Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой АППиЭ
___________А.Н. Рыбалев
«______»___________2007г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

для специальностей 140204 «Электрические станции»
140205 «Электроэнергетические системы и сети»
140211 «Электроснабжение»
140203 «Релейная защита и автоматизация электроэнергетических систем»
140101 «Тепловые электрические станции»
220301 «Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)
260901 «Технология швейных изделий»
260902 «Конструирование швейных изделий»
260704 «Технология текстильных изделий»

Составитель: Т.А. Луганцева

Благовещенск 2007 г.

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

энергетического факультета

Амурского государственного

университета

Т.А. Луганцева

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов очной и заочной форм обучения специальностей

140204 «Электрические станции»,

140205 «Электроэнергетические системы и сети»,

140211 «Электроснабжение»,

140203 «Релейная защита и автоматизация электроэнергетических систем»,

140101 «Тепловые электрические станции»,

220301 «Автоматизация технологических процессов и производств

(по отраслям),

260901 «Технология швейных изделий»,

260902 «Конструирование швейных изделий»,

260704 «Технология текстильных изделий»

- Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007.

Учебно-методические рекомендации ориентированы на оказание помощи студентам очной и заочной форм обучения, изучающих курс «Теоретическая механика».

Рецензент: Ларченко Н.М., канд. техн. наук, доцент БГПУ

Федеральное агентство по образованию РФ
Амурский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УНР
_______________Е.С. Астапова

«__» _______________ 200__г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по механике (теоретической механике)

для специальности 140204 "Электрические станции",
140205"Электроэнергетические системы и сети",
140211 "Электроснабжение",
140203 "Релейная защита и автоматизация электроэнергетических систем"

Курс 1 Семестр 2

Лекции 36 час. Экзамен 2 семестр

Практические занятия 18 час.

Самостоятельная работа 27 час.

Всего часов 81

Составитель Т.А. Луганцева, доцент

Факультет энергетический

Кафедра АППиЭ

2006 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта ВПО (регистрационный номер 214 тех/дс)

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры АППиЭ

12 сентября 2006 г., протокол № 1.

Заведующий кафедрой А.Н. Рыбалёв

Рабочая программа одобрена на заседании УМС по направлению "Электроэнергетика" "___"_____________200__ г., протокол № ___.

Председатель Н.В. Савина

СОГЛАСОВАНО
Начальник УМУ
__________Г.Н. Торопчина
"___"___________ 200__ г.

СОГЛАСОВАНО
Председатель УМС ЭФ
___________Ю.В. Мясоедов
"___"___________ 200__ г.

СОГЛАСОВАНО
Заведующий выпускающей кафедрой
______________ Н.В. Савина
"___"______________ 200__ г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1. Цель преподавания дисциплины

Целью данной дисциплины является изучение общих законов, которым подчиняются движение и равновесие материальных тел и возникающие при этом взаимодействия между телами.

1.2. Задачи изучения дисциплины

В итоге изучения курса теоретической механики студент должен знать основные понятия и законы механики и вытекающие из этих законов методы изучения равновесия и движения материальной точки, твердого тела и механической системы, понимать те методы механики, которые применяются в прикладных дисциплинах, уметь прилагать полученные знания для решения соответствующих конкретных задач техники, самостоятельно строить и исследовать математические и механические модели технических систем, квалифицированно применяя при этом основные алгоритмы высшей математики и используя возможности современных компьютеров и информационных технологий.

1.3. Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины

"Теоретическая механика" - одна из фундаментальных естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла. На материале теоретической механики базируются дисциплины (или разделы дисциплин) "Сопротивление материалов", “Прикладная механика”, "Теория механизмов и машин", "Детали машин", “Гидравлика”, а также большое число специальных инженерных дисциплин, посвященных изучению динамики и управления машин, методов расчета и эксплуатации различных машин и сооружений. Изучение теоретической механики дает также тот минимум фундаментальных знаний, на основе которых будущий специалист сможет самостоятельно овладевать новой информацией, с которой ему придется столкнуться в производственной и научной деятельности.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Федеральный компонент

ОПД.Ф.03.01. Теоретическая механика: кинематика. Предмет кинематики. Векторный способ задания движения точки. Естественный способ задания движения точки. Понятие об абсолютно твердом теле. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. Общий случай движения свободного твердого тела. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

Динамика и элементы статики. Предмет динамики и статики. Законы механики Галилея-Ньютона. Задачи динамики. Свободные прямолинейные колебания материальной точки. Относительное движение материальной точки. Механическая система. Масса системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Количество движения материальной точки и механической системы. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Понятие о силовом поле. Система сил. Аналитические условия равновесия произвольной системы сил. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Принцип Даламбера для материальной точки. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

2.2. Наименование тем, их содержание и объем в лекционных часах

2.2.1. Введение в кинематику, основные понятия и определения. Кинематика точки.

Объем - 2 часа.

2.2.2. Простейшие движения твердого тела

Объем - 2 часа.

2.2.3. Сложное движение точки.

Объем - 2 часа.

2.2.4. Плоское движение твердого тела.

Объем - 2 часа.

2.2.5. Сферическое движение и общий случай движения твердого тела.

Объем - 2 часа.

2.2.6. Сложное движение твердого тела.

Объем - 2 часа.

2.2.7. Предмет динамики и статики. Законы механики Галилея-Ньютона. Системы сил. Сходящиеся силы. Методы расчета ферм.

Объем - 2 часа.

2.2.8. Моменты силы относительно точки и оси. Теория пар сил.

Объем - 2 часа.

2.2.9. Условия равновесия плоской и пространственной системы сил. Главный вектор и главный момент.

Объем - 3 часа.

2.2.10. Дифференциальные уравнения движения материальной точки и механической системы.

Объем - 1 час.

2.2.11. Моменты инерции.

Объем - 1 час.

2.2.12. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.

Объем - 2 часа.

2.2.13. Аналитические связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Объем - 2 часа.

2.2.14. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Центр масс. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении количества движения.

Объем - 2,5 часа.

2.2.15. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Работа силы. Теорема об изменении кинетической энергии. Понятие о силовом поле.

Объем - 3 часа.

2.2.16. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси.

Объем - 2 часа.

2.2.17. Малые колебания. Устойчивость положения равновесия. Свободные колебания для систем с одной степенью свободы.

Объем - 2 часа.

2.2.18. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки. Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения твердого тела.

Объем - 1 час.

2.3. Практические занятия

2.3.1. Кинематика точки.

Объем - 2 часа.

2.3.2. Сложное движение точки.

Объем - 2 часа.

2.3.3. Плоское движение твердого тела.

Объем - 2 часа.

2.3.4. Сходящаяся и плоская системы сил.

Объем - 2 часа.

2.3.5. Пространственная система сил. Приведение.

Объем - 2 часа.

2.3.6. Дифференциальные уравнения движения материальной точки и механической системы.

Объем - 2 часа.

2.3.7. Принцип Даламбера и общее уравнение динамики.

Объем - 2 часа.

2.3.8. Теорема о движении центра масс, теорема об изменении количества движения.

Объем - 2 часа.

2.3.9. Теорема об изменении кинетической энергии, теорема об изменении кинетического момента.

Объем - 2 часа.

2.4. Самостоятельная работа студентов

Расчетно-графические задания:

2.4.1. Кинематика:

2.4.1.1. К-1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.

2.4.1.2. К-2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.

2.4.1.3. К-7. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.

2.4.1.4. К-3. Кинематический анализ плоского механизма.

2.4.2. Статика:

2.4.2.1. С-2. Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы.

2.4.2.2. С-3. Определение реакций опор составной конструкции.

2.4.3. Динамика:

2.4.3.1. Д-19. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы.

2.4.3.2. Д-1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

2.4.3.3. Д-10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.

2.5. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний

2.5.1. Контрольная работа N 1. Защита расчетно-графических работ по разделу "Кинематика".

2.5.2. Контрольная работа N 2. Защита расчетно-графических работ по разделу "Статика".

2.5.3. Контрольная работа N 3. Защита расчетно-графических работ по разделу "Динамика".

2.6. Вопросы к экзамену

1. Основные понятия и определения теоретической механики и кинематики.
2. Способы задания движения точки.
3. Скорость и ускорение точки при задании ее движения векторным способом.
4. Скорость и ускорение точки при задании ее движения естественным способом.
5. Скорость и ускорение точки при задании ее движения в декартовых координатах.
6. Частные случаи описания движения точки.
7. Поступательное движение абсолютно твердого тела. Уравнение движения. Теорема.

8. Вращательное движение абсолютно твердого тела, характеристики вращательного движения. Формула Эйлера. Линейная скорость, линейные ускорения точки.
9. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Способы передачи вращательного движения.
10. Понятие абсолютного, относительного и переносного движения. Теорема сложения скоростей. Теорема сложения ускорений при поступательном переносном движении.
11. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса). Определение направления кориолисова ускорения.
12. Плоскопараллельное движение. Уравнение движения плоской фигуры. Теорема о разложении плоского движения. Теорема о проекциях.
13. Определение скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Мгновенный центр скоростей.
14. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса.
15. Углы Эйлера. Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.
16. Теорема о конечном перемещении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Мгновенная ось вращения.
17. Угловая скорость и угловое ускорение при вращении тела вокруг неподвижной точки.
18. Линейные скорости и ускорения тела при сферическом движении.
19. Разложение движения свободного твердого тела на поступательное и сферическое. Уравнения движения, скорости и ускорения точек свободного твердого тела в общем случае.
20. Сложные поступательные движения.
21. Сложные вращательные движения твердого тела.
22. Приведение мгновенных поступательных и вращательных движений твердого тела.
23. Раздел статики и динамики. Цели и задачи, законы механики Ньютона-Галилея. Аксиомы статики. Реакции связей.
24. Система сходящихся сил. Условие равновесия. Фермы: метод вырезания узлов, метод Риттера.
25. Проекции вектора силы на ось и на плоскость.
26. Алгебраический и векторный момент силы относительно точки.
27. Момент силы относительно оси.
28. Формулы для моментов силы относительно осей координат.
29. Пара сил. Основные правила при работе с парой сил.
30. Момент пары как вектор.
31. Сложение пар и условие равновесия, свойства пар сил.

32. Приведение произвольной системы сил к простейшему виду (теорема Пуансо).
33. Частные случаи приведения плоской системы сил.
34. Главный вектор и главный момент. Условия и уравнения равновесия плоской системы сил.
35. Частные случаи приведения пространственной системы сил. Условия и уравнения равновесия пространственной системы сил.
36. Теорема Вариньона. Статически определенные и статически неопределенные задачи. Сочлененные конструкции.
37. Классические законы динамики. Инерциальная система отсчета.
38. Дифференциальные уравнения материальной точки в декартовых координатах.
39. Дифференциальные уравнения материальной точки при естественном способе задания движения точки.
40. Решение первой основной задачи динамики.
41. Решение второй основной задачи динамики.
42. Моменты инерции материальной точки, механической системы и твердого тела относительно полюса, оси и плоскости. Радиус инерции и его физический смысл. Моменты инерции однородных тел. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
43. Аналитические связи и их классификация.
44. Обобщенные координаты, скорости, ускорения и возможные перемещения. Обобщенные силы.
45. Принцип возможных перемещений для точки и механической системы.
46. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции. Частные случаи приведения сил инерции.
47. Принцип Даламбера-Лагранжа. Общее уравнение динамики.
48. Определение центра тяжести тел. Методы нахождения центров тяжести.
49. Центры тяжести простейших тел. Центр масс.
50. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения.
51. Количество движения для материальной точки и механической системы.
52. Теорема об изменении количества движения (дифференциальный вид). Закон сохранения.
53. Элементарный и полный импульс. Теорема об изменении количества движения (интегральный вид). Законы сохранения.
54. Кинетическая энергия материальной точки, механической системы и твердого тела (теорема Кёнига).
55. Работа силы.
56. Теорема об изменении кинетической энергии.
57. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Поверхности уровня. Силовая линия.
58. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.
59. Кинетический момент точки и системы.

60. Кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении тела.
61. Теорема об изменении кинетического момента для точки и механической системы.
62. Законы сохранения. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.
63. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.
64. Дифференциальные уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.
65. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.
66. Малые колебания. Устойчивость положения равновесия. Теорема Лагранжа-Дирихле.
67. Колебания системы с одной степенью свободы - собственные линейные колебания.
68. Линейное сопротивление и диссипативная функция и их влияние на малые собственные колебания системы с одной степенью свободы.

3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1. Основная литература

3.1.1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учебник. - М.: Наука, 1985 г. Ч. 1,2 (и предыдущие издания).

3.1.2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

3.1.3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. СПб, 1999. Изд. 7-е стереотипное и предыдущие издания.

3.1.4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов, М.: Высш. шк., 2002, 12-е изд. стереотипное и предыдущие издания.

3.1.5. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник. - М.: Высшая школа, 1990. Ч. 1,2 (и предыдущие издания).

3.1.6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

3.1.7. Цывильский В.Л. Теоретическая механика. М.: Высш. школа, 2001 г.

3.2 Дополнительная литература

3.2.1. Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. Пособие. – М.: Наука, 1984. – Ч.1 и 2 (и предыдущие издания).

3.2.2. Бражниченко Н.А. и др. Сборник задач по теоретической механике: Учеб.пособие. - М.: Судпромгиз, 1986 (и предыдущие издания).

3.2.3. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высш. шк. 2000.

3.3. Перечень наглядных пособий, методических указаний и методических материалов

3.3.1. Модели механизмов.
3.3.2. Тесты.
3.3.3. Учебный видеофильм "Динамика",
3.3.4. Программы расчета на ПЭВМ.
3.3.5. Плакаты по теоретической механике.

ПЛАН-КОНСПЕКТ

Лекций по курсу «Теоретическая механика»

ЛЕКЦИЯ 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Теоретическая механика – как предмет. Пространство и время в классической механике. Модели физических тел. Векторный способ описания движения: положение точки, закон движения, перемещение, средняя и мгновенная скорость точки (модуль и направление), годограф радиуса-вектора, годограф скорости, среднее и мгновенное ускорение точки (модуль и направление). Координатные способы описания движения:
- прямоугольные декартовы координаты – уравнения движения и уравнение траектории, проекции, модуль и направление скорости и ускорения;
- естественные координаты – закон движения, естественный трехгранник, модуль и направление скорости и ускорения. Частные случаи описания движений.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

1. Движением называется изменение любых свойств материи. Механическое движение является простейшим видом движения – это перемещение одних тел относительно других. Главным свойством механического движения является его относительность, поэтому выбирают

тело отсчета – физическое тело относительно которого рассматривается механическое движение других тел.

2. Линия, которую описывает материальная точка к конкретной системе отсчета, называется траекторией точки.

Если траекторией является прямая линия, движение точки называется прямолинейным, если кривая – криволинейным.

3. Задать движение точки – это значит указать закон, по которому можно определить положение точки в пространстве в любой момент времени.

4. Рассмотрим три способа движения точки:

а) векторный

б) координатный

в) естественный.

1.1 **Векторный способ**

1. Положение точки в векторном способе описания движения определяется радиусом-вектором, направленным из начала координат (от тела отсчета) к данной точке: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

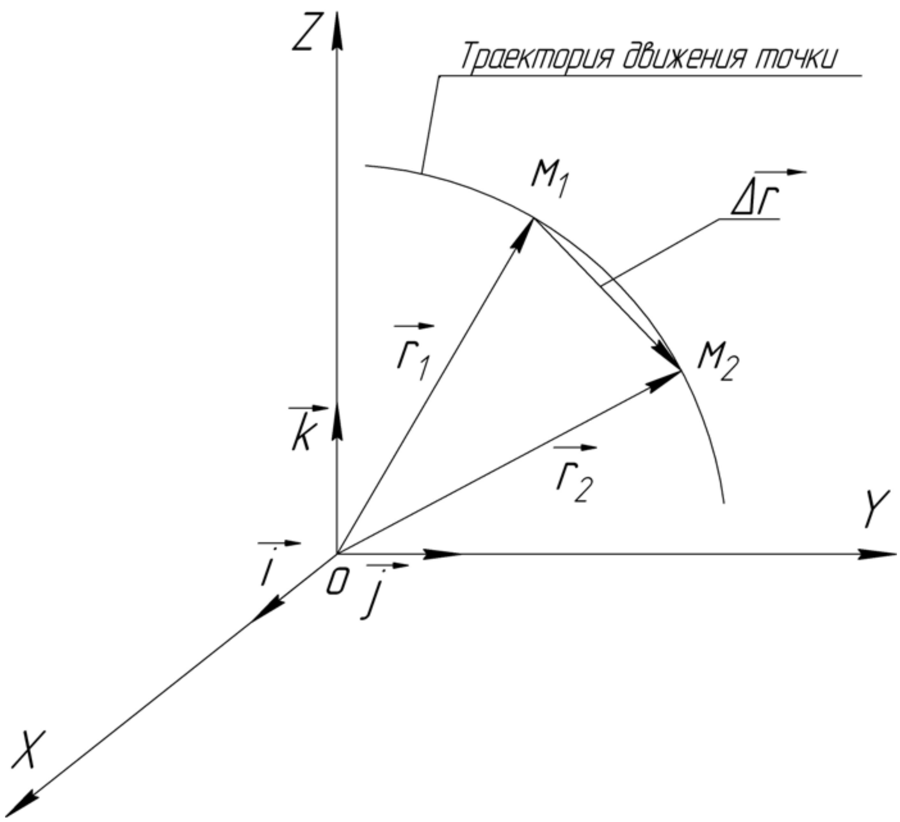


Рис. 1

2. Годографом радиуса-вектора называется геометрическое место точек концов вектора в различные моменты времени, начало которых совмещены в одной фиксированной точке, т.е. годограф это кривая. Годографом радиуса-вектора является траектория.

1. Перемещение это вектор, направленный из одной точки в точку конечного положения, т.е. это изменение радиуса-вектора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

1.2 **Прямоугольные декартовы координаты**

Положение точки в декартовой системе координат OXYZ определяется тремя координатами x,y,z.

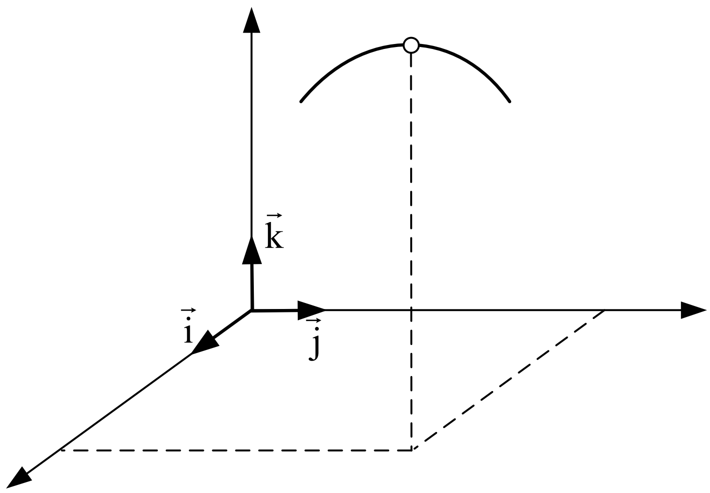


Рис.2

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется уравнением движения, одновременно они являются параметрическими уравнениями траектории точки, т.е. x =x(t); y = y(t); z = z(t).

Уравнение траектории:

$$f(x, y, z) = 0$$

2. Чтобы определить уравнение траектории точки необходимо из уравнений движения исключить время. Уравнение траектории имеет вид: $f(x,y,z) = 0$.

Пример.

Движение точки в плоскости OXY заданы уравнениями $x = x(t)$,

$y = y(t)$. (x.y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории.

1. $x = t$; $y = 2t$; $y = 2x$ - прямая
2. $x = t$; $y = 2t^2$; $y = 2x^2$ - парабола
3. $x = 5 \cos \omega t$

   $y = 5 \sin \omega t + 2$

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ получим: $\cos\omega t = \frac{x}{5}$; $\sin\omega t = \frac{(y-2)}{5}$;

Возведём в квадрат обе части и сложим:

$x^2 + (y - 2)^2 = 25$ - окружность.

4. $x = 3 \sin \omega t$;

   $y = 5 \cos \omega t$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$ - эллипс.

5. $x = \cos(\pi t)$ (1)

   $y = 2 \sin(\pi t/2)$ (2)

Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$; получим:

$$\cos(\pi t) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Тогда уравнение (1) имеет вид:

$$x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Из уравнения (2)

$$\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{y}{2}$$

Подставив получим:

$X = 1 - 0{,}5y^2$ - парабола.

6. $x = t + 1$

$$y = \frac{1}{2t+2};$$

$$y = \frac{1}{2x}$$ - гипербола.

1.3 **Естественные координаты**

Естественные координаты – дуговые координаты, связанные с траекторией движения.

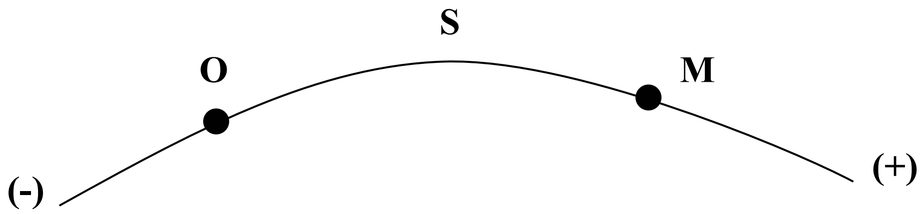


Рис.3

Задается: 1. траектория точки;

2. начало отсчета – точка 0 на траектории;

3. положительное направление отсчета;

4. масштаб;

5. Уравнение движения точки в естественной форме или закон движения точки по заданной траектории, т.е. функция S = S(t).

2 СКОРОСТЬ ТОЧКИ

2.1 **Векторный способ:**

а) Скорость точки в данный момент равна первой производной по времени от радиуса-вектора точки при постоянных, неизменных ортах.

Скорость характеризует собой быстроту движения точки по траектории.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

б) Годограф скорости точки.

Скорость направлена по касательной к годографу радиуса-вектора, т.е. по касательной к траектории.

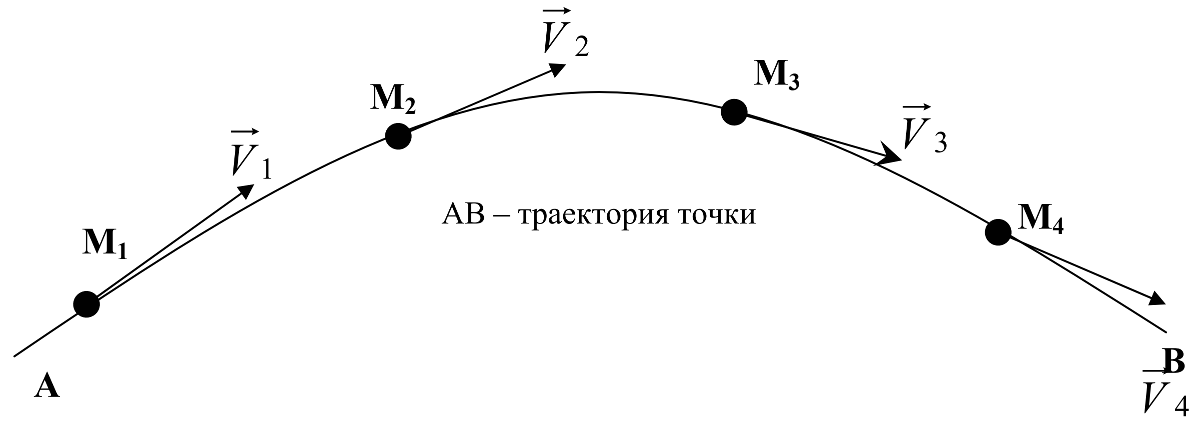


Рис. 4

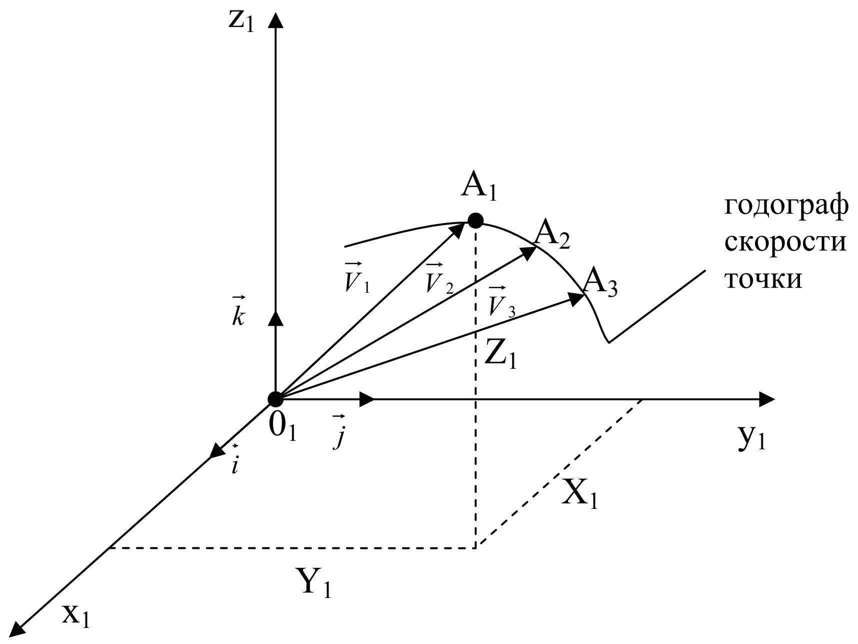


Рис. 5

Годограф скорости – геометрическое место вектора скорости в последовательные моменты времени, начало которых совмещены в одной фиксированной точке.

2.2 Координатный способ описания движения

2.2.1 Прямоугольные декартовы координаты

$$\left.\begin{array}{l} V_X = \dot{x} \\ V_Y = \dot{y} \\ V_Z = \dot{z} \end{array}\right\}$$

проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным соответствующих координат точки по времени.

Модуль скорости точки:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Направление скорости определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(V \hat{} ox) = \frac{V_X}{|V|};$$

$$\cos(V \hat{} oy) = \frac{V_Y}{|V|};$$

$$\cos(V \hat{} oz) = \frac{V_Z}{|V|};$$

2.2.2 Естественные координаты

$$V = \dot{S}\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной;

$\dot{S} = \dfrac{dS}{dt}$ **- это проекция скорости на касательную или алгебраическая величина скорости;**

Вектор $\vec{\tau}$ - направлен в сторону возрастания дуговой координаты S, т.е. скорость направлена по касательной к траектории. Знак алгебраической величины определяет направление движения точки по траектории.

3 УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Векторный способ

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$

Ускорением называется первая производная по времени от вектора скорости V или вторая производная по времени от радиуса-вектора $\vec{r}$ при постоянных неизменных ортах. Вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости. Ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля и направление скорости точки.

3.2 **Прямоугольные декартовы координаты**

$$\left.\begin{aligned} a_X &= \dot{V}_X = \ddot{x} \\ a_Y &= \dot{V}_Y = \ddot{y} \\ a_Z &= \dot{V}_Z = \ddot{z} \end{aligned}\right\}$$ - проекции ускорения точки на координатные оси

Модуль ускорения точки

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Направление определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(\vec{a} \wedge ox) = \frac{a_X}{\left|\vec{a}\right|};$$

$$\cos(\vec{a} \wedge oy) = \frac{a_Y}{\left|\vec{a}\right|};$$

$$\cos(\vec{a} \wedge oz) = \frac{a_Z}{\left|\vec{a}\right|};$$

3.3 Естественные координаты

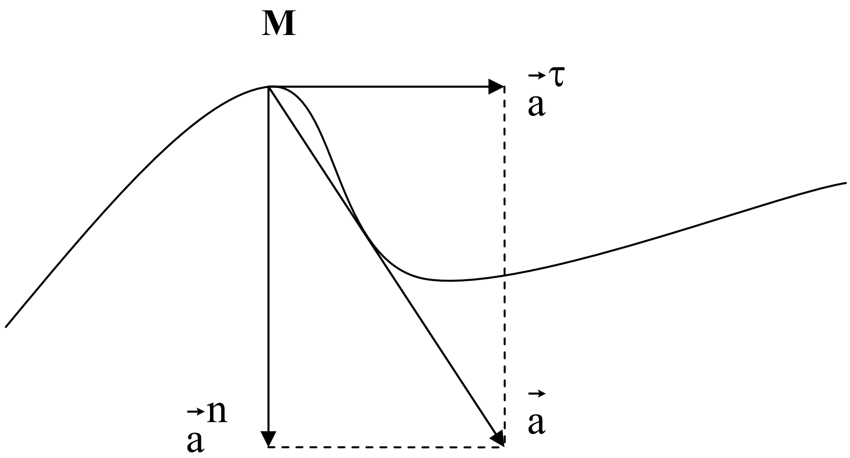


Рис. 6

Ускорение точки равно векторной сумме касательного $\vec{a}^{\tau}$ и нормального $\vec{a}^{n}$ ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{n}$$

Модуль ускорения:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(a^{\tau}\right)^2 + \left(a^{n}\right)^2}$$

Касательное ускорение $\vec{a}^{\tau}$:

$$\vec{a}^{\tau} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}$$

$\vec{a}^{\tau}$ - характеризует изменение скорости по величине:

$$\left|\vec{a}^{\tau}\right| = \ddot{S} = \frac{dV}{dt}$$

Практическая формула:

$$\vec{a}^{\tau} = \frac{V_X a_X + V_Y a_Y + V_Z a_Z}{|V|}$$

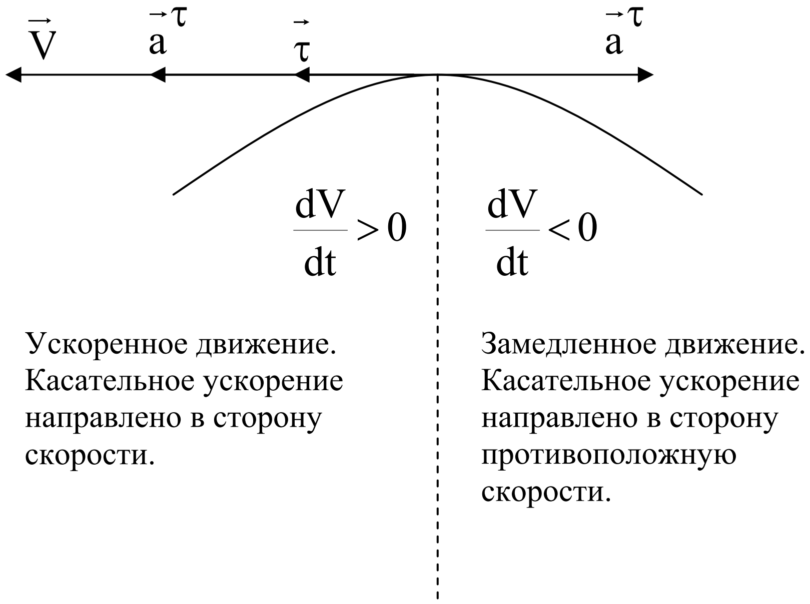


Рис. 7

Нормальное ускорение $\vec{a}^{n}$:

$$\vec{a}^{n} = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$$ - характеризует изменение скорости по направлению.

$\rho -$ радиус кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение $\vec{a}^{n}$ направлено по главной нормали в сторону вогнутости траектории(к центру кривизны траектории в данной точке).

$$a^{n} = \frac{V^2}{\rho}$$ - модуль нормального ускорения.

ρ- радиус кривизны траектории в данной точке. В частном случае движения точки по окружности (или дуге окружности) радиус кривизны траектории во всех ее точках постоянный $\rho = r = \mathrm{const}$.

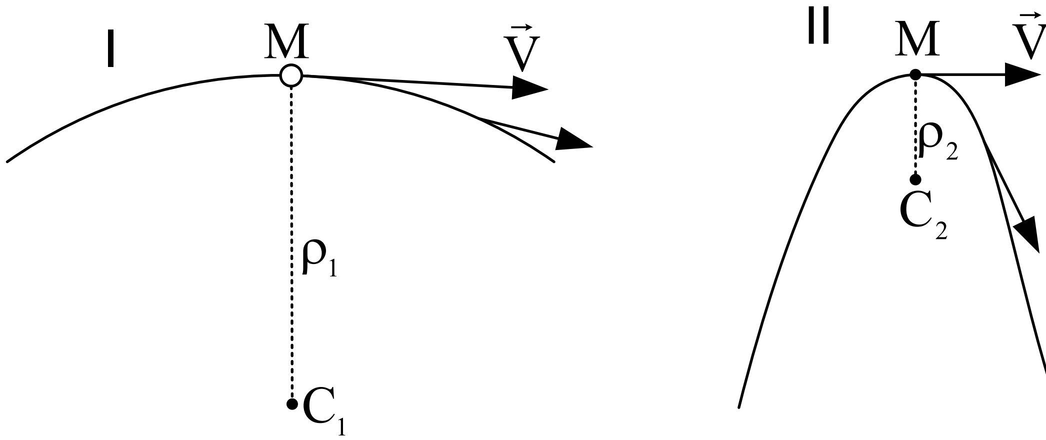


Рис.8

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1) Прямолинейное движение:

$\vec{a}^{n} = \dfrac{V^2}{\rho}\vec{n} = 0$ - так как для прямой линии $\rho = \infty$ и, следовательно, ускорение

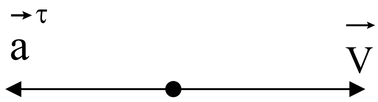
точки $\vec{a} = \vec{a}^{\tau} = \dfrac{dV}{dt}\vec{\tau}$

Направление $\vec{a}^{\tau}$ зависит от знака производной $\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ и алгебраической

величины V.

а) V = const; $a^{\tau} = 0$ – прямолинейное равномерное движение.

б) $\vec{a}^{\tau}$ $\vec{V}$ $a^{\tau} > 0$ - ускоренное прямолинейное движение.



в) $a^{\tau} < 0$ замедленное прямолинейное движение.

2) Криволинейное движение:

а) Равномерное криволинейное движение: $\left|\vec{V}\right| = \text{const}$, $\vec{a}^{\,t} = 0$, $\vec{a} = \vec{a}^{\,n}$

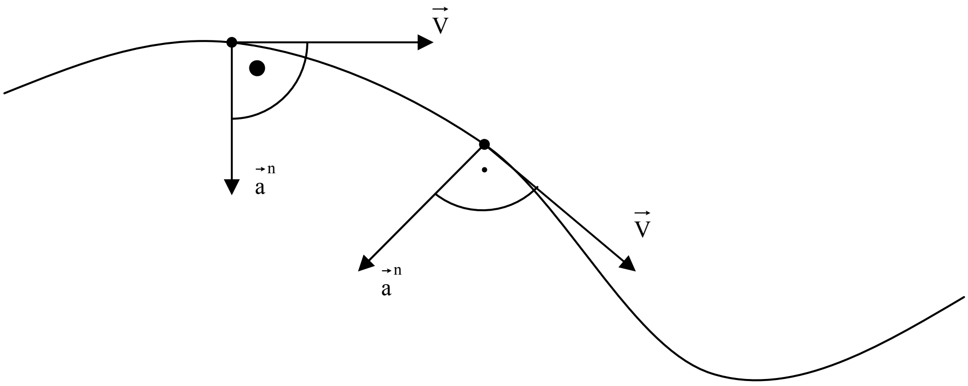


Рис. 9

Угол между вектором скорости и ускорения прямой.

При равномерном криволинейном движении точки скорость точки постоянна только по величине.

б) Ускоренное криволинейное движение: $\vec{a}^{\,\tau} < 0$

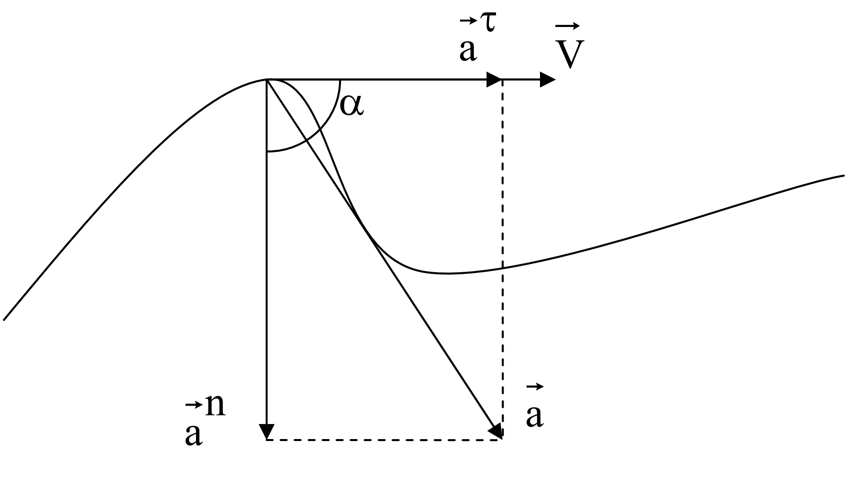


Рис. 10

Угол α между вектором скорости $\vec{V}$ и вектором ускорения $\vec{a}$ острый.

в) Замедленное криволинейное движение: $\vec{a}^{\tau} < 0$

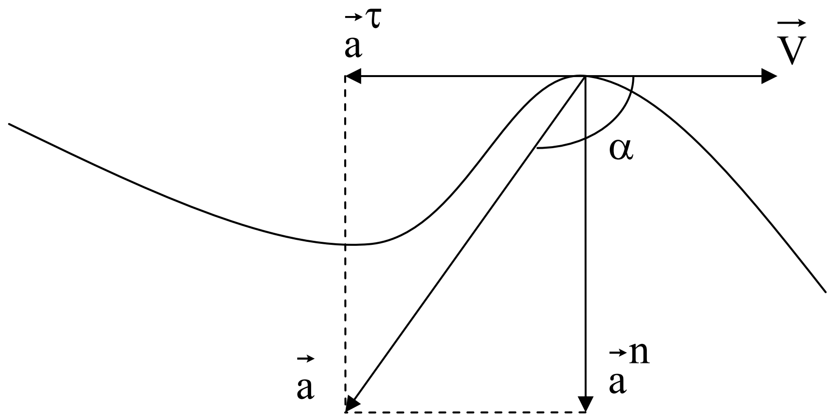


Рис.11

Угол α между вектором скорости $\vec{V}$ и вектором ускорения $\vec{a}$ тупой.

3) Особые точки на кривой.

а)

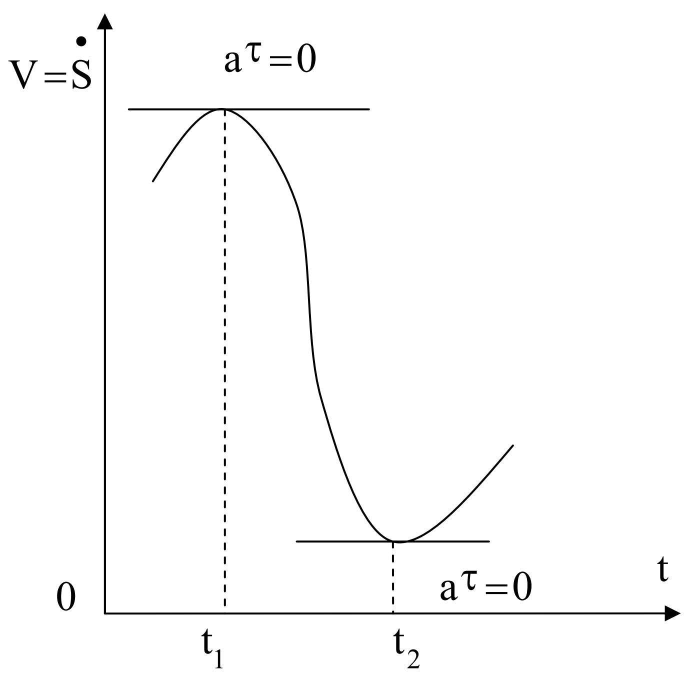


Рис.12

$$a^{\tau}\Big|_{t=t_1} = \left|\frac{dV}{dt}\right| = 0$$

Касательное ускорение точки при неравномерном движении может обратиться в нуль, в точках, где скорость принимает максимальное или минимальное значение.

б)

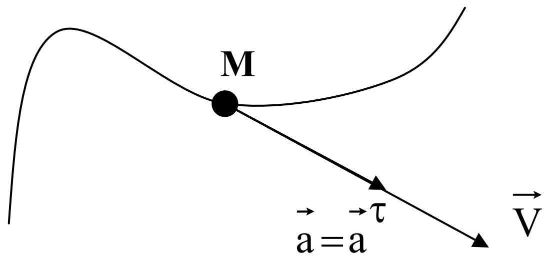


Рис.13

$$a^{n} = 0$$

Нормальное ускорение точки равно нулю в точках перегиба и при V = 0.

Уравнение равнопеременного движения независимо от вида его траектории имеет вид:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a^t t^2}{2}$$

Скорость точки в любой момент времени определяется из уравнения:

$V = V_0 + a^{\tau} \cdot t$

ЛЕКЦИЯ 2. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение: определение, уравнения движения, теорема, свойства поступательного движения. Вращательное движение: определение, уравнение движения, характеристики вращательного движения – угол поворота, угловая скорость и ускорение. Линейная скорость и ускорение точки при вращательном движении – модуль и направление (формула Эйлера). Формулы Пуассона. Способы передачи вращательного движения.

II.ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Поступательным называется такое движение, при котором каждая прямая, соединяющая любые две точки тела, движется параллельно самой себе. Поступательное движение бывает прямолинейным (движение поршня в цилиндре) и криволинейным (педаль велосипеда, кабины колеса обозрения).

При поступательном движении все точки абсолютно твердого тела имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения, поэтому достаточно изучить движение одной точки, т.е. при описании поступательного движения используется модель материальной точки.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

1. Уравнение вращения тела.

$\varphi = \varphi(t)$

где $\varphi -$угловая координата тела, измеряется в радианах.

2. Угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\ \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

3. Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\ \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2};$$

4. Если $\underline{\omega\varepsilon > 0}$ - вращение тела ускоренное.

Если $\underline{\omega\varepsilon < 0}$ - вращение тела замедленное.

5. Угол поворота тела при вращении в одном направлении $\varphi = |\varphi - \varphi_o|$.

где φ и φ_o - значение угловой координаты в моменты времени t и t_0.

6. $\varphi = 2\pi N$, где N – число оборотов.

7. $\omega = \dfrac{\pi N}{30}$, где n – число оборотов в минуту.

Пример.

Дано: $\varphi = t^2 - 4t$

Определить: угловую скорость, угловое ускорение и характер вращения тела в момент времени t = 1сек.

Решение:

1). $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 2t - 4;$ при t = 1 сек. $\omega = -2\ \dfrac{рад}{сек}$.

2). $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 2\ \dfrac{рад}{сек^2} = const.$

3). Так как $\omega\varepsilon = -4,$ т.е. $\underline{\omega\varepsilon < 0;}$ то вращение тела замедленное.

Равнопеременное вращение тела вокруг неподвижной оси.

1). Если $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = const,$ то вращательное движение тела называется - *равнопеременным.*

2). Угловая скорость

$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

ω_0 – начальная угловая скорость тела.

3). Угол поворота (при вращении в одном направлении).

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t;$$

4). В технике: n – число оборотов в минуту.

$n = n_0 + ET,$ где T – в минутах.

$$N = n_0 T + \frac{ET^2}{2} \qquad E = \frac{об}{мин^2};$$

$$N = \frac{n_0 + n}{2} \cdot T \qquad \varepsilon = \frac{\pi E}{1800}\ \frac{рад}{сек^2}$$

Пример 1. (380 м).

Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10 минут оно имеет угловую скорость, соответствующую 120 $\frac{\text{об}}{\text{мин}}$.

Сколько оборотов сделало колесо за 10 минут?

Решение.

$$N = \frac{n_0 + n}{2} \cdot T = \frac{120}{2} \cdot 10 = 600 \text{ оборотов}$$

Пример 2. (379 м).

Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 сек. он совершает 12,5 оборотов.

Какова его угловая скорость по истечении 5 сек?

Решение.

$$\omega = \underset{0}{\underset{\Downarrow}{\omega_0}} + \varepsilon t \qquad (1)$$

$$\varphi = \underset{0}{\underset{\Downarrow}{\varphi_0}} + \underset{0}{\underset{\Downarrow}{\omega_0}}\, t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (2)$$

с учётом того что, $\omega_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$ получим:

$$\omega = \varepsilon t \qquad (3)$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (4)$$

Выразим из (3) уравнения ε и подставим полученное значение в (4):

$$\varphi = \frac{\omega t}{2} \qquad (5)$$

$$\varphi = 2\pi N$$

(6)

Выразим из (5) уравнения ω:

$$\omega = \frac{2\varphi}{t}$$

(7)

С учётом уравнения (6) уравнение (7) запишется:

$$\omega = \frac{4\pi N}{t}$$

$$\omega = \frac{4\pi \cdot 12}{5} = 10\pi\left(\frac{рад}{сек}\right);$$

<u>Скорости и ускорения точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси.</u>

Величина скорости точки тела:

$$V = |\omega| \cdot h$$

где h – расстояние точки тела от оси вращения.

Ускорение любой точки тела равно сумме нормального (центростремительного) и касательного ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\,n} + \vec{a}^{\,\tau}$$

где $\vec{a}^{\,n} = \omega^2 h;$

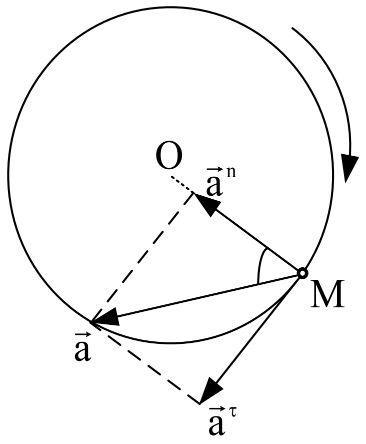
$$\vec{a}^{\,\tau} = |\varepsilon| \cdot h;$$

$\vec{a}^{\,n}$ – направлено по перпендикуляру к оси вращения

$\vec{a}^{\,\tau}$ – направлено по касательной к траектории точки в сторону углового ускорения.

Величина ускорения:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$



Острый угол α между $\vec a$ и $\vec a^n$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{|\varepsilon|}{\omega^2};$$

<u>Пример (481 Б)</u>

Вращение задано уравнением:

$$\varphi = 1{,}5t^2 - 4t;$$

(φ - в радианах, t - в секундах.)

<u>Определить:</u>

1) характер вращения при $t = 1$сек.

2) величины скорости и ускорения точки тела, отстоящей на расстоянии 0,2 м. от оси вращения, при $t = 1$ сек.

<u>Решение:</u>

1) $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 3t - 4$, при $t = 1$ сек. $\omega = -1\dfrac{\text{рад}}{\text{сек}}$.

2) $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 3\ \dfrac{\text{рад}}{\text{сек}^2} = \text{const}$.

3) $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0{,}2\sqrt{9+1} = 0{,}633\ \dfrac{\text{м}}{\text{сек}^2}$.

ЛЕКЦИЯ 3.СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Определение, теоремы о соотношении скоростей и ускорений при поступательном переносном движении, теорема Кориолиса, модуль и направление кориолисова ускорения.

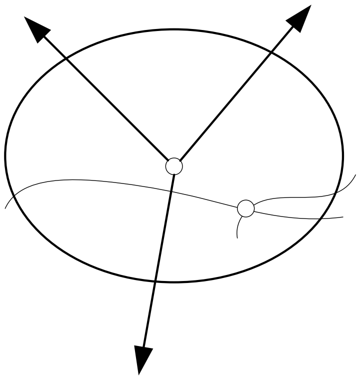
<u>Сложное движение точки.</u>

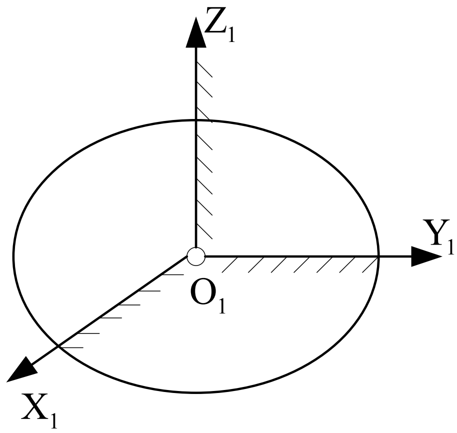
<u>Относительное, переносное и абсолютное движения.</u>

1. Движение точки **M** относительно подвижной системы отсчета **OXYZ** -называется *относительным движением*.

2. Движение точки **M** относительно неподвижной системы отсчета **$O_1X_1Y_1Z_1$** - называется *абсолютным движением*.

3. Движение подвижной системы отсчёта **OXYZ** относительно неподвижной системы отсчёта - называется *переносным движением*.





Z

$X_1Y_1Z_1$ – неподвижная система отсчета.

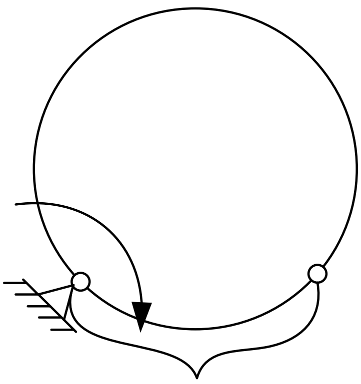
XYZ – подвижная система отсчёта.

CD – относительная траектория точки **M**.

B

EF – абсолютная траектория точки **M**.

Пример 1.



Точка **M** совершает *сложное движение*. Движение точки **M** по окружности является *относительным*. Вращение окружности вокруг оси **O** – *переносное движение*.

O

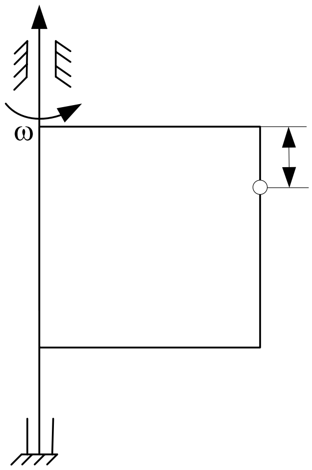
M

E

C

X

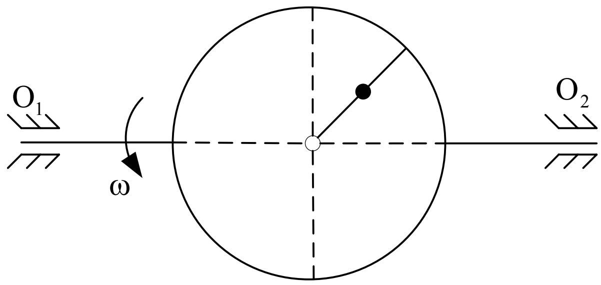
Пример 2.



Точка **M** совершает *сложное движение*. Движение точки **M** вдоль стороны **AB** квадрата является *относительным движением.* Вращательное движение квадрата вокруг оси **OZ** является для точки **M** – *переносным движением.*

Z

Пример 3.



Точка **M** совершает сложное движение. Движение точки **M** вдоль радиуса **OA** является относительным a движением. A Вращательное движение диска вокруг оси $\mathbf{O_1O_2}$ является для точки **M** – переносным движением.

a

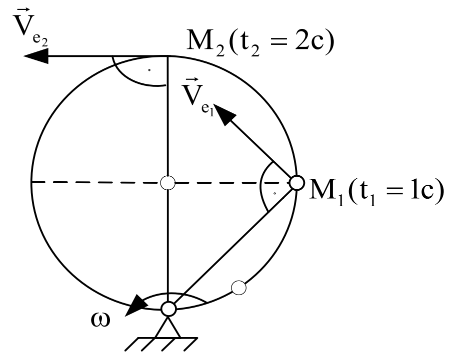
Скорость точки в относительном и переносном движениях.

Скорость точки в абсолютном движении называется - *абсолютной скоростью* и обозначается через $\vec{V}$.

Скорость точки в относительном движении называется - *относительной скоростью* и обозначается через $\vec{V}_r$.

Под *переносной скоростью* точки **M** понимается абсолютная скорость B (т.е. скорость относительно неподвижной системы отсчёта) той точки подвижного пространства, через которую в данный момент точка **M** проходит и обозначается $\vec{V}_e$.

Пример 4.



По окружности, радиус которой равен **R**, движется точка **M** по закону:

$$OM = S = \frac{\pi R}{2}t, \text{ (t – в сек., S – в см.).}$$

Окружность вращается вокруг оси **O**, перпендикулярной плоскости окружности, с постоянной угловой скоростью ω. Найти переносную скорость точки в момент времени: 1) $t_1 = 1$с. и 2) $t_2 = 2$с.

Решение:

1. Найдём положение точки **M** на окружности в момент $t_1 = 1$с., имеем:

$$\left| \begin{array}{l} S = \dfrac{\pi}{2} R \text{ см} \\ t = 1\text{сек.} \end{array} \right.$$

В этот момент точка **M**, пройдя четверть окружности, находится в положении M_1.

2. Переносная скорость $\vec{V}_{e_1} \perp O\vec{M}_1$ и её модуль

$$\vec{V}_{e_1} \left| \begin{array}{l} = \omega \cdot OM_1 = \omega R\sqrt{2}\,\dfrac{\text{см}}{\text{сек.}}, \text{ т.к. } OM_1 = R\sqrt{2} \\ t = 1\text{сек.} \end{array} \right.$$

3. Найдём положение точки **M** в момент времени $t = 2$ сек . Имеем:

$$S \left| \begin{array}{l} = \pi R, \text{ см.} \\ t = 2 \text{ сек.} \end{array} \right.$$

В этот момент точка **M**, пройдя половину окружности, будет в положении $\mathbf{M_2}$.

4. Переносная скорость $\vec{V}_{e_2} \perp \overrightarrow{OM_2}$ и её модуль

O

S M

$$\vec{V}_{e_2}\Big|_{t = 2\ \text{сек.}} = \omega \cdot OM_2 = \omega \cdot 2R\,\frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$$, т.к. $OM_2 = 2R$, см.

<u>Теорема сложения скоростей.</u>

Абсолютная скорость точки равна сумме её переносной и относительной скоростей т.е.

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

(1)

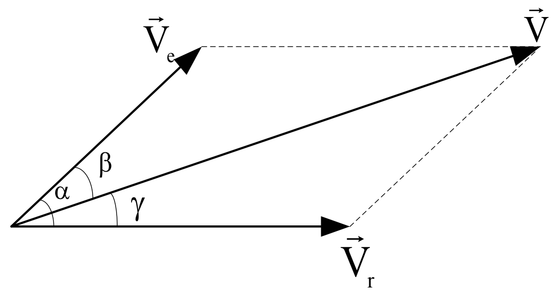
$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_eV_r\cos\alpha}$$

(2)

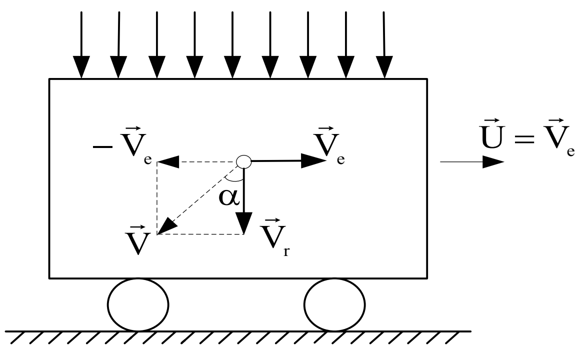
$\vec{V}$ - абсолютная скорость точки

$\vec{V}_e$ - переносная скорость точки

$\vec{V}_r$ - относительная скорость точки



Пример 5.



$\vec{V}$ - скорость капли дождя

$\vec{V}_e$ - скорость, поступательно движущегося автомобиля – переносная скорость

$\vec{V}_r$ - относительная скорость капли дождя

$$\vec{V}_r = \vec{V} + (-\vec{V}_e)$$

(3)

$$tg\alpha = \frac{V_e}{V}$$

(4)

Теорема сложения ускорений.

Абсолютное ускорение точки равно сумме её переносного, относительного и кориолисова ускорений, т.е.:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

(5)

$\vec{a}$ - абсолютное ускорение точки

$\vec{a}_e$ - переносное ускорение точки

$\vec{a}_r$ - относительное ускорение точки

$\vec{a}_c$ - ускорение Кориолиса точки

1. Переносное ускорение $\vec{a}_e$ определяется по формулам кинематики твёрдого тела.

Если переносное движение поступательное, то ускорение всех точек одинаково.

Если переносное движение – вращательное вокруг неподвижной оси, то

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$$

(6)

2. Относительное ускорение точки $\vec{a}_r$ определяется по формулам кинематики точки.

При координатном способе задания движения точки:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

(7)

При естественном способе задания движения точки:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$$

(8)

3. Ускорение Кориолиса

$$\vec{a}_c = 2 \cdot [\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r]$$

(9)

$$\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega}_e \cdot \vec{V}_r \cdot \sin(\vec{\omega}_e \hat{\ } \vec{V}_r)$$

(10)

Кориолисово ускорение точки равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость:

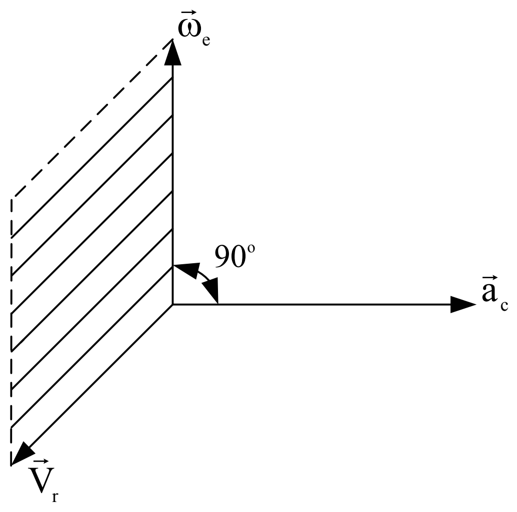
Кориолисово ускорение точки равно нулю в трёх случаях:

а) $\vec{\omega}_e = 0;$ - переносное движение – поступательное.

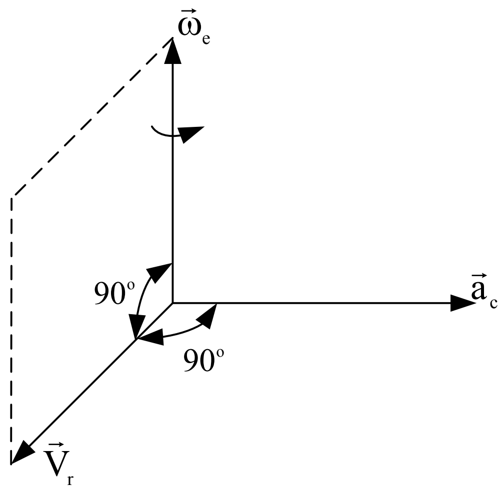
б) $\vec{V}_r = 0;$ - относительная скорость точки равна нулю.

в) $\vec{\omega}_e \| \vec{V}_r$.

Направление Кориолисового ускорения точки:



Частный случай $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$:



4. Модуль абсолютного ускорения точки:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}_x^{\,2} + \vec{a}_y^{\,2} + \vec{a}_z^{\,2}}$$

(11)

Направление $\vec{a}$ определяется по направляющим косинусам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

(12)

ЛЕКЦИЯ 4. ПЛОСКОПАЛАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Определение, теорема о разложении плоского движения, уравнения движения. Скорости при плоском движении: общий метод вычисления скоростей через полюс, теорема о проекциях, мгновенный центр скоростей: методы его вычисления и применения. Вычисление угловой скорости.

Центроиды. Вычисление ускорений через полюс, вычисление углового ускорения.

Учебные элементы теории плоскопараллельного движения и их основные связи

1. Определение плоскопараллельного движения твёрдого тела.
2. Уравнения плоскопараллельного движения тела:

$X_A = X_A(t), Y_A = Y_A(t), \varphi = \varphi(t).$

3. **Основные кинематические характеристики плоскопараллельного движения тела:**

$$\vec{V}_A, \vec{V}_A, \omega, \varepsilon.$$

4. Зависимость скоростями точек тела:

4.1. Теорема о сложении скоростей (теорема Эйлера) и определение скоростей точек тела с помощью теоремы графически и аналитически

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}.$$

4.2. Следствия из теоремы и определение скоростей точек тела с помощью следствия графически и аналитически.

5. Мгновенный центр скоростей – МЦС и определение скоростей точек тела с помощью МЦС:

$$V_A = \omega \cdot AP, V_B = \omega \cdot BP.$$

6. Определение положений МЦС в различных случаях.

7. Теорема о сложении ускорений (теорема Эйлера) и определение ускорений точек тела с помощью теоремы о сложении ускорений:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + a^{\tau}_{B/A} + a^{n}_{B/A}.$$

8. Ускорение точек плоской фигуры. (метод полюсов).

1.ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ИЛИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА.

Плоским называется такое движение твёрдого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости или при движении твёрдого тела расстояние от любой его точки до данной неподвижной плоскости не изменяется.

Примеры:

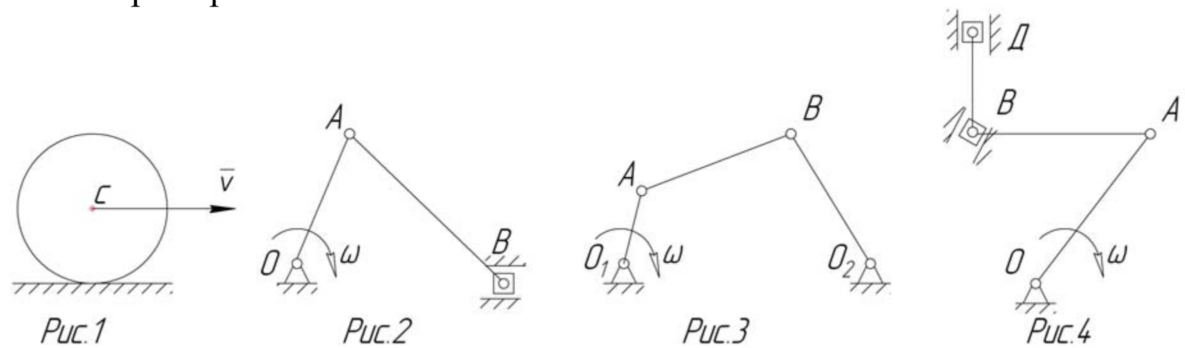


Рис.1 Рис.2 Рис.3 Рис.4

Колесо, звенья АВ,ВД (Рис. 1,2,3,4.) совершают плоское движение.

2. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ.

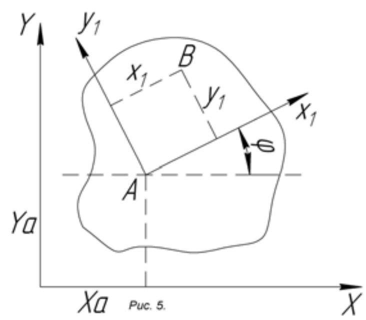


Рис. 5.

$$\left.\begin{aligned} X_A &= f_1(t) \\ Y_A &= f_2(t) \end{aligned}\right\}$$ - координаты точки, принятой за полюс;

$\varphi = f_3(t)$ - угол между неподвижной осью X и осью AX1, неизменно связанной с полюсом.

Плоское движение состоит из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как и полюс, и вращательного движения вокруг полюса.

3.ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ.

$\vec{V}_A$ - скорость полюса (поступательного движения); $V_A = \sqrt{\dot{X}_A^2 + \dot{Y}_A^2}$

$\vec{a}_A$ - ускорение полюса; $a_A = \sqrt{\ddot{X}_A^2 + \ddot{Y}_A^2}$

ω - угловая скорость при вращательном движении тела вокруг полюса; $\omega = d\varphi / dt = \dot{\varphi}$

ε - угловое ускорение вращательного движения тела вокруг полюса; $\varepsilon = d\omega / dt = \ddot{\varphi}$

ω и ε - не зависят от выбора полюса.

1. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СКОРОСТЯМИ ТОЧЕК ТЕЛА.

1.1 ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ (ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА) И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ТЕЛ

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}.$$

(4.1)

где $\vec{V}_A$ - скорость полюса A; $\vec{V}_{B/A}$ - вращательная скорость точки B при вращении вокруг полюса A.

Вектор $\vec{V}_{B/A}$ направлен перпендикулярно AB в сторону вращения тела

$\vec{V}_{B/A} = \omega \cdot AB$

Графическая форма представления (4.1):

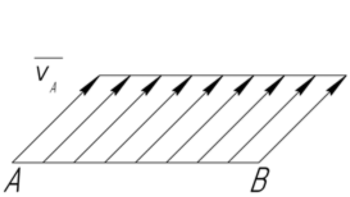


Рис.6. Поступательное движение вместе с полюсом A

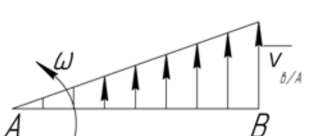


Рис.7. Вращательное движение вокруг полюса A

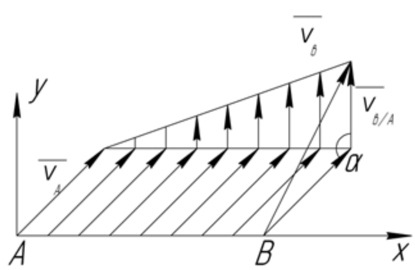


Рис.8. Плоское движение

Численное значение $\vec{\upsilon}_B$ можно найти по теореме косинусов:

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2 - 2 \cdot V_A^2 \cdot V_{B/A}^2 \cdot \cos\alpha} \qquad (4.2)$$

или с помощью проекций векторного равенства (4.1) на две взаимно перпендикулярные оси X,Y (Рис.8.):

$$\vec{V}_{BX} = \vec{V}_{AX} + \vec{V}_{B/Ax}; \vec{V}_{BY} = \vec{V}_{AY} + \vec{V}_{B/Ay}; V_B = \sqrt{V_{BX}^2 + V_{BY}^2}.$$

Пользуясь уравнением (4.1) можно найти скорость любой точки, если известны: $\vec{V}_A$ - вектор скорости одной из точек тела, ω - угловая скорость и направление вращения, AB – расстояние от точки до полюса.

Пример:

Муфта А (Рис.9.) скользит по вертикальным направляющим со скоростью $\vec{V}_A$ = 2(м/с). Стержень АВ длиной 2(м) вращается вокруг точки А с угловой скоростью ω = 2(c^{-1}). Найти скорость точки В в тот момент , когда угол $\alpha = 30^0$.

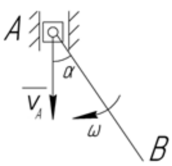


Рис.9.

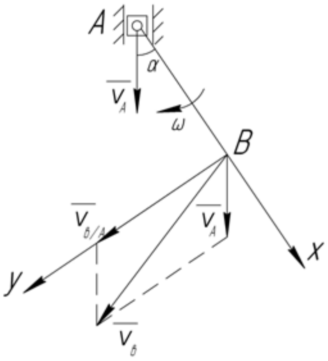


Рис.10.

Решение:

Точку А примем за полюс. Используем равенство (4.1):

Вектор $\vec{V}_{B/A} \perp AB$ и направлен по ω (Рис.10.), численное значение вектора $\vec{V}_B$ найдём:

1) по теореме косинусов

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2 - 2 \cdot V_A^2 \cdot V_{B/A}^2 \cdot \cos 120^o} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{28} = 5{,}3 м/с;$$

2) методом проекций (ось X направим по АВ, ось Y по $\vec{\upsilon}_B$);

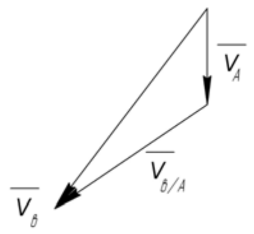
Проектируем равенство (4.1) на оси X и Y

$$V_{BX} = V_A \cdot \cos 30^o = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} м/с,$$

$$V_{BY} = V_A \cdot \cos 60^o + V_{B/A} = 1 + 4 = 5 м/с,$$

$$V_B = \sqrt{V_{BX}^2 + V_{BY}^2} = \sqrt{3 + 25} = 5.3 м/с;$$

3) графически



4.2. Следствия из теоремы о сложении скоростей и определение скоростей точек тела с помощью следствий из теоремы (аналитически и графически)

Первое следствие: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (Рис.11.)

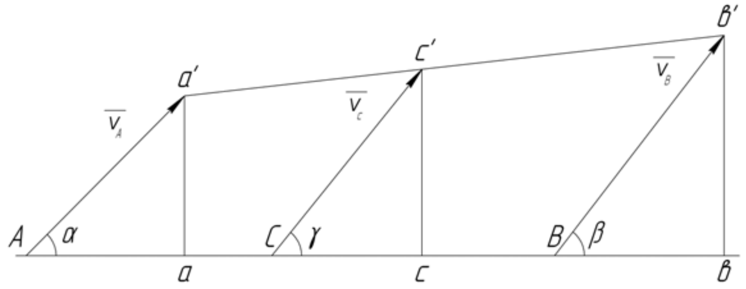


Рис.11.

$$\left.\begin{array}{c} Aa = Bв = Cc \\ Aa = V_A \cdot \cos\alpha \\ Bв = V_B \cdot \cos\beta \\ Cc = V_C \cdot \cos\gamma \\ V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta = V_C \cdot \cos\gamma \end{array}\right\} \qquad (4.3)$$

Второе следствие: концы векторов скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка (Рис.11.):

$$\frac{a'c'}{c'в'} = \frac{AC}{CB}. \qquad (4.4)$$

Примеры:

1. Стержень АВ длинной 0,5м движется в плоскости чертежа (Рис.12.). Скорость $\vec{V}_A$=2м/с образует угол 45^0 с прямой АВ. Скорость $\vec{V}_B$ точки В образует угол 60^0. Найти скорость точки В.

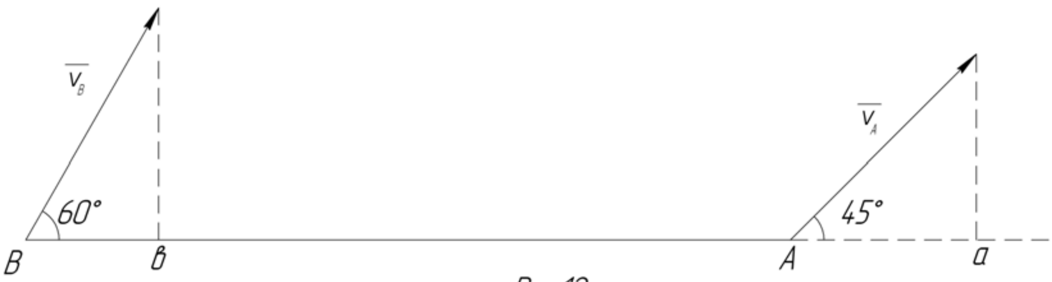


Рис.12.

Согласно (4.3): $Aa = Bв \Rightarrow V_A \cdot \cos 45^0 = V_B \cdot \cos 60^0$.

Отсюда: $V_B = \dfrac{V_A \cdot \cos 45^0}{\cos 60^0} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$м / с.

2. По условию задачи 1 найти скорость точки С, делящий отрезок АВ на части $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{4}$ (Рис.13.)

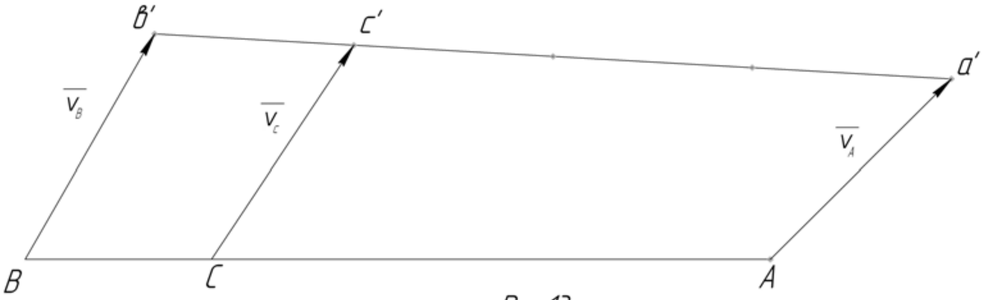


Рис.13.

Решение представим графически. Отложим значения $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ в масштабе скоростей 1см=1м/с. Соединим концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ отрезком прямой а'в': разделим эту прямую согласно (4.4) на части: $\dfrac{a'c'}{a'в'} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{4}$. Соединим точки С и с' вектором $\vec{V}_C$. Измерим его с помощью выбранного масштаба: $\vec{V}_C$=2,5м/с.

2. МЦС И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК С ПОМОЩЬЮ МЦС.

Для тела, движущегося плоскопараллельно, в каждый момент времени существует точка, называемая мгновенным центром скоростей (МЦС), скорость которой в указанный момент времени равна нулю: $V_P = 0$.

Поле скоростей точек плоской фигуры в этом случае представляет собой поле вращательных скоростей относительно мгновенного центра скоростей (Рис.14.)

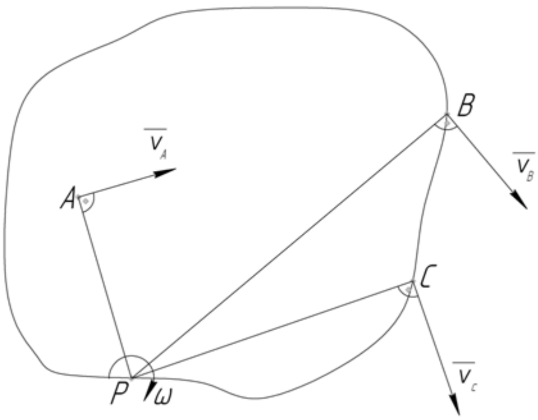


Рис. 14.

$$V_A = \omega \cdot AP;$$
$$V_B = \omega \cdot BP;$$
$$V_C = \omega \cdot CP;$$
и т.д.

(5.1)

Здесь ω - угловая скорость вращения плоской фигуры (не зависящая от выбора полюса); АР, ВР, СР и т.д.… - мгновенные радиусы точек А, В, С,… Если известна скорость одной из точек фигуры - $\vec{V}_A$ и положение МЦС, то скорость других точек фигуры можно найти из соотношений:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP}{AP}; \frac{V_C}{V_A} = \frac{CP}{AP};...$$

В этом случае можно найти и угловую скорость:

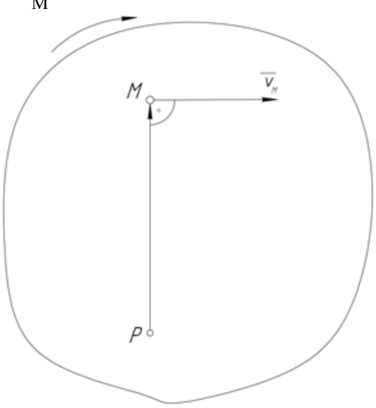
$$\omega = \frac{V_A}{AP},$$

а также скорости других точек по формулам (5.1).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЦС В РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЯХ

1) Скорость любой точки плоской фигуры определяется по формуле:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{PM}.$$



$\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости.

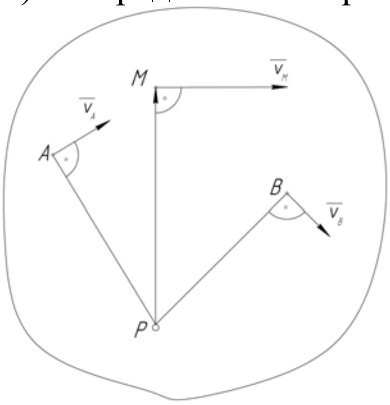
$\overrightarrow{PM}$ - радиус-вектор точки М относительно точки Р.

2) $\overrightarrow{V_M}$ перпендикулярна $\overrightarrow{PM}$ и направлена в сторону вращения фигуры.

3) По модулю скорость точки М равна произведению модуля угловой скорости плоской фигуры на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей.

$V_M = |\omega| \cdot PM.$

4) Распределение скоростей:



$V_A = |\omega| \cdot PA,\ V_B = |\omega| \cdot PB.$ и т.д…

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}$$

Скорости точек пропорциональны их расстояниям до МЦС.

1

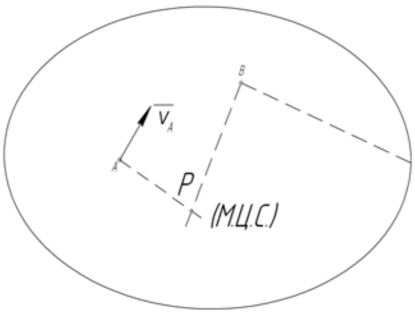


Рис.15.

$\vec{V}_A = \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{PA}; \vec{V}_A \perp \overrightarrow{PA}; \vec{V}_B \perp \overrightarrow{PB}$. Чтобы определить положение мгновенного центра скоростей (Р), надо знать направление скоростей двух точек А и В.

МЦС (Р) находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям, восстановленных в точках А и В.

Пример №1 $\vec{V}_A \perp \overrightarrow{O_1A}$; $\vec{V}_B \perp \overrightarrow{O_2B}$. Продолжив O_1A и O_2B до взаимного пересечения получим P_3 - МЦС звена 3 (Рис.16.)

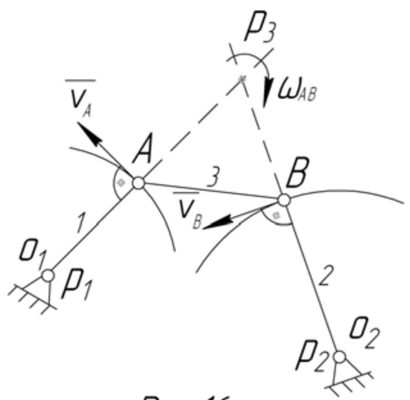


Рис.16.

Пример №2 $\vec{V}_A \perp \overrightarrow{O_1A}$. P_2 – МЦС звена 2 (Рис.17.)

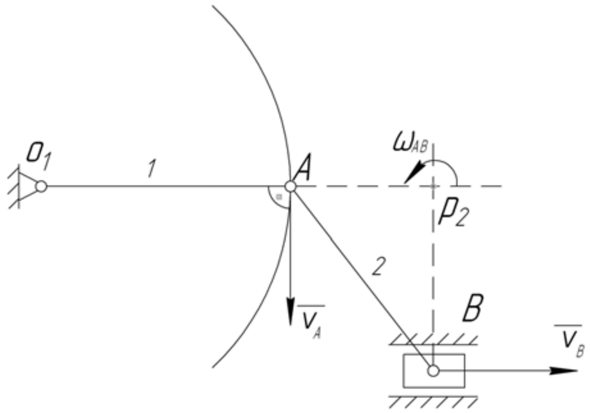


Рис.17.

Пример №3 $\vec{V}_A \perp \overrightarrow{P_1A}$; $\vec{V}_B \perp \overrightarrow{P_2B}$. Продолжив P_1A и P_2B до взаимного пересечения получим P_3 (Рис.18.)

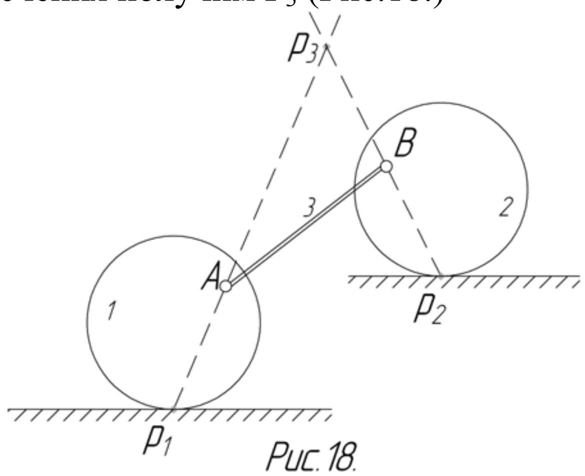
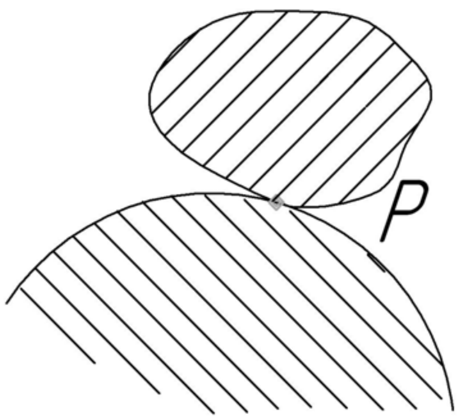


Рис.18.

2 Мгновенный центр скоростей при качении без скольжения плоской фигуры по неподвижной поверхности.



P-МЦС

В этом случае мгновенным центром скоростей плоской фигуры является точка касания поскольку в данный момент она имеет скорость равную нулю.

Пример №1 Колесо, катящееся по поверхности. Дано: V,R. Показать на чертеже скорости указанных точек обода колеса.

Учитывая направление скорости V, заключаем, что скорости точек будут такими, как указано на рис. 19.

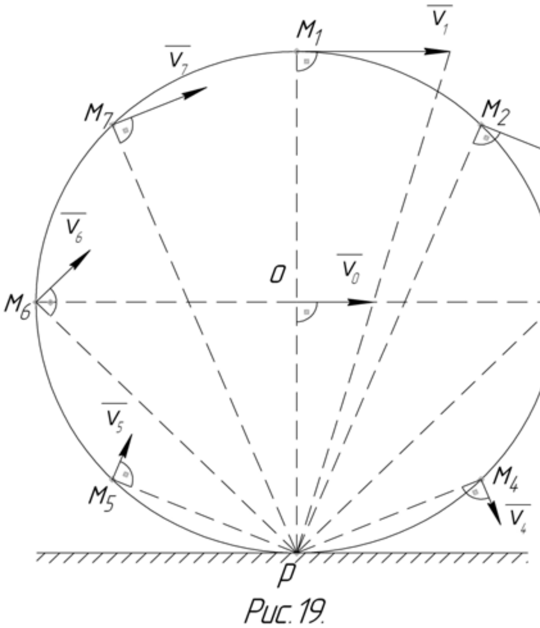


Рис. 19.

Пример №2 Шариковый подшипник. Дано: Радиус вала I-R. Вал I вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω и опирается при помощи шариков на обойму подшипника.

Обозначим точку соприкосновения вала с шариком через A, модуль её скорости $V_A = R|\omega|$. Точка касания шарика с неподвижной обоймой есть мгновенный центр скоростей (P) шарика. Модуль скорости центра C шарика

$$V_C = \frac{V_A}{2} = \frac{R|\omega|}{2};$$

Шарик вращается вокруг своего центра против хода часовой стрелки и бегает вокруг вала по ходу часовой стрелки (Рис.20.).

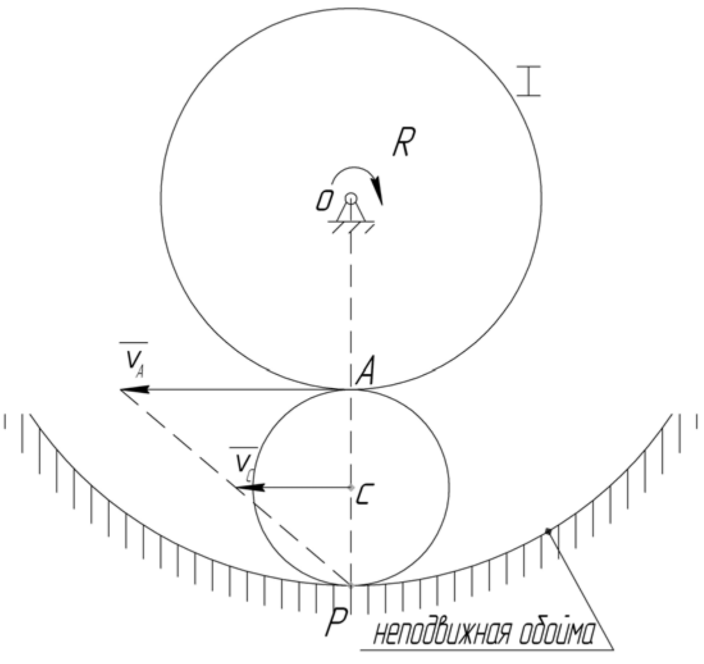
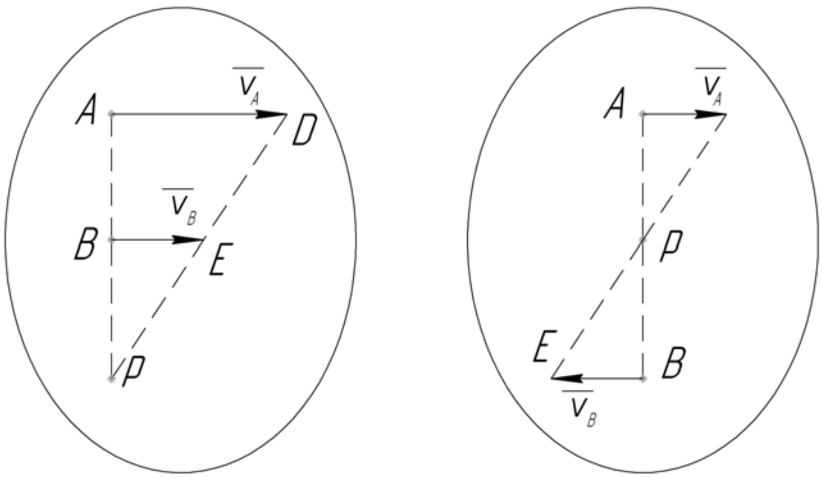


Рис.20.

3 $\vec{V}_A \neq \vec{V}_B; \vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$



Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения общего перпендикуляра к скоростям и прямой соединяющей концы векторов скоростей.

Пример №3 Дано: $\vec{V}_A, \vec{V}_B$. Определить: $P, \vec{V}_0$ (Рис.21.)

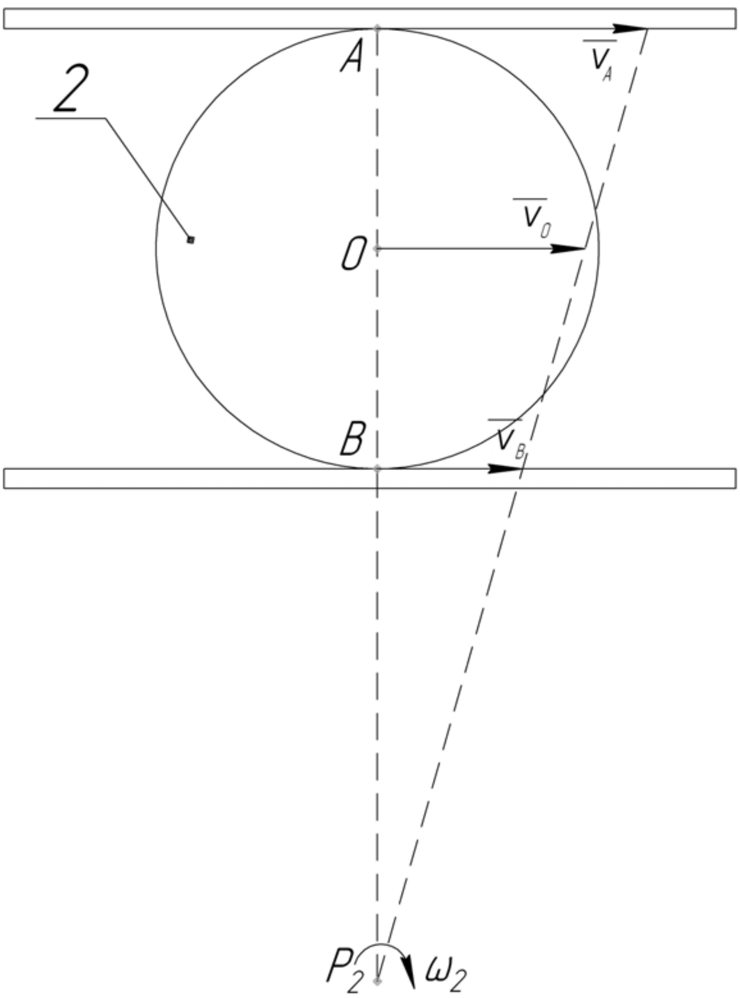


Рис.21.

Пример №4 Эпициклический механизм. Дано: $\omega_{I}, \omega_{0}, R_{I}, R_{II}$ (Рис.22.). Определить: P, ω_{II}.

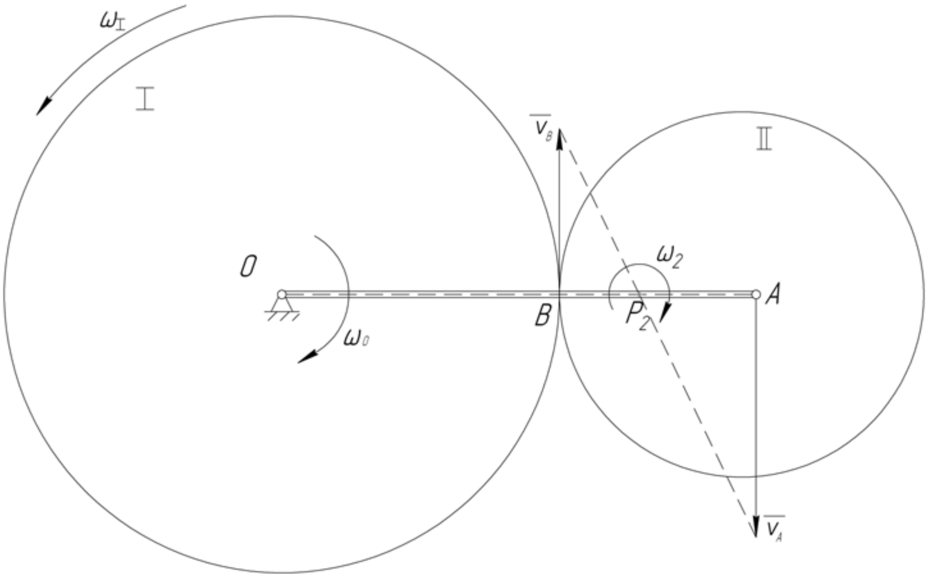


Рис.22.

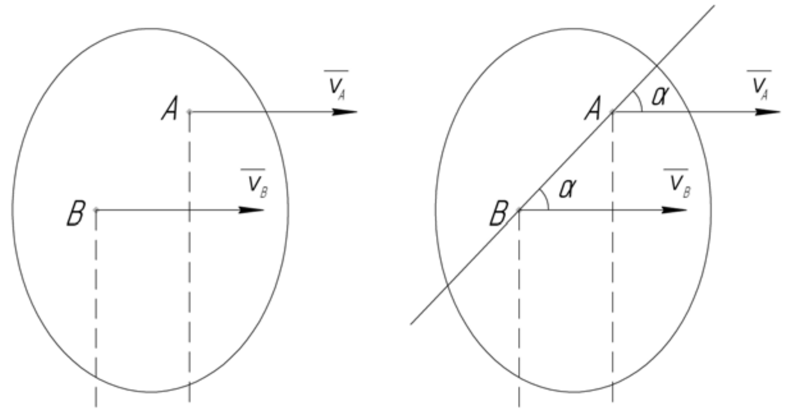
Решение:

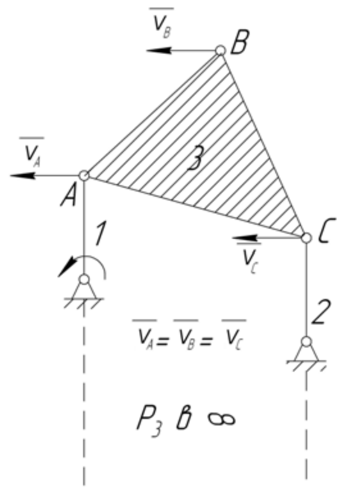
$$1)V_A = OA \cdot \omega_0 \qquad 3)P_2$$

$$2)V_B = \omega_I \cdot R_I \qquad 4)\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{V_B}{BP_2}$$

4 $\vec{V}_A \| \vec{V}_B$**,** но точки А и В не лежат на общем перпендикуляре к $\vec{V}_A$**.**

В этом случае центр скоростей Р лежит в бесконечности. Из формулы $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \underbrace{\vec{\omega}}_{0} \cdot \overrightarrow{AB}$, следует, что при $\omega = 0$, $\underline{\vec{V}_B = \vec{V}_A}$, т.е. <u>скорости всех точек тела в данный момент времени равны между собой.</u>





Примеры:

Кривошипно-ползунный механизм (Рис.23.).

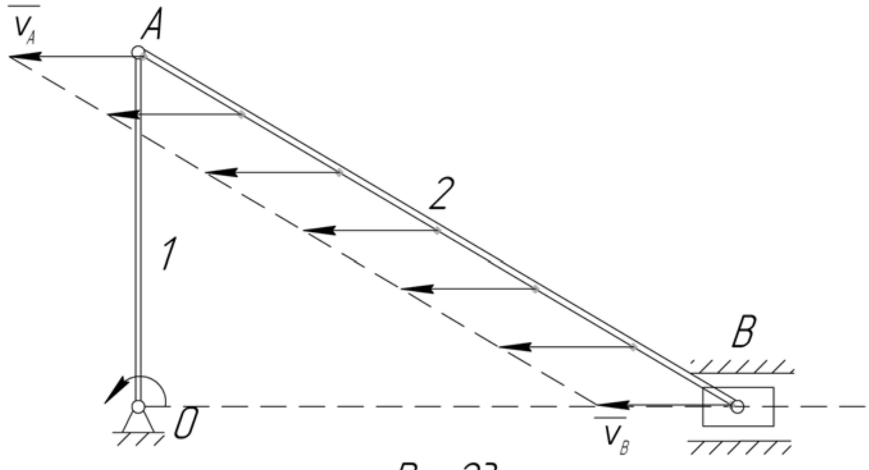


Рис.23.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \ldots$$

Т.е. скорости всех точек шатуна АВ в данный момент времени равны между собой.

Эпициклический механизм (Рис.24.).

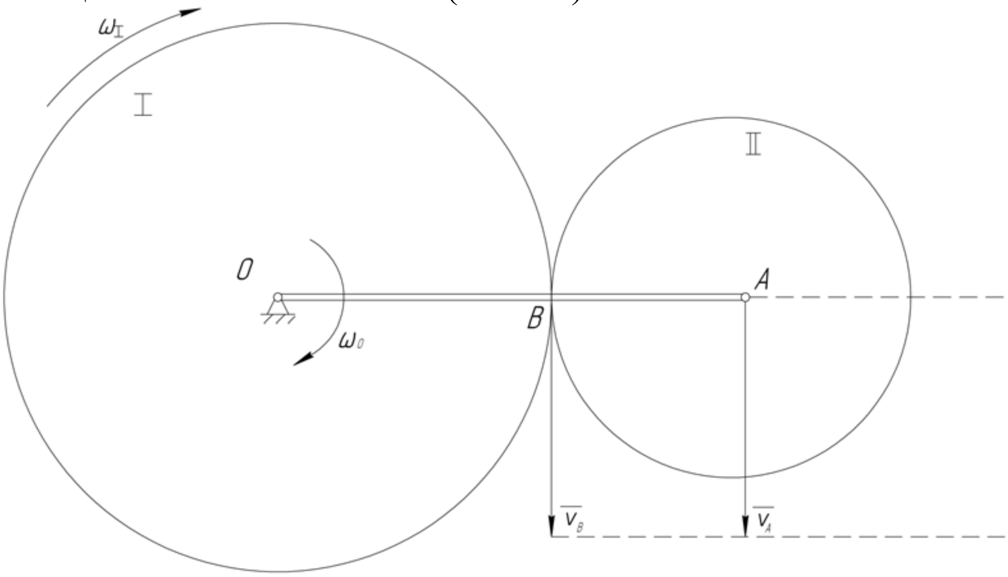


Рис.24.

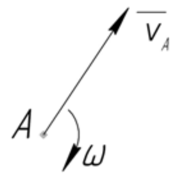
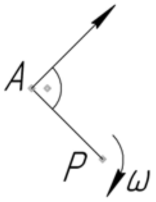
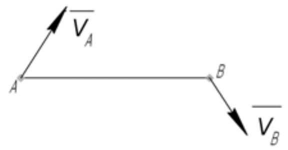
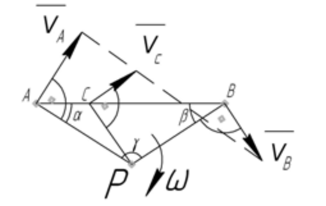
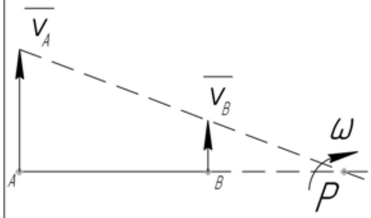
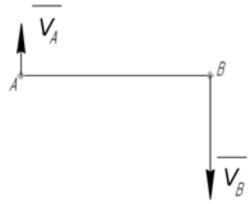
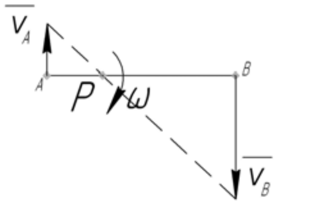
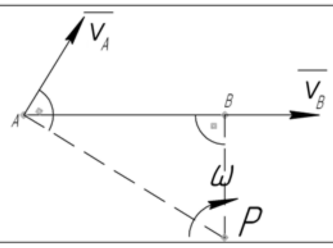
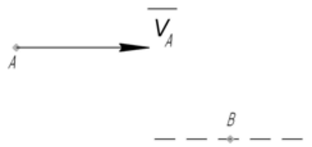
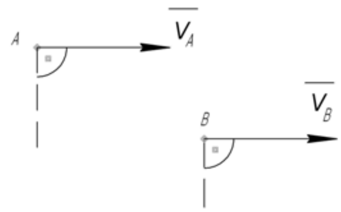
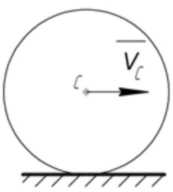
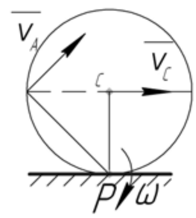
P_2 лежит в бесконечности.

$$V_A = OA \cdot \omega_0$$

$$V_B = OB \cdot \omega_I$$

$$\underline{\vec{V}_A = \vec{V}_B}$$

Различные способы определения МЦС

Дано	Исходная схема	Построение МЦС	Можно определить
$\overline{v}_A$ ω			$AP = \frac{v_A}{\omega}$
$\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$			$AP = AB\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ $\omega = \frac{v_A}{AP}$ $\overline{v}_c = \omega * CP$
			AP,BP $\omega = \frac{v_A}{AP}$
			AP,BP $\omega = \frac{v_A}{AP}$
$\overline{v}_A$ и линия направления $\overline{v}_B$ (-----)			$\overline{v}_c = \frac{BP}{AP} * v_A$ $\omega = \frac{v_A}{AP}$
			$AP = BP = \infty$ $\omega = 0$ $\overline{v}_B = \overline{v}_A$
Качение без скольжения			$\omega = \frac{v_C}{CP}$ $\overline{v}_A = \omega * AP$

7. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ДВУХ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Теорема:

Проекции скоростей 2^x точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Пример:

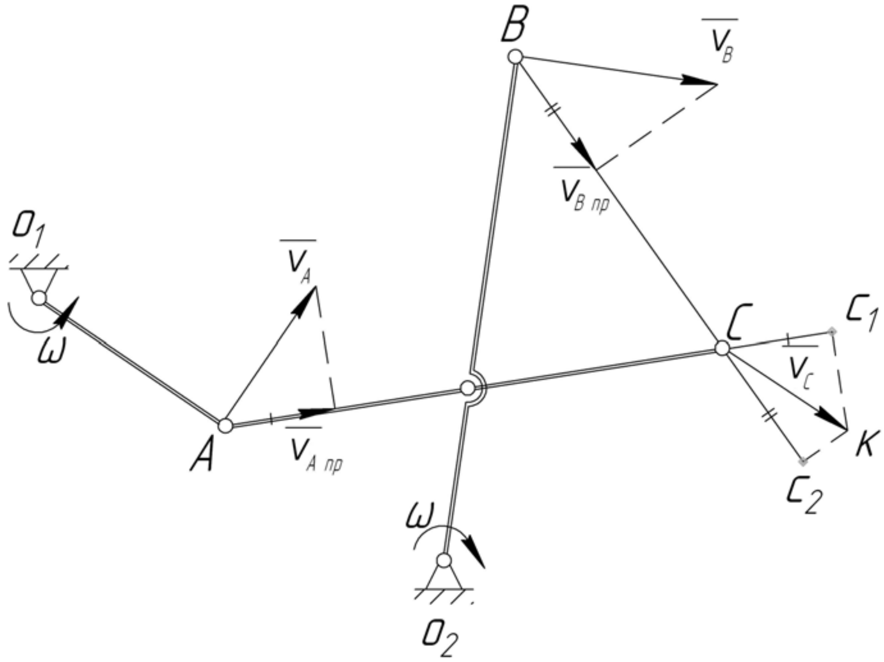
1) Дано: V_A =200м/с. Направление $\vec{V}_B$, α =60^0.

Определить: $\vec{V}_B$.

Решение:

$$V_B = V_A \cdot \cos 60^0 = 100 \text{ м/с}.$$

2) Зная скорости точек A и B, определить скорость шарнира C механизма в указанном положении.



Решение:

Находим проекцию скорости точки A на направление AC ($\vec{V}_{A\_пр}$) и откладываем из точки C отрезок Cc_1=$\vec{V}_{A\_пр}$, аналогично находим проекцию скорости точки B на направление BC и откладываем отрезок Cc_2=$\vec{V}_{B\_пр}$.

Затем восстанавливаем в точках c_1 и c_2 перпендикуляры к направлениям AC и BC. Точка «К» пересечения этих перпендикуляров определяет собой конец вектора $\vec{V}_C$, т.е. $\vec{V}_C = \overrightarrow{CK}$.

Алгоритм решения задач на тему:
«Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей».

1) Если дан плоский механизм, состоящий из нескольких звеньев, то при решении задачи рассматривают последовательно движение отдельных звеньев механизма, начиная с того звена, движение которого задано.

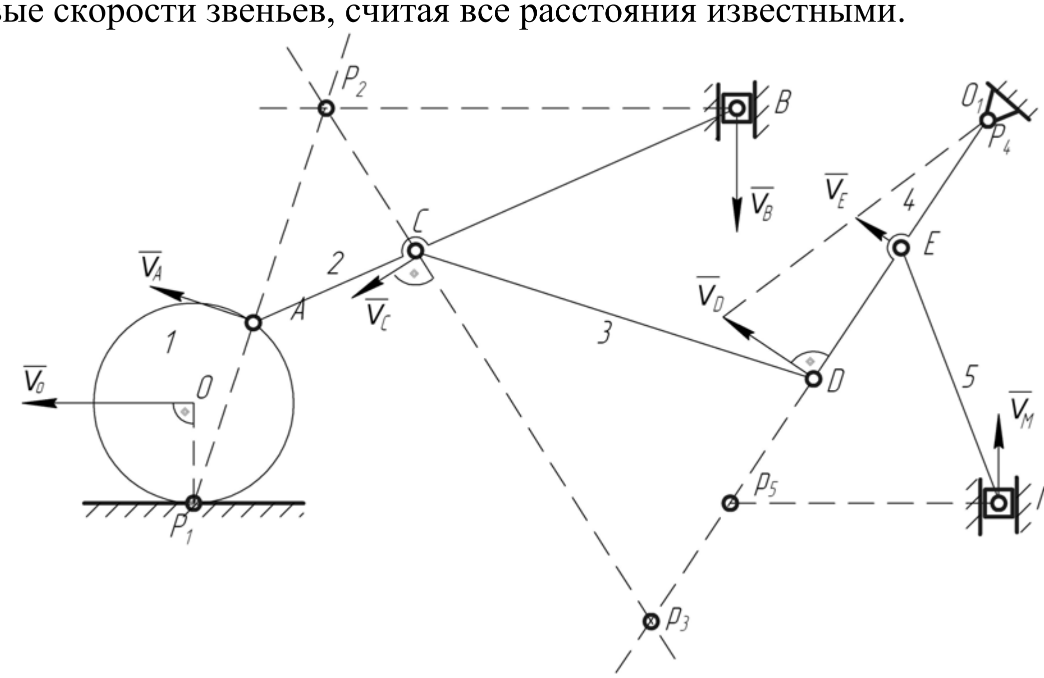
2) При переходе от одного звена к другому определяют скорости тех точек, которые являются общими для этих двух звеньев механизма.

3) Следует подчеркнуть, что мгновенный центр скоростей можно находить только для каждого звена в отдельности, то же относится и к угловым скоростям.

4) Рекомендуется: МЦС и угловые скорости звеньев обозначать $P_1, P_2, P_3, \ldots$ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, где индексы 1,2,3 соответствуют номеру звена.

Пример:

Определить величины и направления скоростей всех указанных точек и угловые скорости звеньев, считая все расстояния известными.



Решение:

1). Đ_1; 6). $V_{\text{Â}} = \omega_2 \cdot \text{ÂĐ}_2$; 11). $\omega_4 = \dfrac{V_D}{DP_4}$;

2). $\omega_1 = \dfrac{V_0}{\text{ÎĐ}_1}$; 7). Đ_3; 12). $V_E = \omega_4 \cdot EP_4$;

3). $V_{\text{À}} = \omega_1 \cdot \text{ÀĐ}_1$; 8). $\omega_3 = \dfrac{V_{\text{Ñ}}}{\text{ÑĐ}_3}$; 13). P_5;

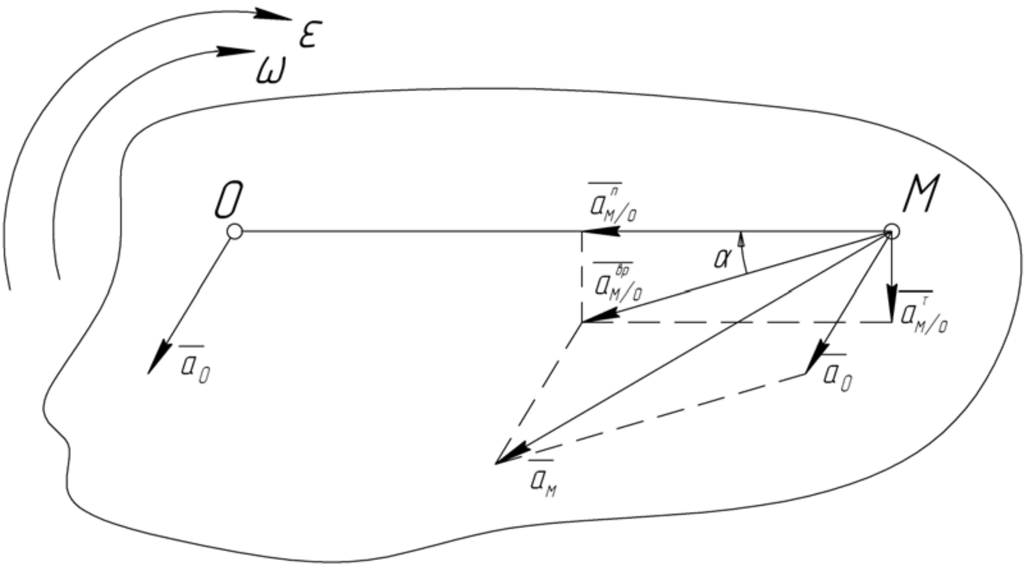
4). Đ_2; 9). $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$; 14). $\omega_5 = \dfrac{V_E}{EP_5}$;

5). $\omega_2 = \dfrac{V_{\text{À}}}{\text{ÀĐ}_2}$ 10). Đ_4; 15). $V_M = \omega_5 \cdot MP_5$.

8. УСКОРЕНИЕ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ. (МЕТОД ПОЛЮСОВ)

Ускорение любой точки плоской фигуры равна сумме: ускорения полюса, центростремительного (нормального) и касательного (тангенциального) ускорений этой точки во вращательном движении фигуры вокруг полюса.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}^{n}_{M/O} + \vec{a}^{\tau}_{M/O}$$



$\vec{a}_O$ - ускорение полюса

$\vec{a}^{n}_{M/O}$-центростремительное ускорение (нормальное)

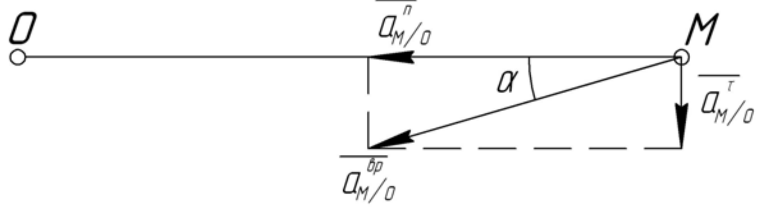
$\vec{a}^{\tau}_{M/O}$-касательное ускорение (тангенциальное)

$$\vec{a}_{M/O} = \vec{a}^{n}_{M/O} + \vec{a}^{\tau}_{M/O}$$

$\vec{a}_{M/O}$-ускорение точки М от вращения фигуры вокруг полюса.

$$\vec{a}^{n}_{M/O} = OM \cdot \omega; \vec{a}^{\tau}_{M/O} = OM \cdot \varepsilon;$$

$$\vec{a}_{M/O} = OM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2};$$

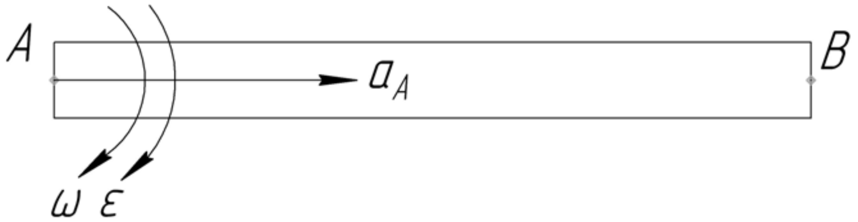


Острый угол α между $\vec{a}_{M/O}$ и $\vec{a}^{n}_{M/O}$ находится по формуле: $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$

Угол α для всех точек тела в данный момент один и тот же.

Пример: линейка AB длинной l=40см. движется в плоскости чертежа. В некоторый момент ускорение точки A $\vec{a}_A$=40см/с^2 и совпадает с направлением AB. Определить ускорение точки B, если ω=1рад/с; ε=0,5рад/с^2.

Решение:

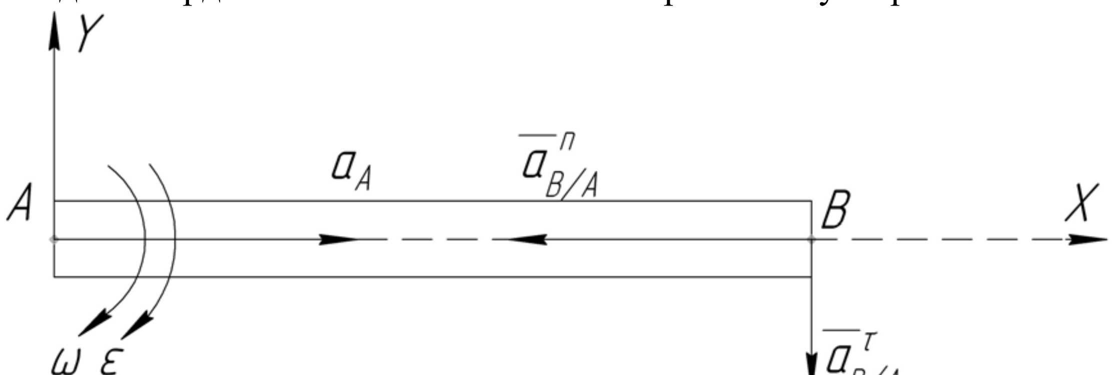


Выбираем за полюс точку A, тогда:

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\text{вр}}_{B/A}$, учитывая, что $\vec{a}^{\text{вр}}_{B/A} = \vec{a}^{n}_{B/A} + \vec{a}^{\tau}_{B/A}$, получим $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{B/A} + \vec{a}^{\tau}_{B/A}$. Нормальное ускорение всегда известно по модулю и направлению (направлено к полюсу, т.е. к точке A): $a^{n}_{B/A} = \omega^2 \cdot AB$=1*40=40см/с^2.

Касательное ускорение направлено в сторону углового ускорения, перпендикулярно нормальному ускорению: $a^{\tau}_{B/A} = \varepsilon \cdot AB$=0,5*40=20см/с^2;

Введём координатные оси и покажем направления ускорений:



Спроектируем векторное равенство на координатные оси X и Y:

$$a_{BX} = a_A - a^{n}_{B/A} = 40 - 40 = 0\text{см}/\text{с}^2$$

$$a_{BY} = -a^{\tau}_{B/A} = -20\text{см}/\text{с}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{BX}{}^2 + a_{BY}{}^2} = 20\text{см}/\text{с}^2$$

ЛЕКЦИЯ 5. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определение сферического движения, углы Эйлера, уравнения движения, теорема Эйлера – Даламбера. Мгновенная ось вращения. Аксоиды. Угловая скорость и ускорение при сферическом движении. Кинематические уравнения Эйлера. Линейные скорости и ускорения при сферическом движении. Теорема Шаля. Уравнения движения свободного твердого тела. Распределение скоростей и ускорений свободного тела при его пространственном движении.

ЛЕКЦИЯ 6. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сложение двух поступательных движений твердого тела. Сложение поступательного и вращательного движений. Сложение двух вращений твердого тела (оси скрещиваются). Сложение вращательных движений тела вокруг пересекающихся осей. Пара вращений. Сложение двух вращений тела вокруг параллельных осей.

ЛЕКЦИЯ 7. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИКИ. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, равнодействующая, уравновешивающая, эквивалентные и уравновешенные системы сил, силы внешние и внутренние, сосредоточенные и распределенные. Аксиомы статики, Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость или поверхность, гибкая нить, опора на острие, шарнирно-подвижная и шарнирно неподвижная опоры, балка-консоль, скользящая заделка, подшипники и подпятники, идеальный блок.

Сходящиеся силы: условия и уравнения равновесия в геометрическом и аналитическом виде. Фермы: метод вырезания узлов, метод Риттера.

Раздел 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ. АКСИОМЫ СТАТИКИ. РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

§ 1. Основные понятия статики

1.1. Теоретические сведения

Статика – это раздел механики, в котором изучаются методы преобразования системы сил в эквивалентные системы и устанавливаются для каждой системы условия её равновесия.

В статике рассматривают **две основные задачи**:

1) Замена одной системы сил, действующей на твердое тело, другой эквивалентной ей системой. Основная цель такой замены – **упростить** заданную систему сил, т.е. свести большое число сил, действующих на тело, к возможно меньшему их числу. Такая операция называется **приведением системы сил** к простейшему виду.

2) Определение **условий равновесия** (вывод уравнений) материальных тел, находящихся под действием сил (для использования в расчетах различных конструкций и сооружений).

В статике используются следующие **основные понятия:**

1.1.1. Абсолютно твердое тело

Все встречающиеся в природе твердые тела деформируются под действием сил, т.е. изменяют свою геометрическую форму. В статике же, деформации тел не принимаются во внимание (ими пренебрегают) и тела рассматривают как недеформируемые или «абсолютно твердые».

Абсолютно твердым телом называют такое тело, у которого расстояния между точками сохраняются неизменными при воздействии на него других тел.

В дальнейшем для удобства абсолютно твердое тело будем называть твердым телом или просто телом.

1.1.2. Материальная точка

В том случае, когда форма и размеры тела не играют существенной роли в данной конкретной задаче, используется понятие материальной точки, т.е. его можно представить геометрической точкой, в которой сосредоточена вся масса тела.

Например: при изучении движения планет и спутников их считают материальными точками, так как размеры планет и спутников пренебрежимо малы по сравнению с размерами их орбит. С другой стороны, изучая движение планеты вокруг оси, её уже нельзя считать материальной точкой, размеры космического корабля весьма малы по сравнению с расстояниями, которые он проходит. Поэтому движение корабля в межпланетном пространстве можно рассматривать как движение материальной точки.

Материальное тело, размеры которого в рассматриваемых условиях можно не учитывать, называют материальной точкой.

1.1.3. Система материальных точек

Системой называют совокупность материальных точек, движения и положения которых взаимосвязаны.

То есть любое физическое тело можно рассматривать как систему материальных точек.

1.1.4. Сила

Сила – это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

В результате механического взаимодействия происходит изменение не только положения тел в пространстве, но и их скоростей.

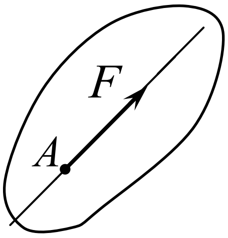


Рис. 1

Сила – величина векторная. **Вектор** – это отрезок прямой определенной длины и положения, имеющий стрелку на одном конце (рис. 1). Обычно начало или конец вектора совпадает с точкой приложения силы; прямая, вдоль которой направлен вектор, изображающий силу, называется **линией действия силы**; стрелка на конце вектора показывает, в какую сторону действует сила. Длина вектора в принятом масштабе определяет численную величину (модуль) силы.

Таким образом, действие силы на тело определяется тремя факторами: **числовым значением** (модулем), **направлением** вдоль линии действия и **точкой приложения**.

Замечание: на приведенных рисунках векторы сил условимся обозначать буквами F, R, G, и др. без стрелки (черты) сверху, так как изображение силы отрезком прямой со стрелкой на конце и есть вектор силы.

Точка приложения силы и точка приложения составляющих этой силы одна и та же. При разложении силы на составляющие нужно выделить точку приложения.

Модуль или численное значение силы в системе СИ измеряется в ньютонах (Н). Иногда используют техническую систему МКГСС – килограмм-сила (кГс). 1 кГс = 9,81Н или 1Н ≈ 0.1 кГс .

Мега (М) – 10^6	деци (д) – 10^{-1}
кило (к) – 10^3	санти (с) – 10^{-2}
гекто (г) – 10^2	милли (м) – 10^{-3}
дека (да) – 10	микро (мк) – 10^{-6}

1.1.5. Системы сил

Совокупность нескольких сил, действующих на тело (или в одной механической системе), называется системой сил.

Силы, входящие в систему сил, называют составляющими силами.

Каждая система сил характеризуется определенным числом сил, их величиной и направлением (рис. 2).

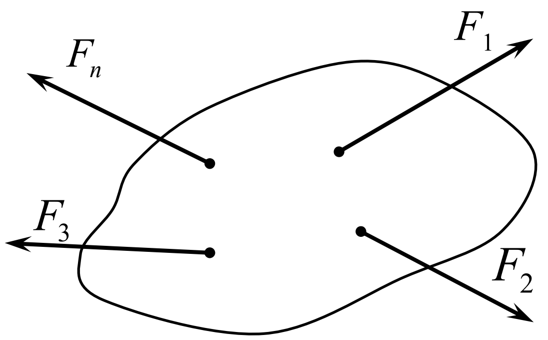


Рис. 2

Систему сил принято обозначать:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n).$$

В зависимости от направления составляющих сил различают системы сил (рис.3):

а) – действующие по одной прямой; *б)* – параллельные;

в) – сходящиеся; *г)* – произвольно направленные.

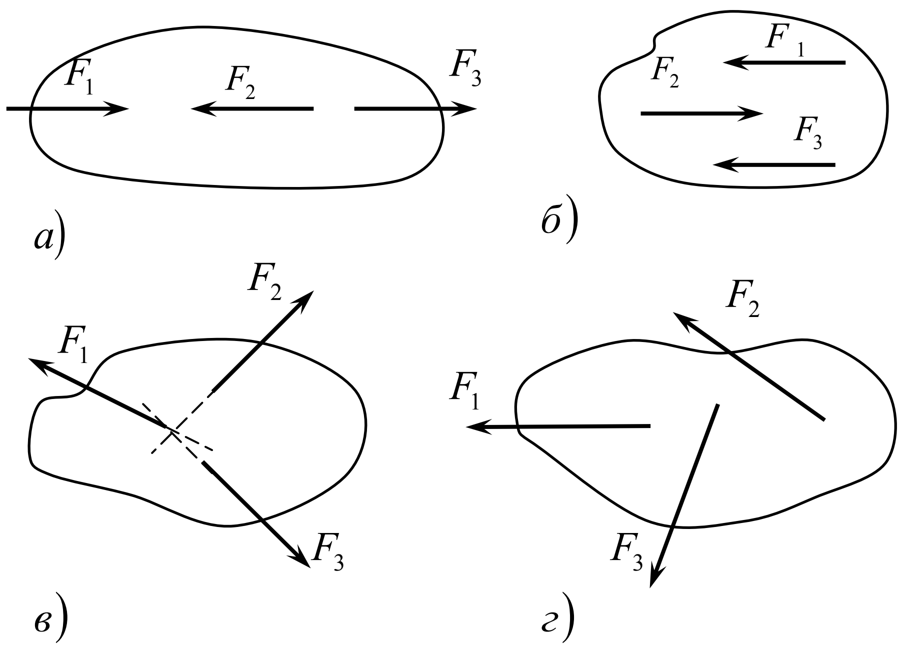


Рис. 3

Самым общим случаем является **произвольная система сил**. Линии действия сил этой системы как угодно расположены в пространстве или в плоскости. Остальные системы можно рассматривать как частные случаи первой:

- **система сходящихся сил** – линии действия сил пересекаются в одной точке (в плоскости или в пространстве);

- **система параллельных сил** – линии действия сил параллельны друг другу (в плоскости или в пространстве).

Две системы сил называют эквивалентными, если, взятые порознь, они вызывают одинаковое механическое действие на тело.

Эквивалентность двух систем будем обозначать:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n) \in (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, ..., \vec{Q}_k).$$

Если данная система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n)$ эквивалентная только одной силе $\vec{R}$, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n) \in \vec{R}$ или :

Равнодействующая – сила, которая одна заменяет действие всей системы сил.

Замечание: далее векторы сил условимся обозначать буквами, набранные жирным курсивом, а их числовые значения (модули) - светлым курсивом.

Тело, не скреплённое с другими телами, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется свободным.

Система сил, под действием которой свободное твёрдое тело может находиться в покое, называется уравновешенной. Или:

Уравновешенной называется система сил, которая, будучи приложенная к покоящемуся телу, не может вывести его из этого состояния.

В этом случае говорят, что система сил **эквивалентна нулю** (нулевая система).

Силу, равную по модулю равнодействующей и направленную по той же линии действия, но в противоположную сторону, называют уравновешивающей силой.

Силы, действующие на твердое тело, делятся на **внешние** и **внутренние** силы.

Внешними называются силы (нагрузки), действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел ($\boldsymbol{F}^e$). По условиям приложения различают нагрузки **объемные** и **поверхностные**. Объёмными называются силы, распределенные по всему объёму тела. К объёмным силам относятся: силы тяжести, силы инерции и магнитные воздействия и т.п.

Внутренними называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга ($\boldsymbol{F}^i$).

1.1.6. Силы сосредоточенные и распределённые

Поверхностные силы делятся на сосредоточенные силы и равномерно (неравномерно) распределённую нагрузку.

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется **сосредоточенной**. Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые мы в механике рассматриваем как сосредоточенные, представляют собою по существу равнодействующие некоторых систем распределённых сил.

Силы могут быть распределены по поверхности тела (например, давление газа в сосуде, снеговая нагрузка на кровлю здания, ветровая нагрузка и др.) и по его длине (например, вес балки условно можно считать равномерно распределённым по его длине).

Распределённая нагрузка может быть:

а) силой, равномерно распределенной по прямой (рис. 4) – **равномерно распределённая нагрузка**, где q – интенсивность нагрузки (плотность распределения силы), Н/м.

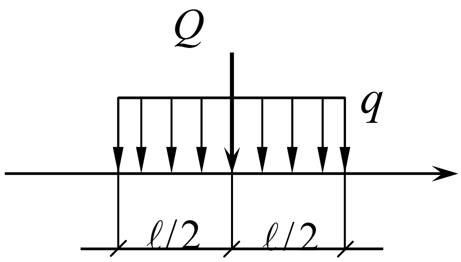


Рис. 4

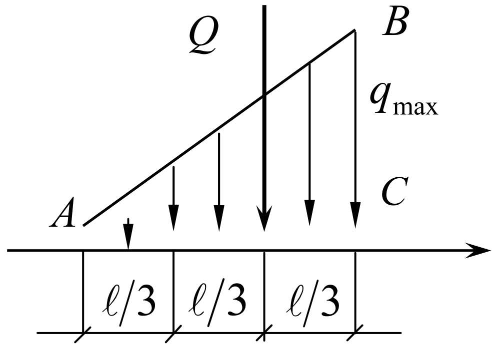


Рис. 5

При статических расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей $\boldsymbol{Q}$. По модулю $Q = q{\cdot}l$. Приложена сила $\boldsymbol{Q}$ в центре тяжести участка.

б) силой, распределенной по линейному закону – **неравномерно распределённая нагрузка** (рис. 5). В этом случае равнодействующая сила определяется по формуле:

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot l}{2}.$$

Сила $\boldsymbol{Q}$ проходит через центр масс (пересечение медиан) эпюрного треугольника ABC.

§ 2. АКСИОМЫ СТАТИКИ

2.1. Теоретические сведения

Статика основана на аксиомах, вытекающих из опыта и принимаемых без доказательств. Аксиомы статики устанавливают основные свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу. В различных учебниках различное количество аксиом статики. Нумерация также различна.

2.1.1. Аксиома 1, (*инерции*)

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не выведут его из этого состояния.

Такое движение тела без воздействия на него других тел называют движением **по инерции**.

Рассматривая первую аксиому нетрудно установить, что

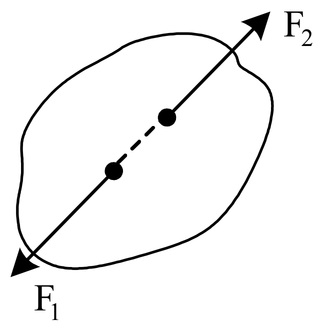
Уравновешенная система сил как причина механического движения эквивалента нулю.

Примечание. Тело (в отличие от точки) под действием уравновешенной системы не всегда находится в покое или движется равномерно или прямолинейно. Возможен случай, когда уравновешенная система сил, вызывает равномерное вращение тела вокруг некоторой неподвижной оси. Следовательно, **если на тело действует уравновешенная система сил, то тело либо находится в состоянии относительного покоя, либо движется равномерно или прямолинейно, либо равномерно вращается вокруг неподвижной оси.**

Упражнения	**Консультации**
1. Может ли тело двигаться по инерции (V = *const*) или находиться в покое (V = 0) в том случае, если на него действуют силы?	**1**. Если тело движется равномерно и прямолинейно или находится в покое, то на это тело или не действуют силы, или действует система сил, эквивалентная нулю.
1*а*. Если может, то при каком условии?	
1*б*. Как называют такое состояние	Такое состояние тела называется

тела (при $\boldsymbol{V} = const$ или $\boldsymbol{V} = 0$)?	**равновесием**.
2. При каком условии у тела изменяется скорость, т.е. появляется ускорение?	**2**. Тело движется с ускорением, если на него действует неуравновешенная сила.

2.1.2. Аксиома 2, *устанавливающая условие равновесия двух сил*



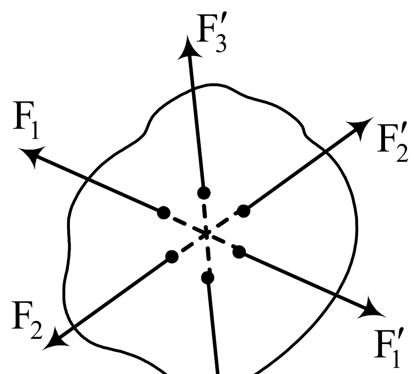
Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю $|\boldsymbol{F_1}| = |\boldsymbol{F_2}|$ и направленные по одной прямой в противоположные стороны (рис. 10).

Рис. 10

Эту аксиому можно сформулировать и так: **если твердое тело находится в равновесии под действием двух сил, то эти силы равны по модулю, противоположны по направлению и имеют общую линию действия**.

2.1.3. Аксиома 3 *присоединения и исключения уравновешенных сил*

Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или отбросить от нее уравновешенную систему сил.

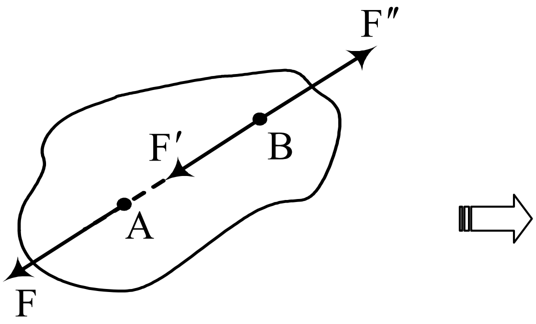


Тело (рис. 11) находится в состоянии равновесия. Если к нему приложить несколько взаимно уравновешенных сил ($\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}'_1$; $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}'_2$; $\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}'_3$), то равновесие не нарушается. Аналогичный эффект получится при отбрасывании этих уравновешенных сил.

Рис. 11

Системы сил (рис. 10 и рис. 11) **эквивалентны**, т.к. под действием каждой из них тело находится в равновесии.

Следствие из 2–й и 3–й аксиом:



Всякую силу, действующую на твердое тело, можно перенести вдоль линии ее действия в любую точку тела, не нарушив при этом его механического состояния.

Рис. 12

Пусть на тело в точке *A* действует сила ***F*** (рис. 12). В произвольной точке *B* на линии действия силы ***F*** приложим две уравновешенные силы ***F*** *′* и ***F*** *″*, (равные по модулю силе ***F*** и направленные в противоположные стороны). Состояние тела в этом случае не нарушится, так как силы ***F*** и ***F*** *″* также образуют уравновешенную систему, которую можно отбросить. Таким образом, силу ***F*** можно заменить равной силой ***F*** *′*, перенесенной по линии действия силы ***F*** из точки *A* в точку *B*.

Векторы, которые можно переносить по линии их действия, называют **скользящими**. Как показано выше, сила является **скользящим вектором**.

Полученный результат справедлив только для сил, действующих на абсолютно твердое тело. При инженерных расчетах им можно пользоваться лишь тогда, когда определяются условия равновесия той или иной конструкции и не рассматриваются возникшие в её частях внутренние усилия.

Так, в случае, приведенном на рис. 13, а стержень *AB* находится в равновесии, если $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$. При переносе точки приложения силы $\boldsymbol{F}_1$ в точку *B*, а силу $\boldsymbol{F}_2$ в точку *A* (рис. 13, б) или при переносе точек приложения обеих сил в какую-либо точку *C* стержня (рис. 13, в) равновесие не нарушится. Однако внутренние усилия будут в каждом из рассмотренных случаев разными. В случаях: *а*) стержень под действием приложенных сил растягивается; *б*) стержень будет сжиматься; *в*) стержень не напряжён.

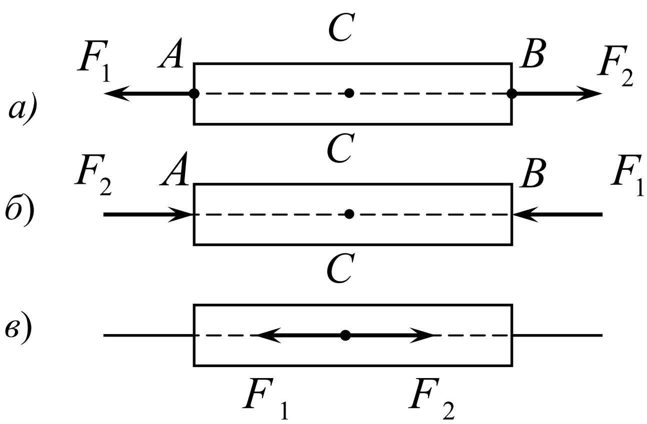
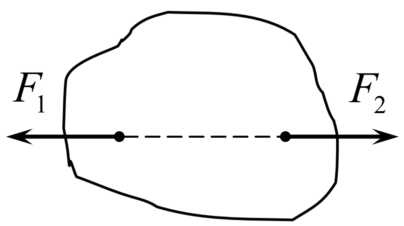
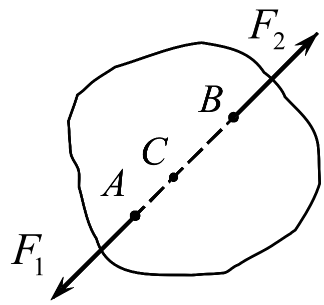
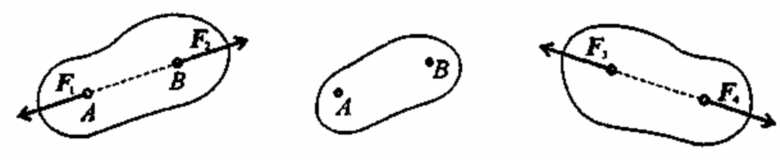


Рис. 13

упражнения	**консультации**
3. Нарушится ли равновесие твердого тела, если равные по модулю силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ поменять местами (рис. 14)?  Рис. 14 **4**. Нарушится ли равновесие твердого тела, если силу $\boldsymbol{F}_1$ перенести из точки *A* в точку *C* (рис.	**3**, **4**: см. следствие из 2-й и 3-й аксиом,

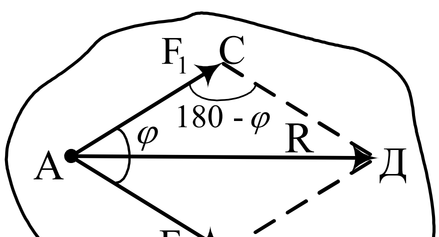
15)?  $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ Рис. 15	пункты 2.1.2 и 2.1.3. (Не нарушится).
5. Будут ли данные системы эквивалентны нулю (рис. 16, *а, б, в*)? $\lvert F_1\rvert = \lvert F_2\rvert$; $\lvert F_3\rvert = \lvert F_4\rvert$  Рис. 16	**5**. Системы сил *а*) и *в*) уравновешены, т.к. $\lvert F_1\rvert = \lvert F_2\rvert$ и $\lvert F_3\rvert = \lvert F_4\rvert$; их можно отбросить. Системы *а*) и *в*) станут эквивалентны системе *б*), а, следовательно, эквивалентны нулю.

2.1.4. Аксиома 4 *определяет правила сложения двух сил*

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 17).

Правило 1 *определения равнодействующей (правило параллелограмма)*

Определение равнодействующей двух сил по правилу параллелограмма называется **векторным** или **геометрическим** сложением и выражается векторным равенством, (рис. 17): $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.



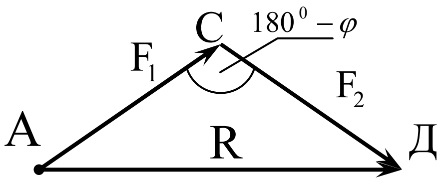


Рис. 17 Рис. 18

Равнодействующая двух пересекающихся сил равна геометрической (векторной) сумме этих сил и приложена в точке их пересечения.

Правило 2 *определения равнодействующей (правило векторного «силового» треугольника)*

Если из конца первой силы $\boldsymbol{F}_1$ отложить вторую силу $\boldsymbol{F}_2$, тогда равнодействующая есть вектор, идущий из начала первой силы в конец второй.

Модуль равнодействующей двух сил можно определить из Δ *АСД* по теореме косинусов, (рис. 18):

$$R^2 = F_\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi),$$

где $$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi,$$

тогда $$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos\varphi,$$

или $$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\varphi}\,.$$

На основании этой аксиомы одну силу $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{F}_\Sigma$) можно заменить двумя силами $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$.

2.1.5. Аксиома 5 *устанавливает, что в природе не может быть одностороннего действия сил (третий закон Ньютона)*

При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие, *или*

силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 19).

Если на тело *B* (рис. 19) действует сила $\boldsymbol{F}_2$ со стороны тела *A*, то на тело *A* действует со стороны тела *B* такая же по численному значению сила $\boldsymbol{F}_1$. Обе силы действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

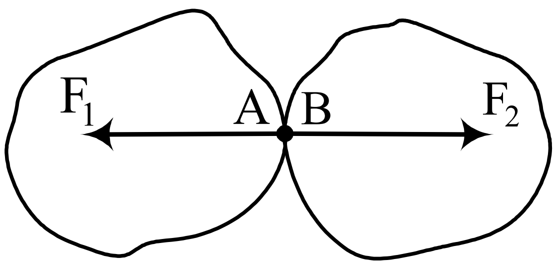


Рис. 19

Силы действия и противодействия не уравновешиваются, так как они приложены к разным телам.

2.1.6. Аксиома 6, *аксиома отвердевания*

Если деформируемое (не абсолютно твердое) тело находится в равновесии под действием данной системы сил, то равновесие его не нарушается и после того, как оно отвердеет (станет абсолютно твердым).

Принцип отвердевания приводит к выводу о том, что наложение дополнительных связей не изменяет равновесия тела и позволяет рассматривать деформируемые тела (тросы, цепи и пр.), находящиеся в равновесии, как абсолютно твердые тела и применять к ним методы статики.

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

3.1. Понятия связей

Рассматриваемые в механике тела могут быть свободными и несвободными. В первом разделе (стр. 8) данного пособия приведено понятие **свободного тела**.

Тела, которые ограничивают движение данного твердого тела, называют связями.

Твердое тело, свобода движения которого ограничена связями, называется несвободным.

Примерами несвободных тел являются груз, лежащий на столе, дверь, подвешенная на петлях, и т.п. Связями в этих случаях будут: для груза – плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери – петли, не дающие двери отойти от косяка.

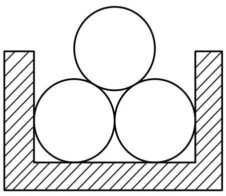
Связями также являются тросы для грузов, подшипники для валов, направляющие для ползунов и т.д.

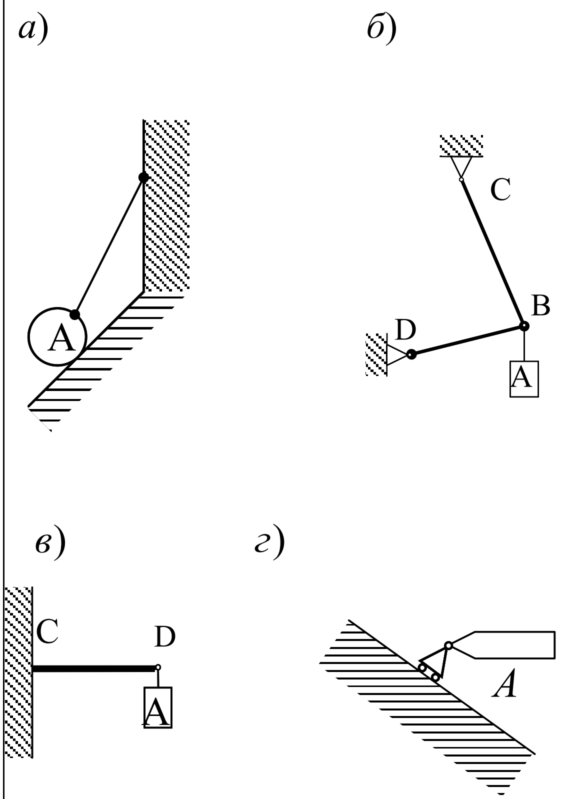
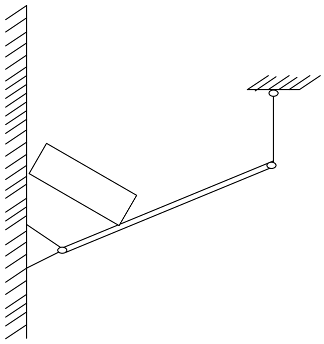
Подвижно соединенные детали машин могут соприкасаться по плоской или цилиндрической поверхности, по линии или по точке. Наиболее распространен контакт между подвижными частями машин по плоскости. Так контактируют, например, ползун и направляющие пазы кривошипно-шатунного механизма, задняя бабка токарного станка и направляющие станины.

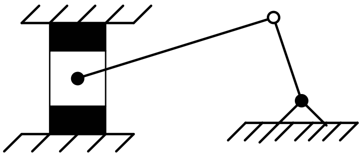
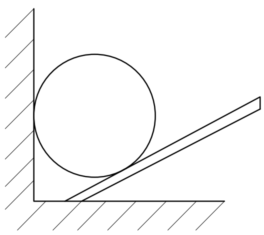
По линии соприкасаются ролики с кольцами подшипника, опорные катки с цилиндрическим каркасом опрокидывателя вагонеток и т.д. Точечный контакт образуется в шарикоподшипниках между шариками и кольцами, между острыми опорными частями и плоскими деталями.

3.2. Упражнения на определение связей

Замечание: *Выполняя задание по определению связей, в каждом частном случае в первую очередь нужно выделить объект, т.е. такое тело, движение или равновесие которого будет рассматриваться. Это важно сделать потому, что одно и то же тело можно рассматривать и как объект и как связь для другого тела. Только после того, как объект установлен, нужно указать его связи.*

Задание	**Консультация**
1. Назовите связи для лестницы, приставленной к стене.	**1**. Для лестницы (объект), приставленной к стене, связями являются стена и пол.
2. Укажите связи для шара на бильярдном столе.  Рис. 3.1	**2**. Для бильярдного шара (объект) связями являются поверхность и бортики стола.
3. В ящике лежат три трубы, как указано на рис. 3.1. Укажите связи: а) для верхней трубы; б) для двух нижних труб.	**3**.Для верхней трубы связями являются нижние трубы, а для нижних – дно и стенки ящика.
3. Выделите возможные объекты равновесия из совокупности тел, изображенных на рис. 3.2, *а, б, в, г* и укажите связи для каждого объекта (тела). 4.	**4**. Связями являются: *а*) для объекта *A* – нить и наклонная поверхность; *б*) для объекта *A* – стержни *BC* и *BD*;

 Рис. 3.2 **5**. Укажите связи для объекта *C* и балки *AB* (рис. 3.3).  Рис. 3.3 **6**. Перечислите связи для звеньев кривошипно-шатунного механизма: *а*) для кривошипа *OA*; *б*) для шатуна *AB*;	*в*) для объекта *A* – стержень *CD;* *г*) для объекта *A* – наклонная поверхность. **5**. Связями являются: для объекта *C* балка *AB* и стена; для балки *AB* стена и нить *ВД*. **6**. Связями являются: *а*) для кривошипа *OA* вал *O* и шатун *AB*; *б*) для шатуна *AB* – кривошип *OA* и поршень *B*. *в*) для поршня *B* – шатун *AB* и стенки цилиндра. Шатун *AB* является связью для кривошипа *OA* и поршня *B*.

в) для поршня *B*. Для каких объектов шатун *AB* является связью (рис. 3.4)?  Рис. 3.4 **7**. Что является связями для цилиндра, изображенного на рис. 3.5?  Рис. 3.5	**7**. Связями цилиндра являются стена и доска.

3.3. Виды связей и их реакции

При взаимодействии между телом и его связями возникают силы, противодействующие возможным движениям тела. Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить перемещение, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой **силой давления на связь**. Одновременно по закону о равенстве действия и противодействия связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто реакций связи.

Силовое взаимодействие связи на рассматриваемое тело приводится к силе $\boldsymbol{R}$ и паре сил с моментом $\boldsymbol{M}$. Сила $\boldsymbol{R}$ называется реакцией связи, а момент $\boldsymbol{M}$ – моментом реакции, или опорным моментом.

Реакции связи и опорные моменты относятся к **пассивным** силам, т.к. они не способны сообщить движение телу, т.е. не способны изменить кинематическое состояние тела. Все остальные силы – **активные**, способные изменить кинематическое состояние тела (не исчезают при устранении связей).

Принцип освобождения от связей

Для определения реакций связей используют **принцип освобождения от связей или аксиому связей**:

⇨ **Не изменяя равновесия тела, каждую связь можно отбросить, заменив ее реакцией**.

Определение реакций связей является одной из основных задач статического расчета любого сооружения или механизма.

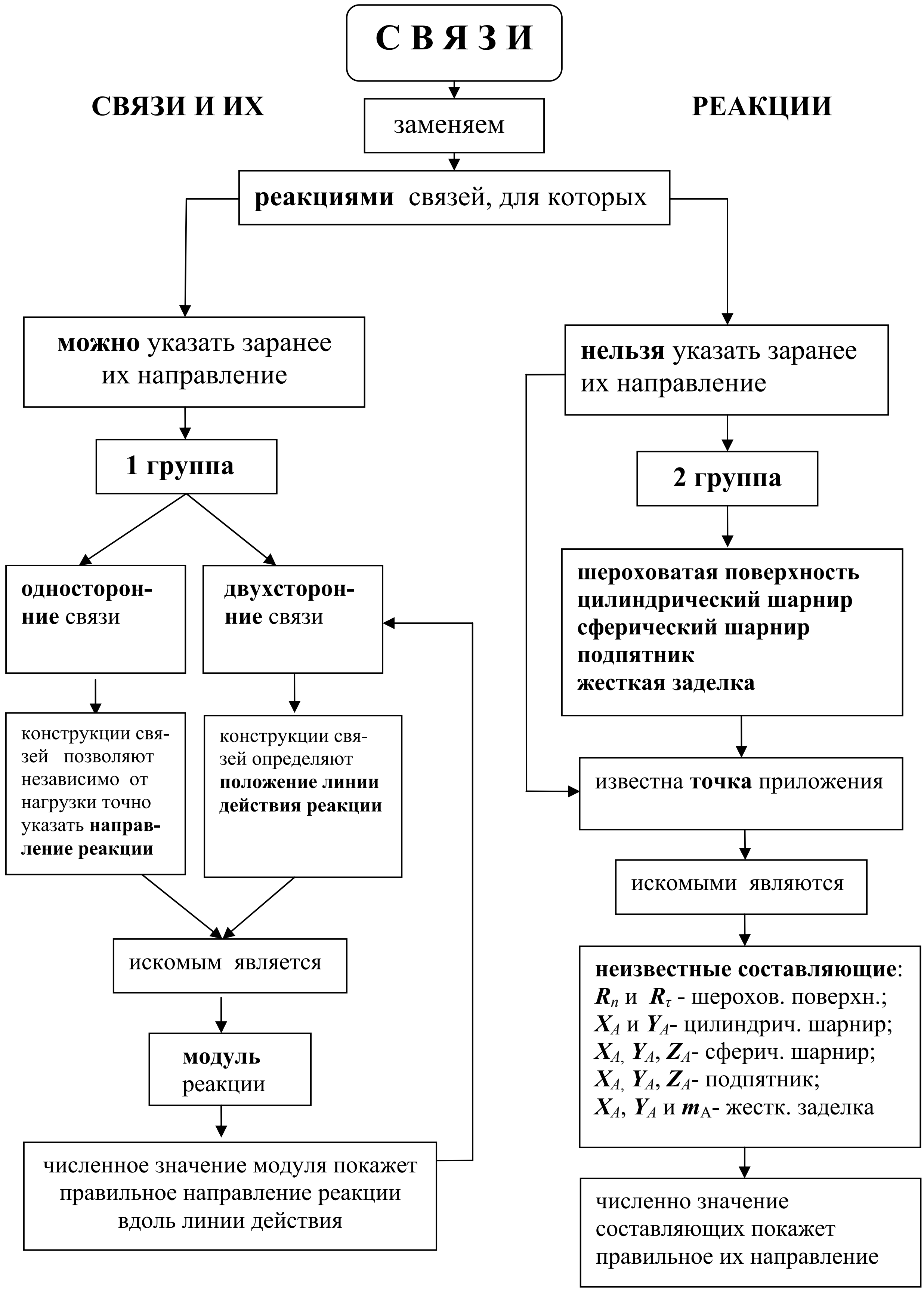
Модуль и направление реакции связи зависит от действующих на тело других сил. Направление реакции зачастую определяется также конструкцией связи.

Часто встречаются случаи, когда направление реакции связи полностью определяется конструкцией связи и не зависит от других сил, действующих на объект.

Направление сил реакции *(основные правила)*

- Реакция связи всегда противоположна тому направлению, по которому связь препятствует движению тела.
- Если опора **разрешает** поступательные движения тела в каком-то направлении, то силы реакции в таком направлении **не будет**, если связь **запрещает** движение в каком-то направлении, то реакция **будет**.

▪ Если опора **разрешает** повороты вокруг нее, то момента реакции **не будет**, если опора **запрещает** повороты, то **будет** действовать момент реакции.



ОДНОСТОРОННИЕ СВЯЗИ (*1 группа*)

К этой группе относятся следующие, часто встречающиеся в практических задачах связи:

– *связь в виде гладкой поверхности*;

– *свободное опирание тела о связь*;

– *опора на катках*;

– *гибкая связь*;

– *идеальный блок*.

3.3.1. Связь в виде гладкой (без трения) поверхности

Любая реальная поверхность является шероховатой и имеет трение. Если при движении по поверхности тело испытывает минимальное трение, например, при скольжении конькобежца по льду, при движении полированного стального или стеклянного бруска по полированной стеклянной или стальной поверхности и т.д. то силой трения можно пренебречь. В этом случае получим идеальную **абсолютно гладкую поверхность**. Подобное допущение упрощает решение задач.

Гладкая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхности соприкасающихся тел в точке их касания. Поэтому

⇨ **реакция *N* гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке**.

Пример 1. На гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 3.6, *а*). Плоскость, ограничивая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи (рис. 3.6, *б*), то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу ***N***, равную весу шара ***G*** по модулю и противоположную ему по направлению.

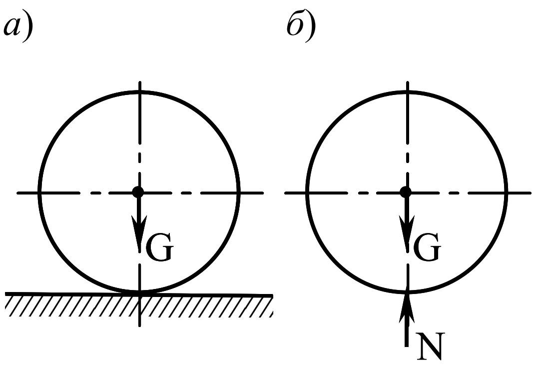


Рис. 3.6

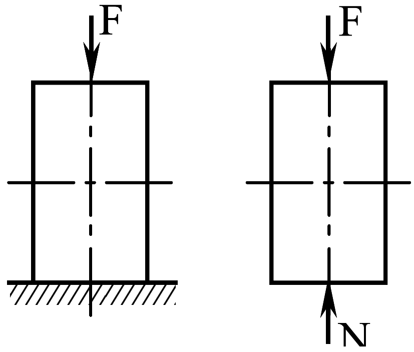


Рис. 3.7

Сила ***N*** и будет реакцией плоскости. Тогда шар, освобожденный от связи, будет свободным телом, на которое действует задаваемая сила ***G*** и реакция плоскости ***N***.

Пример 2. На рис. 3.7 показана связь в виде контакта двух идеально гладких поверхностей: цилиндрической поверхности с неподвижной горизонтальной плоскостью. Реакция связи ***N*** направлена также по нормали к опорной поверхности.

3.3.2. Примеры свободного опирания тела о связь (*точечная опора, опора на ребро***)**

Пример 1. Балка весом ***G*** в точке *В* опирается на гладкую полусферу; в точках *А* и *Д* – на гладкие горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 3.8). В этом случае реакции сферы, пола и стены будут иметь указанные на рисунке направления.

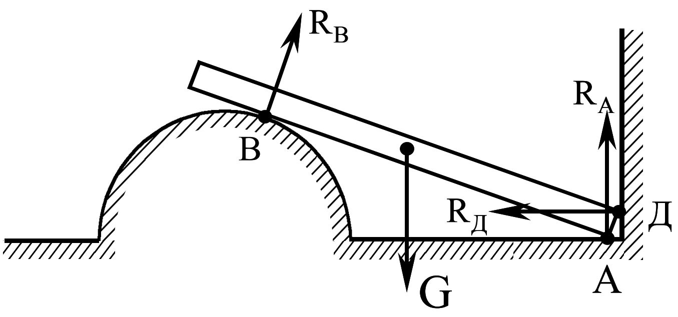


Рис. 3.8

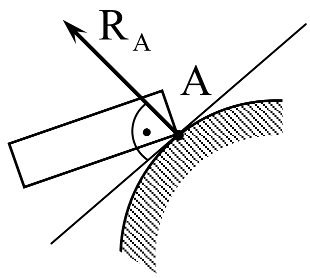


Рис. 3.9

Пример 2. При опирании тела своим ребром о гладкую криволинейную поверхность реакция связи (***R****A*) направлена перпендикулярно касательной к поверхности (рис. 3.9).

Пример 3. При опирании тела о ребро связи (рис. 3.10) или острие связи (рис. 3.11) своей гладкой поверхностью (плоской или криволинейной) реакция связи направлена перпендикулярно поверхности тела (***R****B*) или касательной к поверхности тела (***R****C*).

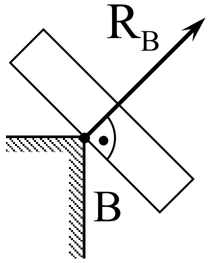


Рис. 3.10

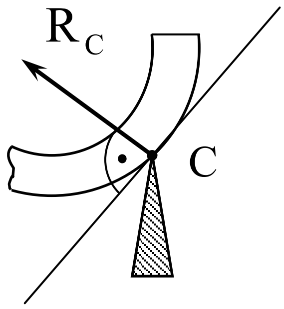


Рис. 3.11

Пример 4. При опирании гладкой поверхности тела о гладкую поверхность связи реакция связи направлена перпендикулярно общей каса-

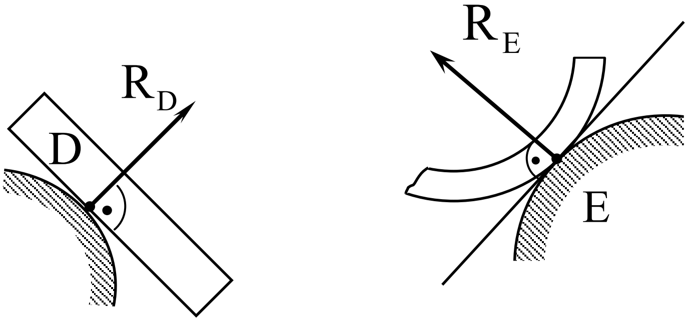


Рис. 3.12

тельной обеих поверхностей ($\boldsymbol{R}_D$ и $\boldsymbol{R}_E$, рис. 3.12).

Пример 5. На тело кругового очертания реакция связи $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ действует в радиальном направлении. Такие реакции получают, например, фрикционные диски кругового опрокидывателя вагонеток со стороны роликовых опор (рис. 3.13).

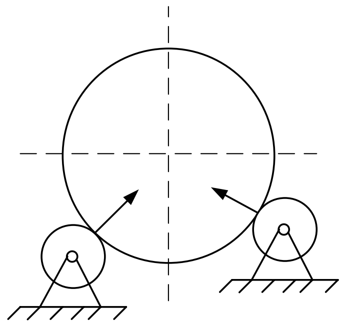
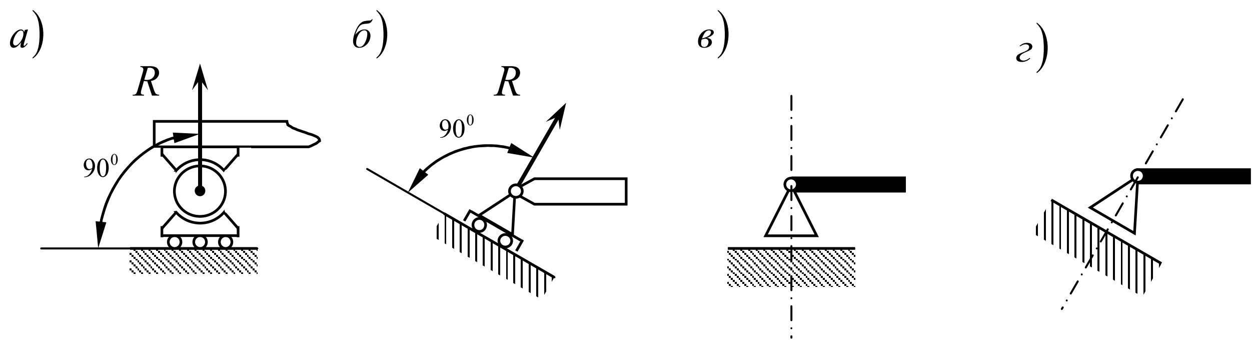


Рис. 3.13

3.3.3. Связь в виде опоры на катках

Пример 1, *плоский случай*. Тело (брус) опирается на опорную поверхность не непосредственно, а через цилиндрический шарнир, поставленный на катки (рис. 3.14, *а*, *б*). Такая опора препятствует перемещению тела только в направлении, перпендикулярном опорной поверхности катков (вдоль



опорной поверхности шарнир вместе с прикрепленным к нему телом может перемещаться).

Рис. 3.14

Из-за сравнительно большой подвижности катка трением пренебрегают и поэтому

реакция связи шарнирно-подвижной опоры направлена перпендикулярно опорной поверхности.

На рис. 3.14, *в*, *г* дано условное обозначение шарнирно-подвижной опоры.

Пример 2, *пространственный случай*. **Подвижная сферическая шарнирная опора** (рис. 3.15) допускает поворот тела в любом направлении в пространстве, а ее основание подвижно и может находиться на цилиндрических или сферических катках. Тело имеет возможность перемещаться в плоскости, параллельной основанию, но не может перемещаться перпендикулярно основанию, так как нарушится связь. Поэтому **реакция такой опоры $\boldsymbol{R_A}$ направлена перпендикулярно плоскости ее подвижного основания**. Таким образом, направление реакции будет известно, а её величина неизвестна. Расположим оси координат x и y в плоскости основания опоры, а ось z перпендикулярно к ней, тогда из проекций реакции опоры $\boldsymbol{R}_A$ на оси координат неизвестной будет только одна проекция

$$Z_A = R_A \neq 0; \qquad X_A = Y_A = 0.$$

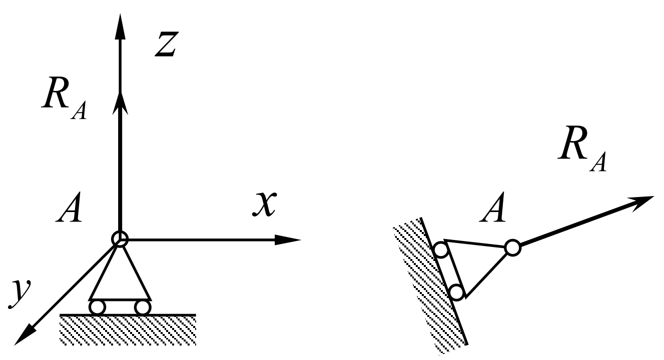


Рис. 3.15

3.3.4. Гибкая связь

Связь, осуществляемая посредством нити, троса, цепи, веревки и т.п. называется гибкой связью.

К категории гибкой нити относятся не только текстильные нити, но также тросы, цепи, канаты, веревки, лески. Все перечисленные тела обладают одинаковым свойством – они не способны работать на сжатие и могут выдерживать нагрузку на растяжение, при этом реакция гибкой нити называется силой её натяжения.

Направление реакций гибких тел совпадает с их положением и направлено в сторону, противоположную приложенной к телу силе.

Реакция гибкой связи направлена вдоль этой связи к точке подвеса. Гибкая связь может работать только на растяжение.

Пример 1. Если к концу *B* нити *AB* (рис. 3.16), прикрепленной в точке *A*, подвесить груз весом ***G***, то реакция нити ***S*** будет приложена к грузу в точке *B*, равная по модулю его весу ***G*** и направлена вертикально вверх (не дает телу удаляться от точки подвеса нити по направлению нити).

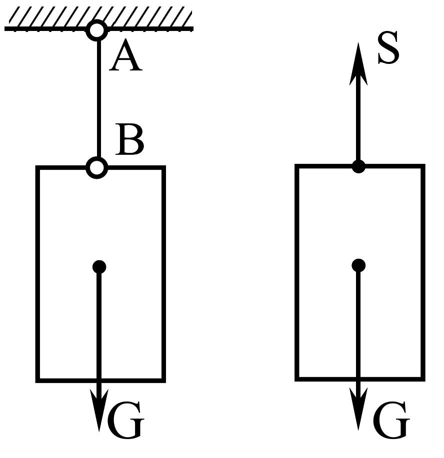


Рис. 3.16

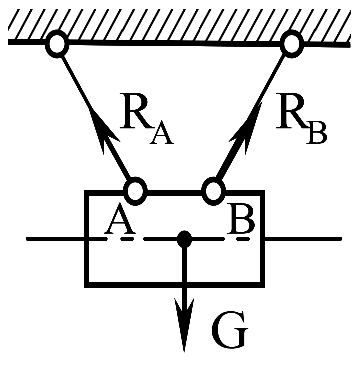


Рис. 3.17

Пример 2. Реакции гибких связей $\boldsymbol{R_A}$ и $\boldsymbol{R_B}$ (рис. 3.17) направлены вдоль связей.

Пример 3. Особый вид связи образуется между ремнем и шкивами в механизме передачи вращения от ведущего вала к ведомому.

В отличие от обычных «жестких» связей ремень образует «гибкую» связь, изменяя свою линейную форму при работе.

Реакции в ветвях ремня направлены соответственно вдоль ремней (рис. 3.18), причем реакция верхней ведущей ветви приблизительно в два раза больше реакции нижней холостой ветви.

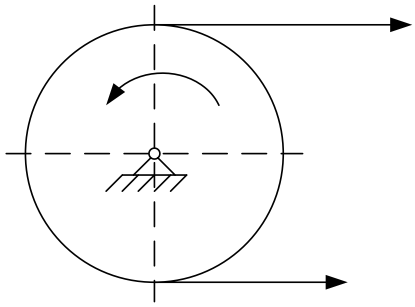


Рис. 3.18

3.3.5. Идеальный блок

Рассмотрим свойства идеального блока (рис. 3.19). Блок может быть использован только в паре с гибкой нитью, перекинутой через него. Нить закреплена в точке *A*, а в точке *D* к ней приложена сила ***P***.

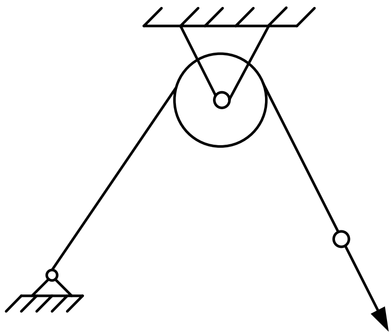


Рис. 3.19

Когда пренебрегают трением в оси колеса блока и гибкой нити об это колесо, идеальный блок не изменяет величину натяжения нити на участках *AB* и *CD*. Направление реакций на участках *AB* и *CD* совпадает с направлением этих линий. Таким образом, при рассмотрении равновесия

тела (шарнирной опоры *A*) следует мысленно отбросить блок вместе с приложенной нему силой ***P*** при помощи рассечения нити на участке *AB*, заменив механическое действие блока силой $\boldsymbol{P}_a$, направленной вдоль участка *AB* в сторону отброшенной части, по величине равной данной силе ***P***.
И так,

идеальный блок не изменяет величины натяжения блока, он изменяет направление передаваемого усилия (натяжения нити).

ДВУХСТОРОННИЕ СВЯЗИ (*1 группа*)

К этой группе можно отнести следующие, часто встречающиеся в практических задачах связи:

– *невесомые твердые стержни*;

– *скользящую заделку*.

Конструкция двухсторонних связей определяет положение **линии действия реакции**, а её модуль и направление вдоль линии действия остаются неизвестными. Примерами таких связей могут служить невесомые стержни в опорах или фермах (рис. 3.20) и скользящая заделка.

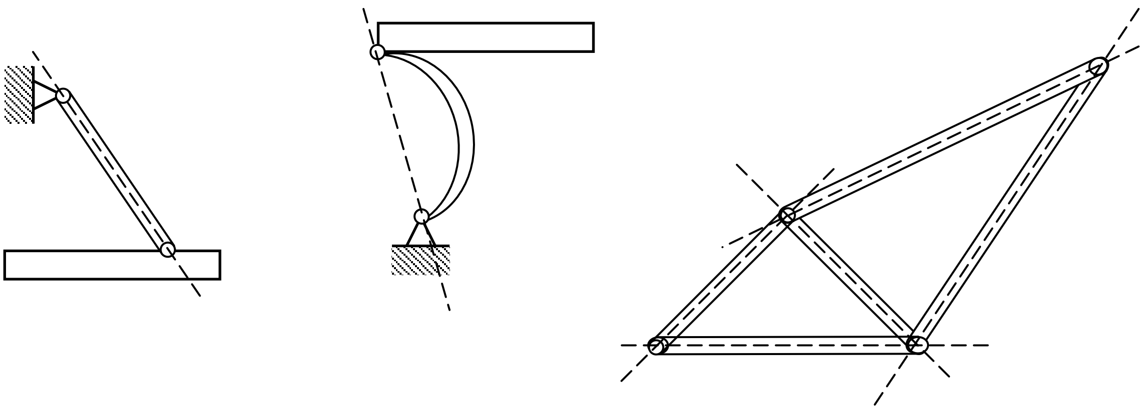


Рис. 3.20

3.3.6. Связь в виде невесомого твердого стержня, шарнирно соединенного концами с данным телом, равновесие которого мы рассматриваем, и с другим каким-нибудь телом, например, со стойкой или полом. Такой стержень называется **опорным**, так как он испытывает нагрузку только на своих концах.

Если в пределах стержня от шарнира до шарнира никаких сил к нему не приложено (опорный стержень нельзя нагружать силами в какой-нибудь его средней части и вес стержня не учитывается), то

⇨ **реакция стержня направлена вдоль стержня**.

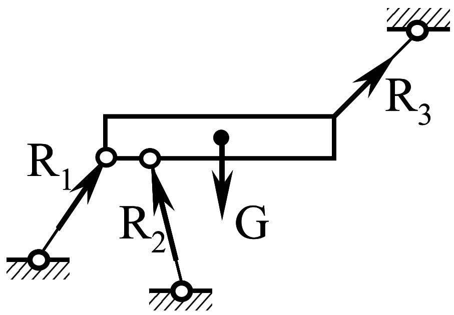


Рис. 3.21

Пример 1. Реакции стержней $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_3$ (рис. 3.21) направлены вдоль осей стержней.

Пример 2. Если связью является криволинейный невесомый стержень (рис. 3.22), то его реакция тоже направлена вдоль прямой *AB*, соединяющей шарниры *A* и *B*. Таким образом,

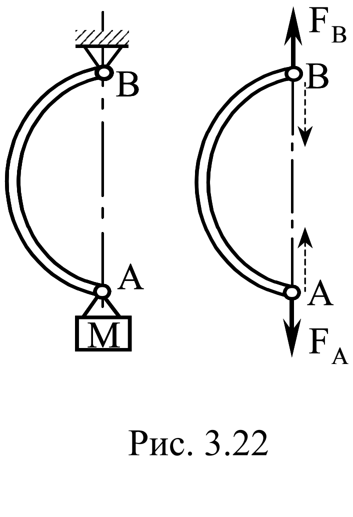


Рис. 3.22

⇨ **реакции стержневых связей направлены вдоль прямой, проходящей через оси концевых шарниров**.

Для примеров 1 и 2 можно считать, что искомым здесь является лишь модуль реакции, так как знак численного значения при решении задачи покажет правильное направление реакции вдоль известной линии действия.

В отличие от нити стержень может действовать на тело в двух направлениях, испытывая либо сжатие, либо растяжение. Если стержень растянут, то его реакция направлена в сторону от тела к стержню ($\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$ и $\boldsymbol{R}_E$ на рис. 3.23, *а*, *б*). Если стержень сжат, то его реакция направлена в сторону от стержня к телу ($\boldsymbol{R}_C$ и, $\boldsymbol{R}_D$ на рис. 3.23, *б)*.

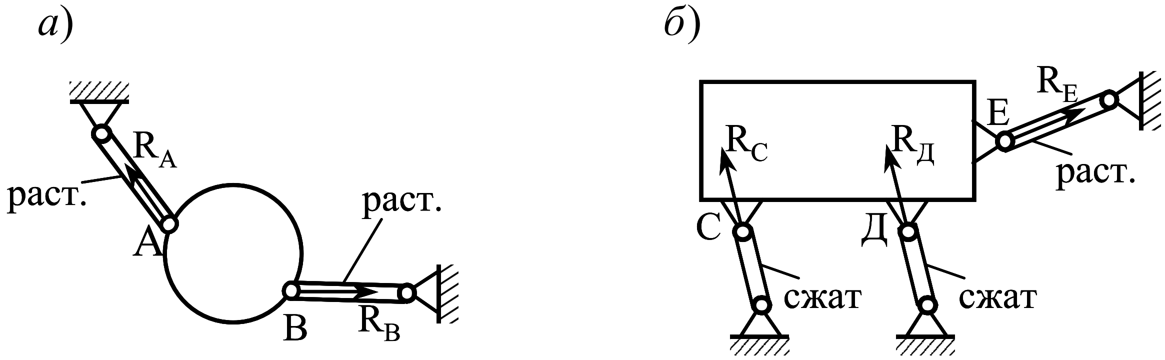
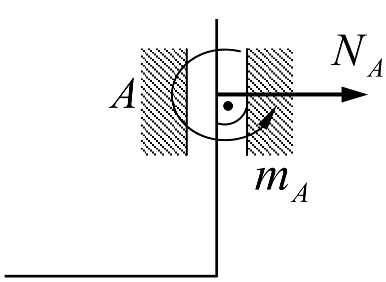


Рис. 3.23

3.3.7. Скользящая заделка

Данная связь в плоском случае разрешает движение по канавке, но запрещает движение поперёк канавки и поворот вокруг неё. На рис. 3.24 показаны возникающие в этом случае реакцию связи и опорного момента.

На рис. 3.25 показана **двойная скользящая заделка**, которая запрещает повороты – возникает момент $\boldsymbol{m}_A$, но разрешает скольжение в двух взаимно перпендикулярных направлениях – сил реакций не будет.



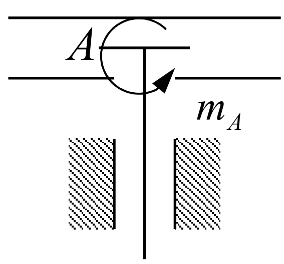


Рис. 3.24 Рис. 3.25

2 ГРУППА СВЯЗЕЙ

Ко второй группе относятся связи, по конструктивным особенностям которых ничего нельзя сказать заранее о направлениях реакций. Известна только точка приложения, а искомыми являются неизвестные составляющие силы реакции.

3.3.8. Связь в виде шероховатой поверхности

Пример 1. Тело *A* находится на шероховатой опорной поверхности (на рис. 3.26, *а* изображено тело *A* до освобождения от связи).

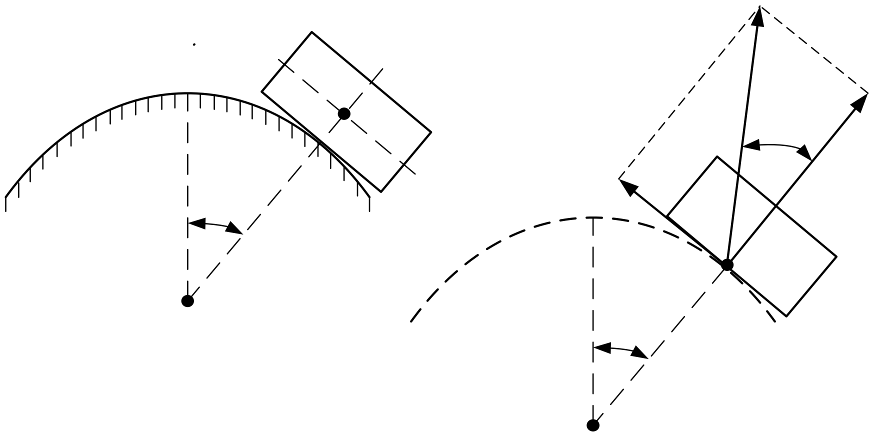


Рис. 3.26

В этом случае реакция поверхности $\boldsymbol{R}$ отклонена на угол φ от нормали к поверхности (на рис. 26, *б* изображено тело *A* после освобождения от связи) и раскладывается на две составляющие реакции: нормальную $\boldsymbol{R_n}$, перпендикулярную опорной поверхности и касательную $\boldsymbol{R_\tau}$, лежащую в плоскости. Касательная реакция $\boldsymbol{R_\tau}$, препятствующая скольжению тела по этой поверхности, называется **силой трения скольжения** и всегда направлена в сторону, противоположную действительному или возможному движению тела.

Полная реакция $\boldsymbol{R}$ равная геометрической сумме нормальной и касательной составляющих: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_n + \boldsymbol{R}_\tau$, а ее модуль $R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2}$.

Пример 2. На рис. 3.27, *а* изображен стержень *AB* веса $\boldsymbol{P}$, опирающийся концами на шероховатую поверхность. Кроме веса стержня $\boldsymbol{P}$ и нормальных реакций опорной поверхности $\boldsymbol{N}_A$ и $\boldsymbol{N}_B$, на стержень действуют силы трения $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ (на рис. 3.27, *б* изображен стержень *AB*, освобожденный от связей).

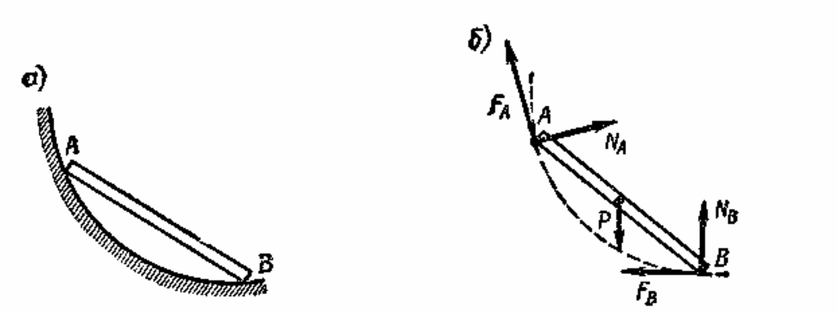


Рис. 3.27

3.3.9. Шарнирная связь

Решения многих задач статики сводятся к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы и т.д. К ним относятся:

гладкий цилиндрический шарнир или подшипник

(*шарнирно-неподвижная опора, плоский случай*)

В данном случае, цилиндрический шарнир (или просто шарнир) осуществляет такое соединение двух тел, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому вокруг общей оси называемой осью шарнира (например, как две половины ножниц).

По своей конструкции цилиндрический шарнир представляет собой опирание цилиндрического стержня (на рис. 3.28 , *а* и *б* его сечение заштриховано, ось цилиндра перпендикулярна плоскости чертежа) на внутреннюю поверхность цилиндрического отверстия тела *А*.

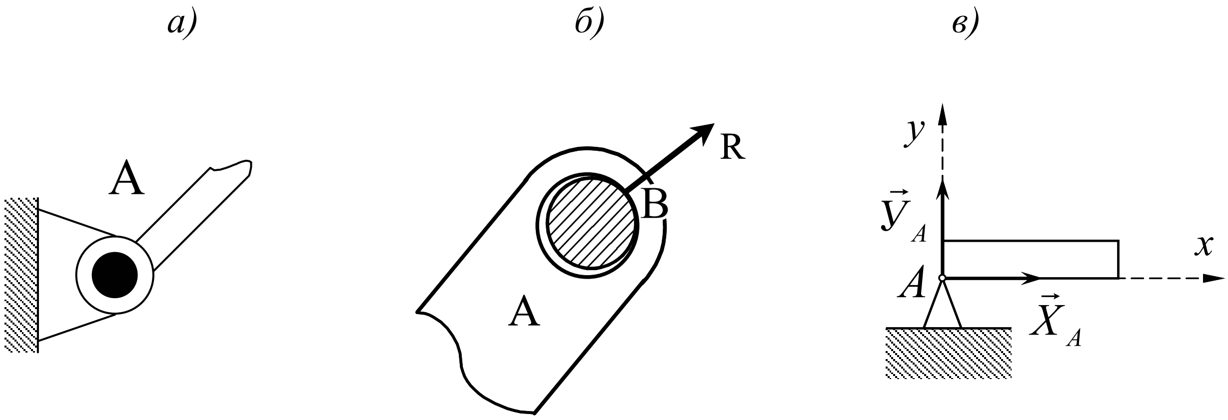


Рис. 3.28

Соприкосновение этих тел происходит по какой-либо образующей цилиндрической поверхности, которая в сечении, перпендикулярном оси цилиндра, проектируется в «точку контакта» *B* (рис. 3.28, *б*). Реакция связи (на рис. 3.28, *а* левое тело считаем связью для правого) проходит через ось шарнира и располагается в плоскости, перпендикулярной этой оси. Так как в зависимости от действующих сил «точка контакта» цилиндрических поверхностей тел будет меняться, то для реакции $\boldsymbol{R_A}$ в этом случае не известны ни её модуль (R_A), ни её направление (угол *α)* (рис. 3.28, *б*). Поэтому

при освобождении тела от шарнирной связи реакцию $\boldsymbol{R_A}$ раскладывают на две составляющие X_A и Y_A, параллельные осям координат в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

В процессе решения задачи эти составляющие всегда направляем в сторону положительного направления осей; если в результате решения задачи для $\boldsymbol{X_A}$ и $\boldsymbol{Y_A}$ получатся отрицательные значения, то это означает, что в действительности составляющие реакции направлены в стороны, противоположные направлению осей координат. По составляющим $\boldsymbol{X_A}$ и $\boldsymbol{Y_A}$ находят модуль и направление полной реакции:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}\ ; \qquad \cos\alpha = \frac{X_A}{R_A}\ ; \qquad \sin\alpha = \frac{Y_A}{R_A}.$$

На рис. 3.29, *а* показан цилиндрический шарнир (подшипник) B, ось которого совпадает с осью y.

а) *б*)

Рис. 3.29

Подшипник B препятствует повороту тела вокруг осей x и z и не препятствует вращению тела вокруг оси y и скольжению вдоль этой оси. Если трением пренебречь, то реакция $\boldsymbol{R}_B$ подшипника (реакция цилиндрической поверхности его стенок) пересекает ось вращения тела и лежит в плоскости, перпендикулярной к этой оси ($\boldsymbol{X}_B$ и $\boldsymbol{Z}_B$ – составляющие этой реакции, рис. 3.29, *б*). Так как подшипник не препятствует скольжению тела вдоль оси вращения, то нет и реакции, направленной вдоль этой оси.

Модуль и направление полной реакции определяется аналогично.

Сферический шарнир

(*пространственный случай*)

Для свободного твердого тела не возникает никаких ограничений на повороты тела относительно любой оси и его перемещений вдоль этих осей. В этом случае для какой-либо точки тела (A), связанной с осями координат x, y и z, будем иметь:

$$X_A = 0; \qquad Y_A = 0; \qquad Z_A = 0;$$

$$M_{Ax} = 0; \qquad M_{Ay} = 0; \qquad M_{Az} = 0,$$

где X_A, Y_A и Z_A – проекции реакции $\boldsymbol{R}_A$,

M_{Ax}, M_{Ay} и M_{Az} – проекции опорного момента $\boldsymbol{M}_A$.

Если твердое тело закреплено на сферической шарнирной опоре, то такая опора не накладывает никаких ограничений на повороты тела относительно любой оси, поэтому составляющие проекции опорного момента остаются равными нулю:

$$M_{Ax} = M_{Ay} = M_{Az} = 0.$$

Решение вопроса о том, какие из составляющих реакции $\boldsymbol{R}_A$ тождественно равны нулю, а какие не равны нулю и являются неизвестными, зависит от свойств кинематического закрепления основания опоры.

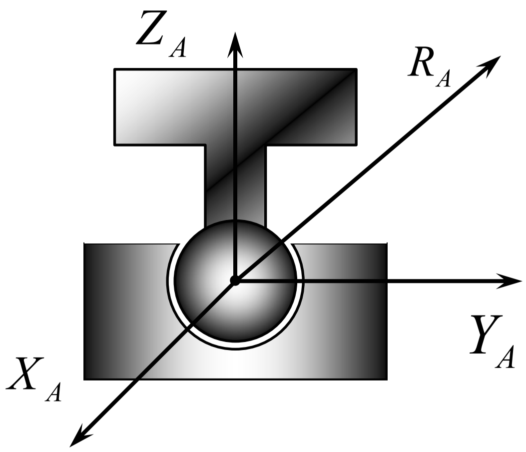


Рис. 3.30

Классическим примером такой опоры является шаровой шарнир (рис. 3.30): шар вставлен в обойму, обойма закреплена неподвижно, а с шаром жестко соединено тело балки или некоторой конструкции. Поверхности шара и обоймы обычно полагаются идеальными.

Реакция такой опоры $\boldsymbol{R}_A$ проходит через центр шара, её величина и направление неизвестны, поэтому при решении практических задач её разлагают на три составляющих X_A, Y_A и Z_A, направляя их в сторону x, y и z. Все три проекции реакции $\boldsymbol{R}_A$ в общем случае будут не равны нулю:

$$X_A \neq 0; \qquad Y_A \neq 0; \qquad Z_A \neq 0.$$

Модуль этой реакции определяют по формуле:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$$

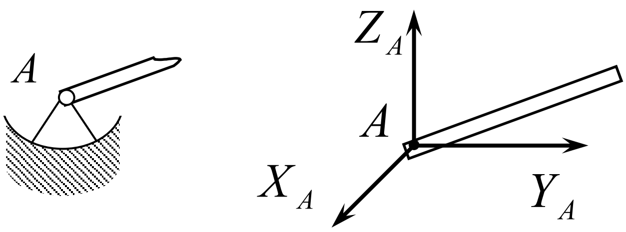


Рис. 3.31

На рис. 3.31 показано условное обозначение неподвижной сферической шарнирной опоры

Подпятники

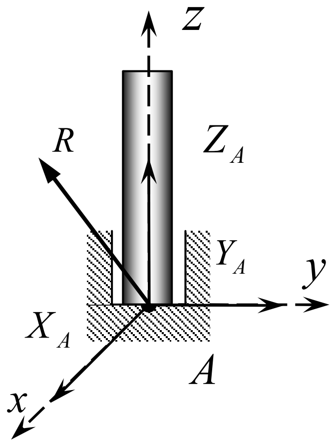


Рис. 3.32

Подпятник ***A*** представляет собой соединение цилиндрического шарнира с опорной плоскостью, препятствующей осевым перемещениям тел (рис. 3.32). Подпятник служит для укрепления пяты стойки и допускает только одно поворотное движение тела, а именно вращение этого тела вокруг оси стойки.

Основание подпятника препятствует перемещению тела по вертикали вниз (вдоль оси стойки), а стенки подпятника препятствуют перемещению тела в плоскости, перпендикулярной к оси стойки.

Реакции подпятника направляются также, как и реакции сферического шарнира; однако следует иметь в виду, что составляющая $\boldsymbol{Z}_A$, действующая вдоль оси подпятника, может быть направлена только к телу.

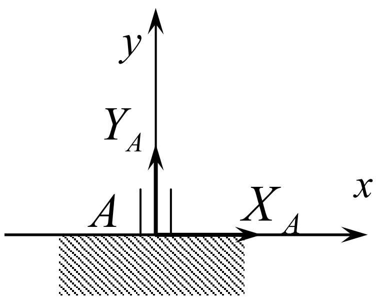


Рис. 3.33

Для подпятника, показанного на рис. 3.33 в плоской системе, реакцию связи нужно разложить на две составляющие $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$.

3.3.10. Связь в виде неподвижной жесткой заделки представляет собой такое внедрение данного тела в другое, при котором нет взаимных перемещений этих тел (например, гвоздь вбит в стену, балконная плита заделана в стену, столб врыт в землю).

Примером тела, на которое наложена такая связь, может служить балка (консоль) с замурованным в стену концом (рис. 3.34).

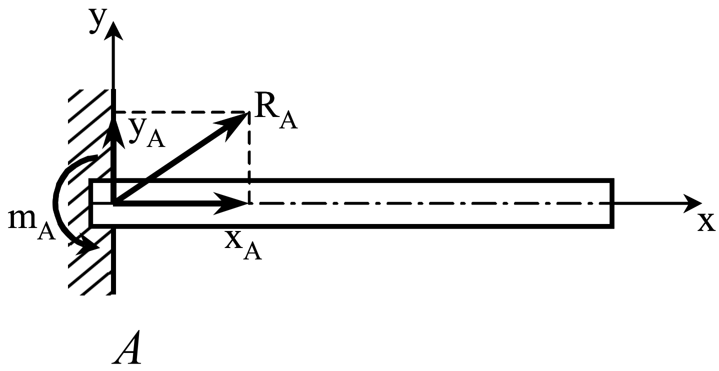


Рис. 3.34

Заделка исключает все перемещения тела – и вращательные, и поступательные. При действии на балку плоской системы сил в заделке возникает пара сил с моментом $\boldsymbol{m}_A$ – реактивный момент, препятствующий повороту балки, и произвольно направленная сила реакции $\boldsymbol{R}_A$, препятствующая поступательным перемещениям. Эту силу заменяют другими ее составляющими $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$.

В пространственном случае кроме реакций связей $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$ и $\boldsymbol{Z}_A$, будут возникать опорные моменты $\boldsymbol{m}_{Ax}$, $\boldsymbol{m}_{Ay}$ и $\boldsymbol{m}_{Az}$.

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1. *Сложение двух сходящихся сил. Параллелограмм и треугольник сил*

2.2. *Многоугольник сил. Условие равновесия сходящихся сил*

2.3. *Порядок решения задач. Упражнения*

2.4. *Проекции силы на оси*

2.5. *Аналитическое определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил (метод проекций). Упражнения*

2.1. Сложение двух сходящихся сил. Параллелограмм и треугольник сил

Силы называются **сходящимися**, если их линии действия пересекаются в одной точке.

Различают **плоскую** систему сходящихся сил, когда линии действия всех данных сил лежат в одной плоскости, и **пространственную** систему сходящихся сил, когда линии действия сил лежат в разных плоскостях.

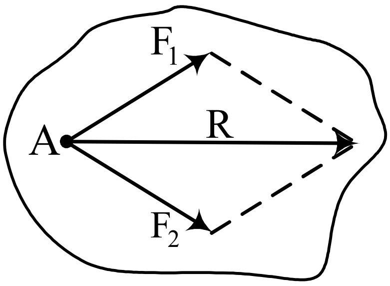


Рис. 1

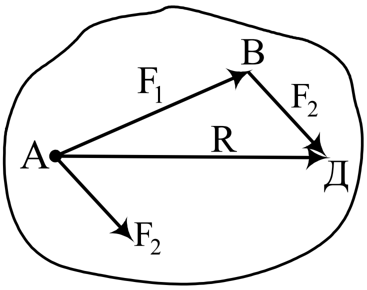


Рис. 2

Рассмотрим силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 1), приложенные в одной точке. Согласно аксиоме параллелограмма сил, их равнодействующая приложена в точке A пересечения линий действия сил и изображена диагональю параллелограмма, построенного на этих силах. Построение параллелограмма сил можно заменить построением **треугольника сил** *АВД* (рис. 2).

Направление равнодействующей силы **R** по контуру силового треугольника **противоположно** направлению обхода контура треугольника, определяемому слагаемыми силами.

2. 2. Многоугольник сил. Условие равновесия сходящихся сил

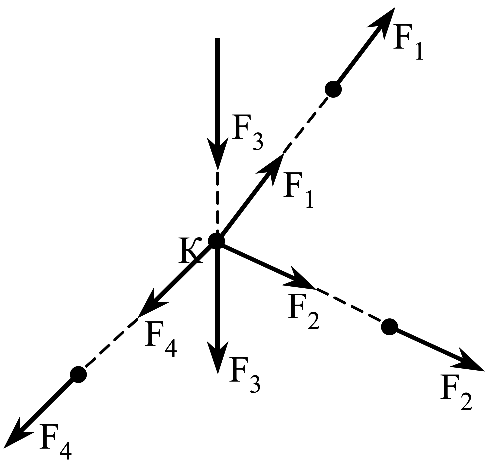


Рис. 3

Пусть к твердому телу приложены сходящиеся силы: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ и $\mathbf{F}_4$ (рис. 3). На основании следствия из второй аксиомы силу можно переносить по линии ее действия, поэтому сходящиеся силы всегда можно перенести в одну точку – в точку пересечения их линий действия. Выполнив перенос, получим четыре силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ и $\mathbf{F}_4$**,** приложенные в точке K.

Для определения их равнодействующей сложим последовательно все данные силы, используя правило треугольника (рис. 4):

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

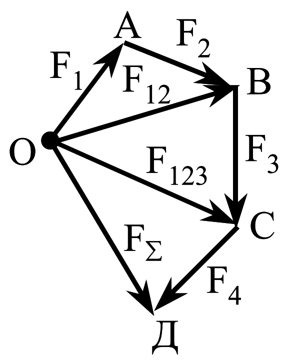


Рис. 4

Промежуточные векторы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{123}$ можно не строить, а последовательно, в указанном порядке одну за другой отложить все заданные силы и начало первой силы соединить с концом последней силы. Фигура *ОАВСД* называется **силовым многоугольником**. Замыкающая сторона этого многоугольника представляет собой равнодействующую $\mathbf{F}_{\Sigma}$ заданной системы сил, равную их **геометрической сумме**.

Сила $\mathbf{F}_{\Sigma}$ всегда направлена от начала первого слагаемого. Иными словами, **стрелка равнодействующей силы всегда направлена навстречу обхода многоугольника**.

Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил:

Когда при построении силового многоугольника конец последней слагаемой силы совместится с началом первой, равнодействующая $\mathbf{F}_{\Sigma}$ ***системы сходящихся сил окажется равной нулю. В этом случае система сходящихся сил находится в равновесии.***

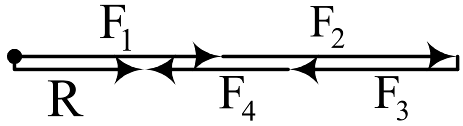


Рис. 5

Если все слагаемые силы лежат на одной прямой, то вершины силового многоугольника оказываются лежащими на одной прямой. Равнодействующая **R** этой системы лежит на той же прямой (рис. 5).

Частный случай: ***Три сходящиеся силы уравновешиваются, если треугольник этих сил замкнут.***

Теорема о трех непараллельных силах: ***Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке В*** (*рис. 6*).

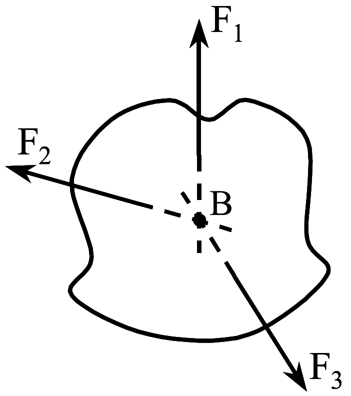


Рис. 6

Данная теорема значительно облегчает решение задач на равновесие твердого тела в тех случаях, когда направление одной из трех уравновешивающихся сил неизвестно. Определив точку пересечения линии действия двух сил, направления которых известны, можно указать направление линии действия третьей силы, т.к. она должна пройти через точку приложения этой силы и точку пересечения линий действия первых двух сил.

3.1. Порядок решения задач. Упражнения

Приведем порядок решения задач на равновесие несвободного твердого тела, к которому приложена плоская система сходящихся сил.

1). Выделить твердое тело (точку), к которому приложена система взаимноуравновешивающихся сил.

2). Показать все действующие на тело активные (задаваемые) силы.

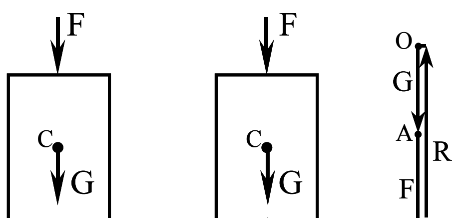
3). Применив принцип освобождаемости от связей, приложить к твердому телу соответствующие силы реакций связей.

4). Рассмотреть равновесие данного тела, построить замкнутый силовой многоугольник (построение следует начинать с силы, известной как по величине, так и по направлению).

5). Решив силовой многоугольник, определить искомые величины.

Упражнения

Пример 1



Тело весом G = 20 Н (рис. 7,а) лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Сверху на тело давит вертикальная сила F = 50 Н, линия действия которой проходит через центр тяжести тела. Определить давление цилиндра на горизонтальную плоскость.

а) б) в)

Рис. 7

Решение

Задаваемые силы: **G** – вес, **F** – сила давления.

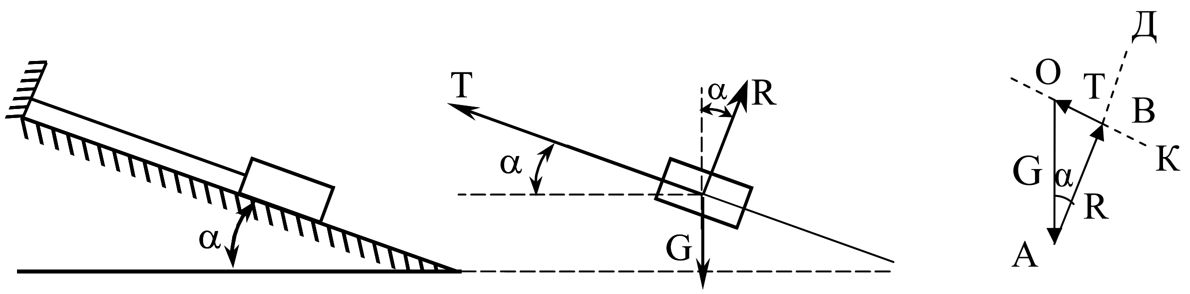
Заменим действие горизонтальной плоскости на тело соответствующей силой реакции **R** (рис.7, б). Рассматриваем тело как свободное, к которому приложены силы – **G**, **F** и **R**, где **R** – сила реакции горизонтальной плоскости.

Из произвольной точки *O* изображаем вектор, равный силе **G** (рис. 7, в). Из конца его, т.е. из точки *А*, проводим вектор, равный силе **F**. В конце его, т.е. в точке *В* находится начало вектора **R**. Так как, при равновесии твердого тела сумма сил **G**, **F** и **R** должна быть равна нулю, то конец вектора силы реакции **R** должен совпасть в точке *O* с началом вектора первой слагаемой силы **G**. Как следует из рис. 7, в, **R** = **G** + **F**. Подставив численные значения, получим: R = 70 Н.

Давление твердого тела на горизонтальную плоскость равно по модулю силе реакции **R** этой плоскости и направлено ей противоположно, т.е. по вертикали вниз.

Пример 2

Груз весом **G** удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости посредством параллельной ей нити. Определить давление груза на плоскость и силу реакции нити, если наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. Груз считать материальной точкой (рис. 8, а).



а) б) в)

Рис. 8

Решение

Рассмотрим равновесие груза. **G** – сила веса, направлена вертикально вниз; **R** – сила реакции гладкой наклонной плоскости, направлена по нормали к плоскости; **T** – сила реакция нити, направлена вдоль нити (рис.8,б).

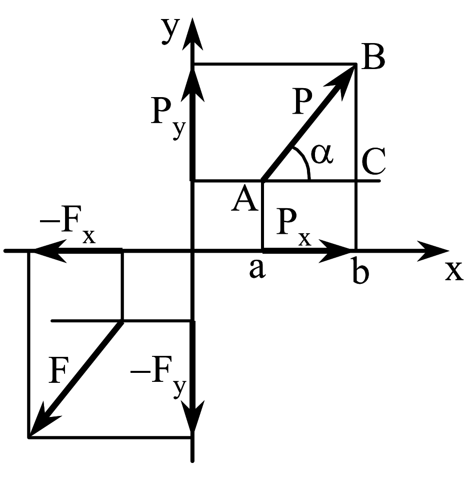
Имеем три силы. Условие равновесия: геометрическая сумма этих сил должна равняться нулю, т.е. силовой треугольник должен быть замкнутым. Из точки O $\rightarrow$ (откладываем) силу **G**, получаем точку A (рис. 8,в). Из конца вектора силы **G** (из точки A) $\rightarrow$ прямую $AД$, $\|$-ю линии действия силы **R**. Через точку $O \rightarrow$ прямую OK, $\|$-ю линии действия силы **T**, точка B – конец вектора силы **R** и начало вектора силы **T**.

Из треугольника OAB находим: $R = G{\cdot}\cos\alpha$, $T = G{\cdot}\sin\alpha$.

2.4. Проекции силы на оси

Многие задачи статики решаются аналитическим методом, при котором используются не сами силы, а их проекции на оси координат.

Чтобы получить проекции силы на оси координат, из начала и конца вектора силы опускают перпендикуляры на каждую ось (рис. 9).



Отрезок оси между основаниями перпендикуляров, опущенных из начала и конца вектора силы, определяет *проекцию вектора на ось**.*** ***Проекцию вектора считают***

положительной, если она совпадает с положительным направлением оси, и отрицательной, если она имеет обратное направление.

Величины проекций силы определяются из треугольника **ABC**

$P_x = P \cdot cos\alpha$,

где P_x – величина проекции силы на ось x;

P – модуль силы;

α – угол между вектором силы и положительным направлением оси **x**.

Проекция вектора силы на ось **y**: $P_y = P \cdot \sin\alpha$.

$$\cos\left(\vec{P},\hat{}x\right) = \frac{P_x}{P}; \; \cos\left(\vec{P},\hat{}y\right) = \frac{P_y}{P}.$$

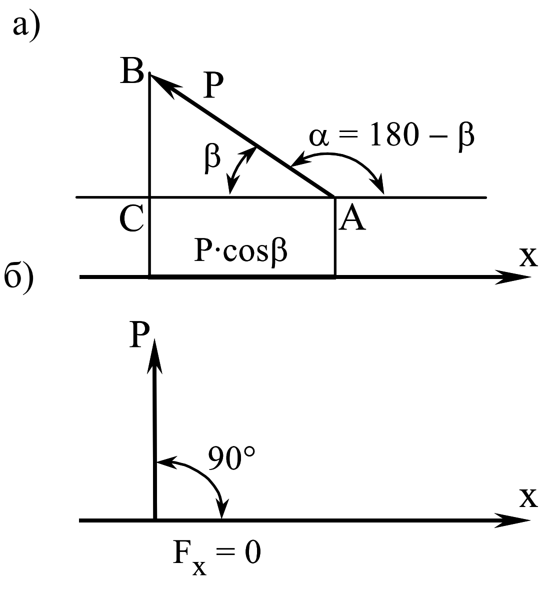


Рис. 10

В случае изображенном на рис. 10, а

$P_x = P \cdot \cos\alpha = P \cdot \cos(180 - \beta) = -P \cdot \cos\beta$

$P_x = -P \cdot \cos\beta$, проекция отрицательна.

В случае, изображенном на рис. 10, б

$$P_x = P \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Итак, **проекция силы на ось координат равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси.**

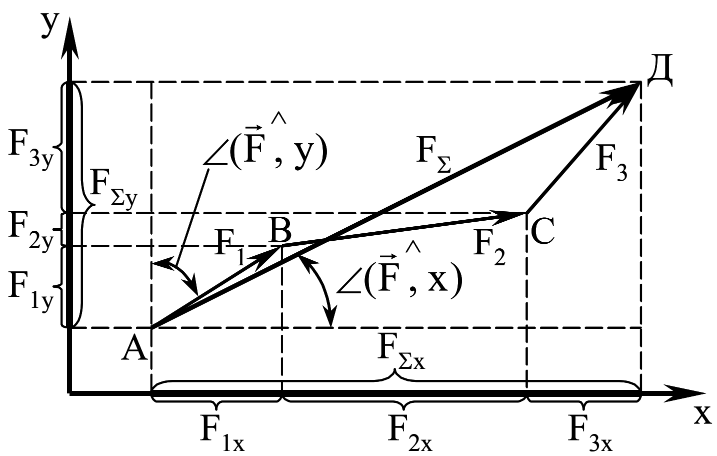
2.5. Аналитическое определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил (метод проекций)

По проекциям вектора на оси координат можно определить модуль вектора (см. рис. 9): $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$.

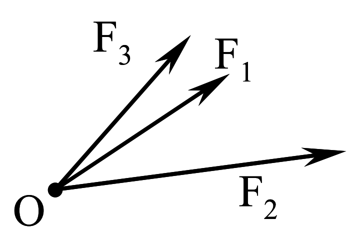
Аналогично, по проекциям равнодействующей силы, которые получаются от сложения проекций составляющих сил, можно определить модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \text{, или}$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \text{ .} \qquad (1)$$



а)



б)

Рис. 11

В случае, показанном на рисунке 11, равнодействующая трех сил: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$ (рис.11,б) $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ (рис. 11, а). Проектируя все силы на оси Ох и Оу, получаем:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{ix}; \qquad (2)$$

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{iy}. \qquad (3)$$

Подставив в (1) значение проекций $F_{\Sigma x}$(2) и $F_{\Sigma y}$(3), найдем:

$$F_\Sigma = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2}.$$

Направление $\vec{F}_\Sigma$ определяется по косинусам углов, которые эта сила образует с координатными осями:

$$\cos\left(\vec{F}_\Sigma, \hat{\ } x\right) = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}; \quad \cos\left(\vec{F}_\Sigma, \hat{\ } y\right) = \frac{F_{\Sigma y}}{F_\Sigma}.$$

ЛЕКЦИЯ 8. МОМЕНТЫ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ

Векторный и алгебраический моменты силы относительно точки. Пара сил и ее действие на тело. Свойства пар сил. Эквивалентность пар. Условия равновесия пар сил. Векторный и алгебраический момент силы относительно оси. Момент силы относительно начала координат.

ПАРА СИЛ И МОМЕНТЫ СИЛ

3.1. *Пара сил и ее действие на тело*

3.2. *Эквивалентность пар*

3.3. *Сложение и равновесие пар сил на плоскости*

3.4. *Моменты сил относительно точки и оси. Примеры*

3.1. *Пара сил и ее действие на тело*

Две равные и параллельные силы, направленные в противоположные стороны и не лежащие на одной прямой, называются парой сил (рис. 1).

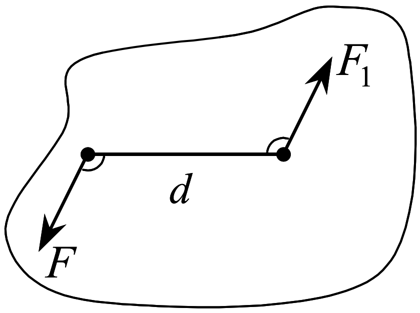


Рис.1

Пара сил не имеет равнодействующей, т.к. силы не направлены по одной прямой.

Пара сил, не имея равнодействующей, очевидно, не может быть уравновешена силой.

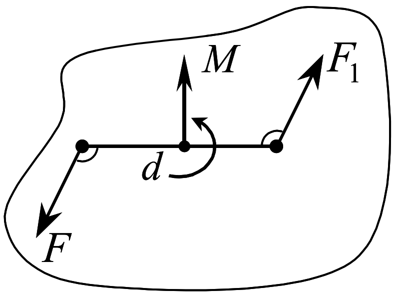


Рис.2

Действие пары сил на твердое тело состоит в том, что она стремится вращать это тело. Способность пары сил производить вращение определяется моментом пары, равным произведению силы на кратчайшее расстояние между линиями действия сил (рис. 2).

Т.е. момент пары сил – это произведение модуля одной из сил на ее плечо: $M = F \cdot d$.

Эффект действия пары сил полностью определяется ее моментом.

Момент пары сил изображают вектором. Вектор момента $\boldsymbol{M}$ пары $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F_1}$ направляют перпендикулярно к плоскости действия пары сил в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть пару сил стремящейся вращать плоскость ее действия в сторону, обратную вращению часовой стрелки.

Если рассматриваются только пары сил, лежащие в одной плоскости, то эту плоскость совмещают с плоскостью чертежа (рис.3).

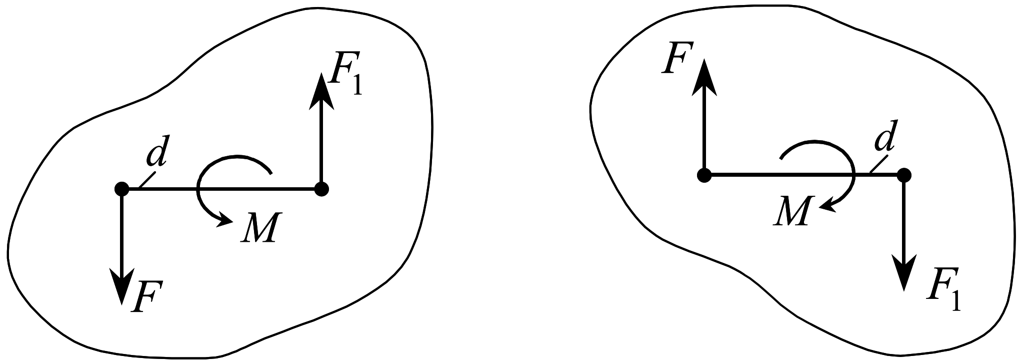


Рис. 3

Вместо вектора момента каждой пары сил, перпендикулярного к плоскости чертежа, указывают только направления, в котором пара сил стремится вращать эту плоскость. В этом случае $M = \pm F \cdot d$.

Момент пары сил считают положительным, если пара сил стремится вращать плоскость чертежа в сторону, противоположную вращению часовой стрелки, и отрицательным, если в сторону вращения часовой стрелки.

Момент пары сил в СИ измеряется в ньютонометрах (Н·м); кН·м.

Студентам необходимо совершенно отчетливо уяснить, что в статике рассматриваются два простейших элемента: **сила** и **пара сил**. Любые две силы, кроме сил, образующих пару, всегда можно заменить одной – сложить их (найти равнодействующую). Пара сил не поддается дальнейшему упрощению, она не имеет равнодействующей и является простейшим элементом.

И так, **пару нельзя упростить, заменить одной силой. Пара, как одна сила, есть самостоятельный, первичный элемент**.

Часто пару изображают в виде изогнутой стрелки с обозначением момента (рис. 4, *а*). Такое упрощенное изображение оправданно тем, что действие пары характеризуется ее моментом, и при определении опорных реакций, т.е.

неизвестных внешних сил следует брать суммы моментов всех сил относительно какой либо точки, а где приложены силы, составляющие пару, значения не имеет. Но, если надо определить не внешние силы, а внутренние в разных сечениях балки, как это делается в сопротивлении материалов, то важно знать, где приложены силы пары.

а) *б*) *в*)

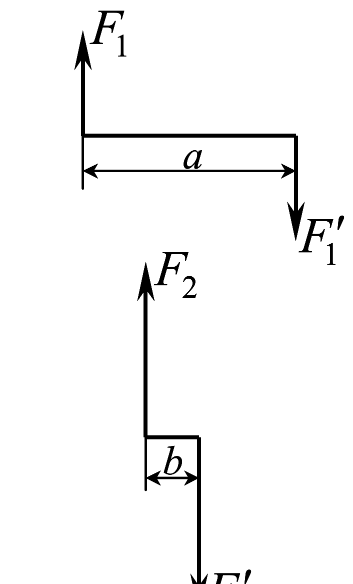
Рис. 4

Например, внутренние силы будут различными для балок, изображенных на рис. 4, *б* и *в*. Если силы пары приложены, как показано на рис. 4, *в*, то пара и ее момент условно называют сосредоточенными.

2.2. ***Эквивалентность пар***

Две пары сил считаются эквивалентными, если после замены одной пары другой парой механическое состояние тела не изменяется, т.е. не изменяется движение тела или не нарушается его равновесие.

Эффект действия пары сил на твердое тело не зависит от ее положения в плоскости. Таким образом, пару сил можно переносить в плоскости ее действия в любое положение. Рассмотрим еще одно свойство пары сил, которое является основой для сложения пар.



Не нарушая состояния тела, можно как угодно изменять модули сил и плечо пары, только бы момент пары оставался неизменным.

Заменим пару сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_1}'$ с плечом a новой парой $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_2}'$ с плечом b так, чтобы момент пары оставался тем же.

Момент заданной пары сил $M_1 = F_1 \cdot a$. Момент новой пары сил $M_2 = F_2 \cdot b$ (без учета знака).

Рис. 5

Пары сил, лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если их моменты численно равны и одинаковы по знаку.

Если, изменив значение сил и плечо новой пары, мы сохраним равенство их моментов $M_1 = M_2$ или $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$, то состояние тела от такой замены не нарушится. Следовательно, основной характеристикой пары сил является ее момент.

Не изменяя действия пары сил на твердое тело, пару сил можно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия, а также изменять ее силы и плечо, сохраняя неизменными модуль и направление ее момента.

Таким образом, вектор момента пары сил можно переносить в любую точку, т.е. **момент пары сил является свободным вектором**.

3.3. *Сложение и равновесие пар сил на плоскости*

Подобно силам, пары можно складывать**. Пара, заменяющая собой действие данных пар, называется равнодействующей**. Как показано выше, действие пары сил полностью определяется ее моментом и направлением вращения. Исходя из этого, сложение пар производится алгебраическим суммированием их моментов, т.е. момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

Это применимо к любому количеству пар, лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях (с учетом знака моментов).

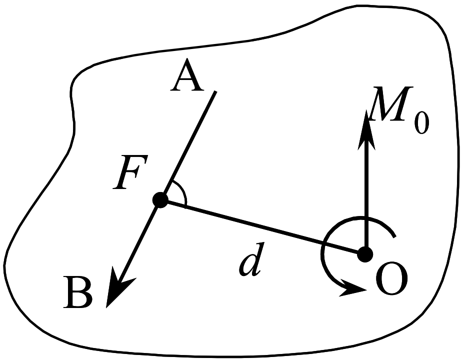
$$M = M_1 + M_2 + ... + M_\text{n} = \sum_{i=1}^{n} M_i .$$

На основании приведенного правила сложение пар устанавливается условие равновесия системы пар, лежащих в одной плоскости:

для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы момент равнодействующей пары равнялся нулю или чтобы алгебраическая сумма моментов пар равнялась нулю

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0\,.$$

3.4. *Моменты сил относительно точки и оси. Примеры*



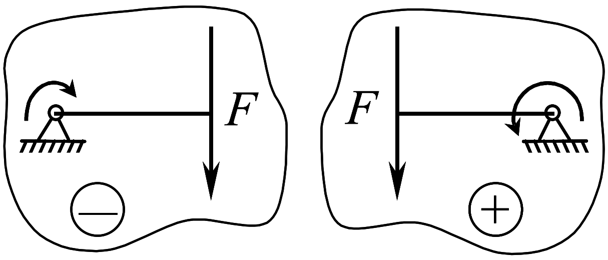


Рис. 6

Момент силы ***F*** относительно точки *O* изображается вектором ***M***, приложенным в этой точке и направленным перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку, в такую сторону, чтобы смотря навстречу этому вектору, видеть силу ***F*** стремящейся вращать эту плоскость в сторону, обратную вращению часовой стрелки.

Модуль этого вектора ***M*** равен произведению модуля силы ***F*** на ее плечо *d* относительно точки *O*:

$$M_0 = F \cdot d\,.$$

Плечо *d* является кратчайшим расстоянием от этой точки до линии действия (длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы).

На рисунке 6 показано правило знаков для моментов.

Положим, к твердому телу в точке A приложена сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 7). Чтобы вычислить момент этой силы относительно оси Z, следует спроектировать силу $\boldsymbol{F}$ на плоскость H, перпендикулярную к оси Z, а затем вычислить момент ее проекции $\boldsymbol{F_1}$ на эту плоскость относительно точки O, приписав этому моменту знак «+» или «–».

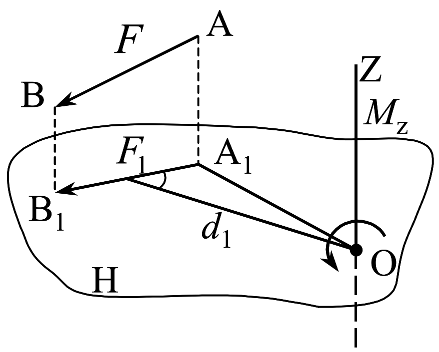


Рис. 7

Таким образом, момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси Z называется взятое со знаком «+» или «–» произведение модуля проекции $\boldsymbol{F_1}$ силы $\boldsymbol{F}$ на плоскость, перпендикулярную к оси, на ее плечо d_1

$$M_Z = \pm F_1 \cdot d_1.$$

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

1) если $F_1 = 0$, т.е. линия действия силы параллельна оси;

2) если $d_1 = 0$, т.е. линия действия силы пересекает ось.

Отсюда следует: **если сила и ось лежат в одной плоскости, то момент силы относительно этой оси равен нулю**.

ЛЕКЦИЯ 9. УСЛОВИЯ И УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМ СИЛ

Приведение силы к точке, не лежащей на линии действия силы. Приведение плоской системы сил к простейшему виду. Основная теорема статики: понятие главного вектора, главного момента. Частные случаи приведения плоской системы сил к простейшему виду. Условия и уравнения равновесия плоской системы сил. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду. Главный вектор и главный момент. Инварианты системы сил. Условия и уравнения равновесия пространственной системы сил.

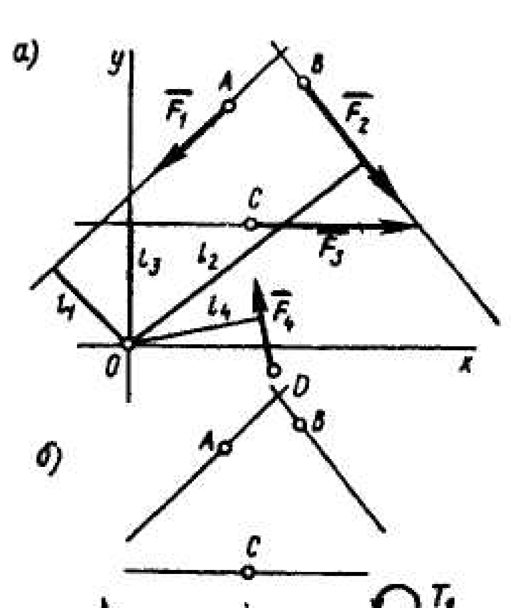
Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил

Пусть задана система четырех сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$, и $\boldsymbol{F_4}$ (рис. 7, *а*), расположенных в плоскости как угодно, т.е. они не параллельны друг другу и линии их действия не пересекаются в одной точке.

Решим теперь задачу о приведении произвольной системы сил к данному центру, т.е. о замене данной системы сил другой, ей эквивалентной, но значительно более простой, а именно состоящей, как мы увидим, только из одной силы и пары.

Выберем произвольно точку O – центр приведения – и приведем к нему силу $\boldsymbol{F_1}$, т.е. перенесем силу $\boldsymbol{F_1}$ в точку O (рис. 7, *б*), присоединим пару сил с моментом $T_1 = T_0$ ($\boldsymbol{F_1}$).[*] Затем приведем к точке O силу $\boldsymbol{F_2}$: перенесем ее в эту точку и присоединим пару с моментом $T_2 = T_0$ ($\boldsymbol{F_2}$). Так же поступим и с остальными силами $\boldsymbol{F_3}$ и $\boldsymbol{F_4}$, присоединив пары с моментами $T_3 = T_0$ ($\boldsymbol{F_3}$) и $T_4 = T_0$ ($\boldsymbol{F_4}$).

Как видно из рис. 7, *б*, в результате последовательного приведения заданных сил к точке образовались система сходящихся сил и система присоединенных пар с моментами, равными моментам заданных сил относительно точки (центра) приведения.



С помощью силового прямоугольника находим силу $\boldsymbol{F}_{гл}$, эквивалентную системе приведенных сил (рис. 7, *б*). Сложив алгебраические моменты присоединенных пар, найдем момент одной эквивалентной им пары:

$$T_{гл} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

или, так как моменты присоединенных пар равны моментам данных сил относительно центра приведения,

Рис. 7

$$T_{гл} = T_0 (\boldsymbol{F}_1) + T_0 (\boldsymbol{F}_2) + T_0 (\boldsymbol{F}_3) + T_0 (\boldsymbol{F}_4).$$

Сила $\boldsymbol{F}_{гл}$ ($\boldsymbol{R}^*$), равная геометрической сумме заданных сил называется **главным вектором**, а момент $T_{гл}$, равный алгебраической сумме моментов присоединенных пар, или алгебраической сумме моментов заданных сил относительно данного центра, называется **главным моментом** системы.

---

* На рис. 7, *б* присоединенные пары изображены круговыми стрелками, направленными в сторону поворота силами $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, и $\boldsymbol{F}_4$ и соответствующих плеч l_1, l_2, l_3, и l_4 (см. рис. 7, *а*).

Очевидно, в заданную систему сил может входить не четыре, а любое число сил. Значить, в общем виде можно записать:

$$\boldsymbol{F}_{гл} = \sum \boldsymbol{F}_k \qquad (1)$$

и

$$T_{гл} = \sum T_o(\boldsymbol{F}_k). \qquad (2)$$

Таким образом, **произвольная плоская система сил эквивалентна одной силе – главному вектору и одной паре, момент которой равен главному моменту.**

Ввиду того, что модуль и направление главного вектора $\boldsymbol{F}_{гл}$ соответствуют замыкающей стороне силового многоугольника со сторонами, равными векторам заданных сил, для его определения используют метод проекций. Начало осей координат в этом случае целесообразно поместить в центре приведения, как, например, показано на рис. 7, *а*. Тогда модуль главного вектора определяют по формуле:

$$F_{гл} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}\,,$$

(3)

где F_{kx} и F_{ky} – проекции заданных сил соответственно на оси x и y; направление главного вектора, т.е. углы φ_x и φ_y, образуемые линией действия главного вектора с осями координат, определяются по формулам:

$$\cos\varphi_x = F_{гл\,x} / F_{гл} \quad и \quad \cos\varphi_y = F_{гл\,y} / F_{гл}\,,$$

(4)

где $F_{глx} = \sum F_{kx}$ – проекция главного вектора на ось x и $F_{гл\,y} = \sum F_{ky}$ – проекция главного вектора на ось y.

Свойства главного вектора и главного момента

1. Следует заметить, что модуль и направление главного вектора не зависит от выбора центра приведения (где бы ни была выбрана точка *O,* и в каком бы порядке не строили силовой многоугольник, его замыкающая сторона никак не изменится).

2. Значение же главного момента $T_{гл}$ зависит от выбора центра приведения (при изменении положения точки *O* изменяется длина плеч l_k, см. рис. 7, *а*).

3. Необходимо знать, что главный вектор $\boldsymbol{R}^*$ не является равнодействующей данной системы сил, так как эта система не эквивалентна одной силе $\boldsymbol{R}^*$. Только в частном случае, когда главный момент обращается в

ноль, главный вектор будет равнодействующей данной системы сил. **Главный вектор и равнодействующая системы сил векторно равны, но в общем случае не эквивалентны.**

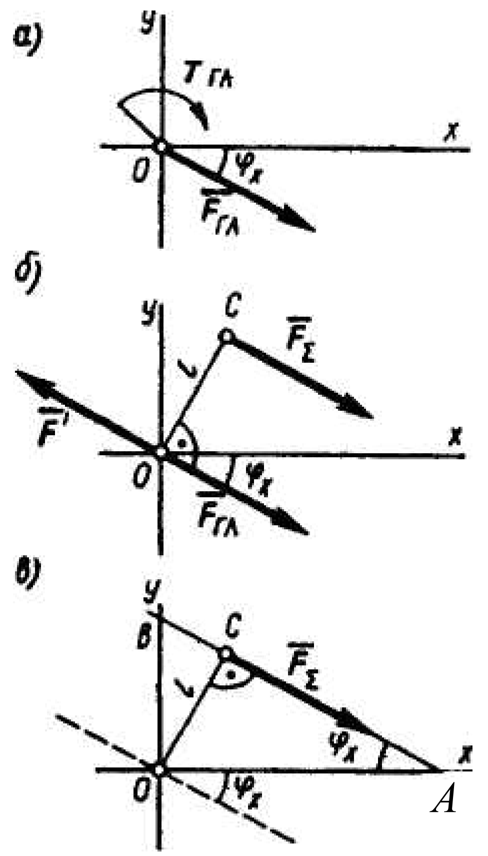


Рис. 8

Рассмотренное выше приведение плоской системы сил к силе и паре – необходимый этап задачи определения равнодействующей этой системы. Действительно, в общем случае, когда $F_{гл} \neq 0$ и $T_{гл} \neq 0$, главный вектор и определяемую главным моментом пару сил можно заменить одной эквивалентной им силой, т.е. определить равнодействующую произвольной плоской системы сил.

Допустим, что, приведя плоскую систему сил к точке, мы получили главный вектор $F_{гл}$ и пару сил с моментом $T_{гл}$ (рис. 8, *а*).

Представим главный момент в виде пары сил (***F′*** и ***F***$_\Sigma$), числено равных главному вектору ($F_\Sigma = F' = F_{гл}$), и с плечом $l = T_{гл} / F_{гл}$. Расположим эту пару таким образом, чтобы одна из сил оказалась направленной вдоль линии действия главного вектора, но в противоположную сторону (рис. 8, *б*). Тогда силы ***F′*** и ***F$_{гл}$*** можно исключить как взаимно уравновешенные, а оставшаяся сила ***F***$_\Sigma$ и есть искомая равнодействующая рассматриваемой системы сил (рис. 8 *в*). Расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей

$$OC = l = T_{гл} / F_\Sigma .$$

(5)

Следовательно, **равнодействующая произвольной плоской системы сил равна главному вектору и расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей равно частному от деления главного момента на модуль главного вектора или равнодействующей.**

Иногда важно знать, какой длины отрезки *OA* и *OB* отсекает линия действия равнодействующей от осей координат (рис. 8, *в*). Эти отрезки легко найти из прямоугольных треугольников *OAC* или *OBC*, в которых известны катет $OC=l$ и один из острых углов.

Теорема Вариньона

Непосредственно из равенства (5) вытекает важная зависимость между моментом равнодействующей и моментами составляющих сил, известная в механике как теорема Вариньона.

Перепишем равенство (5) в таком виде:

$$F_{\sum} l = T_{гл}.$$

Из рис. 8, *в* следует, что $F_{\sum} l = T_o(\boldsymbol{F}_{\sum})$ – момент равнодействующей относительно любой точки, а по формуле (2) $T_{гл} = \sum T_0(\boldsymbol{F}_{\mathrm{k}})$. Поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$T_0(\boldsymbol{F}_{\sum}) = \sum T_0(\boldsymbol{F}_{\mathrm{k}})$$

(6)

т.е. **момент равнодействующей произвольной плоской системы сил относительно любой точки равен алгебраической сумме моментов сил системы, взятых относительно той же точки.**

С помощью теоремы Вариньона решаются многие задачи механики. В частности, легко определяется равнодействующая системы параллельных сил.

Частные случаи приведения плоской

системы сил к точке. Условие равновесия

Выше доказано, что произвольную систему сил в общем случае можно привести к главному вектору $F_{гл}$**, и к паре, определяемой главным моментом** $T_{гл}$ **. Но возможны и частные случае, если в результате приведения главный вектор или главный момент или оба они получатся равными нулю.**

1-й случай. $F_{гл} \neq 0$, $T_{гл} = 0$, **плоская система сил сразу приводится к равнодействующей.**

Действительно, ели $T_{гл} = 0$, **то это означает, что система присоединенных пар уравновесилась потому, что выбранный центр приведения лежит на линии действия равнодействующей** $F_{\Sigma} = F_{гл}$ **.**

2-й случай. $F_{гл} = 0$, $T_{гл} \neq 0$, **плоская система сил равнодействующей не имеет, она эквивалентна паре сил с моментом** $T_{гл}$**.**

Действительно, если $F_{гл} = 0$, **то это**

означает, что силовой многоугольник, построенный из заданных сил, получился замкнутым (или, что то же самое, алгебраические суммы проекций всех сил на оси *x* и *y* оказались равны нулю), а при сложении присоединенных пар образовалась одна эквивалентная им пара сил.

В качестве иллюстрации подобного случая можно привести плоскую систему параллельных сил, у которой алгебраическая сумма проекций сил на ось, параллельную силам, равна нулю. Такая система, как правило, проводится к паре сил.

Пример 3

На тело действует система пяти параллельных сил $F_1 = 12$ Н, $F_2 = 5$ Н, $F_3 = 4$ Н, $F_4 = 6$ Н и $F_5 = 9$ Н, как показано на рис. 12, *а*. Определить главный

вектор и главный момент этой системы.

Решение

1. За центр приведения примем точку A и проведем ось x и y, как показано на рис. 12, *а*.

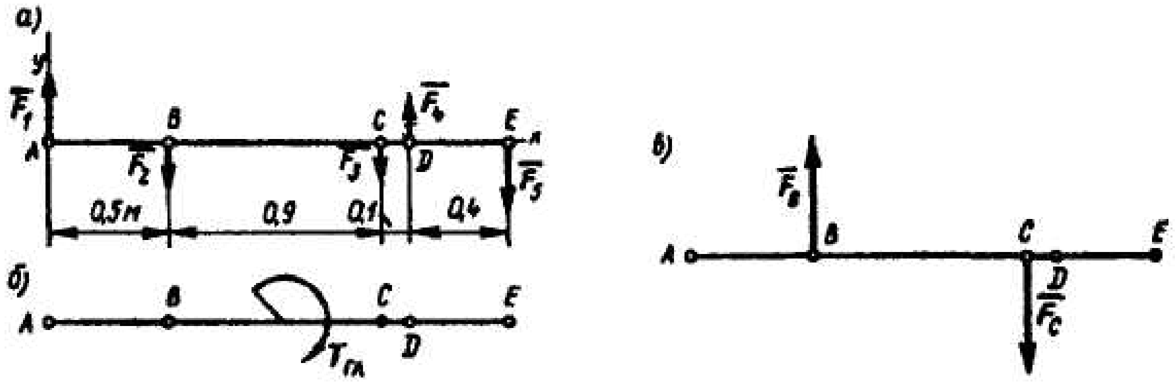


Рис. 12

2. Определим проекции главного вектора на оси:

$$F_{гл\,x} = \sum F_{kx} = 0$$

и

$$F_{гл\,y} = \sum F_{ky} = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 - F_5 = 12 - 5 - 4 + 6 - 9 = 0\,.$$

Отсюда следует, что $F_{гл} = 0$.

Этот же результат можно получить, построив из пяти заданных сил силовой многоугольник.

3. Определим главный момент:

$$T_{гл} = \sum T_A\,(\boldsymbol{F}_{\mathrm{k}}) = T_A\,(\boldsymbol{F}_1) + T_A\,(\boldsymbol{F}_2) + T_A\,(\boldsymbol{F}_3) + T_A\,(\boldsymbol{F}_4) + T_A\,(\boldsymbol{F}_5).$$

Отсюда,

$$T_{гл} = 0 - F_2 \cdot AB - F_3 \cdot AC + F_4 \cdot AD - F_5 \cdot AE\,.$$

Поставив числовые значения, получим

$$T_{гл} = -\,16{,}2\text{Нм}.$$

Следовательно, данная система сил эквивалентна паре с моментом – 16,2Нм, т.е. паре сил, действующей по ходу часовой стрелки (рис. 12, *б*).

4. Так как система сил эквивалентна паре, значение главного момента в этом случае не зависит от выбора центра приведения.

5. Пару, эквивалентную данной системе параллельных сил, можно

получить, сложив сначала силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_4}$, направленные вверх, а затем силы $\boldsymbol{F}_2$, F_3, и $\boldsymbol{F_5}$, направленные вниз. В первом случае получим силу F_B = 18Н, приложенную в точке *B*, а во втором – силу F_C = 18Н, приложенную в точке С (рис. 12, *в*). Проверьте, так ли это? Легко также проверить, что момент образовавшейся пары ($\boldsymbol{F_B}$, $\boldsymbol{F_C}$) равен найденному выше главному моменту.

3-й случай. $\boldsymbol{F}_{гл} = 0$ и $\boldsymbol{T}_{гл} = 0$, плоская система уравновешена. Действительно, если $\boldsymbol{F}_{гл} = 0$, то силовой многоугольник из приведенных сил замкнут, т.е. приведенные в точке силы уравновешенны, а если $\boldsymbol{T}_{гл} = 0$, то система присоединенных пар уравновешенна, значит и заданная система сил также уравновешенна.

Следовательно, **необходимое и достаточное условие равновесия произвольной плоской системы сил состоит в том, чтобы главный вектор этой системы и ее главный момент были равны нулю:**

$$\boldsymbol{F}_{гл} = 0, \quad \boldsymbol{T}_{гл} = 0. \tag{9}$$

Каждая из двух этих равенств выражает необходимое условие равновесия, но одного из них недостаточно для равновесия системы (см. 1-й и 2-й частные случаи приведения).

5. *Уравнения равновесия и их различные формы*

При решении задач статики обычно исходят из того, что рассматриваемое в задаче тело находится в покое и, значит, согласно первой аксиоме на него действует уравновешенная система внешних сил. Приступая к решению такой задачи, где на тело действует произвольная плоская система сил, мы заранее знаем, что условие равновесия, выраженное равенствами (9), выполняется, т.е. если произвольная плоская система сил уравновешена, то ее главный вектор равен нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки также равна нулю.

Как отмечалось выше, при решении задач статики задаются нагрузками, а по ним определяют реакции опор. Сами задачи решаются с применением алгебраических методов с помощью систем уравнений, которые получают из условий равновесия.

Рассмотрим три формы уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил.

Первая форма уравнений равновесия вытекает непосредственно из равенств (9), определяющих необходимое и достаточное условие равновесия плоской системы сил.

Главный вектор плоской системы сил может быть равным нулю лишь в том случае, если его проекции на две взаимно перпендикулярные оси равны нулю, т.е. из равенства $\boldsymbol{F}_{гл} = 0$ следует

$$F_{гл\,x} = \Sigma F_{kx} = 0 \quad \text{и} \quad F_{гл\,y} = \Sigma F_{ky} = 0\,^{*}.$$

Главный момент равен нулю только в том случае, если

$$T_{гл} = \sum T_0\,(\boldsymbol{F}_k) = 0.$$

Таким образом, первая форма уравнений равновесия плоской системы сил имеет вид

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0, \qquad \sum T_o(\boldsymbol{F}_k) = 0. \qquad (10)$$

Следовательно, **если плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы проекций всех сил на оси *x* и *y* равны нулю, а также равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки.**

---

[*] К этому же выводу можно прийти, приравняв нулю выражение (3) модуля главного вектора.

Как видим, уравнений равновесия три, т.е. в произвольной плоской уравновешенной системе число известных сил не должно превышать трех.

Вторая форма уравнений равновесия получается, если вместо одного уравнения моментов составить два, например

$$\sum T_A(\boldsymbol{F}_k) = 0 \quad \text{и} \quad \sum T_B(\boldsymbol{F}_k) = 0,$$

и к ним добавить одно уравнение проекций на любую ось, кроме той, которая перпендикулярна прямой, проходящей через центры моментов A и B в первых двух уравнениях. В противном случае система уравнений не соответствует условию равновесия. Представим, что система не уравновешена, точки A и B лежат на линии действия равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$ (рис. 13). В этом случае равны нулю и суммы моментов сил относительно точек A и B, и алгебраическая сумма проекций сил на ось y, перпендикулярную AB.

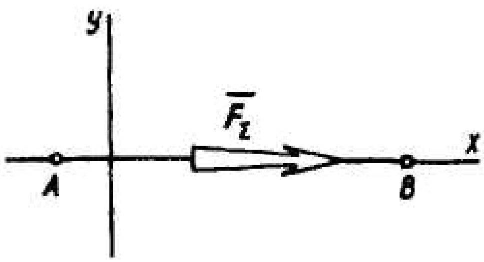


Рис. 13

Таким образом, если точки A и B для моментов сил взяты на ось x , то алгебраическую сумму проекций целесообразно брать на эту же ось и вторая форма уравнений равновесия примет вид

$$\sum T_A(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum T_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum \boldsymbol{F}_{kx} = 0 \tag{11}$$

Следовательно, **если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно двух любых точек, а также алгебраическая сумма проекций сил на ось, не перпендикулярную прямой проходящей через эти точки, равны нулю.**

Третью форму уравнений получим, если вместо уравнения проекций к двум уравнениям моментов относительно двух произвольно взятых точек A

и B добавить третье уравнение моментов сил относительно какой-либо точки C, не лежащей на прямой AB:

$$\sum T_A(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum T_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum T_C(\boldsymbol{F}_k) = 0, \tag{12}$$

т.е. **если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой, равны нулю.**

В частном случае, к телу может быть приложена уравновешенная система параллельных сил и тогда, рационально расположив оси координат (например, ось x – перпендикулярно силам, а ось y – параллельно им), из уравнений (10) и, учитывая, что $\sum F_{ky} = \sum F_k$, получим два уравнения*:

$$\sum F_k = 0, \quad \sum T_0(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{13}$$

Если плоская система параллельных сил уравновешена, то алгебраическая сумма проекций сил на ось, параллельную силам, и алгебраическая сумма моментов сил относительно любой точки равна нулю.

Расположив центры моментов A и B на прямой, перпендикулярной направлениям сил, из уравнения (11) получим вторую форму уравнений равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\sum T_A(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum T_B(\boldsymbol{F}_k) = 0 \tag{14}$$

Этот же результат получим, если, исходя из уравнений (12), два центра моментов из трех, например точки B и C, выберем на прямой, параллельной силам, так как тогда уравнения моментов сил относительно этих точек получаются идентичными.

Таким образом, **если плоская система параллельных сил уравновешена, то равны нулю алгебраические суммы моментов сил**

---

* Уравнение $\sum F_{kx} = 0$ в этом случае обратится в тождество 0 = 0.

относительно двух любых точек, лежащих на прямой, не параллельной линиям действия сил.

Обратим внимание на то, что для плоской системы параллельных сил получаем два уравнения равновесия, т.е. для того, чтобы задача могла быть решенной, число неизвестных сил должно быть не больше двух. Вообще говоря, все задачи на равновесие системы сил, в которых число неизвестных не превосходит числа уравнений статики для этой системы, называются **статически определимыми**. Если же число неизвестных сил превышает число уравнений статики, которые возможно составить для данной системы, то задача называется **статически неопределимой**.

ЛЕКЦИЯ 10. ПРЕДМЕТ ДИНАМИКИ. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Законы Галилео-Ньютона. Инерциальная и неинерциальная система отсчета. Первая и вторая задачи динамики. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки: в векторном виде, в проекциях на оси декартовой и естественной системах координат. Дифференциальные уравнения движения механической системы.

1. **Дифференциальные уравнения движения материальной точки.**
2. **Задачи динамики точки**

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

Задачи динамики состоят в том, чтобы, зная закон движения точки, определить действующую на точку силу (прямая задача) или, наоборот, зная действующие на точку силы, определить закон ее движения (обратная задача). Следовательно, для решения задач динамики точки надо иметь уравнения, связывающие ускорение этой точки и действующую на нее силу (или силы).

Эти уравнения для точки массы m получают из второго закона динамики:

$ma = \Sigma F_k$

В проекциях на декартовы оси координат (x, y, z):

$ma_x = \Sigma F_{kx}$; $ma_y = \Sigma F_{ky}$; $ma_z = \Sigma F_{kz}$

Здесь: $a_x = x$, $a_y = y$, $a_z = z$ – проекции ускорения точки на оси x, y, z соответственно;

F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы F_k на оси x, y, z соответственно.

В проекциях на оси естественного трехгранника (естественные оси τ, n, b):

$ma_\tau = \Sigma F_{k\tau}$; $ma_n = \Sigma F_{kn}$; $ma_b = \Sigma F_{kb}$

Здесь: $a_\tau = dV / dt$, $a_n = V^2 / \rho$; $a_b = 0$ –проекции ускорения точки на оси τ, n, b соответственно:

$F_{k\tau}$, F_{kn}, F_{kb} - проекции силы F_k на оси τ, n, b соответственно.

Сведем дифференциальные уравнения движения точки в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальных точек в проекциях на оси координат

Оси		Свободная точка	Несвободная точка
декартовы	x	$m_x = \Sigma F_{kx}^a$	$m_x = \Sigma F_{kx}^a + N_x$
	y	$m_y = \Sigma F_{ky}^a$	$m_y = \Sigma F_{ky}^a + N_y$
	z	$m_z = \Sigma F_{kz}^a$	$m_z = \Sigma F_{kz}^a + N_z$

естественн	τ	$m\, dV / dt = \Sigma F_{k\tau}{}^{a}$	$M\, dV / dt = \Sigma F_{k\tau}{}^{a} + N_{\tau}$
	n	$m V^2 / \rho = \Sigma F_{kn}{}^{a}$	$m V^2 / \rho = \Sigma F_{kn}{}^{a} + N_n$
	b	$0 = \Sigma F_{kb}{}^{a}$	$0 = \Sigma F_{kb}{}^{a} + N_b$

Примечание:

N_x, N_y, N_z – проекции силы реакции связи на оси x, y, z;

N_τ, N_n, N_b – проекции силы реакции связи на оси τ, n, b;

$F_{kx}{}^{a}$, $F_{ky}{}^{a}$, $F_{kz}{}^{a}$ - проекции активной силы на оси x, y, z;

ρ – радиус кривизны траектории.

1.1. Решение первой (прямой) задачи динамики материальной точки

Первая, или прямая, задача динамики заключается в том, чтобы, зная закон движения точки известной массы, определить действующую на точку силу.

Решение первой задачи рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1. Задать условие в краткой математической форме.

2. Выбрать систему координат, если она не указана в условии задачи. При этом, если движение прямолинейное, то удобно использовать декартовы оси координат, направив одну из осей в направлении движения точки. Если движение точки криволинейное и задана ее траектория движения, то рекомендуется использовать оси естественного трехгранника.

3. Изобразить точку в произвольный момент времени.

4. Изобразить векторы действующих на точку сил и, применив принцип освобождаемости от связей, если точка несвободная, изобразить соответствующие реакции связей.

5. По заданному закону движения точки определить проекции ускорения точки на соответствующие оси координат.

6. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки, соответствующие принятой системе координат.

7. Из системы составленных уравнений определить искомую величину.

1.2. Решение второй (обратной) задачи динамики материальной точки

Вторая задача динамики заключается в том, что, зная действующие на точку силы, нужно определить закон ее движения, при этом масса точки известна.

Решение второй задачи динамики точки рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1. Записать условие в краткой математической форме.

2. Выбрать систему координат.

3. Изобразить движущую точку в произвольный момент времени.

4. Изобразить активные силы и, применив принцип освобождаемости от связей, если точка несвободная, изобразить соответствующие реакции связей.

5. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки в выбранной системе координат.

6. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Определить произвольные постоянные интегрирования, исходя из начальных условий, которые определяют положение точки и ее скорость в определенный момент времени t. Чаще всего $t = 0$.

7. Воспользовавшись уравнениями, полученными в предыдущем пункте, определить закон изменения скорости, закон движения точки, а также искомые величины.

8. Проанализировать полученный результат.

ЛЕКЦИЯ 11. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Моменты инерции материальной точки относительно полюса, оси, плоскости. Моменты инерции системы материальных точек относительно полюса, оси, плоскости. Моменты инерции абсолютно твердого тела. Моменты инерции однородных тел: стержня, полого цилиндра, однородного цилиндра. Радиус инерции. Физический смысл моментов инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Осевые и полярный моменты инерции в декартовых координатах, связь между ними. Центробежные моменты инерции.

ЛЕКЦИЯ 12. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Аналитические связи: односторонние и двухсторонние, кинематические и геометрические, стационарные и нестационарные, голономные и неголономные, идеальные и неидеальные. Вариация и дифференциал. Перемещения возможные и действительные. Виртуальная работа силы. Постулат идеальных связей. Принцип возможных перемещений.

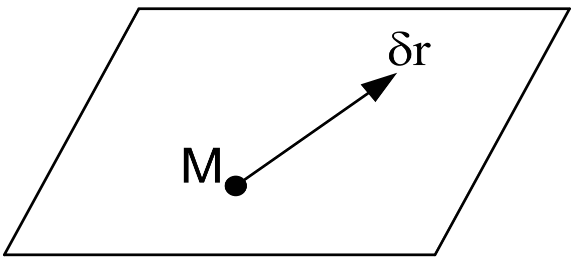
Принцип возможных перемещений

Ограничения, накладываемые на движение точек системы, называются *связями.*

Связи, накладывающие ограничения только на положение точек системы в пространстве, называются *геометрическими.*

Связи называются *удерживающими*, если при своём движении точки не могут покинуть систему.

Будем рассматривать только геометрические, стационарные, удержива-ющие связи.



Возможным перемещением системы называем любую совокупность элементарных перемещений точек системы, которые допускаются в данный момент наложенными на систему связями. Обозначать возможные перемещения будем, $\delta\vec{r}, \delta\vec{S}, \ \delta\vec{\varphi}$.

Проекции вектора $\delta\vec{r}$ на оси координат $\delta x, \delta y, \ \delta z$ называются вариациями координат:

$$\delta\vec{r} = \delta x \cdot \vec{i} + \delta y \cdot \vec{j} + \delta z \cdot \vec{k}.$$

Работу сил на возможном перемещении называют возможной работой; по аналогии с рботой на действительном перемещении:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta S \cdot \cos(\vec{F}; \vec{V}),$$

$$\delta A = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z.$$

Связи называют *идеальными,* если сумма элементарных работ реакций связей на любом перемещении системы равна нулю, т.е.:

$$\sum \delta A_k^r = 0.$$

Принцип возможных перемещений даёт в общем виде условия равновесия механической системы с геометрическими, стационарными, удерживающими и идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю, т.е.

$$\sum \delta A_k^a = 0.$$

Если связи с трением, то силы реакций связей в виде сил трения следует отнести к активным силам. Принцип возможных перемещений позволяет исключить все наперёд неизвестные реакции идеальных связей.

ЛЕКЦИЯ 13. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

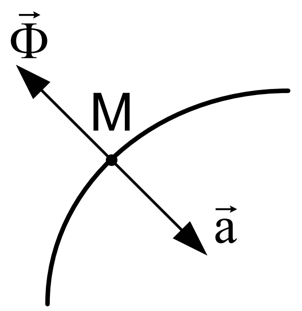
Принцип Даламбера для материальной точки. Силы инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор сил инерции. Главный момент сил инерции. Частные случаи приведения сил инерции: при поступательном движении, при вращательном движении вокруг центра масс, при вращении вокруг произвольной оси, при плоском движении, при равномерном вращении однородного стержня. Принцип Даламбера – Лагранжа. Общее уравнение динамики.

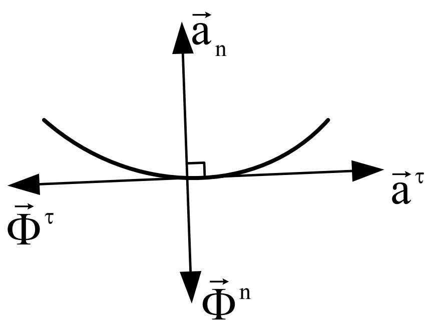
Принцип Даламбера для материальной точки

Силой инерции материальной точки называется векторная величина

$\vec{\Phi}$,

равная по модулю произведению массы точки на её ускорение и направлен-ная противоположно вектору ускорения (рис.12.1), $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$.





Принцип Даламбера для материальной точки формулируется так: если к фактически действующей на материальную точку силе $\vec{F}$ и реакции связи $\vec{N}$ добавить силу инерции $\vec{\Phi}$, то полученная система сил будет уравновешен-ной и к ней можно применить уравнения статики:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0.$$

Принцип Даламбера для механической системы

Давление вращающегося твёрдого тела на ось вращения

Если в любой момент времени к каждой точке системы, кроме действующих на неё внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять уравнения статики.

$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{\Phi}_k$, k = 1, 2,…n,

где $\vec{\Phi}_к = -m_k \cdot \vec{a}_k$ - сила инерции k – той точки системы.

Из вышеприведённой системы уравнений, учитывающей свойства внутренних сил, вытекают два условия равновесия сил:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_k^e + \vec{\Phi} = 0 \\ \sum \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_0^Ф = 0 \end{cases}$$

где $\vec{\Phi} = -M \cdot \vec{a}_c$ - главный вектор сил инерции,

$\vec{M}_0^Ф = -\dfrac{d\vec{K}_0}{dt}$ - главный момент сил инерции.

Силы инерции в частных случаях движения твёрдого тела:

1. *Поступательное движение.*

$\vec{\Phi} = -M \cdot \vec{a}_c$, $M_0^Ф = 0$

2. *Вращательное движение вокруг оси z, проходящей через центр масс.*

$\Phi = 0$, $\vec{M}_z^Ф = -I_{zc} \cdot \varepsilon$.

3. *Плоскопараллельное движение.*

$\vec{\Phi} = -M \cdot \vec{a}_c$, $M_z^Ф = -I_{zc} \cdot \varepsilon$

Общее уравнение динамики.

Применяя к механической системе одновременно принцип Даламбера и принцип возможных перемещений, придём к зависимости:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\Phi + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Но так как для идеальных связей $\sum \delta A_k^r = 0,$ то:

$$\sum A_k^a + \sum A_k^\Phi = 0.$$

Это и есть общее уравнение динамики.

При движении системы, подчинённой удерживающим идеальным связям, сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

В аналитической форме общее уравнение динамики имеет вид:

$$(\sum F_{kx}^a + \Phi_{kx}) \cdot \delta x_k + (\sum F_{ky}^a + \Phi_{ky}) \cdot \delta y_k + (\sum F_{kz}^a + \Phi_{kz}) \cdot \delta z_k = 0.$$

Методические указания по решению задач.

1. Изобразить на схеме активные силы, приложенные к системе, причём, если связи с трением, то силы трения отнести к активным силам.

2. Изобразить силы инерции системы.

3. Сообщить системе столько независимых между собой возможных перемещений, сколько степеней свободы имеет система.

4. Составить общее уравнение динамики для каждого независимого возможного перемещения.

5. Определить искомые величины.

ЛЕКЦИЯ 14. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ: ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС, ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Центр тяжести твердого тела и его координаты. Центр масс механической системы. Центр масс отдельных тел. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс. Количество движения материальной точки и механической системы. Теорема об изменении количества движения (дифференциальный вид). Понятие элементарного импульса и импульса силы за какой-либо промежуток времени. Теорема импульсов (интегральный вид теоремы об изменении количества движения). Закон сохранения количества движения.

Теорема о движении центра масс

Массой системы материальных точек называется сумма масс точек системы:

$M = \Sigma m_k$

Теорема о движении центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат

$Mx_c = \Sigma F_{kx}^e$; $My_c = \Sigma F_{ky}^e$; $Mz_c = \Sigma F_{kz}^e$,

где M – масса системы;

x_c, y_c, z_c, F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e – проекции ускорения центра масс и проекции внешних сил на оси координат.

Важным следствием из теоремы о движении центра масс является закон сохранения движения центра масс, который формулируется так:

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равняется нулю ($\Sigma F_{kx}^e = 0$) и в начальный момент $V_{co} = 0$, то центр масс системы вдоль оси x перемещаться не будет ($x_c = const$).

Итак, если $\Sigma F_{kx}^e = 0$ и $V_{co} = 0$, то $x_c = const$.

Теорема о движении центра масс позволяет решать две основные задачи динамики:

1. Зная движение центра масс, найти главный вектор внешних сил.

2. Зная внешние силы, действующие на систему, найти движение центра масс.

3. В тех случаях, когда имеет место закон сохранения движения центра масс, теорема позволяет по перемещению одного тела системы найти перемещение других тел.

Указание. Механическую систему следует выбирать таким образом, чтобы все неизвестные силы или хотя бы часть их оказалась в числе внутренних сил.

Теорема об изменении количества движения
материальной точки

Количеством движения точки массы m называется вектор q, приложенный к движущейся точке и равный: $q = mV$.

Элементарным импульсом силы F, действующей в течение промежутка времени dt на точку, называется вектор dS, равный:

$dS = Fdt$.

Импульсом силы за конечный промежуток времени t_1 называется вектор S , равный интегралу:

$S = F(t)dt$.

Теорема об изменении количества движения материальной точки формулируется так:

а) *в дифференциальной форме:*

Дифференциал количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку:

б) *в конечной форме:*

Изменение количества движения точки за конечный промежуток времени t равно импульсу силы, действующей на точку за тот же промежуток времени:

$mV_1 – mV_0 = \int Fdt$ - в векторной форме.

$mV_{1x} – mV_{0x} = \int F_x dt$ - в проекции на ось x.

$mV_{1y} – mV_{0y} = \int F_y dt$ - в проекции на ось y.

$mV_{1z} – mV_{0z} = \int F_z dt$ - в проекции на ось z.

Теорему об изменении количества движения материальной точки удобно применять в тех случаях, когда сила, действующая на точку, постоянна или зависит либо от времени, либо от скорости.

Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения системы материальных точек, или главным вектором движения системы, называется вектор Q, равный:

$Q = \Sigma\ (m_k V_k) = MV_C$.

где M – масса системы, V_C - скорость центра масс, m_k и V_k - масса и скорость k–той точки соответственно.

Теорема об изменении количества движения формулируется так:

а) *в дифференциальной форме:*

Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему:

В проекциях на оси X, Y, Z соответственно имеем:

$dQ_x /dt = \Sigma\ F_{kx}{}^e = R^e{}_x$

$dQ_y /dt = \Sigma\ F_{ky}{}^e = R^e{}_y$

$dQ_z /dt = \Sigma\ F_{kz}{}^e = R^e{}_z$

б) *в конечной форме:*

Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени t_1 равно импульсу главного вектора внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$Q_1 – Q_0 = \int (\Sigma F_k^e)dt.$

В проекциях на оси X, Y, Z соответственно имеем:

$Q_{1x} – Q_0 = \int (\Sigma F_{kx}^e)dt,$

$Q_{1y} – Q_0 = \int (\Sigma F_{ky}^e)dt,$

$Q_{1z} – Q_0 = \int (\Sigma F_{kz}^e)dt.$

Следствия или закон сохранения количества движения:

1. Если: $R^e = \Sigma F_k^e = 0$, то $Q = const.$, ($Q_x = C_1$, $Q_y = C_2$, $Q_z = C_3$).

2. Если: $\Sigma F_{kx}^e = 0$, то $Q_x = const.$, но $Q_y \neq const.$, $Q_z \neq const.$,

ЛЕКЦИЯ 15. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия: материальной точки, системы материальных точек, абсолютно твердого тела (при поступательном, вращательном и плоском движении). Работа силы: элементарная, на конечном перемещении, силы тяжести, силы трения скольжения, силы упругости. Элементарная работа момента силы. Теорема об изменении кинетической энергии изменяемых и неизменяемых систем (дифференциальный и интегральный вид). Потенциальное силовое поле и его свойства. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия

Работа силы

Элементарная работа силы F:

$dA_f = F\,dS\cos(F;V)$,

где: F – величина силы;

dS – элементарное перемещение точки приложения силы (направлено так же, как скорость точки);

cos (F;V) – косинус угла между направлением силы и перемещением точки приложения силы.

Работа силы $\vec{F}$ на конечном перемещении S:

$$A_f = \int_0^S F dS \cos(\vec{F};\vec{V}).$$

Элементарная работа момента:

$$dA_M = \pm\int_0^{\varphi} M d\varphi.$$

Работа силы тяжести точки, тела

Работа силы тяжести материальной точки массой m зависит только от *вертикального* перемещения h этой точки:

$$A_{mg} = \pm mgh$$

знак «+» берётся в случае перемещения точки вниз,

знак «-» берётся в случае перемещения точки вверх.

Работа силы тяжести тела массы M зависит только от *вертикального* перемещения H_c центра тяжести C тела:

$$A_{Mg} = \pm MgH$$

знак «+» берётся в случае перемещения точки вниз,

знак «-» берётся в случае перемещения точки вверх.

Мощность

Мощность – эта величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Мощность силы: $N_F = \vec{F}\vec{V} = FV\cos(\vec{F};\vec{V})$

Мощность момента: $N_M = \pm M\omega$ (берётся знак «+»,если направление угловой скорости вращения совпадает с направлением действия момента).

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия точки:

$T = \dfrac{mV^2}{2}$, где m – масса точки,V – скорость точки.

Кинетическая энергия системы точек:

$T = \sum \dfrac{m_k V_k^2}{2}$, где к – индекс точки.

Кинетическая энергия системы тел:

$T = \sum T_k$, здесь к – номер тела.

Кинетическая энергия твёрдого тела вычисляется по формулам:

а) при поступательном движении тела:

$T_{пост} = \dfrac{MV^2}{2}$, где М – масса тела, V – скорость любой точки тела;

б) при вращательном движении вокруг неподвижной оси:

$T_{вращ} = \dfrac{I_z \omega^2}{2}$, где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость тела.

в) при плоскопараллельном движении тела:

$T_{пл.-парал.} = \dfrac{MV_c^2}{2} + \dfrac{I_{zc}\omega^2}{2}$, где М – масса тела, V_c - скорость центра масс тела, I_{zc} - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения тела, ω - угловая скорость тела.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Кинетическая энергия материальной точки называется скалярная величина равная половине произведения массы точки на квадрат её скорости: $T = \frac{mV^2}{2}$.

Теорема об изменении кинетической энергии точки выражается так:

а) в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum dA_k \ .$$

Дифференциал кинетической энергии точки равен сумме элементарных работ сил, действующих на неё.

б) в конечной форме:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_k$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на конечном перемещении равно работе на этом перемещении, приложенных к точке сил.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки удобно применять в задачах, где сила, приложенная к точке, либо постоянная $\vec{F} = \text{const}$, либо зависит от положения точки.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме

Производная по времени от кинетической энергии системы равна мощности внешних и внутренних сил:

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \text{ или } \frac{dT}{dt} = \frac{\sum dA_k^e}{dt} + \frac{\sum dA_k^i}{dt}.$$

Теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме удобно использовать при определении ускорения точки или тела.

Решение задачи при определении ускорения производится по следующим этапам.

1. Определяем характер движения тел, входящих в систему (обычно рассматривается неизменяемая система $\sum dA_k^i = 0$).

2. Вычисляем кинетическую энергию системы в функции от скорости той точки или тела, ускорение которой надо определить.

3. Вычисляем производную от кинетической энергии по времени: $\frac{dT}{dt}$.

4. Вычисляем элементарную работу внешних сил: $\sum dA_k^e$.

5. Вычисляем: $\frac{\sum dA_k^e}{dt}$.

6.Определяем ускорение точки или тела, приравняв результаты, полученные в пунктах 3 и 5.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме

Изменение кинетической энергии системы при её перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе на этом перемещении.

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Если система неизменяемая, то работа внутренних сил $\sum A_k^i = 0$.

Теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме удобно использовать при определении скорости при определении скорости или перемещения точки или тела.

ЛЕКЦИЯ 16. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Момент количества движения материальной точки относительно полюса: алгебраическое значение, направление вектора. Момент количества движения материальной точки относительно оси. Момент количества движения относительно начала координат. Кинетический момент механической системы относительно точки и оси. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения кинетического момента.

Моментом количества движения материальной точки относительно неподвижного центра О называется вектор K_o, определяемый равенством: $K_0 = m_0(mV) = r \times mV$.

Здесь $r = OM$ – радиус-вектор движущейся точки М, проведённый из центра О; mV – количество движения точки.

Модуль вектора K_o равен: $K_o = mVh$ где h - плечо вектора mV относительно центра О.

Момент количества движения точки относительно оси равен проекции на эту ось вектора момента количества движения относительно центра О, лежащего на этой оси.

$K_z = (K_0)_z = m_z(mV)$.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки формулируется так: производная повремени от момента количества движения материальной точки, взятого относительно неподвижного центра О, равна моменту действующей на эту точку силы, взятому относительно того же центра.

$dK_0 / dt = m_0 (F)$.

Проецируя это равенство на какую-либо ось, получим теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси:

$dK_x / dt = m_x (F).$

$dK_y / dt = m_y (F).$

$dK_z / dt = m_z (F).$

Главным моментом количества движения системы (кинетическим моментом) относительно центра О называется вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех точек системы относительно того же центра:

$K_0 = \Sigma K_{k0} = \Sigma m_0 (m_k V_k).$

Кинетический момент системы относительно неподвижной оси равен алгебраической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно той же оси:

$K_x = \Sigma K_x = \Sigma m_x (m_k V_k),$

$K_y = \Sigma K_y = \Sigma m_y (m_k V_k),$

$K_z = \Sigma K_z = \Sigma m_z (m_k V_k).$

Частный случай.

Кинетический момент твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость вращения тела:

$K_z = I_z \omega.$

Теорема об изменении кинетического момента системы формулируется так: производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра О равна главному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра, т.е. сумме векторных моментов внешних сил, действующих на систему:

$$dK_0 / dt = \Sigma\, m_0 (F_k^e)$$

Проецируя это равенство на неподвижные оси x, y, z, получим выражение теоремы об изменении кинетического момента относительно осей:

$$dK_x / dt = \Sigma\, m_x (F_k^e)$$

$$dK_y / dt = \Sigma\, m_y (F_k^e)$$

$$dK_z / dt = \Sigma\, m_z (F_k^e),$$

где в правой части уравнений стоят суммы моментов внешних сил относи-тельно соответствующих осей.

Следствия: (закон сохранения кинетического момента системы)

1. Если $\Sigma\, m_0 (F_k^e) = 0$, то $K_0 = const.$, то есть $K_x = C_1$, $K_y = C_2$, $K_z = C_3$.

2. Если: $\Sigma\, m_x (F_{kx}^e) = 0$, то $K_x = const.$, но $K_y \neq const.$, $K_z \neq const.$,

Очень важна при решении задач теорема Гюйгенса-Штейнера, которая определяет зависимость между моментом инерции относительно любой оси (I_z) и моментом инерции относительно оси, проходящей через центр масс (I_{zc}) параллельно данной оси.

$$I_z = I_{zc} + M\,I_{zc}^{\ 2} \ ,$$

где M – масса тела, d – расстояние между осями.

В некоторых случаях (для тел сложной конфигурации, для неоднородных тел) задают радиус инерции ρ твёрдого тела.

Радиусом инерции ρ твёрдого тела относительно какой-либо оси z называется такое расстояние от данной оси, на котором нужно поместить материальную точку с массой, равной массе тела, чтобы она имела тот же момент инерции относительно оси, как и рассматриваемое тело:

$$I_z = M\rho^2 \ .$$

ЛЕКЦИЯ 17. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Малые колебания. Устойчивость положения равновесия. Теорема Лагранжа – Дирихле. Свободные колебания для систем с одной степенью свободы: определения, закон собственных колебаний системы, основные свойства собственных колебания, математический маятник. Свободные колебания при наличии сопротивления пропорционального скорости: определения, свойства колебаний сопротивления.

ЛЕКЦИЯ 18. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика поступательного и вращательного движения твердого тела. Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения твердого тела.

Динамика твёрдого тела

Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела

Дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела

Так как, по определению, при поступательном движении все точки тела движутся одинаково (т.е. имеют равные скорости, ускорения и совпадающие при наложении траектории), то для изучения поступательного движения твёрдого тела достаточно знать движение какой-либо точки одной тела. Это может быть и центр масс.

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e,$$

$$M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e,$$

$$M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e.$$

Дифференциальные уравнения вращательного движения твёрдого тела

Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела имеет вид:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum m_z(\vec{F}_k^e),$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения z;

$\ddot{\varphi}$ - угловое ускорение тела;

$\sum m_z(\vec{F}_k^e)$- сумма моментов внешних сил относительно оси враще-ния

Дифференциальное уравнение вращательного движения тела при известном I_z позволяет решать следующие задачи:

1. Зная закон движения тела $\varphi = \varphi(t)$, определить момент внешней силы, действующей на тело, или силу, создающую этот момент.

2. Зная момент внешних сил, приложенных к телу, и начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0$, $\omega(0) = \omega_0$, определить закон вращательного движения тела.

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела

Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела имеют вид:

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e,$$

$$M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e,$$

$$I_{zc}\ddot{\varphi}_c = \sum m_{zc}(\vec{F}_k^e).$$

Здесь: M – масса тела;

$\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$ - проекции ускорения центра масс на оси координат;

$\ddot{\varphi}$ - угловое ускорение тела;

$\sum F_{kx}^e$, $\sum F_{ky}^e$ - сумма проекций внешних сил на соответствующие оси координат;

I_{zc} - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения тела;

$\sum m_{zc}(\vec{F}_{ky}^e)$ - сумма моментов внешних сил относительно той же оси.

Методические указания

Если среди действующих на тело сил окажется и сила трения скольжения, то в случае скольжения тела по опорной поверхности сила трения скольжения:

$$F_{тр} = fN,$$

где f – коэффициент трения скольжения,

N – нормальная реакция опорной поверхности.

Если при движении тела проскальзывание отсутствует, то сила трения скольжения:

$$F_{тр} =\leq fN.$$

В этом случае модуль силы трения неопределённый и вычисляется из условия задачи.

2.3. Практические занятия. Самостоятельная работа

Раздел 1. КИНЕМАТИКА

Практическое занятие 1

Тема 1. Кинематика точки

Цель занятия:

- иметь представление о пространстве, времени, траектории, пути, скорости и ускорении;
- знать способы задания движения точки;
- уметь составлять уравнения движения точки и уравнение траектории;
- знать обозначения, единицы измерения, взаимосвязь кинематических параметров движения, формулы для определения скоростей и ускорений, радиуса кривизны траектории.

Вопросы для подготовки:

1.Кинематические способы задания движения точки. Определение траектории точки.

2. Переход от уравнений движения в декартовых координатах к естественному способу задания движения точки.

3.Определение скорости и ускорения точки при задании ее движения в декартовой системе координат.

4. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

5. Определение радиуса кривизны траектории по известному закону движения точки.

6. Комплексное определение различных кинематических параметров движения точки, заданного координатным способом.

Литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. § 9.1 – 9.8.

2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. § 62 – 77.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 36 – 46.

4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел II. § 1 – 5.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем состоит сущность движения с позиций кинематики?

2. В чем выражается абсолютность пространства и времени?

3. Какие задачи изучаются в кинематике?

4. В чем различие между телом отсчета и системой отсчета?

5. Какие кинематические способы задания движения точки существуют, и в чем состоит каждый из этих способов?

6. Что называют траекторией движения точки?

7. Чем является траектория точки при векторном способе задания движения точки?

8.Что называется законом или уравнением движения точки по данной траектории?

9.Что называется перемещением точки за фиксированный промежуток времени?

10. Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить ее траекторию?

11. Как направлена средняя скорость точки за некоторый промежуток времени?

12. Чему равен вектор скорости точки в данный момент времени и какое направление он имеет?

13.Дайте определение среднего ускорения точки за некоторое время.

14. Как связан орт касательной к кривой с радиусом-вектором движущейся точки?

15. Чему равна проекция скорости точки на касательную к ее траектории и модуль ее скорости?

16. Как определяются проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат?

17. Что представляет собой годограф скорости?

18. Какая существует зависимость между радиусом-вектором движущейся точки и вектором скорости этой точки?

19. Какой вид имеет годограф скорости прямолинейного неравномерного движения и равномерного движения по кривой, не лежащей в одной плоскости?

20. Чему равен вектор ускорения точки и как он направлен по отношению к годографу скорости?

21. Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?

22. Приведите определения соприкасающейся, спрямляющей и нормальной плоскостей.

23. Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?

24. Что должно быть известно при естественном способе задания движения точки?

25. При каких условиях значение дуговой координаты точки в некоторый момент времени равно пути, пройденному точкой за промежуток от начального до данного момента времени?
26. Каковы модуль и направление вектора кривизны кривой в данной точке?

27. В какой плоскости расположено ускорение точки и чему равны его проекции на естественные координаты оси?
28. Что характеризует собой касательное и как оно направлено по отношению к вектору скорости?
29. Что характеризует собой нормальное ускорение точки и как оно направлено по отношению к скорости точки?
30. При каком движении точки равно нулю касательное ускорение точки и при каком – нормальное ускорение?
31. Как классифицируются движения точки по ускорениям?
32. В какие моменты времени нормальное ускорение в криволинейном движении может обратиться в нуль?
33. Чем отличается график пути от графика движения точки?
34. Как по графику движения определить алгебраическое значение скорости точки в любой момент времени?
35. Что такое равнопеременное движение точки?
36. Что такое равноускоренное (равнозамедленное) движение точки?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач:

№№10.2(1-5); 10.4(1-4); 10.7; 10.12; 10.4; 11.2; 11.3; 11.12; 12.9; 12.14; 12.16; 12.17; 12.21; 12.22; 12.23; 12.25; 12.27; 12.29.

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы К1 на тему «Определение абсолютной скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

Тема 2. Простейшие движения твёрдого тела (самостоятельно)

Цель занятия:

– иметь представление о поступательном движении, его особенностях и параметрах, о вращательном движении тела и его параметрах;

- знать формулы для определения параметров поступательного и вращательного движений тела;

-уметь определять кинематические параметры любой точки тела.

Вопросы для подготовки:

1. Теорема о движении точек тела, совершающего поступательное движение. Классификация поступательных движений.
2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси – определение, уравнение движения.

3. Угловая скорость: определение; формула для вычисления величины; ω как вектор; размерность.

4. Угловое ускорение: определение; формула для вычисления величины; ε как вектор; размерность.

5. Классификация вращательного движения в зависимости от ε.

6. Движение точки тела:

скорость точки: векторное выражение, величина и направление;

ускорение точки: величина и направление нормального (центростремительного), касательного и полного ускорения.

7. Способы передачи вращательного движения.

Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. § 10.1-10.2.

2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. § 78-84.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 48-51.

4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Разд.II.Гл.2. § 1-3

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Перечислите основные виды движений твердого тела.
2. Что определяет число степеней свободы твердого тела?
3. Какое движение твердого тела называется поступательным и какими свойствами оно обладает?
4. Что собой представляют траектории отдельных точек при поступательном движении?
5. Запишите уравнения поступательного движения.
6. Почему при поступательном движении скорости и ускорения его точек не могут быть различными?

7. Какое движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной оси и как оно осуществляется?

8. Что такое ось вращения?

9. Как записывается закон вращательного движения вокруг неподвижной оси?

10. По каким формулам определяются модули угловой скорости и углового ускорения вращающегося твердого тела?

11. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при вращении тела вокруг неподвижной оси?

12. Выведите формулы модулей скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

13. При каких условиях ускорение точки вращающегося тела составляет с отрезком, соединяющим точку с центром описываемой ею окружности, углы 0, 45, 90^o?

14. Ускорения каких точек вращающегося тела:

а) равны по модулю,

б) совпадают по направлению,

в) равны по модулю и совпадают по направлению?

15. Запишите в векторном виде выражения линейной скорости, касательного и нормального ускорений при вращательном движении?

16. Объясните, как направлен вектор скорости точки, вращающейся вокруг неподвижной оси?

17. Запишите формулу Эйлера. В чем ее физический смысл ?

18. Запишите формулу Ривальса. В чем ее физический смысл?

19. Что представляет собой передаточное отношение передачи и как оно определяется для многоступенчатой передачи?

20.Запишите уравнение равномерного поступательного движения твердого тела.

21. Какое вращение называется равномерным?

22. Какое вращение называется равнопеременным?

23. Запишите уравнения равномерного и равнопеременного вращательного движений твердого тела.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №№ 13.14, 13.15, 13.17, 13.18, 14.3, 14.4, 14.5.

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы К2 на тему « Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

Практическое занятие 2.

Сдать расчетно - графическую работу К1 и К2.

Тема 3. Сложное движение точки.

Цель занятия:

- выработать практические навыки решения задач на сложное движение точки;

- иметь представление о системах координат, об относительном, переносном и абсолютном движении.

Вопросы для подготовки:

- сложное (абсолютное) движение точки и его составляющие: переносное и относительные движения;
- абсолютная, переносная и относительная скорости точки;
- теорема о сложении скоростей;
- абсолютное, переносное и относительное ускорения точки;
- теорема о сложении ускорений;
- ускорение Кориолиса и условия, при которых оно возникает
- случаи, при которых ускорение Кориолиса равно нулю.

Литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. § 13.1-13.4
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. § 111-116.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 64-67
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел II. § 1 – 4.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какое движение точки является сложным (составным)?
2. Какие системы координат выбирают при определении скоростей твердых тел при сложном движении?
3. Что такое относительная, переносная и абсолютная траектории?
4. Какая скорость (ускорение) является относительной? Приведите примеры.

5. Какая скорость (ускорение) называется переносной? Приведите примеры.
6. Что такое абсолютная скорость и ускорение? Приведите примеры.
7. Смысл теоремы о сложении скоростей.
8. Смысл теоремы о сложении ускорений.
9. Какое ускорение называется Кориолисовым? Как определяется его величина и направление.
10. В каких случаях ускорение Кориолиса обращается в нуль?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач:

№№ 22.5; 22.14; 22.15;22.17;23.7; 23.12; 23.18; 23.27; 23.47

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы К7 на тему «Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае поступательного и вращательного переносного движения».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

Практическое занятие 3

Сдать расчетно-графическую работу К7.

Тема4. Плоскопараллельное движение.

Цель занятия:

- знать разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное;
- знать способы определения мгновенного центра скоростей;
- знать определение угловой скорости тела и линейной скорости точек через МЦС;
- знать определение ускорений через полюс.

Вопросы для подготовки:

1. Задание положения и движения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости. Уравнения движения.
2. Разложение плоскопараллельного движения на составляющие.
3. Кинематические характеристики плоского движения:

3.1. Скорость точки

3.1.1. Теорема о проекциях скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки;

3.1.2. Мгновенный центр скоростей: определение, способы нахождения; нахождение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

3.2. Ускорение точки

3.2.1. Вычисление ускорения через полюс.

Литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. § 11.1-11.5
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. § 85-96; § 100

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 52-58
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел II. Глава3. §1-11

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какое движение твердого тела называется плоским?
2. Приведите примеры звеньев механизмов, совершающих плоское движение
3. Зависят ли поступательное перемещение плоской фигуры и ее поворот от выбора полюса?
4. Из каких простых движений складывается плоское движение твердого тела?
5. Покажите, что проекции скоростей точек неизменяемого отрезка на ось, совпадающую с этим отрезком, равны между собой.
6. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей? В чем заключается физический смысл МЦС? Приведите основные случаи определения положения МЦС?
7. Как определяется величина и направление скорости произвольной точки тела при известном положении мгновенного центра скоростей и угловой скорости?
8. Что представляет собой распределение скоростей точек плоской фигуры в данный момент?
9. Как построить центр поворота плоской фигуры, зная ее начальное и конечное положения?
10. Что представляют собой неподвижная и подвижная центроиды и что происходит с центроидами при действительном движении плоской фигуры?
11. Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры?
12. Почему проекция ускорения любой точки плоской фигуры на ось, проходящую через эту точку из полюса, не может быть больше проекции ускорения полюса на эту ось?

13. Что представляет собой картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени в трех случаях:

1) $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$;

2) $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$;

3) $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$?

14. Как производят определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №№ 15.3; 16.31; 16.34; 16.35; 18.13; 18.23; 18.26; 18.37

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы К3 на тему «Определение скоростей и ускорений твердого тела при плоском движении».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

<u>Практическое занятие 4</u>

Сдать расчетно-графическую работу К3

Тема5: Система сходящихся сил. Плоская система сил.

Цель занятия:

- знать основные понятия и аксиомы статики;

- знать геометрический и аналитический способы определения равнодействующей системы сил, условия равновесия плоской и пространственной системы сходящихся сил;
- знать алгоритм и уметь решать задачи на равновесие в геометрической и аналитической форме;
- уметь определять проекции силы на две взаимно перпендикулярные оси;
- иметь представление о главном векторе, главном моменте, равнодействующей плоской системы произвольно расположенных сил;
- решение задач на равновесие твердого тела или системы тел, к которым приложена плоская система сил.

Вопросы для подготовки:

1. Две основные задачи статики.
2. Аксиомы статики.
3. Виды связей и направление их реакций.
4. Условия и уравнения равновесия плоской и пространственной системы сходящихся сил.
5. Момент силы относительно точки.
6. Основные свойства пар сил.
7. Теорема Вариньона для плоской системы сил.
8. Теорема Пуансо о приведении силы к точке, приведение произвольной плоской системы сил к точке.
9. Условия и уравнения равновесия плоской системы сил.
10. Понятие о силах внешних и внутренних.
11. Равновесие систем тел.

Литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. § §1.1-1.4; §2.1-2.3; § 3.1-3.4; § 5.1-5.4; § 3.1-3.4; § 4.1-4.2; § 5.1-5.4.

2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. §1-11; § 13-40; § 13-15; § 17-19; § 26-35.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 1-20.

4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел I. Глава 1. § 1-4; Глава 2. § 1-2; Глава 3. § 1-8; Глава 4. § 1-2; Глава 5. §1-7.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Приведите определение понятия «сила».
2. Перечислите признаки, характеризующие силу.
3. Назовите единицы измерения силы в системах СИ, МКГСС и СГС.
4. Что называется системой сил?
5. Приведите примеры сосредоточенных и распределенных сил.
6. Что называется равнодействующей системы сил?
7. Какая сила называется уравновешивающей?
8. Дайте определение внешней и внутренней силы.
9. Сформулируйте аксиому о равновесии двух сил.
10. Какие системы сил называются статически эквивалентными?
11. Назовите простейшую систему сил эквивалентную нулю.
12. В чем сущность аксиомы присоединения и исключения уравновешенной системы сил?
13. В чем физический смысл аксиомы отвердевания?
14. Сформулируйте правило параллелограмма сил.
15. Что выражает аксиома инерции?

16. Приведите формулировку аксиомы равенства действия и противодействия.
17. Что называется связью? В чем заключается сущность принципа освобождаемости от связей?
18. Что такое реакция связи?
19. К какому объекту приложены силы реакции?
20. Перечислите основные виды связей, для которых заранее известно направление силы реакции.
21. Назовите связи, для которых заранее известна точка приложения реакции, но не ее направление.
22. Приведите определение системы сходящихся сил.
23. Что называется главным вектором системы сил?
24. В чем различие между главным вектором и равнодействующей системы сил?
25. Для какой системы сил равнодействующая и главный вектор совпадают?
26. Назовите методы определения равнодействующей системы сходящихся сил.
27. Как выражаются проекции равнодействующей системы сходящихся сил через проекции сил этой системы?
28. Назовите необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил.
29. Что такое силовой многоугольник? Как определяется направление равнодействующей системы сходящихся сил при построении силового многоугольника?
30. Запишите условие равновесия системы сходящихся сил в векторной форме.
31. Какие задачи позволяют решать условия равновесия системы сходящихся сил?
32. Сформулируйте теорему о трех силах.

33. При каком условии три непараллельные силы, приложенные к твердому телу, уравновешиваются?

34. Возможно ли равновесие трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости?

35. Как формулируется алгоритм решения задач статики на равновесие системы сходящихся сил?

36. Какая конструкция называется фермой?

37. В чем заключается сущность способа вырезания узлов?

38. Как формулируются леммы о нулевых стержнях?

39. В чем заключается сущность метода Риттера?

40. На основании каких соображений без вычислений можно определить стержни пространственных ферм, в которых при заданной нагрузке усилия равны нулю?

41. Что такое проекция вектора на ось и на плоскость? Принципиальное отличие этих проекций?

42. 2. Что такое моментная точка?

43. 3.Что такое момент силы относительно полюса (точки) как вектор?

44. 4. Чему равна алгебраическая величина момента силы относительно полюса? Правило знаков.

45. 5. Когда момент силы относительно полюса равен нулю?

46. 6. Какая система сил называется парой сил?

47. Что такое момент пары?

48. Что называется плечом пары?

49. Какая плоскость называется плоскостью действия пары?

50. Почему пара сил не имеет равнодействующей?

51. Чем характеризуется действие пары сил на твердое тело?

52. Как направлен вектор момента пары сил?

53. Зависит ли действие пары сил на тело от ее места в плоскости?

54. Какие преобразования пары сил не изменяют ее действия на твердое тело?

55. Какие пары сил называются эквивалентными?

56. Что называется результирующей парой?

57. Запишите формулу для определения результирующей системы пар.

58. Сформулируйте условия равновесия плоской системы пар.

59. Изменяется ли момент силы относительно данной точки при переносе силы вдоль ее линии действия?

60. Как формулируется лемма о параллельном переносе силы?

61. Сформулируйте основную теорему статики.

62. Сформулируйте теорему Вариньона для произвольной плоской системы сил?

63. Что называется главным вектором плоской системы сил?

64. Что называется главным моментом плоской системы сил?

65. Каковы возможные случаи приведения сил, расположенных произвольно на плоскости?

66. При каком условии сила, равная главному вектору плоской системы сил, является равнодействующей этой системы?

67. Сформулируйте необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сил.

68. Запишите три формы уравнений равновесия плоской системы сил.

69. Будет ли находиться в равновесии плоская система сил, для которой алгебраические суммы моментов относительно трех точек, расположенных на одной прямой, равны нулю?

70. Как поступают при наличии распределенной нагрузки?

71. Пусть для плоской системы сил суммы моментов относительно двух точек равны нулю. При каких дополнительных условиях система будет в равновесии?

72. Сформулируйте необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы параллельных сил.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №№2.6; 2.16; 2.29; 6.3; 6.10; 3.16; 3.37; 4.15; 4.26; 4.28; 4.32;4.34; 4.29.

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы С2 на тему «Определение усилий в стержнях плоской фермы».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

Практическое занятие 5

Сдать расчетно – графическую работу С2.

Тема6. Пространственная система сил. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду.

Цель занятия:

- иметь представление о главном векторе, главном моменте, равнодействующей пространственной системы произвольно расположенных сил;
- уметь выполнять разложение силы на три взаимно перпендикулярные оси, определять момент силы относительно оси;

- решение задач на равновесие твердого тела или системы тел, к которым приложена пространственная система сил;
- решение задач на приведение пространственной системы сил к простейшему виду.

Вопросы для подготовки:

1. Определение момента силы относительно оси.
2. Главный вектор и главный момент произвольной пространственной системы сил и их аналитическое определение.
3. Основная теорема статики.
4. Зависимость главного момента от центра приведения.
5. Условия и уравнения равновесия пространственной системы сил.
6. Условия равновесия частных систем сил.
7. Статические инварианты.
8. Понятие о динамическом винте.
9. Приведение пространственной системы сил к динаме.
10. Частные случаи приведения системы пространственных сил к простейшему виду.
11. Теорема о моменте равнодействующей пространственной системы сил (теорема Вариньона).

Литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. § 4.1-4.4; § 7.1-7.4.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. §20-22; § 41-52.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 28-30.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел I. Глава 7. § 1-3.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется моментом силы относительно оси?

2. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю и почему?

3. Запишите формулу, связывающую момент силы относительно точки с моментом этой же силы относительно оси, проходящей через эту же точку.

4. Представьте момент силы относительно начала координат в виде определителя, вычислите его, интерпретируйте полученный результат. Найдите модуль и направление момента силы.

5. Сформулируйте основную теорему статики для пространственной системы сил.

6. Запишите формулы для вычисления проекций главного момента на координатные оси.

7. Каковы возможные случаи приведения произвольно расположенных сил и параллельных сил в пространстве?

8. Каковы геометрические и аналитические условия приведения пространственной системы сил к равнодействующей?

9. Сформулируйте теорему о моменте равнодействующей пространственной системы сил относительно точки и оси.

10. Сформулируйте условия равновесия системы пространственных сил.

11. Приведите векторную запись условий равновесия произвольной системы сил.

12. Запишите уравнения равновесия пространственной системы сил.

13. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил:

- равен нулю;
- перпендикулярен главному вектору;
- параллелен главному вектору.

14. По какой формуле вычисляют минимальный главный момент заданной системы сил.

15. Назовите инварианты пространственной системы сил.

16. Чему эквивалентна система сил, действующих на твердое тело, если при приведении ее к произвольному центру оказалось, что главный вектор равен нулю, а главный момент системы сил относительно этого центра не равен нулю?
17. Чему эквивалентна система сил, действующих на твердое тело, если при приведении ее к произвольному центру оказалось. Что главный момент равен нулю, а главный вектор не равен нулю?
18. Что называется динамическим винтом (динамой)?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач:

№№ 8.16, 8.17,8.19, 8.21, 8.22, 8.23, 8.26,8.27, 8.28, 8.29, 8.34, 8.36, 8.37; 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7. 7.8, 7.9, 7.10.

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы С3 на тему «Определение реакции опор составной конструкции (системы двух тел)».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

<u>Практическое занятие 6</u>

Сдать расчетно-графическую работу С3

Тема 7. Дифференциальное уравнение движения материальной точки

Цель занятия:

- отработка практических навыков составления и интегрирования дифференциальных уравнений движений материальной точки.

Вопросы для подготовки:

1. Основные понятия динамики.
2. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.
3. Основные законы динамики точки.
4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
5. Две основные задачи динамки.
6. Начальные условия и их использование для определения постоянных интегрирования.

Литература:

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. II. §1-10.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 73-80.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел III. Глава 1. § 1-7.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте законы (аксиомы) динамики.
2. Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
3. Написать дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси координат (декартовы, естественные).
4. Каковы две основные задачи динамики точки, которые решаются при помощи дифференциальных уравнений движения точки?
5. Сформулируйте первую (прямую) задачу динамики точки.

6. Как определяются произвольные постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?
7. Сформулируйте вторую (обратную) задачу динамики точки.
8. Приведите формулировку закона независимости действия сил.
9. Дайте определение инерциальной системы отсчета.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач:

№№ 26.10; 26.11; 26.15; 26.16; 27.2; 27.15; 27.31; 27.32; 27.46;

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы Д1 на тему «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

Практическое занятие 7

Сдать расчетно-графическую работу Д1

Тема 8. Принцип Даламбера и общее уравнение динамики

Цель занятия:

- отработка практических навыков решения задач на равновесие несвободной материальной системы при помощи принципа возможных перемещений, принципа Даламбера и общего уравнения динамики.

Вопросы для подготовки:

1. Классификация связей.
2. Виртуальное перемещение материальной точки.
3. Дифференциал и вариация функции.
4. Условие идеальности связей.
5. Виртуальное перемещение системы материальных точек.
6. Принцип возможных перемещений.
7. Обобщенные координаты.
8. Обобщенные силы и методы их определения.
9. Принцип возможного перемещения в обобщенных координатах.
10. Силы инерции и моменты сил инерции, частные случаи приведения сил инерции.
11. Принцип Даламбера для точки и механической системы.
12. Принципы механики, используемые при выводе общих уравнений динамики.
13. Учет работы внутренних сил при виртуальных перемещениях, изменяемых механических систем; учет реакций неидеальных связей.
14. Определение работы, совершаемой силами инерции, при различных видах движения твердого тела.

Литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. § 4.1-4.4; § 7.1-7.4.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. §20-22; § 41-52.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 28-30.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел I. Глава 7. § 1-3.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чём заключается принцип Даламбера для точки?
2. Каковы модуль и направление вектора силы инерции точки?
3. В чём заключается принцип Даламбера для системы?
4. Чему равен главный вектор сил инерции?
5. Чему равен главный момент сил инерции?
6. Силы инерции в частных случаях движения твёрдого тела: поступательного, вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс, плоскопараллельного движения твёрдого тела.
7. Какая механическая система называется динамически уравновешенной?
8. В каком случае динамические составляющие подшипника и подпятника обращаются в нуль?
9. Что называют связями?
10. Какие связи называют геометрическими?
11. Какие связи называют стационарными?
12. Какие связи называют удерживающими?
13. Что называется возможным перемещением?
14. Как взаимосвязаны возможные и действительные перемещения системы?
15. Какие связи называют идеальными?
16. Сформулируйте принцип возможных перемещений.
17. Возможно ли применение принципа возможных перемещений к системам с неидеальными связями?
18. Сформулируйте общее уравнение динамики.

19. Запишите общее уравнение динамики в аналитической форме. Каков физический смысл этого уравнения?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач:

№№ 41.3; 41.10; 41.17; 42.8; 46.10; 46.21; 46.22; 46.27; 47.1; 47.9; 47.11; 47.15.

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы Д19 на тему «Применение общего уравнения динамики к механической системе с одной степенью свободы».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. – М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

Практическое занятие 8

Сдать расчетно-графическую работу Д 19

Тема 9. Общие теоремы динамики: теорема об изменении кинетической энергии, теорема об изменении кинетического момента

Цель занятия:

- отработка практических навыков решения задач динамики механической системы, в которых используются теоремы об изменении кинетической энергии системы, об изменении момента количеств движения системы.

Вопросы для подготовки:

1. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоском движении тела.
2. Работа сил тяжести, действующих на систему.
3. Работа и мощность сил, приложенных к вращающемуся телу.
4. Работа и мощность сил, приложенных к телу в плоском движении.
5. Общие формулы для моментов инерции абсолютно твердого тела.
6. Теорема об изменении кинетической энергии.
7. Главный момент количества движения системы относительно центра и относительно оси.
8. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы.
9. Закон сохранения кинетического момента.

Литература:

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. §53-56; § 58-76.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 115-118; § 121-127.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел I. Глава 4. § 4-6.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется моментом количества движения точки?

2. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки.

3. Что называется главным моментом количества движения системы (кинетическим моментом системы)?

4. Как определяется кинетический момент системы относительно неподвижной оси?

5. Чему равен кинетический момент твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

6. Сформулируйте закон сохранения кинетического момента системы.

7. В каких случаях кинетический момент системы относительно точки и относительно оси остается постоянным?

8. Напишите формулу, по которой вычисляется момент инерции точки относительно оси.

9. Моменты инерции некоторых однородный тел (кольцо (обод), диск (цилиндр), стержень) относительно оси.

10. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.

11. Что такое радиус инерции твёрдого тела?

12. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.

13. Напишите теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме.

14. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

15. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме.

16. Для какой системы изменения в кинетической энергии не зависят от внутренних сил?

17. Что называется силовым полем?

18. Какое силовое поле называется потенциальным?

19. Какова работа сил, действующих на точки системы в потенциальном поле, на замкнутом перемещении?

20. Какими математическими зависимостями связаны потенциал поля и силовая функция?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач:

№№ 38.15; 38.24; 38.27; 38.30; 38.45; 37.4; 37.12; 37.43; 37.52.

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

IV РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы Д 10 на тему «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы».

Литература:

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие /под ред. А.А.Яблонского/. - М.: Высшая школа, 2004 (и предыдущие издания).

<u>Практическое занятие 9</u>

Сдать расчетно-графическую работу Д10

Тема10. Общие теоремы динамики: теорема о движении центра масс, теорема об изменении количества движения

Цель занятия:

- отработка практических навыков решения задач на применение общих теорем динамики материальной точки и механической системы, в которых используются теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения.

Вопросы для подготовки:

2. Механическая система. Силы внешние и внутренние.
3. Масса системы. Центр масс.
4. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс.
5. Количество движения точки и механической системы.
6. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной и интегральной форме.
7. Закон сохранения количества движения.

Литература:

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. §42; § 51.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. § 83-84; § 100-101; § 106-112.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Раздел I. Глава 4. § 1-3.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как определяются координаты центра масс системы?
2. Может ли центр масс твердого тела находится вне этого тела?
3. Запишите формулу для определения координат центра масс в трехмерном пространстве.
4. Из какого физического закона вытекает, что равнодействующая внутренних сил системы равна нулю?
5. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.
6. Сформулируйте закон сохранения движения центра масс системы.
7. В каких случаях центр масс системы движется равномерно и прямолинейно?
8. Что называется количеством движения точки?
9. Что называется элементарным импульсом силы?
10. Как определяется импульс силы за конечный промежуток времени?
11. Как формулируется теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной форме?
12. Как формулируется теорема об изменении количества движения в конечной форме?
13. Как определить количество движения системы?
14. Сформулируйте теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме.
15. Как формулируется теорема об изменении количества движения системы в конечной форме?
16. Сформулируйте закон сохранения количества движения системы.
17. В каком случае количество движения механической системы не изменяется?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач:

№№ 28.2; 28.4; 28.9; 35.4; 35.10; 35.18; 36.11; 36.9.

Литература:

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. - М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ:

1. Основные понятия статики.
2. Сходящаяся система сил.
3. Плоская система сил.
4. Пространственная система сил:

- равновесие пространственной системы сил;
- приведение пространственной системы сил к простейшему виду.

5. Динамика материальной точки.
6. Динамика механической системы.