МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
ГОУ ВПО «Амурский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
________Литовка Г.В.
«___» _________2007г.

А.П. Филимонова, А.В. Голик

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математика»

для специальностей: 040201– Социология,
080401– Товароведение и экспертиза товаров

Составители: к.ф.-м.н. доцент – Филимонова А.П.
ассистент – Голик А.В.

Благовещенск, 2007

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

А.П. Филимонова, А.В. Голик.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математика» для студентов очной форм обучения специальностей 040201 – Социология, 080401– Товароведение и экспертиза товаров. Благовещенск: АмГУ, 2007. –225 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1.1. Пояснительная записка

В течение периода изучения математики студент обязан прослушивать теоретический курс в объеме 144 час. и закрепить материал на практических и лабораторных занятиях в объеме 180час. (040201) и 216 час. (080401). Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных и специальных дисциплин; развития навыков математического мышления у специалистов гуманитарного и экономического профиля, необходимых для обработки информации и использования математических моделей в компьютерных технологиях.

Задачами преподавания учебной дисциплины «Математика» является создание и закрепление навыков работы с вычислительной техникой, развитие математического и пространственного мышления, закрепление навыков работы с использованием математических теорий.

Перечень учебных дисциплин с указанием разделов, усвоение которых необходимо для изучения и осознания учебных тем и вопросов курса «Математика»: Элементарная математика, алгебра переменных величин, начала математического анализа, основные аксиомы и теоремы элементарной геометрии, основы черчения и проективной геометрии.

По окончании изучения курса, Госстандарта по указанным специальностям, дипломированный специалист должен иметь представление: о месте и роли математики в современном мире, мировой истории и культуре; о математическом мышлении, индукции и дедукции в математике; о математическом моделировании; о проблеме искусственного интеллекта; о роли математики и информатики в гуманитарных и экономических исследованиях.

1.2. Содержание учебной дисциплины «Математика»

Федеральный компонент Государственного образовательного стандарта по дисциплине «Математика»:

По специальности 040201:

Аналитическая геометрия, линейная алгебра, последовательности и ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление. Векторный анализ и элементы теории поля. Гармонический анализ. Вероятность и статистика; теория вероятности, случайные процессы, статистическое оценивание и проверка гипотез; статистические методы обработки экспериментальных данных.

По специальности 080401:

Аналитическая геометрия, линейная алгебра, последовательности и ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление. Векторный анализ и элементы теории поля. Гармонический анализ. Вероятность и статистика; теория вероятности, случайные процессы, статистическое оценивание и проверка гипотез; статистические методы обработки экспериментальных данных.

1.3. Тематическое планирование лекций и практических занятий

№	Первый семестр	Лекции	Спец-ти	
	Тема		040201	080401
			Практики	
1.	Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Определители второго и третьего порядков.	2	2	2
2.	Определители n-го порядка. Свойства. Методы вычисления определителей.	2	4	4
3.	Матрица, обратная к данной. Решение матричных уравнений.	2	2	2
4.	Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теоремы о ранге матрицы. Вычисление ранга матрицы.	2	2	4
5.	Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Основные понятия. Решение СЛАУ методом Крамера, матричным методом. Критерий совместности. Решение СЛАУ методом Гаусса.	2	6	6
6.	Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Базис плоскости и пространства. Системы координат на плоскости и в пространстве.	2	2	4
7.	Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Приложения.	2	2	7
8.	Простейшие задачи в координатах на плоскости и в пространстве. Способы задания прямой на плоскости и ее уравнения.	2	2	4
9.	Кривые второго порядка, их канонические уравнения, построение.	2	4	4
10.	Плоскость и прямая в пространстве.	2	2	2
11.	Поверхности второго порядка. Канонические уравнения. Построение.	2	2	4
12.	Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Вычисление пределов последовательностей.	2	4	4
13.	Предел функции. Основные теоремы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Эквивалентные бесконечно малые. Вычисление пределов функций.	2	4	4
14.	Непрерывность функций. Классификация точек разрыва. Построение графиков функций.	2	2	2
15.	Производная. Правило дифференцирования. Таблица производных элементарных функций.	2	4	6

	Производная сложной функции.			
16.	Геометрическая, физическая, экономическая интерпретация производной. Эластичность функции. Правило Лопиталя.	2	4	6
17.	Экстремумы функций одной переменной. Необходимое и достаточное условия.	2	4	6
18.	Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условия. Исследование функций с помощью производной. Построение графиков функций.	2	4	6
	Всего	**36**	**54**	**72**

№	Второй семестр	Лекции	Спец-ти	
	Тема		040201	080401
			Практики	
1.	Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Решение алгебраических уравнений.	2	4	4
2.	Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.	2	2	2
3.	Метод интегрирования заменой переменной. Метод интегрирования по частям.	2	6	6
4.	Интегрирование рациональных функций.	2	6	6
5.	Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций.	2	4	4
6.	Понятие определенного интеграла. Свойства. Формула Ньютона-Лейбница.	2	4	4
7.	Приложение определенного интеграла в экономике, физике, геометрии.	2	4	4
8.	Несобственные интегралы I и II рода.	2	2	2
9.	Функции нескольких переменных (ФНП). Область определения. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность ФНП.	2	2	2
10.	Частные производные ФНП. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал.	2	4	4
11.	Скалярное поле. Производная по направлению Градиент.	2	2	2
12.	Экстремум функции двух независимых переменных Необходимое и достаточное условия.	2	4	4
13.	Условный экстремум функции двух переменных. Функция Лагранжа.	2	4	4
1	Обыкновенные дифференциальные уравнения	2	–	–

	(ДУ). Основные понятия. Теорема Коши существования и единственного решения.			
15.	ДУ первого порядка. Методы решения.	2	6	6
16.	Методы решения ДУ высших порядков, допускающих понижение порядка.	2	4	4
17.	Линейные однородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами.	2	4	4
18.	Линейные неоднородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами.	2	6	6
	Всего	**36**	**72**	**72**

№	Третий семестр	Лекции	Спец-ти	
	Тема		040201	080401
			Практики	
1.	Числовые ряды. Основные понятия. Сходимость.	2	2	2
2.	Ряды с положительными числами. Признаки сходимости.	2	2	2
3.	Знакочередующиеся ряды. Ряд Лейбница. Сумма ряда Лейбница.	2	2	2
4.	Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.	2	2	2
5.	Функциональные ряды. Область сходимости.	2	2	2
6.	Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости.	2	2	2
7.	Разложение функций в степенной ряд. Формула Тейлора.	2	2	2
8.	Ряды Фурье.	2	2	2
9.	Приложение рядов к приближенным вычислениям.	2	2	2
10.	Понятие двойного интеграла. Свойства. Перемена порядка интегрирования. Вычисление в декартовых координатах.	2	2	2
11.	Двойной интеграл в полярных координатах. Приложения двойного интеграла.	2	2	2
12.	Понятие тройного интеграла. Вычисление.	2	2	2
13.	Криволинейный интеграл I рода. Вычисление.	2	2	2
14.	Криволинейный интеграл II рода. Вычисление.	2	2	2
15.	Формула Римана –Грина.	2	2	2
16.	Приложения криволинейных интегралов.	2	2	2

17.	Поверхностный интеграл I рода.	2	2	2
18.	Поверхностный интеграл II рода.	2	2	2
19.	Элементы теории поля.	2	2	2
	Всего	**36**	**36**	**36**

№	Четвертый семестр	Лекции	Спец-ти	
	Тема		040201	080401
			Практики	
1.	Элементы комбинаторики. Перестановки, сочетания, размещения.	2	2	2
2.	Предмет теории вероятностей. События, их классификация. Полная группа событий. Классическое и статистическое определения вероятности.	2	2	2
3.	Геометрическая вероятность. Задача о встрече.	2	2	2
4.	Операции на событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	2	2	2
5.	Формула полной вероятности. Формула Бейеса.	2	2	2
6.	Повторение испытаний. Формулы Бернулли и Пуассона.	2	2	2
7.	Локальная и интегральная теорема Лапласа.	2	2	2
8.	Случайные величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Биноминальное распределение.	2	2	2
9.	Функция распределения непрерывной случайной величины. Дифференциальная функция распределения.	2	2	2
10.	Числовые характеристики непрерывной случайной величины.	2	2	2
11.	Равномерное распределение. Показательное распределение.	2	2	2
12.	Нормальное распределение.	2	2	2
13.	Закон больших числе.	2	2	2
14.	Математическая статистика. Генеральная совокупность и выборка. Полигон и гистограмма.	2	2	2
15.	Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке.	2	2	2

16.	Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.	2	2	2
17.	Понятие статистической гипотезы. Проверка статистических гипотез. Критерии согласия Пирсона.	2	2	2
18.	Системы случайных величин. Корреляционная зависимость. Линейная корреляция. Расчет прямых регрессий.	2	2	2
19.	Введение в дисперсионный анализ. Статистические методы обработки экспериментальных данных	2	2	2
	Всего	**36**	**36**	**36**

1.4. График самостоятельной работы студентов. Формы промежуточного контроля. Итоговый контроль

Первый семестр

Объем самостоятельной работы (в часах) для специальности 040201– 76 час, для специальности 080401–75час.

Самостоятельная работа студентов включает подготовку к лекциям (9час.), подготовку к практическим занятиям (040201–27час., 080401–36час.), выполнение РГР (040201–30час., 080401–20час.), самостоятельное изучение некоторых программных вопросов (10час.).

Система контроля за ходом самостоятельной работы студентов и качеством усвоение материала включает опрос студентов на практических, проверку выполнения текущих аудиторных и домашних заданий; контрольных, самостоятельных и лабораторных работ, проверку РГР, итоговый контроль (зачет, экзамен).

Контрольные предлагаются студентами по итогам изучения темы (раздела) и проводиться на практических занятиях. В первом семестре предусмотрены две контрольные работы для студентов каждой специальности. Контроль за выполнением РГР заключается в проверке письменной работы и ее защите студентами в письменной или устной форме. На лекциях и практических занятиях возможно проведение небольших самостоятельных работ (не более 15мин.), примерные тексты вариантов которых даны в соответствующем разделе УМКД.

Вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение (10час.)

1. Полярная система координат. Связь между полярными и декартовыми координатами точки плоскости.
2. Собственные значения и собственные векторы матрицы.
3. Направляющие косинусы вектора.
4. Физические приложения скалярного и векторного произведения векторов.
5. Управление прямой в отрезках. Параметрические уравнения прямой.
6. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.
7. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
8. Понятие функции одной переменной. Область определения. Четность, нечетность, периодичность функции. Обратная функция.
9. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
10. Дифференцирование параметрически заданных функций. Дифференцирование неявной функции.
11. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши.
12. Дифференциал функции одной переменной. Приближенные вычисление с помощью дифференциала.
13. Асимптоты кривой.

Формы промежуточного контроля

Специальность 040201(социология):

- РГР №1 (15час.) – 8-ая неделя;
- РГР№2 (15час.) – 17-ая неделя;
- КР №1 – 9ая неделя (практическое занятие);
- КР №2 15ая неделя (практическое занятие);

Специальность 080401(товароведение):

- РГР №1 (10час.) – 5ая неделя;

- РГР №2 (10час.) – 16ая неделя;
- КР №1 – 7 ая неделя (практическое занятие);
- КР №2 – 11 ая неделя (практическое занятие).

Второй семестр

Объем самостоятельной работы (в час.) для специальности 040201–78час., для специальности 080401–71час.

Вопросы вынесенные на самостоятельное изучение (10час.)

1. Показательная форма комплексного числа. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа.
2. Приближенное вычисление корня алгебраического уравнения.
3. Оценки интегралов. Формула среднего значения.
4. Приближенное вычисление определенных интегралов.
5. приближение функций нескольких переменных в экономике.
6. Производная сложно й функции нескольких переменных.
7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.
8. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера.

Подготовка к лекциям – 9час, подготовка к практическим занятиям – 32час.

Формы промежуточного контроля.

Специальность 040201:

- РГР №3 (14час.) – 8ая неделя;
- РГР №4 (13час.)– 17 неделя;
- КР №3 – 5ая неделя (практическое занятие);
- КР №4 – 15ая неделя (практическое занятие).

Специальность 080401:

- РГР №3 (10час) – 5ая неделя;

- РГР №4 (9час.) – 16 неделя;
- КР №3 – 7ая неделя (практическое занятие);
- КР №4 – 13ая неделя (практическое занятие)

Третий семестр

Объем самостоятельной работы (в час.) для специальности 040201 – 64час, для специальности 080401– 55час.

Вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение (10час.)

1. Интегральные признак сходимости Коши.
2. Ортогональная система функций.
3. Тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах.
4. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
5. Формулы Остроградского и Стокса.
6. Элементы теории поля.
7. Степенные ряды с комплексными членами.

Подготовка к лекциям – 9час., подготовка к практическим занятиям – 16час.

Формы промежуточного контроля

Специальность 040201:

- РГР №5(14час.) – 7ая неделя;
- РГР №6(15час.) – 15ая неделя;
- КР №5 – 8ая неделя (практическое занятие);
- КР №6 – 16ая неделя (практическое занятие);

Специальность 080401:

- РГР №5 (10час.) – 8 неделя;
- РГР №6 (10час.) – 14 неделя;
- КР №5 – 9ая неделя (практическое занятие);
- КР №6 – 16 неделя (практическое занятие).

Четвертый семестр

Подготовка к лекциям – 5 час., подготовка к практическим занятиям – 10час., подготовка к лабораторным работам – 5час.

Формы промежуточного контроля:

- РГР №1 (10час.) – 6ая неделя;
- РГР №2 (10 час) –12ая неделя;
- КР №1 – 7ая неделя (практическое занятие);
- КР №2 – 13 неделя (практическое занятие).
- Лабораторная работа №1– 14 ая неделя;
- Лабораторная работа №2– 15 ая неделя;
- Лабораторная работа №3– 16 ая неделя;
- Лабораторная работа №4– 17 ая неделя;
- Лабораторная работа №5– 18 ая неделя;

Итоговый контроль

На экзаменах и зачетах выясняться прежде всего отчетливое усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применить полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно выполнятся без ошибок и уверено; всякая письменная работа должна быть выполнена аккуратно и четко.

Студенты специальности 040201 (социология) допускаются к сдаче зачета (I, III семестры) при условии выполнения ими на положительную оценку всех форм текущего контроля предусмотренных программой. Зачет проводиться по билета, теоретические вопросы и практические задания охватывают все разделы программы. Зачет выставляется при выполнении не мене 50% заданий, сформулированных в билете. Допустимо проведение зачета в форме тестирования, отметка «зачтено» ставиться в этом случае при правильном ответе на половину тестовых заданий и вопросов.

Студенты специальности 040201(социология) и 080401 (товароведение) допускаются к сдаче экзамена (040201– во II и IV семестрах, 080401– в I, IVсеместрах) при условии выполнения ими на положительную оценку всех расчетно-графических и лабораторных работ, предусмотренных программой. Экзамен проводиться по билетам, содержащим 3 вопроса (I семестр), 2 вопроса (II – IVсеместры) теоретического характера, а также по пять практических заданий, охватывающих весь программный материал соответствующих семестров. Итоговая оценка на экзамене рассчитывается по формуле: $0,4x + 0,6y$, где x- средняя оценка, полученная студентом в результате его работы в семестре, y- результат итогового контроля (экзамена).

1.5. Комплект экзаменационных билетов

I семестр (специальность 080401)

Билет №1

1. Понятие матрицы. Линейные операции над матрицами.
2. Окружность. Вывод канонического уравнения. Построение.
3. Геометрическая интеграция производной.

Билет №2

1. Умножение матриц.
2. Скалярное умножение векторов. Определение. Выражение скалярного произведения в координатах. Приложение.
3. Правила дифференцирования.

Билет№3

1. Определители второго и третьего порядков.
2. Простейшие задачи в координатах на плоскости и в пространстве.
3. Предел функции. Основные теоремы.

Билет№4

1. Определители n-го порядка. Методы вычисления определителей.
2. Способы задания прямой в пространстве и ее уравнения.
3. Экономическая интерпретация производной.

Билет№5

1. Матрица, обратная к данной. Определение, вычисление.
2. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
3. Монотонные функции. Признак монотонности.

Билет№6

1. Решение матричных уравнений.
2. Эллипс. Определение, каноническое уравнение, построение.
3. Эластичность функции.

Билет №7

1. Элементарные преобразования матриц.
2. Сфера. Определение, каноническое уравнение. Построение.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Билет №8

1. Ранг матрицы. Теоремы о ранге матрицы.
2. Базис плоскости и пространства.
3. Производная. Определение, таблица производных элементарных функций.

Билет №9

1. Методы вычисления ранга матрицы.
2. Векторное произведение векторов. Определение, свойства, выражение в координатах. Приложения.
3. Непрерывность функции. Определение.

Билет №10

1. Система линейных алгебраических уравнений. Основные понятия.
2. Гипербола. Определение, каноническое уравнение, построение.
3. Производная сложной функции.

Билет №11

1. Решение систем линейных уравнение методом Крамера.
2. Смешанное произведение векторов. Определение, свойства, выражение в координатах. Приложения.
3. Производная функций, заданной параметрически.

Билет №12

1. Решение систем линейных уравнений матричными методами.
2. Парабола. Определение, каноническое уравнении. Построение.
3. Числовая последовательность. Предел числовой последовательность.

Билет №13

1. Критерий совместности систем линейных алгебраических уравнений.
2. Системы координат на плоскости и в пространстве.
3. Произведение высших порядков.

Билет №14

1. Исследование системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.
2. Эллипсоид. Каноническое уравнение, построение.
3. Теоремы о пределах последовательностей.

Билет №15

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Прямая в пространстве.
3. Эквивалентные бесконечно малые. Основные теоремы.

Билет №16

1. Свойства определителей n-го порядка.
2. Способы задания прямой на плоскости и ее уравнения.
3. Методы вычисления пределов последовательностей.

Билет №17

1. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы (определителя).
2. Метрические задачи теории прямой на плоскости.
3. Точки перегиба функции. Необходимое и достаточное условие точки перегиба.

Билет №18

1. Разложение определителя n-го порядка по элементам строки (столбца).
2. Взаимное расположение прямой и плоскости.
3. Асимптоты кривой.

Билет №19

1. Однородная система линейных алгебраических уравнений. Исследование и решение.
2. Цилиндры второго прядка. Канонические уравнение, построение.
3. Физическая интерпретация производной.

Билет №20

1. Проекция вектора на ось, направляющие косинусы вектора.
2. Конус второго порядка. Каноническое уравнение, построение.
3. Методы вычисления пределов функций.

Билет №21

1. Эллиптический параболоид. Каноническое уравнение. Построение.
2. Полярная система координат на плоскости. Связь между полярными и декартовыми координатами точки плоскости.
3. Дифференциал функции.

Билет №22

1. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.
2. Классическая точек разрыва функции.
3. Правило Лопиталя.

Билет №23

1. Угол между прямыми в пространстве.
2. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
3. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.

Билет №24

1. Общее уравнение прямой на плоскости.
2. Первый и второй замечательные пределы.
3. Экстремум функции. Достаточное условие экстремума.

Билет №25

1. Уравнение прямой с условным коэффициентом.
2. Наибольшее и наименьшее значение функции на сегменте.
3. Общая схема построения графика функции.

II семестр (специальности 040201, 080401)

Билет №1

1. Понятие производной и неопределенного интеграла.
2. Частные производные функции нескольких переменных.

Билет №2

1. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.
2. Функции нескольких переменных. Область определения.

Билет №3

1. Неопределенный интеграл. Метод интегрирования заменой переменой.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия.

Билет №4

1. Неопределенный интеграл. Метод интегрирования по частям.
2. Скалярное поле. Градиент.

Билет №5

1. Интегрирование рациональных функций.
2. Линии и поверхности уровня.

Билет №6

1. Интегрирование иррациональных функций.
2. Производная по направлению.

Билет №7

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
2. Теорема Коши существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Билет №8

1. Интегрирование тригонометрических функций.
2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

Билет №9

1. Понятие определенного интеграла. Свойства.
2. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал.

Билет №10

1. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Уравнения с разделяющимися переменными.

Билет №11

1. Приложения определенного интеграла в геометрии.
2. Однородные уравнения первого порядка.

Билет №12

1. Приложение определенного интеграла в физике.
2. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условие.

Билет №13

1. Приложение определенного интеграла в экономике.
2. Уравнение Бернулли.

Билет №14

1. Условный экстремум функции двух переменных. Функция Логранжа.
2. Замена переменной в определенном интеграле.

Билет №15

1. Уравнение вида $\acute{o}^{n}(x) = f(x)$.
2. Определенный интеграл. Интегрирование по частям.

Билет №16

1. Уравнения вида $\overline{f}(x, y', y'') = 0$.
2. Комплексные числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Билет №17

1. Уравнение вида $\overline{f}(y, y', y'') = 0$.
2. Несобственный интеграл первого рода.

Билет №18

1. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.
2. Несобственный интеграл II рода.

Билет №19

1. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными в тригонометрической форме.

Билет №20

1. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.
2. Решение алгебраических уравнений в роле комплексных чисел.

Билет №21

1. Приложения дифференциальных уравнений к решению задач.
2. Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

Билет №22

1. Площадь криволинейной трапеции.
2. Сложная функция двух переменных и ее дифференцирование.

Билет №23

1. Оценки интегралов. Форма среднего значения.
2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Билет №24

1. Приближенное вычисление определенного интеграла. Формула трапеций.
2. Функции нескольких переменных в экономике.

Билет №25

1. Приближенное вычисление определенного интеграла. Формула Симпсона.
2. Понятие функций комплексного переменного. Элементарные функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного.

III семестр (специальность 080401)

Билет №1

1. Числовые ряды. Основные понятия.
2. Двойной интеграл в полярных координатах.

Билет №2

1. Определение сходимости ряда. Основные теоремы.
2. Криволинейный интеграл первого рода, свойства, вычисление.

Билет №3

1. Ряды с положительными членами. Членами. Признак Даламбера.
2. Понятия двойного интеграла. Свойства.

Билет №4

1. Ряды с положительными членами. Признак Коши.
2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

Билет №5

1. Сходимость числового ряда. Первый признак сравнения.
2. Перемена порядка интегрирования в двойном интеграле.

Билет №6

1. Сходимость числового ряда. Второй признак сравнения.
2. Приложения двойных интегралов.

Билет №7

1. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
2. Понятие тройного интеграла. Вычисление в декартовых координатах.

Билет №8

1. Сума рода Лейбница.
2. Операторы Лапласа и Гамильтона.

Билет №9

1. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
2. Криволинейный интеграл второго рода. Определение, вычисление.

Билет №10

1. Функциональные ряды. Основные понятия.
2. Формула Римана-Грина.

Билет №11

1. Область сходимости функционального ряда.
2. Приложения криволинейных интегралов первого рода.

Билет №12

1. Степенной ряд. Определение. Радиус, интервал, область сходимости.
2. Приложение криволинейных интегралов второго рода.

Билет №13

1. Разложение функции в степенной ряд. Формулы Тейлора и Маклорена.
2. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Билет №14

1. Разложение элементарных функций в степенной ряд.
2. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Билет №15

1. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям.
2. Замена переменой в двойном интеграле.

Билет №16

1. Приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений.
2. Замена переменой в тройном интеграле.

Билет №17

1. Тригонометрическая система функций, ее ортогональность.
2. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

Билет №18

1. Ряд Фурье функции $f(x)$. Вычисление коэффициентов Фурье.
2. Тройной интеграл в сферических координатах.

Билет №19

1. Разложение периодической функции в Фурье.
2. Поверхностный интеграл первого рода. Определение, вычисление.

Билет №20

1. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
2. Поверхностный интеграл второго рода. Определение, вычисление.

Билет №21

1. Числовые ряды с комплексными членами.
2. Формула Стокса.

Билет №22

1. Степенные ряды с комплексными членами.
2. Элементы теории поля.

Билет №23

1. Ряд Фурье для четной и нечетной функции.
2. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.

Билет №24

1. Ряд Фурье с периодом 2ℓ.
2. Формула Остроградского.

IV семестр

(специальности 040201, 080401)

Билет №1

1. Элементы комбинаторики. Перестановки, сочетания, размещения.
2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Билет №2

1. События и их классификация. Полная группа событий.
2. Показательное распределение.

Билет №3

1. Классическое определение вероятности.
2. Понятие статистической гипотезы. Проверка статистических гипотез. Критерий события Пирсона.

Билет №4

1. Локальная теорема Лапласа.
2. Полигон и гистограмма.

Билет №5

1. Интегральная теорема Лапласа.
2. Эмпирическая функция распределения.

Билет №6

1. Геометрическая вероятность. Задача о встрече.
2. Функция распределения.

Билет №7

1. Операция над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2. Генеральная совокупность и выборка.

Билет №8

1. Формула полной вероятности.
2. Дифференциальная функция распределения.

Билет №9

1. Формула Бейеса.
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Билет №10

1. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
2. Равномерное распределение.

Билет №11

1. Повторение испытаний. Формула Пуассона
2. Нормальное распределение.

Билет №12

1. Биноминальное распределение.
2. Система случайных величин. Корреляционная зависимость.

Билет №13

1. Случайные величины. Интегральная функция распределения.
2. Простейший поток событий.

Билет №14

1. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.
2. Кривая Гаусса.

Билет №15

1. Вероятность появления хотя бы одного события.
2. Статистические оценки параметров распределения. Несмещенность, эффективность, состоятельность.

Билет №16

1. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
2. Функция надежности. Показательный закон надежности.

Билет №17

1. Распределение случайных ошибок измерения.
2. Мода и медиана.

Билет №18

1. Наивероятнейшее число наступления события и его вероятность.
2. Асимметрия и эксцесс.

Билет №19

1. Понятие о моментах распределения.
2. правило трех сигм.

Билет №20

1. Вероятность появления только одного события.
2. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

Билет №21

1. Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины.
2. Линейная корреляция. Расчет прямых регрессии.

Билет №22

1. Полная вероятность.
2. Генеральная и выборочная средние.

Билет №23

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства.
2. Генеральная и выборочная дисперсии.

Билет №24

1. Формула Бейеса.
2. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке.

Билет №25

1. Плотность распределения.
2. Метод наименьших квадратов.

1.6. Вопросы к зачету (специальность 040201)

I семестр

1. Матрицы. Основные понятия.
2. Линейные операции над матрицами. Свойства.
3. Умножение матриц. Свойства.
4. Определитель. Свойства определителей.
5. Вычисление определителей.
6. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
7. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
8. Понятие ранга матрицы. Вычисление ранга.
9. Понятие общего и частного решений системы уравнений.

10. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
12. Декартова система координат, ее связь с полярной.
13. Общее уравнение прямой на плоскости. Расположение прямой относительно осей координат.
14. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Выводы.
15. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
16. Уравнение прямой в отрезках. Вывод.
17. Общее понятие о кривых второго порядка.
18. Окружность. Каноническое уравнение. Построение.
19. Эллипс. Каноническое уравнение. Построение.
20. Гипербола. Каноническое уравнение. Построение.
21. Парабола. Каноническое уравнение. Построение.
22. Плоскость прямая в пространстве.
23. Числовая последовательность и ее предел.
24. Теоремы о пределах последовательностей.
25. Замечательные пределы.
26. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентности.
27. Понятие функций. График функций.
28. Предел функции в точке и на бесконечности.
29. Понятие непрерывности функции. Эквивалентные определение непрерывности.
30. Односторонние пределы.
31. Классификация точек разрыва.
32. Понятие производной. Правила дифференцирования.
33. Таблица производных.
34. Геометрический и физический смысл производной.
35. Уравнения касательной и нормали к кривой. Угол между кривыми.
36. Признаки возрастания и убывание функции.
37. Использование производной для исследования функции на экстремум.
38. Необходимое и достаточное условие экстремума.
39. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и перегиб.

40. Наибольшее и наименьшее значения функции на сегменте.
41. Правило Лопиталя.

Вопросы к зачету (специальность 040201)

III семестр

1. Числовые ряды. Основные понятия.
2. Вычисление суммы числового ряда.
3. Необходимый признак сходимости числового ряда.
4. Признаки сравнения для исследования на сходимость числового ряда.
5. Признак Деламбера.
6. Радикальный признак Коши.
7. Интегральный признак Коши.
8. Абсолютная и условная сходимость.
9. Теорема Лейбница. Ряд Лейбница и его сумма.
10. Понятие функционального ряда. Область сходимости.
11. Понятие степенного ряда.
12. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
13. Ряды Тейлора и Маклорена.
14. Разложение функции в степенной ряд.
15. Приближенные вычисления с помощью рядов.
16. Понятия тригонометрического ряда. Коэффициенты и ряд Фурье.
17. Понятие двойного интеграла. Свойства.
18. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
19. Замена переменных в двойном интеграле.
20. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах
21. Физические приложения двойного интеграла.
22. Геометрические приложения двойного интеграла.
23. Тройной интеграл в декартовых координатах.
24. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
25. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
26. Физические и геометрические приложения тройного интеграла.
27. Криволинейных интеграл по длине дуги.

28. Вычисление длины дуги при помощи криволинейного интеграла.
29. Криволинейный интеграл по координатам.
30. Физические приложение криволинейного интеграла по координата.
31. Формула Грина.
32. Поверхностный интеграл первого рода.
33. Поверхностный интеграл второго рода.
34. Элементы теории поля.

2. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

I семестр

Тема 1. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Определители второго и третьего порядка

Матрицы порядков m и n определим как таблицу чисел, состоящую из m строк и n столбцов: $A(aij)(i = \overrightarrow{1,m},\ j = \overrightarrow{1,n})$. Числа aij, образующие таблицу, являться эквивалентами матриц; первый индекс элемента указывает на номер строки, второй на номер столбца, на пересечении которых находится элемент. При $m = n$ матрица является квадратной матрицей $n-$ го порядка. Равенство матриц одинаковых порядков вводится поэлементно: $aij = bij(i = \overrightarrow{1,m},\ j = \overrightarrow{1,n})$. Операция сложения вводится для матриц одинаковых порядков формулой: $C = A + B,\ cij = aij + bij$ $(i = \overrightarrow{1,m},\ j = \overrightarrow{1,n})$. Операция сложения матриц обладает свойствами операции сложения действительных числе в силу своего определения. В частности, $A + B = B + A,\ A + (B + C) = (A + B) + C.$ Нейтральный элемент нулевая матрица Θ, все элементы которой являются нулями. Матрица $A' = (-aij)$ является противоположной по отношению к $A = (-aij)$ $(i = \overrightarrow{1,m},\ j = \overrightarrow{1,n})$.

Матрица $\alpha A = (\alpha aij)$ $(i = \overrightarrow{1,m},\ j = \overrightarrow{1,n})$ является произведение матрицы А на действительной число α . Умножение матриц на действительное и сложение матриц называется мнимыми операциями над матрицами. Для линейных операций справедливы утверждения: $1 \cdot A = A; \alpha(\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A, \alpha, \beta \in R$; $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$. Справедливость утверждений следует из определения линейных операций над матрицами и соответствующих свойств множества R. Единичная матрица Е определяется как квадратная, элементами главной диагонали которой являться единицы, а все остальные элементы – нули, то есть $aij = 0$ при $i \neq j$ и $aij = 1$ при $\bar{i} = j(i, \bar{j} = \overline{1,u})$. Перемножать можно матрицы A и B в том случае, если количество столбцов в A равно количеству строк в B. Если $A = (aij)(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, $B = (bij) = (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p})$, то $C = AB = (cij)$, где $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,p})$. Операция умножения матриц обладает свойствами: $A(BC) = (AB)C; \alpha(AB) = (\alpha A)B, \alpha \in R$; $C(A + B) = CA + CB$; $(A + B)C = AC + BC; AE = EA, E$ и A – матрица одного порядка. Умножение матриц не подчиняется коммутативному закону: $AB \neq BA$. Операция замены строк матрицы ее столбцами с сохранением порядка называется транспонированием, A^T – матрица, транспонирования по отношению к A.

<u>Пример.</u> Выполнить действия над матрицами: $2A - B^T + AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. $2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 7 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 7 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $2A - B^T + AB = \begin{pmatrix} 14-3+21 & 0-4+7 \\ -2-1+5 & 4+3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Если дана

квадратичная матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то ее определители

(определители второго порядка) являются числа $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$;

обозначение определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A| = \det A$. Если А–матрица третьего порядка, то ее определителем (определителем третьего порядка) является

число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| = \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$

$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$.

Пример. Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$. Ответы 22, 24.

Тема 2.Определеители n-го порядка. Свойства. Методы вычисления.

Всякое расположение числе $1,2,...,n$ в определенном порядке является перестановкой из n чисел. Число различных перестановок из чисел 1,…, n равно $n! = 1,2,...,n.$ Два числа в перестановке образуют инверсию, если большое число расположено левее меньшего. Из числе 1,2 можно составить $2! = 1,2 = 2$ перестановок: $(1,2)$ и $(2,1)$. Число инверсий в первой равно 0, во второй – 1. Определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$ можно записать:

$\Delta = \sum_j (-1)^t a_1 j_1 \cdot a_2 j_2 \;\; j = (j_1, j_2) -$ перестановки из чисел 1,2; t– число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_1 j_1 a_2 j_2$, суммирование ведется по всем перестановкам (j_1, j_2). В самом деле, $(-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22}$, что согласуется определением определителя второго порядка. Далее, из числе 1,2,3 можно составить 6 перестановок: (1,2,3), (1,3,2), (3,1,2),(3,2,1), (2,3,1),(2,1,3). Соответствующие числа инверсий: $t = 0,\ t = 1,\ t = 2,\ t = 3,\ t = 2,\ t = 1.$ Тогда определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ можно записать:

$\Delta = \sum_j (-1)^t a_1 j_1 \cdot a_2 j_2 \; a_3 j_3,\;\; j = (j_1, j_2, j_3) -$ все возможные перестановки вторых индексов в произведении $a_1 j_2 a_2 j_2\, a_3 j_3$, суммирование ведется по всем перестановкам.

Действительно, $\Delta = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} +$

$+ (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{33} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} -$

$-a_{11}a_{23}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$, что согласуется с определением, введется ранее.

По аналогии вводится определение определителя n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta = \sum_j (-1)^t a_1 j_1 \cdot a_2 j_2 \;,\ldots, a_n j_n$$, суммирование ведется по всем перестановкам $j = (j_1, \ldots, j_n)$ из чисел 1,2, …, n.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из Δ вычеркиванием

i - строки и j - столбца. Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя.

К свойствам определителя относятся следующие:

1) величина определителя не меняется не меняется при транспонировании;

2) определитель меняет знак, если поменять метами две строки (2 столбца);

3) определитель, у которого две стоки (столбца) одинаковы, равен 0;

4) общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя;

5) определитель равен произведению элементов главной диагонали, если все элементы определителя, находятся ниже (выше) главной диагонали, равно 0;

6) определитель не измениться, если к элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное число, не равное нулю;

7) определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь стоки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$\Delta = a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in}(i\ \overline{1,n}), \Delta = a_1 j A_1 j + ... + a_{nj}A_{nj} \left| j = 1,\overline{n} \right.$.

К методам вычисления определителя отнесем метод разложения по элементам сороки (столбца), метод накопления нулей ниже главной диагонали и комбинированный.

Пример. Вычислить Δ путем разложения по элементам первой строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

.

Пример. Вычислить Δ путем накопления нулей ниже главной

диагонали. $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 5 = 20$$

Пример. Вычислить Δ путем накопления нулей в первом столбце с последующим разложением

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Тема 3. Матрица, обратная к данной. Решение матричных уравнений.

Квадратичная матрица называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю. Квадратная матрица А называется обратной для квадратной матрицы того же порядка, если $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$ Матрица, обратная по отношению к данной матрице А(detA$\neq 0$), вычисляются по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^{*}$, $A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – союзная матрица,

$A_{ij}(i,j,\overline{i,n})$ – алгебраические дополнения элементов матрицы А.

Уравнение вида $AX=B$, где $A,X,B-$ матрицы, называется матричным уравнением I типа. Если А– невырожденная матрица, то матричное уравнение I типа имеет решение $X=A^{-1}\cdot B$. В самом деле,

$A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot B$,

$A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot B,\ (A^{-1}\cdot A)X=A^{-1}\cdot B,\ EX=A^{-1}\cdot B,\ X=A^{-1}\cdot B$.

Уравнение вида $X\cdot A=B$, где $A,X,B-$ матрицы, называется матричным уравнением II типа. Так как $(X\cdot A)A^{-1}=BA^{-1},\ X(AA^{-1})= =$

$(X\cdot A)A^{-1}=BA^{-1},\ X(AA^{-1})=BA^{-1},\ XE=BA^{-1},\ X=BA^{-1}$, то Х является решением матричного уравнения II типа, А– невырожденная матрица.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A|=2\cdot 3-1\cdot 5=1\neq 0$, следовательно, А – невырожденная;

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 3=3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 1=-1,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 5=-5, A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2,$

тогда $A^{X}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, а $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 3\cdot 4+(-5)\cdot 2 & 3\cdot(-6)+(-5)\cdot(-1) \\ -1\cdot 4+2\cdot 2 & -1\cdot(-6)+2\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тема 4. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теоремы о ранге матрицы. Вычисление ранга матрицы.

Пусть А– матрица порядков m,n а k – число, не превосходящее m,n. Выберем в А, произвольно k строк и k столбцов. Из элементов А, находящихся на пересечении выбранных строк и столбцов, образуется определитель k-го порядка, который называется минором k-го порядка матрицы А. При $k = 1$ под минором первого порядка понимают элемент матрицы А. Если в А все миноры k-го порядка равны 0, то раны нулю все миноры более высокого порядка (если таковые имеются). Утверждение следует из свойств определителя.

Рангом матрицы А будем называть такое целое число r, что среди миноров r-го порядка матрицы А имеется хотя бы один, не равный 0, а все миноры ($r+1$)-го порядка (если их можно составить) равны 0. Если $A = \Theta$, то ранг А по определению равен 0. Обозначается ранг символом: $r(A)$, *rangA.* Из определения следует, что ранг матрицы–наивысший из порядков не равных 0 миноров этой матрицы.

Под элементарными преобразованиями матрицы понимают следующие:

1) умножение элементов какой-нибудь строки на число, не равное 0;

2) перестановка каких-нибудь двух строк;

3) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умножение их на одно и тоже число.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов. Запись: $A \to B$ означает, что В получена из А элементарными преобразованиями.

Теорема 1. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, то есть, если $A \to B$, то $r(A) = r(B)$.

Будем называть матрицу трапециевидной, если она имеет следующий

вид: $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2r} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{rr} \neq 0$.

Частным случаем трапециевидной матрицы является треугольная, это квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали не равны 0, а ниже главной диагонали находиться 0.

Теорема 2. Любая матрица при помощи элементарных преобразований может быть приведена к трапециевидной.

Теорема 3. Число ненулевых строк в трапециевидной форме матрицы А равно рангу матрицы А.

Пример. Вычислить ранг матрицы, пользуясь определением ранга, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как $A \neq \Theta$, то $r(A) \geq 1$. Так как угловой минор $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$,

то $r(A) \geq 2$. Минор третьего порядка только один: $|A| = 0$, следовательно, $r(A) < 3$. Итак, $r(A) = 2$.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем А к трапециевидной форме.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2.$$

Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Основные понятия. Решение СЛАУ методом Крамера, матричным методом. Критерий совместности. Решение СЛАУ методом Гаусса.

Общий вид системы m линейных уравнений с n неизвестными следующий:

$$\begin{cases} a_{м}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n} \;\; x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n} \; x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь $x_1,...,x_n$ - неизвестные; $b_1,...,b_m$ - свободные члены; $A = (aij)(i = \overline{1,m}, \;\; j = \overline{1,\gamma})$ – матрица системы. При $m = n$ система называется квадратной. Система является однородной, если все свободные члены равны 0, и неоднородной, если хотя бы один из свободных членов отличен от 0. Решением системы называется упорядоченный набор n чисел $\alpha_1,...,\alpha_n$, которые при подстановке в систему на место неизвестных $x_1,...,x_n$ соответственно обращают все уравнения в тождества. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной если она не имеет решений. Совместная система является определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет бесконечное множество решений. Однородная система всегда совместна, так как обладает решением $x_1 = x_2 = \dots x_n = 0$, которое называется нулевым (тривиальным). Две системы линейных уравнений с одним и тем же неизвестными назевается равносильными, если каждое решение одной системы является решением и другой или обе они несовместным. С неоднородной системой связаны две матрицы: $A = (aij)(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})-$ матрица системы, В – матрица, которая получается добавлением к А столбца свободных членов, В называется расширенной матрицей системы.

Критерий совместности системы выражает следующее утверждение:

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы А равен рангу расширенной матрицы В, причем в случае совместности система является определенной, когда ранг А (ранг В) равен числу и неизвестных, и неопределенной, когда этот ранг матрицы меньше n.

К методам решения систем линейных алгебраических уравнений относят метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса.

I. Метод Крамера.

Пусть дана квадратная система с невырожденной матрицей $A(\det A \neq 0)$. Обозначим через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n -$ определители, которые получается из Δ путем замены первого, второго, и т.д. столбцов Δ соответственно столбцом свободных членов. Тогда имеют место формулы Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \dots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

<u>Пример.</u> $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$. Решить систему методом Крамера.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -28 \neq 0,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -89,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -85,$$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -21,\ x_1 = \dfrac{89}{28},\ x_2 = \dfrac{85}{28},\ x_3 = \dfrac{3}{4}.$ Таким образом, $\left(\dfrac{89}{28}, \dfrac{85}{28}, \dfrac{3}{4}\right)$ - решение системы.

II. Матричный метод.

Квадратную систему линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей $A(\det A \neq 0)$ запишем в матричной форме: $AX = B$, А–матрица-столбец свободных членов, Х–матрица-столбец неизвестных. Этом матричного уравнение I типа, одно имеет решение $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3 \end{cases}$. Решить систему матричным методом.

Решение. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Алгебраические дополнения

элементов матрицы А равны:

$A_{11} = -23,\ A_{12} = 7,\ A_{13} = 5,\ A_{21} = 6,\ A_{22} = -2,\ A_{23} = -1,\ A_{31} = 4, A_{32} = -1,\ A_{33} = -1$

, поэтому $A^{-1} = \begin{pmatrix} -23 & 6 & 4 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Отсюда

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 6 & 4 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \; x = 3, \; y = -2, \; z = 2.$$

III. Метод Гаусса. (метод исключения неизвестных)

Пример. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$.

Решение. Найдем ранг А и В: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right) \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$, отсюда

$r(A) = r(B) = 3 = n$, поэтому система совместна и имеет единственное решение. По последней матрице составим систему, равносильную исходной:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ \quad\quad\quad\quad x_2 = 1 \\ \quad\quad\quad - x_3 = 1 \end{cases}$. Отсюда следует решение (1, 1, 1).

Пример. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$. Найдем ранг A однородной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 5 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & -9 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -9 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$ поэтому

$r(A) = 3 = n$, следовательно, однородная система имеет единственное нулевое решение (0, 0, 0).

Пример. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$.

Решение. Найдем ранги матриц A и B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & 16 & 11 \end{array}\right) \to,$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) r(A) = 2,\ r(B) = 3,\ r(A) \neq r(B)$$, следовательно, система совместна.

Пример. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$r(A) = r(B) = 2,$ следовательно, система совместна. Так как $n = 4,\ r < n,$ то система имеет бесконечное множество решений. По последней матрице имеет систему, равносильную первоначальной: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$. Число $n - r = 4 - 2 = 2$ – это количество свободных неизвестных в системе. Примем, например, x_2 и x_3 за свободные и выразим оставшиеся x_1 через свободные неизвестные. Из первого уравнения: $x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2x_2 - x_3$, отсюда следует общее решение: $(2x_2 - x_3, x_2, x_3, 1)$, где $x_2, x_2 \in R$. Придавая x_2 и x_3 конкретные значения из R, получим бесконечное множество частных решений. Пусть, например, $x_2 = 2, x_3 = 0$, тогда (4, 2, 0, 1) – частное решение системы.

Тема 6. Понятие вектора. Линейные операции под векторами. Базис плоскости и пространства. Система координат на плоскости и в пространстве.

Вектором будет называть направленный отрезок, то есть отрезок, для которого указано, какая из его конечных точек считается первой, а какая – второй. Первая точка направленного отрезка – начало вектора, вторая – конец вектора. Обозначаются векторы: $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$. Если точки А и В совпадают, то имеет нулевой вектор: $\vec{0}$. Длинной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка АВ. Длина нуль-вектора равна нулю. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$. Два вектора коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; запись: $\vec{a} \| \vec{в}$. Нуль-вектор коллинеарен любому вектору. Векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны. Два вектора называются равными, если они компланарны, одинаково направлены и имеют равные длины:

$\vec{a} = \vec{в} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{в}|, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{в}$. Вектор $\vec{a}'$ называется противоположным по отношению к $\vec{a}$, если они коллинеарны, противоположно направлены и длины их равны: $|\vec{a}'| = |\vec{a}|, \vec{a}' \uparrow\downarrow \vec{a}$. Линейные операции над векторами: сложение векторов и умножение вектора на действительное число. Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется вектор $\vec{a}$, начало которого находится в начале первого вектора, а конец – *в* конце последнего, при условии, что начало каждого последующего вектора находится в конце предыдущего. Складывать векторы можно по правилу треугольника и параллелограмма. Правило треугольника. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{в}$ – векторы, 0 – произвольная точка. Отложим $\vec{a}$ от точки 0, получим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, затем от A отложим $\overrightarrow{AB} = \vec{в}$. Вектор $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$; $\vec{c} = \vec{a} + \vec{в}$. Правило параллелограмма. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{в}$ – векторы, 0 – произвольная точка. От точки 0 отложим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{в}$ и построим параллелограмм на этих сторонах. Вектор $\overrightarrow{OC}$, начало которого в точке 0, конец C совпадает с противоположной вершиной параллелограмма, является вектором суммы $\vec{a} + \vec{в}$. Законы сложения векторов: 1) $\vec{a} + \vec{в} = \vec{в} + \vec{a}$; 2) $\vec{a} + (\vec{в} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{в}) + c$; 3) $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$; 4) $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{o}$.

Разностью вектором $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется вектор $\vec{x}$, который в сумме с вектором $\vec{x}$, который в сумме с вектором $\vec{в}$ дает вектор $\vec{a}$, то есть $\vec{в} + \vec{x} = \vec{a}$; обозначается разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$: $\vec{a} - \vec{в}$. Первый способ построения разности: $\vec{a} - \vec{в} = \vec{a} + \vec{в}$. Второй способ построения разности: векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ отложим от одной точки 0, вектор разности соединяет их концы и направлен из конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число $\lambda\,(\lambda \neq 0)$ называется вектор $\vec{в} = \lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условием: 1) $|\vec{в}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) $\vec{в} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$ и $\vec{в} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$ либо $\vec{a} = 0$ либо $\vec{a} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{c} = \vec{0}, \lambda\vec{0} = \vec{0}$. Для прямоугольных $\lambda\beta \in R$ и векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}$ имеют место утверждения: 1) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}, (-1)\cdot = -\vec{a} = \vec{a}$; 2) $\lambda(\beta\,\vec{a}) = (\lambda\beta)\vec{a}$;

3) $(\lambda + \beta)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{a}$; 4) $\lambda(\vec{a} + \vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{a}$.

Любой вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - произвольные действительные числа, называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$. Числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ называется коэффициентами линейной комбинации векторов. Если $\vec{x}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, то говорим, что $\vec{x}$ разложен по этим векторам. Например, $\vec{x} = 3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3$ разложен по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. С коэффициентами 3,1,–2 соответственно.

Теорема 1. Пусть $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$ - коллинеарные векторы. Тогда всякий вектор $\vec{a}$ плоскости есть линейная комбинация векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$, причем коэффициенты разложения определяются однозначно, то есть $\vec{a} = a_1\vec{\ell}_1 + a_2\vec{\ell}_2$.

Теорема 2. Пусть $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ – некомпланарные векторы. Тогда любой вектор $\vec{a}$ пространства единственным образом разлагается по этим векторам: $\vec{a} = a_1\vec{\ell}_1 + a_2\vec{\ell}_2 + a_3\vec{\ell}_3$.

Аффинным базисом плоскости называется совокупность двух неколлинеарных векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$ взятых в определенном порядке: $\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2\}$. Аффинный базис называется ортонормированным, если векторы базиса является единичным и взаимно перпендикулярными: $\{\vec{i}, \vec{j}\}, \vec{i} + \vec{j}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Тройка некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке называется аффинным базисом пространства: $\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3\}$. Базис называется ортонормированным, если его векторы единичные и взаимно перпендикулярны: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$.

Если на плоскости или в пространстве выбран некоторый базис, то каждому вектору плоскости (пространства) ставится в соответствие вполне определенная упорядоченная пара (тройка) чисел, представляющая собой совокупность коэффициентов разложения вектора по базису. Координатами вектора в данном базисе называются коэффициенты его разложения по векторам базиса. Записи: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ в $\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2\}$ и $\vec{a} = a_1\vec{\ell}_1 + a_2\vec{\ell}_2$ равносильны. При сложении векторов их соответствующие координаты складываться, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Система координат на плоскости и в пространстве однозначно определяется заданием некоторой точки 0 и векторов базиса. Точка 0 – начало системы координат. Прямые проходящие через начало координат в направлении векторов базиса, называется осями координат. Обозначение: $\{0, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3\}$ – аффинная система координат, $\{0, \vec{i}\,, \vec{j}, \vec{k}\}$ – прямоугольная система координат. Ось с направлением $\vec{\ell}_1(\vec{i}\,)$ называется осью абсцисс, ось в направлении $\vec{\ell}_2(\vec{j})$– осью ординат, ось в направлении $\vec{\ell}_3(\vec{k})$ является осью аппликат. Обозначаются оси: OX, OY, OZ. Координатами точки *М* плоскости (пространства) в системе координат называться координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в соответствующем базисе. Записи: $M(x, y, z), \overrightarrow{OM} = x\vec{\ell}_1 + y\vec{\ell}_2 + z\vec{\ell}_3$ равнозначны; $x-$ абсцисса, $y-$ ординаты, $z-$ аппликата точки *М*. Задание в плоскости (пространстве) системы координат устанавливает взаимное однозначное соответствие между точками плоскости (пространства) и прямоугольными парами (тройками) действительных чисел.

Тема 7. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов. Приложение.

Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}, \vec{в}$ определяется как произведение длин этих векторов и косинуса угла между ними:

$(\vec{a},\vec{в}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{в})$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a},\vec{в}$ нулевой, то скалярное произведение этих векторов по определению равно 0.

Теорема 1. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

В самом деле, $(\vec{a},\vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 2. Два ненулевых вектора ортогональны и тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Если Векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов: $(\vec{a},\vec{в}) = a_1в_1 + a_2в_2 + a_3в_3$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{в} = (в_1, в_2, в_3)$. Отсюда следуют формулы:

$$1)\ |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

$$2)\ \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{в}) = \frac{(\vec{a},\vec{в})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|} = \frac{a_1в_2 + a_2в_2 + a_3в_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{в_2^2 + в_2^2 + в_3^2}}.$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{в}$, вычисление по формуле: $pr_{\vec{в}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a},\vec{в})}{|\vec{в}|}$. В частности, проекции $\vec{a}$ на координатные оси есть координаты вектора $\vec{a}$, так как $(\vec{a},\vec{i}) = a_1$, $(\vec{a},\vec{j}) = a_2$, $(\vec{a},\vec{k}) = a_3$. Обозначим через α,β,γ углы между $\vec{a}$ и векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ соответственно. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ вычисляются по формулам: $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ называется правой, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{в}$ из конца вектора $\vec{c}$ виден совершающимися против часовой стрелки. Если указанный поворот совершается по часовой стрелке, то упорядоченная тройка векторов – левая.

Векторным произведением двух некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ называется вектор $[\vec{a},\vec{в}]$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\|[\vec{a},\vec{в}]\| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \cdot \sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{в})$; 2) $[\vec{a},\vec{в}] \perp \vec{a},\ [\vec{a},в] \perp \vec{в}$; 3) $\vec{a},\vec{в},\ [\vec{a},\vec{в}]$ – правая тройка. Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно $\vec{0}$.

В ортонормированном базисе координаты векторного произведения вычисляются: $[\vec{a},\vec{в}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ в_2 & в_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ в_3 & в_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ в_1 & в_2 \end{vmatrix} \right)$, $\vec{a} = (a_1,\ a_2, a_3)$, $\vec{в} = (в_1, в_2, в_3)$. Из определения следует, что длина векторного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{в}$ как на сторонах. Отсюда следует формула для вычисления площади треугольника, построенного на $\vec{a}$, $\vec{в}$: $S = \dfrac{1}{2}\|[\vec{a},\ \vec{в}]\|$.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ взятых в указанном порядке, является число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор векторного произведения векторов $\vec{в}$ и $\vec{c}$.

Обозначение: ($\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$). В ортонормированном базисе смешанное произведение вычисляется: $(\vec{a}\,,\ \vec{a}\,,\ \vec{n}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ в_1 & в_2 & в_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, , $\vec{в} = (в_1, в_2, в_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ числено равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах.

Тема 8. Простейшие задачи в координатах на плоскости и в пространстве. Способы задания прямой на плоскости и ее уравнения.

К простейшим задачам в координатах отнесем нахождение координат вектора по координатам его концов, определение координат середины отрезка и центроида треугольника, определение расстояния между точками. Далее будем предполагать, что на плоскости (в пространстве) введена прямоугольная система координат.

Пусть даны две различные точки своими координатами: $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Радиус-векторы точек A и B имеют те же координаты, что и точки A, B соответственно, отсюда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

Расстояние $\rho(A, B)$ между точками A и B равно $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, следовательно, $\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Пусть $M(x, y, z)$ – середина AB, тогда $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Так как $\overrightarrow{AM} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z)$, то из равенства указанных векторов следует, что $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Центроид $G(x, y, z)$ – точка пересечения медиан треугольника (центр тяжести) определяется формулами: $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, $z = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

Аналогичные формулы имеют место и в случае плоскости.

Прямая на плоскости однозначно определяется параметрами: 1) направляющим вектором и точкой; 2) вектором нормали и точкой; 3) двумя различными точками; 4) точкой и угловым коэффициентом.

1. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором.

Пусть ℓ - прямая, $\vec{p} = (p_1, p_2)$ - направляющий вектор ℓ, то есть $\vec{p} \,||\, \ell (\vec{p} \neq \vec{0})$, а $M_0(x_0, y_0)$ –некоторая фиксированная точка прямой. Если $M(x, y)$ - произвольная точка прямой, то $\overrightarrow{M_0M} \,||\, \vec{p}$, отсюда следует уравнение прямой $\ell : \dfrac{x - x_0}{p_1} = \dfrac{y - y_0}{p_2}$. Оно называется каноническим уравнением прямой на плоскости.

2. Уравнение прямой, заданной двумя точками.

Пусть ℓ - прямая, $M_1(x_1\, y_1)$ и $M_2(x_2\, y_2)$ – две различные точки ℓ. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, \ \ y_2 - y_1)$ является направленным вектором ℓ,

следовательно $\ell : \dfrac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

3. Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали.

Пусть ℓ – прямая, $\vec{n} = (a, \text{в})$ - вектор нормали ℓ, то есть $\vec{n} \perp \ell (\vec{n} \neq \vec{0})$. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - некоторая фиксированная точка ℓ. Тогда $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, где $M(x, y)$ - произвольная точка прямой. В силу того, что $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$ имеет уравнение $\ell : a(x - x_0) + \text{в}(y - y_0) = 0$.

4. Уравнение прямой, заданной точкой и угловым коэффициентом.

Угловой коэффициент k прямой является тангенсом угла α, образованного полу прямой, расположенной выше оси абсцисс, с лучом положительного направления оси OX.

Уравнения вида $y = kx + \text{в}$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k, в - ордината точки пересечения прямой с осью OY.

Уравнение прямой, заданной угловым коэффициентом k и точкой $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Основная теорема теории прямой на плоскости формулируется:

Теорема. Любая прямая на плоскости имеет уравнение вида $ax + вy + c = 0, a^2 + в^2 \neq 0$, называется общим уравнением прямой на плоскости. Геометрический смысл коэффициентов $a, в$ в общем уравнении: $\vec{n} = (a, в) -$ вектор нормали прямой; $\vec{p} = (-в, a) -$ направляющий вектор прямой; $k = -\frac{a}{в} -$ угловой коэффициент прямой.

Тема 9. Кривые второго порядка, их канонические уравнения.

К кривым второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола.

1. Окружность.

Окружностью является геометрическое место точек плоскости, удаленных от некоторой фиксированной точки на данной расстояние. Фиксированная точка называется центром окружности, данное расстояние – радиусом окружности. Пусть $M_0(x_0, y_0) -$ центр окружности, R – ее радиус. Точка $M(x, y)$ принадлежит окружности υ тогда только тогда, когда Ì ₀Ì $= R$. Это равенство в координатах: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^0$ является каноническим уравнением окружности υ. Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$.

Пусть υ – окружность радиуса R с центром в начале координат, Ì (õ, ó) – произвольная точка υ. Примем за параметр t угол, образованный осью абсцисс радиусом ОМ. Тогда: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$. Эти уравнения называться параметрическими уравнениями окружности υ .

2. Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний каждый из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами. Таким образом, эллипс образован точками *M*, для которых $F_1M + F_2M = \cos t = 2a > F_1F_2 = 2c,\ 2c -$ фокальное расстояние. Если точки F_1 и F_2 совпадают, то эллипс является окружностью радиуса а. В этом случае фокусы эллипса совпадают с центром окружности.

Выберем па плоскости $\{0, \vec{i}\ , \vec{j}\}$ следующим образом: 0 – середина $F_1\,F_2$, $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_1}$, тогда $F_1(C_1 0),\ F_2(-C_1 0)$.

Пусть $M(x,\ y)$– произвольная точка эллипса γ . По определению эллипса $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$. После преобразований и замены $a^2-c^2=в^2 (a>c)$ имеем каноническое уравнение эллипса γ : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}=1.$ Эллипс имеет две оси симметрии ОХ и ОУ, $0(0,0)-$ центр эллипса. Точки пересечения эллипса с осями симметрии является вершинами эллипса: $A_1(a,\ 0),\ A_2(-a,\ 0), B_1(0,\ в),\ B_2(0,-\ в)$. Числа $a,\ в$ называются соответственно большой и малой полуосями эллипса. Так как из уравнения $|x|\le a,\ |y|\le в,$ то все точки эллипса принадлежат прямоугольнику, ограниченному прямыми $x=a,\ x=-a,\ y=в, y=-в$. Изображение эллипса получается проведением овальной линии, соединяющей точки A_1, A_2, B_1, B_2. Уравнения $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = d\sin t \end{cases}$ называется параметрическими уравнениями эллипса.

3. Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояние между F_1 и F_2. Таким образом, гипербола образована точками М, для которых $|F_1M - F_2M| = \cos t = 2a < F_1F_2 = 2c,\ F_1F_2$ – фокальное расстояние. Для гиперболы $a < c.$

Выберем на плоскости систему координат таким же образом, как и в случае эллипса. Тогда для произвольной точки $M(x,\ y)$ гиперболы γ имеем: $\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c) + y^2}\right| = 2a.$ После проведения преобразований и замены $в^2 = c^2 - a^2$ получаем каноническое уравнение гиперболы γ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$. Гипербола имеет две оси симметрии ОХ, ОУ, 0(0, 0)–центр гиперболы. Число a называется действительной, а число $в$ – мнимой полуосями γ. Фокальная ось симметрии пересекает гиперболу в точках $A_1(a,\ 0),$ и $A_2(-a,\ 0),$ которые называются вершинами гиперболы. Вторая ось симметрии ОУ не имеет точек пересечения с γ. Из уравнения γ $|x| \geq a$, следовательно, гипербола расположена вне полосы, образованной прямыми $x = a,\ x = -a$. Прямые $\ell_1 : y = \frac{в}{a}x,\ \ell_2 : y = -\frac{в}{a}x$ называется асимптотами гиперболы. Все точки гиперболы расположены во внутренних областях тех вертикальных углов, образованных ее асимптотами, в которых лежат ее фокусы. Точка гиперболы при неограниченном возрастании ее абсциссы по абсолютной величине неограниченно приближается к соответствующей асимптоте. Гипербола имеет две ветви, одна из которых расположена в полуплоскости $x > 0,$ а другая – в полуплоскости $x < 0$. Изображение гиперболы известно из школьного курса математики (график обратно пропорциональной зависимости).

Если уравнение гиперболы записано в виде: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$, то фокальной осью является ОУ, a – мнимая полуось, $в$ – действительная полуось, вершины: $B_1(0,в)$, $B_2(0,-в)$. В этом случае ветви γ расположены в полуплоскости $y>0$ и $y<0$. Если $a=\hat{a}$, то гипербола называется равносторонней. Асимптоты такой гиперболы: $y=x$, $y=-x$. Если их принять за оси координат, то в этом системе гипербола имеет уравнение:

$y=\frac{k}{x}$, $k=\frac{a^2}{2}$. То график обратно пропорциональной зависимости.

5. Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки F, называется фокусом, равно расстоянию до данной прямой α , не проходящей через F, называется директорией. Точка $M(x,\, y)$ принадлежит параболе тогда и только тогда, когда $\rho(M,F)=\rho(M,d)$. Расстояние $\rho(F,\, d)$ называется фокальным параметром параболы и обозначается через Р.

Прямоугольную систему координат выберем следующим образом: проведем через F прямую ℓ перпендикулярно α . Обозначим: D - точка пересечения прямых ℓ и d. Пусто 0–середина DF, $\hat{I}\tilde{O}$ - прямая ℓ, $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF}$.

Тогда $F\left(\frac{p}{2},\, 0\right)$, $D\left(-\frac{p}{2},\, 0\right)$, $d: x+\frac{p}{2}=0$. По определению параболы γ

$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$ для любой точки γ . После преобразований получаем

каноническое уравнение $\gamma: y^2=2px.$ Парабола имеет одну ось симметрии (ось параболы) ОХ. Точка $0(0,0)$ пересечения γ с ОХ называется вершиной γ . Парабола расположена в полуплоскости $x\geq 0$. Если абсцисса точки параболы неограниченно возрастает, то и $|y|$ неограниченно возрастает. Изображение параболы известно из школьного курса математики.

Тема 10. Плоскость и прямая в пространстве.

Плоскость в пространстве однозначно задается прямая неколлинеарными точками; точкой и вектором нормали.

1. Уравнение плоскости, заданной тремя неколлинеарными точками.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$– три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, а $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости π. Так как векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ компланарны, то ($\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$)=0, отсюда следует уравнение плоскости π :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

2. Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали.

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскости π и вектор $\vec{n} = (A, B, C),\ \vec{n} \perp \pi\ \ (\vec{n} \neq \vec{0})$. Пусть $M(x, y, z)$– произвольная точка плоскости. Тогда $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$, следовательно, уравнение π :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

Основная теорема теории плоскости формулируется:

Теорема. Любая плоскость в пространстве имеет уравнение вида $A_x + B_y + C_z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Обратно, любое уравнение такого вида является уравнением некоторой плоскости в пространстве.

Уравнение $A_x + B_y + C_z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, называется общим уравнением плоскости. Геометрический смысл коэффициентов в общем уравнением плоскости: $\vec{n} = (A, B, C) -$ вектор нормали плоскости.

Прямая в пространстве однозначно определяется точкой и направляющим вектором, двумя различными точками.

1. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка прямой ℓ, вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) -$ направляющий вектор ℓ, $\ell \| \vec{p} (\vec{p} \neq 0)$. Тогда каноническое уравнение прямой

$$\ell : \frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3},\ M(x, y, z) \text{ – произвольная точка } \ell.$$

2. Уравнение прямой, заданной двумя точками.

Пусть даны две различные точки прямой ℓ:
$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, а $M(x, y, z)$ – произвольная точка ℓ. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2}$ – направляющий вектор ℓ, отсюда

$$\ell : \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Прямая в пространстве может быть задана также как линия пересечения двух плоскостей: $\ell : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$,

$rang \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$. Эти уравнения называется общим уравнениями прямой в пространстве. Направляющий вектор такой прямой находится: $\vec{p} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, $\vec{n}_1 -$ нормаль первой плоскости, $\vec{n}_2 -$ второй.

Угол между прямыми в пространстве определяется как угол между их направляющими векторами:

$\cos(\ell_1 \overset{\wedge}{,} \ell_2) = \cos(\vec{p}_1 \overset{\wedge}{,} \vec{p}_2) = \dfrac{(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}$, $\vec{p}_1 \| \ell_1$, $\vec{p}_2 \| \ell_2$. Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее ортогональной проекций на эту плоскость. Обозначим угол между ℓ и π через φ. Тогда

$\sin\varphi \dfrac{|\vec{n}, \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$, $\vec{p}$ - направляющий вектор ℓ, $\vec{n}$ - вектор нормали π .

Тема 11. Поверхности второго порядка. Каноническое уравнение.

Поверхности второго порядка – это поверхности, которые в прямоугольной системе координат определяется алгебраическими уравнениями второго порядка. Геометрическое исследование поверхностей второго порядка проводиться по заданным уравнениям с помощью метода параллельных сечений.

1. Сфера.

Сферой называется геометрическое место точек пространства, удаленных от фиксированной точки пространства на данной расстояние. Фиксированная точка – центр, данное расстояние – радиус сферы. Если $M(x, y, z)$ произвольная точка сферы, R - её радиус, $0'(x_0, y_0, z_0)$ - центр, то каноническое уравнение сферы имеет вид: $(x - x_0)^2 +$ $+ (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, что вытекает из соотношения $O'M = R$. Если центр сферы совпадает с началом координат, то её уравнение: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Сферу можно рассматривать как поверхность, полученную вращением окружности вокруг её оси симметрии.

2. Эллипсоид.

Эллипсоидом будем называть поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$\frac{x_2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}+\frac{z^2}{c_2}=1$. Для установления геометрического вида эллипсоида рассматриваются сечения данного эллипсоида плоскости, параллельными плоскости $XOУ$. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $Z=h,\quad h-$ любое число, а линии, которые получаются в сечении, определяются двумя уравнениями: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^a}+\frac{y^2}{в^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\\ Z=h.\end{cases}$ Если $|h|>c$, то точек пересечения плоскости $Z=h$ с не существует. Если $h=\pm C$, то $\frac{x^2}{a^a}+\frac{y^2}{в^2}=0$ и линия вырождается в точку (0, 0,C) и (0,0,–C), а плоскости $Z=\pm C$ касаются эллипсоида. Если $|h|<c$, то плоскость $Z=h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $a\sqrt{1-\frac{h^2}{C^2}}$ и $в\sqrt{1-\frac{h^2}{C^2}}$. При уменьшении $|h|$ эти значения увеличиваются и достигают своих больших значений при $h=0$, то есть в сечении эллипсоида плоскость $XOУ$ получается самый большой эллипс с полуосями $a,в$. Аналогичная картина получается и при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными плоскостям $XOУ$, $УOZ$. Величина а, в, с называются полуосями эллипсоида. Рассмотренные сечения позволяют изобразить эллипсоид как замкнутую овальную поверхность.

В случае $a=в=c$ эллипсоид является сферой с центром в $O(0,0,0)$ и радиусом $R=a$. Любой эллипсоид получается из сферы равномерным сжатием относительно двух перпендикулярных плоскостей. Именно, если а– большая из полуосей эллипсоида, то он может быть получен из сферы радиуса а равномерным сжатием её относительно плоскости $XOУ$ с коэффициентом сжатия $\frac{c}{a}$ и относительно плоскости XOZ с коэффициентом сжатия $\frac{в}{a}$. Точка $O(0,0,0)$ является центром эллипсоида. Точки пересечения эллипсоида с осями симметрии $OX, OУ, OZ$ является его вершинами: $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,в,0)$, $B_2(0,-в,0)$, $C_1(0,0,C)$, $C_2(0,0,-C)$.

3. Эллиптический параболоид.

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2Z,\ p>0,\ q>0.$ Рассмотрим сечение этой поверхности плоскостями OXZ и $УOZ$. Получим соответственно уравнение $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases}$, из которых следует, что в сечениях получается параболы, симметричные относительно OZ, с вершинами в начале координат. Рассмотрим сечение параболоида плоскостями $Z=h$. Линии, получаются в сечениях, определяется уравнениями: $\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \\ Z=h. \end{cases}$, из которых следует, что при $h>0$ плоскость $Z=h$ пересекает параболоид по эллипсу с полуосями $\sqrt{2hp}$ и $\sqrt{2hq}$. При увеличении h эти величины увеличиваются, при $h=0$ эллипс вырождается в точку (плоскость $Z=0$ касается параболоида). При $h<0$ точек пересечения $Z=h$ с параболоидом не существует. Рассмотрение сечения позволяют изобразить эллиптический параболоид в виде бесконечной выпуклой чаши. Точка $(0,0,0)$ – вершина эллиптического параболоида, p и q – его параметры. В случае $p = q$ эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг ее оси. Такая поверхность называется параболоидом вращения.

4. Конус второго порядка.

Конусом второго порядка называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$. В сечении этой поверхности плоскостью $XOO(y = 0)$ получается линия $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, распадается на две прямые: $\begin{cases} \frac{x^2}{a} + \frac{z}{C} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{C} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Аналогично, в сечении конуса плоскостью $YOZ(x = 0)$ также получаются две пересекающиеся прямые. Рассмотрим сечение конуса плоскостью $Z = h$. Получим уравнения: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = \frac{h^2}{c^2} \\ Z = h \end{cases}$, из которых следует, что при $h > 0,\ h < 0$ в сечениях получается эллипсы с полуосями $\frac{a|h|}{c}, \frac{в|h|}{c}$; при увеличении $|h|$ величины полуосей увеличивается. При $h = 0$ линия пересечения поверхности с плоскостью $Z = h$ вырождаются в точку (0,0,0), которая является вершиной конуса.

Цилиндры второго порядка.

Уравнения цилиндров второго порядка можно записать в форме:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1-$ эллиптический цилиндр; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1-$ гиперболический цилиндр; 3) $y^2=2px-$ параболический цилиндр. Цилиндры эллиптический, гиперболический, параболический пересекают плоскость $XOУ$ по эллипсу, гиперболе, параболе соответственно и образуются прямыми, параллельными оси OZ, пересекающими указанные кривые. Произвольный эллиптический цилиндр получается из кругового равномерным сжатием (растяжением) относительно плоскости XOZ. Изображения поверхностей второго порядка имеются, например, в [ ].

Тема 12. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Вычисление пределов последовательностей.

Если каждому числу n натурального ряда чисел $1,2,...,n,...$ поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел $x_1, x_2,..., x_n,...$ называется числовой последовательностью. Числа $x_1,..., x_n,...-$ члены последовательности, символ x_n – общий член последовательности, $n-$ его номер. Сокращенно последовательность будем обозначать: $\{x_n\}$. Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обозначает последовательность $1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},...$. Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого его элемента.

Например, формула $x_n = n^2$ задает последовательность 1, 4, 9,… . По самому определению, последовательность содержит бесконечное число элементов. Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности.

Арифметические действия над последовательностями следующие. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда $k \cdot \{x_n\} = \{k x_n\}, k \in R$;

$\{y_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$; $\{y_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}$, $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, $y_n \neq 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа А существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|X_n| > A$. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|X_n| < \varepsilon$.

<u>Пример.</u> $\{n\}$ является бесконечно большой. Возьмем любое $A > 0$. Если взять $N \geq A$, то для всех $n > N$ будет выполняться $|x_n| > A$. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – бесконечно малая. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Из неравенства $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$ получаем $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Если взять $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то для всех $n > N$ $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Теорема. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность и все её члены отличны от нуля, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ - бесконечно большая. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая.

Число а называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся. Если $\{x_n\}$ сходиться и имеет своим пределом число а, то пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Пусть $\{x_n\}$ имеет своим пределом число а. Тогда $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ является бесконечно малой так как для любого $\varepsilon > 0$ существует N, что при $n > N$ $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$. Отсюда следует, что любой элемент x_n последовательности можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$. Справедливо и обратное утверждение: если x_n можно представить виде $x_n = a + \alpha_n, \{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Представление $x_n = a + \alpha_n$ используется при доказательстве теорем о пределах последовательностей. Бесконечно большая последовательность не имеет предела, иногда пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительные (отрицательные), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$). Очевидно, всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом число $a = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \geq 0$.

Справедливы следующие утверждения:

Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов этих последовательностей.

Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{y_n\}\neq 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Предел постоянной С равен самой постоянной.

<u>Пример.</u> Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремится к ∞, следовательно применять теорему о пределе частного нельзя, так как в условиях этой теории предполагается существование конечных пределов. Поэтому сначала преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель n^2. Затем, применяя теоремы о пределах последовательностей, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{2+0+0}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

Тема 13. Предел функции. Основные теоремы. Бесконечно малые. Вычисление пределов функций.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0\in X$ или $x_0\notin X$. Возьмем из X последовательность точек, отличных от $x_0: x_1, x_2, ..., x_n, ...$, сходятся к x_0. Значения функции в точках в точках этой последовательности так же образуют числовую последовательность $f(x_1),\ f(x_2),...,f(x_n),...$

Число А называется пределом $f(x)$ в точке x_0 или (при $x \to x_0$), если для сходятся к x_0 последовательности значений аргумента x, отличных x_0 от x_0, соответствующая последовательность значений функций сходится к числу А. Символически это записывается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Функция может иметь в точке x_0 только один предел. Это следует из того, что $\{f(x_n)\}$ может иметь только один предел.

<u>Пример.</u> $f(x) = x$ имеет в любой точке x_0 предел, равный x_0. В этом случае $f(x_n) = x_n$. Следовательно, если $x_n \to x_0$, то $f(x_n) \to x_0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = f(x_0) = x_0$.

Односторонние пределы функции определяются следующим образом. Число А называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений аргумента, элементы x_n который больше (меньше) x_0, соответствующая последовательность значений функции сходиться к А. Символическая запись $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$) связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливается теоремой.

Теорема 1. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существует как правый, так левый пределы, и они равны. В этом случае Предел функции равен односторонним пределам.

Кроме рассмотренных понятий предела функции при $x \to x_0$ и односторонних пределов существует так же понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Число А называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента соответствующая последовательность значений функции сходиться к А. Символическая запись: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. Число А называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty\,(x\to-\infty)$, если для любой бесконечности большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительные (отрицательные), соответствующая последовательность значений функций сходиться к А. Символическая запись: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A(\lim\limits_{x\to-\infty})=A)$.

<u>Пример.</u>

Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность значений аргумента, то соответствующая последовательность значений функции: $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\ldots$ является бесконечно малой и поэтому имеет предел, равный нулю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $q(x)$ имеют в точке x_0 пределы А и В. Тогда функции $f(x)\pm q(x),\ f(x)\cdot q(x)$ и $\dfrac{f(x)}{q(x)}$ (при $B\neq 0$) имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $A\pm B,\ AB,\ \dfrac{A}{B}$.

Справедливость утверждения вытекает из определения предела функции в точке и соответствующих теорем о пределах последовательностей. Утверждения теоремы 2 верны и в случае, когда x_0 является одним из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Этот предел называется первым замечательным пределом.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ell$. Этот предел называется вторым замечательным пределом.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Сделать замену переменной, пологая $\frac{1}{x}=t$, $t\to\infty$ при $x\to 0$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\ell$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией в точке $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0-$, $x\to x_0+$. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией в точке x_0 (или при $x\to x_0$), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in X$, $x\neq X_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Если же выполняется $f(x)>\varepsilon$ ($f(x)<-\varepsilon$), то пишут: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$). По аналогии с конечными односторонними пределами определяется и бесконечные односторонни пределы. Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует такая же связь, как и между соответствующими последовательностями, то есть функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот.

Пусть при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\rho(x)$ является бесконечно малыми.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Например, $\sin x$ и x является при $x \to 0$ эквивалентными бесконечно малыми. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Теорема 5. Если при некотором предельном переходе $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то имеет место следующие эквивалентности:
1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3) $\arcsin(x) \sim \alpha(x)$;
4) $arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$; 6) $\ell^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

<u>Пример.</u> Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{tg\,4x}$.

<u>Решение.</u> $2x, 4x$ – бесконечно малые при $x \to 0$, поэтому $\sin 2x \sim 2x$, $tg\,4x \sim 4x$, тогда $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{tg\,4x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$.

Тема 14. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и её значение в этой точке равны: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a(x_0)$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$, то из определения следует: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, то есть для непрерывных функций можно переставлять знак функции и знак предела.

Арифметические действия над непрерывными функциями:

Пусть функции $f(x)$ и $q(x)$ непрерывны в этой точке x_0. Тогда $f(x) \pm q(x),\ f(x)\cdot q(x),\ \dfrac{f(x)}{q(x)}$ также непрерывны в этой точке (последняя при $q(x_0) \neq 0)$.

Одним из важных свойств элементарных функций является их непрерывность в каждой точке, в окрестность которой они определены. Простейшим примером функции, непрерывной в любой точке x_0 числовой прямой, может служить постоянная функция $f(x) = C$. Действительно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C = f(x_0)$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a, в)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала; непрерывна на $[a, в]$, если она непрерывна в $(a, в)$, и непрерывна в точке а справа, а в точке $\hat{a}$ слева, то есть $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a),\ \lim\limits_{x\to в-} a(x) = f(в)$.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной. Разрывы функций классифицируются следующим образом. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода функции

$f(x)$, если в этой точке $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы. Точка x_0 называется точкой разрыва II рода функции $f(x)$, если в этой точке $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов бесконечен. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если в этой точке существует предел $f(x)$, но он не равен значению функции $f(x)$ в указанной точке.

Тема15. Производная. Правила дифференцирования. Таблица производных элементарных функций. Производная сложной функции.

Пусть на некотором промежутке X определена функция $y = f(x)$. Возьмем любую точку $x_0 \in X$ и дадим аргументу x в точке x_0 произвольной приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежит X. Функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует). Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 используют символы $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

<u>Пример.</u> Производная функции $y = f(x) = C$, C – постоянная, выражается формулой: $y' = 0$. В самом деле, для любых x и Δx имеем $f(x + \Delta x) = C$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. Отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ при $\Delta x \neq 0$, следовательно, $y' = 0$.

Функция, имеющая конечную производную в точке, является дифференцируемой в этой точке. Операция нахождения производной называется дифференцированием. Если $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке $\tilde{o}_0$, то она и непрерывна в точке. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не может быть дифференцируемой, то есть не иметь производной в этой точке. Примером может служить функция $f(x) = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке, та как правая и левая производные данной функции в этой точке не равны между собой. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то будем говорить, что $f(x)$ дифференцируема на указанном промежутке.

Теорема. Если функция $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место формулы: $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Справедливость утверждения вытекает из определения производной и теории о пределах функций.

Правило дифференцирования сложной функции. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $y = f(x)$ имеет производную в соответствующей точке, $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f(x(t))$ имеет производную $y'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$.

Возможна и более сложная зависимость – с двумя, тремя и большими числами промежуточных переменных, но правило дифференцирования остается таким же. Так, например, если $y = f(x)$, где $x = \varphi(u)$, а $u = \psi(t)$, то $y'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(u) \cdot \psi'(t)$.

Производные простейших элементарных функций сведены в таблицу (см, например, [   ]). Производная любой элементарной функции также элементарная функция, то есть операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ является функцией аргумента x. Следовательно, по отношению к ней снова можно ставит вопрос о существовании и нахождении производной. Назовем $f'(x)$ производной первого порядка $f(x)$. Производную от производной некоторой функции назовем производной второго порядка этой функции. Производную от второй производной назовем производной третьего порядка и т.д. Производные, начиная со второй, называются производными высших порядков и обозначаются $y'', y''', y^{(4)}, ..., y^{(n)}$. Производная n-ого порядка является производной от производной (n-1)го порядка, то есть $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Тема 16. Геометрическая, физическая, экономическая интерпретация производной. Эластичность функции.

Правило Лопиталя.

Геометрический смысл производной.

Производная в экономике выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора. Пусть $Q = Q(t)$ выражает количество произведенной продукции Q за время t. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменяется от $Q_0 = Q(t_0)$ до $Q_0 + \Delta Q = Q(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя продолжительность труда за период Δt

равна $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, а производительность труда в момент t_0 есть предельное значение средней производительности за период от t_0 до $t_0+\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Производительность труда есть производная $Q'(t)$ от объема произведенной продукции Q.

Эластичность функции $y=f(x)$ предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению независимой переменной $\frac{\Delta x}{x}$ при, $\Delta x \to 0$. Обозначение: $E_x(y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\cdot y'$. Эластичность показывает приближенно, на сколько % изменяется функция $y=f(x)$ при изменении независимой переменной на 1%.

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{q(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} q(x)=0$. Раскрыть эту неопределенность – значить вычислить $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Теорема (теорема Лопиталя). Пусть $f(x)$ и $q(x)$ определены и дифференцируемые в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} q(x)=0$ и $q'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{q'(x)}$ (конечный и бесконечный) то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{q(x)}$ причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{q(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{q'(x)}$. Теорема остается справедливой и в случае, когда $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$. Будем говорить, что отношение $\dfrac{f(x)}{q(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}q(x)=\infty\ (+\infty,-\infty)$. Для этой неопределенности справедливо утверждение, аналогичное теореме Лопиталя, а именно: если в формулировке теоремы заменить требование $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}q(x)=0$ на условие $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}q(x)=\infty$, то теория остается справедливой.

17. Экстремумы функций одной переменной. Необходимое и достаточное условие.

Будем говорить, что $f(x)$ не убывает (не возрастает) на множестве X, если для любых $x_1, x_2\in X$, удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$ $\left(f(x_1)\ge f(x_2)\right)$. Неубывающие и невозрастающие функции объединяют общим названием – монотонные функции. Если для любых $x_1, x_2\in X$ удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$, то $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве X. Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными. Признак монотонности выражает следующая теорема.

Теорема 1. Если $f(x)$ дифференцируема на $(a, в)$, $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ на $(a, в)$, то $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $(a, в)$.

Аналогично, если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на $(a, в)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a, в)$.

Точка x_0 называется точкой строго локального максимума (минимума) $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ при $x \neq x_0$. Локальный максимум (max) и локальный минимум (min) объединяются общим названием – локальный экстремум. Понятие экстремума несет локальный характер в том смысле, что неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ может и выполнятся для всех значений x в области определения функции, а должно выполнятся лишь в некоторой окрестности точки x_0. Функция может иметь несколько локальных экстремумов, причем может случиться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.

Необходимое условие локального экстремума. Если $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл утверждения заключается в следующем. Если x_1 – точка локального экстремума и в этой точке существует касательная, то касательная параллельна оси OX. Иногда такие точки называют стационарными. Если x_0 – стационарная, то есть $f'(x_0) = 0$, то она может и не быть точкой локального экстремума. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но в точке $x = 0$ нет локального экстремума.

Достаточное условие локального экстремума. Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ - окрестности точки x_0. Тогда, если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для всех x из $(x_0 - \delta,\ x_0)$, а $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ для всех x из $(x_0, x_0 + \delta)$, то в точке x_0 $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум); если же $f'(x)$ во всех точках δ - окрестности точки x_0 имеет один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.

Тема 18. Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условие. Исследование функции с помощью производной.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на $(a, в)$. Тогда существует касательная к графику функции в любой точке $M(x, f(x))$ этого графика $(a < x < в)$, причем касательная не параллельна оси ОУ. Так как ее угловой коэффициент, равный $f'(x)$, конечен.

Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на $(a, в)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на $(a, в)$. Если $y = f(x)$ имеет га интервале $(a, в)$ вторую производную и $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$ во всех точках $(a, в)$, то график функции $y = f(x)$ имеет на $(a, в)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).

Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в точке M график имеет касательную, и существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости. В точке перегиба касательная пересекает график функции, так как с одной стороны от этой точки график лежит под касательной, а с другой – над нею, то есть в окрестности точки перегиба график функции геометрически переходит с одной стороны касательной на другую и «перегибается» через нее.

Необходимое условие точки перегиба. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$ и пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль: $f''(x_0) = 0$.

Не всякая точка $M(x_0, f(x_0))$, для которой $f''(x_0) = 0$, является точкой перегиба. Например, график $f(x) = x^4$ не имеет перегиба в точке

(0, 0), хотя $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$. Точки $M(x_0, f(x_0))$ графика, для которых $f''(x_0) = 0$, будем называть критическими. Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Утверждение остается верным, если $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0, и существуют касательные к графику функции в точке M. Тогда, если в пределах указной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Пример. $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Это функция в точке $u = 0$ имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $0(0,0)$ совпадает с ОУ. Вторая производная в точке $x = 0$ не существует. Однако график функции $y = \sqrt[3]{x}$ имеет перегиб в точке $0(0,0)$, так как вторая производная

$f''(x) = \dfrac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}$ имеет слева и справа от точки $x = 0$ разные знаки. Итак вопрос о направлении выпуклости и точках перегиба функции исследуется с помощью второй производной. Часто в случае выпуклости вниз графика функции $f(x)$ употребляется термин «вогнутости», а при выпуклости вверх графика– термин «выпуклость».

Примерная схема, по которой целесообразно исследовать поведение функции и строить её график. Требуется: 1) найти область определения функции; 2) найти точки пересечения графика функции с осями координат; 3) найти асимптоты; 4) исследовать на экстремум, найти промежутки возрастания и убывания функции, локальные экстремумы; 5)найти направления выпуклости графика, точки перегиба; 6) построить график, учитывая исследования. При этом в начале исследования полезно проверить, является ли данная функция четной или нечетно, чтобы при построении использовать симметрию графика относительно оси ОУ или начала координат.

II семестр

Тема 1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Решение алгебраических уравнений.

Комплексным числом Z называется упорядоченная пара вещественных чисел $(x, y): Z = (x, y)$; x называется действительной а y мнимой частью комплексного числа. Комплексное число $Z = (x, y)$ изображается на плоскости $XOУ$ точкой М с координатами (x, y) или вектором $\overrightarrow{OM}$.

Плоскость $XOУ$ называется в этом случае условно комплексной плоскостью. Комплексное число вида $(x,0)$ отождествляется с действительным числом x, то есть $(x,0) = x$. Это позволяет рассматривать множество всех действительных чисел R как подмножество множества комплексных чисел С. На комплексной плоскости действительные числа изображаются точками оси ОХ, которая называется действительной осью. Комплексное число (x,y) при $y \neq 0$ называется мнимым. Мнимые числа $(0, y)$ называется чисто мнимыми и символически обозначаются $Z = yi$. Число $(0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается i. Чисто мнимые числа на комплексной изображаются точками оси $OУ$, которая называется мнимой осью. Два комплексных числа $Z_1 = (x_1, y_1)$ и $Z_2 = (x_2, y_2)$ называется равными, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексное число $0 = (0,0)$ называется нулем. Суммой комплексных чисел $Z_1 = (x_1, y_1)$ и $Z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $Z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Произведением комплексных чисел $Z_1 = (x_1, y_1)$ и $Z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $Z = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Вычитание определяется как действие, обратное сложению, $Z = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ является разностью комплексных чисел

$Z_1 = (x_1, y_1)$ и $Z_2 = (x_2, y_2)$. Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, то есть число Z называется частным чисел Z_1 и $Z_2 \neq 0$, если $Z \cdot Z_2 = Z_1$. Отсюда $Z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$.

Умножаем $i = (0, 1)$ на себя, тогда $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, $i^2 = -1$. Отсюда любое комплексное число можно представить в виде $Z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y_i$ и производить над комплексными числами действия по обычным правилам алгебры многочленов. Запись $Z = x + y_i$ называется алгебраической формой комплексного числа. Комплексное число $\overline{Z} = x - y_i$ называется комплексно сопряженным числу $Z = x + y_i$.

Введем на комплексной плоскости полярную систему координат, совмещенную с прямоугольной декартовой. Из формулы $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, связывающей полярные координаты с декартовыми, получаем тригонометрическую форму записи комплексного числа $Z = x + y_i$: $Z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$; φ – аргумент, а r – модель комплексного числа: $r = |Z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = ArgZ$. Аргумент φ определен неоднозначно, а точностью до слагаемого $2\pi k (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Значение аргумента, удовлетворяющее: $0 \leq \varphi < 2\pi$, называется главным и обозначается $\varphi = \arg Z$. Аргумент $Z = 0$ не определен, а его модуль равен 0. В тригонометрической форме удобно выполнить действия умножения и деления комплексных чисел. Пусть $Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда $Z = ZZ_2 = r_1r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, то есть $r = r_1r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. В случае деления $r = \frac{r_1}{r_2}, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Если перемножаются n равных комплексных чисел $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $Z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Если положить $r = 1$, то получим формулу Муавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Во множестве C размещено любое квадратное уравнение.

Пример. Решить уравнения: 1) $4x^2 + 4x + 5 = 0$; 2) $Z^2 + 2 = 0$.

Решение. 1) находим корни $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{4} = \frac{-2 \pm 4i}{4}$, $x_1 = -\frac{1}{2} + i$,

$x_2 = -\frac{1}{2} - i$;   2) $Z_{1,2} = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$, $Z_1 = \sqrt{2}i$, $Z_2 = -\sqrt{2}i$.

Тема 2. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.

Восстановление функции по известной производной этой функции – одна из основных задач интегрального исчисления. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Задача отыскания по данной функции $f(x)$ ее первообразной решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ – первообразной $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$, так как $(F(x) + C)' = f(x)$ для любого числа C. Множество функций $F(x) + C$, где $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$, а C – произвольная постоянная, исчерпывает все первообразные для функции $f(x)$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке X, то множество функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$; $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $\tilde{o}$- переменная интегрирования. Восстановление функции по ее производной, то есть отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции, называется интегрированием этой функции. Интегрирование –

операция, обратная дифференцированию. Из определения неопределенного интеграла вытекает его свойства: 1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$; 2) $\int dF(x) = F(x) + C$; 3) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, k = const \neq 0$; 4) $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. Основные интегральные сведены в таблицу (см., например, [ ]). Часть формул таблицы непосредственно следует из определения интегрирования и таблицы производных. Справедливость других формул проверяется дифференцированием. Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблиц простейших интегралов называется непосредственным интегрированием.

Тема 3. Метод интегрирования заменой переменной. Метод интегрирования по частям.

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной. Он основан на следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке Т и пусть X –множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве Т справедлива формула:

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Эта формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

<u>Пример.</u> Вычислить $J = \int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$. Положим $x-1 = t,\ x = t+1, dx = dt.$

Отсюда $J = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}(x-1)^2 +$

$+ 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$.

При замене переменной в неопределенном интеграле часто более удобно задавать не x как функцию t, а наоборот, задавать t как функцию от x.

<u>Пример.</u> $J = \int \sin^3 x \cos dx$. Предположим $t = \sin x,\ dt = \cos x dx,$ тогда

$J = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Теорема 2. Пусть функция $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x)\cdot v(x)$

имеет производную на этом промежутке. Тогда на X функция $u(x)\cdot v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$. Так как $v'dx = dv$, $u'(x)dx = du$, то $\int udv = uv - \int vdu$ – формула интегрирования по частям. Она позволяет свести вычисление $\int udv$ к вычислению $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Пример.

$$\int x\ln x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\,dx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Тема 4. Интегрирование рациональных функций.

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражается через элементарны е функции, образуют рациональные функции, то есть функции, которые можно представить в виде дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется правильной, в противном случае дробь неправильная. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Это достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен. В результате получим $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, $R(x)$ – многочлен степени ниже, чем степень $Q(x)$. Так как интегрирование многочлена не представляет затруднений, то интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей. Рациональные дроби $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}(n\geq 2)$, $\frac{M_x+N}{x^2+px+q}$, где A,a,p,g,M,N –действительные числа, n- натуральное число, x^2+px+q не имеет действительных корней, отнесем к простейшим рациональным дробям. Интегралы $\int\frac{A}{x-a}dx$ и $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$ берутся с помощью подстановки $x-n=t$, а $\int\frac{M_x+N}{x^2+px+q}dx$ сводиться к табличным подстановкой $Z=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'=x+\frac{p}{2}$.

Пример.

$$\int\frac{x-1}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{matrix}Z=\frac{1}{2}(x^2+2x+2)'=x+1\\ x=Z-1,dx=dz\end{matrix}\right|=\int\frac{Z-2}{(Z-1)^2+2(Z-1)+2}dz=\int\frac{Z-2}{Z^2+1}dZ=$$

$$\int\frac{ZdZ}{Z^2+1}-2\int\frac{dZ}{Z^2+1}=\frac{1}{2}\ln(Z^2+1)-2arctg+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2arctg(x+1)+c$$

. К простейшим относят так же дробь вида $\frac{M_x+N}{(x^2+px+q)^n}(n\geq 2)$, которая интегрируется той же подстановкой $Z=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'$.

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде конечного числа простейших рациональных дробей. Для этого $Q(x)$ необходимо разложить на линейные и квадратичные множители. Согласно основной теории алгебры уравнения $Q(x)=0$ имеет ровно столько корней (действительных и комплексных с учетом их кратности), какова степень многочлена $Q(x)$. Многочлен $Q(x)$ разложен следующим образом:

$Q(x) = A(x-\alpha)^{\kappa}\cdot(x-\beta)^{e}\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^{s}\cdot(x^2+ux+v)^{r}\cdot\ldots$ здесь $\alpha,\beta,\ldots$ – действительные корни $Q(x)$ кратностей $k,\ell,\ldots$ соответственно; $A,p,q,u,v,\ldots$ – действительные числа; $x^2+px+q,\ x^2+ux+v,\ldots$ не имеют действительных корней; $k+\ell+\ldots+2S+2r+\ldots$ равно степени $Q(x)$. В этом случае $\frac{P(x)}{Q(x)}$ единственным образом представима в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{A^2}{(x-\alpha)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-\alpha}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{\ell}}+\frac{B_2}{(x-\beta)^{\ell-1}}+$$

$$\frac{B_\ell}{x-\beta}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^S}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{S-1}}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+px+q}+\frac{k_1x+\alpha_1}{(x^2+ux+v)^r}+$$

$$\frac{k_2x+\alpha_2}{(x^2+ux+v)^{r-1}}+\ldots+\frac{k_rx+\alpha_r}{x^2+ux+v}+\ldots,$$ где $A_1,\ldots B_1,\ldots,M_1,N_1\ldots,K_1\alpha_1,\ldots K_r,\alpha_r,\ldots$ - некоторые вещественные числа, подлежащие определению.

Пример. $$\frac{3x^2+2}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{a+2}+\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Для вычисления неопределенных коэффициентов $A_1,\ldots,\alpha_r$ простейшие дроби приводим к общему знаменателю $Q(x)$ и приравнивают многочлен, полученный в числители, к $P(x)$. Так как равенство между $P(x)$ и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех x, то коэффициенты при равных степенях x должны быть равны между собой. Приравнивая их, получаем систему уравнений первой степени, из которой определяется $A_1,\ldots,\alpha_r$. При нахождении неопределенных коэффициентов можно дать переменной $\tilde{o}$ несколько частных значений и получить таким образом систему уравнений относительной неопределенных коэффициентов.

Пример. $J = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int (x+1)dx - \int \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} dx$;

$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$, $x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$.

Подставим последовательно $x = 0,\ x = 2,\ x = -1$, получаем $A = -1,\ B = \frac{2}{3},\ c = \frac{1}{3}$.

Отсюда $J = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$.

Тема 5. Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций.

Некоторые типы интегралов от алгебраических иррациональностей заменой переменной могут быть сведены к интегралам от рациональных функций. Такое преобразование интеграла принято называть его рационализацией. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n1]{x^{m1}}, \sqrt[n2]{x^{m2}},...\right)dx,$ где $n_1, m_1, n_2, m_2, ...$ – целые числа, вычисляются подстановкой $x = t^S$, S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$. Интегралы вида

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{m}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ...\right)dx,$ где $n_1, m_1, n_2, m_2, ...$ – целые числа, берут подстановкой $\frac{ax+в}{cx+a} = t^S$, S– общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$.

Пример. $J = \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3} - 1)\cdot\sqrt{x+3}}$.

$$J = \begin{vmatrix} x + 3 = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{vmatrix} = 4\int \frac{t^3dt}{(t-1)\cdot t^2} = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}dt = 4(t + \ln|t-1|) + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводиться к интегралу от рациональной функции подстановкой:

$tg\frac{x}{2}=t, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, x=2arctg\,t, dx=\frac{2dt}{1+t^2},$ которая называется универсальной.

Интегралы вида $\int R(\sin x)\cos xdx$ и $\int R(\cos x)\sin xdx$ берутся заменой переменной: $\sin x=t,\ \cos x=t$ соответственно.

Интегралы вида $\int R(tgx)\,dx$ рационализуются подстановкой $tgx=t$.

Для вычисления интегралов вида $\int \cos mx\cos nx\,dx, \int \sin mx\cos nx\,dx$

применяются формулы: $\int \cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x)dx,$

$\int \sin ux\sin x\,dx=$

$\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x-c(m+u)x)dx, \int \sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int \sin(m-n)x+\sin(m+n)x)dx.$

Часто при вычислении интегралов от тригонометрических функций используется формулы понижения степени:

$$cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример.

$$\int \sin^2 x\cos^2 dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

Интегралы вида $\int tg^n x\,dx, \int ctg^n x\,dx,\ \ n-$ целое положительное число, вычисляются с использованием формулы: $tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1, ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx,$ если $\sin x$ и $\cos x$ входят в подынтегральную функцию только в четных степенях, вычисляются с помощью подстановки $tgx=t, dx=\frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}.$

Пример.

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \left| \begin{aligned} & tgx = t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ & \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{aligned} \right| = \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Тема 6. Понятие определенного интеграла. Свойства. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a, в]$, $a < в$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = в$. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точки ξi. Через Δx_i обозначим длину частичного сегмента $[x_{i-1,}\ x_1]$.

Пусть $\delta = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – интегральная сумма для $f(x)$ на $[a, в]$, соответствующая разбиению $[a, в]$ на частичные отрезки, $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$. Число J называется определенным интегралом от $f(x)$ по $[a, в]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ независимо от точек ξi выполняется неравенство $|\delta - J| < \varepsilon$. Таким образом, $J = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $J = \int\limits_a^в f(x)dx$. Если задана $f(x)$ и пределы интегрирования $a, в,$ то определенный интеграл определяется однозначно и представляет собой число. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, в]$, то она интегрируема на нём. Но это не означает, что определенный интеграл существует только для непрерывных функций. Класс интегрируемых функций значительно шире.

По определению полагают $\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \int\limits_a^a f(x)dx = -\int\limits_a^в f(x)dx.$ Далее, каковы бы не были числа а,в,с имеет место равенство $\int\limits_a^в f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^в f(x)dx$. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int\limits_a^в k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_a^в f(x)dx$. Определенный интеграл от алгебраической суммы их интегралов.

Рассмотрим $\int\limits_a^x f(t)dt \; (a \le x \le в)$ с постоянным нижнем пределе а и переменным верхнем пределе x. Величина этого интеграла является функцией этого интеграла является функцией верхнего предела x, обозначаются $Ф(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ и называется интегралом с переменным верхним пределом. Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу: $Ф(x) = \left(\int\limits_a^x f_1(t)dt \right)' = f(x)$. Любая непрерывная на $[a, в]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем функция $\hat{O}(\tilde{o})$ является первообразной для $f(x)$. Связь между неопределенными и определенными интегралами выражает формула $\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C$. Отсюда следует формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^в f(x)dx = F(в) - F(a),$ где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a, в]$. Следовательно, задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла.

Тема 7. Приложение определенного интеграла в геометрии, физике, экономике.

Пусть на плоскости XOY задана фигура, ограниченная отрезком $[a, в]$ оси OX, прямыми $x = a, x = в$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на $[a, в]$. Это криволинейная трапеция, площадь S которой вычисляется по формуле $S = \int_a^в f(x)dx$. Таким образом, определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ по $[a, в]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, в]$, ограниченной сверху $y = f(x)$. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла. Для вычисления площади криволинейной трапеции в случае, когда верхняя граница задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \varphi(t), \alpha \le t \le \beta$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = в$, то $S = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$. Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α, β, называют криволинейным сектором. Его площадь $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)dy$. Пусть плоская кривая задана, уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le в$, $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на $[a, в]$, тогда длина дуги кривой $\ell = \int_a^в \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$. В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta$, α и β –значения параметра t, соответствующие значения $x = a, x = в$, то $\ell = \int\limits_a^в \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dx$. Соответствующая формула в полярных координатах: $\ell = \int\limits_a^в \sqrt{\rho(\varphi) + \rho'^2(\rho)}d\rho$, $\rho = \rho(\varphi)$ – полярные уравнения кривой $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Пусть $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[à, â]$. Тогда тело, которое образуется вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, имеет объем $V = \pi \cdot \int\limits_a^в f^2(x)dx$.

Пусть $f(x)$ неотрицательна и непрерывна со своей первой производной на $[a, в]$. Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси ОХ, имеет площадь $S = 2\pi \int\limits_a^в f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.

Пусть материальная точка перемещается под действием силы F, направленной вдоль оси ОХ и имеющей переменную величину, зависящую от x. Тогда работа A, совершаемая силой F по перемещению материальной точки вдоль оси ОХ из $x = a$, в $x = в\ (a < в)$ вычисляются по формуле: $A = \int\limits_a^в F(x)dx$. $F(x)$ предполагается непрерывной на $[a, в]$.

Объем продукции, произведенной за промежуток времени от t_1 до t_2, равен $V = \int\limits_{t_2}^{t_1} f(t)dt$, где $f(t)$ характеризует производительностью труда в момент времени t. В этом заключается экономический смысл определенного интеграла.

Тема 8. Несобственные интегралы первого и второго рода.

При введении определенного интеграла предполагается, что отрезок интегрирования конечный, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то данные выше определения определенного интеграла теряет смысл. Так в случае бесконечного отрезка интегрирования нельзя разбить отрезок на n частей конечной длины, а случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Однако и на эти случае можно обобщить понятие определенного интеграла. В результате такого обобщения и появилось понятие несобственного интеграла.

Пусть $f(x)$ определена на $[a,+\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a, R]$, то есть существует $\int\limits_a^R f(x)dx$ при любом $R > a$. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{R\to +\infty} \int\limits_a^R f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом первого рода и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. При этом говорят, что интеграл сходится. Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится. Аналогично вводится несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, в]$: $\int\limits_{-\infty}^{в} f(x)dx = \lim\limits_{R\to -\infty} \int\limits_R^{в} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, с –любое число, при условии существования обоих интегралов справа.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, в]$. Точку $x = в$ будем называть особой, если $f(x)$ неограниченна в любой окрестности этой точки, но ограничена на любом отрезке $[a, в, -\varepsilon]$, заключенном в $[a, в]$. Пусть на любом отрезке $[a, в, -\varepsilon]$ $f(x)$ интегрируема, то есть существует $\int\limits_a^{в-\varepsilon} f(x)dx$ при любом $\varepsilon > 0$ таком, что $в - \varepsilon > a$. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+a} \int\limits_{a}^{в-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx$. В этом случае говорит, что интеграл сходится. Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл не существует или расходится. Аналогично, если $x = a$ – особая точка, то $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx = \lim\limits_{x \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{в} f(x)dx$. Если $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точке $c \in [a, в]$, то при условии существования обоих интегралов справа по определению полагают $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{в} f(x)dx$. Если a и $в$ – особые точки, то если оба интеграла справа существуют, несобственный интеграл определяется: $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{в} f(x)dx$, c – любая точка из $(a, в)$.

Тема 9. Функции нескольких переменных. Область определения. Линии уровня. Предел и непрерывность.

Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин. Например, площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражаются формулой $S = xy$, то есть значения S определяются совокупностью значений x и y. Количество тепла Q, выделяемого электрическим током, зависит от напряжения u, силы тока J и времени t, то есть значения Q определяются совокупностью значений u, J, t. Переменная Z называется функцией двух независимых переменных x

и y, если некоторым парам значений x и y по какому-либо правилу или закону ставиться в соответствие определенное значение Z. Множество G пар значений x и y, которые могут принимать переменные x и y, называется областью определения функции. Переменные x и y называются аргументами Z. Символически функция двух переменных обозначается: $Z = f(x, y), Z = Z(x, y).$ Упорядоченная пара чисел x, y определяет положение точки на плоскости XOY и наоборот. Поэтому $Z = f(x, y)$ можно рассматривать как функцию точки $M : Z = f(M)$. Способы задания функции двух переменных могут быть различными. Наиболее важным является аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл. Областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость XOY и наоборот. Поэтому $Z = f(x, y)$ можно рассматривать как функцию точки $M : Z = f(M)$. Способы задания функции двух переменных могут различными. Наиболее важным является аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл. Областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость XOY или её часть. Известно, что каждой тройке числе (x, y, z) в пространстве соответствует точка $\text{M}(x, y, z)$ и наоборот. Совершенно аналогично случаю двух переменных можно дать определение функции трех переменных: $u = f(x, y, z) = f(M)$. Областью определения функции трех переменных будет все пространство или его часть. Далее будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций двух переменных. Распространение определений и результатов на функции трех и более переменных представляет собой, как правило, лишь технические трудности.

Функции двух переменных допускают графическую иллюстрацию. Графиком функции $Z = f(x, y)$, определенный в G, называется множество точек (x, y, z) пространства, у которых $(x, y) \in z$, а $Z = f(x, y)$. В наиболее простых случаях такой график представляет собой некоторую поверхность. Однако построение графика функции двух переменных в большинстве случаев представляет значительные трудности. В связи с этим оказывается удобным геометрическое описание функции двух переменных не входящие в трехмерное пространство. Средством такого описания является линии уровня. Множество точек плоскости XOY, в которых $f(x, y)$ принимает одно и тоже постоянное значение c, называется линией уровня $f(x, y)$. Придавая С различные значения, получим семейство линий уровня. Это семейство наглядно описывает $f(x, y)$. Линии уровня обозначает глубину морей и высоту гор на географических картах. Аналогично можно описать распределение тех или иных веществ в точке, распределение среднесуточной температуры и т.д.

Множество точек $M(x, y)$, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ $(\rho(M, M_0)<\delta)$, называется δ – окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$; δ – окрестность точки M_0 – это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 и радиусом δ.

Рассмотрим последовательность точек $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$. Последовательность $\{M_n\}$ называется сходящейся к M_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется $\rho(M_n, M_0)<\varepsilon$, M_0 называется пределом $\{M_n\}: \lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$. Пусть $Z=f(M)$ определена на некотором множестве $\{M\}$ и $M_0 \in M$ $M_0 \notin M$, но обладает тем свойством, что в любой δ –окрестности этой точки хотя бы одна точка из $\{M\}$. Число А называется пределом $Z=f(M)$ в точке M_0, если для любой сходящейся к M_0 последовательности точек $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ соответствующая последовательность значений $f(M_1), \ldots, f(M_n), \ldots$ сходятся к А $\lim\limits_{M\to f(M)} = A$ или $\lim\limits_{X\to X_0} f(x, y)=A.$ Используя определения предела функции двух переменных, перенести основную теоремы о пределах для функции одной переменной на функции двух переменных.

Функция называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ или $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ причем М стремиться к M_0 произвольным образом, оставаясь в области определения функции. Арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложных функций из непрерывных приводит к непрерывным функциям.

Множество $\{M\}$ точек плоскости называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек данного множества. Точка М называется внутренней точкой $\{M\}$, если существует δ –окрестность этой точки, состоящей из точек данного множества. Множество $\{M\}$, состоящее лишь из внутренних точек, называется открытым. Связное открытое множество есть область. Точка М называется граничной точкой области, если в ее δ –окрестности есть как точки области, так и не принадлежащие ей. Множество граничных точек – граница области. Множество точек области и ее границы называются замкнутой областью. Замкнутая ограниченная область – аналог отрезка для функции одной переменной.

Тема 10. Частные производные функции нескольких переменных. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал.

Пусть функция $Z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Придадим x в точке M произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y неизменным, то есть перейдем на плоскости от точки $M(x, y)$ к точке $M_1(x + \Delta x, y)$.

При этом Δx такова, что точка M_1 лежит в указанной окрестности точки M. Тогда соответствующее приращение функции $\Delta xZ = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции по переменной x в точке $M(x, y)$. Аналогично определяется частное приращение функции по переменной y: $\Delta yZ = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta xZ}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta yZ}{\Delta y}\right)$, то он называется частной производной функции $Z=f(M)$ в точке M по переменной x (по переменной y) и обозначается: $Z_x, f_x, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial Z}{\partial X}\left(Z_y, f_y, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)$.

Частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y. Поэтому частные производные вычисляются по формулам и правилам вычисления производной функции одной переменной. Если функция $Z=f(M)$ имеет частные производные в некоторой δ – окрестности точки M и эти производные непрерывны в самой точке *M*, то функция дифференцируема в точке *M*.

Дифференциалами независимых переменных x и y называются приращения этих переменных: $dx=\Delta x, dy=\Delta y$, а дифференциалом функции $Z=f(x,y)$ называется выражение $dZ=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy.$ При достаточно малых Δx и Δy имеет место формула: $\Delta Z\approx dZ$, которая используется в приближенных вычислениях.

Пусть частные производные f_x f_y функции $Z=f(M)$, определенной в окрестности М, существуют в каждой точке этой окрестности. В этом случае частные производные представляют собой функции двух переменных x и y, определенные в указанной окрестности точки М. Назовем их частичными производными первого порядка. Частные производные по x и y от f_x, f_y в точке *M*, если они существуют, назовем частными производными второго порядка от $f(M)$ в этой точке и обозначим: $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$.

Если $f_{xy}(x,y)$ и $f_{yx}(x,y)$ существуют в некоторой δ – окрестности точки $M(x,y)$ и непрерывны в самой точке *M*, то они равны между собой в этой точке. Дифференциалом второго порядка является выражение $d^2Z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}(dy)^2$.

Тема 11. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.

Пусть G – некоторая область на плоскости или в пространстве. Если в каждой точке M из G определена скалярная величина u, то говорят, что в области G задано скалярное поле. Понятие скалярного поля и функции, определенной в G, совпадают. Скалярное поле задается с помощью функции $u = F(M)$. Если в пространстве введена система координат, то каждая точка M будет иметь определенные координаты x, y, z и скалярная величина u является функцией этих координат: $u = F(M) = F(x,y,z)$. Примером скалярного поля может служить поле температур воздуха в некотором помещении, если температуру рассматривать как функцию точки.

Пусть $Z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x,y)$, $\vec{\ell}$ – произвольный единичный вектор, $\vec{\ell} = (\cos a, \cos\beta)$, $\alpha = (\vec{\ell} \,\widehat{,}\, \vec{i})$, $\beta = (\vec{\ell} \,\widehat{,}\, \vec{j})\cdot$ Для характеристики скорости изменения функции в точке M в направлении $\vec{\ell}$ вводиться производная по направлению, которая определяется формулой: $\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos a + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$. Градиентом функции $Z = f(M)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор $grad\,Z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Если φ – угол между $\vec{\ell}$ и $grad\,Z$, то $\frac{\partial Z}{\partial \ell} = |gradZ|\cdot\cos\varphi$. Следовательно, производная по направлению имеет наибольшую величину при $\cos\varphi = 1 (\varphi = 0)$, когда $\vec{\ell}$ совпадает с направлением градиента, при этом $\frac{\partial Z}{\partial \ell} = |gradZ|$. Таким образом, градиент $Z = f(M)$ в точке М характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания функции в данной точке. Аналогично определяется производная по направлению и градиент для функции трех переменных: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma$

Тема 12. Экстремум функции двух переменных

Пусть $Z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Говорят, что $Z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, в которой для любой точки $M(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$. Из определения следует, что если $Z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0, то полное приращение $\Delta Z = f(M) - f(M_0)$ этой функции в точке M_0 удовлетворяет в некоторой окрестности точки M_0 одному из условий: $\Delta Z \le 0$ (в случае локального максимума), $\Delta Z \ge 0$ (в случае локального минимума). И обратно, если в некоторой окрестности точки M_0 выполняется одно из этих неравенств, то функция имеет экстремум в точке M_0.

Необходимое условие экстремума. Если $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум и имеет в точке M_0 частные производные первого порядка, то в этой точке $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Действительно, рассмотрим в окрестности M_0 только те точки, для которых $y = y_0$. Получим функцию $f(x, y_0)$ одной переменной x, которая имеет в точке $x = x_0$ экстремум. Из необходимого условия экстремума функции одной переменной следует $f_x(x_0, y_0) = 0$. Сформулированное условие является только необходимым; точки, в которых оно выполняется, называется стационарными.

<u>Пример.</u> Точка (0,0) является стационарной для $Z = x^2 - y^2$, но в ней функция равна 0 и ни в какой окрестности (0,0) не сохраняет знак.

Достаточное условие экстремума. Пусть в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой ее окрестности $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Обозначим $\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}{}^2(x_0, y_0)$.

Тогда: а) если $\Delta > 0$, то в M_0 функция имеет экстремум, причем при $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ - локальный максимум, при $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ - локальный минимум; б) если $\Delta < 0$, то в M_0 нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то $f(x,y)$ в M_0 может иметь экстремум, но может и не иметь его.

Тема 13. Условный экстремум функции двух переменных. Функция Лагранжа.

Условным экстремумом функции $f(x,y)$ является экстремумом этой функции при заданном уравнении связи $\Phi(x,y) = 0.$ Для нахождения условного экстремума вводиться функция Лагранжа: $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\Phi(x,\,y),\ \lambda$ - множитель Лагранжа. Эту функцию исследуют на безусловный экстремум.

Необходимое условие функции Логранжа: $dF(x_0,y_0,\lambda_0) = 0$ или $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$. Достаточное условие: $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$ (минимум), $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$ (максимум) так как λ не является обычной переменной, то при определении знака $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)$ величины $d\lambda$ не учитываются, то есть полагается: $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$. Следует иметь в виду, что dx и dy в $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)$ зависимы, и эта зависимость диктуется уравнением связи.

Тема 14. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Теорема Коши существования и единственности решения.

Математическое исследование самых разнообразных явлений природы приводит к решению дифференциальных уравнений. Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающие независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные. Если искомая функция есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком данного уравнения. Общей вид дифференциального уравнения следующий: $F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0$, причем в частных случаях в это уравнение могут и не входить x, y и отдельные производные порядка ниже, чем n. Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где x – независимая переменная, y – искомая функция, y' – её производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка. Если его можно разрешить относительно y', то оно принимает вид $y' = f(x, y)$ и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. В некоторых случаях уравнение удобно записывать в виде $y = f(x, y)dx - dy = 0$, являются частичным случаем более общего уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – известные функции. В последнем уравнением переменные x и y равноправные, каждой из них можно рассматривать как функцию другой.

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, в)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Интеграл $(a, в)$ может быть бесконечным. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Теорема (теорема Коши). Если $f(x, y)$ и её частная производная $f_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области G плоскости $XOУ$, то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) области G, в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющие $y = y_0$ при $x = x_0$.

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) области G проходит единственная интегральная кривая. В области G уравнение имеет бесконечное множество различных решений. Условия $y = y_0$ при $x = x_0$, в силу которых $y = \varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0, называется начальными. Отыскание решения уравнения, удовлетворяющего начальным условием – одна из важнейших задач теории дифференциальных уравнений. Эта задача называется задачей Коши. С геометрической точки зрения решить задачу Коши–значит из множества интегральных кривых выделить ту, которая приходит через заданную точку (x_0, y_0) плоскости.

Общем решением уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области G плоскости XOY называется функция $y = \varphi(x, c)$, зависящая от x и произвольной постоянной С, если она является решением уравнения при любом значении постоянной С, и если при любых начальных условиях таких, что $(x_0, y_0) \in G$,существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такая, что $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данным начальным условиям $y = \varphi(x_0, C) = y_0$. Частным решением уравнения в G называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из обычного решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении постоянной $C = C_0$.

Общее решение $y = \varphi(x, c)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной С, а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$–одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через (x_0, y_0). Иногда общее решение записывают в неявной форме $\Phi(x, y, C) = 0$. В этом случае его называют общим интегралом уравнения. Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение – значит найти его общее решение в той или иной форме.

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и $y = \varphi(x)$– его решение. График решения представляет собой интегральную кривую, через каждую точку которой можно провести касательную. Из уравнения следует, что угловой коэффициент y' касательной к интегральной кривой в каждой её точке (x, y) равен значению в этой точке правой части уравнения. Уравнение $y' = f(x, y)$ устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной к графику интегральной кривой в этой точке. Сопоставим каждой точке (x, y) интегральной кривой направленный отрезок, углом коэффициент которого равен $f(x, y)$. Получим поле направлений данного уравнения. С геометрической точки зрения $y' = f(x, y)$ определяет на ХОУ поле направлений, а решение уравнения – интегральная кривая, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке. Построить на плоскости поле направлений дифференциального уравнения, можно приблизительно построить интегральные кривые.

Тема 15. Дифференциальное уравнение первого порядка. Методы решения.

Запишем уравнение первого порядка в виде $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ можно предоставить произведениями $P(x, y) = P_1(x) \cdot P_2(y), Q(x, y) = Q_1(x) \cdot Q_2(y)$. Тогда уравнение примет вид: $P_1(x) \cdot P_2(y), dx + Q_1(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$. Оно называется уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные, деля почленно уравнение на $P_2(y) \cdot Q_1(x) \neq 0$. Получим $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0$, где переменные x и y разделены. Тогда соотношение $F(x, y) = C$, где $F(x, y) = \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy$ является общим интегралом данного уравнения. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $y = в$, $в -$ корень уравнения. $P_2(y) = 0$, есть решение исходного уравнения. Аналогично $x = a$, $a -$ корень уравнения $Q_1(x) = 0$, так же является решением уравнения.

Пример. Найти частное решение уравнения $(1+y^2)dx = xydy$. Начальное условие $y(2)=1$.

Решение. Разделяя переменные, получим $\frac{dx}{x} = \frac{y}{1+y^2}dy$, $\ln|x| = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln|C|$, $x^2 = C^2(1+y^2)$. Используя начальное условие, имеем $4 = 2c^2$, $c^2 = 2$. Частное решение уравнения при заданном начальном условии есть функция $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}$.

Функция $f(x,y)$ называется однородной степени n, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y), \lambda \in R$. Уравнение первого порядка $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ или $y' = f(x,y)$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ однородные функции одной степени однородности или $f(x,y)$ – однородная функция нулевой степени однородности. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Подстановка $\frac{y}{x} = t$ или $y = xt$ преобразует уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$. В данном уравнении $P(x,y) = x^2 + 2xy$, $Q(x,y) = xy$ являются однородными функциями второй степени однородности. Пусть $y = tx$, тогда $dy = tdx + xdt$, а уравнение принимает вид: $x^2(1+t)^2dx + x^2dt = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем $\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{tdt}{(1+t)^2} + C$, откуда $\ln|x| = -\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + C$. Возвращаясь к переменной y, найдем общий интеграл в виде: $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$. Функция $t = -1$ является дополнительным решением уравнения с разделяющимися переменными, поэтому $y = -x$ также является решением однородного уравнения.

Уравнение вида: $y' + p(x)\cdot y = q(x)$ называется линейным, здесь $p(x)$ и $q(x)$–непрерывные функции аргумента x. Если $q(x) = 0$, уравнение называется линейным однородным, если $q(x) \neq 0$, то линейным неоднородным.

Метод Бернулли. Полагая $y = u(x)\cdot v(x)$, $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции, уравнение сводим к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно $u(x)$ и $v(x)$: $v' + p(x)\cdot p(x)\cdot v = 0$, $v\cdot u' = q(x)$.

<u>Пример.</u> $y' + y\sin x = 2x\ell^{\cos x}$. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив в данное уравнение y и y', получаем $y' = u'v + uv' \sin x = 2xe^{\cos x}$, $u'v + u(v' + \sin x) = 2xe^{\cos x}$. Функцию $v(x)$ Определим как частное решение уравнения $y' + v\sin x = 0$, в котором переменные разделяются: $\frac{dv}{v} + \sin dx = 0$. Проинтегрировав это уравнение и взяв частное решение при $c = 0$, получаем $v = \ell^{\cos x}$. Для определения $u(x)$ имеем уравнение $u'v = 2x\ell^{\cos x}$, $u'\cdot \ell^{\cos x} = 2x\ell^{\cos x}$, $u' = 2x$, откуда $u = x^2 + C$. Общее решение уравнения: $y = (x^2 + C)\cdot \ell^{\cos x}$.

Уравнение Бернулли $y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^m$, $m-$ любое действительное число, решается тем же способом, как и линейное, посредством подстановки $y = uv$.

Тема 16. Методы решения дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет в общем случае вид $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, $x-$ независимая переменная, $y-$ искомая функция, $y', y'', ..., y^{(n)}$–её производные. Начальные условия для уравнения n-го порядка: $y = y_0$, $y' = y'_0$,..., $н^{(n)} = y_0^{(n)}$ при $x = x_0$. Общим решением уравнения называется дифференцируемая функция $y=\varphi(x,c_1,c_2,..,c_n)$, которая при любых значениях произвольных постоянных $c_1,...,c_n$ является решением данного уравнения.

Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием *n* раз. Общий интеграл этого уравнения содержит *n* произвольных постоянных.

Пример. $y'''=\ell^x$. Последовательно интегрируя, находим

$y''=\ell^x+c_1$, $y'=\ell^x+c_1x+c_2$, $y=\ell^x+c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2x+c_3$ – общее решение.

Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее искомую функцию, то есть $F(x,y',y'')=0$, преобразуется в уравнение первого порядка посредством подстановки $y'=P,\ y''=P'$.

Пример. $y''-3\dfrac{y'}{x}=x$. Полагая $y'=P,\ y''=P'$, получаем линейное

уравнение $P'-3\dfrac{P}{x}=x$. Решая его, найдем $P=c_1x^3-x^2$, тогда

$y'=c_1x^3-x^2$, $y=c_1\dfrac{x^3}{4}-\dfrac{x^3}{3}+c_2$ – искомое решение.

Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащие независимой переменной, то есть $F(y,y',y'')=0$, допускает понижение порядка, если положить, $y'=Z$, а за новый аргумент принять y. Тогда

$y'=Z$, $y''=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot Z$.

Пример. $yy''-2y'^2=0$. Полагая $y'=Z$, $y''=Z\cdot\dfrac{dz}{dy}$, получаем

$Zy\cdot\dfrac{dz}{dy}-2Z^2=0$. Это уравнение первого порядка с разделяющимися

переменными. Приводя его к виду $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{2dy}{y}$ и интегрируя, имеем

$\ln|z| = 2\ln|y| + \ln|c_1|$, откуда $Z = c_1 y^2$. Учитывая, что $z = \dfrac{dy}{dx}$, находим $\dfrac{dy}{y^2} = c_1 dx$

, поэтому искомое решение: $-\dfrac{1}{y} = c_1 x + c_2$, $y = \dfrac{-1}{\ell_1 x + c_2}$. При сокращении на z было потеряно решение уравнения $z = y' = 0$, то есть $y = \ell = const$. В данном случае оно содержится в общем решении, так как получается из него при $c_1 = 0$ (за исключением решения $y = 0$).

Тема 17. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$, где $a_1,\ldots,a_n$ – действительные числа, называется линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть $y_1,\ldots,y_n$ – частные решения уравнения. Если равенство $\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n = 0$ имеет место только при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n y_n = 0$ имеет место только при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то решения $y_1,\ldots,y_n$ линейно не зависимыми. Общее решение уравнения имеет вид: $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения. Для нахождения общего решения уравнения составляют характеристическое уравнение: $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ у которого степень n совпадает с порядком производной.

Структура общего решения уравнения зависит от вида корней характеристического уравнения. Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n-ой степени и поэтому имеет n корней вещественных иди комплексных, среди которых могут быть и равные.

Возможны следующие случаи.

1. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_i \neq k_j, i \neq j \ (i, j = 1,2,...,n)$. В этом случае уравнение имеет n различных линейно независимых частных решений: $y_1 = \ell^{k_1 x}, y_2 = \ell^{k_2 x},..., y_n = \ell^{k_n x}$, образующих фундаментальную систему решений, а общее решение выражается формулой: $y = c_1 \ell^{k_1 x} + c_2 \ell^{k_2 x} + ... + c_n \ell^{k_n x}$, $c_1,...c_n$– произвольные постоянные.

2. Среди действительных корней $k_1,...,k_n$ характеристического уравнения имеются кратные:

$k_1 = k_2 = ... = k_m = k$. Этим корням будут соответствовать m линейно независимых частных решений: $\ell^{kx}, x\ell^{kx}, x^2\ell^{kx},..., x^{m-1}\ell^{kx}$. Различным корням $k_{m+1},...,k_n$ будут соответствовать так же линейно независимые частные решения $\ell^{k_{m+1}x}, \ell^{k_n x}$. Общее решение будет иметь вид:

$y = (c_1 + c_2 x + ... + c_m x^{m-1})\ell^{kx} + c_{m+1}\ell^{k_{m+1}x} + ... + c_n \ell,\ c_1,...,c_n$ - произвольные постоянные.

Среди корней характеристического уравнения имеется пара однократных комплексных корней $k_{1,2} = \lambda \pm \beta_i$. Им соответствует два частных линейно независимых решения: $\ell^{\lambda x} \cdot \cos\beta x, \ell^{\lambda x} \cdot \sin\beta x$. Общее решение имеет вид: $y = \ell^{\lambda x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) + c_3 \ell^{k_3 x} + ... + c_n \ell^{k_n x}$, $k_3,...,k_n$–действительные различные корни характеристического уравнения. Если же $k_{1,2} = \lambda \pm \beta i$ является двукратными, то им соответствуют частные линейно независимые решения: $\ell^{\lambda x} \cdot \cos\beta x, x \cdot \ell^{\lambda x}\cos\beta x, \ell^{\lambda x} \cdot \sin\beta x,\ x\ell^{\lambda x}\sin\beta x$.

<u>Пример.</u> $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$, его корни $k_{1,2} = \pm 3,\ k_{3,4} = \pm 2$ –действительны и различны. Общее решение: $y = c_1\ell^{3x} + c_2\ell^{-3x} + c_3\ell^{2x} + c_4\ell^{-2x}$.

<u>Пример.</u> $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$. Характеристическое уравнение $k^7 + 2k^5 + k^3 = 0$ или $k^3(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$. Оно имеет корни:

$k_1 = k_2 = k_3 = 0, k_{4,5} = i, \quad k_{6,7} = -i$. Им соответствуют частные решения: $y_1 = \ell^{ox} = 1,\ y_2 = x \cdot \ell^{ox} = x,\ y_3 = x^2\ell^{ox} = x^2,\ y_4 = \ell^{ox}\cos x = \cos x,$ $y_5 = x\ell^{ox}\cos x = x\cos x,\ y_6 = \ell^{ox}\sin x = \sin x,\ y_7 = x\ell^{ox}\sin x = x\sin x$. Общее решение: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos x + c_5x\cos x + c_6\sin x + c_7x\sin$.

Тема 18. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Общее решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x),$ где $a_1,...,a_n$ - действительные числа $f(x)$ - непрерывная функция, представимо в виде $y = \bar{y}(x) + Y(x),$ где $\bar{y}(x)$ - частное решение неоднородного уравнения, а $Y(x)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации постоянных. Рассмотрим линейное неоднородного второго порядка: $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$. Пусть соответствующие ему однородное уравнение $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ имеем общее решение $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, где y_1, y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения, определяемые корнями характеристического уравнения $k^2 + a_1k + a_2 = 0$, c_1, c_2 - произвольные постоянные. Согласно методу вариации постоянных, полагаем $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), c_1(x)$ и $c_2(x)$ определяются из системы: $\begin{cases} c_1^1(x)y_1 + c_2^1(x)y_2 = 0 \\ c_1^1(x)y_1^1 + c_2^1(x)y_2^1 = f(x) \end{cases}$. Эта система однозначно разрешима относительно $c_1(x)$ и $c_2(x)$, так как ее определитель для линейно независимых частных решений y_1, y_2 отличен от нуля. Следовательно, существуют функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ такие, что $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ дает решение неоднородного уравнения.

Пример. $y'' + y = tgx$. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$. Общее решение однородного уравнения: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Общее решение неоднородного уравнения имеем в виде: $y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$, где $c_1(x), c_2(x)$ – неизвестные функции. Составим систему: $\begin{cases} \cos x \cdot c_1'(x) + \sin x \cdot c_2'(x) = 0 \\ -\sin x \cdot c_1'(x) + \cos x \cdot c_2'(x) = tgx \end{cases}$. Из системы $c_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $c_2'(x) = \sin x$. Интегрируя эти выражения, получаем:

$c_1(x) = \sin x - \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c_1$, $c_2(x) = -\cos x + c_2$, c_1, c_2 – произвольные постоянные. Искомое решение неоднородного уравнения:

$y = -\cos x \cdot \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c_1 \cos x + c_2 \sin x,$ где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Тема 1. Числовые ряды. Основные понятия. Сходимость.

Пусть дана числовая последовательность $u_1, u_2, ..., u_n, ...$. Выражение вида $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется числовым рядом. Числа $u_1, ..., u_n, ...$ – члены ряда. Член u_n с произвольным номером n – общий член ряда. Суммы конечного числа членов ряда $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2, ..., S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, ...$ называются частичными суммами ряда. Эти суммы образуют последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$. Ряд называется сходящимся, если последовательность его частных сумм сходиться к числу S, которое называется суммой ряда: $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, $S = \int_{n=1}^{\infty} u_n$. Если последовательность частичных сумм расходиться, то и ряд расходится.

Рассмотрим ряд, состоящий из элементов геометрической прогрессии: $a + ag + ... + ag^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ag^{n-1} a \neq 0$. Для этого ряда S_n при $g \neq 1$ имеет вид: $S_n = \frac{a - ag^n}{1 - g} = \frac{a}{1 - g} - \frac{ag^n}{1 - g}$. При $|g| < 1$ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - g}$, поэтому ряд сходиться а его сумма $S = \frac{a}{1 - g}$. Если $|g| > 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, следовательно, ряд расходится. При $g = 1$ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} n \cdot a = \infty$, поэтому ряд расходиться. При $g = -1$ ряд имеет вид: $a - a + a - a + ...$; $S_n = 0$ при n - четном, $S_n = a$ при n - нечетном, следовательно, $\lim\limits_{u \to \infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots=\sum\limits_{K=n+1}^{\infty}u_k$ называется n-м остатком ряда $\sum\limits_{K=1}^{\infty}u_k$. Если остаток ряда сходиться, то его сумму обозначают r_n. Если ряд сходиться, то его сумму обозначают r_n. Если ряд сходиться, то сходится и каждый его остаток, причем $S=S_n+r_n$. Если хотя бы один остаток ряда сходится, то сходиться и ряд. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$. Некоторые свойства числовых рядов непосредственно вытекают из соответствующих свойств числовых последовательностей:

1. Ряд не может иметь двух различных сумм;
2. Если данный ряд сходится, то и любой ряд, полученный из него группировкой слагаемых, сходится и имеет ту же сумму, что и данный ряд. Обратное утверждение неверно.

Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}в_n$ сходятся и имеют соответственно суммы S и δ. Тогда сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm в_n)$, причем его сумма $S=s\pm\delta$. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится его сумма равна S, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$, $c\in R$, и его сумма равна с S. Сумма сходящегося и расходящегося ряда является расходящимся рядом. Разность двух расходящихся рядов может и сходится.

При рассмотрении числовых рядов решаются две задачи:

1. Исследование сходимости ряда.
2. Нахождение точного или с заданной точностью значения суммы сходящегося ряда.

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Отсюда следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ то ряд расходится.

Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3_n}{2_n+3}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3_n}{2_n+3} = \frac{3}{2} \neq 0$. Указанное условие, будучи необходимым, не является достаточным. Существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Примером может служить гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это расходится ряд. Действительно, если бы этот ряд сходился, то $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0$. Но $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, следовательно, равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ невозможно. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Тема 2. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.

Признак Даламбера. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами таков, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд сходится, при $k > 1$ ряд расходиться. Если $k = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ является сходящимся, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Признак Коши. Если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд сходится, при $k > 1$ ряд расходится. При $k = 1$

вопрос о сходимости ряда остается открытым. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$

является расходящимся, так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2} = 2 > 1$.

Первый признак сравнения. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n ...(1)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n ...(2)$ с неотрицательными членами, причем $u_n \le v_n$. Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (2).

Так как сходимость ряда равносильно сходимости любого его остатка, то члены рядов (1) и (2) можно сравнивать, начиная с некоторого места. Для сравнения используя следящие «эталонные ряды»: 1) ряд, составленный из членов геометрической прогрессии; 2) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$, который сходится при $\gamma > 1$ и расходимость при $\gamma \le 1$.

Второй признак сравнения. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k \ne 0$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

<u>Пример.</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ сходиться, так как сходится ряд из членов геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(g = \frac{1}{2} < 1\right)$, а члены данного ряда удовлетворяют неравенству: $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \le \frac{1}{2^{n+1}}$.

<u>Пример.</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$. Сравним его с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который является сходящимся, так как $\gamma = 3 > 1$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^3+n^2}=1\neq 0$, то ряды ведут себя одинаково, то есть исходный ряд является сходящимся.

Тема 3. Знакочередующиеся ряды. Ряд Лейбница. Сумма ряда Лейбница.

Если знаки членов ряда чередуются, то ряд называется знакочередующимися: $u_1-u_2+u_3-...+(1)^{n-1}\cdot u_n+...=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\, u_n>0$.

Теорема Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стремиться к нулю, то этот ряд сходиться.

Ряд, удовлетворяющий условием данной теоремы, называется рядом Лейбница. Сумма S ряда Лейбница удовлетворяет условию: $0<S<u_1$. Остаток r_n ряда Лейбница имеет знак своего первого члена u меньше его по абсолютной величине: $|r_n|<4n+1$. Это дает возможность найти сумму ряда Лейбница с любой заданной точностью. Чтобы найти сумму ряда Лейбница с заданной точность ε, достаточно найти член ряда, не превосходящей по абсолютной величине ε, и вычислить сумму предшествующих ему членов ряда.

<u>Пример.</u> Исследовать сходимость ряда $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}+...$. Так как $1>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}...>\dfrac{1}{n}>...$, то члены ряда монотонно убывает по абсолютной величине. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, следовательно, ряд расходиться по теореме Лейбница.

<u>Пример.</u> Найти с точностью до 0,01 сумму ряда $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n)^3}+\cdots$. Данный ряд является рядом Лейбница. Имеем $u_1=1, u_2=\frac{1}{8},\ \ u_3=\frac{1}{64}, u_4=\frac{1}{216}$. Так как $u_4<0{,}01$, то сумма ряда $S\approx S_3=u_1+u_2+u_3\approx 0{,}891$.

Тема 4. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Ряд с членами произвольных знаков называется знакопеременным. Пусть $u_1+\ldots+u_n+\ldots=\sum\limits_{u=1}u_n$ – знакопеременный ряд, числа $u_1,\ldots,u_n,\ldots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов в ряде произвольно. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходиться ряд из абсолютных величин его членов: $|u_1|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Сходящийся знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходиться.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Если для знакопеременного ряда $u_1+\ldots+u_n+\ldots$ сходиться ряд $|u_1|+\ldots+|u_n|+\ldots$, то данный знакопеременный ряд сходится.

Исследование абсолютной сходимости проводятся теме же методами, с помощью которых исследуются ряды с неотрицательными членами. В частности, используется признак Деламбера и Коши (радикальный). В общем случае из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ не следует расходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, он может сходится условно. Однако, если расходимость $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ установлена с помощью признаков Деламбера или Коши, то означает, что общий член $|u_n|$ не стремиться к нулю, то есть и u_n не стремится к нулю, и для ряда $\sum_{m=1}^{\infty}u_n$ нарушен необходимый признак сходимости. Таким образом, из расходимости $\sum_{m=1}^{\infty}|u_n|$, установленный с помощью признаков Деламбера и Коши (радикального) следует расходимость $\sum_{m=1}^{\infty}u_n$.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом важных свойств, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих свойств не обладают. Например, для условно сходящихся рядов сумма ряда не равна сумме положительных и отрицательных членов ряда, как это имеет место для абсолютно сходящихся рядов.

<u>Пример.</u> $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$. Этот ряд по признаку Лейбница сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (гармонический), поэтому исходный ряд сходится условно.

<u>Пример.</u> $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{\lambda n+1}{4n+1}\right)^n$. К ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n+1}{4n+1}\right)^n$ применим радикальный признак Коши, получим $\lim_{u\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{2}<1$, поэтому исходящий ряд сходится абсолютно.

Тема 5. Функциональные ряды. Область сходимости.

Рассмотрим ряды, членами которых являются не числа, а функции. Пусть функции $u_1(x), u_2(x),...,u_n(x),...$ заданные на одном и том же множестве *X*. Назовем функциональным рядом с общим числом $u_n(x)$ выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$. Если заменить в этом выражение переменную x любым числом $x_0 \in X$, то получим числовой ряд $u_1(x) + u_2(x) + .. + u_n(x) + \ldots$. Таким образом, каждый функциональный ряд определяет множество числовых рядов, получаемых из него подставкой вместо переменой ее числовых значений. Эти числовые ряды могут сходиться при одних значениях аргумента n расходится при других значениях. Например, $1 + x + \ldots + x^{n-1} + \ldots$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Множество значений аргумента x, при которых сходится функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, называется областью сходимости D этого ряда. Каждому $x_0 \in D$ соответствует число $S(x_0)$ – сумма ряда при $x = x_0$. Тем самым в области D сходимости ряда определена функция $S(x)$, называемая суммой функционального ряда. Частичные суммы ряда будем обозначать $S_n(x)$, а его остаток $R_n(x)$. В областях сходимости D имеем: $S(x) = S_n(x) + R_n(x), S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x), \lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$. Функциональный ряд называется абсолютно сходящимся в области сходимости D, если в D сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Чаще всего используют функциональные ряды двух типов: степенные и тригонометрические. Сходимость функционального ряда можно исследовать с помощью признаков сходимости числовых рядов.

<u>Пример.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n$. То ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с $g = \frac{x}{3}$, поэтому сходится при $\left| \frac{x}{3} \right| < 1$, отсюда $D = (-3,3)$.

Тема 6. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости.

Ряд вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ называется степенным рядом, числа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ - коэффициенты ряда. Область сходимости D степенного ряда не пуста, так как любой степенной ряд сходится при $x = 0$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, то он сходится и притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_0|$. Из теоремы Абеля вытекает утверждение. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится не при всех значениях $\tilde{o}$ и не только при $x = 0$, существует число $R > 0$ такое, что ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходиться при $|x| > R$. Интеграл $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда, а число R называется радиусом сходимости степенного ряда. Если степенной ряд сходится только в точке $x = 0$, то полагают $R = 0$. Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то полагают $R = \infty$. В этом случае интервал сходимости есть $(-\infty, \infty)$. Областью сходимости степенного ряда является интервал $(-R, R)$, к которому в отдельных случаях добавляют один или оба конца. Радиус сходимости степенного ряда вычисляются по формулам: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|$ или $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ имеет интервал сходимости $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

<u>Пример.</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Здесь $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$, отсюда $(-1, 1)$ - интервал сходимости. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, то есть в точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получим

гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а при $x=-1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$, который является рядом Лейбница. Таким образом данный ряд имеет область сходимости $D=[-1,1)$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ расходится на всей числовой прямой, кроме $x=0$, так

как $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0$.

Тема 7. Разложение функции в степенной ряд. Формулы Тейлора и Маклорена.

Представление функции $f(x)$ в виде суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ называется разложением этой функции в степенной ряд. Для разложения функций в степенной ряд применяют формулу Тейлора. Пусть $f(x)$ имеет на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ производную до $(n+1)$-го порядка включительно, причем $f^{(n+1)}$ непрерывна на этом отрезке. Тогда для любого x из этого отрезка выполняется равенство: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$

$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+r_n(x)$. Это равенство называется формулой Тейлора, $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Если $f(x)$ имеет на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ производная любого порядка, причем на этом сегменте выполняется соотношение $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$, то можно перейти к формуле Тейлора к пределу $n\to\infty$. Получим, что $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется рядом Тейлора функции

$f(x)$. Он зависит не только от этой функции, но и от выбора значения x_0. Если $x_0 = 0$, то равенство принимает вид: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ и называется рядом Маклорена. Непосредственно проверить, что $\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0$ для всех x из $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, часто бывает затруднительно. Поэтому нужно ввести признак того, что на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ выполняется данное равенство, то есть что функция равна на данном отрезку сумме своего ряда Тейлора. Признак сходимости ряда Тейлора к разлагаемой функции формулируется следующим образом. Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, пусть существует такое число А, что для всех x из этого отрезка и всех n выполняется неравенство $\left| f_{(x)}^{(n)} \right| \le A$, тогда $f(x)$ является на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ суммой своего рода Тейлора.

Пример. Разложить в степенной ряд $y = \ell^x$.

Решение. На отрезке $[-R, R]$ $\left| f_{(x)}^{(n)} \right| = \left| \ell^x \right| \le \ell^R$, поэтому функцию можно разложить в ряд Тейлора на любом отрезке $[-R, R]$. Поскольку для любого x найдется такое R, что $x \in [-R, R]$, то $y = \ell^x$ равна сумме своего ряда Тейлора на всей числовой прямой. Для любого n $f_{(x)}^{(n)} = \ell^x$, $f_{(x)}^{(n)} = 1$. Отсюда $\ell^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$. Степенной ряд почленно интегрировать по любому отрезку $[a, \hat{a}]$, целиком лежащему в интервале сходимости. Если $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$. Степенной ряд можно дифференцировать в любой точке, лежащей внутри интервала сходимости. Если $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^6}{6}+\ldots$ и его сумму в интервале сходимости.

Решение. Рассмотрим ряд, полученный в результате почленного дифференцирования исходного ряда: $1-x+x^3-x^5+\ldots$ начиная со второго члена, этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию с $q=-x^2$. Следовательно, ряд расходится при $|x|>1$ и сходится при $|x|<1$. Таким образом, исходный ряд имеет радиус сходимости $R=1$. На концах интервала сходимости при $x=\pm 1$ исходный ряд сходится по теории Лейбница, отсюда его область сходимости $D=[-1,1]$. Обозначим $S(x)$ сумму основного ряда.

Тогда в интервале сходимости $S'(x)=1-x+x^3-x^5+\ldots=1-x(1-x^2+x^4+\ldots)=1-\dfrac{x}{1+x^2}$.

Тогда $S(x)=\int\limits_0^x\left(1-\dfrac{t}{1+t^2}\right)dt=x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Разложение элементарных функций в степенной ряд см., например в [ ].

Тема 8. Ряды Фурье

Чтобы $y=f(x)$ можно было разложить в степенной ряд по степеням $x-a$, необходима её бесконечная дифференцируемость в точке a. Например, $y=|x|$ нельзя разложить в ряд по степеням x, так как она не дифференцируема в точке $x=0$. Кроме того, функции $y=x^n$ не периодичны и поэтому неудобно строить по ним разложение периодических функций. В связи с этим рассматривают разложение периодических функций в ряды по гармоническим колебаниям, то есть по функциям вида $y=A\sin(\omega x+\lambda)$. Так как $A_n\sin(nx+\lambda_n)=a_n\cos nx+\textit{в}n\sin nx$, $A_n=\sqrt{a_n^2+\textit{в}_n^2}$, $\sin\lambda_n=\dfrac{a_n}{A_n}$, $\cos\lambda_n=\dfrac{\textit{в}_n}{A_n}$, то будем рассматривать разложения периодических функций в тригонометрические ряды вида $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+\text{в}n\sin nx)$.

Пусть $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx$ – тригонометрическая система функций. Ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+\text{в}n\sin nx)$ называется рядом Фурье функции $f(x)$, коэффициенты Фурье находятся по формулам: $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $\text{в}_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}f(x)\sin nx\,dx$. Если взять вместо отрезка $[a,a+2\pi]$ отрезок $[a,a+2\ell]$, то $a_0=\frac{1}{\ell}\int\limits_a^{a+2\ell}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{\ell}\int\limits_a^{a+2\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$, $\text{в}_n=\frac{1}{\ell}\int\limits_a^{a+2\ell}f(x)s\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$. Например, коэффициенты Фурье функции $y=x^2$ на $[0,2\pi]$: $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3}$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}$, $\text{в}_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=-\frac{4\pi}{n}$, а ряд Фурье: $\frac{4\pi^2}{3}+4\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$.

В общем случае нельзя утверждать, что ряд Фурье данной функции сходится к ней. Пусть $f(x)$ имеет период 2π и является кусочно-гладкой. Тогда её ряд Фурье сходится в каждой точке x_0 числовой оси к значению $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Так как в точках, где $f(x)$ непрерывна $f(x_0-0)=f(x_0-0)=f(x_0)$, то ряд Фурье кусочно-гладкой функции сходиться к ней во всех точках непрерывности этой функции этой функции.

Встречающиеся при решении практических задач функции с периодом 2π удовлетворяют условиям теоремы.

Пусть на $(-\pi, \pi]$ пусть задана кусочно-гладкая $f(x)$. Продолжим её периодически на всю числовую ось с периодом 2π . К полученной функции применимо утверждение. Сумма полученного ряда Фурье сходится на $(-\pi, \pi)$ к значениям $\dfrac{f(x_0+0)+f(x-0)}{2}$. В точка $x=\pm\pi$ ряд Фурье сходится к $\dfrac{f(-\pi+0)+f(x-0)}{2}$ (в силу периодичности $f(-\pi+0)=f(\pi+0), f(-\pi-0)=f(\pi-0)$. Если периодическая с периодом 2π функция четна, то ее ряд Фурье: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} в$ и $\sin nx$, где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ в_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Тема 9. Приложения рядов к приближенным вычислениям.

Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью с любой заданной точностью вычисляют значения функций (в частности, значения π и ℓ); находят приближенное значение определенных интегралов, которые или не выражаются через элементарные функции, или сложны для вычислений. Так, например, $\int\limits_0^a \dfrac{\sin x}{x}dx$ не берется в элементарных функциях, поскольку первообразная функции $\dfrac{\sin x}{x}$ не является элементарной. В то же время эта первообразная легко выражается в виде степенного ряда. Действительно, так как $\sin x = x = \dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$, то, умножая это равенство на $\frac{1}{x}$, получим $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$, причем последний сходится при любом x. Интегрируя его почленно от 0 до a, имеем $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3!3} + \frac{a^5}{5!5} - \frac{a^7}{7!7} + \ldots$. С помощью этого равенства можно при любом a с любой степенью точности вычислить данный интеграл. Значительную роль играют степенные ряды в приближенных методах решений дифференциальных уравнений.

Пример. Вычислить $\ell^{0,2}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Из $\ell^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ следует $\ell^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2!} + \frac{(0,2)^3}{3!} + \frac{(0,2)^4}{4!} + \ldots$. Оценим погрешность, полученную при отбрасывании всех членов, начиная с пятого: $r_4 = \frac{(0,2)^4}{4!} + \frac{(0,2)^5}{5!} + \ldots < \frac{(0,2)^4}{4!}\left(1 + \left(\frac{0,2}{5}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{0,0016}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0,2}{5}} < 0,0001$. Значит, с точностью до 0,0001 имеем $\ell^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2!} + \frac{(0,2)^3}{3!} \approx 1,2213$.

Пример. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = y^2 + x^2$ при начальном условии $y(0) = \frac{1}{2}$.

Решение. Последовательно дифференцируя данное уравнение и учитывая начальное условие, получаем:

$y(0) = \frac{1}{2}$; $y' = y^2 + x^2$, $y'(0) = \frac{1}{4}$; $y'' = 2yy' + 2x$, $y''(0) = \frac{1}{4}$; $y''' = 2(y')^2 + 2yy'' + 2$, $y'''(0) = \frac{19}{8}$. Поэтому $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{19}{8}x^3 + \ldots$ искомое решение.

Тема 10. Понятие двойного интеграла. Свойства. Вычисление в декартовых координатах.

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функций двух переменных. Пусть G- некоторая замкнутая ограниченная область, $Z = f(x,y)$ – произвольная функция, определенная в этой области. Предполагается, что граница области G состоит из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, $f(x)$ и $\varphi(y)$– непрерывные функции. Разобьем G произвольно на n частей G_i, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_i $(i = 1,2,...,n)$. В каждой части G_i выберем произвольную точку (ξ_i,η_i) и составим сумму $\delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i$, которую назовем интегральной суммой для $f(x, y)$ в G. Назовем диаметром $d(G)$ области G наибольшее расстояние между гармоничными точками этой области, обозначим через λ наибольший из диаметров частных областей G_i. Число J называется пределом δ при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ независимо от выбора точек (ξ_i,η_i) выполняется неравенство $|\delta - J| < \varepsilon$. Если интегральные суммы при $\lambda \to 0$ имеют предел J, то он называется двойным интегралом от $f(x, y)$ по области G и обозначается: $J = \iint\limits_G f(x,y)ds = \iint\limits_G f(x,y)dx\,dy$, G – область интегрирования, $\tilde{o}$ и y –переменные интегрирования, $ds(dxdy)$– элементы площади.

Функция $f(x,y)$, непрерывна в замкнутой, ограниченной области G, интегрируема в этой области. Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим определенного интеграла.

Если $c = conct \neq 0$, то $\iint\limits_G c\cdot f(x,y)dxdy = c_i\iint\limits_a f(x,y)dxdy$.

Если $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ интегрируемы в G, то $\iint\limits_G [f(x,y) \pm \varphi(x,y)]dxdy =$

$= \iint\limits_G f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_G \varphi(x,y)dxdy$.

Если G является объединением G_1, G_2, не имеющих общих внутренних точек, в каждой из которых $f(x,y)$ интегрируема, то в G эта функция интегрируема $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy$.

Двойной интеграл по прямоугольнику $G: a \leq x \leq в,\ c \leq y \leq d$ вычисляется: $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^в f(x,y)dx$. Интегралы в правой части называются повторными.

Пусть $f(x,y)$ определенна в $G: a \leq x \leq в,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные функции, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$; пусть существует $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ и для каждого $x \in [a,в]$ существует $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, тогда $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$. Если поменять ролями в утверждении x и y, то $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$. Если область G не удовлетворяет условиям утверждения (например, прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают её границу более чем в двух точках), то необходимо область G разбить на части, каждая из которых удовлетворяет условиям утверждения, и сводить к повторному каждой из соответствующих двойных интегралов отдельно.

Тема 11. Двойной интеграл в полярных координатах. Приложение двойного интеграла.

Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержат сумму $x^2 + y^2$, то во многих случаях упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах $(x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi)$ принимает вид: $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$. Тогда $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\, dyd\rho$, G' – область изменения координат ρ и φ.

<u>Пример.</u> $J = \iint\limits_G \ell^{x^2+y^2}dxdy,$ G – четверть круга $x^2 + y^2 = 1$ в первом квадранте. Перейдем к полярным координатам:

$$J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \ell^{\rho^2}\cdot\rho\, d\rho = \frac{1}{2}(\ell - 1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2}(\ell - 1)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(\ell - 1)\cdot$$

Вычисление объема. Объем криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $Z = f(x,y) > 0$, снизу плоскостью $Z = 0$ и с боковой сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельные оси OZ, а направляющей служит контур области G, вычисляется по формуле $v = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$.

Вычисление площади. Площадь S области G может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле $S = \iint\limits_G dxdy$. Эта формула более универсальна, чем соответствующая формула, выражающая площадь криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла, так как данная формула применима не только к криволинейным трапециям, но и к фигурам, расположенными произвольно по отношению к координатным осям. Пусть поверхность S задана, $Z = f(x,y)$ проекцией, S на плоскость XOY является областью G и в этой области функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f_x(x,y)$ и $f_x(x,y)$.

Площадь поверхности S можно вычислить: $S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}dxdy$.

Вычисление массы пластинки. Рассмотрим на плоскости XOY материальную пластинку, то есть некоторую область G, по которой распределена масса m с плотностью $\rho(x, y)$. Масса m такой пластинки вычисляется: $m = \iint\limits_G \rho(x, y)dxdy$.

Координаты центра масс пластинки определяются формулами: $x_0 = \dfrac{\iint\limits_G x\rho(x, y)dxdy}{m}$, $y_0 = \dfrac{\iint\limits_G y\rho(x, y)dxdy}{m}$, а моменты инерции пластинки относительно осей координат и начала координат вычисляются: $J_x = \iint\limits_G y^2\rho(x, y)dxdy,\ J_y = \iint\limits_G x^2\rho(x, y)dxdy,\ J_0 = J_x + J_y$.

Тема 12. Понятие тройного интеграла. Вычисление.

Тройной интеграл является аналогом двойного интеграла и вводится для функции трех переменных.

Пусть в некоторой замкнутой ограниченной области V пространства задана ограниченная функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем область V на n произвольных областей, не имеющих общих внутренних точек, с объемами $\Delta v_1, .., \Delta v_n$. В каждой области возьмем произвольную точку M_i и составим сумму: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$, которая называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по областям V. Обозначим через λ наибольший из диаметров частных областей. Если интегральная сумма при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный J, то этот предел называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается $J = \iiint\limits_V f(x, y, z)dv =$

$= \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, V – область интегрирования, x, y, z – переменные интегрирования, dv (или dx, dy, dz) – элемент объема.

Тройные интегралы являются непосредственным обобщением двойных интегралов на случай пространства. Они обладают аналогичными двойным интегралам свойствами. Вычисление тройных интегралов сводиться к вычислению интегралов меньшей кратности. Рассмотрим область V, ограниченную снизу и сверху поверхностями $Z = Z_1(x,y)$, $Z = Z_2(x,y)$, а с боковых сторон цилиндрической поверхностью, и пусть область G – проекция области V на плоскость XOY, в которой определены и непрерывны функции $Z_1(x,y)$ и $Z_2(x,y)$. Предположим, что каждая прямая, параллельная оси OZ, пересекает границу области V не более чем в двух точках. Тогда для любой функции $f(x,y,z)$, непрерывной в области V, имеет место формула $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, позволяющая свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной Z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G. Переходя от двойного интеграла к повторному, получаем $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^в dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$. Порядок интегрирования может быть и другим, то есть переменные x, y, z можно менять ролями. В частности, если V –параллелепипед с гранями $x = a$, $x = в$ $(a < в)$, $y = c$, $y = d (c < d)$, $z = k$, $z = \ell (k < \ell)$, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^в dx \int\limits_C^d dy \int\limits_k^\ell f(x,y,z)dz$. В этом случае интегрирование можно производить в любом порядке.

Тема 13. Криволинейный интеграл первого рода.

Общим понятием определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой, лежащей в плоскости.

Рассмотрим на плоскости XOY некоторую кривую АВ, имеющую в каждой точке касательную. Предположим, что функция $Z = f(x,y)$ определена и ограничена на кривой АВ. Разобьем кривую АВ произвольно на n частей точками $A = M_0, M_1,..., M_{i-1},..., M_n = B$ Ии выберем на каждой из частных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку M'_i, затем составим сумму $\sum f(M'_i)\Delta S_i$, где ΔS_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$. Эта сумма называется интегральной суммой для функции $Z = f(x,y) = f(M)$ по кривой AB. Обозначим через λ наибольшую из длин частичных дуг $M_{i-1}M_i$. Если интегральная сумма при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный J, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x,y)$ по кривой AB и обозначается: $J = \int\limits_{AB} f(M)ds = \int\limits_{AB} f(x,y)ds,$ AB– контур интегрирования. Имеет место равенство $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds$, в остальном криволинейный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл.

Пусть кривая АВ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (a \le t \le \beta)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$–непрерывные вместе со своими производными функции, а $f(x,y)$ – функция, непрерывная вдоль этой кривой, причем для определенности будем считать, что точке А соответствует значение $t = a$, точке В – значение $t = \beta$. Тогда.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

В частности, если кривая АВ задана уравнением $y = y(x),\ a \le x \le в$, $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то, принимая x за параметр $(t = x)$, имеем $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{в} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y' + (x))^2}\,dx$.

Тема 14. Криволинейный интеграл второго рода.

Пусть на кривой AB определены две ограниченные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Разобьем кривую AB на n частей точками $A = M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i ..., M_n = B$. Обозначим через Δx_i и Δy_i проекция вектора $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ на оси координат, на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмем произвольную точку M_i' и составим интегральную сумму для функции $P(x,y)$ $\left(Q(x,y)\right)$: $\sum\limits_{i=1}^{n} (M_i')\Delta x_i \left(\sum\limits_{i=1}^{n} Q(M_i')\Delta y_i \right)$. Если интегральная сумма при $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta S_i\}$, ΔS_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$) имеет предел, равный J, то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x,y)$ $(Q(x,y))$ по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} P(x\, y)dx \left(\int\limits_{AB} Q(x,y)dy \right)$. Сумму $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ называют общим криволинейным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $a \le t \le \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные вместе со своими производными функции, причем точке A кривой соответствует значение $t = a$, точке B – значение $t = \beta$, $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$. Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вдоль кривой AB. Тогда $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$

$$= \int\limits_{a}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \psi'(t)]dt \,.$$

В частности, если кривая AB задана уравнениями $y = y(x),\ a \le x \le в$, где $y(x)$ – непрерывна дифференцируемая функция то, принимая x за параметр t, имеем: $\int P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^в [P(x,y)) + Q(x,y))\cdot y'(x)]dx$.

Аналогичная формула имеет место, если кривая AB задана уравнением вида $x = x(y)$.

Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствами определенного интеграла. Криволинейный интеграл второго рода зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) проходится кривая АВ, и меняет знак при изменении направления обхода кривой. В случае, когда L замкнутая кривая $(A = B)$, из двух возможных направлений обхода замкнутого контура условимся назвать положительным то направление, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L, пробегаемому в положительном направлении, часто обозначается символом $\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Тема 15. Формула Римана-Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейными и двойными интегралами. Она имеет широкое применение как в самом анализе, так и в его приложениях.

Замкнутую область, граница которой пересекается с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках, будем называть простой. Контур, ограничивающий область будем называть гладким, если в каждой его точке существует касательная. Пусть G – некоторая простая замкнутая область, ограниченная контуром L, и пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial Y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial X}$ в данной области. Тогда имеет место формула Римана-Грина:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial У} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy .$$

Формула Грина остается справедливой для всякой замкнутой области G, которую можно разбить произведением дополнительных линий на конечное число простых замкнутых областей.

<u>Пример.</u> С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L (x - y)dx + (x + y)dy$, где L- окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

<u>Решение.</u> $P(x, y) = x - y,\ Q(x, y) = x + y,\ \dfrac{\partial P}{\partial У} = -1, \dfrac{\partial Q}{\partial У} = 1$.

Тогда $\oint_L (x - y)dx + (x + y)dy = \iint_G (1 - (-1))dxdy = 2\iint_G dxdy = 2S(G) = 2\pi R^2$.

Тема 16. Приложение криволинейных интегралов.

Криволинейный интеграл $\int_{AB} f(M)dx$ при $f(M) \geq 0$ численно равен площади куска *AB* цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости $XOУ$, восстановленных в точках $M(x, y)$ кривой *AB* и имеющих перпендикулярную длину $f(M)$. Если положить $f(M) = 1$, то получим криволинейный интеграл $\int_{AB} ds$, значение которого есть длина дуги кривой *AB*. Таким образом, с помощью криволинейного интеграла первого рода можно вычислить площади цилиндрических поверхностей и длины дуг. Кроме этого, криволинейный интеграл первого рода имеет широкое применение в физике. С его помощью можно находить массу материальной кривой по её плоскости, моменты инерции относительно координатных осей, координаты центра масс такой кривой. Соответствующие формулы имеют следующий вид:

1. $m=\int\limits_{\ell}\mu(x,y)ds$ – масса дуги ℓ с переменной линейной плотностью $\mu(x,y)$;

2. $x_0=\dfrac{\int\limits_{\ell}x\mu(x,y)ds}{m}$, $y_0=\dfrac{\int\limits_{\ell}y\mu(x,y)ds}{m}$ – координаты центра тяжести кривой ℓ;

3. $J_x=\int\limits_{\ell}y^2\mu(x,y)ds,\ J_y=\int\limits_{\ell}x^2\mu(x,y)ds,\ J_0=J_x+J_y$ – моменты инерции ℓ относительно OX, $OУ$ и $0(0,0)$ соответственно.

Площадь области D, ограниченной замкнутым контуром ℓ, находится по формуле $S=\dfrac{1}{2}\oint\limits_{\ell}xdy-ydx$. Направление обхода контура ℓ выбрано так, что область D остается все время слева от пути интегрирования.

Пусть $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ есть переменная сила, совершающая работу А по перемещению материальной точки вдоль пути ℓ. Тогда $A=\int\limits_{\ell}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. В этом состоит физический смысл криволинейного интеграла II рода.

Тема 17. Поверхностный интеграл первого рода.

Поверхность будем называть гладкой, если в каждой её точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положения этой касательной плотности меняется непрерывно. Пусть в точках некоторой гладкой поверхности *S* определена ограниченная функция $f(M) = f(x,y,z)$. Разобьем S произвольно на n частей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку M_i', составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, которую назовем интегральной суммой для $f(M)$ по поверхности S. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности. Если интегральная сумма при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный J, то этот, предел называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается $J = \iint\limits_S f(M)ds = \iint\limits_S f(x,y,z)ds,$ S – область интегрирования. В частности, если $f(x,y,z) = 1$ на поверхности *S*, то $\iint\limits_S ds = s$, *s* – площадь поверхности S, то есть с помощью поверхностного интеграла первого рода можно вычислить площади поверхностей. Кроме того, с их помощью можно определить массы, статические моменты, моменты инерции, координаты центра масс для материальных поверхностей с известной плотностью распределения масс. Эти задачи решаются аналогично соответствующим задачам для случая материальной кривой.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода производится сведением поверхностного интеграла к двойному. Имеет место формула: $\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + Z^2x(x,y) + Z_y{}^2(x,y)dxdy}$ где G - проекция *S* на xoy, $Z = Z(x,y)$ - уравнение поверхности *S*.

Тема 18. Поверхностный интеграл второго рода.

Возьмем на гладкой поверхности S произвольную точку M и проведем через нее нормаль к поверхности $\vec{n}$. Рассмотрим на поверхности S какой-либо замкнутый контур, проходящий через точку M и не имеющий общих точек с границей поверхности S.

Будем перемещать точку M по замкнутому контуру вместе с вектором $\vec{n}$ так, чтобы вектор $\vec{n}$ все время оставался нормальным к S и чтобы его направление менялось при этом перемещении непрерывно. В начальное положение точка M вернется либо с тем же направлением $\vec{n}$, либо с противоположным. Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется двусторонней. Примерами двухсторонних поверхностей служат плоскость, сфера, любая поверхность, заданная уравнением $Z = f(x,y)$, где $f(x,y)$, $f_x(x,y)$ и $f_y(x,y)$– непрерывны в некоторой области G плоскости $XOУ$. Далее рассматриваются только двухсторонние поверхности. Для двухсторонней поверхности совокупность всех ее точек с выбранным в них направлением нормали, изменяется непрерывно при переходе от точки к точке, называется стороной поверхности, а выбор определенной её стороны – ориентацией поверхности.

Пусть S – гладкая поверхность, заданная уравнением $Z = f(x,y)$ и $R(x,y,z)$– ограниченная функция, определенная в точках поверхности S. Выберем одну из двух сторон поверхности. Если нормали составляют острые углы с OZ, то будем говорить, что выбрана верхняя сторона поверхности $Z = f(x,y)$, если тупые углы, то нижняя сторона поверхности. Разобьем S произвольно на n частей и обозначим через G_i проекцию i-й части поверхности на плоскости $XOУ$. Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку M_i, составим сумму $\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta S_i$, ΔS_i - площадь G_i, взятая со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности S, и со знаком минус, если выбрана нижняя сторона поверхности S. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности S. Если интегральная сумма при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный J, то этот предел называется поверхностным интегралом второго рода от функции $R(x,y,z)$ по выбранной стороне поверхности S и обозначается $J = \iint\limits_S R(M)dxdy = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$.

Аналогично определяется поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности S по переменным y и z (Z и X) от функции $P(x,y,z)(Q(x,y,z))$, которая определена на поверхности $S: \iint\limits_S P(x,y,z)dydz$ $\left(\iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz\right)$. Сумму этих интегралов называют общим поверхностным интегралом второго рода и обозначают символом $\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdy + R(x,y,z)dxdy$. Поверхностным интеграл второго рода обладает такими же свойствами, как и поверхностный интеграл первого рода, но в отличие от последнего при изменении стороны поверхности он меняет знак.

Поверхностные интегралы второго рода вычисляют сведением их к двойным интегралам:

$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_G R(x,y,\ f(x,y))dx\,dy,$ G – проекция на плоскость XOY. Аналогично $\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{G_1} P(f(y,z),y,z)dydz, \iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx =$ $= \iint\limits_{G_2} Q(x,f(x,y),z)dzdx,$ G_1 и G_2 – проекции S соответственно на плоскости YOZ, XOZ. Для вычисления интеграла общего вида используют те же формулы, если поверхность S однозначно проектируется на все три координатные плоскости.

ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

Тема 1. Элементы комбинаторики. Перестановки, сочетания размещения.

Математика и ее прикладные области часто имеют дело с задачами, в которых нужно подсчитать число возможных способов расположения некоторых предметов, объектов и число всех способов осуществления некоторого действия. Такого типа задачи называются комбинаторными. Комбинаторные соображения лежат в основе решения многих задач теории вероятностей раздела математики, посвященного изучению случайных явлений.

Основное правило комбинаторики (правило умножения). Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить m_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 .... n_k$ способами.

Множеством будем называть всякую совокупность элементов произвольной природы. Множество считается определенным, если указаны все его элементы. Элементы могут быть указаны с помощью некоторого общего признака или просто с помощью некоторого списка, где обозначены все элементы. Последний способ возможен лишь в том случае, если множество имеет конечное число элементов. Комбинаторика является теорией конечных множеств. Основная характеристика конечного множества – количество его элементов. $N(A)$–количество элементов множества *A*. Два множество равны, если элементы первого являются элементами второго и наоборот. Суммой (объединением) множества *A* и *B* называется множество $A \cup B$, которому принадлежит все те и только те элементы, которые входят либо в *A*, либо в *B*. Если множества *A* и *B* имеют общее элементы, то каждой из этих элементов входят в $A \cup B$ только один раз. Пересчитаем множество

А и В называется множество $A\cap B$, которому принадлежат те и только те элементы, которые являются общими для А и В.

Основная формула для нахождения числа элементов двух множеств: $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$. Аналогичная формула для трех множеств:

$N(A\cup B\cup C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C)$.

Произвольное m – элементное подмножество n – элементного множества называется сочетанием из n элементов по $(m\le n)$. Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},\quad n!=1,2....n,\quad 0!=1.$$

Множество называется порядочным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, n – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа. Разные порядочные множества, которые отличаются лишь порядков элементов, называются перестановками. Число перестановок множества, состоящего из n элементов обозначается P_n и может быть вычислено по формуле: $P_n=n!$. Число всех n элементов подмножеств множества А равно C_n^m. Каждое такое подмножество можно упорядочить $m!$ способами. Таким образом получим все упорядоченные m–подмножества множества А. Их число $m!\,C_n^m$ по теореме умножения. Упорядоченные подмножества множества А из n элементов называется размещениями из n элементов по m. Число различных размещений из n по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m=m!\,C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},\quad n!=1.2....n,\quad 0!=1.$$

Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, n – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа. Различные порядочные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, называются перестановками. Число перестановок множества, состоящего из n элементов обозначается P_n и может быть вычислено по формуле: $P_n = n!$. Число всех m элементных подмножеств множества А равно C_n^m. Каждое такое подмножество можно упорядочить m! способами. Таким образом получим все упорядоченные m – элементные подмножества множества А. Их число $м!C_n^m$ по теореме умножения. Упорядоченные подмножества множества А из n элементов называются размещениями из n по m. Число различных размещений из n по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле: $A_n^m = м!C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Тема 2. События и их классификация. Полная группа событий. Классическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности.

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется испытанием. Результат, исход испытания, и называется событием. Два события называют совместными, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании. В противном случае события несовместны.
Несовместимость более чем двух событий означает их попарную несовместность более чем двух событий означает их попарную несовместность. Два события являются противоположными, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Обозначение: $\overline{A}$ – событие, противоположное событию А. Событие называют достоверным, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. Событие А называют случайным, ели оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании. Говорят, что совокупность событий образует полную группу событий для данного

испытания, если его результатом обязательно становятся хотя бы одно из них. События являются равновозможными, если условия испытания не создают преимущества в появлении какого либо события перед другими возможными в данном испытании. События, образующие полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, будем называть элементарными. Событие А называют благоприятствующим событию В, если наступление события А влечет за собой наступление события В. Вероятностью Р(А) события А называют отношение $\frac{m}{n}$ числа элементарных событий, благоприятствующих событию А, к числу всех элементарных событий: $P(A) = \frac{m}{n}$. Вероятность достоверного события равна 1Ю, вероятность невозможного события равна 0, вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Например, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны. В таких случаях используется статистическое определение вероятности. Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие А наступило m раз $(m \le n)$. Число m называют частотой события А, а отношение $P^*(A) = \frac{m}{n}$ – относительной частой события А. Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить: при проведении серии из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значение, которые могут довольно симль отличаться друг от друга. Но с увеличением n относительная частота $P^*(A) = \frac{m}{n}$ приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возне него и принимая все более устойчивые значения.

Статистическое определение вероятности.

Вероятностью события А в данном испытании называют число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

Тема 3. Геометрическая вероятность. Задача о встрече.

Под геометрической вероятностью понимается вероятность попадания точки в область (под областью подразумевают отрезок, часть плоскости, часть тела и др.). Пусть G – некоторая область и в ней содержится другая область $g \subset G$. Требуется найти вероятность того, что точка взятая наудачу в области G, попадет в область g. Вероятность попадания точки в какую-нибудь часть области G пропорциональная мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от ее расположения и формы. Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере этой области: $P(A) = \dfrac{мes\, g}{мesG}$, $мesG$ - мера (длина, площадь, объем) всей области, mes g – мера благоприятствующей области.

<u>Задача о встрече</u>

Два человека A и B условились о встрече в определенном месте во время перерыва между 14:00 и 14:50. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течении указанных 50мин. Может произойти наудачу и моменты прихода независимы.

Решение. Пусть x– момент прихода A, y– B. Для того чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \le 10$. Возьмем на плоскости систему координат XOY, масштабная единица –1 мин. Всевозможные исходы изображаются точками квадрата, длина стороны которого 50– это область G. Исходы, благоприятствующие встрече – точки области $g: x - y \le 10$, если $x > y$ и $x - y \ge -10$, если $x < y$.

$$P = \frac{mee\ g}{mes\ G} = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{50^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 40^2}{50^2} = \frac{9}{25} = 0{,}36\cdot$$

Тема 4. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Суммой (объединением) событий А и В называют событие $A \cup B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий А или В. Суммой конечного числа событий $A_1, ..., A_n$ называют событие $A_1 \cup B_2 \cup ... \cup A_n$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий $A_1, ..., A_n$.

Произведением событий А и В называют событие АВ, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие А и событие В. Произведением конечного числа событий $A_1, ..., A_n$ называют событие $A_1 A_2 ... A_n$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Совершенно так же формируется утверждение для любого конечного числа попарно несовместных событий. Из данного утверждения следует, что сумма вероятностей противоположных событий А и $\overline{A}$ равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Два события А и В называют независимыми, если вероятность появления каждого из них зависит от того, появилось событие или нет. Несколько событий $A_1, ..., A_n$ называют независимыми в совокупности, если вероятность появления любого из них зависит от того, произошли какие либо другие рассматриваемые событии или нет. Условной вероятностью $P_A(B)$ события В называют вероятность события В, найденную в предположении, что событие А уже наступило. Если А и В независимы, то $P_A(B) = P(B)$. Для зависимых событий $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$, для независимых – $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Для совместных событий $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Тема 5. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса.

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появлении появления одного из n попарно несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, отражающих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события $A: P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$ – формула полной вероятности.

<u>Пример.</u> Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он имеет решить 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному ?

<u>Решение.</u> Вероятность получить задачу по дифференциальному исчислению (событие B_1) равна P(B_1) = 0,4, по интегральному (событие B_2) – $P(B_2) = 0{,}6$. Если событие А означает, что задача решена, то $P_{B_1}(A) = 0{,}9,\ P(B_2) = 0{,}5$. Отсюда $P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}66$.

Пусть в условиях рассуждения, относящегося к формуле полной вероятности, проведено одно испытание, в результате которого произошло событие А. При этом изменились вероятности гипотез $B_1, ... B_n$. Условные вероятности $P_A(B_i)$ находятся по формулам Байеса: $P_A(B_i) = \dfrac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{P(A)}$, $i = 1, ..., n$.

<u>Пример.</u> Большая популярность людей разбита на две группы одинаковой численности. Диета одной группы отличались высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богата ненасыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах соответственно 31% и 48%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что человек принадлежит к контрольной группе? Пусть А – случайно выбранный

человек имеет сердечно-сосудистое заболевание; B_1 – человек придерживался специальной диеты; B_2 – человек принадлежал к контрольной группе. $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5;\ P_{B_1}(A) = 0{,}31,\ P_{B_2}(A) = 0{,}48$.

$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}31 + 0{,}5 \cdot 0{,}48 = 0{,}395$, $P_A(B_2) = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}48}{0{,}395} = 0{,}61$.

Тема 6. Повторение испытаний. Формулы Бернулли и Пуассона.

Пусть производиться n испытаний, причем вероятность появления события А в каждом испытании равна Р и не зависит от исхода других испытаний, вероятность ненаступления события А равна $q = 1 - p$. Вероятность того, что три n испытаниях события А наступит k раз $(k \le u)$

можно вычислить по формуле Бернулли: $P_n(k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} P^k \cdot q^{n-k}$.

Пример. Пусть всхожесть семян некоторого растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 4 посеянных семян всходит 3.

Решение. $P_4(3) = \dfrac{4!}{3!\,1!}(0{,}9)^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}2916$.

Формула Бернулли непригодна, если n велико, а p очень мала. В этом

случае используют формулу Пуассона: $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k \cdot \ell^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda = np$.

Пример. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене, в течении одной минуты рана 0,004. Найти вероятность того, что течение одной минуты обрыв произойдет в пяти веретенах.

Решение. $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4,\ P_{1000}(5) = \dfrac{4^5 \cdot \ell^{-4}}{5!} \approx 0{,}1562$

Тема 7. Локальная и интегральная теорема Лапласа.

Если число испытаний n велико, то вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Лаплас получил важную приближенную формулу для вероятности $P_n(k)$ появления события А точно k раз, если n достаточно большое число.

Локальная предельная теорема Лапласа. Пусть $P-$ вероятность события А, причем $0 < P < 1$. Тогда вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие А при n испытаниях появится точно k раз, выражается приближенной формулой Лапласа

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \ q = 1 - p, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell^{-\frac{x^2}{2}}$. Для $\varphi(x)$ имеется таблица ее значений для положительных значений x, $\varphi(x) -$ четная функция.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие А появляется в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна $P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{x'}^{x''} \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ x'' = \frac{f_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Есть таблица функций $\varPhi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x} \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz$, в которой даны значения $\varPhi(x)$ для $x \geq 0$. $\varPhi(x) -$ нечетная функция, $\varPhi(-x) = -\varPhi(x)$. В таблице приведены значения $\varPhi(x)$ для $0 \leq x \leq 5$. Для $x > 5$ полагают $\varPhi(x) \approx 0{,}5$. $\varPhi(x)$ называется функцией Лапласа. Использую формулу Ньютона-Лейбница, можно показать, что $P_n(k_1, k_2) \approx \varPhi(x'') - \varPhi(x')$. Это интегральная формула Лапласа.

Тема 8. Случайные величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Биноминальное распределение.

Случайной величиной называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется дискретной случайной величиной. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется непрерывной случайной величиной. Дискретная случайная величина X с возможных значений считается заданной, если перечислены все ее возможные значения и вероятности, с которыми X может принять эти значения. Перечень возможных значений и их вероятностей называют законом распределения дискретной случайной величины и записывают в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	P_1	P_2	…	p_n

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

Закон распределения полностью задает дискретную случайную величину. Однако часто встречаются случаи когда закон распределения случайной величины неизвестен. В таких случаях случайную величину изучают по ее числовым характеристикам. Одной из них является математическое ожидание $M(x)$, которое определяется формулой:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно среднему арифметическому всех ее значений (при достаточно большом числе испытаний).

Под суммой (произведением) случайных величин X и У понимают случайную величину $X + У(XУ)$ возможные значения которой состоят из сумм (произведений) каждого возможного значения величин X и У. Для математического ожидания справедливы утверждения:

$M(C) = C, C = const;$

$M(CX) = CM(x);$

$M(X \pm У) = M(X) \pm M(У);$

$M(XУ) = M(X)M(У),$ X и У – независимые случайные величины, то есть закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина.

Математическое ожидание не дает полной характеристики закона распределения случайной величины. При одинаковых $M(x)$ и $M(y)$ возможные значения величин X и У могут быть рассеяны около своих математических ожиданий по-разному. Числовой характеристикой, по которой можно судить о рассеянии возможных значений случайной величины, является дисперсия. Назовем отклонения X случайную величину X–$M(x)$, ее закон распределения:

$X - X(x)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	$\dots$	$x_n - M(X)$
P	P_1	P_2	$\dots$	p_n

Математическое ожидание отклонения равно 0. Отсюда следует, что с помощью отклонения не удается определить среднее отклонение возможных значений X от ее математического ожидания, то есть степень рассеяния X. Это объясняется взаимным погашением положительных и отрицательных возможным значений отклонения. От этого недостатка можно освободиться, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X. Дисперсия $D(x)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$D(x) = M[(X - M(X))^2]$. $D(x)$ можно вычислить по формуле:

$$D(x) = M(x^2) - M^2(X).$$

Свойства $D(x)$:

$D(C) = 0;$

$D(CX) = C^2 D(X);$

$D(x + y) = D(x) \pm D(y)$.

Средним квадратическим отклонением $\delta(x)$ случайной величины X называется корень квадратному из ее дисперсии: $\delta(x) = \sqrt{D(x)}$. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности. Что и сами случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает событие A с вероятностью P. Обозначим через X случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. Событие A может вообще не наступает один раз, два раза и т.д. и, наконец, наступить n раз. Поэтому возможными значениями X будут числа 0,1,…,n. Их вероятности можно найти по формуле Бернулли, затем записать закон распределения, который называется биноминальным. Числовые характеристики X в этом случае находиться по формулам: $M(x) = np$, $D(x) = npq$, $\delta(x) = \sqrt{npq}$.

Тема 9. Функция распределения непрерывной случайной величины. Дифференциальная функция распределения.

Для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной нельзя построить таблицу распределения. Пусть *X*– непрерывная случайная величина с возможными значениями из (*а*, *в*) и *x* – действительное число. Под выражением $X < x$ понимается событие «Случайная величина *X* приняла значение меньше *x*». Вероятность этого события $P(X < x)$ есть некоторая функция переменной *x*: $F(x) = P(X < x)$. Интегральной функцией распределения (функцией распределения) непрерывной случайной величины *X* называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что *X* приняла значение, меньше x: $F(x) = P(X < x)$. Функция распределения совершенно также определяется для дискретных случайных величин.

Свойства $F(x)$:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неубывающая функция;

3) $p(a < X < в) = F(в) - F(a)$; 4) $p(a < X < в) = p(a \le X \le в) = P(a \le X < в) = P(a < X \le в,)$;

5) если возможные значения X принадлежат (а, в), то $F(x) = 0$ при $x \leq a$, $F(x) = 1$ при $x \geq в$.

Дифференциальной функцией распределения непрерывной случайной величины X (плотность вероятности) называется функция $f(x) = F'(x)$. Так как $F(x)$– неубывающая функция, то $f(x) \geq 0$. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в (а, в) можно вычислить по формуле: $p(a < X < в) = \int_a^в f(x)dx$. Интегральная функция выражается через дифференциальную следующим образом: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, а $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Тема 10. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат промежутку от *а* до *в*, вычисляются по формуле $M(X) = \int_a^в x \cdot f(x)dx$, $f(x)$– дифференциальная функция. Если возможные значения X принадлежат всей оси OX, то $M(X) = \int_a^в x \cdot f(x)dx.$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются формулами: $D(X) = \int_a^в [x - M(X)]^2 f(x)dx$ и $\delta(X) = \sqrt{D(x)}$, если возможные значения X находятся в промежутке от *а* до *в*;

$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx,$ если возможные значения X принадлежат всей числовой оси. Вторая формула для вычисления дисперсии имеет вид:

$D(X)=\int_{a}^{в} x^2 f(x)dx-M^2(X)$ или $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X)$ в случае $X\in(a,в)$ и $X\in(-\infty,\infty)$ соответственно. $M(X)$ и $D(X)$ имеют те же свойства, что и в дискретном случае.

Пример. Случайная величина X задана интегральной функцией

$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$. $M(X)=\int_0^1 x\cdot 1dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$,

$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

Тема 11. Равномерное распределение. Показательное распределение.

Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей все свои значения на $[a,в]$, называется равномерным, если её плотность вероятности на этом отрезке постоянна, а вне его равна 0:

$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ c, & a\le x\le в\\ 0, & x>в\end{cases}$. В этом случае $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_a^в f(x)dx=\int_a^в cdx=c(в-a)=1,$

$c = \dfrac{1}{в - a}$, по этому дифференциальная функция равномерного распределения

имеет вид: $f(x)\begin{cases} 0, \ x < a \\ \dfrac{1}{в - a}, \ a \le x \le в \\ 0, \quad x > в \end{cases}$.

Математическое ожидание $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \dfrac{1}{в - a}\int\limits_{a}^{в} xdx = \dfrac{a + в}{2}$,

$D(X) = \dfrac{1}{12}(a - в)^2$.

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей, которое описывается дифференциальной функцией

$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \lambda \ell^{-\lambda x}, \ x \ge 0 \end{cases}$, λ - постоянная положительная величина. Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока. Интегральная функция показательного распределения: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \quad = \lambda\int\limits_{0}^{x} \ell^{-\lambda x}dx = 1 - \ell^{-\lambda x}$. Вероятность попадания X в $(a, в)$ вычисляется по формуле: $p(a < X < в) = F(в) - F(a) = \ell^{-ax} - \ell^{-вx}$. Значения функции ℓ^{-x} можно найти по таблице. Числовые характеристики показательного распределения определяется формулами: $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\delta(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. Функцией надежности $R(t)$ называется функция, определяющая вероятность безотказной работы элемента за время деятельностью $t: R(t) = p(T > t)$. Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с интегральной функцией $F(t) = 1 - \ell^{-\lambda t}$. Тогда

$R(t) = 1 - F(t) = \ell^{-\lambda t}$. Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством $R(t) = \ell^{-\lambda t}$, λ - интенсивность отказов. Эта формула позволяет найти вероятность безотказной работы элемента на интервале времени t, если время безотказной работы имеет показательное распределение.

Тема 12. Нормальное распределение.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается дифференциальной функцией $f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot \ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$. Нормальное распределение определяется двумя параметрами а и δ, а–математическое ожидание, δ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения. Нормированным называется нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\delta = 1$. Дифференциальная функция нормированного распределения: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \ell^{-\frac{x^2}{2}}$. График дифференциальной функции нормального распределения называется нормальной кривой (кривой Гаусса). При $x = a$ $f(x)$ имеет максимум, равный $\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$. Интегральная функция общего нормального распределения: $F(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \ell^{-\frac{(Z-a)^2}{2\delta^2}} dz$, а нормированного: $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \ell^{-\frac{Z^2}{2}} dz.$ $F_0(x)$ и функция Лапласа $\Phi(x)$ связаны соотношением $F_0(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$.

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что примет значение, принадлежащие (λ, β) вычисляются по формуле: $p(\lambda < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda - a}{\delta}\right)$.

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение $X - M(X)$ нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, то есть требуется найти вероятность осуществления неравенства $(X - a) < \delta$. Это неравенство равносильно $a - \delta < X < a + \delta$, поэтому $P(|x - a| < б) = p(a - б < X < a + б) = 2\Phi\left(\frac{б}{\delta}\right)$. В частности при $a = 0$ $p(|X| < б) = 2\Phi\left(\frac{б}{\delta}\right)$.

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения. В этом заключается правило трех сигм.

Тема 13. Закон больших чисел.

Для любой случайной величины *X* при каждом положительном числе ε имеет место неравенство $p(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, которое называют неравенством Чебышева; $M(X)$–математическое ожидание, $D(X)$–дисперсия X. В другой форме неравенство Чебышева имеет вид: $p(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Теорема Чебышева (закон больших чисел). Если дисперсии независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ ограничены одной и той же постоянной C, $D(X_i) \leq C$ $(i = 1,2,...,n)$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, вероятность выполнения неравенства $\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon$, где $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+...+X_n)$, будет сколь угодно близка к единице, то есть число случайных величин *n* достаточно велико, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}p(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon)=1$.

Частный случай теоремы Чебышева. Если все X_i имеют одинаковые математические ожидания $M(X_1)=...=M(X_n)=a$ и $D(X_i)<C(i=1,...,n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}p(\left|\overline{X}-a\right|<\varepsilon)=1$. Сущность теоремы Чебышева состоит в следующем. Несмотря на то что каждая из независимых случайных величин X_i может принять значение, далекое от математического ожидания $M(X_i)$, среднее арифметическое $\overline{X}$ достаточно большого случайных величин с большой вероятностью очень близко к среднему арифметическому их математических ожиданий. Терема Чебышева имеет большое практическое значение. Пусть, например, измеряется некоторая физическая величина. Обычно принимают в качестве искомого значения изменяемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений. Такой подход является верным в силу теоремы Чебышева. На тереме Чебышева основан широко применяемых в статистике выборочный метод, согласно которому по сравнительно небольшой случайной выборке выносят суждение, касающиеся всей совокупность исследуемых объектов. Из теоремы Чебышева (частный случай) следует теорема, называемая теремной Бернулли, являющаяся простейшей формой закона больших чисел. Пусть $m-$ число наступлений события А в n независимых испытаний и p есть вероятность наступления события А в каждом из испытаний. Тогда, каково бы ни было положительное число ε, $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$. Практический смысл теоремы Бернулли следующий: при постоянстве вероятности случайного события А во всех испытаниях, при неограниченном возрастании числа испытаний можно с вероятностью, как угодно близкой к единице, утверждать, что наблюдаемая относительная частота случайного события будет как угодно мало относится от его вероятности.

Тема 14. Генеральная совокупность и выборка.

В статистике разрабатывается научно обоснованные методы сбора статистических данных и их обработки. Пусть требуется изучить множество однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Лучше всего произвести сплошное обследование, то есть изучить каждый объект. Но в большинстве случаев по разным причинам это сделать невозможно. Препятствовать сплошному обследованию может большое число объектов, их недоступность. Если сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности выбирают для изучения часть объектов. Статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называется генеральной совокупностью. Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется выборкой. Число объектов генеральной совокупности (выборки) называется объемом генеральной совокупности (выборки). Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуются и снова возвращается в генеральную совокупность, то выборка называется повторной. Если объект выборки не возвращается в генеральную совокупность, то выборка называется бесповторной. Свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства объектов генеральной совокупности, то есть выборка должна быть репрезентативной.

Считается, что выборка репрезентативна, если все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, то есть выбор производиться случайно.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 - n_2 раз,…, x_k - n_k раз и $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ –объему выборки. Наблюдаемые значения $x_1,...,x_k$ называется вариантами, а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, – вариационным рядом. Числа наблюдений $n_1,...,n_k$ называется частотами, а их отношения к объему выборки $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, ..., \frac{n_k}{n}$ – относительными частотами. Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (непрерывное распределение). В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант попавших в этот интервал. Для графического изображения статистического распределения используют полигон и гистограмму. Для построения полигона на ОХ откладывают значения вариант x_i, на ОУ–значения частот n_i (относительных частот). Полигоном обычно пользуются в случае небольшого числа вариант. В случае большего числа вариант и в случае непрерывного распределения признака строят гистограмму. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длины h и находят для каждого частотного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i – интервал. Затем на этих интервалах, как на основаниях, строят прямоугольники с выстой $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{n_i}{nh}$ – где n–объем выборки). Площадь i частичного прямоугольника равна $\frac{hn_i}{h} = n_i$ (или $\frac{hn_i}{hh} = \frac{n_i}{n}$). Площадь гистограммы равна сумме всех частот (или относительных частот), то есть объему выборки (или единице).

Тема 15. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке.

Пусть имеется некоторая генеральная совокупность, каждый объект которой наделен количественным признаком X. При случайном извлечении объекта из генеральной совокупности становиться известным значение x признака X этого объекта. Поэтому можно рассматривать извлечение объекта из генеральной совокупности как испытание, X– как случайную величину, x– как одно из возможных значений X. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, к какому типу распределений относиться признак X. Возникает задача оценки (приближенного нахождения) параметров, которыми определяется это распределение. Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки генеральной совокупности, например, значения количественного признака $x_1, x_2, ..., x_n$, полученные в результате n наблюдений (наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражается оцениваемый параметр. Опытные значения признака X можно рассматривать и к5ак значения случайных величин $x_1, ..., x_n$ с тем же распределением, что и X, следовательно, с теми же числовыми характеристиками, которые имеют X: $M(X_i) = M(X),\ D(X_i) = D(X)$. Величины $X_1, X_2, ..., X_n$ можно считать независимыми в силу независимости наблюдений. Значения $x_1, ..., x_n$ в этом случае называют реализациями случайных величин $X_1, ..., X_n$. Найти функцию от наблюдаемых случайных величин $X_1, ..., X_n$, которая дает приближенное значение оцениваемого параметра.

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность объема N относительно количественного признака X. Генеральной средней $\bar{x}_г$ называется среднее арифметическое значение признака генеральной совокупности. Если все значения $x_1, ..., x_n$ признака различны, то $\bar{x}_г = \frac{1}{N}(x_1 + ... + x_n)$. Если значения признака имеют соответственно частотные $N_1, ..., N_k,\ N_i + ... + N_k = N,$ то $\bar{x}_г = \frac{1}{N}(x_i N_1 + ... + x_k N_k)$. Извлечение объекта из генеральной совокупности есть наблюдение случайной величины X. Пусть все значения $x_1 + ... + x_n$ различны. Так как каждый объект каждый объект может быть извлечен с одной вероятностью $\frac{1}{N}$, то $M(X) = x_i \cdot \frac{1}{N} + ... + x_N \cdot \frac{1}{N} = \bar{x}_г$. Такой же итого следует, если значения

$x_1,...,x_k$ имеют соответственно частоты $N_1,...,N_k$. В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают $\bar{x}_г = M(X)$.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X увеличена выборка объема n. Выборочной средней $\bar{x}_B$ называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения $x_1,...,x_n$ различны, то $\bar{x}_B = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$. Если значения $x_1,...,x_k$ имеют соответственно частоты $n_1,...,n_k$, $n_1 + ... + n_k = n$, то $\bar{x}_B = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + ... + x_k n_k)$. Выборочная средняя для различных выборок того же объема n из той же генеральной совокупности будет получаться различной. Извлечение i-го по счету объекта есть наблюдение случайной величины X_i, а их среднее арифметическое $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ есть случайная величина, $M(\bar{X})$ совпадает с генеральной средней, а $D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}$. Если варианты x_i –больше числа , то применяют следующий прием. Пусть $C - const$; так как $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - C) + nC$, то $C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)$, C–ложный нуль, его берут так, чтобы $x_i - C$ были небольшими.

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят генеральную дисперсию. Генеральной дисперсией $D_г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака X генеральной совокупности от генеральной средней $\bar{x}_г$. Если все значения

$x_1,...,x_n$ различны, то $D_г = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_г)^2$. Если значения признака $x_1,...,x_k$ имеют соответственно частоты $N_1,...,N_k$, $N_1 + ... + N_k = N$, то $D_г = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{K}(x_i - \bar{x}_г)^2 N_i$. Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется $\delta_г = \sqrt{D_г}$. Пусть все значения $x_1,...,x_N$ различны. Дисперсия признака X, рассматривается как случайная величина, $D(X) = D_г$. Такой же результат будет и случае, если $x_1,...,x_к$ имеют соответственно частоты $N_1,...,N_k$. В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают $D_г = D(X)$. Далее, $D(\bar{X}) = \frac{D_г}{\text{n}}$, $\delta(\bar{X}) = \frac{\delta_г}{\sqrt{\text{n}}}$, $\delta(\bar{X})$ называют средней квадратической ошибкой.

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{x}_B$, вводят выборочную дисперсию. Выборочной дисперсией D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней. Если все значения $x_1,...,x_n$ различны, то $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_B)^2$. Если значения $x_1,...,x_к$ имеют соответственно частоты $n_1,...,n_k$, $n_1 + ... + n_k = n$, то $D_B = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{K}(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i$. Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется $\delta_В = \sqrt{D_В}$. Выборочную дисперсию, рассмотренную как случайная величина, обозначим $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $M(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}D_г$. Если варианты x_i–большие числа, то $D_B = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)^2 - (\bar{x}_B - C)^2$, С – ложный нуль.

Одной из задач статистики является оценка параметров распределения случайной величины X по данным выборки. При этом в теоретических рассуждениях считают, что генеральная совокупность бесконечна. Для оценки параметров распределения X из данных выборки составляют выражения, которые должны служить оценками неизвестных параметров. Например, $\overline{X}$ является оценкой генеральной средней, $\widetilde{S}^2$– оценкой генеральной дисперсии $D_г$. Обозначим θ оцениваемый параметр, $\widetilde{\theta}_n$ – оценку этого параметра ($\widetilde{\theta}_n$ является выражением, составленным из $X_1,...,X_n$). Для того чтобы оценка $\widetilde{\theta}_n$ давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определенным требованиям. Несмещенной называется оценка $\widetilde{\theta}_n$, математическое ожидание которой равна оцениваемому параметру θ. Так, $\overline{X}$ является несмещенной оценкой генеральной средней, а оценка $\widetilde{S}^2$– смещенной оценкой генеральной средней, а оценка $\widetilde{S}^2$– смещенной оценкой генеральной дисперсии, так как $M(\widetilde{S}^2) = \frac{n-1}{n} D_г \neq D_г$. Наряду с выборочной дисперсией $\widetilde{S}^2$рассматривают, так называемую, исправленную дисперсию $S^2 = \frac{n}{n-1}\widetilde{S}^2$ которая также является оценкой генеральной дисперсии. Так как $M(S^2) = D_г$, то S^2 является несмещенной оценкой $D_г$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. Состоятельной называется такая оценка $\widetilde{\theta}_n$ параметра θ, что для любого $\varepsilon > 0$ вероятность $P\{|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремиться к единице. Такому требованию должна удовлетворять всякая оценка, пригодная для практики. Несмещенная оценка $\widetilde{\theta}_n$ будет состоятельной, если при $n \to \infty$ ее дисперсия стремиться к 0. Так, $D(\overline{X}) = \frac{D_г}{\text{n}}$, поэтому $\overline{X}$ является и состоятельной, $\lim D(\overline{X}) = 0$ при

$n \to \infty$. Несмещенная оценка S^2 является так же состоятельной, поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию. Оценки S^2 и $\widetilde{S}^2$ отличаются множителем $\frac{n}{n-1}$. На практике S^2 и $\widetilde{S}^2$ не различают, если $n > 30$. Для оценки генерального среднего квадратического отклонения используют $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$. Если $X_1,...,X_n$ заменить их реализациями $x_1,...,x_n$, а $\overline{X} - \overline{x}_B$, то получит в тех же формулах S^2 и S. Если x_i – большие числа, то $S^2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)^2 - (\overline{x}_B - C)^2\right]$, C - ложный нуль. Далее, чем меньше дисперсия оценки, тем меньше вероятность грубой ошибки при определении приближенного значения параметра. Поэтому необходимо, чтобы дисперсия оценки была минимальной. Оценка, обладающая этим свойством, называется эффективной.

Тема 16. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

Пусть θ - оцениваемый параметр, $\widetilde{\theta}_n$ – его оценка, составленная из $X_1,...,X_n$. Если известно, что оценка $\widetilde{\theta}_n$ является несмещенной и состоятельной, то по данным выборки вычисляют значение $\widetilde{\theta}_n$ и считают его приближением и статистическим значением θ. При этом среднее квадратическое отклонение оценивает порядок ошибки. Также оценки называются точеными. Например, в теме №15 речь шла о точечных оценках генеральной средней и генеральной дисперсии. В данной теме речь будет идти об оценках a и δ Случайной величины, имеющей нормальное распределение. Это важный случай. Так, например, результат измерений имеет нормальное распределение. В этом случае становиться возможным применить интервальные оценки. Пусть $\delta > 0$ – некоторое число. Если выполняется $\left|\theta - \tilde{\theta}_n\right| < \delta$, то есть $\tilde{\theta}_n - \delta < \theta < \tilde{\theta}_n + \delta$, то говорят, что $(\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta)$ покрывает параметр θ. Однако невозможно указать оценку $\tilde{\theta}_n$, чтобы событие $\left\{\left|\theta - \tilde{\theta}_n\right| < \delta\right\}$ было достоверным, поэтому будем говорить о вероятности этого события; δ называется точностью оценки $\tilde{\theta}_n$. Надежностью (доверительной вероятностью) оценки $\tilde{\theta}_n$ параметра θ для заданного $\delta > 0$ называется вероятностью γ того, что $(\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta)$ покроет параметр θ. Если мы сделаем много выборок объема n и для каждой из них постоим $(\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta)$ то доля тех выборок, чьи интервалы покроют θ, равны γ; γ – мера доверия вычисленной оценке $\tilde{\theta}_n$.

Доверительным интервалом называется найденный по данным выборки $(\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta)$, который покрывает параметр θ с заданной надежностью γ. γ обычно принимают равной 0,95; 0,99; 0,999. Это означает, что если сделано много выборок, для 95% из них ($\gamma = 0{,}95$) доверительный интервал действительно покроет θ. В некоторых случаях среднее квадратическое отклонение δ ошибки изменения (а вместе с нею и самого измерения) бывает известным. Например, если изменения проводят одним и тем же прибором при одних и тех же условиях, то δ для всех изменений одно и тоже и обычно бывает известно. Имеет место утверждение. С надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x}_B - \frac{t\delta}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_B + \frac{t\delta}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр а; точно оценки $\delta = \frac{t\delta}{\sqrt{n}}$, t определяется из $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ (по таблице). Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестными a и δ. Тогда справедливо утверждение. С надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал

$\left(\bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_B + \dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$, t_γ находится по таблице по n и γ. Для нахождения доверительного интервала для δ используется утверждение. С надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(S - Sq,\ S + Sq)$ покрывает неизвестный параметр δ; точность оценки $\delta = Sq,$ q находится по таблице по n и γ.

Тема 17. Понятие статистической гипотезы. Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона.

Если закон распределения генеральной совокупности неизвестен, но имеется основания предположить, что он имеет определенный вид А, выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону А. В такой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения. Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить что неизвестный параметр θ равен определенному значению θ_0, выдвигают гипотезу: $\theta = \theta_0$. В такой гипотезе речь идет предполагаемой величине параметра одного известного распределении. Возможны и другие гипотезы, например, о равенстве параметров двух распределений, о независимости выборок.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза.

Нулевой (основной) называю выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой. Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, возникает необходимость ее проверки. Так как проверку

производят статистическими методами, ее называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято правильное решение, то есть могут допущены ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в том, что будет опровергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята правильная гипотеза. Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через a и называть уровнем значимости. Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если, например, принять уровень значимости, равный 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).
Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно.

Статистическим критериям (критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемым значением $K_{\text{набл}}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам. После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значение критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая–при которых она принимается.

Критической областью называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Областью принятия гипотезы называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают. Если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

Критическая область и область принятия гипотезы – интервалы. Классическими точками $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр},\ k_{кр} > 0$. Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством

$K < k_{кр},\ k_{кр} < 0$. Двухсторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1,\ K > k_2, k_2 > k_1$. Для отыскания правой критической области задаются достаточно малой вероятностью – уравнением значимости a. Затем ищут критическую точку $k_{кр}$, исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение, большее $k_{кр}$, была равна a: $p(K > k_{kp}) = a$. Для каждого критерия имеются таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую этому требованию. Когда критическая точка найдена, вычисляют по данным выборок $K_{набл}$ и, если окажется, что $K_{набл} > k_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают; если же $K_{набл} < k_{kp}$, то нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу. Левосторонняя критическая область определяется: $K_{набл} < k_{kp}\ (k_{kp} < 0)$. Критическую точку находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий примет значение, меньшее k_{kp}, была равна принятому уровню значимости: $P(K < k_{kp}) = a$. Двухсторонняя критическая область определяется неравенствами $K < k_1, K > k_2$. Критические точки находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы сумма вероятностей того, что критерий примет значение, меньшее k_1 или больше k_2 была равна принятому уровню значимости: $P(K < k_1) + P(K > k_2) = a$. Критические точки находят по соответствующим таблицам.

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения приводиться при помощи специально подобранной случайной величины–критерия согласия. Применим критерий Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Как и любой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений. Пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение .

x_i	x_1	…	x_s
n_i	n_1	…	n_s

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n_i. При уровне значимости a требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину $X^2 = (n_i - n'_i)^2 / n_i$. При $n \to \infty$ закон распределения этой случайной величины независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремиться к закону распределения X^2ck степенями свободы. Число степеней свободы находят $k = S - 1 - r$, $S -$ число частичных интервалов выборки, $r -$ число параметров предполагаемого распределения. Если предполагаемое распределение – нормальное, то $r = 2, k = S - 3$. Правостороння критическая область определяется неравенством $X^2 > X^2{}_{kp}(a,k)$, а область принятия нулевой гипотезы – неравенством $X^2 < X^2{}_{kp}(a,k)$. Обозначим значения критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $X^2{}_{набл}$. Если $X^2{}_{набл} < X_{kp}{}^2$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, если $X^2{}_{набл} > X_{kp}{}^2$ – нулевую гипотезу отвергают.

Тема 18. Системы случайных величин. Корреляционная зависимость. Линейная корреляция. Расчет прямых регрессии.

Часто приходиться иметь деле о с более сложной зависимостью, чем функциональная. Так, например, связь между осадками и урожайностью, связь между толщиной снежного покрова зимой и объемом стока воды весной. Здесь каждому значению одной величине соответствует множество возможных значений другой. Подобного рода зависимости относят к корреляционным. Две случайные величины Х и У находят в корреляционной зависимости, если каждому значению любой из этих величин соответствует определенное распределение вероятностей другой величины. Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Х при $У = у$

(у– определенное возможное значение У) называется сумма произведений возможных значений величины X на их условные вероятности: $M_y(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_y(X = x_i)$, $P_y(X = x_i)$ – вероятность равенства $X = x_i$ при условии, что $У = y$. Для непрерывных величин $M_y(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_y(x)dx$, $\varphi_y(x)$ – плотность вероятности X при условии $У = y$. Условное математическое ожидание $M_y(X)$ есть функция от у: $M_y(X) = f(y)$, которая называется функцией регрессии величины X на величину У. Аналогично определяется условное математическое ожидание случайной величины У и функция регрессии У на X: $M_x(У) = g(x)$. Уравнение $x = f(y) (y = g(x))$ называется уравнение регрессии X на У(У на X), а линию на плоскости, соответствующую этому уравнению, называется линией регрессии. Линия регрессии У на X(X на У) показывает, как в среднем зависит У от X (X от У). Замену связи (зависимости) двух случайных величин X и У принимают безразмерную величину $r = \frac{M(XУ) - M(X) \cdot M(У)}{\delta(X) \cdot \delta(У)}$ или $r = \frac{\mu}{\delta_1 \delta_2}$, где $\mu = M(XУ) - M(X) \cdot M(У)$, $\delta_1 = \delta(X)$, $\delta_2 = \delta(У)$, $r -$ коэффициент корреляции. Случайные величины X и $У$ называется некоррелированными, если $r = 0$, и коррелированными, если $r \neq 0$. Например, независимые случайные величины X и У являются некоррелированными, так как $M(XУ) - M(X) \cdot M(У) = 0, r = 0$. коэффициент корреляции случайных величин, связанных линейной зависимостью $У = AX + B$, равен ± 1 $r = 1$, если A>0, $r = -1$, если A<0).

Свойства:

Если X и У– независимые случайные величины, то $r = 0$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

$|r| \leq 1$. При этом, если $|r| = 1$, то между случайными величинами X и У имеет место функциональная, а именно линейная, зависимость.

Коэффициент корреляции характеризует относительную величину отклонения математического ожидания $M(MУ)$ от произведения математических ожиданий $M(X)$ и $M(У)$ величины Х и У. Так как это отклонение имеет место только для зависимых величин, то коэффициент корреляции характеризует тесноту зависимости между Х и У. Корреляционная зависимость между случайными величинами Х и У называется линейной корреляцией, если обе функции регрессии $f(y)$ и $g(x)$ являются линейными. В этом случае обе линии регрессии являются прямыми; они называются прямыми регрессии.

Расчет прямых регрессии. Пусть проведено n опытов, в результате которых получены следующие значения системы величин $(X, У):(x_i, y_i), i = 1,2,...,n$. За приближенные значения $M(X), M(У)$, $D(X), D(У)$ принимают выборочные значения $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$,

$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x}_B)^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_1 - \bar{y}_B)^2$. Оценкой для μ служит величина $\mu_B = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)(y_i - \bar{y}_B)$. Тогда приближенные значения коэффициента корреляции и коэффициентов регрессии следующие: $r = \frac{\mu_B}{S_1 S_2}$, $\rho(У/X) = \frac{\mu_B}{S_1^2}$, $\rho(X/У) = \frac{\mu_B}{S_2^2}$, а выборочные уравнения прямых регрессии: $y - \bar{y}_B = \frac{\mu_B}{S_1^2}(x - \bar{x}_B)$, $x - \bar{x}_B = \frac{\mu_B}{S_2^2}(y - \bar{y}_B)$.

3. Методические рекомендации

3.1. Методические рекомендации профессорско-преподавательскому составу по проведению аудиторных занятий

В процессе обучения студент должен прослушать определенный теоретический материал и закрепить этот материал на практических занятиях, а также при выполнении домашних самостоятельных работ.

Практическое занятие должно начинаться с проверки домашнего задания. При этом допустимо некоторые, наиболее сложные задачи, с которыми не справилась большая часть студентов решить на доске. Тем самым создается прочная база для дальнейшего обучения.

При изучении новой темы необходимо постоянно обращаться к теоретическому материалу. Иногда теория оказывается заданной на самостоятельное изучение. В этом случае преподаватель-практик обязан помочь студенту в выборе литературы, разъяснить трудные и непонятные места в тексте, ответить на все вопросы. Переходить к практическим задачам возможно только после полного усвоения теории. Недопустимо повторять чтение лекции на практике, если студенты забыли конспекты лекций и не помнят их суть.

При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то необходимо помочь ему выбрать наиболее рациональный. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием.

Для оптимизации учебного процесса и развития практических навыков овладения математикой весьма эффективным является проведение кратких самостоятельных работ, как по практическому, так и по теоретическому материалу. При этом целесообразно формулировать вопросы по теории таким образом, чтобы для ответа не требовались долгие и сложные доказательства и выводы. Такая форма контроля позволяет выявить наличие и прочность базовых знаний по изучаемой теме. Аналогично, практические задания должны быть составлены предельно просто и ясно. При проведении таких кратких работ студенты не должны пользоваться никаким справочным материалом.

В конце занятия необходимо подвести итог, объявить тему и план следующего занятия, задать домашнее задание, указав литературу, которой желательно воспользоваться при его выполнении.

3.2. Методические рекомендации преподавателям и студентам по проведению и выполнению лабораторных работ

В настоящее время трудно представить себе любую отрасль современной науки и промышленного производства без четкого налаженной системы применения основных положений теории вероятностей и математической статистики. Умение правильно обработать полученные результаты с помощью методов математической статистики является одним из важнейших элементов подготовки студентов видов. Так, например, подготовка специалиста – социолога предполагает обучение студента самостоятельно проводить социологические исследования с последующим анализом и интерпретацией полученных данных. В наиболее общем виде социологическое исследование можно определить как систему логически последовательных методологических, методических и организационно-технических процедур, связанных между собой единой целью: получить достоверные данные об изучаемом явлении или процессе для их последующего использования в практике социального управления. Социологическое исследование включает несколько последовательных, сменяющих друг друга организационно автономных и вместе с тем содержательно взаимосвязанных этапа:

подготовку исследования;

сбор первичной социологической информации;

подготовку собранной информации к обработке и ее обработку;

анализ отобранной информации, подготовку отчета по итогам исследования, формулирование выводов и рекомендаций.

Участие математических методов на каждом из эти этапов несомненно. Так, для подготовки исследования, после определения цели, объекта и предмета исследования, необходимо установить, математически вычислить объем выборки, количество представляющей генеральную совокупность. Также, необходимо, проанализировав задачи исследования, определить качественные характеристики выборки. При проведении второго этапа, необходимо строго придерживаться условия равномерности и достоверности.

На третьем этапе информация подвергается непосредственно математической обработке. Именно этот этап выделен в отдельную дисциплину и изучается при помощи лабораторных работ.

Теория вероятностей и математическая статистика изучается студентами в процессе прослушивания курса лекций. На практических занятиях по решению задач в ходе самостоятельной работы студентов. Составной частью изучения указанного выше раздела курса «Математика» является выполнение лабораторных работ. Выполнение лабораторных работ позволяет студентам понять сущность используемых методов, а так же обрабатывать экспериментальные результаты и оценивать степень их достоверности. Цель лабораторного практикума – научить студентов самостоятельно производить необходимые расчеты, а также ознакомить с основными методами измерений.

Для подготовки специалистов (специальности 040201, 080401) в курсе математики предусмотрено проведение пяти лабораторных работ: «Метод наименьших квадратов», «Точечные оценки параметров распределения», «Интервальные оценки параметров распределения», «Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона», «Элементы теории корреляции». Каждая из этих работ освещает определенный аспект исследования. Так, работа «Точечные оценки параметров распределения» позволяет по имеющейся выборке установить, либо опровергнуть близость распределения генеральной совокупности к тому или иному закону распределения, что позволяет делать дальнейшие выводы и проводить вычисления в соответствии с установленным законом. Работа «Интервальные оценки параметров распределения» позволяет с заданной точностью установить границы важнейших математических характеристик генеральной совокупности. При приведении работы «Проверка статистических гипотез» с указанной достоверностью устанавливается принадлежность генеральной совокупности к определенному виду распределения. При выполнении лабораторной работы «Элементы теории корреляции» студенты учатся определять силу и тесноту зависимости между двумя факторами, что является чрезвычайно важным для дальнейшего исследования и последующих выводов. Наконец «Метод наименьших квадратов» позволяет установить не только силу, но и характер этой зависимости, даже в случае, когда зависимость является линейной.

Задачей преподавателя при проведении лабораторных работ по математике является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение студентов к самостоятельному анализу результата, определение места математических исследований в дальнейшей профессиональной работе будущего специалиста.

Прежде чем преступить к выполнению лабораторной работы, студенту необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующем данной теме; разобраться в решение нулевого варианта в данной лабораторной работе, который будет предоставлен в распоряжение студента; просматривать задача практических занятий посвященных теме и являющихся фрагментами лабораторной работы; иметь в наличие статистические таблицы и калькулятор.

Выполнение лабораторной работы целесообразно разделить на несколько этапов:

1) Формулировка и обоснование проблемы исследования;
2) Определение цели, объекта и предмета исследования;
3) Логический анализ основных понятий;
4) Формулировка гипотез исследования;
5) Определение математического аппарата, применительно к данному исследованию;
6) Проведение вычислений с использованием выбранных формул;
7) Анализ результата;
8) Выводы.

3.3. Методические указания студентам по выполнению домашних, индивидуальных заданий и контрольных работ

В последние годы отмечается тенденция снижения аудиторной нагрузки и увеличения доли самостоятельной подготовки студентов.

Самостоятельная работа студентов отражает степень познания материала, глубины знаний, освоение умений и способность применения усвоенного материала. Студент учится, когда работает сам – решает задачи, самостоятельно составляет математическую модель объекта или явления, применяет известный теоретический материал, использует аппарат математики.

Развить творческие способности помогут задания, требующие нестандартных решений, постановки новых проблем и поиск путей их выполнения, то есть когда студент сталкивается с задачами, на которые у него нет готовых ответов. В такой ситуации он вынужден сам искать пути решения, размышлять, самостоятельно добывать знания.

Педагогическая эффективность самостоятельной работы зависит от качества руководства ею преподавателем, четкости и сложности заданий, которые он разрабатывает, рациональных приемов интеллектуального труда, который надо вложить в их выполнение. Большую роль играет четкое и полное изложение преподавателем теоретического материала, необходимого для каждого конкретного задания, наблюдение за ходом выполнения работы, своевременной помощи в преодолении трудностей, исправлении ошибок, подведении итогов, анализе общей оценки результатов.

В случае домашней работы, роль преподавателя ограничивается общими разъяснениями, возможно, демонстрацией похожих заданий, предостережения от типичных ошибок. Для успешной домашней работы студент должен быть обеспечен методическим материалом.

Если правильно разделить материал на небольшие модули, охватывающие отдельные темы, по каждому разделу предложить отдельное методическое пособие, то выполнение домашней работы существенно упроститься, а значит, увеличится и эффективность усвоения знаний.

Можно рекомендовать следующую схему подготовки и выполнения домашнего задания:

Проанализировать все задания в целом, определить раздел (или разделы) к которым относится материал;

Выделить теоретический материал, относящийся к этим разделам. Проверить наличие лекций по данному разделу, убедиться, что имеются в наличии учебники или методические указания по вопросам, не охваченным в лекциях;
Выполняя задания, следует сопровождать их подробным описанием, выкладками, чертежами, ссылками на соответствующие теоремы и формулами;
В конце решения необходимо написать ответ, в соответствии с формулировкой задания.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ, КОНТРОЛЬНЫХ, САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

4.1. Расчетно-графические работы (РГР) (специальность 080401– товароведение и экспертиза товаров)

Расчетно-графическая работа №1 по теме «Линейная алгебра».
Вариант 0.

1. Дана система линейных алгебраических уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -8. \end{cases}$$

Решить систему: а) методом Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

2. Дан определитель: $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -8 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Вычислить: а) методом разложения по элементам строки (столбца); б) методом накопления нулей ниже главной диагонали.

3. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $A^T \cdot B - B^2 + 2E \cdot$

4. Дана система: $\begin{cases} x + 2y - 3z + t = 1 \\ 2x - y - z - 2t = -1 \\ 3x + y + 4z - t = 0 \\ -x + 3y - 6z + 3t = 2 \end{cases}$. Найти общее и частное решения системы.

5. Решить однородную систему: $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -3 - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

6. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы

матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. При заданном векторе-плане $\vec{q} = (30, 40, 35, 60)$. Найти затраты сырья каждого вида.

8. Затраты четырех видов сырья на выпуск четырех видов продукции характеризуется матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 9 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица себестоимости сырья и его доставки (соответственно, первая и вторая строки). Найти общие затраты на сырье и его перевозку для каждого вида продукции.

9. Ниже приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.)

№	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		O_1	O_2		
1	Q_1	5	7	70	100
2	Q_2	6	10	140	200

Требуется: а) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность; б) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 100% и 50% соответственно.

Расчетно-графическая работа №2
на теме «Функции и их производные»

1. Вычислить предел: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+2)^2}{3n(n+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 6x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{4x+1}$;

2. Исследовать функцию на непрерывность, построить график: а) $y=\dfrac{1}{6x-3}$; б) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\le 0\\ 2x^2, & x>0\end{cases}$.

3. Издержки по приготовлению партии деталей определяется по формуле: $y=kx+b$, где х– объем партии, причем k и b различны для двух вариантов технологического процесса: $\begin{cases}y=0{,}7x+60\\ y=0{,}9x+40\end{cases}$. Требуется: а) построить графики функций; б) провести экономический анализ; в) найти себестоимость продукции при $x_1=75,\ x_2=150$ для обоих вариантов соответственно.

4. Зависимость уровня потребления у (усл.ед.) некоторого товара от уровня дохода семьи х (усл. ден.ед.) выражается функцией у (усл.ед.) некоторого вида товара от уровня дохода семьи х (усл.ден.ед.) выражается функцией $y=3{,}9-\dfrac{178}{x+10}$. Построить график этой зависимости, провести экономический анализ, вычислить уровень потребления при $x_0=160$.

5. Найти производную y' а) $y=e^{2x^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sin 2x}$;

б) $y=arctg^2\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)-4^x\cdot\sqrt[3]{2x+3}$.

6. Вычислить предел, используя правило Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{3}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctgx}{3x}$.

7. Исследовать функцию, построить график: а) $y=6x-8x^3$; б) $y=e^{\frac{x}{x-1}}$.

8. Найти максимальную прибыль, если доход и издержки определяется соответственно формулами: $R(q)=q^2+70q,\ C(q)=q^3-23q^2-170q+6750$.

9. Функция полных затрат имеет вид $C(q)=q^3-3q^2+25q$ (ден.ед.), где q – объем производимой продукции (в усл.ден.ед.). Рассчитать эластичность функции полных затрат и найти значение показателя эластичности для $q_1=5,\ q_2=1$. Дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

РГР № 3

по теме «Неопределенный интеграл».

Вариант 0.

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sin^2(2+7x)}$;

2. $\int \frac{e^{arctg\,x}}{1+x^2}$;

3. $\int x \cdot 2^{3x^2}\,dx$

4. $\int \sqrt[4]{8-7x}\,dx$;

5. $\int \frac{\tilde{o}^3+4}{x+1}dx$;

6. $\int \frac{5x^2+1}{x^2+1}dx$;

7. $\int \frac{dx}{x^2+5x+26}$;

8. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

9. $\int arctg\,6x\,dx$;

10. $\int (4x+2)\cos x\,dx$;

11. $\int x^2\sin 5x\,dx$;

12. $\int xe^{-4x}dx$;

13. $\int \frac{\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$;

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-4}}$;

15. $\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$;

16. $\int \frac{dx}{(x+3)(x^2+3)}$;

17. $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)(x^2+1)}$;

18. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;

19. $\int \cos 8x\cos 6x\,dx$

20. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

21. $\int tg^3 x\,dx$

22. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,dx$;

23. $\int \sin^2 4x\,dx$;

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$;

25. $\int \frac{x^4-1}{x(x+4)}$;

26. $\int x^2\ln(x+2)\,dx$

27. $\int \frac{\cos x}{e^{3x}}dx.$

РГР №4

Расчетно-графическая работа №4
по теме «Дифференциальные уравнения»

1. Найти частное решение уравнения:
   а) $y'x = \dfrac{y}{\ln x}$, $y(e) = 1$; б) $\sin y \cos x dx = \cos y \sin x dx$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. Найти общее решение уравнения: а) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; б) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.
3. Найти общее решение: $x'y - y = x^2 \cos x$.
4. Найти общее решение: $(x - 3)y'' + y' = 0$.
5. Найти частное решение: $2yy'' = (y')^2$, $y(-1) = 4$, $y'(-1) = 0$.
6. Найти общее решение: $y''' = \cos\dfrac{x}{2} + e^x$.
7. Найти общее решение: $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' = 0$.
8. Найти частное решение: $y'' - 2y = xe^{-x}$, $y(o) = 0$, $y'(0) = 1$.
9. Найти общее решение методом вариации постоянных $y'' + y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$.
10. Тело движется прямолинейно с ускорением пропорциональным произведением скорости v на время t. Установить зависимость между скоростью и временем, если $t = 0$, $м = 0_0$.

Расчетно-графическая работа №5
по теме «Ряды»

4. Исследовать сходимость: а) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{6n+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+5}$;
   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^3}{n!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sqrt{n}}{n+4}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n++4}}$.
5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.
6. Определить область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$.
7. Найти область сходимости степенного ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 4^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)}{n^3}$.
8. Разложить функцию в ряд Маклорена: а) $y = \cos^2 x$; б) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{4n^2}$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.
10. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \ln(x+2)$ по степеням $x - 1$.

11. Вычислить $\int_0^1 arctgx^3dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.
12. Вычислить $\sqrt{27}$ с точностью до 10^{-3}.
13. Разложить функцию в ряд Фурье: $y = x + 1,\ x \in (-\pi, \pi)$.
14. Найти три первых (отличных от нуля) члена разложения в степенной ряд решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения: $y' = e^x + y^2,\ y(0) = 0$.

Расчетно-графическая работа №6
По теме «Кратные и криволинейные интегралы»

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^4 dy \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x_1\ y)dx$.
2. Вычислить $\iint_G (x+y)dxdy,\ G: y = e^x,\ y = e^{-x}, x = 1.$
3. Вычислить $\iiint_V z\,dxdydz,\ V: x^2 + y^2 = 1, z = 0,\ z = 2.$
4. Вычислить $\int_e x\,dy - ydx,\ e: \begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ от точки $A(0, 0)$ до $B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.
5. Вычислить $\int x^2yds,\ \ell$ – контур треугольника $A0B, A(0, 3), 0(0,0), B(2, 0).$
6. Вычислить переходом к полярным координатам: $\iint_G (x^2+y^2)dxdy, G: x^2+y^2 \le 2x$.
7. Найти площадь области, ограниченной линиями $y = x^2, 4y = x^2, x = 2, x = -2,$ используя двойной интеграл.
8. Применяя формулу Грина, вычислить $\int y^2dx + (x+y)^2dy$ по треугольнику ABC, $A(1,0), B(1, 1), C(0, 1).$
9. Найти двумя способами (с помощью двойного интеграла и с помощью тройного интеграла) объем тела, ограниченного $z = x + y, x + y = 1, x = 0,$ $y = 0, z = 0.$

Расчетно-графическая работа №7
по теме «Случайные события».

1. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать парасоль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а) если цифры в коде не повторяться; б) если повторяются ?

2. Два велосипедиста имеют одинаковую вероятность приехать к указанному месту в любой момент в течении 30 мин. Определить вероятность того, что время ожидания другого будет не более 5 мин.
3. Две из десяти лампочек- перегоревшие. Определить вероятность того, что из пяти взятых наугад лампочек одна перегоревшая.
4. В стройотряде 70 первокурсников и 30 студентов второго курса. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса 5%. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.
5. Завод точного машиностроения в среднем в год выпускает 5% приборов, на которые поступают рекламации из-за низкого качества. Найти вероятность того, что на 2000 приборов поступит 100 рекламаций.
6. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из трех телевизионных каналов, равна 0,08. Предполагается, что эти события – независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем трем каналам; б) только по одному каналу; в) хотя бы по одному из этих каналов ?
7. По данным длительной проверки качества выпускаемых кирпичей, количество пригодных составляют 93%. Найти вероятность того, отклонение частоты брака не будет превышать по абсолютному значению 0,01 среди 6000 кирпичей.
8. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно четырем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) пять вызовов; б) менее пяти вызовов; в) не менее пяти вызовов.
9. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что они нечетные и разные. Какова вероятность того, что номер набран правильно?
10. Найти наивероятнейшее число отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех изменениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна 2/3, а отрицательной – 1/3.

Расчетно-графическая работа №8
по теме «Случайные величины».

1. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Sony». Наугад для осмотра выбрано 3. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Sony» среди 3 отобранных.
2. Случайная величина X задана функцией распределения: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{5}, & 0 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$.

Найти вероятность того, что в результате независимых испытаний Х примет значение: а) меньше 1; б) меньше 3; в) не менее 3; г) не менее шести; д) в интервале (1, 3).

3. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины Х задана на всей оси ОХ равенством $f(x)=\dfrac{2c}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр С.

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела; найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

5. Независимые случайные величины Х и У заданы таблицами распределения:

Х	–2	–1	0	1	3
Р	0,1	0,2	0,25	0,35	0,1

У	–3	0	1	2
Р	0,1	0,2	0,4	0,3

Изменения каждой из этих случайных величин более рассеяны от их средних значений? Найти М(Х+У), Д(Х+У).

6. Случайная величина Х задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0< x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$. Найти плотность вероятности $f(x)$; математическое ожидание М(Х); дисперсию Д(х); вероятности Р(Х=0,5), Р(Х<0,5), Р(0,5≤ Х<1); построить графики $f(x),\ F(x)$.

7. Распределение веса консервных банок, выпускаемых заводом, подчиняется нормальному закону со средним весом 250г и средним квадратическим отклонением, равным 5г.Определить вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8г.

8. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден.ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден.ед. найти вероятность того, что цена акции: не выше 15,3 ден.ед.; не ниже 15,4 ден.ед; от 14,9 до 15,3 ден.ед. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

9. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличаются от истинного не более чем на 2 сек.

10. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $f(x)=0{,}002\ell^{-0{,}002t}(t>0)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает 1000час.

11. Среднее значение длины детали 50 см., дисперсия 0,1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 49,5 см. и не более 50,5 см.

4.2. Тексты контрольных работ (специальность 080401)

Контрольная работа №1

по теме «Векторная алгебра».

1. Дан параллелограмм АВСД, 0– точка пересечения его диагоналей, Е и F – соответственно середины сторон ВС и АД. Построить векторы $\vec{AB}+\vec{ДC}$, $\vec{A0}-\vec{AB}$, $\vec{EД}+\vec{FA}+\vec{F0}$, $\vec{AB}+\vec{BE}+\vec{OE}+\vec{CD}$.
2. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен $\vec{a}=(4,-2,-3)$ и $\vec{в}=(0,1,3)$ и образует с ОУ тупой угол. Зная, что $\left|\vec{x}\right|=26,$ найти его координаты.
3. Сила $\vec{F}=(2,2,9)$ приложена к точке А(4,2,–3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки С(2,4,0).
4. Вычислить объем параллелепипеда $OABC0_1A_1B_1C_1$ в котором даны три вершины нижнего основания 0(0, 0, 0), А(2, -3, 0), С(3, 2, 0) и вершина $B_1(3,0,4)$ верхнего основания, лежащая на боковом ребре BB_1.
5. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий. Основные производственно-экономические показатели заданы векторами: $\vec{g}=(10,20,60,80)-$ вектор ассортимента (количество изделий); $\vec{S}=(4,3,3,2)-$ вектор расхода сырья (кг/изд.), $\vec{t}=(2,4,4,6)-$ вектор затрат рабочего времени (ч/изд.); $\vec{P}=(30,50,40,50)-$ ценовой вектор (ед/изд.).

Требуется определить ежесуточные показатели предприятия: S (расход сырья), Т (затраты рабочего времени), ρ (стоимость выпускаемой продукции).

Вариант №2

1. Дан параллелепипед АВСД$A_1B_1C_1Д_1$, $\vec{AA_1}=\vec{r}$, $\vec{A_1C}=\vec{S}, \vec{AB}=\vec{t}$. Выразить векторы $\vec{B_1Д}, \vec{AB}, \vec{AД}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$ через $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$.
2. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{в}=(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6.$
3. Векторы $\vec{a}, \vec{\hat{a}}$ составляет угол в 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{в}$, $3\vec{a}+2\vec{в}$, если $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{в}\right|=5$.

4. Вычислить объем пирамиды ОАВС, если $0(0,0,0),\ A(1,\ 2,\ 1),\ B(3,-2,0),\ C(4,\ 1,-1)$.
5. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий. Основные производственно-экономические показатели заданы векторами $\vec{g}=(30,30,50,70)$ - вектор ассортимента (количество изделий); $\vec{S}=(5,2,3,1)$ – вектор расхода сырья (кг/изд.), $\vec{t}=(2,\ 3,\ 2,\ 4)$ – вектор затрат рабочего времени (ч/изд.); $\vec{P}=(40,\ 50,\ 40,\ 30)$ – ценовой вектор (ед/изд.). Требуется определить ежесуточные показатели предприятия: S (расход сырья), Т (затраты рабочего времени), ρ (стоимость выпускаемой продукции).

Вариант №3

1. В ромбе АВСД векторы $\vec{AC}=\vec{\ell}_1,\ \vec{BД}=\vec{\ell}_2$ взяты за базисные. Найти координаты векторов $\vec{AB},\ \vec{BC},\ \vec{ДA}$ в этом базисе.
2. Даны вершины треугольника $A(3,\ 2,-3),\ \ B(5,1,-1), C(1,-2,1)$. Определить внешний угол при вершине А.
3. Найти, пользуясь векторным произведением векторов, расстояние от точки $C(3,\ 2,-2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1,\ 2,-3)$ и $B(5,\ 2,\ 0)$.
4. Проверить компланарны ли векторы: $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{r}=7\vec{a}+14\vec{b}-13\vec{c}$, где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - взаимно перпендикулярные единичные векторы.
5. В условиях задачи 5 варианта 1 $\vec{q}=(20,10,40,60)$, $\vec{S}=(4,\ 2,3,4)$, $\vec{t}=(3,\ 2,\ 4,\ 4)$, $\vec{p}=(50,60,40,60)$. Найти S,T,P.

Вариант №4

1. В тетраэдре АВСД даны ребра $\vec{AB}=\vec{b},\ \vec{AC}=\vec{c},\ \vec{AD}=\vec{d}$. Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра и медиану ДМ грани ВСД.
2. Даны три силы $f_1=(2,-1,3),\ f_2=(1,4,-3),\ f_3=(-6,-4,2)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигалась прямолинейно, перемещается вдоль вектора $\vec{r}=(-2,-3,4)$.
3. Параллелограмм АВСД построен на векторах $\vec{AB}=(7,\ 1,-3),\ \vec{AD}=(0,\ 1,\ 0)$. Вычислить высоту СН параллелограмма.
4. Найти объем тетраэдра АВСД, $A(1,\ 1,\ 1),\ B(2,\ 0,\ 0), C(1,\ -3,\ 2),\ Д(4,\ 3,\ 3)$.
5. В условиях задачи 5 вар 1 $q=(40,\ 20,\ 10,30)$, $\vec{S}=(4,\ 5,\ 5,\ 3),\ \vec{t}=(4,\ 2,\ 3,\ 2)$, $\vec{P}=(40,\ 50,\ 60,\ 40)$. Найти S, T, P.

Контрольная работа №2

по теме «Элементы аналитической геометрии на плоскости»

Вариант №1

1. Пользуясь теоремой, обратной теореме Пифагора, убедиться в том, что треугольник АВС, заданный координатами вершин А(1,1), В(2, 5), С(-6, 7), является прямоугольным. Указать вершину прямого угла.
2. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 и 6, приняв большую диагональ за ось ОХ, меньшую – за ось ОУ.
3. Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями $y-2=0, 2x-y-12=0$, $4x-11y-30=0$.
4. В треугольнике с вершинами А(-2, 0), В(2, 6), С(4, 2) приведены высоты ВД и медиана ВЕ. Написать уравнения стороны АС, медианы ВЕ, высоты ВД.
5. Определить и построить линию $x=-\sqrt{9-y^2}$.

Вариант №2

1. Сторона квадрата равна 8. Определить координаты его вершин, приняв за оси координат прямые, соответственно перпендикулярные смежным сторонам квадрата и пересекающие его в центре.
2. Даны точки 0(0, 0) и А(-3, 0). На отрезке ОА построить параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке В(0, 2). Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.
3. Написать уравнение прямых, проходящих через начало координат под углом 45^0 к прямой $y=4-2x$.
4. Составить уравнения сторон треугольника АВС, если известны координаты А(-5, 5), В(3, 1), координаты точки пересечения высот (2, 5).
5. Определить и построить линию $9x^2+4y^2-36x-64y+256=0$.

Вариант №3.

1. Даны точки M(5, -3) и N(x, y), расстояние между которыми равно 2 единицам. Определить координаты точки N , зная, что M и N лежат на прямой, параллельной оси ординат.
2. Через точку M(4, -3) проведена прямая так, что площадь треугольника, образованного ею и его осями координат, равна 3 квадратным единицам. Найти уравнение этой прямой.
3. Даны точки N(4, 3), M(5, 0), P(-5, -6), Q(-1, 0). Показать, что четырехугольник MNPQ является трапецией. Найти острый угол между диагоналями и написать уравнения высоты трапеции.
4. Найти уголковой коэффициент прямой: $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1-6t \end{cases}$.
5. Определить и построить линию $x^2-4x+8y=36$.

Вариант № 4

1. Вычислить длины медиан треугольника, зная координаты его вершин A(3, -2), B(5, 2), C(-1, 4).
2. Треугольник задан уравнениями сторон: $5x-2y+y=0,\ 4x-y+3=0,\ x+3y-7=0$. Написать уравнение прямых, проходящих через вершины параллельно противоположным сторонам.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,\ 2)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=4t \end{cases}$.
4. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $P(2,\ -8)$ и $Q(-1,\ 7)$.

Контрольная работа №3

по теме «Функции нескольких переменных в экономике»

Вариант №1

1. Дана функция $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$. Вычислить частные производные первого и второго порядков в точке A(-2, -1).
2. Дана функция спроса $Д=200-4p+5P_A+0{,}001y$, где p – цена данного товара, P_A – цена альтернативного товара, y– доход потребителя. Найти коэффициенты эластичности при $p=20$, $P_A=25,\ y=1000$ и пояснить их экономический смысл.
3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара X на товар У для функции полезности $\mu=\ln(xy)+\ln(y+x)$, где x- количество товара $X, y-$ количество товара У в точке A(4, 13).
4. Производственная функция задана выражением $Q=2KL-3L^2-2K^2+70K$, где Q– количество произведенных товаров и услуг, K и L – капитал и приложенный труд. Найти оптимальные величины K и L, при которых выпуск продукции максимален.

Вариант №2

1. Дана функция $Z=x\sin y+y\sin x$. Вычислить частные производные первого и второго порядка в точке $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.
2. Дана функция полезности $\mu=\frac{x}{x+y}$, где x– количество товара X, y – количество товара У. Требуется оценить изменение полезности, когда x изменяется от $x_1=90$ до $x_2=93$, а y от $y_1=150$ до $y_2=147$. Пояснить экономический смысл решения.
3. Дана производственная функция $Q=20\sqrt{L}\cdot\sqrt{K}+160\sqrt{L}.$ Вычислить предельный продукт труда при $L=16,100,\ 400$ и предельный продукт капитала при $K=10000.$

4. Найти максимальный объем производства товаров Q_1 и Q_2, если их цена соответственно $P_1 = 110, P_2 = 70$, а функция издержек $C = 3Q_1^2 + 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2$.

Вариант №3

1. Дана функция $Z = x^2 + y^2 - e^{xy}$. Найти частные производные первого и второго порядков в точке А(0, 2).
2. Дана функция спроса $Д = 500 - 5p - 3P_A + 0{,}003y$, где $p -$ цена данного товара, $P_A -$ цена альтернативного товара, у – доход потребителя. Найти коэффициенты эластичности при $p = 15,\ P_A = 20$, $y = 1000$ и пояснить их экономический смысл.
3. Задана производная функция $Q = 100L + 2\sqrt{LK}$. Вычислить предельный продукт труда при $L = 16, 25, 36$ и предельный продукт капитала при $K = 100$.
4. $Q = xy + (50 - x - y)\cdot(x + y)$ – количество продукции, выпущенной некоторой фирмой; х, у – затраты ресурсов двух видов. Найти максимальный выпуск продукции при соответствующих затратах ресурсов.

Вариант №4

1. Дана функция $Z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$. Вычислить частные производные первого и второго порядков в точке А(1, 0).
2. Задана функция полезности $u = \ln\frac{5x}{y}$, где $x -$ количество товара Х, у – количество товар У. Требуется изменение полезности, когда х изменяется от $x_1 = 120$ до $x_2 = 125$, а y $y_1 = 50$ до $y_2 = 45$. Пояснить экономический смысл решения.
3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара Х на товар Y для функции полезности $u = 2\sqrt{xy}$, где х– количество товара Х, у–количества товара Y в точке А(9, 16).
4. Фирма производит 2 вида товаров Q_1 и Q_2 продает их по цене 800 и 600 у.е. соответственно. Функция затрат имеет вид: $C: 3q_1^2 + 4q_1q_2 + 2q_2^2$. Найти объем выпуска товаров q_1 и q_2, при котором прибыль, получаемая фирмой, максимальна.

Контрольная работа №4
по теме «Определенный интеграл в экономике»
Вариант №1

1. Найти объем произведенной продукции за время $t = 4$час, если производительность труда задана функцией $f(t) = -t^2 + 8t$ (ед/час).
2. Найти объем продукции, произведенной за 6 лет, если функция Кобба-Дугласа имеет вид: $f(t) = (1 + t)\cdot e^{2t}$.

3. Заданы чистые инвестиции функций $J(t) = 400\sqrt{t}$ (у.е.). Требуется определить приращение капитала за 3 года.
4. Найти общее количество произведенного оборудования за 2 года, если $k =$ 5% ежегодного роста, а в начальный момент времени $t = 0$ уровня ежегодного производства оборудования составлял $y_0 = 10$ у.е.

Вариант №2

1. Найти дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 час., если производительность труда в течении дня изменяется по формуле $f(t) = -0{,}2t^2 + 1{,}8t + 2$, $t -$ время в час.
2. Найти среднее время, затраченное на освоение единого изделия в период освоения от $x_1 = 60$ до $x_2 = 70$ изделий, если функция изменения затрат времени $t = \dfrac{100}{\sqrt{x}}$.
3. Определить дисконтированный доход за 4 года при процентной ставке 10%, если первоначальный капиталовложения составили 20 млн. руб и намечается ежегодно капитал увеличивается на 5 млн. руб.
4. Задана функция чистых инвестиций $J(t) = 600\sqrt[3]{t}$. Определить, сколько лет потребуется, чтобы приращение капитала составило 4000.

Вариант №3

1. Определить выработку рабочего за третий час работы, если $f(t) = -3t^2 + 20$ $t -$ производительность труда.
2. Найти объем продукции произведенной за 10 лет, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $f(t) = (1+t)e^t$.
3. Заданы чистые инвестиции функцией $J(t) = 600\sqrt{t}$ (у.е.). Требуется определить приращение капитала за 2 года.
4. Найти общее количество произведенного оборудования за 5 лет, если $k = 8$% ежегодного роста, а $y_0 = 16$ у.е.

Вариант №4

1. Определить выработку рабочего времени за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 час, а $f(t) = -2t^2 + 16t -$ производительность труда.
2. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 45$ до $x_2 = 65$ изделий, если функция изменения затрат времени $t = 50 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$.
3. Определить дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке 8%, если первоначальные капиталовложения составили 15млн.руб. и намечается ежегодно увеличивать капитал на 3млн.руб.
4. Заданы чистые инвестиции функций $J(t) = 250\sqrt[3]{t^2}$ (у.е.). Требуется определить приращение капитала за 4 года.

Контрольная работа №5
По теме «Степенные ряды»
Вариант №1

1. Найти область сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n}$.
2. Разложить по степеням $x-1$ многочлен $y = x^2 - 2x + 1$.
3. Разложить в ряд Маклорена $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{ctg\,x}{x}\right)$

Вариант №2

1. Найти область сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{2^n}$.
2. Разложить по степеням $x+2$ многочлен $y = x^6$.
3. Разложить в ряд Маклорена $y = x\,arctgx - \ln\sqrt{1+x^2}$.
4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2 x\right)$.

Вариант №3

1. Найти область сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (x-2)^n}{4^{n+1}}$.
2. Разложить по степеням $x-2$ многочлен $y = x^3 + 4x + 2$.
3. Разложить в ряд Маклорена $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$.
4. Вычислить приближенно π с точностью до 0,0001.
5. Вычислит $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2}\right)$.

Вариант №4

1. Найти область сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3}$.
2. Разложить по степеням $x+1$ многочлен $y = x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 2$.
3. Разложить в ряд Маклорена $y = \arcsin x^3$.
4. Вычислить $\ln 1{,}4$ с точностью до 0,0001.
5. Вычислит $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4}\right)$.

Контрольная работа №6
по теме «Криволинейные интегралы»
Вариант №1

1. $\int_e \frac{ds}{x^2 - y}, \ \ell : y = 3x - 1, \ 1 \le x \le 3$.
2. $\int_e (x^2 + y^2 + z)ds, \ \ell : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = 3t \end{cases}$.
3. Вычислить $\oint xdy + ydx$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$.
4. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = 1 \ (x \ge 0, \ y \ge 0)$, если плотность в каждой точке равна квадрату ординаты.

Вариант №2

1. $\int_e (2x^2 - 3y)ds, \ \ell : y = x + 2, 0 \le x \le 3$.
2. $\int_e (x^2 y - 3x)ds + (y^2 x + 2y)dy, \quad \ell : \begin{cases} y = 2\sin t \\ x = 3\cos t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$.
3. Вычислить $\oint xdy + ydx$ по контуру, ограниченному $y = x^2, \ y = 1$.
4. Найти момент инерции относительно начала координат четверти однородной окружности $x^2 + y^2 = 1,$ лежащей в первом квадранте.

Вариант №3

1. $\int_e \frac{ds}{x - 2y}, \ \ell : y = 3x + 1, \ x \in [0, 1]$.
2. $\int_e (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy, \quad \ell : \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной стороной $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, используя криволинейный интеграл.
4. Вычислить работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + y\vec{j}$ при перемещении точки массы m из $O(0, 0)$ в $A(2, 2)$ по прямой $y = x$.

Вариант №4

1. $\int_e \frac{ds}{2x - y}, \ \ell : y = 2 - 4x, \ x \in [0, 1]$.
2. $\int_e (4 - y)dx + xdy, \ \ell : \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y^2 = x, \ x^2 = y$, используя криволинейные интеграл.

4. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки массы m из $O(0, 0)$ в $A(1, 1)$ по прямой $y = x^2$.

Контрольная работа №7

По теме «Случайные события»

Вариант №1

1. Психологами установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70% женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40% мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполонили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что ее заполнил мужчина?
2. Вероятность выхода из строя за время Т одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время Т из 100 конденсаторов выйдет из строя: а) не менее 20; б) не менее 28.
3. Из 25 студентов группы 12 занимаются научной работой на кафедре бухгалтерского учета, 7 – экономического анализа, остальные – на кафедре статистики. Какова вероятность того, что 2 случайно отобранных студента занимаются на кафедре статистики?
4. На студии телевиденья имеется 3 телевизионных камеры. Для каждой вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

Вариант №2

1. Были предложены одновременно 3 теории развития экономики, представляется равновероятными. В течении последнего года вероятность развития, которые экономика получила на самом деле, в соответствии с первой теорией была равна 0,6, а в соответствии с двумя другими – 0,4 и 0,2. Каким образом это изменяет вероятности правильности трех теорий?
2. При поступлении в университет на «хорошо» и «отлично» сдают вступительные экзамены в среднем 25% абитуриентов. В приемную комиссию поступило 1889 заявлений. Чему равна вероятность того, что хотя бы 500 человек сдали экзамены без оценки «удовлетворительно».
3. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работающих. Численность работающих – 500 чел.
4. В партии готовой продукции из 10 изделий иметься 7 изделий. Какова вероятность того, что 4 из них будут повышенного качества?

Вариант №3

1. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой составляет 20%, второй – 46%, третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей –1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.
2. Станок-автомат производит $\frac{2}{3}$ числа изделий первого сорта и $\frac{1}{3}$–второго. Что вероятнее – получить 2 первосортных изделий среди 5 наугад отобранных или 5 первосортных среди 10 наугад отобранных?
3. Разрыв электрической цепи, состоящей из двух элементов, наступает при одновременном выходе их из строя. Вероятность отказа каждого из них рана 0,2. Определить вероятность нормального функционирования электрической цепи.
4. После бури на участке между 40-м и 60-м километрам телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность тог, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километрами линии?

Вариант №4

1. В магазин поступает минеральная вода в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причем местный поставляет 40% от всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местного производителя 0,1%, для иногороднего 0,2%. Какова вероятность тог, что взятая наудачу бутылка окажется неповрежденной?
2. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов рана 0,4. Случайным образом отбирают 500 механизмов. Найти вероятность того, что число механизмов с дефектами окажется то 150 до 200.
3. Известно, что $\frac{3}{5}$ всего числа изготовленных фабрикой – изделий продукция первого сорта. Чему равна вероятность того, что в пакете из 200 изделий окажется наивероятнейшее число изделий первого сорта?
4. Из 75 лотерейных билетов, среди которых 3 выигрышных, наудачу берут 3 билета. Какова вероятность того, что все они выигрышные.

Контрольная работа №8
По теме «Случайные величины»
Вариант №1

1. Дан ряд распределения случайной величины X: Найти а) $M(X), D(X), \delta(X)$; б) $F(x)$ построить ее график.

X	23	25	28	29
P	0,3	0,2	0,4	0,1

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2, & 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$. Найти: а) $f(x)$; б) $M(X),\ D(X),\ \delta(X)$;

3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте, найти числовые характеристики.
4. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 7 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 мин.
5. Пусть Т– время, необходимое для ремонта грузового автомобиля удовлетворяет экспоненциальному распределению с параметром $\lambda=0{,}1$. Какова вероятность того, что время ремонта одного автомобиля не превышает $t=6$ час, и сколько часов в среднем затрачивается на ремонт одного автомобиля?

Вариант №2

1. Дан ряд распределения случайной величины Х: Найти а) $M(X),\ D(X),\ \delta(X)$; б) $F(x)$ построить ее график.

X	17	21	25	27
P	0,2	0,4	0,3	0,1

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2},\sin x & 0< x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$. Найти: а) б) $M(X),\ D(X),\ \delta(X)$; $F(x)$.

3. Из 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди 4 взятых наудачу. Найти математическое ожидание, дисперсию этой случайной величины и функцию распределения.
4. Производиться измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения Х подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\delta=10$ мм. Найти, вероятность того, что измерение было произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15мм.
5. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете была сделана ошибка, превосходящая 0,03А.

Вариант №3

1. Дан ряд распределения случайной величины Х:

X	60	64	67	70
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти а) $M(X),\ D(X),\ \delta(X)$; б) $F(x)$ и построить ее график.

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{\tilde{o}}{2}, & 0< x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ Найти: а) $f(x)$ б). $M(X),\ D(X),\ \delta(X)$;

3. Торговый агент имеет 4 телефонных номера потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность, того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести анкету. Найти числовые характеристики.
4. Всхожесть семян растения 50%. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что из 600 посеянных семян число взошедших будут заключено от 300 до 400 (включительно).
5. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\delta=5$ мм. Найти длину интервала в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

Вариант №4

1. Дан ряд распределения случайной величины X: Найти а) $M(X),\ D(X),\ \delta(X)$; б) $F(x)$ и построить ее график.

X	45	47	50	52
P	0,2	0,4	0,3	0,1

2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\pi\\ \cos x, & 2\pi< x\le \frac{5\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{5\pi}{2}\end{cases}$ Найти: а) $M(X),\ D(X),\ \delta(X)$; б) $F(x)$.

3. Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигает 4 либо студент отвечает неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 2/3. Составить закон распределения числа заданных студенту вопросов. Найти числовые характеристики.
4. Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в партии распределяется по закону Пуассона.
5. Среднее значение длины детали 30 см., дисперсия 0,2. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по длине не менее 29,5 и не больше 30,5см.

4.3. Тексты самостоятельных работ (специальность 080401)

Самостоятельная работа №1

Вариант №1

1. Найти $f(a)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 4,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Вычислить $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}^n$.

Вариант №2

1. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^3 + x - 1,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Вычислить $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^n$.

Самостоятельная работа №2

Вариант №1

1. $\vec{u} = (2, 1),\ \vec{v} = (1, 0).$ Найти коэффициенты разложения вектора $\vec{a} = (9, 1)$ по векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$.
2. $\vec{a} = (2, -3),\quad \vec{a} = \left(\dfrac{1}{2}, 2\right).$ При каких значениях λ векторы $\vec{p} = \lambda\vec{a} + \vec{в}$ и $\vec{q} = \vec{a} + \lambda\vec{a}$ коллинеарны?

Вариант №2

1. $\vec{a} = (2, 3)$ задан в базисе $\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2\}$. Найти координаты $\vec{a}$ в базисе $\{-\vec{\ell}_2, 4\vec{\ell}_1\}$.
2. $\vec{a} = (2, 3, -1),\ \vec{в} = (0, 1, 3),\ \vec{c} = (1, 0, -3).$ Определить, коллинеарны ли векторы $\vec{p} = \dfrac{3\vec{a} - 5\vec{в}}{2}$ и $\vec{q} = \dfrac{\vec{c} - 2\vec{a}}{2}$.

Самостоятельная работа №3

Вариант №1

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=0.$
2. При каком k система $\begin{cases} kx + y = -1 \\ 4x + ky = 6 \end{cases}$ имеет решение?

Вариант №2

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} e^x \cos y & \sin y \\ -e^x \sin y & \cos y \end{vmatrix} = e$.

2. При каком α система имеет решение ? $\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ 2\alpha x + y = 2 \end{cases}$.

Самостоятельная работа №4

Вариант №1

1. Прямая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$. Определить направляющий вектор, вектор нормали, условный коэффициент прямой. Написать общее уравнение прямой.
2. При каком α прямые $\alpha^2 + 2y - 3 = 0$ и $x - 3\alpha y + 1 = 0$ ортогональны?

Вариант №2

1. Прямая задана точкой пересечения (0, 8) с осью OY и углом наклона к положительному лучу OX $\varphi = 30^0$. Найти направляющий вектор, вектор нормали. Записать параметрические уравнения прямой.
2. При каком λ прямые $4\lambda x + y + 4 = 0$ и $x + 4\lambda y - 5 = 0$ параллельны?

Самостоятельная работа №5

Вариант №1

1. Вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n})$.
2. Вычислить $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$.

Вариант №2

1. Вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} 2n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$.
2. Вычислить $\lim\limits_{x \to e} x \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Самостоятельная работа №6

Вариант №1

1. Исходя из определения производной, найти производную $y = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 2$.
2. Найти $ó'_ õ$ от неявной функции $x^2 + y^2 - 4xy = 0$.

Вариант №2

1. Исходя из определения из определения, найти производную $y = 2x^3 + x^2 - 4x - 1$.
2. Найти производную функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = e^{-t} \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$.

Самостоятельная работа №7

Вариант №1

1. Выполнить действия $(2+i)+\dfrac{3-i}{1+3i}$.
2. Найти $\sqrt[4]{-1}$.

Вариант №2

1. Выполнить действия $\dfrac{2}{i}+\dfrac{1+i}{4-5i}$.
2. Найти $\sqrt[3]{1+i}$.

Самостоятельная работа №8

Вариант №1

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty}\dfrac{arctg\,x}{1+x^2}dx$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y=\sin x,\ \ y=\cos x,\ x=0$.

Вариант №2

1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x^2}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $\begin{cases} x=12\cos t+5\sin t \\ y=5\cos t-12\sin t \end{cases}$

Самостоятельная работа №9

Вариант №1

1. $\acute{o}^4=\cos^2 x,\ y(0)=\dfrac{1}{32},\ \ y'(0)=0,\ \ \ y''(0)=\dfrac{1}{8},\ y'''(0)=0.$ Найти частное решение.
2. $y^{(4)}-81y=0$. Найти общее решение.

Вариант №2

1. $y'''=xe^{-x},\ \ \ y(0)=0,\ \ \ y'(0)=2,\ \ y''(0)=2$. Найти частное решение.
2. $y^{(4)}-16y=0$. Найти общее решение.

Самостоятельная работа №10

Вариант №1

1. Написать $u_{n+1},\ u_{2n},$ если $u_n=\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.
2. $S_n=\dfrac{n}{n+1}$. Найти общий член ряда и сумму ряда.

Вариант №2

1. Написать $(U_n)^2,\ \ \sqrt[n]{U_n}$, если $U_n=\left(\dfrac{2n-1}{n+2}\right)^n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Найти выражение для частной суммы ряда. В случае сходимости вычислить сумму ряда.

Самостоятельная работа №11

Вариант №1

1. Вычислить $\iint_G y \ln x dx dy,\ G: 1 \le x \le e,\quad 0 \le y \le 4$.
2. Изменить порядок интегрирования $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$.

Вариант №2

1. Вычислить $\iint_G e^x \cos y dx dy,\ G: 0 \le x \le \pi,\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.
2. Изменить порядок интегрирования $\int_1^{e} dx \int_0^{\ell u x} f(x, y) dy$.

Самостоятельная работа №12

Вариант №1

1. Сколькими способами можно составить группу школьников для участия в олимпиаде по русскому языку, если имеется 15 человек, желающих принять участие в олимпиаде, а группа от школы должна составлять 5 человек?
2. В смотре художественной самодеятельности принимает участие 10 коллективов. Сколькими способами можно определить призовую тройку коллективов?

Вариант№2

1. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого шестиугольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?
2. Наудачу взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Какова вероятность того, что в нем: а) все цифры различные; б) все цифры нечетные?

Самостоятельная работа №13

Вариант №1

1. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать в пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого пароля. С какой вероятностью можно подобрать код с первой попытки?
2. В круг радиуса 2 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

Вариант №2

1. Сколько существует способов составления списка 9 деловых звонков случайным образом. Какова вероятность того, что список окажется составленным в алфавитном порядке?
2. В круг, радиуса 3 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

Самостоятельная работа №14

Вариант №1

1. Максимальное значение плотности вероятности случайной величины X подчиняется нормальному закону и равно $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$. Найти $Д(X)$, $\delta(X)$.
2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = 0{,}04e^{-0{,}004x}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в (1, 2).

Вариант№2

1. Во сколько раз уменьшается максимальное значение ординаты нормальной кривой, если дисперсия случайной величины увеличится в 9 раз?
2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{3}{2}\sin 3x$ в $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащие $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

4.4. Расчетно-графические работы (специальность 040201)

Расчетно-графическая работа №1

По теме «Линейная алгебра с элементами векторной алгебры и аналитической геометрии»

1. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить тремя способами 1) методом Крамера; 2) матричным методом; 3) методом Гаусса. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$.
2. Вычислить определитель $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.
3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{O} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить значение многочлена $f(x)$, если $\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

5. Вычислить $2A + CB^T$, если $\grave{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. Даны векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}, \vec{d}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе; $\vec{a} = (7, 2, 1)$, $\vec{в} = (4, 3, 5)$, $\vec{c} = (3, 4 - 2)$, $\vec{d} = (2, -5, -13)\cdot$

7. Даны координаты точек $A(3, 1, 4)$, $B(6, 0, -1)$. Найти: 1) разложение $\vec{AB}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; 2) Направляющие косинусы $\vec{AB}$; 3) координаты орта $\vec{AB}$.

8. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(7, 7, 3)$ $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$. Найти: а) длины ребер A_1A_2 и A_1A_4; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) уравнение грани $A_1A_2A_3$ и ее площадь; 4) объем пирамиды; 5) уравнение и длину высоты, проведенной из A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

9. Написать уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4, 0)$, чем от точки $B(1, 0)$.

10. Привести уравнении кривой $x + 2y^2 - 4y + 4 = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $x - 2y + 4 = 0$. Построить графики кривой и прямой.

Расчетно-графическая работа №2
по теме «Введение в анализ и дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления: а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x}{-5x^2 + x - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\ln(x+4)}{ctg(x+2)}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin^2 x)}{e^{x^2} - 1}$;

   г) $\lim\limits_{x \to -1} (3 + 2x)^{\frac{5}{x+7}}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип. Построить график функций. а) $y = \dfrac{|x+5|}{x+5} - 1$; б) $y = \dfrac{2x - 4}{x + 2}$; в) $y = \begin{cases} -x, & x \le 1 \\ x^2 + 1, & x > \end{cases}$.

3. Найти y' : а) $y = 4\cdot\sqrt[4]{x} + arctg\, x$; б) $y = x^5\cdot e^x$; в) $y = \dfrac{tgx}{\ln x}$; г) $\begin{cases} x = 7 + t^2 \\ y = ctg3t^2 \end{cases}$;

   д) $y^2 + x^2 + xy + 5 = 0$.
4. Составить уравнение касательной к нормали и графику функции $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 6x - 3$ в точке $x_0 = 1$.
5. Вычислить предел функции с использованием правила Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на $[-3,\ 1]$.
7. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.
8. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$ и построить ее график.

Расчетно-графическая работа №3
по теме «Интегрирование функций одной переменной»

1. Найти неопределенный интеграл а) $\int\dfrac{x + arctg\, x}{1 + x^2}dx$; б) $\int x\cdot\ln(x^2+1)dx$;

   в) $\int x^2e^{3x}dx$; г) $\int\dfrac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}dx$; д) $\int x\sin x\cos x\, dx$; е) $\int\dfrac{x^2dx}{x^4-81}$; ж) $\int\dfrac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$;

   з) $\int\dfrac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$; и) $\int\dfrac{dx}{\sin x + tg\, x}$.
2. Вычислить определенный интеграл а) $\int\limits_0^4\dfrac{dx}{\sqrt{x}+5}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin x\, dx$.
3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость а) $\int\limits_{-3}^{5}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$; б) $\int\limits_{\ell}^{\infty}\dfrac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми $3x^2 - 4y = 0,\ 2x - 4y + 1 = 0$.
5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг OX кривой $x^2 - y = 0,\ x = -1,\ y = 0$.
6. Вычислить длину дуги кривой $x = a\cos t,\ y = в\sin t$, $t\in[0, \pi]$.

Расчетно-графическая работа №4
по теме «Функций нескольких переменных и дифференциальные уравнения»

1. Построить область определения $f(x, y) = \arccos\dfrac{3x+4y}{4}$.

2. Изобразить линии (поверхности) уровня $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$.
3. Найти частные производные первого порядка $u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$.
4. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Требуется: 1) вычислить значение функции в точке В, исходя из значения функции в точки А и заменив приращение функции на дифференциал; 2) составить уравнение касательной плоскости в точке А; 3) определить градиент в точки А. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $A(1{,}96; 1{,}04)$.
5. Исследовать функцию на экстремум $Z =| x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 17$.
6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в замкнутой области: $f(x, y) = x^2 + xy$, $Д: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$.
7. Решить дифференциальные уравнения а) $x + xy + yy'(1 + x) = 0$, б) $2x^2 dy = (x^2 + y^2)dx$; в) $y' - y\,ctg\,x = \sin^3 x$; г) $1 + (y')^2 = 2y \cdot y''$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$; д) $xy'' + y' = 4x^3$, $y(1) = \frac{1}{4}$, $y'(1) = 2$.

Расчетно-графическая работа №5
По теме «Ряды»

1. Исследовать на сходимость числовые ряды а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+6}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n^2+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{4^n+2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n+2}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$.
2. Найти точностью до 0,001 сумму ряда, предварительно доказав его сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n}{(n+2)!}$.
3. Найти радиус и область сходимости степенного ряда а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^n}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$;
4. Разложить функцию в ряд Маклорена: а) $y = \sqrt[3]{(2x+1)}$; б) $y = x \cdot cos\frac{x}{2}$.
5. Вычислить предел, разложив функцию в ряд $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - arctg\,x}{x^3}$.
6. Вычислить с точностью 0,001 $\int\limits_0^{0,1} \frac{\sin x}{x} dx$.
7. Вычислить с точностью 0,001 $\sqrt[5]{33}$.

Расчетно-графическая работа №6
по теме «Кратные и криволинейные интегралы»

1. Вычислить: а) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{0}^{1} \frac{ydx}{4+x^2}$; б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} xdy$.
2. Вычислить $\iint\limits_{Д} ydxdy, \ Д: y=x^3, \ y=2-x, \ y=0$.
3. Вычислить $\iiint\limits_{V} x^2 \sin(\pi xy)dxdydz, \ V: x=1, \ y=2x, \ y=o, \ z=0, \ z=4\pi$.
4. Переходом к полярным координатам вычислить $\iint (x^2+y^2)dxdy, \quad Д: x^2+y^2 \le 6x$.
5. Найти площадь фигуры, ограниченной $y=\frac{3}{x}, \ y=8e^x, \ y=3, \ y=8$.
6. Найти объем тела ограниченного поверхностями $x=20\sqrt{2y}, \ x=5\sqrt{2y}, \ z=0, \ z+y=\frac{1}{2}$.
7. Вычислить $\int\limits_{AB} ydx-xdy, \ AB: \begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$.
8. Вычислить $\int_L xds, \ L: x=2y+1$ от $A(1,0)$ до $B(5,2)$.

Расчетно-графическая работа №7
по теме «Случайные события»

1. В первом ящике 4 белых, 6 черных шаров; во втором– 2 белых, 4 черных; в третьем 8 белых, 5 черных, 8 красных. Из каждого ящика нужно взять шар, чтобы появление белого было наиболее вероятным?
2. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпадает одинаковое число очков.
3. Группа из 10 мужчин и 10 женщин делятся случайным образом на 2 равные части. Какова вероятность того, что в каждой части мужчин и женщин одинаковое количество.
4. В прямоугольник со сторонами 3 и 4 вписан круг, который касается больших сторон. Какова вероятность, что точка, брошенная в прямоугольник, попадет в круг?
5. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при трех испытаниях равна 0,936. Найти вероятность наступления события А при одном испытании.
6. Три стрелка стреляют в цель. Вероятность попадания равна соответственно: 0,6; 0,4; 0,8. Найти вероятность того, что будет равно 2 попадания, если стрелки стреляют одновременно.
7. Мимо остановки проезжают городские и междугородние автобусы в соотношении 5:2. Городской автобус останавливается обязательно, а

междугородний с вероятностью 0,3. Стоявший на остановке пассажир уехал. Какова вероятность, что он уехал на городском автобусе?
8. Монету бросили 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет не более 3-раз?
9. Вероятность отказа каждого из 500 механизмов 0,01. Какова вероятность, что за время работы откажется хотя бы один?
10. Всхожесть семян 75%. Посеяно 200 штук. Какова вероятность, что взойдет от 150 до 180 штук?
11. При проведении эксперимента монету подбрасывали 4096 раз, причем герб выпал 2068 раз. С какой вероятностью можно было ожидать такой результат ?

Расчетно-графическая работа №8
по теме «Случайные величины»

В задачах 1-3 построить ряд распределения случайной величины X, найти числовые характеристики, функцию распределения и построить ее график.

1. В розыгрыше участвуют 100 номеров. На один приходиться турпутевка стоимостью 5000 рублей, на 10 бытовые приборы стоимостью 1500 рублей, на 30 номеров рекламные наборы по 50 рублей. Остальные номера – без выигрыша. Случайная величина X – размер выигрыша в рублях.
2. Исследуются семьи, имеющие ровно троих детей. Вероятность рождения мальчика считается 0,51. Случайная величина X– число мальчиков в такой семье.
3. На собрании присутствуют 10 человек, поровну мужчин и женщин. Случайным образом выбирается президиум из 3-х человек. Случайная величина X– число женщин, попавших в президиум.
4. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, \ 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, \ x > \frac{1}{3} \end{cases}$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию X. Построить графики $f(\tilde{o})$ и $F(x)$.
5. По данным метеорологов средняя дневная температура в июле для данной области составляет 28, среднеквадратическое отклонение. Найти вероятность того, что в некоторой июльский день температура будет не ниже 25 и не выше 30.
6. В условиях предыдущей задачи определить дневную температуру июля, которую можно гарантировать с вероятностью 0,95.
7. В процессе социологического исследования было опрошено 1000 человек. Оказалось, что примерно 46% собираются голосовать на

ближайших выборах за правящую партию. Дисперсия результата составляет 4%. При помощи неравенства Чебышева определить примерные границы популярности партии с вероятностью 0,97.

8. Средние зарплаты мужчин и женщин, работающих на данном предприятии, разделились следующим образом:

Мужчина	Зарплата	2500	5000	7500	10000
	вероятность	0,1	0,3	0,55	0,05
Женщина	Зарплата	2500	5000	7500	10000
	вероятность	0,2	0,35	0,44	0,01

Составить ряд распределения дохода семьи, если муж и жена работают на этом предприятии. Найти математическое ожидание зарплаты жены, мужа и семьи в целом.

9. В таблице приведены данные о времени, предоставленном депутатом для предвыборных выступлений и проценты, полученные этими депутатами на выборах. Влияет ли продолжительность предвыборной агитации на популярность, выраженную в голосах?

20	20	35	40	55	70	90	100
12	1	3	10	8	15	24	40

4.5. Контрольные работы (специальность 040201)
Контрольная работа №1
по теме «Аналитическая геометрия»

Вариант №1

1. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Найти точки пересечения ее с заданной прямой. Сделать чертеж. $x^2+2y^2-12y+10=0,\ \ x+y-3=0$.
2. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $y=5$ и от точки A(2, 1).
3. Кривая задана полярным уравнением $r=\dfrac{2}{1+\sin\varphi}$. Преобразовать уравнение к каноническому виду и построить кривую.
4. Даны уравнения двух высот треугольника $x+y=4$, $y=2x$ и одна из его вершин A(0, 2). Составить уравнения сторон треугольника.

Вариант №2

1. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Найти точки пересечения ее с прямой. Сделать чертеж. $2x^2+4x+y^2-2=0$, $2x+y+2=0$.
2. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $x=1$ и от точки A(3, 1).

3. $r = \dfrac{1}{3(1 - \sin\varphi)}$. Преобразовать уравнение кривой к каноническому виду и построить кривую.
4. Показать, что треугольник со сторонами $x + \sqrt{3}y = 0,\ \sqrt{3}x + y + 1 = 0,\ x - y - 10 = 0$ равнобедренный. Найти угол при вершине и площадь треугольника.

Вариант №3

1. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Найти точки пресечения ее с прямой. Сделать чертеж. $2x^2 + y^2 - 12x + 10 = 0, \quad x + y - 2 = 0$.
2. Написать уравнение геометрического мета точек, равноудаленных от прямой $y = -3$ и от точки А(3, 1).
3. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}$. Преобразовать уравнение кривой к каноническому виду и построить кривую.
4. Даны вершины $A(-3, -2),\ B(4, -1),\ C(1, 3)$ АВСД $(AB \| СД)$. Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины Д этой трапеции.

Вариант №4

1. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Найти точки пересечения ее с прямой. Сделать чертеж. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0,\ 3x + y - 3 = 0$.
2. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $y = 2$ и от точки А(0, 4).
3. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}$. Преобразовать уравнение к каноническому виду и построить кривую.
4. Даны уравнения одной из сторон ромба $x - 3y + 10 = 0$ и одной из его диагоналей $x + 4y - 4 = 0;\ P(0, 1) -$ точка пресечения диагоналей. Найти уравнения остальных сторон ромба.

Контрольная работа №2
по теме «Производная»

Вариант №1

Вычислить y'

1) $y = arctg^2(2x + 3)$; 2) $y = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x+2}}$; 3) $y = x^5 e^{tg^2 \frac{x}{2}}$; 4) $y = \ln^3(\arccos(2x - 1))$;

5) $y = \sin \sqrt[2]{\dfrac{x}{x-1}}$; 6) $y = \sin \sqrt[7]{\dfrac{x}{x+2}}$; 7) $x^3 - 3x^2y^2 + y = 0$; 8) $y = x^{\sin^2 x}$; 9)

$$\begin{cases} x = 5t^3 \\ y = 3t^2 + 4t \end{cases}.$$

Вариант №2

Вычислить y'

1) $y = arctg(\ln(3x-2))$; 2) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$; 3) $y = x^4 e^{\sin^2\frac{x}{2}}$; 4) $y = \ln^2(\arcsin(3x+2))$;

5) $y = tg^2\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$; 6) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}$; 7) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$; 8) $y = (x^x)^x$; 9) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = tg\, t \end{cases}$.

Вариант №3

Вычислить y'

1) $y = \sqrt{tg\dfrac{x+x^2}{2}}$; 2) $y = 2^{\ln\sqrt{x^2+1}}$; 3) $y = \sin^2(x^4+1)$; 4) $y = \ln^2\sin\dfrac{1}{2}$;

5) $y = xe^{\sqrt{arctge^x}}$; 6) $y = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{x^3}$; 7) $y^3x + y^2 + 2x^4 = 0$; 8) $y = (\cos)^{arctgx}$; 9) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 - t \end{cases}$.

Вариант №4

Вычислить y'

1) $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2+4x}$; 3) $y = \sin\sqrt[4]{x}$; 4) $y = 4^{\arcsin\sqrt{-x^x+1}}$; 5) $y = e^{tg\frac{4}{x}}$;

6) $y = \ln^3(arctg\dfrac{x}{2})$; 7) $x^{\sin y} = y$; 8) $y = (tgx)^{arctgx}$; 9) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$.

Контрольная работа №3
по теме «Неопределенный интеграл»

Вариант №1

1) $\int \dfrac{(xn)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\int x\sin x\,dx$; 3) $\int \dfrac{3x+2}{x(xn)^2}dx$; 4) $\int \dfrac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^2 x}dx$; 5) $\int \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}dx$;

6) $\int \dfrac{1}{1+\sin^2 x}dx$; 7) $\int \dfrac{x+2}{x^2+3x}dx$; 8) $\int e^{2x^3+3}x\,dx$.

Вариант №2

1) $\int \dfrac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 3) $\int (x^2+1)e^{-2x}dx$; 4) $\int \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$; 5) $\int \dfrac{x+4}{5x+x^2-6}dx$;

6) $\int \dfrac{dx}{x^2+1}$; 7) $\int \dfrac{dx}{1+\cos^2 x}$; 8) $\int x\sin x^2 dx$.

Вариант №3

1) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; 3) $\int x^2 e^{4x} dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 5}}{x} dx$; 5) $\int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx$;

6) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$; 7) $\int \frac{x^5 - 2x^3 + 4}{x^3 - 4x} dx$; 8) $\int \frac{4x^5 dx}{\sqrt{x^6 + 7}}$.

Вариант№4

1) $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 2) $\int \cos^3 x dx$; 3) $\int arc\,tg\, x dx$; 4) $\int \frac{x^3 dx}{4 + 5x^4}$; 5) $\int \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 6x + 8} dx$;

6) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 7) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$.

Контрольная работа №4
по теме «Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами»

Вариант №1

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' + 4y' + 13y = 0$; 3) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$; 4) $y'' + y' = x^2$;

5) $y'' - 2y' + 10y = \sin 2x$; 6) $y'' - y = \frac{1}{1+e^{2x}}$.

Вариант №2

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$; 2) $y'' - 8y' + 16y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 8y = 0$;

4) $y'' + 2y' = e^{-x} \cdot x$; 5) $y'' - 7y' + 12y = e^{4x}$; 6) $y'' + 36y = \cos x - \sin 2x$.

Вариант №3

1) 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 2y' + 5y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

4) $y'' + y' - 6y = \sin x$; 5) $y'' - 2y' + 17y = e^{2x}$; 6) $y'' + 36y = ctg 6x$.

Вариант №4

1) $y'' - y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 10y' + 25y = 0$; 3) $y'' + 4y = 0$; 4) $y'' - 2y' = 3xe^{-1}$;

5) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$; 6) $y'' + 25y = \sin x - \cos 2x$.

Контрольная работа №5
по теме «Ряды»

Вариант №1

Исследовать на сходимость:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n-1};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1};\ 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}};\ 5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n};\ 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt{n}}.$$

Вариант №2

Исследовать на сходимость:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n};\ 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}\cdot n!};\ 5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3+1};\ 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Вариант№3

Исследовать на сходимость:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3+4};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n};\ 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2};\ 5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)};\ 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Вариант №4

Исследовать на сходимость:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5};\ 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(2n-1)};\ 5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n-1}\right)^n;\ 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5+n}}.$$

Контрольная работа №6
по теме «Кратные интегралы»

Вариант №1

1. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{0}^{2+x}f(x,y)dx$.
2. $\iint\limits_{Д} y^2dxdy,\ Д: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0$.
3. $\iint\limits_{AB} xds,\ AB: y=\sqrt{x}$ от A(0, 0) до B(1, 1).
4. Найти объем тела, ограниченного $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2+y^2+z^2=4,\ y=0.$

Вариант №2

1. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-1}^{-x^2}f(x,y)dy$.
2. $\iint\limits_{Д} x^2dxdy,\ Д: y=x,\ y=-x,\ x=1.$.
3. $\iiint\limits_{V} xy\,dx\,dódz,\ V: x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0$.
4. Вычислить координаты центра тяжести пластинки $y=\cos x,\ y=0$.

Вариант №3

1. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{1}^{e}dx\int\limits_{0}^{\ln x}f(x,y)dy$.
2. $\iint\limits_{Д} \sqrt{x^2+y^2}\,y\,dxdy,\ Д: x^2+y^2=1,\ y=0,\ x=0$.

3. $\iiint\limits_V (x-z)\acute{o}\,dxdydz,\ V: x+y=2,\ z=0, z=2,\ x=0$.

4. Вычислить массу дуги кривой $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2},$ если ее линейная плотность $\rho = x$.

Вариант №4

1. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.
2. $\iint\limits_Д xy^2\,dxdy,\ Д: x^2+y^2=1,\ y=0,\ y\ge 0$.
3. $\iiint\limits_V x\acute{o}\,dxdydz,\ V: y=1-x,\ z=2,\ y=0,\ y\ge 0$.
4. Найти массу пространственной кривой $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}, \\ z=1 \end{cases}$ если ее плотность $\rho = x+y$.

Контрольная работа №7
по теме «Случайные величины»

Вариант №1

1. Полная колода карт (52 шт.) делиться наугад на 2 равные пачки по 26шт. Найти вероятности следующих событий: 1) в каждой пачке окажется по 2 туза; 2) все тузы попадут в одну пачку.
2. Два парохода приходят в порт в любое время в течении суток. Время стоянки 2 часа. Какова вероятность, что одному из пароходов придется ожидать места у причала, так как оно только одно?
3. Имеются 3 урны. В первой **а** белых шаров и **в** черных, во второй – **с** белых и **д** черных, в третьей только белые. Из наугад выбранной урны вынули белый шар. Какова вероятность, что шар вынули у первой урны?
4. Монета подбрасывается 7 раз. Что вероятнее: выпадет 4 герба и 3 решки в любой последовательности или 4 герба, и затем 3 решетки?

Вариант№2

1. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеются 5 команд экстра-класса. Найти вероятности следующих событий: 1) все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу; 2) две команды экстра-класса попадут в одну из групп, три в другую.
2. На отрезке ОА числовой оси наудачу поставлены две точки В(х) и С(у), $y\ge x$. Найти вероятность того, что длина отрезка ВС окажется меньше половины ОА.

3. На приборе установлены два сигнализатора об аварии. Первый срабатывает с вероятностью 0,9 и дает 1% ложных тревог, другой с вероятностью 0,95 и дает 2% ложных тревог. Сработали оба сигнализатора. Какова вероятность, что тревога ложная?
4. В компании ребятишек– мальчика и две девочки. Перед началом игры воспитательница посылает любого из детей за мячиком. Какова вероятность, что 3 игры подряд мячик будут приносить девочки?

Вариант №3

1. На пяти карточках написаны цифры 1,2,3,4,5. Две из них, одна за другой вынимаются. Найти вероятность того, число на второй карточке больше, чем на первой?
2. В круг брошена точка. Какова вероятность того, что она окажется внутри: 1) вписанного правильного треугольника; 2) вписанного квадрата?
3. Имеются три одинаковые урны. В первой – а белых шаров и 2а черных, во второй с белых и с/2 черных. В третьей урне только белые шары. Найти вероятность вынуть белый шар из наудачу выбранной урны.
4. Два равносильных партнера играют в шахматы. Определить наиболее вероятный результат серии из 5 партий и вычислить вероятность этого события. Ничьи в расчет не принимаются.

Вариант№4

1. На пяти карточках написаны цифры 1,2,3,4,5. Достают одну карточку, записывают появившееся число и возвращают в общую пачку. Затем снова достают карточку. Какова вероятность того, второй раз появиться число больше первого?
2. Из полной колоды карт (52шт.) вынимают сразу 4 карты. Найти вероятность того, что все 4– разных мастей.
3. Имеются 2 урны. В одной а белых шаров и в черных, во 2ой с белых и д черных. Из первой урны во вторую переложили, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут 1 шар. Какова вероятность, что он белый?
4. В коробке находится 250 белых шаров и 150 черных. При проведении эксперимента достают произвольный шар, регистрируют его цвет и возвращают шар в коробку. Какова вероятность, что при 10 повторениях опыта, белый шар появляется наивероятнейшее число раз?

Контрольная работа №8
по теме «Случайные величины»

Вариант №1

1. Монета подбрасывается 4 раза. Составить ряд распределения X – числа выпавших гербов. Найти $M(X)$, $Д(X)$, $\delta\,(X)$.
2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{3}, & 0< x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$. Найти F(x), числовые характеристики, и построить графики.
3. Заря охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднеквадратическую ошибку 15мг. Наименьший вес порохового заряда 150мг. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 280мг.

Вариант №2

1. В ящике 3 окрашенных и 7 неокрашенных деталей. Наудачу достают 3. Составить ряд распределения X– числа вынутых окрашенных деталей. Найти $M(X)$, $Д(X)$, $\delta\,(X)$.
2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{5}, & 0< x\le 5\\ 1, & x>3\end{cases}$. Найти $f(x)$, числовые характеристики, построить графики.
3. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат в интервале (5,10). Найти числовые характеристики X и вероятность попадания ее в (5, 7).

Вариант №3

1. Проводится 1000 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события 0,001. Найти первые 4 клетки ряда распределения X – числа наступления события. Найти $M(X)$, $Д(X)$, $\delta\,(X)$.
2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{4}, & 0< x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$. Найти $F(x)$, числовые характеристики, построить графики.
3. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва 0,005. Найти наиболее вероятное число обрывов и его вероятность.

Вариант №4

1. Вероятность наступления события в каждом из 4-х независимых испытаний равна 0,6. Найти ряд распределения X– числа наступлений события. Найти $M(X)$, $Д(X)$, $\delta\,(X)$.
2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \dfrac{x}{2} - 1, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$. Найти $f(x)$, числовые характеристики, построить графики.
3. Какой ширины должно быть поле допуска чтобы с вероятностью 0,95 получить деталь внутри поля допуска, если случайные отклонения размера от середины поля допуска подчиняются закону нормального распределения с параметрами $a = 0$, $\delta = 10$.

4.6. Тексты самостоятельных работ (специальность 040201)

Самостоятельная работа №1

Вариант №1

1. Решить уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти $2A^2 - 3A + 5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Вариант №2

1. Решить уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Найти $2A^2 - 3A + 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа №2

Вариант №1

1. Дана точка $(4, -4)$. Записать ее полярные координаты.
2. Дана точка $\left(5, -\dfrac{7\pi}{4}\right)$.
3. Дан треугольник ABC A(1, 0), B(3, 2), C(3, 1). Найти уравнение медианы AK.

Вариант №2

1. Дана точка (0, 1). Записать ее полярные координаты.
2. Дана точка $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$. Записать ее декартовы координаты.
3. Дан треугольник ABC, A(4, –4), B(–1,–4), C(3, 2). Найти периметр треугольника.

Самостоятельная работа №3

Вариант №1

1. Построить плоскости $x + y + z - 1 = 0,\ \ 2x - z + 4 = 0$.
2. Построить $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Вариант №2

1. Построить плоскость $3x - 4y + 5z - 2 = 0,\ x + y = 0$.
2. Построить $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = z$.

Самостоятельная работа №4

Вариант №1

1. Найти область определения $y = \sqrt{\lg(1 - 2\cos x)}$.
2. Построить график $y = -\cos 3x - 1$.

Вариант №2

1. Найти область определения $y = \frac{\lg x}{\sqrt{x^2 - 16}}$.
2. Построить график $y = -\sin 3x + 1$.

Самостоятельная работа №5

Вариант №1

1. $Z = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$ Записать тригонометрическую и показательную форму Z.
2. Выполнить действия $(4 - 2i)^2 : (1 + i)$.

Вариант №2

1. $Z = 4 + 4i.$ Записать тригонометрическую и показательную формы Z.
2. Выполнить действия $(2 - i) : (3 + i)^2$.

Самостоятельная работа №6

Вариант №1

Дана $f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$ Найти: а) величину и направление скорейшего возрастания функции в точке A(1, 1); б) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a} = (2, -1)$.

Вариант №2

Дана $f(x,y)=2x^2+3xy+y^2.$ Найти: а) величину и направление скорейшего возрастания функции в точке А(2, 1); б) производную в точке А по направлению вектора $\vec{a}=(3,-4)$.

Самостоятельная работа №7

Вариант №1

1. $xy'\sin\dfrac{4}{x}+x=y\sin\dfrac{y}{x}.$ Найти общее решение.
2. $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dx=0$. Найти общее решение.

Вариант №2

1. $\dfrac{yy'}{x}+e^y=0,\ y(1)=0.$ Найти частное решение.
2. $\left(x+y+2\right)dx+(2x+2y-1)dy=0$. Найти общее решение.

Самостоятельная работа №8

Вариант №1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=4$.
2. Вычислить $\iiint\limits_V(4x-3y+1)dxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2,\ z=0,\ z=3.$

Вариант №2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $xy=8,\ x=1,\ y=1.$
2. Вычислить $\iiint\limits_V z\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ \ y=1,\ \ x+z=1.$

Самостоятельная работа №9

Вариант №1

$\int\limits_{AB}(x+y)ds,\ AB-$ отрезок, А(4, 1), В(6, 0).

Вариант№2

Вычислить $\int\limits_{AB}(x-y)ds,\ AB-$ отрезок, А(0, 1), В(4, 2).

Самостоятельная работа №10

Вариант №1

1. Разложить $y=x\cos^2 x$ в ряд Маклорена.
2. Вычислит пределе используя необходимый признак сходимости ряда. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

Вариант №2

1. Разложить $y = x^2 \sin^2 x$ вряд Маклорена.
2. Вычислить предел, используя необходимый признак сходимости ряда $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$.

Самостоятельная работа №11

Вариант №1

1. Набирая номер, абонент забыл две последние цифры, но помнит что они различны и нечетны. Какова вероятность, что он попадет со второй попытки?
2. Во время проведения социологического исследования недобросовестный интервьюер подделал 4 анкеты из 20. Контролер проверяет наугад 20% анкет. Какова вероятность, что фальсификация будет обнаружена?

Вариант№2

1. Студент успел выучить 20 из 30 вопросов к зачету. Преподаватель задает два вопроса. Какова вероятность, что студент ответит только на один?
2. По квотному заданию интервьюеру необходимо опросить 5 женщин и 3 мужчины. У него есть адреса 8 человек неизвестного пола. Считая, что число мужчин и женщин равным найти вероятность, что по этим адресам выполнить задание.

Самостоятельная работа №12

Вариант №1

1. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность возможного значения $P_1 = 0{,}1$ $M(X) = 3{,}9$, $Д(X) = 0{,}09$. Найти закон распределения этой случайной величины.
2. Заданы значения математического ожидания и дисперсии случайной величины X и У, $M(X) = 0{,}5$, $M(У) = -2$, $Д(X) = 1$ $Д(У) = 2{,}4$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $5X - 2У$.

Вариант №2

1. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность возможного значения $P_1 = 0{,}3$ $M(X) = 3{,}7$, $Д(X) = 0{,}21$. Найти закон распределения этой случайной величины.
2. Заданы значения математического ожидания и дисперсии случайной величины X и У, $M(X) = -5$, $M(У) = 3$, $Д(X) = 1$ $Д(У) = 4$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2X - 3У$.

Самостоятельная работа №13

Вариант №1

1. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения с надежностью 0,95, зная $\bar{x} = 75,\ n = 36$ и $\delta = 6$.
2. Даны две выборочные средние $\bar{x} = 44,\ \bar{y} = 42$. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о равенстве средних значений, если дисперсии известны и равны 15, а объемы выборок составляют 45 и 60.

Вариант №2

1. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения с надежностью 0,95, $\bar{x} = 74,\ n = 49$ и $\delta = 7$.
2. Даны две выборочные средние $\bar{x} = 52,\ \bar{y} = 54$. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о равенстве средних значений, если дисперсии известны и равны 8, а объемы выборок составляют 40 и 50.

4.7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ (специальности 080401, 040201,)

Лабораторная работа №1

по теме «Метод наименьших квадратов»

I часть. По заданной выборке найти линейную функцию методом наименьших квадратов. Построить чертеж. Обосновать правильность выбора степени многочлена, если относительная погрешность данных равна одному проценту среднего значения зависимой переменной.

X	58	57	46	54	67	60	53	57	41
y	62	57	49	63	72	64	53	65	45

II часть. По заданной выборке установить вид функциональной зависимости. Найти параметры эмпирической формулы.

X	0	1	2	3	4	5
y	0,54	0,68	0,86	1,3	1,88	2,47

Лабораторная работа №2

по теме «Точечные оценки параметров распределения»

Даны наблюденные значения случайной величины.

Требуется:

Построить сгруппированный статистический ряд.

Построить эмпирическую функцию распределения.

Построить гистограмму и полигон относительных частот.

Найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, эксцесс, асимметрию, моду, коэффициент вариации.

Проверить гипотезу относительно близости распределения к нормальному.

181 121 173 144 219 151 180 197 160 241 183 128 198 218 149 186 203
164 198 138 185 201 153 219 187 168 145 132 217 160 130 205 154 153
178 196 184 178 158 194 188 203 189 206 211 197 177 186 200 138 156
168 181 208 156 169

Лабораторная работа №3
по теме «Интервальные оценки параметров распределения»

Приводятся результаты измерений некоторой экономической величины, которые будем рассматривать как n реализаций случайной величины X в предположении, что X имеет нормальное распределение.

Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания a и среднего квадратического отклонения δ.

Записать плотность вероятности и функцию распределения X.

Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, можно было бы утверждать, что принимая среднее арифметическое за математическое ожидание X, совершаем погрешность $\varepsilon = 2\delta$.

Вычислить $P(\alpha < X < \beta)$.

Задача. Продажа кожаной обуви в торговой сети за год характеризуется следующими данными (в тыс. руб):

$\alpha = 200, \beta = 400$.

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оборот	157	168	286	393	422	621	525	828	724	628	525	326

Лабораторная работа №4
по теме «Элементы теории корреляции»

Найти выборочные уравнение прямой линии регрессии У на Х по данной корреляционной таблице:

x y	5	10	15	20	25	30	n_y
35	4	2					6
45		5	3				8
55			5	45	5		55
65			2	8	7		17
75				4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	100

Лабораторная работа №5
по теме «Проверка статистических гипотез. Критерии согласия Пирсона»

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза H_0 о нормальном законе распределения генеральной совокупности Х с эмпирическим распределением выборки объема n.

1, 2; 1,4	1,4; 1,6	1,6; 1,8	1,8; 2,0	2,0; 2,2	2,2; 2,4
6	10	15	13	9	5

4.8. ТЕСТЫ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Тест №1

1. Вычислить $25^{\frac{3}{2}} - 0{,}25$

1.	37,25	**2.**	14,75	**3.**	124,75	**4.**	26,25

2. Упростить $3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 6$

1.	1	**2.**	–1	**3.**	3	**4.**	–3

3. Вычислить $0{,}3^{\lg 0{,}3^2} - 5$

1.	–4,91	**2.**	–4,7	**3.**	–4	**4.**	–3

4. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $7^{5x+6} = 49$

1.	[–4, –1]	**2.**	[–1,0]	**3.**	(0, 2)	**4.**	[5, 9]

5. Указать множество решений неравенства $\dfrac{(2x-3)(x+2)}{x-6} \le 0$

1.	$(-2; -2] \cup [1{,}5; 6)$	**2.**	$(-\infty, -1{,}5] \cup [2; 6)$	**3.**	$(-\infty, -2] \cup [3; 6)$	**4.**	$(-2; 1{,}5] \cup [6; \infty)$

6. Вычислить значение производной функции $y = \sin x - 2x$ при $x_0 = 0$.

1.	1	**2.**	0	**3.**	–3	**4.**	–1

7. Найти область определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$

1.	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	**2.**	[–1, 1],	**3.**	$[-1, 0) \cup (0, 1]$	**4.**	(–1, 1)

8. Найти множество значений функции $y = 6^x - 12$

1.	$(0, \infty)$	**2.**	$(-12, \infty)$	**3.**	$[-12, \infty)$	**4.**	$(-\infty, -12)$

9. Найти решения уравнения $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$ на промежутке $[-\pi, \pi]$.

1.	$-\dfrac{\pi}{3}$	**2.**	$\pm\dfrac{\pi}{3}$	**3.**	$\dfrac{\pi}{3}$	**4.**	$\pm\dfrac{2\pi}{3}$

10. Сколько экстремумом функции $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$?

1.	1	**2.**	2	**3.**	3	**4.**	4	**5.**	Ни одного

11. В прямоугольном треугольнике гипотенуза $AB = 10$, катет $AC = 6$. Найти синус угла B.

1.	0,3	**2.**	1	**3.**	0,5	**4.**	0,6

12. Основание равнобедренного треугольника равно 8, а угол при основании 30^0. Найти площадь треугольника.

1.	$\dfrac{16}{3}\sqrt{3}$	**2.**	16	**3.**	$16\sqrt{3}$	**4.**	$\dfrac{16}{3}$

13. Круг вписан в квадрат со стороной а. Найти площадь этого круга.

1.	$\dfrac{\pi a}{2}$	**2.**	$\dfrac{\pi a^2}{2}$	**3.**	$\dfrac{\pi^2 a}{2}$	**4.**	πa^2

14. Объем куба равен 27. Найти диагональ куба.

1.	3	**2.**	$3\sqrt{2}$	**3.**	$3\sqrt{3}$	**4.**	$2\sqrt{3}$

15. Высота косинуса равна 5, диаметр основания равен 3. Найти объем косинуса.

1.	11π	**2.**	$11{,}25\pi$	**3.**	45π	**4.**	$22{,}5\pi$

Тест №2 (I семестр)

Вариант 0

1. Указать суммы диагональных элементов матрицы

1.	0,9	**2.**	12	**3.**	17	**4.**	23

$$A^2 - B + 4E,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$. Найти

1.	2	**2.**	–2	**3.**	0	**4.**	3	**5.**	1

$x_1 + x_2 + x_3$.

3. В треугольнике ABC A(1,1), B(–3,0), C(4,2).

Найти $\left|\vec{AB} + \vec{AC}\right|$.

1.	2	**2.**	4	**3.**	1	**4.**	3	**5.**	5

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k},\ \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$.

1.	10	**2.**	$\sqrt{108}$	**3.**	$\sqrt{109}$	**4.**	$\sqrt{101}$	**5.**	11

5. При каком α ортогональны векторы $3\vec{i} + \alpha^2\vec{j} - 6\vec{k}$ и $4\alpha\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$?

1.	–1	**2.**	–2	**3.**	0	**4.**	1	**5.**	2

6. Прямая проходящая через точки A(1, 2), B(–2, 1). Найти ее угловой коэффициент.

1.	2	**2.**	3	**3.**	$-\frac{1}{2}$	**4.**	$\frac{1}{3}$	**5.**	$-\frac{1}{3}$

7. Дана гипербола $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1.	3	**2.**	2	**3.**	9	**4.**	4	**5.**	16

Определить мнимую полуось.

8. Определить вектор нормали плоскости, проходящей через точки (0,0,0), (1,0,0), (0,0,1).

1.	$\vec{n}=(1,0,1)$	**2.**	$\vec{n}=(0,1,1)$	**3.**	$\vec{n}=(1,1,0)$	**4.**	$\vec{n}=(0,-1,-1)$	**5.**	$\vec{n}=(0,-1,1)$

9. Найти радиус окружности $x^2+y^2-4x+2y-21=0$.

1.	2	**2.**	4	**3.**	6	**4.**	12	**5.**	21

10. Определить поверхность $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1$.

1.	сфера	**2.**	цилиндр	**3.**	эллипсоид	**4.**	эллиптический	**5.**	параболоид

11. Найти наименьшее значение функции на $[-1,1]$, $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$.

1.	$-\frac{1}{2}$	**2.**	$-\frac{3}{2}$	**3.**	$-\frac{3}{4}$	**4.**	$-\frac{7}{4}$	**5.**	$-\frac{7}{2}$

12. Найти значение производной функции $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ в точке $x=1$.

1.	$\frac{1}{2}$	**2.**	1	**3.**	$-\frac{1}{2}$	**4.**	$\frac{1}{4}$	**5.**	$-\frac{1}{4}$

13. Найти числовой прямой дана точка $x=4{,}1$. Определить ее $E-$ окрестность.

1.	(3,9; 4,3)	**2.**	(3,8; 4,2)	**3.**	(3,8; 4,1)	**4.**	(3,9; 4,2)	**5.**	(4,1; 4,3)

14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{\sin 2x}$.

1.	8	**2.**	4	**3.**	0	**4.**	2	**5.**	1

15. Определить интервал убывания функции $y=2x^3-6x+1$.

1.	$(-\infty,-2)$	**2.**	$(-1,\infty)$	**3.**	$(2,\infty)$	**4.**	$(-1,1)$	**5.**	$(-2,2)$

Тест №3(II семестр)

1. $Z=x^3tgy$. Найти Zy в точке $(1,\pi)$.

1.	–1	**2.**	0	**3.**	$\frac{1}{2}$	**4.**	1	**5.**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Определить множество первообразных функции $f(x)=\cos\left(\frac{x}{3}+2\right)$.

1.	$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}+2\right)+c$	**2.**	$-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}+2\right)+c$	**3.**	$\frac{1}{3}\sin x+c$	**4.**	$3\sin\left(\frac{x}{3}+2\right)+c$	**5.**	$3\sin x+c$

3. Найти модуль комплексного числа $Z = -3 + 4i$

1.	5	**2.**	9	**3.**	16	**4.**	3	**5.**	4

4. $Z_1 = i,\ Z_2 = 2 - i$. Найти $R_e \dfrac{Z_1}{Z_2}$.

1.	$\frac{2}{5}$	**2.**	$\frac{1}{5}$	**3.**	$\frac{3}{5}$	**4.**	$-\frac{1}{5}$	**5.**	$-\frac{2}{5}$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ x = 1,\ x = 2$, OX.

1.	$\frac{8}{3}$	**2.**	2	**3.**	$\frac{7}{3}$	**4.**	3	**5.**	$\frac{1}{3}$

6. $u = xyz$. Найти градиент u в точке (–1, 1,1).

1.	(1,–1,–1)	**2.**	$(-1, 1, -1)$	**3.**	(1, 1, 1)	**4.**	$(1, 1, -1)$	**5.**	$(-1, -1, -1)$

7. $Z = \ln(x + y)$. Указать область определения Z.

1.	$y > -$	**2.**	$y \geq x$	**3.**	$y \leq -x$	**4.**	$y < x$	**5.**	$y \geq -x$

8. $y'' + 4y' + 4y = 0$. Написать общее решение уравнения.

1.	$y = c_1\ell^{-2x} + c_2\ell^{2x}$	**2.**	$y = c_1\ell^{-2x}$	**3.**	$y = c_1x\ell^{-2x}$	**4.**	$y = c_1\ell^{-2x} + c_2x\ell^{-2x}$	**5.**	$y = c_1\ell^{2x}$

9. $y''' = \sin 2x$. Какая из функций является решением уравнений?

1.	$y = \frac{1}{4}\cos 2x$	**2.**	$y = 4\sin 2x$	**3.**	$y = 2\cos x$	**4.**	$y = \frac{1}{8}\sin 2x$	**5.**	$y = \frac{1}{8}\cos 2x$

10. $ydx + x^2dy = 0,\ y(-1) = 1$. Указать частное решение.

1.	$y = -x^2$	**2.**	$y = x^2$	**3.**	$y = x$	**4.**	$y = \frac{1}{4}$	**5.**	$y = -\frac{1}{4}$

Тест №4 (III семестр)

1. Указать пятый член ряда, если $u_n = \dfrac{3 + (-1)^n}{n^2}$.

1.	$\frac{2}{5}$	**2.**	$\frac{2}{25}$	**3.**	$\frac{4}{5}$	**4.**	$\frac{3}{25}$

2. Найти $\dfrac{u_n + 1}{u_n},\ u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3n - 2}{n!}$.

1.	$(-1)^n$	**2.**	$\frac{3n-1}{3n-2}$	**3.**	$\frac{3n-2}{3n-1}$	**4.**	$\frac{3n+1}{2-3n}$	**5.**	$\frac{(-1)^{n-1}(3n+1)}{2-3n}$

1.	$\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$	**2.**	$\frac{(-1)^n}{n^2}$	**3.**	$\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	**4.**	$\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	**5.**	$\frac{1}{n^2}$

3. Написать общий член ряда $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$

4. Найти S_4 ряда $\sum(-1)^{n-1}$.

1.	4	**2.**	1	**3.**	–1	**4.**	0	**5.**	–4

5. Определить вид ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

1.	Гармонический	**2.**	ряд Лейбница	**3.**	Обобщенный гармонический	**4.**	Составленный из членов	**5.**	Геометрической прогрессии

1.	8	**2.**	4	**3.**	–2	**4.**	–4

1.	$(-4,\infty)$	**2.**	$[-4,4]$	**3.**	$(-4,4)$	**4.**	$(4,\infty)$

6.6. Указать область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$.

7. $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots$. Указать радиус сходимости.

8. $f(x)=12x^2+12x-16$–разложена в ряд Тейлора по степеням (x–1). Указать третий коэффициент разложения.

1.	1	**2.**	3	**3.**	2	**4.**	0

9. Определить коэффициент a_0 Фурье функции $y=x^2$ на $[0,2\pi]$.

1.	$\frac{\pi^2}{3}$	**2.**	π^2	**3.**	$\frac{8\pi^2}{3}$	**4.**	8π

10. Записать нижний предел интегрирования во внутреннем

1.	$x=y^2$	**2.**	$y=\sqrt{x}$	**3.**	$x=\sqrt{y}$	**4.**	$x=-\sqrt{y}$

интервале в правой части равенства $\int_0^3 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dx=\int_0^9 dy\int^3 f(x,y)dx$.

11. Вычислить $\int_\ell (x-y)ds$, $\ell-$ отрезок AB, A(0, 0),

1.	$\frac{5}{2}$	**2.**	$\frac{5}{16}$	**3.**	$\frac{7}{2}$	**4.**	$\frac{7}{8}$

B(4, 3).

12. Используя криволинейный интеграл, вычислить площадь эллипса

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$$

1.	3π	**2.**	6π	**3.**	4π	**4.**	12π

13. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $V: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 0,\ z = 3$.

1.	4	**2.**	3	**3.**	2	**4.**	6

Тест №5 (IV семестр)

Вариант 0

1. Игральная кость бросается 1 раз. Вероятность того, что на верхней грани выпадет не более двух очков, равна …

1.	$\frac{5}{6}$	**2.**	$\frac{1}{2}$	**3.**	$\frac{1}{3}$	**4.**	$\frac{1}{6}$	**5.**	$\frac{2}{3}$

2. Проводиться серия из 10 независимых испытаний, вероятность появления события А в каждом из которых равна 0,8. Найти дисперсию числа появлений этого события.

1.	8	**2.**	0,08	**3.**	1,6	**4.**	0,16	**5.**	0,8

3. Сколько различных двузначных чисел можно оставить из цифр 1,2,3,4, если цифры в числе должны быть разными ?

1.	6	**2.**	24	**3.**	12	**4.**	4	**5.**	48

4. Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятность прорастания семян в первом пакете –0,9, а во втором – 0,7. Взяли по одному семени из каждого пакета. Найти вероятность того, что оба прорастут.

1.	0,63	**2.**	1,6	**3.**	0,8	**4.**	0,9	**5.**	0,2

5. В ящике 5 шаров, три из них – белые. Наугад достают 2 шара. Найти вероятность того, что оба белые.

1.	0,5	**2.**	0,2	**3.**	1	**4.**	0,6	**5.**	0,3

6. Два стрелка стреляют по мишени. Событие А– попал первый стрелок, событие В– попал второй стрелок, тогда события А и В:

1.	совместны и зависимы	**2.**	совместны и независимы	**3.**	несовместны и зависимы	**4.**	несовместны и независимы	**5.**	противоположны

7. Прямоугольник площадью 4ед. Находится внутри квадрата площадью 16 ед. Найти вероятность того, что две точки, брошенные в квадрат попадут в прямоугольник.

1.	$\frac{1}{4}$	**2.**	$\frac{1}{8}$	**3.**	$\frac{1}{16}$	**4.**	$\frac{1}{2}$	**5.**	0,8

8. Вероятность наступления некоторого события не может быть равна …

1.	$\frac{1}{2}$	**2.**	1	**3.**	0	**4.**	0,01	**5.**	2

9. Вероятность независимого события равна..

1.	1	**2.**	0	**3.**	–1	**4.**	0,001	**5.**	2

10. $F(x)$ - функция Лапласа. Тогда $F(-7)$ и $F(0)$ равны соответственно …

1.	0 и 1	**2.**	–1 и 0	**3.**	–0,5 и 0	**4.**	0 и 0,5	**5.**	–0,5 и 0,5

11. Дискретная случайная величина X задана законом

x_i	–1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,1	p_4

Найти p_4.

1.	0,2	**2.**	1	**3.**	0,4	**4.**	0,5	**5.**	0,6

12. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–1	4
p_i	0,4	0,6

Найти M(X).

1.	2	**2.**	2,1	**3.**	2,7	**4.**	1	**5.**	0

13. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \ell^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$. Найти M(X).

1.	$-\lambda$	**2.**	$\frac{1}{\lambda}$	**3.**	λ^2	**4.**	$\frac{1}{\lambda^2}$	**5.**	$\ell^{-\lambda}$

14. Случайная величина X имеет нормированное нормальное распределение. M(X) и Д(X) равны соответственно:

1.	1 и 0	**2.**	0 и 1	**3.**	1 и 1	**4.**	–1 и 1	**5.**	1 и –1

15. Числовая характеристика, показывающая с какой стороны (слева или справа) кривая Гаусса является более полной, называется…

1.	мода	**2.**	медиана	**3.**	ассиметрия	**4.**	эксцесс	**5.**	ковариация

16. Имеется доверительный интервал для неизвестного математического ожидания (–6,44; –2,24). Найти среднее выборочное значение.

1.	–6	**2.**	–2	**3.**	–4	**4.**	–4,34	**5.**	–4,38

17. Средневыборочное значение ряда чисел 2, 6, –3, 8, 4,–3 равно …

1.	2	**2.**	3	**3.**	2,8	**4.**	3,2	**5.**	0

18. Не может быть отрицательной числовая характеристика:

1.	мода	**2.**	эксцесс	**3.**	ассиметрия	**4.**	дисперсия	**5.**	медиана

19. Коэффициент корреляции не может быть равен:

1.	–1	**2.**	0	**3.**	1	**4.**	2	**5.**	–0,8

Тест №6 (итоговый срез знаний)

1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1.	$\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}$	**2.**	$\frac{1}{bc}\begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$	**3.**	$\frac{1}{ad+bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$	**4.**	$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2. Найти сумму собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.	4	**2.**	3	**3.**	1	**4.**	2

3. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.	2	**2.**	3	**3.**	4	**4.**	5

4. Пользуясь правилом умножения матриц, представить в виде определителя произведение определителей $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1.	$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$	**2.**	$\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$	**3.**	$\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$	**4.**	$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}$

5. Модуль комплексного числа $Z = 1 + 3i$ равен …

1.	4	**2.**	1	**3.**	$\sqrt{3}$	**4.**	$\sqrt{10}$

6. Определить $R_e\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$

1.	$x^2 + y^2 = 2$	**2.**	$x^2 + y^2 = 4$	**3.**	$(x+2)^2 + y^2 = 4$	**4.**	$(x-2)^2 + y^2 = 4$

7. Вычислить $Jm\ell^{3i}$.

1.	$\cos 3$	**2.**	$\sin 3$	**3.**	$i\cos 3$	**4.**	$i\sin 3$

8. Значение $f(z) = (z+i)^2 + \frac{z}{i}$ в точке $z_0 = 1 - i$ равно …

1.	i	**2.**	$-i$	**3.**	$2+i$	**4.**	$2-i$

9. Найти остаток от деления $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 5$ на $x - 2$.

1.	1	**2.**	10	**3.**	12	**4.**	11

10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2+4}$.

1.	2	**2.**	$\frac{1}{2}$	**3.**	7	**4.**	0

11. Найти область определения $y = \sqrt{\ln(x+2)}$.

1.	$(-2;\infty)$	**2.**	$[2,\infty)$	**3.**	$(1,\infty)$	**4.**	$[-1,\infty)$

12. Найти $y'(1)$, если $y = x^2\ell^{-x}$.

1.	$-\ell$	**2.**	ℓ^2	**3.**	$-\frac{1}{\ell}$	**4.**	$\frac{1}{\ell}$

13. Найти наибольшее значение $y = \sin x + \cos x$ на $[0, \pi]$.

1.	2	**2.**	4	**3.**	$\sqrt{8}$	**4.**	$\sqrt{2}$

14. Найти сумму абсцисс точек перегиба $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

1.	1	**2.**	-1	**3.**	0	**4.**	2

15. Найти Z_{xy}, $Z = 2x^2 + 3xy^2 + x^3 - x^3 + 2xy + 1$.

1.	$x + y + 1$	**2.**	$4x + y + 2$	**3.**	$x + 6y + 1$	**4**	$4x + 6y + 2$

16. Найти экстремум $Z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

1.	$Z_{max} = 9$	**2.**	$Z_{min} = -9$	**3.**	$Z_{max} = 2$	**4.**	$Z_{min} = -2$

17. Зависимость между себестоимостью единицы продукции у (тыс.руб.) и выпуском продукции х (млрд.руб.) выражается формулой $y = \ell^{-x}$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции $x_0 = 1$ млрд.руб.

1.	1	**2.**	-1	**3.**	ℓ	**4.**	$-\ell$

18. Даны 3 силы $\vec{F}_1 = (1,2,3),\ \vec{F}_2 = (0,1,2),\ \vec{F}_3 = (1,0,-4)$. Найти работу равнодействующей на перемещении из $A(1,2,0)$ в $B(3,4,-1)$.

1.	6	**2.**	8	**3.**	9	**4.**	10

19. Найти площадь параллелограмма, построенного на $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\ \vec{в} = 5\vec{i}$.

1.	$\sqrt{2}$	**2.**	$3\sqrt{2}$	**3.**	$5\sqrt{2}$	**4.**	$7\sqrt{2}$

20. Прямая проходит через точку пересечения прямых $6x - 2y + 5 = 0,\ 2x - y - 4 = 0$ и параллельна OX. Написать уравнение прямой.

1.	$x + 15 = 0$	**2.**	$x - 17 = 0$	**3.**	$y + 17 = 0$	**4.**	$y - 17 = 0$

21. В треугольнике ABC $A(2,4), B(3,2), C(0,2)$. Написать уравнение медианы m_b.

1.	$7x + 2y - 1 = 0$	**2.**	$x - 2y + 7 = 0$	**3.**	$y + 7y - 7 = 0$	**4.**	$x + 2y - 7 = 0$

22. Указать центр окружности $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 10 = 0$.

1.	$(0,3)$	**2.**	$(-1,3)$	**3.**	$(3,0)$	**4.**	$(1,-3)$

1.	$(1,-1)$	**2.**	$(1,1)$	**3.**	$(-1,1)$	**4.**	$(-1,-1)$

23.23. $y = 2x^2 + 4x + 1$. Указать вершину параболы.

24. Указать точку пресечения плоскости, проходящей через точку $A(1,1,1),\ B(3,1,5),\ C(1,\ 2,\ 3)$, с OZ.

1.	$(0,0,-1)$	**2.**	$(0,0,1)$	**3.**	$(0,0,-3)$	**4.**	$(0,0,2)$

25. Определить угол между плоскостью $4x+2y+2z-5=0$ и прямой $x+3=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

1.	$\cos\varphi=\frac{3}{2\sqrt{6}}$	**2.**	$\sin\varphi=\frac{2}{3\sqrt{6}}$	**3.**	$\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$	**4.**	$\sin\varphi=\frac{1}{2\sqrt{6}}$

26. Сфера радиуса $\sqrt{2}$ с центром (1, –1, С) проходит через точку (0, 0, 2). Определить параметр С.

1.	$C=0$	**2.**	$C=1$	**3.**	$C=2$	**4.**	$C=-1$

27. Найти множество первообразных $f(x)=\cos^2(2x+3)$.

1.	$tg(2x+3)+c$	**2.**	$2tg(2x+3)+c$	**3.**	$\frac{1}{2}tg(2x+3)+c$	**4.**	$\frac{1}{4}tg(2x+3)+c$

28. Интеграл $\int\frac{dx}{x(x-3)}$ представить в виде суммы интегралов.

1.	$\int\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}$	**2.**	$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}$	**3.**	$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}$	**4.**	$-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}$

29. Найти площадь фигуры, ограниченной $y=\frac{x^2}{2},\ y=0,\ x=2$.

1.	$\frac{1}{3}$	**2.**	$\frac{2}{3}$	**3.**	$\frac{4}{3}$	**4.**	$\frac{3}{2}$

30. $y'''+9y''+27y'+27y=0$. Найти сумму корней характеристического уравнения.

1.	–3	**2.**	0	**3.**	3	**4.**	–9

31. Найти частное решение $(x^2-1)y'+2xy=0,\ y(0)=1$.

1.	$y=\frac{1}{x^2-1}$	**2.**	$y=\frac{-1}{x^2+1}$	**3.**	$y=\frac{-1}{x^2-1}$	**4.**	$y=\frac{1}{x^2+1}$

32. Найти третий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n!}$.

1.	$-\frac{1}{2}$	**2.**	$-\frac{1}{3}$	**3.**	$-\frac{2}{3}$	**4.**	$-\frac{3}{4}$

33.Определить радиус сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt{n}}$.

1.	$\frac{1}{5}$	**2.**	$\frac{2}{5}$	**3.**	5	**4.**	25

34.Сколькими способами можно составить группу спортсменов из трех юношей и двух девушек для участия в соревнованиях, если имеется 20юношей и 5 девушек?

1.	10200	**2.**	9400	**3.**	11000	**4.**	11400

35. Считается равновероятным попадание реактивного снаряда в любую точку площади в 10000 $ì^2$. Определить вероятность непопадания снаряда в мост, находится на этой площади, если его длина 100м, ширина 10м.

1.	0,8	**2.**	0,7	**3.**	0,9	**4.**	0,6

36. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появления событий А в двух независимых испытаниях, если вероятность появления события в этих испытаниях одинаковая и известно, что $M(X) = 1,2$.

1.	0,46	**2.**	0,48	**3.**	0,5	**4.**	0,44

37.Найти выборочную среднюю по распределению выборки объёма $n = 20$.

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

$C = 2620$ - ложный нуль.

1.	2622	**2.**	2621	**3.**	2619	**4.**	2618

38.Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания а нормально распределенного признака Х генеральной совокупности, если $\bar{x}_в = 10,2;\ n = 16,\ \delta = 4$.

1.	(7,6; 11,7)	**2.**	(7,61; 12,62)	**3.**	(7,62; 12,78)	**4.**	(7,62; 11,78)

39. Если основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 30,$ то конкурирующей не может быть

1.	$H_1 : a \geq 20$	**2.**	$H_1 : a > 30$	**3.**	$H_1 : a \leq 29$	**4.**	$H_1 : a = 31$

5. Учебно-методические материалы

Основная литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов.-М.:ЮНИТИ, 1998.
2. Боровков А.А. Математическая статистика.- Новосибирск: Издательство института математики. 1997.
3. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.П. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии:Учеб. пособие /Гос. ун-т Высш. шк. экономики.- М., 1998.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Уч. пособие для вузов. Рекомендовано министерством образования РФ. 3-е изд., стер. - М.: Высш. шк. 2000.
5. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под. ред. Проф. Н.Ш. Кремера.-2-е изд., перераб. и доп.-М.: ЮНИТИ, 2000.
6. Дубров А.М. Многомерные статистические методы: для экономистов и менеджеров. Учебник для вузов. Рекомендовано министерством образования РФ./Дубров А.М., Мхитарян В.С., ТрошинЛ.И. -М.: Финансы и статистика.2000.
7. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа: Учебник .- Новосибирск: Изд-во института математики. -(Современная математика – студентам и аспирантам) в 2 частях. 1999.
8. Теория вероятности : Учебник для вузов. Рекомендовано министерством образования РФ. Под ред. В.С. Зарубина, и А.П. Кришенко.-М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана. 1998.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб.: Лань в 3-х томах. 1997.
10. Харичева Д.А. Теория вероятностей: Учебное пособие. - Благовещенск: АмГу 1999.
11. Хавин В.П. Основы математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной независимой переменной: Учебное пособие. Рекомендовано министерством образования РФ. – СПб.: Лань, 1998.

Дополнительная литература

1. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры – М.Наука, 1984.
2. Беклемешева Л.А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.–М.Наука, 1984.
3. Клетенник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. –М.Наука, 1986.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия –М.Наука, 1983.
5. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия –М.Наука, 1983.

6. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа –М.Наука, 1982.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. –М.Наука, 1988.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление –М.Наука, 1988.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды –М.Наука, 1985.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачи –М.Наука, 1987.
11. Пискунов А.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Для втузов –М.Наука, 1985.
12. Берман А.Р. Краткий курс высшей математики. –М.Наука, 1984.
13. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа --М.Наука, 1984.
14. Чистяков В.П. Курс теории вероятности. – 4-е издание – М.:Агар, 1996.
15. Виноградова И.А. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под общей редакцией В.А.Садовничего. – М.:Изд-во Моск. Ун-та, 1988.
16. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. И доп. –М.:Наука.1981.
17. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М., «Высш. Школа», 1972.
18. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике –М.:Наука.1987.
19. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах М.: Высш. Школа 1980.
20. Методические разработки кафедры «Общей математики»
21. Карпова С.В, Литовка Г.В, Маничева Т.А, Филимонова А.П. Элементы векторной алгебры практикум. – Благовещенск: АмГУ, 2001.
22. Костенко С.В, Литовка Г.В, Филимонова А.П, Юрьева Т.А. Аналитическая геометрия на плоскости.– Благовещенск:АмГУ, 2004.
23. Вохминцева Г.П, Филимонова А.П, Шевченко И.Н. Интегрирование функций одной переменной. – Благовещенск:АмГУ, 2005.
24. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н, Филимонова А.П. Шевченко И.Н. Ряды (практикум).– Благовещенск:АмГУ, 2001.
25. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Филимонова А.П. Шевченко И.Н. Дифференциальные уравнения. Практикум. – Благовещенск:АмГУ, 2000.

6. Карта обеспеченности профессорско-преподавательским составом.

Специальности	Наименование дисциплин в соответствии с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
		Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образовательное учреждение профессионального образования окончил, специальность по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
					Всего	В т. ч. педагогический			
						Всего	В т. ч. по преподаваемой дисциплине		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
080401 040201	Математика	Филимонова А.П., доцент	БГПИ, учитель математики	к.ф-м.н., доцент	38	35	15	АмГУ, ОМиИ	1 ст. Штатный
040201	Математика	Голик А.В., ассистент	ДВГУ, математик	-	16	16	10	АмГУ, ОМиИ	1 ст.Штатный