный (агрегативные системы).

В D-схемах в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время. *F-схема* характеризуется шестью элементами: конечным множеством *X* входных сигналов (входным алфавитом); конечным множеством *Y* выходных сигналов (выходным алфавитом); конечным множеством Z внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний); начальным состоянием z_0, *z*; функцией переходов *(p (z, x);* функцией выходов φ*(z, x)*. *P*-автомат можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически. Особенности непрерывно-стохастического подхода рассмотрен на примере использования в качестве типовых математических схем *систем массового обслуживания*, называемые *Q-схемами*. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для оптимизации процессов функционирования систем, которые по и сути являются процессами обслуживания. Сеть Петри

(N-схема) задается четверкой вида N=<B,D,I,O>, где *B* — конечное множество символов, называемых позициями, *D* — конечное множество символов, называемых переходами, *I* — входная функция (прямая функция инцидентности), *O* — выходная функция (обратная функция инцидентности). Таким образом, входная функция I отображает переход *dj* в множество входных позиций b_iЄ *I(dj)*, а выходная функция *O* отображает переход *dj* в множество входных позиций *biЄD(dj)*. Анализ существующих средств моделирования систем и задач, решаемых с помощью метода моделирования на ЭВМ, неизбежно приводит к выводу, что комплексное решение проблем, возникающих в процессе создания и машинной реализации модели, возможно лишь в случае, если моделирующие схемы имеют в своей основе единую формальную математическую схему, т. е. *А-схему*. Такая схема должна одновременно выполнять несколько функций: являться адекватным математическим описанием объекта моделирования, т. е. системы *S*, служить основой для построения алгоритмов и программ при машинной реализации модели *М*, позволять в упрощенном варианте (для части случаев) проводить аналитические исследования.

ТЕМА 4.
СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
(2 часа)

1. Общая характеристика метода статистического моделирования
2. Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации
3. Проверка и улучшение качества последовательностей псевдослучайных чисел
4. Моделирование случайных воздействий на системы

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Различают две области применения метода статистического моделирования: 1) для изучения стохастических систем; 2) для решения детерминированных задач.

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Поэтому необходимы простые и экономичные способы формирования последовательности случайных чисел. На практике используются 3 основных способа генерации случайных чисел: аппаратный (физический), табличный (файловый) и алгоритмический (программный).

Результаты анализа системы S, полученные методом статистического моделирования на ЭВМ, существенно зависят от качества используемых псевдослучайных последовательностей чисел. Поэтому все генераторы перед моделированием системы должны пройти предварительное тестирование, которое представляет комплекс проверок по различным статистическим критериям, включая в качестве основной проверки тесты на равномерность, стохастичность и независимость.

ТЕМА 5.
ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ
(4 часа)

1. Общая характеристика имитационного моделирования
2. Элементы имитационных моделей
3. Базовый алгоритм моделирования
4. Варианты моделей обслуживания заявок
5. Методы генерации случайных чисел
6. Эксперименты над моделями

При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени и пространстве, причем имитируются составляющие процесс элементарные явления с сохранением его логической и временной структуры.

Имитационная модель образуется взаимодействием следующих элементов:

1. Состояние системы должно быть определено со степенью детальности, необходимой и достаточной для вероятностного продолжения процесса моделирования (процесс должен быть сведен к марковскому).

2. Под событием модели понимается скачкообразное изменение ее состояния. События могут быть первичными (прибытие заявки, завершение обслуживания) и вторичными (по отношению к прибытию — прием заявки на обслуживание, продвижение очереди и т. п.), которые наступают как следствие первичных.

3. С помощью датчиков случайных чисел (ДСЧ) в модели формируются ее очередные состояния (моменты наступления следующих первичных событий каждого вида, объемы спроса на запасные части и т. д.). Случайные величины генерируются в соответствии с заданными распределениями.

4. Имитируемый процесс развивается в модельном (системном) времени. Счетчик модельного времени называется таймером.

5. Логика модели реализуется в процессе обработки цепей событий. В цепи текущих событий ЦТС находятся события, которые наступают в один момент модельного времени (уход из системы обслуженной заявки, продвижение очереди, выборка на обслуживание головной заявки очереди, формирование для нее момента завершения обслуживания). Ясно, что последовательность их обработки должна быть строго определенной. В цепи будущих событий ЦБС находятся события, запланированные посредством ДСЧ на последующие моменты системного времени (завершение обслуживания в других каналах, прибытие очередных заявок различных типов, поломка обслуживающего устройства, восстановление ранее отказавшего, уход из канала либо очереди нетерпеливой заявки и т. п.). В цепи задержанных событий находятся события, развитие которых заблокировано

сложившимися в системе на данный момент модельного времени условиями (например, занятостью необходимых ресурсов). Могут использоваться и другие цепи событий.

6. Под инициализацией понимается приведение модели до начала прогона в исходное состояние. Простейший аспект инициализации — обнуление всех накапливающих счетчиков. Для обеспечения воспроизводимости результатов может потребоваться установка в исходное состояние генераторов псевдослучайных чисел.

7. Цель моделирования при построении модели трактуется в узком смысле — как определение показателей качества функционирования системы. Выбор цели существенно влияет на структуру модели через счетчики, необходимые для накопления результатов моделирования (например, для подсчета среднего времени ожидания начала обслуживания нужно иметь счетчики суммарного времени ожидания и количества выбранных на обслуживание заявок).

8. Критерии останова определяет момент прекращения прогона модели. В простейшем случае прогон прекращается по достижению заданного значения таймера, счетчика числа обслуженных заявок и т. п. Однако правильнее управлять прогоном по достижению заданной точности одного из определяемых показателей. Обоснованный выбор правила остановки моделирования нетривиален, так как на этапе планирования эксперимента ни оценка определяемой величины, ни тем более ее дисперсия как правило не известны.

ТЕМА 6.
ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
(4 часа)

1. Основные компоненты моделей массового обслуживания
2. СМО при наличии входного и выходного потоков; СМО с приоритетами
3. Анализ очередей
4. Принятие решений с использованием моделей массового обслуживания

Основными элементами, связанными с массовым обслуживанием любого вида, являются заявка на обслуживание и механизм обслуживания. В теории МО оперируют понятиями распределения моментов поступления требований и распределения времени обслуживания требований. Эти распределения вероятностей могут моделировать ситуации, когда требования поступают индивидуально и когда поступают (и обслуживаются) группами. Системы такого рода называют системами с параллельно-групповым обслуживанием.

Необходимо учитывать принцип, в соответствии с которым поступающие на вход требования подключаются к процедуре обслуживания. Этот принцип называется дисциплиной очереди. Существуют правила FIFO (первым пришел - первым обслужился) и LIFO (последним пришел – первым обслужился).

В моделях массового обслуживания с приоритетами предполагается, что у входа в блок обслуживания формируется несколько очередей, в каждой из которых требования имеют определенный уровень «относительного предпочтения». Если перед узлом обслуживания образуется m очередей, то принято считать, что очередь 1 обладает наивысшим приоритетом, а очередь m характеризуется самым низким приоритетом заявок на обслуживание. Частота поступлений и продолжительности обслуживания требований с различными приоритетами могут быть неодинаковыми. Обслуживание при наличии приоритетов может осуществляться в соответствии с одним из следующих правил.

(1) Правило прерывания, когда уже начатое обслуживание клиента прерывается при поступлении клиента с более высоким приоритетом (при этом более приоритетная заявка сразу же принимается к исполнению).

(2) Правило без прерывания, когда уже начатая процедура обслуживания доводится до конца, даже если во время ее реализации в систему поступает требование с более высоким приоритетом.

Стоимостные модели массового обслуживания направлены на определение такого уровня функционирования обслуживающей системы (который идентифицируется заданием либо скорости обслуживания, либо числа обслуживающих приборов), при котором достигается «компромисс» между следующими двумя экономическими показателями:

1) прибылью, получаемой за счет предоставления услуг;

2) потерями прибыли, обусловленными задержками в предоставлении услуг.

Первый показатель ассоциируется со степенью функциональной активности системы массового обслуживания, тогда как второй — с пребыванием обслуживающей системы в состоянии простоя или с неспособностью системы удовлетворить все потребности в обслуживании. Увеличение функциональной мощности обслуживающей системы должно приводить к сокращению времени пребывания «клиентов» в очереди и наоборот. Это означает, что по мере того как затраты, связанные с обслуживанием, возрастают из-за повышения уровня обслуживания, выраженные в экономических терминах потери, связанные с ожиданием (пребыванием в очереди), должны уменьшаться. Оптимальный уровень обслуживания выбирается таким образом, чтобы значение суммы рассматриваемых показателей было минимальным. Оба стоимостных показателя отнесены к одной и той же единице времени, поскольку в противном случае модель оказалась бы «некорректной» с точки зрения требования сохранения размерности показателей.

Обозначения, которые представляются наиболее подходящими для систем массового обслуживания с параллельно «включенными» приборами, давно уже унифицированы и имеют следующую структуру:

$$(a/b/c) : (d/e/f),$$

где символы *a, b, c, d, e* и f ассоциированы с конкретными наиболее существенными элементами модельного представления процессов массового обслуживания и интерпретируются следующим образом

a — распределение" моментов поступлений заявок на обслуживание;

b — распределение времени обслуживания (или выбытий обслуженных клиентов);

c — число параллельно функционирующих узлов обслуживания (с=1, 2, ...,);

d — дисциплина очереди (FIFO, LIFO, СОЗ);

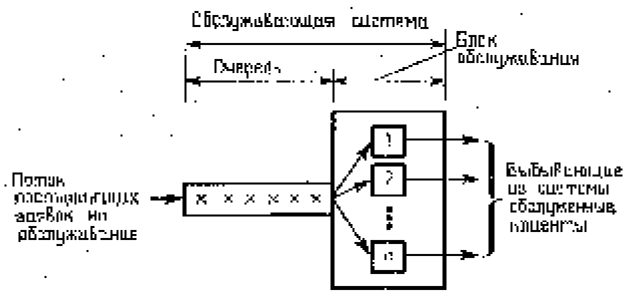


Рис. 15.1.

e — максимальное число допускаемых *в систему* требований (число требований в очереди+число требований, принятых на обслуживание);

f — емкость источника, генерирующего заявки на обслуживание.

Для конкретизации *а* и *Ь* приняты следующие стандартные обозначения:

М — пуассоновское (или марковское) распределение моментов поступлений заявок на обслуживание или выбытий из системы обслуженных клиентов (или экспоненциальное распределение интервалов времени между моментами последовательных поступлений или продолжительностей обслуживания клиентов);

D — фиксированный (детерминированный) интервал времени между моментами последовательных поступлений в систему заявок на обслуживание или детерминированная (фиксированная) продолжительность обслуживания;

E_k—распределение Эрланга или гамма-распределение интервалов времени между моментами последовательных поступлений требований в обслуживающую систему или продолжительностей обслуживания (при этом под k понимается параметр распределения);

GI — распределение произвольного вида моментов поступления в систему заявок на обслуживание (или интервалов времени между последовательными поступлениями требований);

G - распределение произвольного вида моментов выбытия из системы обслуженных клиентов (или продолжительностей обслуживания).

Несмотря на то что основные соотношения, формирующие различные модели массового обслуживания, можно использовать и для исследования переходных (неустановившихся) процессов, мы сконцентрируем внимание на анализе стационарных процессов и интерпретации результатов, получаемых в предположении, что условия стационарности выполняются. Это оправдывается тем, что на практике системы массового обслуживания обычно предназначаются для работы в течение весьма длительного времени. Вместе с тем следует подчеркнуть, что анализ неустановившихся стохастических процессов связан с серьезными математическими трудностями, и попытка заняться исследованием процессов такого рода увела бы слишком далеко от интересующих нас вопросов.

При выполнении условий *стационарности* нас будут интересовать следующие операционные характеристики систем массового обслуживания:

p_n — вероятность того, что в *системе* находится n клиентов (заявок на обслуживание);

L_s — среднее число находящихся в *системе* клиентов (заявок на обслуживание);

L_q — среднее число клиентов в *очереди* на обслуживание;

W_s — средняя продолжительность пребывания клиента (заявки на обслуживание) в системе;

W' — средняя продолжительность пребывания клиента (заявки на обслуживание) в *очереди*.

ТЕМА 7.
ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ
(2 часа)

1. Основы систематизации языков имитационного моделирования
2. Сравнительный анализ языков имитационного моделирования
3. Пакеты прикладных программ моделирования систем

4. Базы данных моделирования
5. Гибридные моделирующие комплексы

Алгоритмические языки при моделировании систем служат вспомогательным аппаратом разработки, машинной реализации и анализа характеристик моделей.

Язык моделирования представляет собой набор символов, распознаваемых ЭВМ и обозначающих операции, которые можно реализовать на ЭВМ. Целесообразность использования языков имитационного моделирования вытекает из 2 основных причин: 1) удобство программирования модели и 2) концептуальная направленность языка на класс систем. Языки моделирования используются при аналоговых, цифровых и гибридных моделях.

Языки имитационного моделирования можно разбить на 3 основные группы: непрерывные, дискретные и комбинированные. Непрерывное представление системы сводится к составлению уравнений, с помощью которых устанавливается связь между эндогенными и экзогенными переменными. Языки имитационного моделирования для комбинированной системы описывают ее набором переменных, некоторые из которых меняются во времени непрерывно. В рамках дискретного подхода выделяют 3 группы ЯИМ. Первая группа подразумевает наличие списка событий, отличающих моменты начала выполнения операций. В ЯИМ второй группы просмотр действий с целью проверки выполнения условий начала и окончания действий производится непрерывно. Третья группа ЯИМ описывает системы, поведение которых определяется процессами.

При создании прикладных программ моделирования (ППМ) существенно место занимают работы по соответствующему системному обеспечению. Быстрота и удобство решения задач моделирования достигается сочетанием в единой архитектуре функционального наполнения, состоящего из модулей и покрывающего предметную область моделирования, и специализированных средств системного обеспечения, позволяющих реализовать различные задания и обеспечивающих пользователя разнообразным сервисом.

ТЕМА 8.
ФОРМИЛИЗАЦИЯ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ
(2 часа)

1. Методика разработки и машинной реализации моделей систем
2. Построение концептуальных моделей систем и их формализация
3. Алгоритмизация моделей систем и их машинная реализация
4. Получение и интерпретация результатов моделирования систем

Сущность машинного моделирования системы состоит в проведении на ЭВМ эксперимента с моделью, которая представляет собой некоторый программный комплекс, описывающий формально или алгоритмически поведение элементов системы S в процессе ее функционирования, т.е. в их взаимодействии друг с другом и внешней средой E.

На первом этапе машинного моделирования – построения концептуальной модели M_x системы S – формулируется модель и строится ее формальная схема, т.е. основным назначением этого этапа является переход от содержательного описания объекта к его математической модели, т.е. процесс формализации.

На втором этапе моделирования – этапе алгоритмизации модели и ее машинной реализации – математическая модель, сформулированная на первом этапе, воплощается в конкретную машинную модель. Этот этап представляет собой этап практической деятельности, направленной на реализацию идей и математических схем в виде машинной модели $M_м$ процесса функционирования системы S.

На третьем этапе моделирования – тапе получения и интерпретации результатов моделирования – ЭВМ используется для проведения рабочих расчетов по составленной и отлаженной программе. Результаты этих расчетов позволяют проанализировать и сформулировать выводы о характеристиках процесса функционирования моделируемой системы S.

ТЕМА 9.
ПЛАНИРОВАНИЕ МАШИННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С МОДЕЛЯМИ СИСТЕМ
(2 часа)

1. Методы теории планирования эксперимента
2. Стратегическое планирование машинных экспериментов с моделями систем
3. Тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем

Машинный эксперимент с моделью системы S при ее использовании и проектировании проводится с целью получения информации о характеристиках процесса функционирования рассматриваемого объекта. Эффективность машинных экспериментов с моделями существенно зависит от выбора плана эксперимента, т.к. именно план определяет объем и порядок проведения вычислений, приемы накопления и обработки результатов моделирования. Основная задача планирования машинных экспериментов: получить информацию об объекте моделирования, заданном в виде моделирующего алгоритма, при минимальных затратах машинных ресурсов на реализацию процесса моделирования.

При планировании экспериментов необходимо определить основные свойства факторов. Факторы могут быть управляемыми и неуправляемыми, наблюдаемыми и ненаблюдаемыми, изучаемыми и неизучаемыми, количественными и качественными, фиксированными и случайными.

Стратегическое планирование ставит своей целью решение задачи получения необходимой информации о системе S с помощью модели M, реализованной на ЭВМ, с учетом ограничений на ресурсы, имеющиеся в распоряжении экспериментатора.

Можно выделить следующие этапы стратегического планирования: 1) построение структурной модели; 2) построение функциональной модели.

Тактическое планирование представляет собой определение способа проведения каждой серии испытаний машинной модели М, предусмотренных планом эксперимента.

ТЕМА 11.
ДОСТОВЕРНОСТЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Условия получения подобия моделей
2. Точность воспроизведения критериев подобия
3. Погрешности воспроизведения отдельных параметров, входящих в критерии подобия
4. Применение подобия и моделирования в некоторых особых случаях

Требования, предъявляемые к точности результатов исследований, проводимых с помощью моделей, различны в зависимости от поставленных задач и характера исследований. Проектные разработки, а также оценки сопоставляемых вариантов не требуют высокой точности результатов. Однако точность результатов имеет большое значение, если исследования проводятся применительно к конкретной схеме, а полученные результаты необходимо распространить на оригинал.

Параметры, входящие в тот или иной критерий подобия, оказывают различное влияние на результат исследования в зависимости от характера изучаемого явления. В одном случае точность воспроизведения критерия оказывает решающее влияние на характер изучаемого процесса; в другом случае упомянутый критерий может воспроизводить приближенно без ущерба для точности получаемого результата; в третьем случае параметры, входящие в критерий, могут не моделироваться, так как данный критерий не будет оказывать никакого влияния на протекание изучаемого процесса. Поэтому для установления у:ловий подобия и осуществления моделирования при решении инженерных задач существенной оказывается не вся совокупность процессов, связанных с данным явлением, а только основные процессы аппарата, машины и т. д. Всякое подобие сложного комплексного явления, существенное в технических задачах, всегда в какой-то степени приближенно. Случаи, когда при установлении подобия основных процессов комплексного явления принимаются какие-либо допущения, заведомо приводящие к некоторым неточностям в воспроизведении имен-этих основных процессов, должны рассматриваться как случаи приближенного подобия.

Первоначально на основе статистического анализа критериальных отношений получаем критериальное уравнение регрессии и с помощью стандартизированных коэффициентов регрессии этого уравнения устанавливаем степень влияния отклонения значения каждого критерия подобия на исследуемый процесс. Полученная информация позволяет объективно решить вопрос о необходимой точности воспроизведения критериев подобия, соответствующей их степени влияния на исследуемый процесс.

ТЕМА 12.
ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИ СИСТЕМ
(2 часа)

1. Особенности фиксации и статистической обработки результатов моделирования систем
2. Анализ и интерпретация результатов машинного моделирования
3. Обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем

При исследовании сложных систем при большом числе реализаций N в результате моделирования на ЭВМ получается значительный объем информации о состояниях процесса функционирования системы. Поэтому необходимо так организовать в процессе вычислений фиксацию и обработку результатов моделирования, чтобы оценки для искомых характеристик формировались постепенно по ходу модулирования, т.е. без специального запоминания всей информации о состояниях процесса функционирования системы S. Если при моделировании процесса функционирования конкретной системы S учитываются случайные факторы, то и среди результатов моделирования присутствуют случайные величины. В качестве оценок для искомых характеристик рассчитывают средние значения, дисперсии, корреляционные моменты и т.д.

При обработке результатов машинного эксперимента с моделью наиболее часто возникают следующие задачи: определение эмпирического закона распределения случайной величины, проверка однородности распределений, сравнение средних значений и дисперсий переменных, полученных в результате моделирования и т.д.

С помощью корреляционного анализа исследователь может установить, насколько тесна связь между двумя и более случайными величинами, наблюдаемыми и фиксируемыми при моделировании конкретной системы S. Для решения задачи сравнения средних выборок используется дисперсионный анализ.

При синтезе оптимального варианта системы S особенно важно минимизировать затраты ресурсов на получение в результате моделирования характеристик каждого варианта системы.

ТЕМА 13.
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТИПОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СХЕМ
(4 часа)

1. Иерархические модели процессов функционирования систем
2. Моделирование процессов функционирования систем на базе Q-схем
3. Моделирование процессов функционирования систем на базе N-схем
4. Моделирование процессов функционирования систем на базе A-схем

Машинную модель $M_м$ системы S рассматривается как совокупность блоков, каждый из которых можно охарактеризовать конечным набором возможных состояний $\{z_0\}$, в которых он может находиться. Построение моделирующего алгоритма по блочному принципу позволяет за счет организации программных модулей уменьшить затраты времени на моделирование системы S, так как машинное время тратится на просмотр повторяющихся ситуаций. Данная схема получается проще, чем в случае, когда модули не выделяются.

Формализуя какую-либо реальную систему с помощью Q-схемы, необходимо построить структуру такой системы. В качестве элементов структуры рассматриваются элементы 3 типов: И – источники, Н – накопители, К – каналы обслуживания заявок. При имитации процесса функционирования Q-схемы на ЭВМ требуется организовать массив состояний, в котором должны быть выделены: подмассив К для текущих значений z соответствующих каналов К и времени окончания обслуживания очередной заявки t, подмассив Н для записи текущего состояния z соответствующих накопителей, подмассив И, в который записывается время поступления очередной заявки t из источника.

Характерной особенностью N-схем является то, что с их помощью можно моделировать процессы в системах S, в которых происходит последовательная смена дискретных состояний, в том числе если эта смена происходит при выполнении разнообразных условий. Таким образом, с использованием N-схем могут быть описаны системы, относящиеся к разным классам: аппаратные, физические, программные, экономические и т.д. В N-схемах два или несколько невзаимодействующих событий могут происходить независимо друг от друга, т.е. этим схемам свойствен параллелизм. Внутри N-схемы отсутствует измерение времени. Моделируемое таким образом событие называется примитивным.

Основные преимущества агрегативного подхода состоят в том, что в руки разработчиков моделей и пользователей дается одна и та же формальная схема, т.е. А-схема. Это позволяет использовать результаты математических исследований процессов, описывающих функционирование агрегативных схем, при создании моделирующих алгоритмов и их программной реализации на ЭВМ. Т.о. имеется возможность многовариантного представления процесса функционирования некоторой системы S в виде модели M, построенной на основе A-схем.

ТЕМА 14.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ
(2 часа)

1. Гносеологические и информационные модели при управлении
2. Модели в адаптивных системах управления
3. Моделирование в системах управления в реальном масштабе времени

Развитие работ по формализации процессов и построению их моделей преследует 2 цели: изучение сложных процессов функционирования различных объектов и применение их в контуре управления объектами. Невозможность ограничиться только одной универсальной моделью связана с тем, что с одной стороны перед этими моделями ставятся различные цели. А с другой стороны они описывают процессы, протекающие в различных масштабах времени. Модели первого типа имеют в основном гносеологический характер и называются эволюционными. Модели второго типа носят информационный характер и называются десиженсными.

Адаптацией называется процесс изменения структуры, алгоритмов и параметров системы на основе информации, получаемой в процессе управления с целью достижения оптимального состояния или поведения системы при начальной неопределенности и изменяющихся условиях работы системы во взаимодействии с внешней средой. Выделяются 2 направления в теории и практике построения адаптивных систем управления – создание систем с эталонной моделью и с идентификацией объекта управления.

Использование моделирования при принятии решений в системе управления в реальном масштабе времени выдвигает на первое место задачу выполнения ограничения на ресурс времени моделирования процесса функционирования системы.

ТЕМА 15
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ
(2 часа)

1. Общие правила построения и способы реализации моделей систем
2. Моделирование при разработке распределенных автоматизированных систем и информационных сетей
3. Моделирование при разработке организационных и производственных систем

На первом этапе моделирования формулируется модель, строится ее формальная схема и решается вопрос об эффективности и целесообразности моделирования системы на вычислительной машине. На втором этапе математическая модель воплощается в машинную, т.е. решается проблема алгоритмизации модели, ее рационального разбиения на блоки и организации интерфейса между ними, а также задача получения необходимой точности и достоверности результатов при проведении экспериментов. На третьем этапе ЭВМ используется для имитации процесса функционирования системы, для сбора необходимой информации, ее статистической обработки и интерпретации результатов моделирования.

Рассматривая АСОИУ с точки зрения технологии принятия решений можно выделить функциональную систему управления, состоящую из обеспечивающих подсистем. Принято выделять информационное, техническое, программное, математическое и организационное обеспечение.

ТЕМА 16.
АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
(4 часа)

1. Теоретические основы линейного программирования
2. Алгебраический метод
3. Метод декомпозиции
4. Двойственность и анализ моделей на чувствительность
5. Транспортная модель
6. Сетевые модели

7. Методические указания к практическим (семинарским) занятиям.

Тема 1. Линейная оптимизационная модель.
Транспортная модель

1. Примеры линейных моделей.

Пример 1. Небольшая фабрика изготовляет два вида красок: для внутренних (I) и наружных (E) работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта — A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 т соответственно. Расходы A и B на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный запас, т
	краски E	краски I	
A	I	2	6
B	2	I	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки.
Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. долл для краски E, 2 тыс. долл для краски I.
Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построение математической модели

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи можно

начать с ответов на три следующие вопроса:
1. Для определения каких величин должна быть построена модель? Другими словами, как идентифицировать переменные (искомые величины) данной задачи?
2. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?
3. В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?
Конструктивный путь формулировки ответов на поставленные вопросы состоит в том, чтобы словесно выразить суть проблемы. Рассматриваемую ситуацию можно охарактеризовать следующим образом.
Фирме требуется определить объемы производства (в тоннах) каждой из красок, максимизирующие доход (в тысячах долларов) от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.
Итак, математическую модель можно записать следующим образом. Определить суточные объемы производства (X_E и X_I) краски I и краски E (в тоннах), при которых достигается

$$\max z = 3X_E + 2X_I$$

при

$$X_E + 2X_I <= 6$$
$$2X_E + X_I <= 8$$
$$X_I – X_E <= 1$$
$$X_I <= 2$$
$$X_E >= 0$$
$$X_I >= 0$$

Первый шаг при использовании графического метода заключается в геометрическом представлении допустимых решений, т. е. построении области (допустимых) решений, в которой одновременно удовлетворяются все ограничения модели. Условия неотрицательности переменных X_E и X_I ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом (часть плоскости, расположенную над осью X_E и правее оси X_I). Другие границы пространства решений изображены на плоскости прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака <= на знак = в остальных ограничениях. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Полученное таким образом пространство решений — многоугольник ABCDEF
Пространство решений содержит бесконечное число точек, где выполняются ограничения, но можно найти оптимальное решение, если выяснить, в каком направлении возрастает целевая функция $z= 3X_E + 2X_I$
На график наносят ряд параллельных линий, соответствующих уравнению целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях z, что позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит ее увеличение (т. е. возрастание общего дохода). На рис. 2 были использованы следующие значения целевой функции: z=6 и z=9.

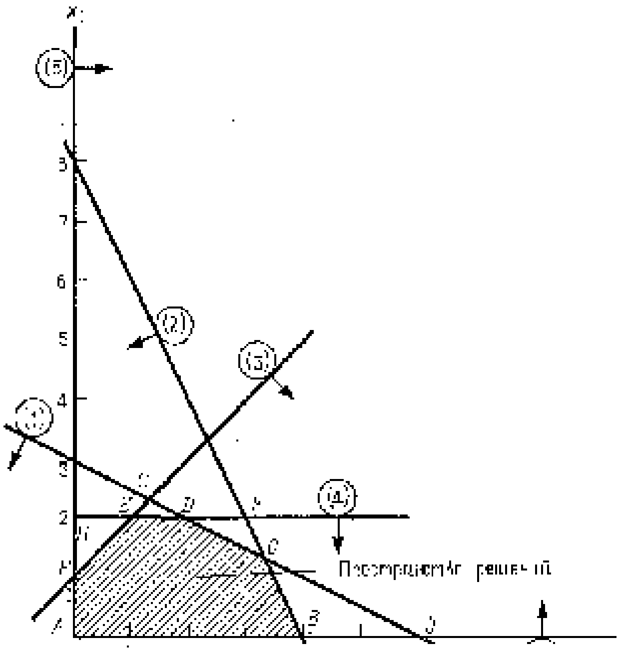


Рис. 1.

Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую, характеризующую доход, в направлении возрастания целевой функции до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых решений. На рис. 2 видно, что оптимальному решению соответствует точка С. Так как точка С является точкой пересечения прямых (1) и (2), значения X_E и X_I в этой точке определяются решением следующей системы двух уравнений:

$X_E + 2X_I = 6$

$2X_E + X_I = 8$

Решение указанной системы уравнений дает следующий результат: XE =3 1/3, XI =1 1/3. Полученное решение означает, что суточный объем производства краски Е должен быть равен 3 1/3 т, а краски I - 1 1/3 т. Доход, получаемый в этом случае, составит z=3*3 1/3 + 2* 1 1/3 = 12 2/3тыс. долл .

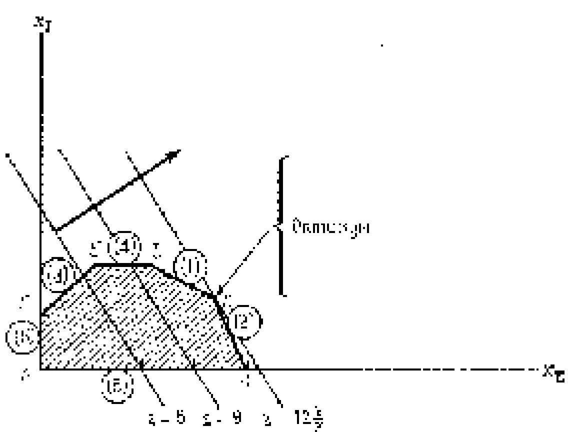


Рис. 2

Пример 2. (Задача об ассортименте продукции.) Фирма XYZ выпускает три вида продукции (изделий). В процессе производства используются три технологические операции. На рис. показана технологическая схема производства изделий видов 1, 2 и 3. При изготовлении изделия 2 технологическая операция 2 не выполняется, а при производстве изделия 3 используются только технологические операции 1 и 2. В прямоугольниках на рис.3

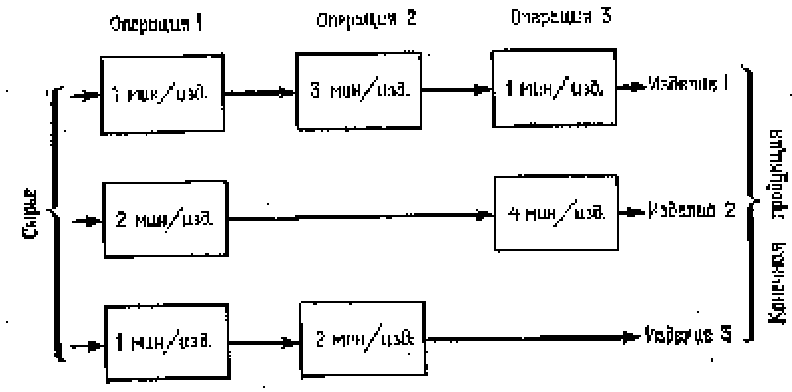


Рис.3

указана длительность технологических операций при изготовлении одного изделия каждого вида. Так как эти технологические операции используются фирмой и для других производственных целей, фонд рабочего времени, в течение которого операции 1, 2 и 3 могут быть применены для производства рассматриваемых изделий, ограничен следующими предельными значениями (в сутки);
для первой операции —430 мин,
для второй операции —460 мин,
для третьей операции —420 мин.
Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 долл. соответственно.
Каков наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции?

Задачи для решения у доски

1. (Задача составления кормовой смеси, или задача о диете.) Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки .поступают в продажу. Хотя недельный расход корма для цыплят зависит от их возраста, в дальнейшем будем считать, что в среднем (за 8 недель) он составляет 1 ед.
Для того чтобы цыплята достигли к восьмой неделе необходимых весовых кондиций, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. Обычно перечень ингредиентов достаточно широк, но для того, чтобы проиллюстрировать процесс построения модели, ограничимся только тремя ингредиентами: известняком, зерном и соевыми бобами. Требования к питательности рациона сформулируем также в упрощенном виде, учитывая только три вида питательных веществ: кальций, белок и клетчатку.

Ингредиент	Содержание питательных веществ, фунт/(фунт ингредиента)			Стоимость, долл. /фунт
	кальций	белок	клетчатку	
Известняк	0,38			0,04
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,50	0,08	0,40

В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Заметим, что известняк не содержит ни белка, ни клетчатки.
Смесь должна содержать:
1) не менее 0,8%, но не более 1,2% кальция;
2) не менее 22% белка;
3) не более 5% клетчатки.

Словесная формулировка задачи

Для птицеводческой фермы требуется определить *количество (в фунтах) каждого из трех ингредиентов* (переменные), образующих смесь *минимальной стоимости* (целевая функция) при *соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности* (ограничения).

2. (Сменно-суточное планирование работы автобусного парка.) Исследуются возможности более рациональной организации работы городского автобусного парка с целью снижения интенсивности внутригородского движения. На начальном этапе исследования было определено минимальное количество автобусов, которым можно удовлетворить существующую потребность в пассажирских перевозках. Сбор и обработка необходимой информации позволили сделать вывод, что минимальное количество автобусов, которым можно удовлетворить потребности в перевозках, существенно меняется в течение суток. При дальнейшем анализе было обнаружено, что требуемое количество автобусов можно считать величиной постоянной в пределах каждого из следующих; друг за другом четырехчасовых интервалов (рис.4). В результате проведенного исследования было решено, что с учетом необходимых затрат времени на текущий ремонт и обслуживание непрерывное использование автобусов на линии должно продолжаться только по 8 ч в сутки.

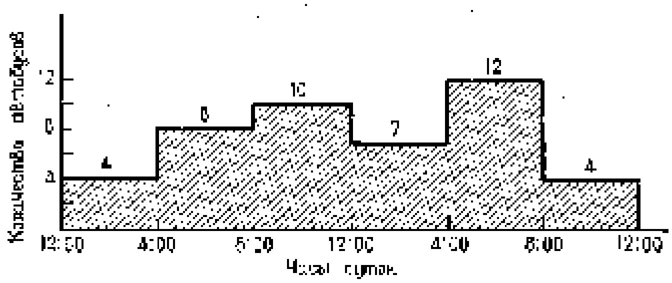


Рис.4.

Словесная формулировка задачи

Требуется определить количество автобусов в каждой из смен (переменные), которое должно быть не меньше минимальной потребности в них (ограничения), при условии что общее количество автобусов, выходящих на линию в течение суток, будет минимальным (целевая функция).

2. Транспортная модель.

Транспортная модель используется про разработке плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При построении модели используются:

1) величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте и спрос в каждом пункте назначения;
2) стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения.

Поскольку рассматривается только один вид продукции, потребности пункта назначения могут удовлетворяться за счет нескольких исходных пунктов. Цель построения модели состоит в определение количества продукции, которое следует перевезти из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения, с тем чтобы общие транспортные расходы были минимальными.

Основное предположение, используемое при построении модели состоит в том, что величина транспортных расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимой продукции Единицами измерения объема перевозимой продукции могут быть, например, одна стальная балка, направляемая на строительстве моста, или грузовик. В любом случае единицы производства и потребления должны соответствовать принятым определениям единиц перевозимой продукции.

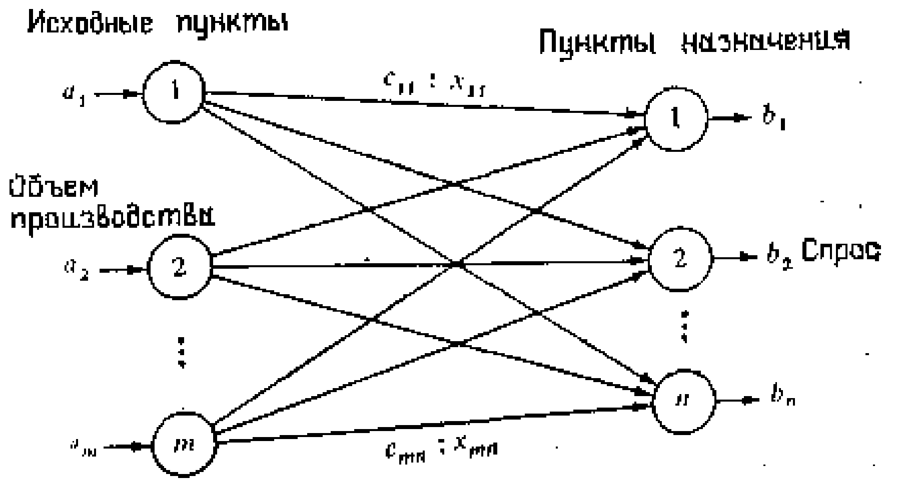


Рис.5.

На рис. 5 изображена транспортная модель в виде сети с *m* исходными пунктами и *n* пунктами назначения. *Исходным пунктам* и *пунктам назначения* соответствуют **вершины.** Дуга, соединяющая исходный пункт с пунктом назначения, представляет маршрут, по которому перевозится продукция. Количество продукции, производимой в пункте i, обозначено через a_i, а количество продукции, потребляемой в пункте j— через b_j; c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции из *i в j*.

Пусть x_{tj} — количество продукции, перевозимой из исходного пункта *i* в пункт назначения j; тогда задача линейного программирования транспортного типа в общем виде формулируется следующим образом;

минимизировать $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{i,}\ i = 1,2, \dots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_{j,}\ j = 1,2, \dots n$$

$$x_{ij} \ge 0 \text{ для всех } i \text{ и } j$$

Первая группа ограничений указывает, что суммарный объем перевозок продукции из некоторого исходного пункта не может превышать произведенного количества этой продукции;

вторая группа ограничений требует, чтобы суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления полностью удовлетворили спрос на эту продукцию.

Из представленной модели видно, что суммарный объем производства в исходных пунктах не должен быть меньше суммарного спроса в пунктах назначения. Если суммарный объем производства равен суммарному спросу, то модель называется сбалансированной транспортной моделью. Она отличается от вышеприведенной модели лишь тем, что все ограничения превращаются в равенства, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_{i,}\ i = 1,2, \dots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{j,}\ j = 1,2, \dots n$$

В реальных условиях не всегда объем производства равен спросу или превосходит его. Однако транспортную модель всегда можно сбалансировать. Помимо того что баланс делает удобным моделирование определенных практических ситуаций, он полезен для разработки метода решения, который полностью учитывает особую структуру транспортной модели.

Примеры моделей.

Пример 1. (Стандартная транспортная модель.) Заводы автомобильной фирмы MG расположены в пунктах A1, A2, A3. Основные центры распределения продукции сосредоточены в Б1 и Б2. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1500 и 1200 автомобилей ежеквартально. Величины квартального спроса в центрах распределения составляют 2300 и 1400 автомобилей соответственно. Стоимость перевозки по железной дороге одного автомобиля на один км равняется примерно 0,08 у.е. Расстояния в км между заводами и центрами распределения приведены в следующей таблице

	Б1	Б2
A1	1000	2690
A2	1250	1350
A3	1275	850

Расстояния можно перевести в стоимость перевозки одного автомобиля (переводной коэффициент=0,08 у.е/км). В результате получается следующая таблица стоимостей (округленных до ед), которая содержит коэффициенты c_{ij} общей модели.

	Б1	**Б2**
A1	80	215
A2	100	108
A3	102	68

Обозначим количество автомобилей, перевозимых из исходного пункта i в пункт назначения j через x_{ij}. Поскольку суммарный объем производства автомобилей (1000+1500+1200=3700) равен суммарному спросу (2300+1400=3700), данная модель является сбалансированной транспортной моделью, и соответствующая задача линейного программирования с ограничениями в виде равенств формулируется как

минимизировать $z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$

при ограничениях

$$x_{11}+x_{12}=1000,$$
$$x_{21}+x_{22}=1500,$$

$$x_{31}+x_{32}=1200,$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=2300,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1400$$

Более компактный способ представления транспортной модели связан с использованием так называемой **транспортной таблицы,** имеющей вид матрицы, в которой строки соответствуют исходным пунктам, а столбцы — пунктам назначения. Коэффициенты стоимости C_{IJ} расположены в правом верхнем углу каждой ячейки *(i,* j). Модель фирмы MG можно представить в виде табл. 5.1.

80 x_{11}	215 x_{12}
100 x_{21}	108 x_{22}
102 x_{31}	68 x_{32}

Вопрос. Предположим, что перевозки автомобилей с завода в А2 в Б1 нежелательны. Каким образом это условие можно включить в модель?

Пример 2. (Сбалансированная транспортная модель.) Изменим условия в примере, предположив, что завод в А2 производит не 1500, а 1300 автомобилей. Это приведет к дисбалансу, поскольку суммарный объем производства (3500) не равен суммарному спросу (3700).

Другими словами, дисбаланс означает, что спрос в центрах распределения автомобилей полностью удовлетворить не удается. В этом случае необходимо видоизменить транспортную модель таким образом, чтобы недостаток автомобилей (3700—3500=200) оптимально распределялся между центрами, в которые поступают автомобили.

Поскольку спрос превышает объем производства, можно ввести дополнительный фиктивный исходный пункт (завод) с производительностью в 200 автомобилей. В обычных условиях завод может отправлять свою продукцию в любой центр распределения автомобилей. Количество продукции, «отправляемой» фиктивным заводом в пункт назначения, будет представлять собой объем недостающей продукции в этом пункте.

	Б1	**Б2**	
А1	80	215	1000
А2	100	108	1300
А3	102	68	1200
Фиктивный	0	0	200
	2300	1400	

Для завершения построения модели не хватает лишь информации о стоимости «перевозок» с фиктивного завода в пункты назначения. Поскольку на самом деле такого завода не существует, никакие перевозки не осуществляются, и соответствующая стоимость перевозки единицы продукции равна нулю. Однако эту ситуацию можно рассмотреть и по-другому, считая, что каждая единица недопоставленной в центры распределения продукции облагается штрафом. В этом случае транспортные расходы на единицу продукции равны штрафу за единицу продукции, недополученную в том или ином центре распределения.

В табл представлена сбалансированная модель с измененной производительностью завода в А2. Фиктивный завод имеет производительность 200 автомобилей. Аналогично, если объем производства превышает спрос, можно ввести дополнительные фиктивные пункты назначения, которые «поглощают» избыток продукции. Пусть в примере 1 спрос в А2 упал до 1900 автомобилей. В табл. 5.3 представлена модель с фиктивным центром распределения. Автомобили, поступающие с некоторого завода в фиктивный центр распределения, представляют *избыток* производства на этом заводе. Соответствующая стоимость перевозки одного автомобиля равна нулю. Однако можно назначить штраф за *хранение* автомобиля на складе завода, тогда стоимость перевозки одного автомобиля станет равной стоимости его хранения.

	Б1	**Б2**	**Фиктивный**	
А1	80	215	0	1000
А2	100	108	0	1500
А3	102	68	0	1200
	1900	1400	400	

Задачи для самостоятельного решения

1. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии — 60 изделий, второй линии — 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, па радиоприемник второй модели — 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыли от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равны 30 и 20 долл. соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

2. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках, Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 ч в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	Станок 2	станок 3	
1	10	6	8	2 долл.
2	5	20	15	3 долл.

3. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 долл. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл., а каждая минута телерекламы — в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в два раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио- и телерекламой.

4. Фирма производит два вида продукции — А и В. Объем сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В — 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 долл. соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

5. Три нефтеперерабатывающих завода с максимальной ежедневной производительностью в 6,5 и 8 млн. ед. бензина снабжают 3 бензохранилища, спрос которых составляет 4,5 и 7 млн. ед. Бензин транспортируется в бензохранилища по бензопроводу. Стоимость перекачки бензина на один км составляет 1 у.е. на 100 ед. Завод №1 должен обязательно отправить весь бензин. Таблица расстояний приведена. Сформулируйте транспортную задачу.

	Б1	**Б1**	**Б3**
А1	120	180	-
А2	300	100	80
А3	200	250	120

6.Три нефтеперерабатывающих завода с максимальной ежедневной производительностью в 6,5 и 6 млн. ед. бензина снабжают 3 бензохранилища, спрос которых составляет 4,8 и 7 млн. ед. Бензин транспортируется в бензохранилища по бензопроводу. Стоимость перекачки бензина на один км составляет 1 у.е. на 100 ед. Недопоставки в хранилища 2 и 3 штрафуются 5 у.е. за каждую ед. бензина. Таблица расстояний приведена. Сформулируйте транспортную задачу.

	Б1	**Б1**	**Б3**
А1	120	180	-
А2	300	100	80
А3	200	250	120

Тема 2. Сетевые модели. Календарное планирование.

1. Минимизация сети

Задача минимизации сети состоит в нахождении ребер, соединяющих все узлы сети (т. *е.* каждая пара узлов соединена *цепью)* и имеющих минимальную суммарную длину.

Отсутствие циклов в минимальной сети естественным образом привело к ее названию — **минимальное дерево-остов.** В любой сети минимальное дерево-остов можно определить следующим итеративным процессом. Начать с любого узла и соединить его с *ближайшим* узлом сети. Соединенные два узла образуют теперь *связное множество,* а остальные узлы — *несвязное множество.* Далее в несвязном множестве выбрать узел, который расположен *ближе* других (на кратчайшем расстоянии) к *любому* из узлов связного множества. Скорректировать соответствующим образом связное и несвязное множества и повторять процесс до тех пор, пока в связное множество не попадут все узлы сети. В случае одинаково удаленных узлов выбирать любой из них, что указывает на неоднозначность минимального дерева-остова.

Пример. Телевизионная фирма планирует создание кабельной сети (рис. 2) для обслуживания пяти районов-новостроек. Числа на ребрах указывают длину кабеля, соединяющего соответствующие узлы. Узел 1 представляет телевизионный центр, а остальные узлы (2—6) соответствуют пяти новостройкам.

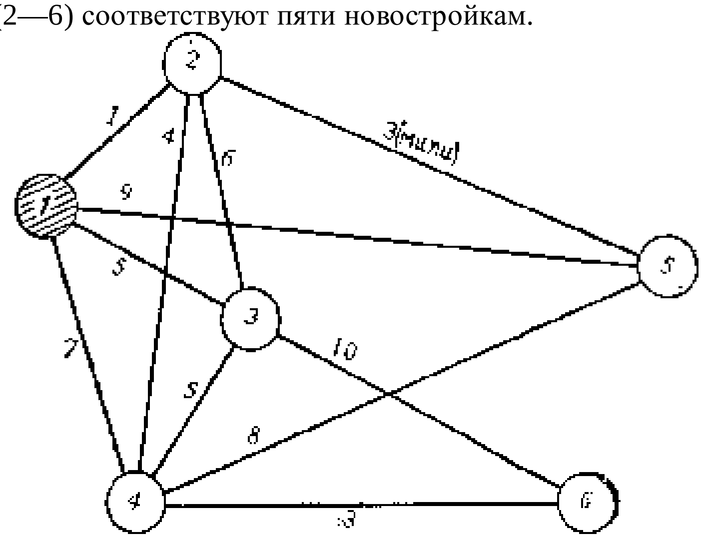


Рис. 2.

Отсутствие ребра между двумя узлами означает, что соединение соответствующих новостроек либо связано со слишком большими затратами, либо физически невозможно. Нужно найти такие ребра, которые потребуют кабель минимальной длины для связи (прямой или через другие пункты) всех районов с телевизионным центром.

В данном примере логично начинать вычисления с узла 1, т. е. в начальный момент он соответствует множеству «связных узлов». Множество «несвязных узлов» представлено узлами 2, 3, 4, 5 и 6. Символически это можно записать как
C={1}, C={2, 3, 4, 5, 6}.

Итерация 1

Узел 1 соединить с узлом 2, ближайшим к 1 в множестве *C*— = {2, 3, 4, 5, 6}. Результаты итерации 1 показывают, что
C={1, 2}, C={3, 4, 5, 6}.

Итерация 2

Узлы 1 и 2 (из множества С) связаны. На итерации 2 выбрать узел в С={3, 4, 5, 6}, ближайший к одному из узлов в *С*={1, 2}. Поскольку кратчайшим оказывается расстояние между узлами 2 и 5 (см. итерацию 1), получим

С={1, 2, 5}, С={3, 4, 6}.

Итерация 3

Итерация 2 (рис. 3) дает расстояния от узлов из С={1, 2, 5}
до *всех* узлов из С={3, 4, 6}. Таким образом, нужно связать узлы: 2 и 4, т. е.

С={1, 2, 4, 5}, С={3, 6}.

Итерация 4

Результаты итерации 3 на рис. 3 показывают, что следует связать узлы 4 и 6, т. е.
С={1, 2, 4, 5, 6}, С={3}.

Итерация 5

На итерации 5 получаются два одинаковых кратчайших расстояния, поэтому произвольно можно связать узлы 1 и 3 *или* 4 и 3. В любом случае
С={1, 2, 3, 4, 5, 6} и С=0.
Поскольку все узлы связаны, процедура завершается. Минимальная длина кабеля, соединяющего телевизионную станцию с районами-новостройками, равна 1+3+4+3+5=16 км.

2. Задача о кратчайшем пути

Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении *связанных* между собой дорог на транспортной сети, которые в совокупности имеют минимальную длину от исходного пункта до пункта назначения.

Примеры модели

Пример 1. (Замена оборудования.) Фирма по прокату автомобилей планирует замену автомобильного парка на очередные пять лет. Автомобиль должен проработать не менее одного года, прежде чем фирма поставит вопрос о его замене. В табл. приведены стоимости замены автомобилей (в тысячах долларов), зависящие от времени замены и числа лет, в течение которых автомобиль находился в эксплуатации.

Год		1	2	3	4	5
	1		4,0	5,4	9,8	13,7
	2			4,3	6,2	8,1
	3				4,8	7,1
	4					4,9

Эту задачу можно представить на сети, в следующем виде. Каждому году ставится в соответствие определенный узел. «Длина» дуги, соединяющей два узла, равна соответствующей стоимости замены из табл. Сеть изображена на рис. 4. Задача сводится к нахождению кратчайшего «пути» между узлами 1 и 5.

Решение: каждый автомобиль заменяется через два года, а через пять —списывается.

Задача для решения у доски.

Наиболее надежный маршрут. Г-жа Смит ежедневно ездит из дома на работу в автомобиле. Имея необходимую подготовку в области сетевого анализа, она смогла определить кратчайший путь от дома до работы, однако, к своему сожалению, вскоре обнаружила, что этот путь усиленно патрулируется полицией, которая постоянно останавливает ее за превышение скорости. Поэтому она решила рассмотреть задачу под несколько иным углом зрения и выбрать такой маршрут, на котором полная вероятность того, что полиция *не* остановит ее, будет максимальной. Рассмотрев все возможные участки дорог, ведущих от ее дома до места работы, она получила вероятности, указанные на дугах сети (участки дороги) на рис. 5. (Дуги в этом случае называются направленными, или ориентированными) Исследование данных вероятностей показало, что полная вероятность не быть остановленной полицейскими на маршруте равна произведению вероятностей, соответствующих участкам дороги, которые составляют данный маршрут. Решить задачу как задачу о кратчайшем пути.

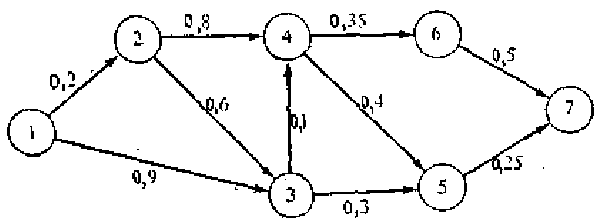


Рис.5.

Алгоритм нахождения кратчайшего пути

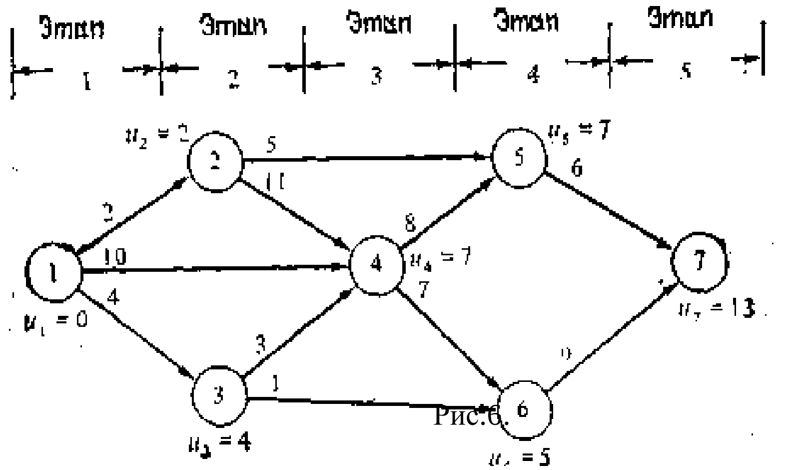


Рис.6.

Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 6. Узел 1 представляет начальную точку (исходный пункт), а узел 7 — конечную точку (пункт назначения

dij — расстояние на сети между *смежными* узлами *i* и /,

Uj — кратчайшее расстояние между узлами 1 и j. U_1=O.

Процедура завершается, когда получено значение u_7. Общая формула для вычисления u_j имеет вид

u_j =*min*(кратчайшее расстояние до *предыдущего* узла *i плюс* расстояние между текущим узлом *j* и предыдущим узлом *i)*

$$u_j = min(u_j + d_{ij})$$

Из этой формулы следует, что кратчайшее расстояние *u*, до узла j можно вычислить лишь после того, как определено кратчайшее расстояние до каждого предыдущего узла *i*, соединенного дугой с узлом j.

Для узла 1 можно вычислить лишь u_2 и u_3. Вычислительная схема состоит из следующих этапов.

Этап 1: u_1=0.

Этап 2: $u_2=u_1+d_{12}=0+2=2$ (из 1),

$u_3=u_1+d_{13}=0+4=4$ (из 1).

Этап 3: $u_4=\min\{u_1+d_{14},\ u_2+d_{24},\ u_2+d_{34}\}=$

$= \min\{0+10,\ 2+11,\ 4+3\}=^{7}$ (из 3)

Этап 4: $u_5=\min\{u_2+d_{25},\ u_4+d_{45}\} = \min\{2+5,\ 7+8\}=7$ (из 2),..

$u_6=\min\{u_3+d_{36},\ u_4+d_{45}\} = \min\{4+1,\ 7+7\}=5$ (из 3)..

Этап 5: $u_7=\min\{u_5+d_{57},\ u_6+d_{6\,7}\}=\min\{7+6,\ 5+9\} = 13$ (из 5)...

Минимальное расстояние между узлами 1 и 7 равно 13, а соответствующий маршрут — 1 -2 -5 -7.

Задача для решения у доски.

Решить задачу замены оборудования.

Формулировка сетевых задач как задач ЛП.

Модель линейного программирования для задачи о кратчайшем пути строится следующим образом.

1. Каждая переменная соответствует дуге.
2. Каждое ограничение соответствует узлу.

Пусть X_{ij} представляет величину потока по дуге *(i,j*). Тогда задача о кратчайшем пути в сети с *n* узлами формулируется как

минимизировать $z=\sum_{i,j}\sum d_{ij}x_{ij}$

при ограничениях

$$\sum_{(1,j)} x_{1j} = 1 \text{ (исходный пункт)}$$

$$\sum_{(i,k)} x_{1k} = \sum_{(k,j)} x_{kj} \text{ (для всех } k \neq 1 \text{ или } n)$$

$$\sum_{(i,n)} x_{1n} = 1 \text{ (пункт назначения)}$$

Единица потока доставляется из узла 1 в узел *n*. Первым и последним ограничениями устанавливается-, что суммарный поток (сумма переменных), выходящий из узла 1, равен 1, как и суммарный поток, поступающий в узел *n*. В любом промежуточном узле суммарный входящий поток равен суммарному выходящему потоку. Целевая функция требует, чтобы общее расстояние, пройденное единицей потока, было минимальным.

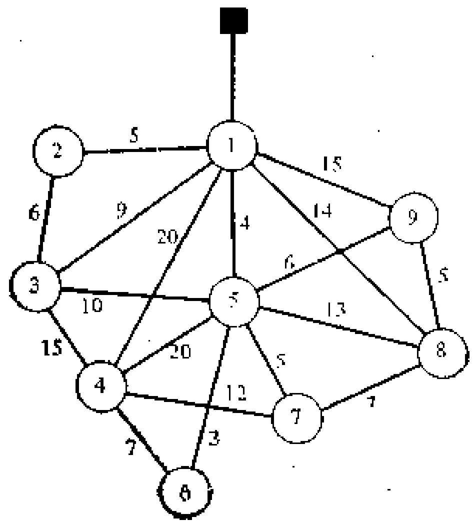
Задача для решения у доски.

Представить сеть на рисунке 6 как задачу ЛП. Записать ограничения для узлов 1, 4,7.

Задачи для самостоятельного решения

1. На рис. указаны длины коммуникаций, связывающих девять установок по добыче газа в открытом море с расположенным на берегу приемным пунктом. Поскольку скважина 1 расположена ближе всех к берегу, она оснащена необходимым

оборудованием для перекачки газа, идущего с остальных скважин в приемный пункт. Постройте сеть трубопровода, соединяющего все скважины с приемным пунктом и имеющую минимальную общую длину труб.

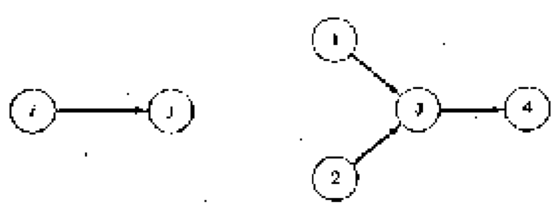


2. Решить задачу о наиболее надежном маршруте.
3. Представить задачи о наиболее надежном маршруте и замене оборудования как задачу ЛП.

Календарное планирование сетевыми методами

Сетевое планирование и управление программами включает три основных этапа: структурное планирование, календарное планирование и оперативное управление.

Сетевая модель отображает взаимосвязи между операциями и порядок их выполнения (отношение упорядочения или следования). Как правило, для представления операции используется стрелка (ориентированная дуга), направление которой соответствует процессу реализации программы во времени. Отношение упорядочения между операциями задается с помощью событий. Событие определяется как момент времени, когда завершаются одни операции и начинаются другие. Начальная и конечная точки любой операции описываются, таким образом, парой событий, которые обычно называют *начальным событием* и *конечным событием*. Операции, выходящие из некоторого события, не могут начаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие. По принятой в СПУ терминологии каждая операция представляется ориентированной дугой, а каждое событие— узлом (вершиной). Не требуется, чтобы длина дуги была пропорциональна продолжительности операции, а графическое изображение дуг не обязательно должно представлять прямолинейный отрезок.



(а) **(б)**

Рис. 12.1.

На рис. 12.1, *а* приведен типичный пример графического изображения операции *i, j* с начальным событием *i* и конечным событием j. На рис. 12.1, б показан другой пример, из которого видно, что для возможности начала операции (3, 4) требуется завершение операций (1, 3) и (2, 3). Протекание операций во времени задается путем нумерации событий, причем номер начального события всегда меньше номера конечного. Такой способ нумерации особенно удобен при выполнении вычислений на ЭВМ.

Правила построения сетевой модели

Правило 1. *Каждая операция в сети представляется одной и только одной дугой (стрелкой).* Ни одна из операций не должна появляться в модели дважды. При этом следует различать случай, когда какая-либо операция разбивается на части; тогда каждая часть изображается отдельной дугой. Так, например, прокладку трубопровода можно расчленить на прокладку отдельных секций и рассматривать прокладку каждой секции как самостоятельную операцию.

Правило 2. *Ни одна пара операций не должна определяться одинаковыми начальным и конечным событиями.* Возможность неоднозначного определения операций через события появляется в случае, когда две или большее число операций допустимо выполнять одновременно. Пример этого случая приведен на рис. 12.2, а, где операции *A и B* имеют одинаковые начальное и конечное события. Чтобы исключить такую «ошибку» между *A* и конечным (начальным) событием или между *B* и конечным (начальным) событием, вводится

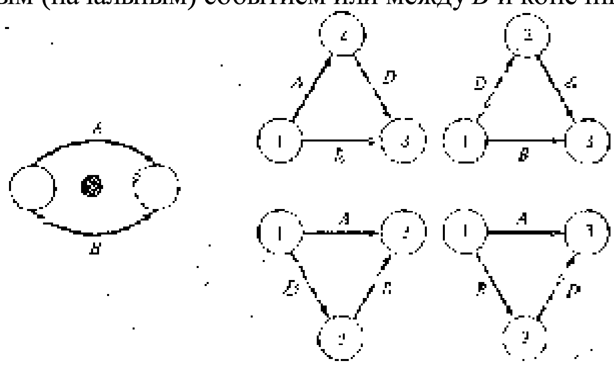
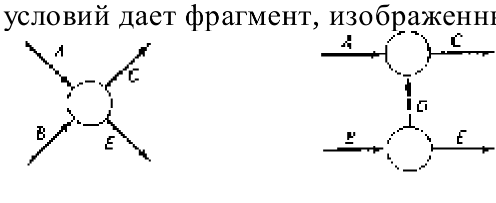


Рис. 12.2.

фиктивная операция. Рис. 12.2, б иллюстрирует различные варианты введения такой фиктивной операции *D*. В результате операции А и В определяются теперь однозначно парой событий, отличающихся либо номером начального, либо номером конечного события. Следует обратить внимание на то, что фиктивные операции не требуют затрат ни времени, ни ресурсов.

Фиктивные операции позволяют также правильно отображать логические связи, которые без их помощи нельзя задать на сети. Предположим, что в некоторой программе операции А и В должны непосредственно предшествовать *C*, а операции *E* непосредственно предшествует только *B*. На рис. 12.3, *a* эти условия отражены неверно, так как, хотя упорядочения между *A*, *B и C* показаны правильно, из этого фрагмента следует, что операции *E* должны непосредственно предшествовать обе операции *A* и *B*. Правильное представление указанных условий дает фрагмент, изображенный на



(а) (5)

Рис. 12.3.

рис. 12.3, б, в котором используется фиктивная операция *D*. Поскольку на операцию *D* не затрачиваются ни время, ни ресурсы, заданные отношения упорядочения выполняются.

Пример 1. Постройте сетевую модель, включающую операции *A*, *B*, *C*, . . ., *L*, которая отображает следующие отношения упорядочения.

1. *A*, *B* и *C*— исходные операции программы, которые можно начинать одновременно.

2. *A и B* предшествуют *D*.
3. *B* предшествует *E, F* и *H*.
4. F и C предшествуют G.
5. F и D предшествуют I и *J*.
6. C, *D, F* и I предшествуют Л.
7. *К* предшествует *L*.
8. I, G и L — завершающие операции программы.

Сеть, соответствующая этим отношениям упорядочения, при ведена на рис. 12.4. Фиктивные операции D_x и D_2 введены для того, чтобы правильно отразить отношения следования. Операция D_3 использована для однозначного определения операций *Е* и *Я* по конечным событиям. События сети пронумерованы таким образом, что возрастание номеров соответствует ходу выполнения программы.

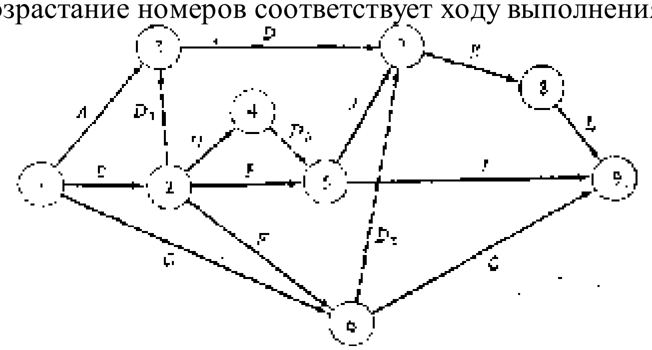


Рис. 12.4.

Задачи для решения у доски

Рассмотрите пример 1.

а) Укажите, какое влияние оказывает добавление каждой из следующих операций на отношения упорядочения в сети. Все случаи рассмотрите независимо.
1) Фиктивная операция (3,5). [*Ответ. А* предшествует I и J.]
2) Фиктивная операция (3, 4). [*Ответ. А* предшествует I и J.]
3) Фиктивная операция (5, 6). [*Ответ. Е* и *Н* предшествуют G.]
4) Фиктивная операция (3, 6). [*Ответ. А* предшествует G.]

б) Укажите, как можно ввести каждое из следующих отношений упорядочения в сеть.
1) Операции *А к В* предшествуют G. [*Ответ*. Ввести фиктивную операцию (3, 6).}
2) Операция *D* предшествует О. [*Ответ*. Ввести фиктивную операцию между конечным событием операции *D* и событием 7, а затем соединить конечное событие операции D и событие 6 фиктивной операцией.]
3) Операция C предшествует *D*. [*Ответ*. Ввести фиктивную операцию между конечным событием операции *С и* событием б, а затем соединить конечное событие операции *С* и событие 3 фиктивной операцией.]

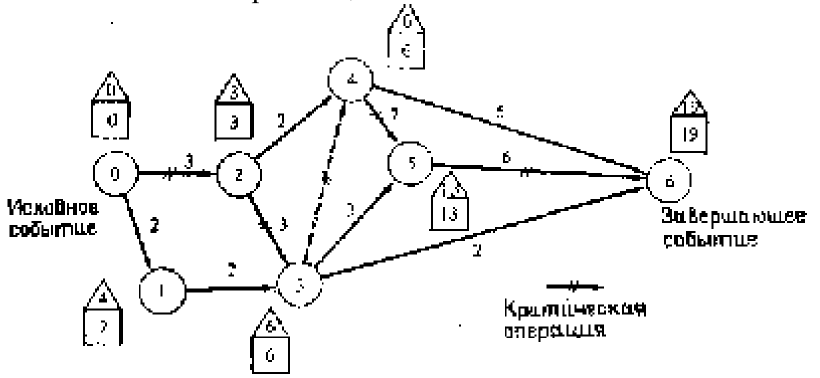
2. Расчет сетевой модели

В результате вычислений определяются **критические и некритические** операции программы. Операция считается критической, если задержка ее начала приводит к увеличению срока окончания всей программы. Некритическая операция отличается тем, что промежуток времени между ее ранним началом и поздним окончанием (в рамках рассматриваемой программы) больше ее фактической продолжительности. В таком случае говорят, что некритическая операция имеет резерв, или запас, времени.

12.2.1. Определение критического пути

Критический путь определяет непрерывную последовательность критических операций, связывающих исходное и завершающее события сети. Другими словами, критический путь задает все критические операции программы. Метод определения такого пути иллюстрируется на численном примере.

Пример 2. Рассмотрим сетевую модель, показанную на рис. 12.5, с исходным событием 0 и завершающим событием 6.



Оценки времени, необходимого для выполнения каждой операции, даны у стрелок.

Расчет критического пути, включает два этапа. Первый этап называется **прямым проходом.** Вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети. Для каждого события вычисляется одно число, представляющее ранний срок его наступления. Эти числа указаны на рис. в квадратах. На втором этапе, называемом **обратным проходом,** вычисления начинаются с завершающего события сети и продолжаются, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется число, представляющее поздний срок его наступления. Эти числа даны в треугольниках. Рассмотрим теперь прямой проход.

Пусть ES_t — **ранний срок начала** всех операций, выходящих из события г. Таким образом, ES_t является также ранним сроком наступления события ***i***. Если принять i=0, т. е. считать, что номер исходного события сети равен нулю, то при расчете сети $ES_0=0$. Обозначим символом D_{ij} продолжительность операции ***(i,*** j). Тогда вычисления при прямом проходе выполняются по формуле

$$ES_j = \max_i \{ES_i + D_{ij}\} \text{ для всех операций } (i, j),$$

где $ES_0=0$. Следовательно, чтобы вычислить ESj для события j, нужно сначала определить ES_t начальных событий *всех* операций ***(i,*** j), входящих в событие j.

Применительно к рис. вычисления при прямом проходе начинаются с $ESo=O$, как показано в квадрате над событием 0. Поскольку в событие 1 входит только одна операция (0, 1) продолжительностью D_0i=2,

$$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0 + 2 = 2.$$

Этот результат записан в квадрате у события 1. Рассмотрим далее событие 2. [Заметим, что событие 3 пока рассматривать нельзя, так как срок ES_2 (событие 2) еще неизвестен.] Таким образом,

$$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Поместим этот результат в квадрат у события 2. Перейдем теперь к событию 3. Поскольку в него входят две операции (1, 3) и (2, 3),

$$ES_3 = \max_{i=1,2}\{ES_i + D_{i3}\} = \max\{2 + 2, 3 + 3\} = 6.$$

Этот результат также записан в квадрате у события 3.

Вычисления продолжаются аналогичным образом, пока не будут определены значения ESj для всех j'. Имеем

$$ES_4 = \max_{i=2,3}\{ES_i + D_{i4}\} = \max\{3+2, 6+0\} = 6,$$
$$ES_5 = \max_{i=3,4}\{ES_i + D_{i5}\} = \max\{6+3, 6+7\} = 13,$$
$$ES_6 = \max_{i=3,4,5}\{ES_i + D_{i6}\} = \max\{6+2, 6+5, 13+6\} = 19.$$

На этом вычисления прямого прохода заканчиваются.

Обратный проход начинается с завершающего события сети. При этом целью является определение LC_t — поздних сроков окончания всех операций, входящих в событие *u* Если принять *i—n*, где *n* — завершающее событие сети, то LC_n—ES_n является отправной точкой обратного прохода. В общем виде для любого события *i*

$$LC_i = \min_j \{LC_j - D_{ij}\} \text{ для всех операций } (i, j).$$

Значения *LC* (указанные в треугольниках) вычисляются следующим образом:

$$LC_6 = ES_6 = 19,$$
$$LC_5 = LC_6 - D_{56} = 19 - 6 = 13,$$
$$LC_4 = \min_{j=5,6}\{LC_j - D_{4j}\} = \min\{13-7, 19-5\} = 6,$$
$$LC_3 = \min_{j=4,5,6}\{LC_j - D_{3j}\} = \min\{6-0, 13-3, 19-2\} = 6,$$
$$LC_2 = \min_{j=3,4}\{LC_j - D_{2j}\} = \min\{6-3, 6-2\} = 3,$$
$$LC_1 = LC_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4,$$
$$LC_0 = \min_{j=1,2}\{LC_j - D_{0j}\} = \min\{4-2, 3-3\} = 0.$$

Таким образом, вычисления при обратном проходе закончены.

Теперь, используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить операции критического пути. Операция *(i,* j) принадлежит **критическому пути,** если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$ES_i = LC_i,$$
$$ES_j = LC_j,$$
$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = D_{ij}.$$

По существу, эти условия означают, что между ранним сроком начала (окончания) и поздним сроком начала (окончания) критической операции запас времени отсутствует. В сетевой модели это отражается в том, что для критических операций числа, проставленные в квадратах и треугольниках у начальных и конечных событий, совпадают, а разность между числом в квадрате (или треугольнике) у конечного события и числом у начального события равна продолжительности соответствующей операции в квадрате (или треугольнике).

На рис. 12.5 критический путь включает операции (0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) и (5, 6). Критический путь определяет кратчайшую возможную продолжительность всей программы в целом. Заметим, что операции (2, 4), (3, 5), (3, 6) и (4, 6) удовлетворяют условиям (1) и (2), но не условию (3). Поэтому они не являются критическими. Отметим также, что критический путь представляет собой *непрерывную* цепочку операций, соединяющую исходные события сети, с завершающим.

Задания для решения у доски

Определите критический путь (пути) для каждого из следующих (независимых) случаев сети, приведенной на рис. 12.5.

(а) D_{01}=4. *[Ответ:* (0, 2, 3, 4, 5, 6) и (0, 1, 3, 4, 5, 6).]

(б) D_{36}=15. *[Ответ:* (0, 2, 3, 6).]

Определение резервов времени

При определении критического пути необходимо вычислить резервы времени для некритических операций. Очевидно, что резерв времени критической операции должен быть равен нулю. Поэтому она и называется критической.

Прежде чем приступить к вычислению резервов времени, нужно ввести определения еще двух сроков, связанных с каждой операцией. Это срок **позднего начала** *(LS)* и срок **раннего окончания** *(EC)*, которые для любой операции *(i, /)* задаются соотношениями

Различают два основных вида резервов времени: **полный резерв** *(TF)* и **свободный резерв** *(FF)*. Полный резерв времени операции •*(i, /)* представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция *ESi)*, и ее продолжительностью (D_tj), т. е.

Свободный резерв времени определяется в предположении, что все операции в сети начинаются в ранние сроки. При этом условии величина *FF,j* для операции *{i,]}* представляет собой превышение допустимого отрезка времени $(ESj — ES_t)$ над продолжительностью операции (D_tj), т. е.

Операция (I,j)	Продолжительность *Dij* ,	Раннее		Позднее		Полный резерв Tp_{11}.,	Свободный резерв *FF*'
		начало *ESi*	окончание *ECij*	начало LSij	окончание *ECj*		
(0, 1)	2	0	2	2	4	*2*	0
(0, 2)	3	0	3	0	3	O[a]	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)	3	3	6	3	6	O[a]	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	I
(3, 4)	0	6	6	6	6	O[a]	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)	7	6	13	6	13	O[a]	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)	6	13	19	13	19	O[a]	0

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций можно свести в удобную для пользования таблицу. В столбцах (1), (2), (3) и (6) приведены результаты расчета сети, рассмотренной в примере 12.2.1. Остальные данные легко вычислить по приведенным выше формулам.

В табл. приведены результаты типичного расчета сетевой модели. Она содержит всю необходимую для построения календарного плана (графика) информацию. Заметим, что только критические операции должны иметь нулевой *полный* резерв времени. Когда полный резерв равен нулю, свободный резерв также должен быть равен нулю. Однако обратное неверно, поскольку свободный резерв некритической операции также может быть нулевым. Так, например, в табл. свободный резерв времени некритической операции (О, 1) равен нулю.

Задания для решения у доски

Покажите, что значения полного и свободного резервов вычислены правильно для каждой из следующих операций: (а) операция (О, 1), (б) операция (3, 4), (в) операция (4, 6).

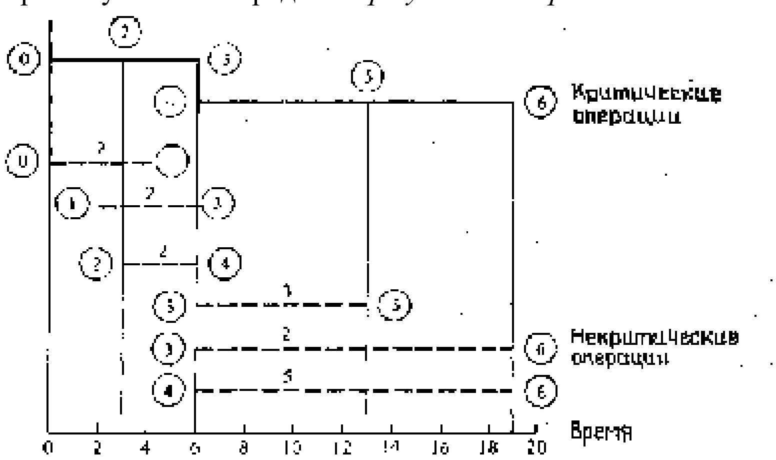
Построение календарного графика и распределение ресурсов

Конечным результатом выполняемых на сетевой модели расчетов является календарный график (план). Этот график легко преобразуется в реальную шкалу времени, удобную для реализации процесса выполнения программы.

При построении календарного графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное (параллельное) выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, может оказаться невозможным. Именно в этом отношении представляют ценность полные резервы времени некритических операций. Сдвигая некритическую операцию в том или ином направлении, но в пределах ее полного резерва времени, можно добиться снижения максимальной потребности в ресурсах. Однако даже при отсутствии ограничений на ресурсы полные резервы времени обычно используются для выравнивания потребностей в ресурсах на протяжении всего срока реализации программы. По существу, это означает, что программу удается выполнить более или менее постоянным составом рабочей силы по сравнению со случаем, когда потребности в рабочей силе (и других ресурсах) резко меняются при переходе от одного интервала времени к другому.

Пример В этом примере строится календарный график программы, рассмотренной в примере.

Данные, необходимые для построения календарного графика, приведены в табл. Прежде всего определяются календарные сроки выполнения критических операций. Далее рассматриваются некритические операции и указываются их ранние сроки начала и поздние сроки окончания *LC*. Критические операции изображаются сплошными линиями. Отрезки времени, в пределах которых могут выполняться некритические операции, наносятся пунктирными линиями, показывающими, что календарные сроки этих операций можно выбрать в указанных пределах *при условии сохранения отношений следования*.



На рис. показан календарный график, соответствующий примеру Фиктивная операция (3, 4) не требует затрат времени и поэтому показана на графике вертикальным отрезком. Числа, проставленные над некритическими операциями, соответствуют их продолжительностям.

Роль *полных* и *свободных* резервов времени при выборе календарных сроков выполнения некритических операций объясняется двумя общими правилами.

1. Если полный резерв *равен* свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием (пунктирные отрезки на рис. 12.6).
2. Если свободный резерв *меньше* полного, то срок начала не критической операции можно сдвинуть по отношению к ее раннему сроку начала не более чем на величину свободного резерва, не влияя при этом на выбор календарных сроков *непосредственно* следующих операций.

В рассматриваемом примере правило 2 применимо только к операции (О, 1), а календарные сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1. Это объясняется тем, что у операции (О, 1) свободный резерв времени равен *нулю.* Таким образом, если срок начала операции (О, 1) совпадает с ее ранним сроком ***(t=0),*** то календарные сроки непосредственно следующей операции (1, 3) можно выбрать любыми между ранним началом ***(t=2)*** и поздним окончанием (^=6) этой операции. Если же срок начала операции (О, 1) сдвинут по отношению к £=0, то раннее начало операции (1, 3) должно быть сдвинуто по крайней мере на ту же величину.

Задания для решения у доски

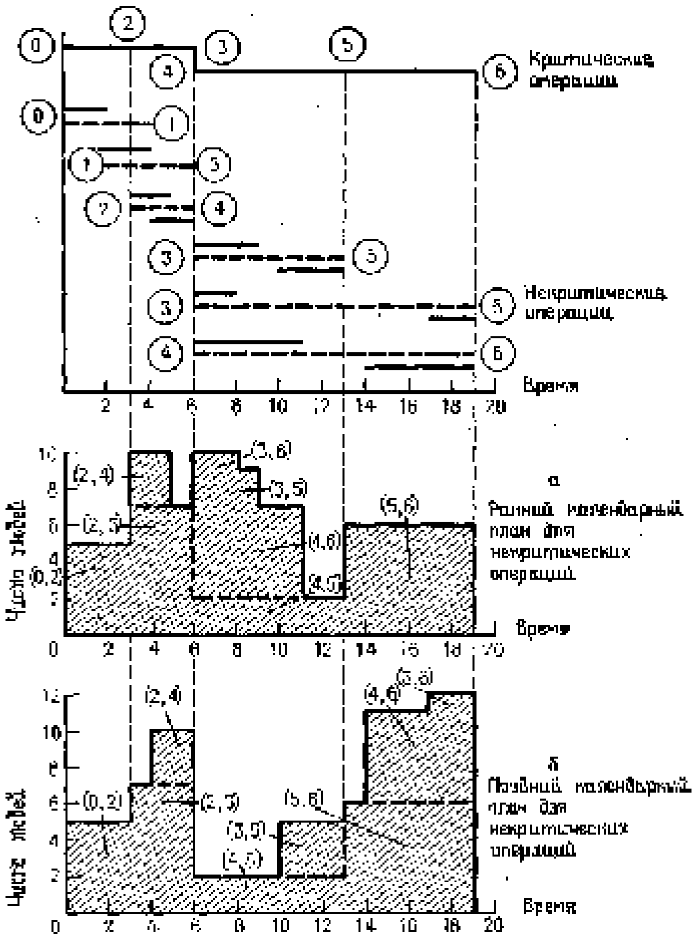
В указанных ниже примерах заданы полный и свободный резервы времени ***(TF*** и ***FF)*** некоторой некритической операции, а также ее продолжительность. Определите максимально возможную задержку начала операции по отношению к ее раннему сроку начала, при которой календарные сроки непосредственно следующих операций можно выбрать в произвольные моменты времени между ранним началом и поздним окончанием.

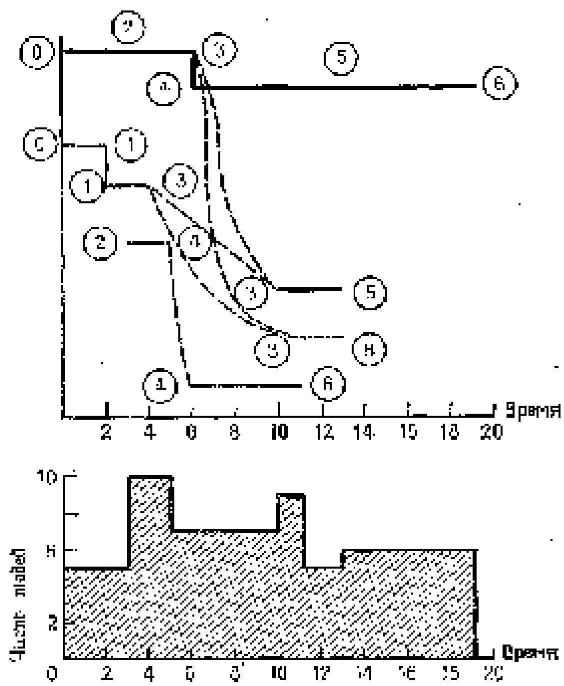
(а)***TF=10,*** FF=10, O=4. [*Ответ*. Задержка=10.]
(б)***TF=I0,*** FF=5, D=4. [*Ответ*. Задержка=5.]
(в)TT=10, ***FF=0,*** D=4. [*Ответ*. Задержка=0.]
(г) TF=10, ***FF=3,*** O=4. [*Ответ*. Задержка=3.]

Пример 12.3.2. Предположим, что в примере 12.3.1 для выполнения различных операций требуются указанные ниже ресурсы рабочей силы. Задача заключается в построении такого календарного плана (графика) реализации программы, при котором потребности в рабочей силе будут наиболее равномерными на протяжении всего срока осуществления программы. (Заметим, что для выполнения операций (О, 1) и (1, 3) *рабочая сила* не требуется, на что указывает нулевое количество человек для каждой из этих операций. Вследствие этого календарные сроки операций (О, 1) и (1, 3) можно выбирать независимо от процедуры выравнивания потребностей *в* ресурсах.)

Операция	Потребность в рабочей силе (чел.)	Операция	Потребность в рабочей силе (чел .)
0, 1	0	3,5	2
0, 2	5	3, 6	1
1, 3	0	4, 5	2

2, 3	7	4, 6	5
2, 4	3	5, 6	6





На рис. *а* показана потребность в рабочей силе при условии выбора в качестве календарных сроков некритических операций начала их ранних сроков (так называемый ранний, или левый, календарный план), а на рис. *б* — потребность в рабочей силе при выборе наиболее поздних сроков (так называемый поздний, или правый, календарный план). Пунктирной линией представлена потребность критических операций, которая должна быть обязательно удовлетворена, если нужно выполнить программу в минимально возможный срок. (Отметим, что для операций (О, 1) и (1, 3) ресурсы рабочей силы не требуются.)

Как показывают потребности в ресурсах критической операции (2, 3), для реализации программы необходимо по крайней мере 7 человек. При раннем календарном плане некритических операций максимальная потребность в ресурсах составляет 10 человек, а при позднем — 12. Этот пример наглядно показывает, что максимальные потребности в ресурсах зависят от использования резервов времени некритических операций. Однако, как видно из рис., независимо от распределения этих резервов максимальная потребность в рабочей силе для рассматриваемой программы не может быть меньше 10 человек, так как интервал времени, в пределах которого можно выполнять операцию (2, 4), совпадает с интервалом критической операции (2, 3). График потребности в рабочей силе при раннем календарном плане можно улучшить, выбрав поздние календарные сроки для операции (3, 5) и назначив выполнение операции (3, 6) непосредственно после завершения операции (4, 6). Новый график потребности в рабочей силе, приведенный на рис. 12.8, обеспечивает более равномерное распределение ресурсов.

Задания для решения у доски

Предположим, что в примере 12.3.2 для выполнения операций (О, 1) и (1, 3) требуются 8 и 2 чел. соответственно. Укажите, какие изменения произойдут на рис. 12.7 в каждом из следующих случаев.

(а) В качестве календарных сроков обеих операций выбираются их ранние сроки начала.

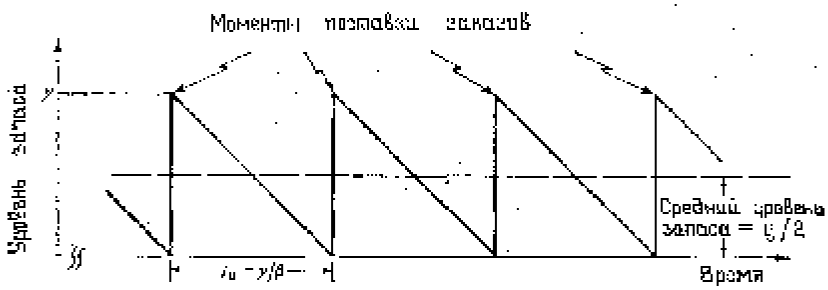
(б) В качестве календарных сроков обеих операций выбираются их поздние сроки начала.

Тема 3. Модели управления запасами

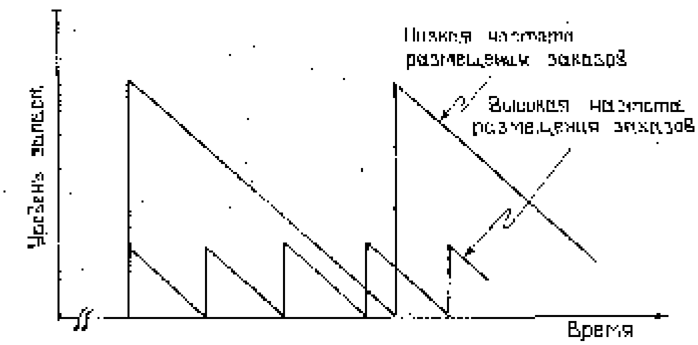
Модель управления запасами простейшего типа характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита. Такую модель можно применять в следующих типичных ситуациях:

1) использование осветительных ламп в здании;
2) использование таких канцелярских товаров, как бумага, блокноты и карандаши, крупной фирмой,
3) использование некоторых промышленных изделий, таких, как гайки и болты;
4) потребление основных продуктов питания (например, хлеба и молока).

На рис. показано изменение уровня запаса во времени. Предполагается, что интенсивность спроса (в единицу времени) равна р. Наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером y. (Предполагается, что запаздывание поставки является заданной константой.) Уровень запаса достигает нуля спустя y/b единиц времени после получения заказа размером y.



Чем меньше размер заказа *y*, тем чаще нужно размещать новые заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказов уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже Так как затраты зависят от частоты размещения заказа и объема хранимого запаса, то величина *y* выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат. Это лежит в основе построения соответствующей модели управления запасами.



Пусть *K* — затраты на оформление заказа, имеющие место всякий раз при его размещении и предположении, что затраты на хранение единицы заказа *в единицу времени* равны *n*. Следовательно, суммарные затраты в *единицу времени TCU (y)* как функцию от *y* можно представить в виде

TCU (y) = Затраты на оформление заказа в единицу времени +

Затраты на хранение запасов в единицу времени =

$$\frac{K}{y/\beta} + h\left(\frac{y}{2}\right)$$

Как видно из рис., продолжительность цикла движения заказа составляет *t0=y/b* и средний уровень запаса равен *y/2*.

Оптимальное значение *y* получается в результате минимизации *TCU(y)* по *y*. Таким образом, в предположении, что *y*— непрерывная переменная, имеем

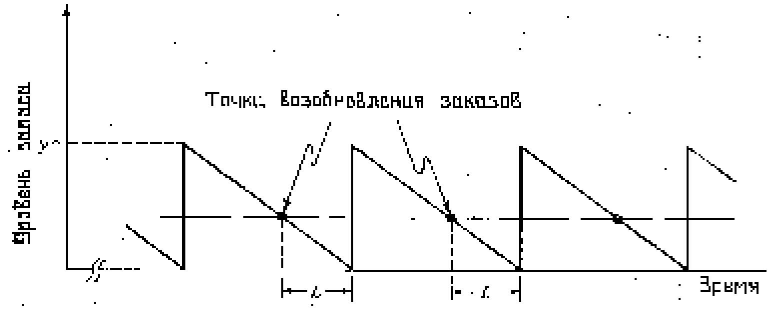
$$\frac{dTCU(y)}{dy} = -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} = 0,$$

откуда оптимальное значение размера заказа определяется выражением

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}.$$

Полученное выше выражение для размера заказа обычно называют формулой экономичного размера заказа **Уилсона.**

Оптимальная стратегия модели предусматривает заказ *y** единиц продукции через каждые *t*=y*/b* единиц времени. Оптимальные затраты *TCU(y*)*, получаемые путем непосредственной подстановки, составляют $\sqrt{2Kbh}$



Для большинства реальных ситуаций существует (положительный) **срок выполнения** заказа (временное запаздывание) L от момента размещения заказа до его действительной поставки. Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определять **точку возобновления заказа.** Рис. иллюстрирует случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на L единиц времени ожидаемую поставку. В практических целях эту информацию можно просто преобразовать, определив *точку возобновления заказа* через *уровень запаса,* соответствующий моменту возобновления заказа. На практике это реализуется путем непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа. Возможно, по этой причине модель экономичного размера заказа иногда называют моделью непрерывного контроля состояния заказа. Следует заметить, что с точки зрения анализа в условиях стабилизации системы срок выполнения заказа L можно всегда принять меньше продолжительности цикла t_0.

Пример 1. Ежедневный спрос на некоторый товар составляет около 100 ед. Затраты на размещение каждого запаса постоянны и равны 100 долл. Ежедневные затраты на хранение единицы запаса составляют 0,02 долл. Нужно определить экономичный размер партии и точку заказа при сроке выполнения заказа, равном 12-дням.

Из приведенных выше формул для экономичного размера партии получаем

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} = \sqrt{\frac{2\times100\times100}{0{,}02}} = 1000 \text{ ед.}$$

Соответствующая оптимальная продолжительность цикла составляет

$$t_0^* = y^*/\beta = 1000/100 = 10 \text{ дней.}$$

Так как срок выполнения заказа равен 12 дням и продолжительность цикла составляет 10 дней, возобновление заказа происходит, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения спроса на два (=12—10) дня. Таким образом, заказ размером г/* = 1000 размещается, когда уровень запаса достигает 2x100=200 ед.

Задания для решения у доски

Для примера 1 определите точку заказа в следующих случаях:

(а) Срок выполнения заказа = 15 дней. [*Ответ*. 500 ед.]

(б) Срок выполнения заказа = 23 дня. [*Ответ*. 300 ед.]

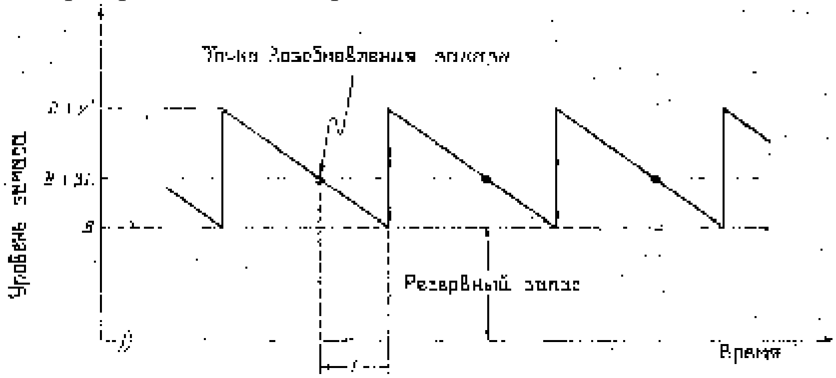
(в) Срок выполнения заказа = 8 дней. [*Ответ*. 800 ед.]

(г) Срок выполнения заказа = 10 дней. [*Ответ*. О ед.]

На практике получил распространение приближенный метод, сохраняющий простоту модели экономичного размера заказа и в то же время в какой-то мере учитывающий вероятностный характер спроса. Идея метода чрезвычайно проста. Она предусматривает создание некоторого (постоянного) буферного запаса на всем горизонте планирования. Размер резерва определяется таким образом, чтобы вероятность истощения запаса в течение *периода выполнения заказа* L не превышала наперед заданной величины. Предположим, что $f(x)$ — плотность распределения вероятностей спроса в течение *этого* *срока*. Далее предположим, что вероятность истощения запаса в течение периода L не должна превышать a. Тогда размер резервного запаса B определяется из условия

$$P\{x \geq B + L\beta\} \leq \alpha,$$

где LP представляет собой потребление в течение времени L. Изменение запаса при наличии резерва показано на рис.



Пример 2. Предположим, что спрос в примере **1** в действительности представляет собой аппроксимацию случайной ситуации, при которой *ежедневный* спрос распределен нормально со средним $\mu=100$ и средним квадратичным отклонением δ=10. Определим размер резервного запаса таким образом, чтобы вероятность истощения запаса в течение срока выполнения заказа не превышала 0,05.

Из примера 1 этот срок равен 2 дням. Так как ежедневный спрос распределен нормально, запаздывание спроса x_b также имеет нормальное распределение со средним μλ=2* 100=200 ед. и средним квадратичным отклонением δ_L=14,14. На рис. показана зависимость между распределением x_L и размером резерва B.

Таким образом, имеем

$$P\{x_L \geq \mu_L + B\} \leq \alpha,$$
$$P\left\{\frac{x_L-\mu_L}{\sigma_L} \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \alpha,$$
$$P\left\{\frac{x_L-\mu_L}{\sigma_L} \geq \frac{B}{14,14}\right\} \leq 0,05.$$

Из таблиц нормального распределения получаем B>23,2.

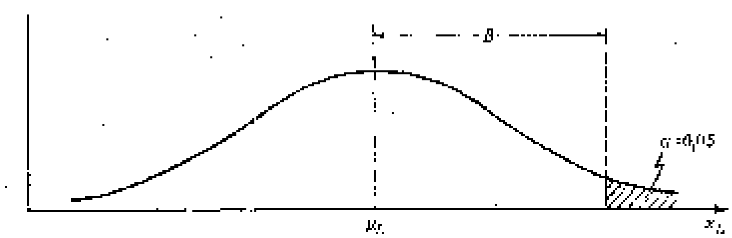


Рис. 13.7.

Задания для решения у доски

Определите резервный запас B для примера 2 в каждом из следующих случаев в предположении, что *ежедневный* спрос описывается нормальным распределением со средним 100 ед. и дисперсией 30.

(а) Срок выполнения заказа = 15 дней.
(б) Срок выполнения заказа = 23 дня.
(в) Срок выполнения заказа = 8 дней.

(г) Срок выполнения заказа = 10 дней.

Тема 4. Системы массового обслуживания

Пример 1. В начале каждой недели складируется 15 ед. запасов, которые в течение недели расходуются. Изъятия запасов из складского помещения происходят лишь в первые шесть дней каждой 'недели (так как по воскресеньям склад не работает) и осуществляются в соответствии с пуассоновским распределением со средней интенсивностью *ц=3* ед. запасов в 1 рабочий день. Как только уровень запасов снижается до 5 ед., делается новый заказ на поставку в конце недели следующих 15 ед. запасов. Запасы по своей природе таковы, что все неиспользованные до конца недели предыдущие запасы приходят в негодность и списываются (ликвидируются).

Ситуацию, описание которой дано выше, можно проанализировать различными способами. Прежде всего учтем, что средняя интенсивность потребления fx=3 ед. запасов в 1 рабочий день. Предположим, что требуется вычислить вероятность того, что уровень запасов понизится до 5 ед. в *t-я* день. Вероятность такого события равняется

$$p_5(t) = [(3t)^{15-5} e^{-3t}]/(15-5)!, \quad t = 1, 2, \ldots, 6.$$

Таким образом, для определенных значений *t* получаем следующие результаты:

T (дни)	1	2	3	4	5	6
μt	3	б	9	12	15	18
$p_s(t)$	0,0008	0,0413	0,1186	0,1048	0,0486	0.015

Заметим, что $p_5(t)$ есть вероятность возникновения необходимости (по условиям задачи) формирования в *t-я* день нового заказа на пополнение склада 15 ед. запасов. Эта вероятность достигает наибольшего значения при *t=3,* а затем постепенно падает по мере возрастания значения *t* (от *t=* до *t=6).* Если требуется знать вероятность, с которой новый заказ на пополнение запасов придется оформить *не позднее* чем в *t-я* день, то нужно вычислить вероятность того, что в *t-я* день уровень запасов окажется равным или будет меньше 5 ед. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} p_{n \le 5}(t) &= p_0(t) + p_1(t) + \ldots + p_5(t) = \\ &= 1 - [p_1(t) + p_2(t) + \ldots + p_{15}(t)] + p_1(t) + \\ &+ \ldots + p_5(t) = \\ &= 1 - [p_6(t) + \ldots + p_{15}(t)] = \\ &= 1 - \sum_{n=6}^{15} \frac{(3t)^{15-n} e^{-3t}}{(15-n)!}. \end{aligned}$$

По этой формуле получены результаты, приведенные в следующей таблице. (Читателю рекомендуется проверить правильность хотя бы одного из результатов вычислений по данной формуле.)

T (дни)	1	2	3	4	5	6
μt	3	б	9	12	15	18
$p_s(t)$	0,0012	0,0839	0,4126	0,7576	0,9303	0.9847

Вероятность возникновения необходимости делать новый заказ в *t-й* день монотонно (по мере увеличения значения *t)* возрастает.

Для анализа рассматриваемой ситуации необходимо также вычислить среднее число единиц запасов, которые будут по негодности ликвидироваться в конце недели. Это нетрудно сделать, вычислив математическое ожидание числа оставшихся неизъятыми из склада единиц запасов в конце шестого Дня

- -- - ----- - ----- :

$$E\{n \mid t=6\} = \sum_{n=0}^{15} n p_n(6).$$

Ниже приведены результаты вычислений по приведенной выше формуле для $\mu t = 18$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p_n(6)$	0,792	0,0655	0,0509	0,0368	0,0245	0,015	0,0083	0,0042	0,0018	0,0007	0,0002	0,0001

Мы видим, что для п=12, 13, 14 и 15 значение /?„(6) ничтожно мало, т. е. p_n (6)=0. Тогда в результате вычислений по формуле математического ожидания получаем

$$E\{n \mid t=6\} = 0{,}5537 \text{ ед.}$$

Это означает, что в конце недели в среднем обесценивается (идет на выброс) менее одной единицы запасов.

Задания для решения у доски

Используя данные, приведенные в примере 1, вычислите следующие величины:

(а) Вероятность того, что запасы будут истощены в конце третьего дня недели. *[Ответ.* $p_0(3)$=0,04147.]

(б) Вероятность того, что в течение четвертого дня недели со склада будет получена единица запасов при условии, что последнее изъятие из склада единицы запасов имело место в конце третьего дня этой недели.

[Ответ. P {время между последовательными изъятиями запасов <:1}=0,9502.]

(в) Вероятность того, что отрезок времени до следующего изъятия запасов со склада (при условии, что последний акт получения со склада имеющихся в нем запасов состоялся накануне) равняется самое большее одному дню.

[Ответ. Тот же, что и в п. (б).]

(г) Средний объем запасов, которыми будет располагать склад во второй день недели.

Пример 2. Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором. Пусть среднее количество требований, поступающих в систему в течение часа, равняется трем, а скорость обслуживания составляет 8 требований в час. Вероятность p_n того, что в системе окажется n требований, определяется на основе данных, получаемых в результате наблюдения за функционированием системы. Допустим, что мы имеем следующие статистические оценки;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	>8
Pn	0,625	0,234	0,088	0,033	0,012	0,005	0,002	0,001	0

На основе приведенных выше исходных данных можно вычислить L_s, W_s, W_q и L_q. Начнем с определения среднего числа требований, находящихся в обслуживающей системе:

$$L_s = \sum_{n=0}^{8} n p_n = 0\times 0{,}625 + 1\times 0{,}234 + 2\times 0{,}088 + 3\times 0{,}033 + 4\times 0{,}012 + 5\times 0{,}005 + 6\times 0{,}002 + 7\times 0{,}001 = 0{,}6 \text{ требования.}$$

Поскольку X=3, для средней продолжительности пребывания требования в системе имеем

$$W_s = L_s/\lambda = 0{,}6/3 \approx 0{,}2 \text{ ч.}$$

Учитывая, что и=8, получаем оценку средней продолжительности пребывания требования в очереди

$$W_q = W_s - 1/\mu = 0{,}2 - 1/8 = 0{,}075 \text{ ч,}$$

откуда следует, что среднее количество находящихся в очереди «клиентов» равняется

$L_q=\lambda W_q=3\times0,075=0,225.$

Задания для решения у доски

Используя в качестве исходных данные, приведенные в примере 2, вычислите следующие величины:

(а) Среднее количество находящихся в очереди требований, используя при этом непосредственно известные значения p_n.

(б) Среднее количество клиентов, которые обслуживаются системой.

Пример 3. Собранные сведения о режиме функционирования одной из автомобильных моечных станций показывают, что автомобили поступают на эту станцию в соответствии с пуассоновским распределением, а средняя интенсивность прибывающих на моечную станцию автомобилей равняется 5 автомобилей в час. Продолжительности выполнения работ, связанных с мытьем и чисткой автомобиля, естественно, для различных автомобилей неодинаковы, но, как показали наблюдения, подчиняются экспоненциальному закону со средним значением, равным 10 мин на один автомобиль. Моечная станция может одновременно обслуживать только один автомобиль.

Для анализа процесса обслуживания автомобилей на моечной станции с указанными выше операционными характеристиками можно использовать результаты, полученные для модели типа *(M/M/1)* : (GD/oo/oo); при этом следует считать емкость источника, генерирующего заявки на обслуживание, неограниченной, а площадку, отведенную для, стоянки ожидающих обслуживания автомобилей, способной разместить все прибывающие на станцию автомобили.

В рассматриваемом случае λ=5 автомобилей в час, а μ=60/10=6 автомобилей в час. Поскольку р=5/6, т. е. меньше единицы, система может функционировать в стационарном режиме. Чтобы иметь представление о том, какое количество стоянок необходимо организовать на моечной станции, требуется вычислить *L* по формуле

$$L_q=\rho^2/[1-\rho]=\frac{(5/6)^2}{1-(5/6)}\approx4,17\approx4 \text{ автомобиля.}$$

Однако известно, что *L* интерпретируется как математическое ожидание, так что количество ожидающих обслуживания автомобилей в произвольно выбранный момент времени может оказаться либо меньше, либо больше четырех. Поэтому следует подойти к решению задачи определения количества мест для стоянки нуждающихся в обслуживании автомобилей с позиции «разумного» обеспечения местами для стоянки поступающих на моечную станцию автомобилей, например задавшись целью обеспечить одновременно стоянку 80% прибывающих клиентов. Это эквивалентно выполнению условия

$$p_0+p_1+p_2+\ldots+p_s\ge0,8,$$

где *s* — подлежащее определению количество площадок для размещения поступающих на станцию автомобилей. (Следует отметить, что в число s *не* включена площадка, отведенная для мытья и чистки автомобилей.) Используя формулу для p_n, можно записать

$$(1-\rho)+(1-\rho)\rho+\ldots+(1-\rho)\rho^s\ge0,8.$$

Учитывая, что

$$(1-\rho)+(1-\rho)\rho+\ldots+(1-\rho)\rho^s=(1-\rho)(1+\rho+\ldots+\rho^s)=(1-\rho)[(1-\rho^{s+1})/(1-\rho)]=1-\rho^{s+1},$$

получаем $\rho^{S+1}\le0,2$. Прологарифмировав обе части данного неравенства (при р = 5/6), будем иметь

$$(s+1)\log(5/6)\le\log 0,2.$$

Поскольку значение log (5/6) отрицательное, деление на log (5/6) правой и левой частей приведенного выше неравенства изменяет знак неравенства, т. е. для s получаем

$$s\ge\log 0,2/\log(5/6)-1=7,8\approx8 \text{ площадок.}$$

Таким образом, для одновременного размещения по крайней мере 80% прибывающих автомобилей минимальное число мест для стоянок автомобилей должно быть приблизительно в два раза больше найденного выше значения L_q.

Можно получить и другую важную информацию о функционировании автомобильной моечной станции. Так, например, нетрудно вычислить долю времени, в течение которого моечная станция вынужденно бездействует (простаивает). Для этого достаточно определить вероятность того, что на станции не окажется ни одного автомобиля. Вероятность такого события равняется $p_0=1—p=0,17$, т. е. можно утверждать, что доля времени, в течение которого моечная станция будет простаивать, составляет 17%. С другой стороны, для оценки качества обслуживания владельцев автомобилей полезно знать среднее время пребывания автомобиля на моечной станции (от момента прибытия на станцию до момента полного завершения обслуживания). В данном случае значение этого показателя, обозначенного через W_s, равняется

$$W_s = 1/[\mu(1-\rho)] = 1/[6(1-5/6)] = 1 \text{ ч.}$$

Как видно, значение W_s оказалось большим, так что возникает необходимость изыскать ресурсы для увеличения скорости обслуживания.

Задания для решения у доски

Используя в качестве исходных данные, указанные в примере 3, вычислите следующие величины.

(а) Вероятность того, что прибывший на моечную станцию автомобиль будет вынужден ждать, пока его не начнут обслуживать *[Ответ.* 0,8333.]

(б) Вероятность того, что при наличии на моечной станции шести мест для стоянки автомобилей для прибывающего на станцию автомобиля не найдется места на стоянке. *[Ответ.*0,279.]

Пример 4. Вспомним о ситуации, рассмотренной в примере 3, где речь идет о функционировании моечной автостанции. Пусть станция располагает пятью площадками для стоянки прибывающих для обслуживания автомобилей. Если все площадки заняты, дополнительно прибывающие на моечную станцию автомобили вынуждены искать другую станцию.

Не исключено, что службу мойки автомобилей прежде всего интересует количество клиентов, которое теряет автомоечная станция из-за ограниченности мест для стоянки прибывающих автомашин. Практически это эквивалентно нахождению разности между λ и λэфф

$$\lambda - \lambda_{\text{эфф}} = \lambda p_N.$$

В рассматриваемом примере N=5+1=6, p=5/6, а

$$p_N = \left[\frac{1-(5/6)}{1-(5/6)^7}\right](5/6)^6 = 0{,}0771, \quad N=6.$$

Отсюда следует, что частота возникновения ситуаций, когда прибывающий на моечную станцию автомобиль не имеет возможности присоединиться к очереди, равняется 5x0,0774=0,387 автомобиля в час; при 8-часовом рабочем дне это эквивалентно тому, что моечная станция в среднем за день будет терять три автомобиля. Ясно, что решение относительно расширения площади для стоянки автомобилей на моечной станции должно основываться на оценке экономического ущерба, который обусловлен потерей клиентов при наличии на станции всего пяти мест для стоянки автомобилей.

Пусть требуется определить среднее время пребывания на моечной станции поступающих на эту станцию автомобилей. Сначала вычислим L_s, что позволит затем найти W_s:

$$L_s = \frac{(5/6)[1-7(5/6)^6+6(5/6)^7]}{(1-5/6)[1-(5/6)^7]} = 2{,}29 \text{ автомобиля.}$$

С учетом того, что

$$W_s = L_s/\lambda_{эфф} = 2{,}29/4{,}613 = 0{,}496 \text{ ч.}$$

$\lambda_{эфф} = \lambda(1 - p_N) = 5(1 - 0{,}0774) = 4{,}613$, получаем

Таким образом, при введении ограничения на количество мест для стоянки (N=6) среднее время ожидания по сравнению со случаем, когда на моечную станцию могли попасть все нуждающиеся в обслуживании автомобили, сократилось примерно на полчаса. Это было достигнуто за счет «потери» в среднем трех автомобилей вдень из-за недостаточности мест для стоянки прибывающих на станцию автомобилей.

Задания для решения у доски

Используя в качестве исходных данные, приведенные в примере 4, вычислите следующие величины:

(а) Вероятность того, что прибывший на моечную станцию клиент сразу же будет принят на обслуживание. *[Ответ.* 0,231.]

(б) Среднюю продолжительность ожидания поступившего на моечную станцию автомобиля от момента прибытия до начала обслуживания. *[Ответ.* 0,3297 ч.]

(в) Среднее число занятых (в произвольно взятый момент времени) автомобильных стоянок. *[Ответ.* 1,52 стоянки.]

Пример 5. Предположим, что на автомобильной моечной станции мойка автомобиля осуществляется автоматическим устройством, так что продолжительности обслуживания клиентов одинаковы и заранее известны (фиксированы). Пусть мытье автомобиля автоматическим устройством занимает ровно 10 мин.

Приступая к анализу процесса обслуживания автомобилей, напомним, что $\lambda=5$. Поскольку продолжительность обслуживания является постоянной, имеем $E\{t\}$ = 10/60 = 1,6, а $var\{t)$ = 0. Тогда получаем

$$L_s = 5\,(1/6) + \frac{5^2\,[(1/6)^2 + 0]}{2\,(1 - 5/6)} = 2{,}917 \text{ автомобиля,}$$

$$L_q = 2{,}917 - (5/6) = 2{,}083 \text{ автомобиля,}$$

$$W_s = 2{,}917/5 = 0{,}583 \text{ ч,}$$

$$W_q = 2{,}083/5 = 0{,}417 \text{ ч.}$$

Задания для решения у доски

(а) Обратитесь к примеру 5 и сделайте предположение о том, что автоматическое моечное устройство можно приспособить для обслуживания как крупногабаритных, так и малогабаритных автомобилей. Пусть на мытье крупногабаритного автомобиля расходуется 12 мин, а на мытье малогабаритного автомобиля — 6 мин. Каким окажется очередной из прибывших автомобилей, предсказать невозможно, но имеются основания считать, что в любом интервале времени вероятность поступления на моечную станцию крупногабаритного автомобиля равняется вероятности поступления на эту станцию малогабаритного автомобиля. (Другими словами, с вероятностью 50% продолжительность обслуживания равняется 6 мин, и с такой же вероятностью она равняется 12 мин.) Вычислите среднее значение W *[Ответ*0,25 ч.]

Тема 5. Имитационное моделирование.

Метод Монте-Карло

При использовании моделирования на практике часто упускается из виду, что имитационное моделирование, по существу, представляет собой *статистический* эксперимент, результаты которого должны интерпретироваться на основе соответствующих статистических тестов. Кроме того, необходимо понимать специфику такого рода моделирования — его результаты достигают стационарных значений только после многократного повторения эксперимента. Для того чтобы модель действительно давала представление о том, что можно ожидать в будущем, прогоны модели должны продолжаться «достаточно долго», гарантируя достижение условий стационарности. Обычно вопрос, что такое «достаточно долго», очень сложен, поскольку ответ зависит от типа моделируемой системы, а также от начальных условий прогона модели. В этом разделе рассматриваются указанные аспекты имитационного моделирования.

Пример 1. Пусть требуется определить площадь круга известного диаметра с помощью выборок из значений случайной величины. Впишем круг в квадрат; таким образом, стороны квадрата будут равны диаметру круга. Разобьем далее квадрат на единичные квадраты (каждый площадью 1). Разумеется, можно найти площадь круга подсчетом числа единичных квадратов (или их частей), попавших внутрь круга. Однако наша цель состоит в использовании выборок, поскольку при моделировании информацию можно получать лишь таким образом. Чтобы объяснить, как это делается, рассмотрим конкретный численный пример.

Пусть круг имеет радиус r=5 см и его центр в точке (1,2). Уравнение окружности будет иметь вид

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25.$$

На рис. 1 изображены круг и описанный около него квадрат. Квадрат определяется его вершинами (—4, —3), (6, —3), (—4, 7) и (6, 7), которые получаются непосредственно из геометрических свойств фигуры. Любая точка *(x, y)* внутри квадрата или на его границе должна удовлетворять неравенствам $-4\le x\le 6$ и $-3\le y\le 7$

Применение выборок при использовании метода Монте-Карло основано на предположении, что все точки в квадрате $-4\le x\le 6$ и $-3\le y\le 7$ могут появляться с одинаковой вероятностью, т. е. *x и y* распределены равномерно с плотностями вероятности

$$f(x)=\begin{cases}1/10, & -4\leqslant x\leqslant 6,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}1/10, & -3\leqslant y\leqslant 7,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Определим теперь точку *(x, y)* в соответствии с распределениями *f(x)* и *f(y)*. Продолжая этот процесс, подсчитаем число точек, по-

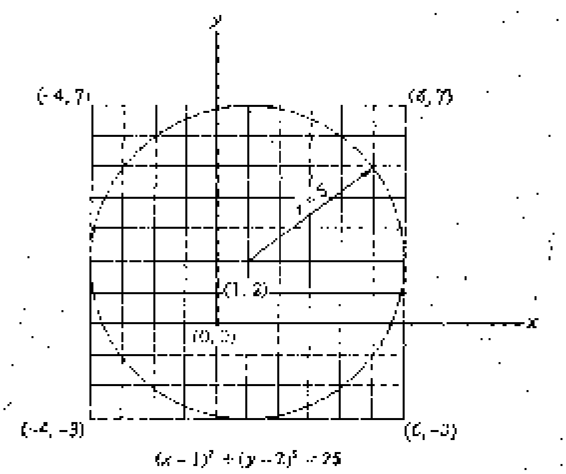


Рис. 1

павших внутрь круга или на окружность. Предположим, что выборка состоит из *n* наблюдений и *m* из *n* точек попали внутрь круга или на окружность. Тогда

$$\text{Оценка площади круга} = m/n \ (\text{площадь квадрата}) = (m/n)(10\times 10) = 100\ m/n.$$

Подобный способ оценивания площади круга можно обосновать тем, что в процессе получения выборки любая точка *(x, y)* может с одинаковой вероятностью попасть d любое место квадрата. Поэтому отношение *m/n* представляет оценку площади круга относительно площади квадрата.

Для изучения влияния статистической ошибки при моделировании задача решалась для различных значений *n*, равных 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000 и 10 000. Кроме того, при каждом *n* было проведено 10 прогонов, в каждом из которых использовались различные последовательности случайных чисел из интервала [0, 1].

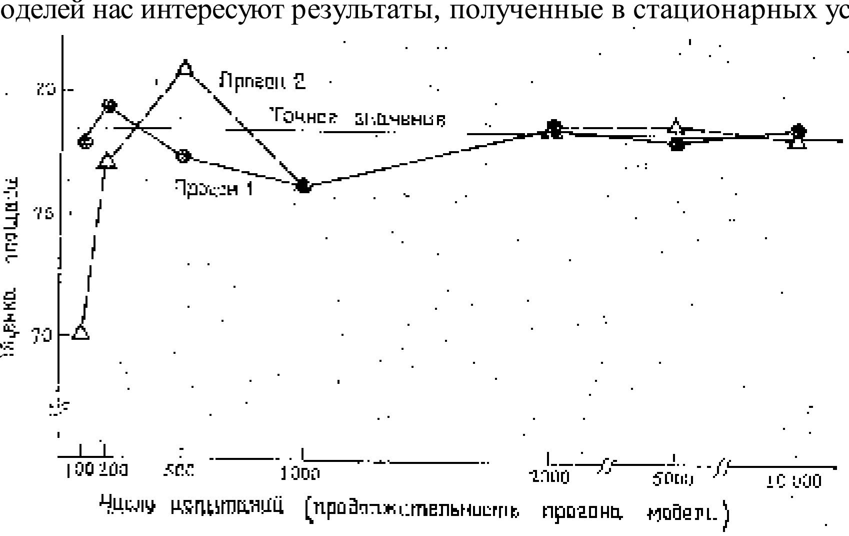
Таблица 1

Номер прогона	Оценка площади круга (r = 5 см) при данном числе испытаний n						
	100	200	500	1000	2000	5000	10 000
1	78	79,5	77,4	76,2	78,8	78,22	78,77
2	70	77	81	76,2	78,7	78,6	78,23
3	81	79,5	77,2	79	78,15	77,72	78,85
4	70	77	77	79,7	78,7	77,76	78,63
5	79	77	79,4	77	79,45	79	78,21
6	91	76	79,2	78,8	77,65	78,60	78,27
7	77	78	79	77,3	78,4	79,08	78,64
8	78	79,5	80,2	80,2	77,05	78,54	78,27
9	82	76,5	80,4	79,5	79,75	78,34	78,67
10	75	82	75,6	79,8	79	78,22	78,1[illegible]
Среднее	77,1	78,2	78,64	78,37	78,56	78,42	78,57
Дисперсия	18,3	2,5	3,1	2,4	0,66	0,23	0,22
	Точное значение площади 78,54 см²						

В табл. 1 приведены результаты эксперимента, исходя из которых можно сделать следующие заключения.

1. С ростом числа генерируемых точек (т. е. *продолжительности прогона модели)* оценки площади круга приближаются к точному значению (78,54 см^2). На рис. 2 показаны оценки площади прогонов 1 и 2 в зависимости от продолжительности прогона *n*. Мы видим, что сначала оценки колеблются около точного значения, а затем стабилизируются. Это условие обычно достигается после повторения эксперимента достаточное количество раз. Наблюдаемое явление типично для результатов любой имитационной модели. Обычно в большинстве имитационных моделей нас интересуют результаты, полученные в стационарных условиях.

дляс



Рис, 2

2. Десять прогонов модели (отличающихся друг от друга только последовательностью используемых случайных чисел) дают различные оценки при одном и том же значении *n*. Каждый прогон можно рассматривать как наблюдение в эксперименте, связанном с моделированием.

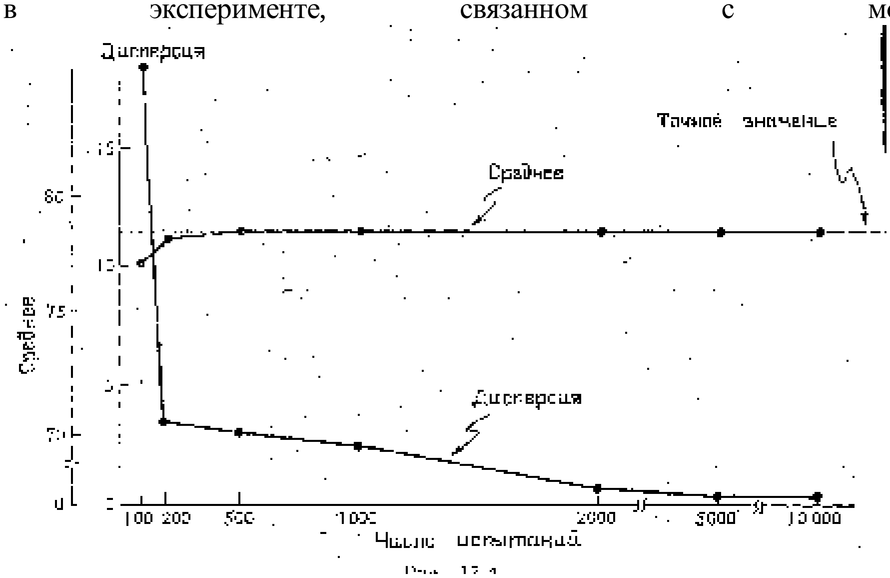


Рис.3.

3. Интересно отметить, что влияние переходных условий уменьшается, если *усреднить* результаты 10 серий. Это иллюстрирует рис. 3, на котором показана зависимость среднего от *n*. Кроме того, на рисунке видно, что для каждого *n* при достижении стационарных условий дисперсия убывает. При возрастании *n* от 100 до 200 дисперсия резко уменьшается с 18,3 до 3,5. За исключением этого интервала, столь резкого уменьшения дисперсии нигде больше не наблюдается. Последнее замечание указывает на то, что существует предел, за которым увеличение продолжительности прогона модели уже не дает существенного повышения *точности* результата, измеряемой дисперсией. Это замечание представляется чрезвычайно важным, поскольку затраты на эксплуатацию имитационной модели прямо пропорциональны продолжительности прогонов. Поэтому желательно найти компромисс между большой точностью (т. е. малой дисперсией) и небольшими затратами на процедуру получения результатов.

4. Ввиду того что оценки площади имеют разброс, важно, чтобы результаты эксперимента, связанного с моделированием, были выражены в виде *доверительных интервалов*, показывающих величину отклонения от точного значений. В рассматриваемом примере, если *A* представляет собой точное значение площади, а *A* и s^2 — среднее и дисперсию *N* наблюдений, то 100 (1—а)%-ный доверительный интервал для *A* задается как

$$\bar{A} - (s/\sqrt{N})\, t_{\alpha/2,\; N-1} \leqslant A \leqslant \bar{A} + (s/\sqrt{N})\, t_{\alpha/2,\; N-1},$$

где Ах/2, *N-г* обозначает (100а/2)%-ную точку t-распределения с *N*—1 степенями свободы. Заметим, что *N* обозначает число наблюдений (прогонов), и следует отличать это число от *n*, продолжительности прогона модели.

Доверительные интервалы становятся меньше, когда наблюдения получаются в стационарных условиях, т. е. с увеличением продолжительности серии. Хотя в *любом статистическом эксперименте* мы ожидаем уменьшения доверительных интервалов с ростом числа наблюдений *N,* особенность эксперимента, связанного с моделированием, состоит в том, что величина доверительного интервала зависит, кроме того, от продолжительности прогона модели. Таким образом, чем продолжительнее прогон, тем меньше разброс результатов, а значит, тем более точные оценки мы получаем. Другими словами, для улучшения результатов моделирования предпочтительнее получать наблюдения после достижения стационарных условий.

Пример 2. Моделируется система массового обслуживания, поступление требований в которой подчинено пуассоновскому распределению со средним 3 клиента в час, а время обслуживания равно 0,2 ч с вероятностью 0,5 или 0,6 ч с вероятностью 0,5. Клиенты обслуживаются согласно дисциплине «первым пришел — первым обслуживаешься»; длина очереди, а также источник поступления клиентов не ограничены. Предположим, что в начальный момент моделирования клиентов нет.

Существует ряд сгенерированных случайных чисел:

058962
673284
479909
948578
613960
593277
934123
178239
347270 и т.д.

Для пуассоновского входного потока со средней интенсивностью λ=3 клиента в час промежутки времени между требованиями имеют экспоненциальное распределение и могут быть получены из формулы

$$p = -(1/\lambda)\ \ln R = -(1/3)\ \ln R.$$

Поскольку время обслуживания равно либо 0,2, либо 0,6 ч с *равными* вероятностями, время обслуживания определяется как

$$q = \begin{cases} 0{,}2\ \text{ч} & \text{при}\quad 0 \leqslant R \leqslant 0{,}5, \\ 0{,}6\ \text{ч} & \text{при}\quad 0{,}5 \leqslant R \leqslant 1. \end{cases}$$

Как указывалось выше, в однофазной системе обслуживания возможны события только двух типов: поступление клиентов и их уход (окончание обслуживания). Действия, вызываемые этими событиями, можно охарактеризовать следующим образом.

Событие, связанное с поступлением клиента

1. Генерация момента времени, в который поступает следующее требование на обслуживание, путем вычисления промежутка времени между требованиями *p* и добавления его к текущему времени моделирования. (Это действие необходимо для обеспечения непрерывности процесса моделирования.)
2. Проверка состояния системы (простой или работа).
   а. Если система *простаивает,* то начать обслуживание поступившего клиента, сгенерировать время обслуживания *q* и вычислить время окончания обслуживания (текущее время+q); изменить состояние системы на рабочее и скорректировать протокол простоя системы.
   б. Если система *работает,* поставить поступившего клиента в очередь и увеличить ее длину на единицу.

Событие, связанное с окончанием обслуживания

1. Проверка состояния очереди (пустая или непустая).
   а. Если очередь *пуста,* объявить простой системы.
   б. Если *непуста,* то
   начать обслуживание первого по очереди клиента, уменьшить длину очереди на единицу и скорректировать протокол времени ожидания;
   получить время обслуживания клиента *q* и вычислить время окончания обслуживания (текущее время +*q*).

Поскольку в этом примере система начинает работу при пустой очереди, она начинает функционировать с состояния простоя. Первая заявка на обслуживание поступает через

$p_1 = -(1/3)\ln 0{,}058962 = 0{,}94$ ч.

Таким образом, модель переходит из t=0 в t=0,94. В момент t=0,94 происходит событие, связанное с поступлением требования на обслуживание, поэтому, следуя приведенной выше схеме, вычисляем время поступления следующего требования: .

$t=0,94+[-(1/3)\ \ln 0,673284]=1,07.$

Теперь, поскольку система простаивает, начинается обслуживание текущего клиента; время его обслуживания, задаваемое R=0,479909, равно q=0,2 ч. Время окончания обслуживания вычисляется как

$$t=0,94+0,2=1,14.$$

Система объявляется работающей, а время простоя корректируется следующим образом:

$$\text{Время простоя}=0+0,94=0,94\ \text{ч.}$$

Осуществившиеся до настоящего момента события показаны на рис.

Следующее по времени событие — поступление требования в момент t = 1,07. Поскольку система продолжает работать, требование ставится в очередь, а длина очереди корректируется:

$Q=0+1=1$ (в момент $t=1,07$).

Следующее требование поступает в момент времени

$$t=1,07+[-(1/3)\ \ln 0,948578]=1,09.$$

Заметим, что все события, осуществившиеся в момент t=1,07 или ранее, относятся к предыстории, и их можно исключить из рассмотрения. Другими словами, в процессе моделирования необходимо хранить информацию лишь о будущем.

Следующее событие состоит в поступлении требования на обслуживание в момент t=1,09. Поскольку система все еще находится в рабочем состоянии, длина очереди должна быть скорректирована;

$Q=1+1=2$ (в момент $t=1,09$),

а следующее требование поступит в момент

$t=1,09+(-1/3)\ln 0,61396=1,25.$

Следующее событие, происходящее в момент e=1,14, представляет собой окончание обслуживания. Поскольку очередь непуста, начинается обслуживание первого по очереди клиента. Длина очереди изменяется:

$Q=2-1=1$ (в момент $t=1,14$),

а суммарное время ожидания становится равным

$$W=0+(1,14-1,07)=0,07\ \text{ч.}$$

Используя R=0,934123 получаем время завершения обслуживания данного клиента:

$t=1,14+0,6=1,74.$

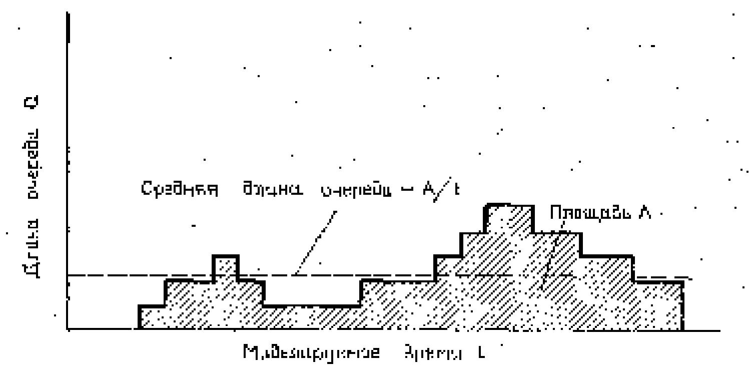
Процедура повторяется до тех пор, пока не будет промоделирован весь интервал T. После этого можно определить различные операционные характеристики, исходя из периода моделирования:

$$\begin{pmatrix}\text{Доля времени простоя}\\ \text{системы, \%}\end{pmatrix} = \frac{\text{Суммарное время простоя}}{\text{Период моделирования } T} \times 100,$$

$$\begin{pmatrix}\text{Среднее время ожидания}\\ \text{клиентом обслуживания}\end{pmatrix} = \frac{\text{Суммарное время ожидания } W}{\text{Число обслуживаемых клиентов}}.$$

/

Вычисление средней длины очереди осуществляется несколько иначе. Из рис. видно, каким образом обычно меняется длина очереди в зависимости от t за моделируемый период времени продолжительности *T*.



Например, в рассматриваемой здесь обслуживающей системе длина очереди Q=0 в период между t=0 и t=1,07, Q=1 между t=1,07 и t=1,09 и Q=2 между t==1,09 и t=1,14. Эта информация необходима для получения графика на рис. Средняя длина очереди представляет собой среднее значение, изображенно епунктирной линией, т. е.

$$\text{Средняя длина очереди } \bar{Q} = \frac{\text{Площадь } A}{\text{Моделируемый период } T}.$$

Заметим, что для получения *A* необязательно ждать истечения периода *T*, поскольку *A* можно вычислять через приращения каждый раз, когда меняется *Q*. Так, в данном примере Q = 0 между t = 0 и t = 1,97 и А=0; Q=l между t=1,07 и t=1,09 и, следовательно, А =0+1 (1,09— 1,07)=0,02; Q=2 между t=1,09 и t=1,14 и *A* =0,02+2 (1,14—1,09)=0,12. Этот процесс приращений продолжается до тех пор, пока t не станет равным *T*.

Моделирование дает и другую информацию, например о распределении числа клиентов и распределении времени ожидания, которую можно восстановить с помощью соответствующих показателей, представленных в форме гистограммы. Процедура имеет большое сходство с физическим экспериментом.

Задание для решения у доски. В примере очередное событие состоит в поступлении требования на обслуживание в момент t=1,25. Используя последовательность случайных чисел (0,178239, 0,347270, 0,564395, 0,220998), продолжите моделирование до поступления еще двух требований на обслуживание.

(а) Определите тип и время наступления всех событий между t=1,25 и моментами поступления двух новых требований. (Округлите результаты всех вычислений до двух десятичных знаков.)

[Ответ. Поступление требования в момент t=1,25, завершение обслуживания в момент t=1,74, поступление требования в момент t==1,82, завершение обслуживания в момент t=1,94, поступление требования в момент t=2,011.

(б) Вычислите изменения Q и *A* в промежутке l,14<t<2,01, где t=2,01 — момент появления второго требования на обслуживание

8. Методические указания по выполнению лабораторных работ (практикумов)

Лабораторная работа № 1.

Решение задач линейного программирования с помощью Excel

Рассмотрим задачу распределения ресурсов.

Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, называется нормой расхода. Нормы расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, приведены на рис.4. Там же приведено наличие располагаемого ресурса.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ресурс	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	знак	наличие
2	Прибыль	60	70	120	130	max	
3	Трудовые	1	1	1	1	<=	16
4	Сырье	6	5	4	3	<=	110
5	Финансы	4	6	10	13	<=	100

Рисунок 4

Составим математическую модель, для чего введем следующие обозначения:

x_j – количество выпускаемой продукции j-го типа, $j=1,4$;

b_i – количество располагаемого ресурса i-го вида, $i=1,3$;

a_{ij} – норма расхода i-го ресурса для выпуска единицы продукции j-го типа;

c_j – прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j-го типа.

Как видно из рис.4, для выпуска единицы Прод1 требуется 6 единиц сырья, значит, для выпуска всей продукции Прод1 требуется $6x_1$ единиц сырья, где x_1 – количество выпускаемой продукции Прод1. С учетом того, что для других видов продукции зависимости аналогичны, ограничение по сырью будет иметь вид:

$$6x_1+5x_2+4x_3+3x_4\le110$$

В этом ограничении левая часть равна величине потребного ресурса, а правая показывает количество имеющего ресурса.

Аналогично можно составить ограничения для остальных ресурсов и написать зависимость для целевой функции. Тогда математическая модель будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16\\
&6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110\\
&4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100\\
&x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решим данную задачу симплекс-методом при помощи электронной таблицы Excel.

В систему (1) введем дополнительные переменные y_i и выполним переход от системы неравенств к системе уравнений. С точки зрения содержания величина y_i равна величине неиспользованного ресурса.

$$\left.\begin{aligned}
&F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16\\
&6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110\\
&4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100\\
&x_j \ge 0;\ y_i \ge 0;\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Систему (2) перепишем в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&F = 0 - (60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4) \to \max\\
&y_1 = 16 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\\
&y_2 = 110 - (6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4)\\
&y_3 = 100 - (4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4)\\
&x_j \ge 0;\ y_i \ge 0;\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Систему (3) можно представить в виде таблицы приведенной на рис.5.

	A	B	C	D	E	F
1	**Величина**	**Своб.член**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**
2	**F**	0	-60	-70	-120	-130
3	**y_1**	16	1	1	1	1
4	**y_2**	110	6	5	4	3
5	**y_3**	100	4	6	10	13

Рис. 5

1. Сделать форму для ввода условий задачи.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**Переменные**				
2	**Имя**	**Прод1**	**Прод2**	**Прод3**	**Прод4**			
3	значение							
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.					ЦФ	напр	
6	коэф.в ЦФ							
7				**Ограничения**				
8	**Вид**					левая часть	знак	правая часть
9	Трудовые							
10	Сырье							
11	Финансы							

2. Ввести исходные данные в форму.
3. Ввести зависимости из математической модели (1), используя мастер функций (функция **суммпроизв)**.
4. Решить задачу используя функцию Поиск решения из меню Сервис.

<u>Задания для самостоятельной работы:</u>

1. Дана совокупность ограничений.

$x_1+7x_2+3x_3+7x_4\le46$
$3x_1-x_2+x_3+2x_4\le8$
$2x_1+3x_2-x_3+x_4\le10$

Решить задачу ЛП при следующих целевых функциях:
А) максимизировать $z=2x_1+x_2-3x_3+5x_4$
Б) максимизировать $z=-2x_1+6x_2+3x_3-2x_4$
В) максимизировать $z=3x_1-x_2+3x_3+4x_4$
Г) минимизировать $z=5x_1-4x_2+6x_3+8x_4$
Д) минимизировать $z=3x_1-6x_2-2x_3+4x_4$

2. Составить математическую модель и провести экономический анализ задачи с использованием электронной таблицы Excel.

Фирма изготавливает два вида красок для внутренних работ (В) и наружных работ (Н). Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные ззапасы:

Исходный продукт	Расход исходн. продуктов на 1 т краски		Суточный запас, т
	Краска Н	Краска В	
Пигмент	3	2	12
Олифа	1	2	6
Доход от реализации	1	4	MAX

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для наружных (внутренних) работ никогда не превышает 3,5 т.
Цена продажи 1 т краски для наружных работ 1 ден. ед., для внутренних работ – 4 ден.ед..
Какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

3. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии — 60 изделий, второй линии — 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, па радиоприемник второй модели — 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыли от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равны 30 и 20

долл. соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

4. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках, Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 ч в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	Станок 2	станок 3	
1	10	6	8	2 долл.
2	5	20	15	3 долл.

5. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 долл. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл., а каждая минута телерекламы — в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в два раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио- и телерекламой.

6. Фирма производит два вида продукции — A и B. Объем сбыта продукции вида A составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции A и B используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции A составляет 2 фунта, а на единицу продукции B — 4 фунта. Цены продукции A и B равны 20 и 40 долл. соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции A и B.

Лабораторная работа 2. Решение линейной оптимизационной задачи в MathCad.

Формулировка задачи: найти значения переменных x_v x_9, x_v x_4, удовлетворяющие системе ограничений, при которых линейная функция обращается в минимум (максимум).

Рассмотрим решение задач линейного программирования на примере следующей.

ЗАДАЧА. Средствами Mathcad решить задачу линейного программирования:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 7, \\ x_2 - 2x_3 \le -1, \\ 4x_3 - x_4 \le 3, \\ 5x_4 + 2x_1 \ge 14. \end{cases}$$

Задачу в Mathcad можно решить двумя способами, используя к*омпонентную* и *матричную* формы записи.

Для решения задачи линейного программирования в компонентной форме надо выполнить следующие действия:

1. Определить начальное приближение неизвестных (в нашем случае это переменные x_1, x_2, x_3, x_4). Для задачи линейного программирования выбор значений начального приближения не играет столь важной роли, как при поиске экстремума нелинейной функции.

2. Задать функцию цели, в данном случае - L(x1,x2,x3,x4)

3. Начать решающий блок служебным словом Given.

4. Внутри решающего блока ввести ограничения, учитывая условия положительности всех x*г*

5. Завершить решающий блок обращением к функции Minimize (Maximize).

$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1 \quad x4 := 1$

$L(x1, x2, x3, x4) := x1 + x2 + x3 - x4$

Given

$3x1 - x2 \le 7 \qquad x4 \ge 0 \quad x2 \ge 0 \quad x1 \ge 0 \quad x3 \ge 0$

$x2 - 2x3 \le -1 \quad 4 \cdot x3 - x4 \le 3 \quad 5x1 + 2 \cdot x4 \ge 14$

$x := \text{Maximize}(L, x1, x2, x3, x4)$

$$x = \begin{pmatrix} 2.588 \\ 0.765 \\ 0.882 \\ 0.529 \end{pmatrix}$$

$L(x_0, x_1, x_2, x_3) = 3.706$

Для решения в матричной форме необходимо переписать задачу в матричном виде. Поскольку система неравенств имеет разные знаки, умножим последнее уравнение на -1. Уравнения в матричной форме имеют следующий вид:

$$L = Cx \to \max$$
$$Mx \le v,$$
$$x \ge 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи линейного программирования в матричной форме требуется:

1. Определить матрицу *M,* вектора Си v.
2. Задать вектор начального приближения *x*.
3. Определить функцию цели L как скалярное произведение векторов Си *x*.
4. В решающем блоке ввести ограничения $Mx < v, x > 0$.

Обратиться к функции Maximize (или Minimize), в качестве параметров передав функцию L и вектор x

$$C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Определяем вектор x, вводя значение x_3 $\quad$ x3 := 1

Определяем функцию цели L *как скалярное произведение C на x*

$L(x) := C \cdot x$

Given $\quad$ В решающем блоке вводим ограничения

Решение транспортной задачи

$$M \cdot x \le v \quad x \ge 0$$

$$z := \mathrm{Maximize}(L, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 2.588 \\ 0.765 \\ 0.882 \\ 0.529 \end{pmatrix}$$

$$L(x) = 3.706$$

Рассмотрим одну из разновидностей задачи линейного программирования -*транспортную задачу* - на следующем примере.

ЗАДАЧА. В кондитерский концерн входят три фабрики и пять магазинов. Фабрики производят 250, 275 и 225 единиц продукции в неделю. Пяти магазинам еженедельно требуется 100, 200, 50, 275 и 125 единиц продукции. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин приведена в табл. 8.2.

Таблица Транспортные расходы

	Магазины				
	1	2	3	4	5
Завод № 1	1.5	2	1.75	2.25	2.25
Завод № 2	2.5	2	1.75	1	1.5
Завод № 3	2	1.5	1.5	1.75	1.75

Необходимо составить план перевозок с целью минимизации суммарных *транспортных расходов*.

Различают три вида транспортных задач:,

> сбалансированная транспортная задача - количество произведенной фабриками продукции равно суммарной потребности в ней;

> транспортная задача в условиях перепроизводства - для сведения ее к сбалансированной транспортной задаче вводится фиктивный магазин, стоимость перевозки единицы продукции в который можно принять равной 0;

> транспортная задача в условиях дефицита - в этом случае для сведения ее к сбалансированной транспортной задаче вводится фиктивная фабрика, стоимость перевозки с которой считают равной 0.

Рассмотрим математическую модель транспортной задачи. Пусть x_{ij} - неизвестный объем перевозок с i-й фабрики в j-й магазин. Требуется минимизировать суммарные транспортные расходы $z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$, где с. - стоимость перевозки с i-и фабрики в i магазин. Неизвестные *x* должны удовлетворять следующим ограничениям:

> объемы перевозок не могут быть отрицательными *(x..* > 0); > вся продукция должна быть вывезена с заводов, то есть

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i,\ \ i=1..3,$$

где *a*- объем производства на i-м заводе;

> потребности всех магазинов должны быть полностью удовлетворены, то есть $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j$, *j* = 1 ..5 , где *Ь.* - потребности *j-го* магазина.

Таким образом, получается следующая оптимизационная задача: найти значения матрицы *X(x.),* при которых функция цели $z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$ достигает своего минимального значения и удовлетворяются ограничения

$$x_{ij}\ge 0,$$
$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i,\ \ i=1..3,$$
$$\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=b_j,\ \ j=1..5.$$

При решении транспортной задачи в Mathcad с помощью решающего блока надо:

1. Определить матрицу Си векторы *a* и *b.*
2. Сформировать функцию цели *z.*
3. Задать матрицу начального приближения *x.*
4. В решающем блоке ввести ограничения, сформировав для этого массивы, в которых хранятся

$\sum_{i=1}^{3} x_{ij}$ и $\sum_{j=1}^{5} x_{ij}$.

5. Решить задачу оптимизации с помощью функции Minimize.

Решение транспортной задачи иллюстрируют рис.

Исходные данные для транспортной задачи:

Матрица стоимостей перевозок С ORIGIN := 1

$$C := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.75 & 1.25 & 2.25 \\ 2.5 & 1.5 & 1.75 & 1 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 1.5 & 1.75 & 1.75 \end{pmatrix}$$

Массив потребностей по магазинам $b := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 275 \\ 125 \end{pmatrix}$

Массив производственных мощностей фабрик $a := \begin{pmatrix} 250 \\ 275 \\ 225 \end{pmatrix}$

Условие сбалансированной задачи

$\sum_{i=1}^{3} a_i = 750$ $\quad \sum_{j=1}^{5} b_j = 750$

начальное приближение

$x_{3,5} := 0$

Функции sum_rows(x) и sum_columns(x) формируют массивы, в которых хранятся суммы по строкам $\sum_{j=1}^{5} x_{i,j}$ и столбцам $\sum_{i=1}^{3} x_{i,j}$

соответственно

```
sum_rows(x) :=  | for i ∈ 1..3          sum_columns(x) :=  | for j ∈ 1..5
                |   | v_i ← 0                              |   | v_j ← 0
                |   | for j ∈ 1..5                         |   | for i ∈ 1..3
                |   |   v_i ← v_i + x_i,j                  |   |   v_j ← v_j + x_i,j
                | v                                        | v
```

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Given

$x \geq 0$ sum_rows$(x) = a$ sum_columns$(x) = b$

$x :=$ Minimize(Z, x)

$$x = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 125 & 125 \\ 0 & 175 & 50 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z(x) = 1025$$

ЗАДАЧА. В кондитерский концерн входят три фабрики и пять магазинов. Фабрики производят 250, 275 и 235 единиц продукции в неделю. Пяти магазинам еженедельно требуется 100, 200, 50, 275 и 125 единиц продукции. Нужно составить план перевозок так, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

Задача не является сбалансированной, а представляет собой *транспортную задачу в условиях перепроизводства*. Для ее решения (как уже отмечалось) вводится фиктивный магазин, в который надо перевезти количество продукции, равное разности между продукцией, произведенной на всех фабриках и необходимой магазинам (в нашем случае это 10). Стоимость перевозки в фиктивный магазин принимаем равной 0. После этого получается сбалансированная транспортная задача, которую можно решить описанным выше способом.

$ORIGIN := 1$

$$C := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.75 & 1.25 & 2.25 & 0 \\ 2.5 & 1.5 & 1.75 & 1 & 1.5 & 0 \\ 2 & 1.5 & 1.5 & 1.75 & 1.75 & 0 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 275 \\ 125 \\ 10 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 250 \\ 275 \\ 235 \end{pmatrix}$$

$x_{3,6} := 0$

$$sum\_rows(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..3 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_i \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..6 \\ \quad v_i \leftarrow v_i + x_{i,j} \end{array} \right. \\ v \end{array} \right.$$

$$sum\_columns(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..6 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..3 \\ \quad v_j \leftarrow v_j + x_{i,j} \end{array} \right. \\ v \end{array} \right.$$

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j} \right)$$

Given

$x > 0 \quad sum\_rows(x) = a \quad sum\_columns(x) = b$

$x := Minimize(Z, x)$

$$x = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 140 & 0 & 10 \\ 0 & 15 & 0 & 135 & 125 & 0 \\ 0 & 185 & 50 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z(x) = 1022.5$$

ЗАДАЧА. В кондитерский концерн входят три фабрики и пять магазинов. Фабрики производят 250, 275 и 225 единиц продукции в неделю. Пяти магазинам еженедельно требуется 100, 200, 50, 275 и 150 единиц продукции. Нужно составить такой план перевозок, который позволит минимизировать суммарные транспортные расходы.

Задача *транспортная задача в условиях дефицита*. Для ее решения введем фиктивную фабрику, производящую недостающее количество продукции. Стоимость перевозки с этой фабрики примем равной 0.

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 10 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 2 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a := \begin{pmatrix} 250 \\ 275 \\ 225 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 275 \\ 150 \end{pmatrix} \quad ORIGIN := 1 \quad C := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.75 & 1.25 & 2.25 \\ 2.5 & 1.5 & 1.75 & 1 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 1.5 & 1.75 & 1.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_4 := \sum_{j=1}^{5} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i \qquad x_{4,5} := 0$$

```
sum_rows(x) :=  | for i ∈ 1..4            sum_columns(x) :=  | for j ∈ 1..5
                |   | v_i ← 0                                |   | v_j ← 0
                |   | for j ∈ 1..5                           |   | for i ∈ 1..4
                |   |   v_i ← v_i + x_i,j                    |   |   v_j ← v_j + x_i,j
                | v                                          | v
```

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Given

$$x \ge 0 \qquad sum\_rows(x) = a$$

$$sum\_columns(x) = b$$

$$x := Minimize(Z, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 125 & 125 \\ 0 & 175 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \qquad Z(x) = 1025$$

Решение задачи о назначениях

Задачи о назначении представляют собой еще один класс задач линейного программирования.

ЗАДАЧА Четверо рабочих могут выполнять четыре вида работ. В матрице С хранятся стоимости выполнения работ (c_{ij}- стоимость выполнения I-м рабочим j работы):

Требуется составить план выполнения всех четырех работ таким образом, чтобы их стоимость была минимальной. Если число рабочих совпадает с количеством работ, то данную задачу принято называть сбалансированной. Несбалансированная задача сводится к сбалансированной путем добавления дополнительных строк (или столбцов) с очень большими значениями стоимости работ.

Для решения задачи введем матрицу неизвестных X (x_{ij} = 1, если i-й рабочий выполняет j-ю работу, и x_{ij}= О - в противном случае).

Задачу можно сформулировать следующим образом: найти значения x_{ij}, при которых функция цели

$z=-\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$ достигает минимального значения и выполняются следующие ограничения:

$$x_{ij}\ge 0,\ x_{ij}=\{0,1\},$$
$$\sum_{j=1}x_{ij}=1,\quad i=1..4,$$
$$\sum_{i=1}^{4}x_{ij}=1,\quad j=1..4.$$

Эта задача в Mathcad решается аналогично транспортной задаче с помощью решающего блока

Обратите внимание, что при использовании функций Minimize и Maximize можно выбирать метод контроля решения оптимизационной задачи: достаточно щелкнуть правой кнопкой мыши по имени функции

Определяем начальное приближение матрицы X(4,4) =

$ORIGIN := 1$

$$C := \begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & 3\\ 8 & 10 & 7 & 9\\ 1 & 5 & 11 & 2\\ 8 & 7 & 8 & 5\end{pmatrix} \qquad x_{1,4} := 0$$

```
sum_rows(x) := | for i ∈ 1..4          sum_columns(x) := | for j ∈ 1..4
               |   v_i ← 0                                |   v_j ← 0
               |   for j ∈ 1..4                           |   for i ∈ 1..4
               |     v_i ← v_i + x_i,j                    |     v_j ← v_j + x_i,j
               | v                                        | v
```

В качестве ограничений вводим условия, что суммы по строкам и столбцам матрицы x равны 1, значения xij >=0 и <=1

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left(C_{i,j}\cdot x_{i,j}\right)$$

Given

$x \ge 0 \quad sum\_rows(x) = 1 \quad sum\_columns(x) = 1 \quad x \le 1$

$x := Minimize(Z, x)$

$$x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad Z(x) = 17$$

При решении задач линейного программирования Mathcad автоматически выбирает линейный метод контроля **(Linear),** и его не следует менять, особенно решая задачи о назначениях.

Задания.

1. В концерн входят четыре фабрики и четыре магазина. Фабрики производят 20, 30, 50 и 20 единиц продукции в неделю. Магазинам еженедельно требуется 30, 20, 55 и 15 единиц продукции. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин определяется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 8 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных расходов.

2. В концерн входят четыре фабрики и четыре магазина. Фабрики производят 20, 50, 50 и 20 единиц продукции в неделю. Магазинам требуется 30, 25, 50 и 25 единиц продукции еженедельно. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин определяется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 14 & 17 \\ 15 & 12 & 18 & 13 \\ 17 & 12 & 11 & 16 \\ 16 & 15 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок, позволяющий минимизировать суммарные транспортные расходы.

3. В концерн входят четыре фабрики и четыре магазина. Фабрики производят 25, 30, 55 и 20 единиц продукции в неделю. Магазинам требуется 30, 30, 65 и 15 единиц продукции еженедельно. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин определяется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок так, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

4. Четверо рабочих выполняют четыре вида работ. В матрице

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 7 & 5 \\ 11 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

хранятся стоимости выполнения работ Составить план выполнения всех четырех работ таким образом, чтобы их стоимость была минимальной.

5. Пятеро рабочих выполняют четыре вида работ. В матрице

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 7 & 5 \\ 11 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 4 & 8 & 5 \\ 12 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

хранятся стоимости выполнения работ. Составить план выполнения всех четырех видов работ, который позволит сделать их стоимость минимальной.

Лабораторная работа 3. Решение линейной оптимизационной задачи в Matlab.

В MATLAB задачу линейного программирования решает функция:

[x, L,   f]=linprog(c. A, b [, A1, b1,   lx, rx]) , для которой:

c - функция цели, представленная в виде вектора коэффициентов;

A, b - система ограничений, заданная в матричном виде

A* x < b;

A1, M - параметры, которые используются, если система ограничений задана в виде равенств A * x = b;

lx, rx - параметры, применение которых обусловлено наличием в условии задачи двусторонних ограничений 1x < x < гx, ограничений слева 1x < x или ограничений справа x < гx;

x - вектор решения, содержащий, значения переменных, удовлетворяющих всем ограничениям и приводящих функцию цели к минимуму;

L - минимум функции цели, или, иначе, значение функции цели, в точке с координатами x;

f - параметр, характеризующий вычислительный процесс; если его значение больше нуля, то результат найден с требуемой точностью, нуль -

достигнуто максимальное число итераций, меньше нуля - решение не найдено.

Отсутствующие ограничения в списке параметров заменяются квадратными скобками.

Пример 1. Дана задача ЛП:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 7, \\ x_2 - 2x_3 \le -1, \\ 4x_3 - x_4 \le 3, \\ 5x_1 + 2x_4 \ge 14. \end{cases}$$

Приведем задачу к стандартному виду. Для чего функцию цели умножим на минус единицу, а в системе ограничений таким же образом поступим с последним уравнением:

$$L = -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 7, \\ x_2 - 2x_3 \le -1, \\ 4x_3 - x_4 \le 3, \\ -5x_1 - 2x_4 \le -14. \end{cases}$$

Итак, получим задачу линейного программирования с заданной системой ограничений $Ax < b$ и функцией цели L, стремящейся к минимуму.

Решим задачу так, как показано в листинге 9.4. Обратите внимание на формат обращения к функции linprog. Запись linprogfc. A, b, [ ] , [ ] , 1x) означает, что решается задача поиска минимума функции с заданным вектором коэффициентов с, линейными ограничениями, заданными матрицей А и вектором Ь, и дополнительным ограничением, представленным его левой границей 1x. Постановка задачи не предусматривает наличия ограничений-равенств и дополнительных, правосторонних ограничений. Поэтому первые в списке параметров заменены пустыми массивами [ ], а вторые вообще отсутствуют, так как расположены последними в списке аргументов.

Листинг

```
>>%Вектор коэффициентов функции цели, взятых с обратным знаком
>> c=[-1;-1;-1;1];
>>%Матрица коэффициентов системы ограничений
>> A=[3 -1 0 0;0 1 -2 0;0 0 4 -1;-5 0 0 -2];
>>%Вектор правых частей системы ограничений
>> b=[7;-1;3;-14];
```

```
>>%Вектор ограничений слева
>> lx=[0;0;0;0];
>>%Решение задачи линейного программирования
>> [x,L]=linprog(c,A,b,[],[],lx)
Optimization terminated.
x = %Значения, при которых функция цели достигает максимума
   2.5882
   0.7647
   0.8824
   0.5294
L =
  -3.7059
>> L=-L
%Максимум функции
L =
   3.7059
```

Задания.

1. В концерн входят четыре фабрики и четыре магазина. Фабрики производят 20, 30, 50 и 20 единиц продукции в неделю. Магазинам еженедельно требуется 30, 20, 55 и 15 единиц продукции. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин определяется матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 8 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных расходов.

2. В концерн входят четыре фабрики и четыре магазина. Фабрики производят 20, 50, 50 и 20 единиц продукции в неделю. Магазинам требуется 30, 25, 50 и 25 единиц продукции еженедельно. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин определяется матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 13 & 14 & 14 & 17 \\ 15 & 12 & 18 & 13 \\ 17 & 12 & 11 & 16 \\ 16 & 15 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок, позволяющий минимизировать суммарные транспортные расходы.

3. В концерн входят четыре фабрики и четыре магазина. Фабрики производят 25, 30, 55 и 20 единиц продукции в неделю. Магазинам требуется 30, 30, 65 и 15 единиц продукции еженедельно. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин определяется матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок так, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

4. Четверо рабочих выполняют четыре вида работ. В матрице

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 7 & 5 \\ 11 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

хранятся стоимости выполнения работ Составить план выполнения всех четырех работ таким образом, чтобы их стоимость была минимальной.

5. Пятеро рабочих выполняют четыре вида работ. В матрице

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 7 & 5 \\ 11 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 4 & 8 & 5 \\ 12 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

хранятся стоимости выполнения работ. Составить план выполнения всех четырех видов работ, который позволит сделать их стоимость минимальной.

Лабораторная работа №4
Имитационное моделирование с помощью Excel

1. Моделирование рисков инвестиционных проектов

Имитационное моделирование представляет собой серию численных экспериментов призванных получить эмпирические оценки степени влияния различных факторов (исходных величин) на некоторые зависящие от них результаты (показатели).

Пример 1.

Фирма рассматривает инвестиционный проект по производству продукта "А". В процессе предварительного анализа экспертами были выявлены три ключевых параметра *проекта и определены возможные границы их изменений* (*табл.* 1). *Прочие параметры проекта считаются постоянными величинами* (*табл.* 2).

Таблица 1.

Ключевые параметры проекта по производству продукта "А"

Показатели	**Сценарий**		
	Наихудший	**Наилучший**	**Вероятный**
Объем выпуска - *Q*	150	300	200
Цена за штуку - *P*	40	55	50
Переменные затраты - *V*	35	25	30

Таблица 2

Неизменяемые параметры проекта по производству продукта "А"

Показатели	**Наиболее вероятное значение**
Постоянные затраты - *F*	500
Амортизация - *A*	100
Налог на прибыль - *T*	60%
Норма дисконта - *r*	10%
Срок проекта - *n*	5
Начальные инвестиции - I_0	2000

Первым этапом анализа является определение зависимости результирующего показателя от исходных. Предположим, что используемым критерием является чистая современная стоимость проекта *NPV*:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^t} - I_0 \qquad (1)$$

где:

NCF_t - величина чистого потока платежей в периоде *t*.

По условиям примера, значения нормы дисконта *r* и первоначального объема инвестиций I_0 известны и считаются постоянными в течение срока реализации проекта (табл. 2).

Будем полагать, что величина потока платежей *NCF* для любого периода *t* одинакова и может быть определена из следующего соотношения:

$$NCF = [Q(P-V) - F - A](1-T) + A \qquad (2).$$

Следующими этапом проведения анализа является выбор законов распределения вероятностей ключевых переменных.

По условиям примера ключевыми варьируемыми параметрами являются: переменные расходы *V*, объем выпуска *Q* и цена *P*. Диапазоны возможных изменений варьируемых показателей приведены в табл.1. При этом будем исходить из предположения, что все ключевые переменные **имеют равномерное распределение** вероятностей.

Реализация третьего этапа может быть осуществлена только с применением ЭВМ, оснащенной специальными программными средствами.

2. Технология имитационного моделирования в среде EXCEL

Проведение имитационных экспериментов в среде EXCEL можно осуществить двумя способами - с помощью встроенных функций и путем использования инструмента "Генератор случайных чисел" дополнения "Анализ данных" (Analysis ToolPack). Для сравнения ниже рассматриваются оба способа.

2.1 Имитационное моделирование с применением функций EXCEL

Следует отметить, что применение встроенных функций целесообразно лишь в том случае, когда вероятности реализации всех значений случайной величины считаются одинаковыми. Тогда для имитации значений требуемой переменной можно воспользоваться математическими функциями ***СЛЧИС()*** или ***СЛУЧМЕЖДУ()***.

Функция ***СЛЧИС()*** возвращает равномерно распределенное случайное число E, большее, либо равное 0 и меньшее 1, т.е.: $0 \le E < 1$. Эта функция не имеет аргументов. Если установлен **режим автоматических вычислений**, принятый по умолчанию, то возвращаемый функцией результат будет изменяться всякий раз, когда происходит ввод или корректировка данных. В режиме **ручных вычислений** пересчет осуществляется только после нажатия клавиши [F9].

Функция СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница; верхн_граница)

Как следует из названия этой функции, она позволяет получить случайное число из заданного интервала. При этом тип возвращаемого числа (т.е. вещественное или целое) зависит от типа заданных аргументов.

Приступаем к разработке шаблона. Выделим в рабочей книге EXCEL два листа.

Первый лист - "Имитация", предназначен для построения генеральной совокупности (рис. 1). Определенные в данном листе формулы и собственные имена ячеек приведены в табл. 4. и 5.

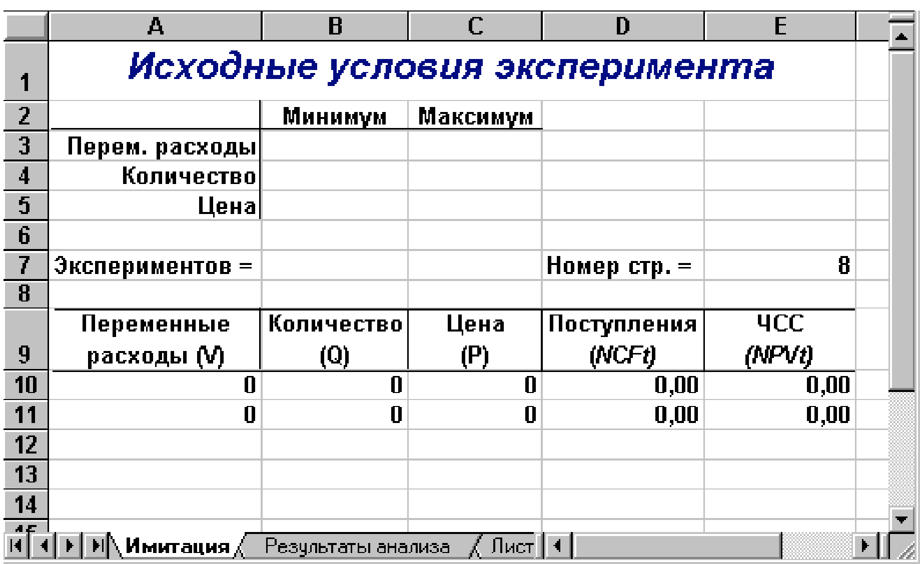


Рис. 1. Лист "Имитация"

Таблица 4.

Формулы листа "Имитация"

Ячейка	Формула

E7	=B7+10-2
A10	=СЛУЧМЕЖДУ(B3;C3)
A11	=СЛУЧМЕЖДУ(B3;C3)
B10	=СЛУЧМЕЖДУ(B4;C4)
B11	=СЛУЧМЕЖДУ(B4;C4)
C10	=СЛУЧМЕЖДУ(B5;C5)
C11	=СЛУЧМЕЖДУ(B5;C5)
D10	=(B10*(C10-A10)-Пост_расх-Аморт)*(1-Налог)+Аморт
D11	=(B11*(C11-A11)-Пост_расх-Аморт)*(1-Налог)+Аморт
E10	=ПЗ(Норма;Срок;-D10)-Нач_инвест
E11	=ПЗ(Норма;Срок;-D11)-Нач_инвест

Таблица 5.

Имена ячеек листа "Имитация"

Адрес ячейки	**Имя**	**Комментарии**
Блок A10:A11	Перем_расх	Переменные расходы
Блок B10:B11	Количество	Объем выпуска
Блок C10:C11	Цена	Цена изделия
Блок D10:D11	Поступления	Поступления от проекта *NCFt*
Блок E10:E11	ЧСС	Чистая современная стоимость *NPV*

Первая часть листа (блок ячеек A1.E7) предназначена для ввода диапазонов изменений ключевых переменных, значения которых будут генерироваться в процессе проведения эксперимента. В ячейке B7 задается общее число имитаций (экспериментов). Формула, заданная в ячейке E7, вычисляет номер последней строки выходного блока, в который будут помещены полученные значения. Смысл этой формулы будет раскрыт позже.

Вторая часть листа (блок ячеек A9.E11) предназначена для проведения имитации. Формулы в ячейках A10.C11 генерируют значения для соответствующих переменных с учетом заданных в ячейках B3.C5 диапазонов их изменений. Обратите внимание на то, что при указании нижней и верхней границы изменений используется **абсолютная адресация ячеек**.

Формулы в ячейках D10.E11 вычисляют величину потока платежей и его чистую современную стоимость соответственно. При этом значения постоянных переменных берутся из следующего листа шаблона - "Результаты анализа".

Лист "Результаты анализа" кроме значений постоянных переменных содержит также функции, вычисляющие параметры распределения изменяемых (*Q*, *V*, *P*) и результатных (*NCF*, *NPV*) переменных и вероятности различных событий. Определенные для данного листа формулы и собственные имена ячеек приведены в табл. 6 и 7. Общий вид листа показан на рис. 2.

Таблица 6.

Формулы листа "Результаты анализа"

Ячейка	**Формула**

B8	=СРЗНАЧ(Перем_расх)
B9	=СТАНДОТКЛОНП(Перем_расх)
B10	=B9/B8
B11	=МИН(Перем_расх)
B12	=МАКС(Перем_расх)
C8	=СРЗНАЧ(Количество)
C9	=СТАНДОТКЛОНП(Количество)
C10	=C9/C8
C11	=МИН(Количество)
C12	=МАКС(Количество)
D8	=СРЗНАЧ(Цена)
D9	=СТАНДОТКЛОНП(Цена)
D10	=D9/D8
D11	=МИН(Цена)
D12	=МАКС(Цена)
E8	=СРЗНАЧ(Поступления)
E9	=СТАНДОТКЛОНП(Поступления)
E10	=E9/E8
E11	=МИН(Поступления)
E12	=МАКС(Поступления)
F8	=СРЗНАЧ(ЧСС)
F9	=СТАНДОТКЛОНП(ЧСС)
F10	=F9/F8
F11	=МИН(ЧСС)
F12	=МАКС(ЧСС)
F13	=СЧЁТЕСЛИ(ЧСС;"<0")
F14	=СУММЕСЛИ(ЧСС;"<0")
F15	=СУММЕСЛИ(ЧСС;">0")
E18	=НОРМАЛИЗАЦИЯ(D18;F8;F9)
F18	=НОРМСТРАСП(E18)

Таблица 7.

Имена ячеек листа "Результаты анализа"

Адрес ячейки	**Имя**	**Комментарии**
B2	Нач_инвест	Начальные инвестиции
B3	Пост_расх	Постоянные расходы
B4	Аморт	Амортизация

D2	Норма	Норма дисконта
D3	Налог	Ставка налога на прибыль
D4	Срок	Срок реализации прока

	A	B	C	D	E	F
1	**Имитационный анализ (Метод Монте-Карло)** Распределение с равными вероятностями					
2	Начальные инвест. (I)		Норма r			
3	Пост. расходы (F)		Налог (T)			
4	Амортизация (A)		Срок (n)			
5						
6	Показатели	Переменные (V)	Количество (Q)	Цена (P)	Поступления (NCFt)	NPV
7						
8	Среднее значение	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	Стандарт. отклонение	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	Коэф. вариации	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
11	Минимум	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	Максимум	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	Число случаев NPV < 0					0,00
14	Сумма убытков					0,00
15	Сумма доходов					0,00
16						
17	Вероятность p(NPV<=X)			Величина (X)	Нормал. (X)	p(NPV<=X)
18				0,00	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
19						

Имитация | Результаты анализа | Лист3 | Лист4

Рис. 2. Лист "Результаты анализа"

В данном случае, заданные в ячейках F14.F15, функции осуществляет подсчет суммы отрицательных (ячейка F14) и положительных (ячейка F14) значений *NPV*, содержащихся в блоке **ЧСС**. Смысл этих расчетов будет объяснен позже.

Две последние формулы (ячейки E18 и F18) предназначены для проведения вероятностного анализа распределения.

В рассматриваемом примере мы исходим из предположения о независимости и равномерном распределении ключевых переменных Q, V, P. Однако какое распределение при этом будет иметь результатная величина - показатель *NPV*, заранее определить нельзя.

Одно из возможных решений этой проблемы - попытаться аппроксимировать неизвестное распределение каким-либо известным. При этом в качестве приближения удобнее всего использовать нормальное распределение. Это связано с тем, что в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей при выполнении определенных условий сумма большого числа случайных величин имеет распределение, приблизительно соответствующее нормальному.

В прикладном анализе для целей аппроксимации широко применяется частный случай нормального распределения - т.н. **стандартное нормальное распределение**. Математическое ожидание стандартно распределенной случайной величины E равно 0: $M(E) = 0$. График этого распределения симметричен относительно оси ординат и оно характеризуется всего одним параметром - стандартным отклонением σ, равным 1.

Приведение случайной переменной E к стандартно распределенной величине Z осуществляется с помощью т.н. нормализации - вычитания средней и последующего деления на стандартное отклонение:

$$Z = \frac{E - M(E)}{\sigma(E)} \qquad (3).$$

Как следует из (3), величина Z выражается в количестве стандартных отклонений. Для вычисления вероятностей по значению нормализованной величины Z используются специальные статистические таблицы.

В EXCEL подобные вычисления осуществляются с помощью статистических функций ***НОРМАЛИЗАЦИЯ()*** и ***НОРМСТРАСП()***.

Функция НОРМАЛИЗАЦИЯ(х; среднее; станд_откл)

Эта функция возвращает нормализованное значение Z величины x, на основании которого затем вычисляется искомая вероятность $p(E \leq x)$. Она реализует соотношение (3). Функция требует задания трех аргументов:

х - нормализуемое значение;

среднее - математическое ожидание случайной величины E;

станд_откл - стандартное отклонение.

Полученное значение Z является аргументом для следующей функции - ***НОРМСТРАСП()***.

Функция НОРМСТРАСП(Z)

Эта функция возвращает стандартное нормальное распределение, т.е. вероятность того, что случайная нормализованная величина E будет меньше или равна x. Она имеет всего один аргумент - Z, вычисляемый функцией ***НОРМАЛИЗАЦИЯ()***.

Нетрудно заметить, что эти функции следует использовать в тандеме. При этом наиболее эффективным и компактным способом их задания является указание функции ***НОРМАЛИЗАЦИЯ()*** в качестве аргумента функции - ***НОРМСТРАСП()***, т.е.:

=НОРМСТРАСП(НОРМАЛИЗАЦИЯ(x; среднее; станд_откл)).

С целью повышения наглядности, в проектируемом шаблоне функции заданы раздельно (ячейки E18 и F18).

Необходимо вставить в шаблон нужное количество строк (498) *(Поскольку первая и последняя строка блока уже определены, число вставляемых строк равно: 500 - 2 = 498).*

Результатом выполнения этих действий будет заполнение блока A10.E509 случайными значениями ключевых переменных V, Q, P и результатами вычислений величин NCF и NPV. Фрагмент результатов имитации приведен на рис. 4 (*Необходимо все время помнить о случайной природе эксперимента. Полученные вами результаты будут отличаться от приведенных*). Соответствующие проведенному эксперименту результаты анализа приведены на рис. 5.

	A	B	C	D	E
1	Исходные условия эксперимента				
2		Минимум	Максимум		
3	Перем. расходы	25	35		
4	Количество	150	300		
5	Цена	40	55		
6					
7	Экспериментов =	500		Номер стр. =	508
8					
9	Переменные расходы (V)	Количество (Q)	Цена (P)	Поступления *(NCFt)*	ЧСС *(NPVt)*
10	29	288	52	2509,60	7513,36
11	31	202	51	1476,00	3595,20
12	28	200	46	1300,00	2928,02
13	35	297	54	2117,20	6025,85
14	32	260	40	692,00	623,22
15	31	229	42	867,60	1288,89
16	25	243	53	2581,60	7786,30
17	25	213	40	1138,00	2313,92
18	32	225	41	670,00	539,83
19	27	279	47	2092,00	5930,33
20	26	297	47	2354,80	6926,54

Имитация / Результаты анализа / Гр...

Рис. 4. Результаты имитации

	A	B	C	D	E	F
1	Имитационный анализ (Метод Монте-Карло) Распределение с равными вероятностями					
2	Начальные инвест. (I)	2000,00	Норма r	0,10		
3	Пост. расходы (F)	500,00	Налог (T)	0,60		
4	Амортизация (A)	100,00	Срок (n)	5,00		
5						
6	Показатели	Переменные (V)	Количество (Q)	Цена (P)	Поступления (NCFt)	NPV
7						
8	Среднее значение	29,93	223,72	47,32	1414,47	3361,96
9	Стандарт. отклонение	3,14	45,53	4,66	599,17	2271,31
10	Коэф. вариации	0,10	0,20	0,10	0,42	0,68
11	Минимум	25,00	150,00	40,00	196,00	-1257,01
12	Максимум	35,00	300,00	55,00	3224,00	10221,50
13	Число случаев NPV < 0					20,00
14	Сумма убытков					-11691,92
15	Сумма доходов					1692669,76
16						
17	Вероятность p(NPV<=X)			Величина (X)	Нормал. (X)	p(NPV<=X)
18					-1,48	0,07
19						

Имитация / Результаты анализа / График зависимо...

Рис. 5. Результаты анализа

Сумма всех отрицательных значений *NPV* в полученной генеральной совокупности (ячейка F14) может быть интерпретирована **как чистая стоимость неопределенности для инвестора в случае принятия проекта**. Аналогично сумма всех положительных значений *NPV* (ячейка F15) может трактоваться **как чистая стоимость неопределенности для инвестора в случае отклонения проекта**. Несмотря на всю условность этих показателей, в целом они представляют собой индикаторы целесообразности проведения дальнейшего анализа.

В данном случае они наглядно демонстрируют несоизмеримость суммы возможных убытков по отношению к общей сумме доходов (-11691,92 *и* 1692669,76 *соответственно*).

6.2.2. ***Имитация с инструментом "Генератор случайных чисел"***

Этот инструмент предназначен для автоматической генерации множества данных (генеральной совокупности) заданного объема, элементы которого характеризуются определенным распределением вероятностей. При этом могут быть использованы 7 типов распределений: равномерное, нормальное, Бернулли, Пуассона, биномиальное, модельное и дискретное. Применение инструмента "Генератор случайных чисел", как и большинства используемых в этой работе функций**, требует установки специального дополнения** "Пакет анализа".

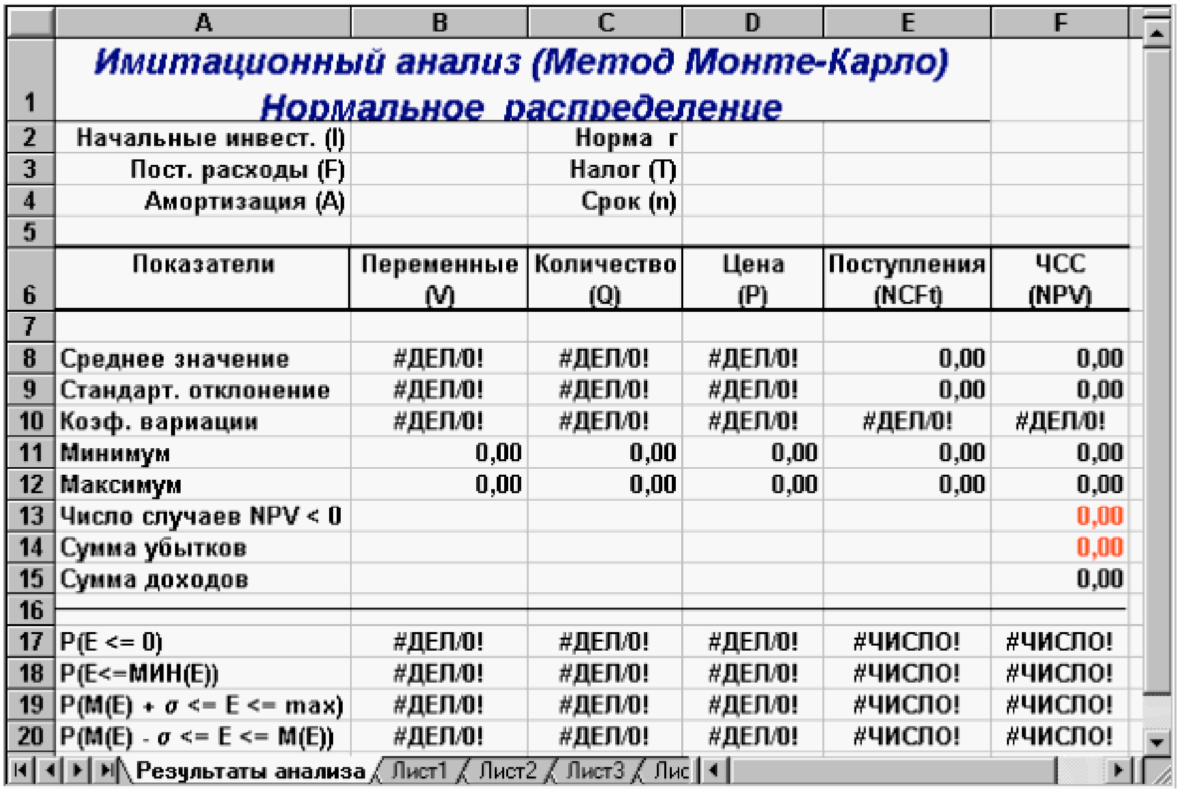
Для демонстрации техники применения этого инструмента изменим условия примера 1, определив вероятности для каждого сценария развития событий следующим образом (табл. 8). Мы также будем исходить из предположения **о нормальном распределении** ключевых переменных. Количество имитаций оставим прежним - 500.

Таблица 8.

Вероятностные сценарии реализации проекта

Показатели	**Сценарий**		
	Наихудший P = 0.25	**Наилучший P = 0.25**	**Вероятный P = 0.5**
Объем выпуска - *Q*	150	300	200
Цена за штуку - *P*	40	55	50
Переменные затраты - *V*	35	25	30

Выделим в рабочей книге два листа: "Имитация" и "Результаты анализа".
Формирование шаблона целесообразно начать с листа "Результаты анализа" (рис. 8.).



	A	B	C	D	E	F
1	Имитационный анализ (Метод Монте-Карло) Нормальное распределение					
2	Начальные инвест. (I)		Норма r			
3	Пост. расходы (F)		Налог (T)			
4	Амортизация (A)		Срок (n)			
5						
6	Показатели	Переменные (V)	Количество (Q)	Цена (P)	Поступления (NCFt)	ЧСС (NPV)
7						
8	Среднее значение	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	0,00	0,00
9	Стандарт. отклонение	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	0,00	0,00
10	Коэф. вариации	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
11	Минимум	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	Максимум	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	Число случаев NPV < 0					0,00
14	Сумма убытков					0,00
15	Сумма доходов					0,00
16						
17	P(E <= 0)	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
18	P(E<=МИН(E))	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
19	P(M(E) + σ <= E <= max)	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
20	P(M(E) - σ <= E <= M(E))	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!

Рис. 8. Лист "Результаты анализа" (шаблон II)

Как следует из рис.8 этот лист практически соответствует ранее разработанному для решения предыдущей задачи (см. рис. 2). Отличие составляют лишь формулы для расчета вероятностей, которые приведены в табл.9.

Таблица 9.

Формулы листа "Результаты анализа" (шаблон II)

Ячейка	Формула
B17	=НОРМРАСП(0;B8;B9;1)
B18	=НОРМРАСП(B11;B8;B9;1)
B19	=НОРМРАСП(B12;B8;B9;1)-НОРМРАСП(B8+B9;B8;B9;1)
B20	=НОРМРАСП(B8;B8;B9;1)-НОРМРАСП(B8-B9;B8;B9;1)
C17	=НОРМРАСП(0;C8;C9;1)
C18	=НОРМРАСП(C11;C8;C9;1)
C19	=НОРМРАСП(C12;C8;C9;1)-НОРМРАСП(C8+C9;C8;C9;1)
C20	=НОРМРАСП(C8;C8;C9;1)-НОРМРАСП(C8-C9;C8;C9;1)
D17	=НОРМРАСП(0;D8;D9;1)
D18	=НОРМРАСП(D11;D8;D9;1)
D19	=НОРМРАСП(D12;D8;D9;1)-НОРМРАСП(D8+D9;D8;D9;1)
D20	=НОРМРАСП(D8;D8;D9;1)-НОРМРАСП(D8-D9;D8;D9;1)
E17	=НОРМРАСП(0;E8;E9;1)
E18	=НОРМРАСП(E11;E8;E9;1)

E19	=НОРМРАСП(E12;E8;E9;1)-НОРМРАСП(E8+E9;E8;E9;1)
E20	=НОРМРАСП(E8;E8;E9;1)-НОРМРАСП(E8-E9;E8;E9;1)
F17	=НОРМРАСП(0;F8;F9;1)
F18	=НОРМРАСП(F11;F8;F9;1)
F19	=НОРМРАСП(F12;F8;F9;1)-НОРМРАСП(F8+F9;F8;F9;1)
F20	=НОРМРАСП(F8;F8;F9;1)-НОРМРАСП(F8-F9;F8;F9;1)

Используемые в нем собственные имена ячеек также взяты из аналогичного листа предыдущего шаблона (см. табл. 7).

Лист «Имитация» приведен на рис. 9.

Рис. 9. Лист "Имитация" (шаблон II)

Первая часть этого листа (блок ячеек A1.E10) предназначена для ввода исходных данных и расчета необходимых параметров их распределений. Напомним, что нормальное распределение случайной величины характеризуется двумя параметрами - математическим ожиданием (средним) и стандартным отклонением. Формулы расчета указанных параметров для ключевых переменных модели заданы в блоках ячеек B7.D7 и B8.D8 соответственно (см. табл. 11). Для удобства определения формул и повышения их наглядности блоку ячеек E3.E5 присвоено имя "Вероятности" (см. табл. 10).

Таблица 10.

Имена ячеек листа "Имитация" (шаблон II)

Адрес ячейки	**Имя**	**Комментарии**
Блок E3:E5	Вероятности	Вероятность значения параметра
Блок A13:A512	Перем_расх	Переменные расходы
Блок B13:B512	Количество	Объем выпуска
Блок C13:C512	Цена	Цена изделия
Блок D13:D512	Поступления	Поступления от проекта *NCF*

Блок E13:E512	ЧСС	Чистая современная стоимость *NPV*

Таблица 11.

Формулы листа "Имитация" (шаблон II)

Ячейка	**Формула**
B7	=СУММПРОИЗВ(B3:B5; Вероятности)
B8	{=КОРЕНЬ(СУММПРОИЗВ((B3:B5 - B7)^2; Вероятности))}
C7	=СУММПРОИЗВ(C3:C5; Вероятности)
C8	{=КОРЕНЬ(СУММПРОИЗВ((C3:C5 - C7)^2; Вероятности))}
D7	=СУММПРОИЗВ(D3:D5; Вероятности)
D8	{=КОРЕНЬ(СУММПРОИЗВ((D3:D5 - D7)^2; Вероятности))}
E10	=B10+13 -1
D13	=(B13*(C13-A13)-Пост_расх-Аморт)*(1-Налог)+Аморт
E13	=ПЗ(Норма; Срок; -D13) - Нач_инвест

Обратите внимание на то, что для расчета стандартных отклонений используются формулы-массивы, правила задания которых были рассмотрены в предыдущей главе. Для формирования блока формул достаточно определить их для ячеек B7.B8 и затем скопировать в блок C7.D8.

Формула в ячейке E10 по заданному числу имитаций (ячейка B10) вычисляет номер последней строки для блоков, в которых будут храниться сгенерированные значения ключевых переменных.

Ячейки D13.E13 содержат формулы для расчета величины потока платежей *NCF* и его чистой современной стоимости *NPV*.

Полученная в результате таблица должна иметь вид рис. 10.

	A	B	C	D	E
1	Исходные условия эксперимента				
2		Перем.расх.	Количество	Цена	Вероятность
3	Минимум	25	150	40	0,25
4	Вероятное	30	200	50	0,5
5	Максимум	35	300	55	0,25
6					
7	Среднее	30	212,5	48,75	
8	Отклонение	3,54	54,49	5,45	
9					
10	Экспериментов =	500		Номер строки =	512
11					
12	Переменные расходы	Количество	Цена	Поступления	ЧСС
13				-140,00	-2530,71
14					
15					
16					

Рис. 10. Лист "Имитация" после ввода исходных данных

Для проведения имитационного эксперимента установите курсор в ячейку A13.

1. Выберите в главном меню тему "Сервис" пункт "Анализ данных".
2. Выберите из списка "Инструменты анализа" пункт "Генерация случайных чисел".
3. В диалоговом окне "Генерация случайных чисел" укажите в списке "Распределения" требуемый тип - "Нормальное". Заполните остальные поля изменившегося окна согласно рис. 12 . Результатом будет заполнение блока ячеек A13.A512 (переменные расходы) сгенерированными случайными значениями.

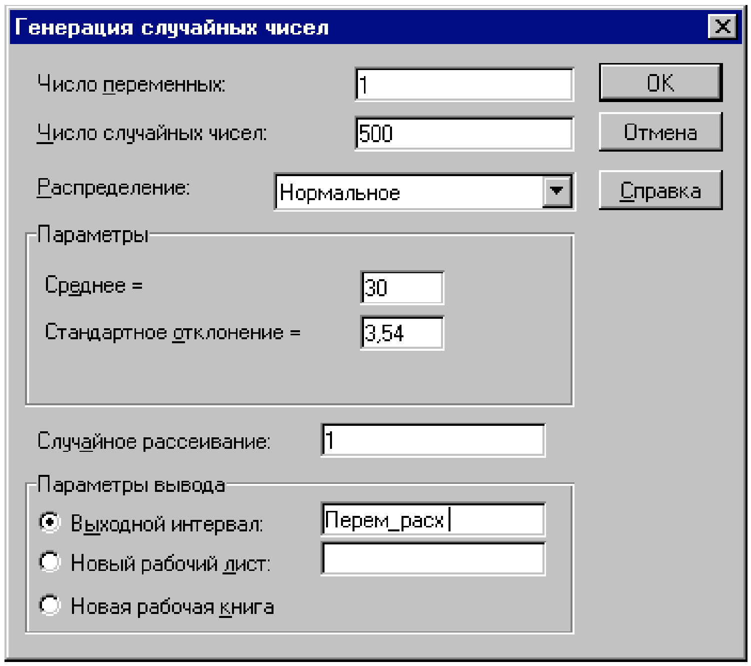


Рис.12. Заполнение полей окна "Генерация случайных чисел"

Поле "Число переменных" задает количество колонок, в которых будут размещаться сгенерированные в соответствии с заданным законом распределения случайные величины. В данном примере оно должно содержать 1, так как ранее мы отвели под значения переменной *V* (переменные расходы) одну колонку - "А". В случае, если указывается число больше 1, случайные величины будут размещены в соответствующем количестве соседних колонок, начиная с активной ячейки. Если это число не введено, то все колонки в выходном диапазоне будут заполнены.

Следующим обязательным аргументом для заполнения является содержимое поля "Число случайных чисел" (т.е. - количество имитаций). Согласно условиям примера оно должно быть равно 500 (см. рис. 12). При этом EXCEL автоматически подсчитывает необходимое количество ячеек для хранения генеральной совокупности.

В рассматриваемом примере выбор типа распределения "Нормальное" повлек за собой появление дополнительных аргументов - его параметров "Среднее" и "Стандартное отклонение", рассчитанных ранее для исследуемой переменной *V* в ячейках B7 и B8 листа "Имитация". Эти аргументы **могут быть заданы только в виде констант. Использование адресов ячеек и собственных имен здесь не допускается!**

Указание аргумента "Случайное рассеивание" позволяет при повторных запусках генератора получать те же значения случайных величин, что и при первом. Таким образом одну и ту же генеральную совокупность случайных чисел можно получить несколько раз, что значительно повышает эффективность анализа. В случае если этот аргумент не задан (равен 0), при каждом последующем запуске генератора будет формироваться новая генеральная совокупность.

Последний аргумент диалогового окна "Генерация случайных чисел" - "Параметры вывода" определяет место расположения полученных результатов.

В рассматриваемом примере для проведения дальнейшего анализа необходимо, чтобы случайные величины размещались в специально отведенные для них блоки ячеек (см. табл. 10). В частности для хранения 500 значений первой переменной ранее был отведен блок ячеек A13.A512. Поскольку для этого блока определено собственной имя - "**Перем_расх**", оно указано в качестве выходного диапазона. Отметим, что при увеличении либо уменьшении количества имитаций необходимо также переопределить и выходные блоки, предназначенные для хранения значений переменных.

Генерация значений остальных переменных *Q* и *P* осуществляется аналогичным образом.

Для получения генеральной совокупности значений потока платежей и их чистой современной стоимости необходимо скопировать формулы базовой строки (ячейки D13.E13) требуемое число раз (499).

Полученные результаты решения примера приведены на рис. 14 - 15.

Результаты проведенного имитационного эксперимента ненамного отличаются от предыдущих. Величина ожидаемой NPV равна 3412,14 *при стандартном отклонении* 2556,83. *Коэффициент вариации* (0,75) *несколько выше, но меньше* 1, *таким образом риск данного проекта в целом ниже среднего риска инвестиционного портфеля фирмы. Результаты вероятностного анализа показывают, что шанс получить отрицательную величину NPV не превышает* 9%. *Общее число отрицательных значений NPV в выборке составляет* 32 *из* 500. *Таким образом с вероятностью около* 91% *можно утверждать, что чистая современная стоимость проекта будет больше* 0. *При этом вероятность того, что величина NPV окажется больше чем M(NPV) + σ, равна 16% (ячейка* F19*). Вероятность попадания значения NPV в интервал* [*M(NPV) - σ; M(NPV)*] *равна* 34%.

	A	B	C	D	E
1	**Исходные условия эксперимента**				
2		Перем.расх.	Количество	Цена	Вероятность
3	Минимум	25	150	40	0,25
4	Вероятное	30	200	50	0,5
5	Максимум	35	300	55	0,25
6					
7	Среднее	30	212,5	48,75	
8	Отклонение	3,54	54,49	5,45	
9					
10	Экспериментов =	500		Номер строки =	512
11					
12	Переменные расходы	Количество	Цена	Поступления	ЧСС
13	30,21364535	137,0895119	48,5327706	864,54	1277,30
14	23,32368534	169,8921946	49,95088328	1669,50	4328,72
15	29,1287571	226,4801054	41,47096875	978,11	1707,79
16	25,05789674	77,59419759	46,65623326	530,36	10,49
17	25,66879383	211,3587947	51,96375592	2083,07	5896,47
18	25,78804018	234,7611226	55,57110226	2656,76	8071,22
19	33,60148933	291,8060235	48,11563563	1554,13	3891,36
20	36,92651065	209,1375887	51,50616151	1079,66	2092,77
21	32,65799031	142,0688888	53,40036965	1038,74	1937,64

Результаты анализа / **Имитация** / Лист2

Рис. 14. Результаты имитационного эксперимента (шаблон II)

	A	B	C	D	E	F
1	Имитационный анализ (Метод Монте-Карло) Нормальное распределение					
2	Начальные инвест. (I)	2000,00	Норма r	0,10		
3	Пост. расходы (F)	500,00	Налог (T)	0,60		
4	Амортизация (A)	100,00	Срок (n)	5,00		
5						
6	Показатели	Переменные (V)	Количество (Q)	Цена (P)	Поступления (NCFt)	ЧСС (NPV)
7						
8	Среднее значение	30,09	214,21	48,44	1427,71	3412,14
9	Стандарт. отклонение	3,61	52,18	5,39	674,48	2556,83
10	Коэф. вариации	0,12	0,24	0,11	0,47	0,75
11	Минимум	19,92	60,91	35,40	89,10	-1662,23
12	Максимум	41,87	387,74	65,62	3638,98	11794,60
13	Число случаев NPV < 0					32,00
14	Сумма убытков					-15590,05
15	Сумма доходов					1721662,32
16						
17	P(E <= 0)	0,00	0,00	0,00	0,02	0,09
18	P(E<=МИН(E))	0,00	0,00	0,01	0,02	0,02
19	P(M(E) + σ <= E <= max)	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
20	P(M(E) - σ <= E <= M(E))	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34

Результаты анализа / Имитация / Лист2 / Лист3

Рис. 15. Результаты анализа (шаблон II)

2.3. *Статистический анализ результатов имитации*

Как уже отмечалось, в анализе стохастических процессов важное значение имеют статистические взаимосвязи между случайными величинами. В предыдущем примере для установления степени взаимосвязи ключевых и расчетных показателей мы использовали графический анализ. В качестве количественных характеристик подобных взаимосвязей в статистике используют два показателя: **ковариацию** и **корреляцию**.

Ковариация и корреляция

Ковариация выражает степень **статистической зависимости** между двумя множествами данных и определяется из следующего соотношения:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - M(X))(Y_i - M(Y)) \qquad (4)$$

где:

X, *Y* - множества значений случайных величин размерности *m*;

M(X) - математическое ожидание случайной величины *X*;

M(Y) - математическое ожидание случайной величины *Y*.

Как следует из (4), положительная ковариация наблюдается в том случае, когда большим значениям случайной величины *X* соответствуют большие значения случайной величины *Y*, т.е. между ними существует тесная прямая взаимосвязь. Соответственно отрицательная ковариация будет иметь место при соответствии малым значениям случайной величины *X* больших значений случайной величины *Y*. При слабо выраженной зависимости значение показателя ковариации близко к 0.

Ковариация зависит от единиц измерения исследуемых величин, что ограничивает ее применение на практике. Более удобным для использования в анализе является производный от нее показатель - коэффициент корреляции *R*, вычисляемый по формуле:

$$R = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (5).$$

Коэффициент корреляции обладает теми же свойствами, что и ковариация, однако является безразмерной величиной и принимает значения от -1 (характеризует линейную обратную взаимосвязь) до +1 (характеризует линейную прямую взаимосвязь). Для независимых случайных величин значение коэффициента корреляции близко к 0.

Определение количественных характеристик для оценки тесноты взаимосвязи между случайными величинами в EXCEL может быть осуществлено двумя способами:

с помощью статистических функций ***КОВАР()*** и ***КОРРЕЛ()***;

с помощью специальных инструментов статистического анализа.

Если число исследуемых переменных больше 2, более удобным является использование инструментов анализа.

Инструмент анализа данных "Корреляция"

Определим степень тесноты взаимосвязей между переменными *V, Q, P, NCF* и *NPV.* При этом в качестве меры будем использовать показатель корреляции *R.*

1. Выберите в главном меню тему "Сервис" пункт "Анализ данных".
2.Выберите из списка "Инструменты анализа" пункт "Корреляция" .
3.Заполните поля диалогового окна «Корреляция», как показано на рис. 17

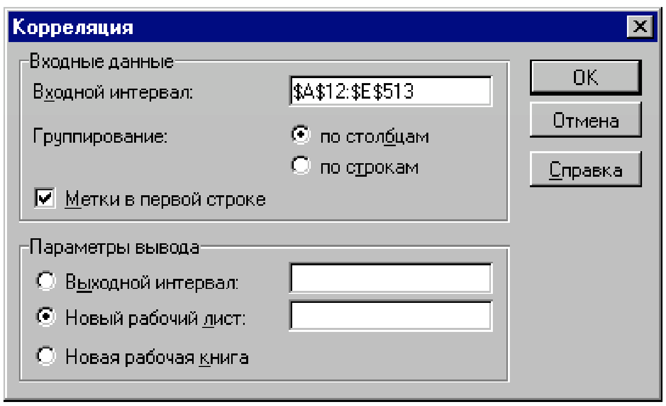


Рис. 17. Заполнение окна диалога инструмента "Корреляция"

	A	B	C	D	E	F
1		*Перем. расходы*	*Количество*	*Цена*	*Поступления*	*ЧСС*
2	**Перем. расходы**	1				
3	**Количество**	0,052105285	1			
4	**Цена**	0,052040191	-0,006181737	1		
5	**Поступления**	-0,393631445	0,548335858	0,672387	1	
6	**ЧСС**	-0,393631445	0,548335858	0,672387	1	1
7						

Результаты анализа | Лист5 | Имитация | Лист

Рис. 18. Результаты корреляционного анализа

Результаты корреляционного анализа представлены в виде квадратной матрицы, заполненной только наполовину, поскольку значение коэффициента корреляции между двумя случайными величинами не зависит от порядка их обработки. Нетрудно заметить, что эта матрица симметрична относительно главной диагонали, элементы которой равны 1, так как каждая переменная коррелирует сама с собой.

Как следует из результатов корреляционного анализа, выдвинутая в процессе решения предыдущего примера гипотеза о независимости распределений ключевых переменных V, Q, P в целом подтвердилась. Значения коэффициентов корреляции между переменными расходами V, количеством Q и ценой P (ячейки B3.B4, C4) *достаточно близки к* 0.

В свою очередь величина показателя NPV напрямую зависит от величины потока платежей (R = 1). *Кроме того, существует корреляционная зависимость средней степени между Q и NPV* (R = 0,548), *P и NPV* (R = 0,67). *Как и следовало ожидать, между величинами V и NPV существует умеренная обратная корреляционная зависимость* (R = -0,39).

Полезность проведения последующего статистического анализа результатов имитационного эксперимента заключается также в том, что во многих случаях он позволяет выявить некорректности в исходных данных, либо даже ошибки в постановке задачи. В частности в рассматриваемом примере, отсутствие взаимосвязи между переменными затратами V и объемами выпуска продукта Q требует дополнительных объяснений, так как с увеличением последнего, величина V также должна расти (*Переменные затраты также часто называют пропорциональными, имея в виду что с увеличением объемов выпуска продукта они растут линейно*). Таким образом, установленный диапазон изменений переменных затрат V нуждается в дополнительной проверке и, возможно, корректировке.

Следует отметить, что близкие к нулевым значения коэффициента корреляции R указывают **на отсутствие линейной связи** между исследуемыми переменными, но **не исключают возможности нелинейной зависимости**. Кроме того, высокая корреляция не обязательно всегда означает наличие причинной связи, так как две исследуемые переменные могут зависеть от значений третьей.

При проведении имитационного эксперимента и последующего вероятностного анализа полученных результатов мы исходили из предположения о нормальном распределении исходных и выходных показателей. Вместе с тем, справедливость сделанных допущений, по крайней мере для выходного показателя *NPV*, нуждается в проверке.

ЗАДАНИЯ.

Фирма рассматривает инвестиционный проект по производству продукта "А". В процессе предварительного анализа экспертами были выявлены три ключевых параметра проекта и определены возможные границы их изменений . Прочие параметры проекта считаются постоянными величинами .

Ключевые параметры проекта по производству продукта "А"

	Наихудший (варианты)					Наилучший (варианты)					Наихудший (варианты)				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Объем выпуска	120	100	150	110	130	250	300	350	280	300	180	210	200	190	210
Цена за штуку	30	35	25	40	35	50	50	40	55	50	40	43	33	52	42
Переменные затраты	20	25	18	30	28	30	40	30	45	45	25	33	25	35	36

Неизменяемые параметры проекта по производству продукта "А"

Показатели	**Наиболее вероятное значение (варианты)**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Постоянные затраты - F	480	490	510	505	500
Амортизация - A	100	100	100	100	100

Налог на прибыль - *T*	60%	60%	60%	60%	60%
Норма дисконта - *r*	10%	10%	10%	10%	10%
Срок проекта - *n*	4	5	5	4	5
Начальные инвестиции - I_0	1950	2100	2200	2100	2000

Лабораторная работа 5.

Имитационное моделирование средствами MathCad.

1. Обработка результатов эксперимента в Mathcad

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов позволяет по экспериментальным данным подобрать такую аналитическую функцию, которая проходит настолько близко к экспериментальным точкам, насколько это возможно.

1. Постановка задачи

В результате эксперимента были получены некоторые данные, отображенные в виде табл. 1.

Таблица 1 Экспериментальные данные

X1	X2	X3	X4	X5	…	xn
У1	У2	У3	У4	У5	…	yn

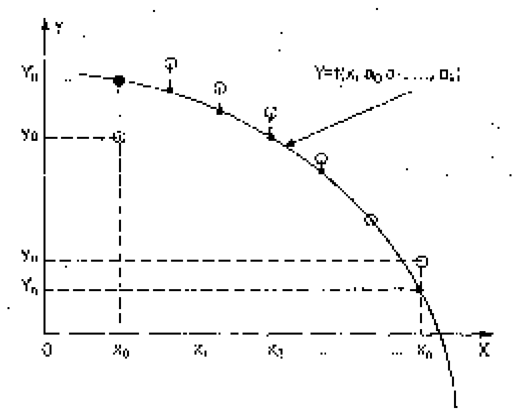
Требуется построить аналитическую зависимость, наиболее точно описывающую результаты эксперимента.

Идея метода наименьших квадратов заключается в том, что функцию

$$Y = f(x,\ a_0,\ a_1, \ldots,\ a_k)$$

необходимо подобрать таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений *y*. от расчетных *Y*. была наименьшей

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i,\ a_0,\ a_1, \ldots,\ a_k)]^2 \to \min. \quad (9.1)$$



Геометрическая интерпретация метода наименьших квадратов

Задача сводится к определению коэффициентов а из условия. Для ее решения нужно составить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial S}{\partial a_0}=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1}=0,\\ \dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial S}{\partial a_k}=0.\end{array}\right\}$$

Если параметры *a.* входят в зависимость $Y=f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$линейно, то получим систему из$k+1$линейного уравнения с $k+1$ неизвестным:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{k}-2(y_i-f(x_i,a_0,a_1,\dots,a_k))\dfrac{\partial f}{\partial a_0}=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{k}-2(y_i-f(x_i,a_0,a_1,\dots,a_k))\dfrac{\partial f}{\partial a_1}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum\limits_{i=1}^{k}-2(y_i-f(x_i,a_0,a_1,\dots,a_k))\dfrac{\partial f}{\partial a_k}=0.\end{array}\right\}$$

Одной из наиболее часто используемых в методе наименьших квадратов . функций является прямая, описываемая уравнением вида $y=a_0$ + а,х, которая называется *линией регрессии у* на *х*. Параметры a_0 и *а* являются *коэффициентами регрессии.*

Показатель, характеризующий тесноту линейной связи между *хи уи* называемый *коэффициентом корреляции*, рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - M_y)^2}}, \quad Mx = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad My = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \quad (9.4)$$

Значение коэффициента корреляции удовлетворяет соотношению:

$$-1 \le r \le 1.$$

Чем меньше отличается абсолютная величина гот единицы, тем ближе к линии регрессии располагаются экспериментальные точки. Если коэффициент корреляции близок к нулю, то это означает, что между х и *у* отсутствует линейная связь, но может существовать другая, нелинейная, зависимость.

Чтобы проверить, значимо ли отличается от нуля коэффициент корреляции, воспользуемся *критерием, Стьюдента*. Значение критерия вычисляется по формуле:

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}.$$

Вычисленное значение *t* сравнивается со значением, взятым из *таблицы распределения Стьюдента* в соответствии с уровнем значимости *р* и числом степеней свободы $k = n - 2$. Если *I* больше табличного, то коэффициент корреляции значимо отличен от нуля.

Аналогом коэффициента корреляции г для нелинейных зависимостей является *индекс корреляции*, рассчитываемый по формуле:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - M_y)^2}},$$

где *у*- экспериментальные значения, *Y*- значения, найденные методом наименьших квадратов, М, - среднее значение *у*.

Индекс корреляции по своем)' абсолютному значению колеблется в пределах от 0 до 1. При функциональной зависимости индекс корреляции равен 1. В случае отсутствии связи у = 0. Если коэффициент корреляции является мерой тесноты связи только для линейной формы связи, то индекс корреляции у - и для линейной, и для криволинейной. При прямолинейной связи коэффициент корреляции по своей абсолютной величине равен индексу корреляции.

Построение линейной зависимости. Определение коэффициента корреляции

Изучение возможностей Mathcad для обработки экспериментальных данных начнем с простейшей задачи подбора линейной зависимости методом наименьших квадратов.

ЗАДАЧА 1. В «Основах химии» Д. И. Менделеева приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия *NaNO* в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей *NaNO%* при соответствующих температурах (табл. 9.2):

Таблица 2. Данные о растворимости $NaN0_3$ в зависимости от температуры воды

0*	4	10	15*	21*	29-	36-	51*	68*
66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Требуется определить растворимость азотнокислого натрия при температуре *t*= 32 °С в случае линейной зависимости и найти коэффициент корреляции.

Для расчета коэффициентов регрессии a_0 *и* a_1 *в* Mathcad существуют следующие функции:

line (x, y) - возвращает массив $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ коэффициентов регрессии;

intercept (x, y) - возвращает коэффициент регрессии a_0;

slope (x, y) - возвращает коэффициент регрессии *а* .

Для вычисления коэффициента корреляции в Mathcad предназначена функция corr{x, y).

В этих функциях *x* - массив абсцисс экспериментальных точек, *у* - массив ординат экспериментальных точек.

$t := (0\ \ 4\ \ 10\ \ 15\ \ 21\ \ 29\ \ 36\ \ 51\ \ 68)^T$

$PNa := (66.7\ \ 71\ \ 76.3\ \ 80.6\ \ 85.7\ \ 92.9\ \ 99.4\ \ 113.6\ \ 125.1)^T$

Температура

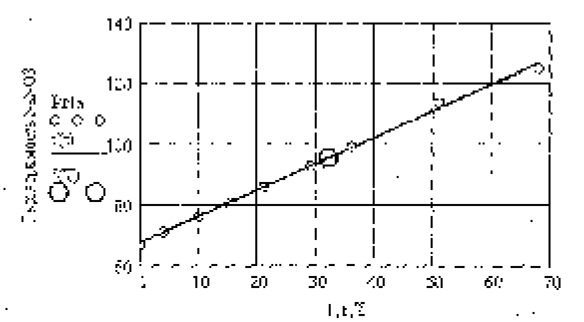
Коэффициент корреляции **corr(t,PNa)** = 0.999

Коэффициенты регрессии **a:=line(t,PNa)** $a = \begin{pmatrix} 67.508 \\ 0.871 \end{pmatrix}$

Линия регрессии

$f(y):=a_0+a_r y$ **f(T)** = 95.368

Линия регрессия, экспериментальные точки



Температура

Построение нелинейной зависимости. Вычисление индекса корреляции

Построение нелинейной аппроксимации рассмотрим на примере решения следующей задачи.

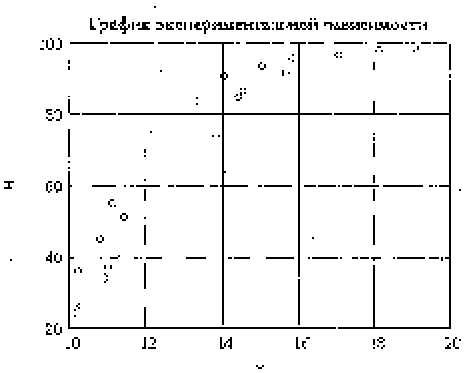
ЗАДАЧА Известна табличная зависимость y от x

x	y
10.1	24
10.2	36

10.3	26
10.8	45
10.8	34
11	37
11.9	55
11.4	51
12.2	75
13.3	84
13.8	74
14	91
14.4	85
14.5	87
15	94
15.6	92
15.8	96
17	97
18.1	98
19	99

Аппроксимировать эту зависимость методом наименьших квадратов с помощью функций $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $y = b_0 + b_2x + k,x- + b_3x^n$ и $y = c_0 + c_2x2 + c,x^3$ и сравнить результаты вычислений.

x:=(10.1 10.2 10.3 10.8 10.9 11 11.1 11.4 12.2 13.3 13.8 14 14.4 14.5 15 15.6 15.8 17 18.1 19)^T y:=(24 36 26 45 34 37 55 51 75 84 74 91 85 87 94 92 *96* *91* 98 99)^T



Для построения квадратичной и кубической аппроксимирующей зависимости в Mathcad можно воспользоваться функциями regress и interp.

Функция regress (x, y, к) возвращает вектор коэффициентов полинома *k-й* степени, подобранного методом наименьших квадратов по экспериментальным точкам *(x* - массив абсцисс, *y* - массив ординат экспериментальных точек). Элементы массива *x* должны быть упорядочены по возрастанию[1].

После определения коэффициентов полинома надо вычислить его значения в конкретных точках; для этого удобна функция interp. Функция interp (s , x, y, t) вычисляет значения полинома в точке *t, x*- массив абсцисс, *y*- массив ординат экспериментальных точек, 5- массив коэффициентов полинома, найденный с помощью функции regress.

Функции regress и interp позволяют подбирать коэффициенты полного полинома любой степени.

Функция regress возвращает особым образом сформированный массив, предназначенный для применения в функции interp, первые три элемента которого являются специальными значениями, используемыми функцией interp, а последующие элементы массива - коэффициентами подобранного полинома.

Для аппроксимации табличной зависимости *y(x)* полиномами второй и третьей степени необходимо сформировать массивы коэффициентов полиномов *an b,* обратившись к функции regress. Далее посредством interp строятся функции *A(t)* и *B{ t)*, которые дают возможность вычислить значения аппроксимирующих полиномов второй и третьей степени в любой точке *t.*

В массив а запишем коэффициенты аппроксимирующего полинома второй степени

a;=regress(x,y,2) a^T = (3 з 2 -319.265 48.552 -1.407)

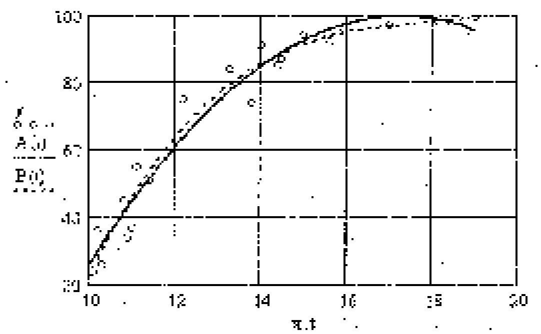
В массив b запишем коэффициенты аппроксимирующего полинома третьей степени

b:=regress(x,y,3) b^T = (3 3 3 -701.76 131.838-7.303 0.136)

Функции A(t) и B(1) предназначены для вычисления аппроксимирующих полиномов второй и третьей степени в любой точке t

A(t) :=interp(a,x,y,t) B(t) := interp(b,x,y,t) t := 10,10.1..

График аппроксимирующей зависимости



Подобрать зависимость $y = c_0 + c_1x + c_2x^3$ функциями regress и interp не получится. Поэтому вспомним, что аппроксимирующую зависимость надо подбирать таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений от расчетных была наименьшей. В связи с этим проблема подбора зависимости $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ эквивалентна следующей задаче оптимизации: найти

значения c_0, c_x и c_2, при которых функция $S(c_0,c_l,c_2) = 2j[y_i - c_0 - c_1x_i - c_2x_;^3]^2$ достигает своего минимального значения. Решение этой задачи представлено на рис.

n:=last(x) n 2

Формируем функцию s д,(a,Ь ,c) := у [у,- a-(x,)^3 - Ь-(x,)^2 - cj

Задача подбора коэффициентов зависимости $y=c_0+c_1x+c_2$г

эквивалентна поиску минимума функции s

a:=1 b:=l c := 1 (\\

a

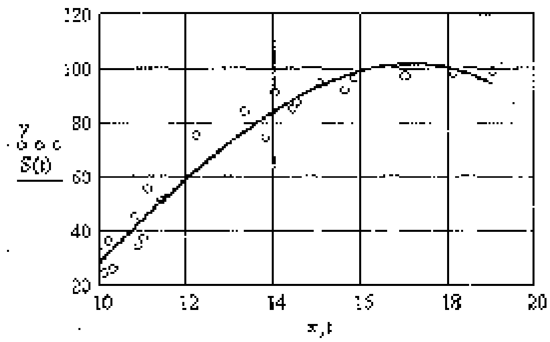
b := Minimize(s,a,b,c)

c

a = -0.077 Ь = 1.99 c = -93.729 1,c^

$S(t) := at^3 + b\text{-}t^2 + c$

График аппроксимирующей зависимости



Таким образом, построены все три зависимости. Осталось определить, какая из них лучше описывает экспериментальные значения, для чего достаточно сравнить индексы регрессии или величины суммы квадратов отклонений.

Расчеты индексов регрессии для трех зависимостей :

Расчет индекса регрессии для квадратичной зависимости Расчет коэффициентов квадратичной зависимости

л:= regress (x, y,2)

Вычисление расчетных значений

i:=0..n

Y2; := interp(a,x,y,3q)

Вычисление индекса корреляции

$$\gamma 2 := \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=0}^{last(y)} (y_i - Y2_i)^2}{\sum_{i=0}^{last(y)} (y_i - mean(y))^2}} \qquad \gamma 2 = 0.977$$

Расчет индекса регрессии для кубической зависимости Расчет коэффициентов кубической зависимости

b := regress(x,y,3)

Вычисление расчетных значений

к=0..п

Y3; := interp(b ,x ,y ,xj

$$\gamma 3 := \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=0}^{last(y)} \left(y_i - Y3_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{last(y)} \left(y_i - mean(y)\right)^2}} \qquad \gamma 3 = 0.979$$

Величины сумм квадратов отклонений для всех трех зависимостей.

Расчет индекса регрессии для зависимости $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

$Y4_1 := S(x_1)$ Вычисление индекса корреляции

$$\gamma 4 := \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=0}^{last(y)} \left(y_i - Y4_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{last(y)} \left(y_i - mean(y)\right)^2}} \qquad \gamma 4 = 0.973$$

Сумма квадратов отклонений для квадратичной зависимости

$$S2 := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left(y_i - Y2_i\right)^2} \qquad S2 = 25.469$$

Сумма квадратов отклонений для кубической зависимости

$$S3 := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left(y_i - Y3_i\right)^2} \qquad S3 = 24.031$$

Сумма квадратов отклонений для зависимости $y - c + c\,x + CjX^3$

$$S4 := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left(y_i - Y4_i\right)^2} \qquad S4 = 27.463$$

Очевидно, что заданная табличная зависимость лучше всего аппроксимируется полиномом третьей степени.

Метод подбора зависимости является универсальным и подходит для аппроксимации экспериментальных значений любой функцией.

Кроме рассмотренных выше методов аппроксимации в Mathcad существует возможность подбора с помощью функции linfit параметров приближающей функции/

linfit(x, y, *F)*,

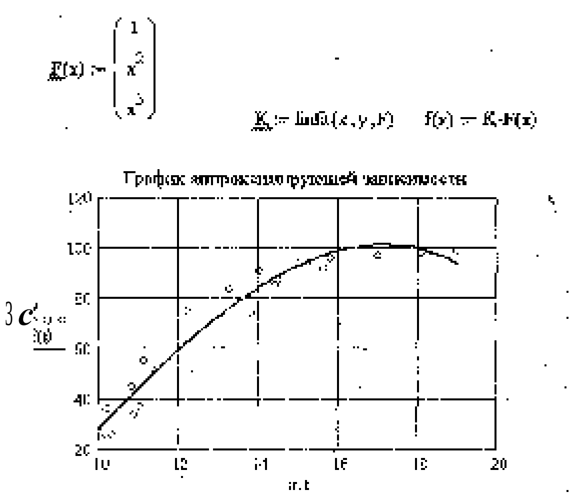
где *x* - массив абсцисс экспериментальных точек, *у* - массив ординат экспериментальных точек, *F*- вектор, содержащий функции $F_t(x)$ в символьной форме. Функция linfit возвращает вектор коэффициентов *К.* Использование функции linfit рассмотрим на примере следующей задачи.

ЗАДАЧА. Известна табличная зависимость *у* от х. Аппроксимировать эту зависимость методом наименьших квадратов с помощью функций у = $k_0 + кx^2 + кx^3$.

Решение этой задачи посредством функции linfit

x:=(10.1 10.2 10.3 10.8 10.9 11 11.1 11.4 12.2 13.3 13.8 14 14.4 14.5 15 15.6 15.8 17 18.1 19)^T

y:= (24 36 26 45 34 37 55 51 75 84 74 91 85 87 94 92 96 97 98 99)^T



В дополнение к описанным выше универсальным возможностям построения аппроксимирующих зависимостей в Mathcad для подбора параметров специального вида существуют функции, которые возвращают коэффициенты следующих зависимостей:

expfit (X, y, g) - зависимости ae^{bx} + *c;*

lgsfit(x, y, g) -зависимости $a/(1+be^{-cx})$

sinfit (x, y, g) -зависимости asin(x + *b)* + *c;*

pwrfit (x, y, g) -зависимости ax^b + *c;*

logfit (x, y, g) -зависимости *aln(x* + *b)* + *c;*

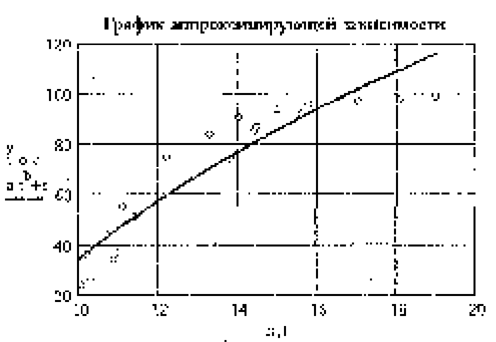
lnf it (x, y)- зависимости ***aln(x)*** + ***b***.|

Во всех этих функциях *x*- массив абсцисс экспериментальных точек, *у* - массив ординат экспериментальных точек, *g*- вектор, задающий начальное приближение параметров *a*, ***b*** *и с.*

Пример применения функции pwrf it (x, y, д> демонстрируется на рис.

x:=(10.1 10.2 10.3 10.8 10.9 11 11.1 11.4 12.2 13.3 13.8 14 14.4 14.5 15 15.6 15.8 17 18.1 19)^T

y:= (24 36 26 45 34 37 55 51 75 84 74 91 85 87 94 92 96 97 98 99)^T



Лабораторная работа 6.

Имитационное моделирование средствами Matlab.

1. Обработка результатов эксперимента в Matlab

ЗАДАЧА 1. В «Основах химии» Д. И. Менделеева приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия *NaNO* в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей *NaNO%* при соответствующих температурах (табл. 1):

Таблица 1. Данные о растворимости $NaN0_3$ в зависимости от температуры воды

0	4	10	15	21	29	36	51	68
66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Требуется определить растворимость азотнокислого натрия при температуре t= 32 °С в случае линейной зависимости и найти коэффициент корреляции.

Решение задачи в MATLAB с комментариями вы видите в листинге. На рис. приведено графическое решение этой задачи, изображены экспериментальные точки, заданные в условии, и график найденного полинома $y = a_x\ x + a_y$ на котором отмечена точка t= 32 .

Листинг

```
>>%Ввод экспериментальных данных
>> X=[0 4 10 15 21 29 36 51 68];
>> Y=[66.7 71.0 76.3 80.6 85.7 92.9 99.4 113.6 125.1];
>>%Вычисление вектора коэффициентов полинома y=a1*x+a2

>> [a]=polyfit(X,Y,1)
a =
   0.8706      67.5078
>>%Вычисление значения полинома y=a1*x+a2 в точке t=32
>> t=32;
>> yt=a(1)*t+a(2)
yt =
   95.3663
>>%Построение графика полинома y=a1*x+a2,
>>%экспериментальных точек и значения в заданной точке
>>%в одной графической области
>> x=0:68;
>> y=a(1)*x+a(2);
>> plot(X,Y,'ok',x,y,'-k',t,yt,'xk')
>> grid
>>%Вычисление коэффициента корреляции по формуле (6.33)
>> mx=mean(X);
>> my=mean(Y);
>> k=sum((x-mx).*(y-my))./sqrt(sum((x-mx).^2)*sum((y-my).^2))
k =
   1.0000
```

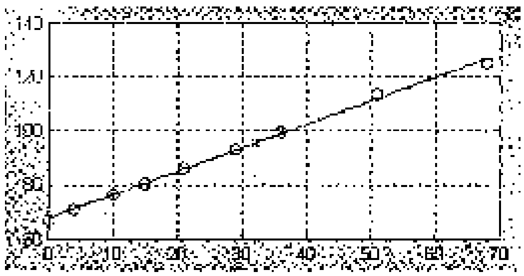


Рис. Графическое решение задачи

ЗАДАЧА

Известна табличная зависимость *у от х*

Табличная зависимость у от х

x	y
10.1	24
10.2	36
10.3	26
10.8	45
10.8	34
11	37
11.9	55
11.4	51
12.2	75
13.3	84
13.8	74
14	91
14.4	85
14.5	87
15	94
15.6	92
15.8	96
17	97
18.1	98

19	99

Аппроксимировать эту зависимость методом наименьших квадратов с помощью функций:

а) $y = a_1 + a_2x + a_3x^2$;
б) $y = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3$;
в) $y = c_1 + c_2x + c_4x^3$.

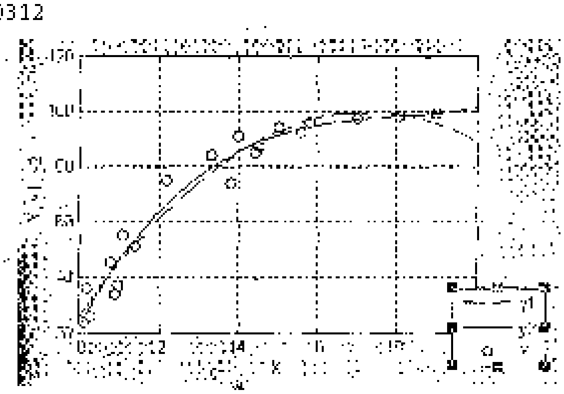
Сравнить результаты вычислений.

В листинге содержится решение поставленной задачи для случаев а) и в) с подробными комментариями. Графическое решение приведено на рис

Листинг

```
>>%Ввод экспериментальных данных
>> X=[10.1 10.2 10.3 10.8 10.9 11 11.1 11.4 12.2 13.3 13.8 14 14.4 14.9 15
15.6 15.8 17 18.1 19];
>> Y=[24 26 28 45 34 37 35 51 75 88 74 91 85 87 94 92 96 97 98 99];
>>%Вычисление коэффициентов полинома y=a1*x^2+a2*x+a3
>> a=polyfit(X,Y,2)
a =
  -1.6066 48.5515  -319.2649
>>%Вычисление коэффициентов полинома y=b1*x^3+b2*x^2+b3*x+b4
>> b=polyfit(X,Y,3)
b =
  0.1359     -7.3034     131.8384 -701.7599
>>%Вычисление значений полиномов на интервале от 10 до 20

>> x=10:0.5:20;
>> y1=polyval(a,x);
>> y2=polyval(b,x);
>>%Построение графиков полиномов и
>>%экспериментальных точек
>>%в одной графической области
>> plot(x,y1,'-k',x,y2,'-k',X,Y,'ok')
>> grid
>>%Вычисление индекса регрессии для полинома а)
>> gam=sqrt(1-(sum((Y-polyval(a,X)).^2))/sum((Y-mean(Y)).^2)))
gam =
   0.9767
>>%Вычисление индекса регрессии для полинома б)
>> gam=sqrt(1-(sum((Y-polyval(b,X)).^2))/(sum((Y-mean(Y)).^2)))
gam =
   0.9793
>>%Вычисление квадратов отклонений для полиномов а) и б)
>> S=sqrt(sum((Y-polyval(a,X)).^2))
S =
   25.4685
>> S=sqrt(sum((Y-polyval(b,X)).^2))
S =
   24.0312
```



Несколько сложнее в MATLAB методом наименьших квадратов подобрать параметры зависимости с. Эта задача эквивалента поиску минимума функции

$$S(c_1,\ c_2,\ c_3) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - c_1 - c_2 x_i^2 - c_4 x_i^3\right)^2,$$

и решать ее можно двумя способами:

> найти минимум функции с помощью функции fminsearch;

> найти частные производные функции по С1, С2 C_4, приравнять их к нулю и решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.

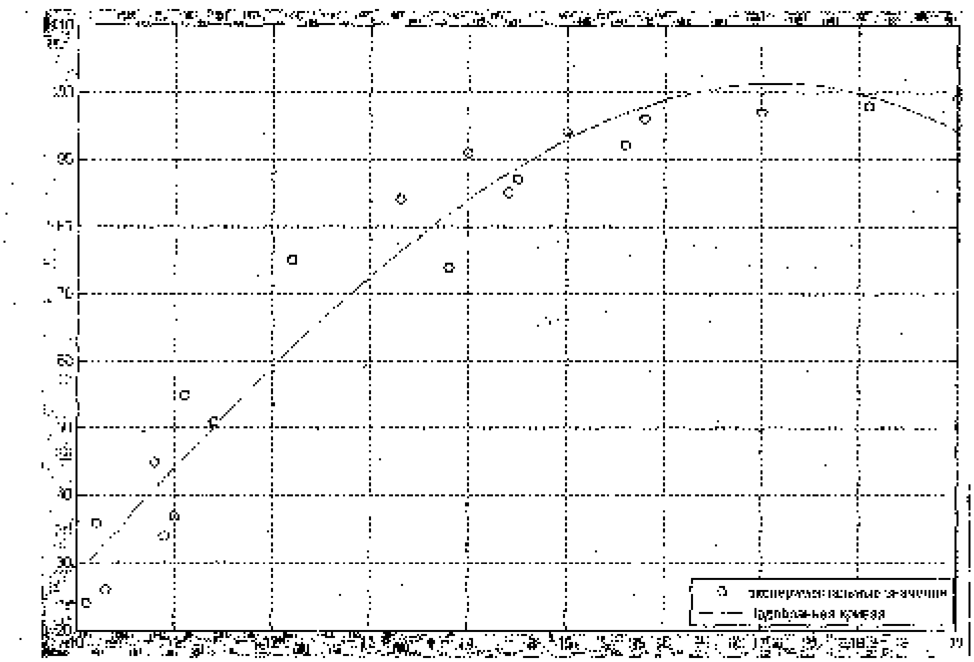
Последовательно рассмотрим оба способа:

1. Для поиска минимума функции многих переменных в MATLAB можно использовать функцию fminsearch (fun, xO), fun - функция, минимум которой необходимо найти, xO - вектор начального приближения точки минимума. Функция fminsearch возвращает массив, в котором хранятся координаты точки минимума и само значение минимума. Решение поставленной задачи первым способом показано в листинге

Листинг

```
%M-функция для вычисления значения по формуле (5.36)
function s = f_mnk(c)
%Переменные x,y являются глобальными, используются в нескольких
функциях
global x;
global y;
s=0;
for i=1:length(x)
   s=s+(y(i)-c(1)-c(2)*x(i)^2-c(3)*x(i)^3)^2;
end
end
%--------------------------------------
global x;
global y;
%Задание начального значения вектора с, при неправильном его определении
%минимум может быть найден неправильно
c=[2,1,8];
%Определение координат экспериментальных точек
x=[10.1, 10.2, 10.3,10.6, 10.9, 11, 11.1,11.4, 12.2, 13.3, 13.8, 14,
14.4,14.5, [illegible],15.6,[illegible],17, 18.1,19];
y=[24, 36,26, 45,34,37,55, 57, 75,84,74,91,85,87,94,92,96,97,98,99];
% Поиск минимума и тем самым определение коэффициентов зависимостей
[c,ex]=fminsearch('f_mnk',c)
%Определение массива для построения графика функции
t=x(1):0.1:x(length(x));
%Вычисление значений подобранных полиномов в точках t(i).
p2t=c(3)*t.^3+c(2)*t.^2+c(1);

%Построение графика функции
plot(x,y,'ko',t,p2t,'r-');
legend('экспериментальные значения','Подобранная кривая');
grid on
```



2. Необходимо сформировать систему линейных алгебраических уравнений .Для этого функцию дифференцируют по С1 *C2*, *C4*, а полученные уравнения приравнивают:

$$\left.\begin{aligned}
nc_0 + c_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
c_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c_1\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + c_2\sum_{i=1}^{n} x_i^5 &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\
c_0\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c_1\sum_{i=1}^{n} x_i^5 + c_2\sum_{i=1}^{n} x_i^6 &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^3
\end{aligned}\right\}.$$

В листинге приведена функция my_mnk (x,y), реализующая подбор зависимости описанным методом.

```
function c=my_mnk(x,y)
%Определение количества элементов в массивах экспериментальных точек
n=length(x);
%Накапливание суммы
sx=0;sx2=0;sx3=0;sx4=0;sx5=0;sx6=0;sy=0;syx2=0;syx3=0;
for i=1:length(x)
   sx=sx+x(i);sx2=sx2+x(i)^2;sx3=sx3+x(i)^3;
   sx4=sx4+x(i)^4;sx5=sx5+x(i)^5;sx6=sx6+x(i)^6;
   sy=sy+y(i);syx2=syx2+y(i)*x(i)^2;syx3=syx3+y(i)*x(i)^3;
end;
%Формирование матрицы коэффициентов системы (3.13)
A(1,1)=n; A(1,2)=sx2; A(1,3)=sx3;
A(2,1)=sx2; A(2,2)=sx4; A(2,3)=sx5;
A(3,1)=sx3; A(3,2)=sx5; A(3,3)=sx6;
%Формирование вектора правой части системы (3.13)
B(1)=sy;B(2)=syx2;B(3)=syx3;
% Решение системы (3.13),
% нахождение параметров подбираемой зависимости
c=A^(-1)*B'
end
```

Понятно, что применение описанных здесь методов позволяет подбирать параметры любой зависимости.

9. Перечень программных продуктов, используемых при изучении курса

1. MathCAD
2. Matlab
3. Excel

10. Методические указания по применению современных информационных технологий для преподавания учебной дисциплины.

1. Презентации, слайды;
2. Схемы, таблицы, рисунки под медиапроектор;
3. Лазерные пленки к проектоскопу.

11. Методические указания профессорско-преподавательскому составу по организации межсессионного и экзаменационного контроля знаний студентов (материалы по контролю качества образования)

В процессе изучения дисциплины предусмотрены следующие виды промежуточного контроля знаний студентов:

- 15-минутная контрольная на каждой лекции;
- студенты, не посещающие лекционные и практические занятия, представляют рефераты по пропущенным темам.

К промежуточным формам контроля знаний относятся:

- блиц-опрос на лекциях по пройденному материалу;
- контрольные работы;
- выполнение рефератов с последующей их защитой;
- выступление с докладом.

12. Комплекты экзаменационных билетов для каждого из предусмотренных экзаменов по дисциплине и контрольные вопросы к зачету.

1. Методологическая основа моделирования.
2. Принципы системного подхода в моделировании систем.
3. Общая характеристика проблемы моделирования систем.
4. Классификация видов моделирования систем.
5. Понятие подобия. Виды подобия.
6. Теория подобия. Основные положения теории подобия.
7. Основные подходы к построению математических моделей систем.
8. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы).
9. Дискретно-детерминированные модели (F-схемы).
10. Дискретно-стохастические модели (P-схемы).
11. Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы).
12. Сетевые модели (N-схемы).
13. Комбинированные модели (A-схемы).
14. Построение концептуальных моделей систем и их формализация.
15. Общая характеристика метода статистического моделирования.
16. Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации.
17. Основные компоненты моделей массового обслуживания.
18. СМО при наличии входного и выходного потоков; СМО с приоритетами.
19. Принятие решений с использованием моделей массового обслуживания.
20. Общая характеристика имитационного моделирования. Элементы имитационных моделей.
21. Базовый алгоритм моделирования. Варианты моделей обслуживания заявок.
22. Методы генерации случайных чисел. Эксперименты над моделями.
23. Основы систематизации языков имитационного моделирования. Сравнительный анализ языков имитационного моделирования.

24. Методы теории планирования эксперимента.

25. Стратегическое и тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем.

26. Построение и взаимодействие моделей.

27. Условия получения подобия моделей. Точность воспроизведения критериев подобия.

28. Особенности фиксации и статистической обработки результатов моделирования систем.

29. Анализ и интерпретация результатов машинного моделирования. Обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем.

30. Моделирование процессов функционирования систем на базе Q-схем.

31. Моделирование процессов функционирования систем на базе N-схем.

32. Моделирование процессов функционирования систем на базе A-схем

33. Гносеологические и информационные модели при управлении.

34. Модели в адаптивных системах управления.

35. Моделирование в системах управления в реальном масштабе времени.

36. Общие правила построения и способы реализации моделей систем.

37. Моделирование при разработке распределенных автоматизированных систем и информационных сетей.

38. Моделирование при разработке организационных и производственных систем.

На основе вопросов, представленных в данном пункте составляются экзаменационные билеты.

13. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-преподавательского состава.

Вид учебной нагрузки	ППС
Лекции	Степанова А.А., ст. преподаватель
Практические занятия	Степанова А.А., ст. преподаватель.
Лабораторные занятия	Степанова А.А., ст. преподаватель
Курсовая работа	Степанова А.А., ст. преподаватель.
Экзамен	Степанова А.А., ст. преподаватель