Министерство образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

Н.А. Ермилова

ПРАКТИКУМ ПО НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛАМ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
2003

ББК 22.161 я73
Е 69

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Ермилова Н.А.

Практикум по неопределенным интегралам: Учебно-методическое пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2003.

Пособие содержит упражнения на вычисление неопределенных интегралов с решениями, методическими указаниями и рекомендациями, а также 30 вариантов (по 41 заданию в каждом) для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы в качестве заданий для контрольных и расчетно-графических работ.

Пособие предназначено для студентов I курса инженерно-технических и экономических специальностей.

Рецензенты: А.Е. Ситун, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Н.В. Ермак, доц. кафедры алгебры и геометрии БГПУ, канд. физ.-мат. наук

Понятие неопределенного интеграла

С помощью дифференцирования можно, например, зная закон движения тела, найти его мгновенную скорость в любой момент времени. Часто возникает необходимость в решении обратной задачи: зная скорость прямолинейно движущегося тела в каждый момент времени, найти закон движения тела. Эта и аналогичные ей задачи решаются с помощью операции *интегрирования*.

Интегральное исчисление, одно из основных направлений математического анализа, решает задачу нахождения функции по ее производной (или дифференциалу).

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке *X*, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ *для функции* $f(x)$ *называется неопределенным интегралом от* $f(x)$ *и обозначается символом* $\int f(x)dx$. Таким образом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения первообразной, или неопределенного интеграла по заданной функции, называется *интегрированием.* Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Для проверки правильности выполнения интегрирования нужно продифференцировать результат и получить подынтегральную функцию.

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?

Достаточное условие существования неопределенного интеграла сформулировано в следующей теореме интегрального исчисления.

Теорема. В*сякая непрерывная на промежутке X функция* $f(x)$ *имеет на этом промежутке первообразную*, *а следовательно, и неопределенный интеграл.*

Отметим ряд *свойств*, вытекающих из определения неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

3. $\int f(x)dx \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

4. Инвариантность формулы интегрирования. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Следствие. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Основные *методы интегрирования*.

а) метод замены переменной (подстановки);

б) метод разложения на слагаемые (или метод неопределенных коэффициентов);

в) метод интегрирования по частям.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$

при $\alpha = 0$ имеем $\int dx = x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x} + C \quad (0 < a,\ a \neq 1).$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \quad (x \neq \pi n).$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (|x| < a).$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

11. $\int shxdx = chx + C.$

12. $\int chxdx = shx + C.$

Приведем еще несколько наиболее часто встречающихся интегралов, получаемых из основных.

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

15. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C.$

16. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Из основных правил дифференцирования следует, что производная произвольной элементарной функции является функция элементарная. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Интегралы от некоторых элементарных функций не являются элементарными функциями. Укажем некоторые из них.

1. $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона;

2. $\left.\begin{array}{l}\int \sin(x^2)dx,\\ \int \cos(x^2)dx\end{array}\right\}$ – интегралы Френеля;

3. $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;

4. $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус;

5. $\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус.

Приведенные выше интегралы играют большую роль в прикладных науках. Поэтому существуют и достаточно хорошо разработанный аппарат приближенных формул с использованием элементарных функций, и методы приближенных расчетов, позволяющие с любой степенью точности оценить и вычислить «неберущиеся» интегралы.

Метод непосредственного интегрирования

Найти определенные интегралы, пользуясь таблицей интегралов и их свойствами.

Пример 1. $\int \frac{5x^4 - 3\sqrt{x^3}}{x^3} dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде разности двух дробей. Затем проинтегрируем каждую из получившихся дробей по формуле 1 таблицы интегралов:

$$\int \frac{5x^4 - 3\sqrt{x^3}}{x^3} = \int \left(5x - 3x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{5}{2} x^2 + \frac{6}{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 2. $\int \sqrt[4]{(7+3x)^3}\, dx$.

Решение. Воспользуемся свойством (4) неопределенных интегралов

$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$:

$$\int \sqrt[4]{(7+3x)^3}\, dx = \int (7+3x)^{\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(7+3x)^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{21} (7+3x)^{\frac{7}{4}} + C.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{11+9x}$.

Решение. Согласно формулам (2) таблицы интегралов и свойству (4) имеем: $\int \frac{dx}{11+9x} = \frac{1}{9} \ln|11+9x| + C$.

Пример 4. $\int \sin(0.8 - 0.5x) dx$.

Решение. Зная, что $\int \sin x dx = -\cos x + C$, получим:

$$\int \sin(0{,}8 - 0{,}5x) dx = -\frac{1}{0{,}5} \cos(0{,}8 - 0{,}5x) + C = -2\cos(0{,}8 - 0{,}5x) + C.$$

Пример 5. $\int e^{\frac{3}{2}x+5} dx$.

Решение. Зная, что $\int e^x dx = e^x + C$, получим: $\int e^{\frac{3}{2}x+5} dx = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}x+5} + C$.

Пример 6. $\int \frac{dx}{5x^2+2}$.

Решение. Приведем интеграл к виду (15), для чего сначала вынесем множитель 5 из знаменателя дроби:

$$\int \frac{dx}{5x^2+2} = \int \frac{dx}{5\left(x^2+\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5}}} arctg \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{5}}} + C =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}} arctg \sqrt{\frac{5}{2}}x + C = \frac{1}{\sqrt{10}} arctg \sqrt{\frac{5}{2}}x + C.$$

Пример 7. Приведем интеграл к табличному виду :

$$\int \frac{dx}{11x^2-4} = \int \frac{dx}{11\left(x^2-\frac{4}{11}\right)} = \frac{1}{11}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2\frac{2}{\sqrt{11}}}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{\sqrt{11}}}{x+\frac{2}{\sqrt{11}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{11}}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{\sqrt{11}}}{x+\frac{2}{\sqrt{11}}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{11}}\ln\left|\frac{x\sqrt{11}-2}{x\sqrt{11}+2}\right| + C.$$

Метод замены переменной (подстановки)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановки $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция от новой переменной *t*. Формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt.$$

Пример 8. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{8+3x^2}}$.

Решение. Применим метод постановки:

$$\int \frac{3xdx}{\sqrt{8+3x^2}} = \left| \begin{array}{l} 8+3x^2 = u, \\ du = 6xdx, \\ 3xdx = \frac{1}{2}du \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \sqrt{u} + C =$$

$$= \sqrt{8+3x^2} + C.$$

Пример 9. $\int \frac{dx}{(2-x)\ln^5(x-2)}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{(2-x)\ln^5(x-2)} = \left| \begin{array}{l} \ln(x-2) = u, \\ du = \frac{dx}{x-2} \end{array} \right| = -\int \frac{du}{u^5} = -\int u^{-5}du = \frac{u^{-4}}{4} + C =$$

$$\frac{1}{4u^4} + C = \frac{1}{4\ln^4(x-2)} + C.$$

Пример 10. $\int \frac{\sin 5xdx}{\sqrt{\cos^6 5x}}$.

Решение.

$$\int \frac{\sin 5xdx}{\sqrt{\cos^6 5x}} = \left| \begin{array}{l} \cos 5x = u, \\ du = -5\sin 5xdx, \\ \sin 5xdx = -\frac{1}{5}du \end{array} \right| -\frac{1}{5}\int u^{-\frac{6}{7}}du = -\frac{1}{5}\cdot \frac{u^{-\frac{6}{7}+1}}{-\frac{6}{7}+1} + C =$$

$$= -\frac{7}{5}u^{\frac{1}{7}} + C = -\frac{7}{5}\sqrt[7]{\cos 5x} + C.$$

Пример 11. $\int \frac{2x^4dx}{e^{x^5-3}}$.

Решение.

$$\int \frac{2x^4dx}{e^{x^5-3}} = 2\int e^{3-x^5}x^4dx = \left| \begin{array}{l} 3-x^5 = u, \\ du = -5x^4dx, \\ x^4dx = -\frac{1}{5}du \end{array} \right| = -\frac{2}{5}\int e^u du = -\frac{2}{5}e^u + C = -\frac{2}{5}e^{3-x^5} + C.$$

Иногда процесс замены переменной можно иначе назвать подведением функции под знак дифференциала и оформить решение так:

$$\int \frac{2x^4 dx}{e^{x^5-3}} = 2\int e^{3-x^5} x^4 dx = -\frac{2}{5}\int e^{3-x^5} d(3-x^5) = -\frac{2}{5} e^{3-x^5} + C.$$

Пример 12. $\int x\sqrt[5]{(x^2-7)^3}\,dx$.

Решение. См. решение примера 11. Аналогично имеем:

$$\int x\sqrt[5]{(x^2-7)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-7)^{\frac{3}{5}} d(x^2-7) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-7)^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C =$$

$$\frac{5}{16}(x^2-7)^{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{16}\sqrt[5]{(x^2-7)^8} + C.$$

Пример 13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\arccos^4 8x}\sqrt{1-64x^2}}$.

Решение. Зная, что $d(\arccos 8x) = \frac{8dx}{\sqrt{1-64x^2}}$, имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\arccos^4 8x}\sqrt{1-64x^2}} = -\frac{1}{8}\int (\arccos 8x)^{-\frac{4}{3}} d(\arccos 8x) = + C =$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{(\arccos 8x)^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = \frac{3}{8}(\arccos 8x)^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{8\sqrt[3]{\arccos 8x}} + C.$$

Пример 14. $\int \frac{dx}{ctg^3 x \sin^2 x}$.

Решение. Замечая, что $d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, имеем:

$$\int \frac{dx}{ctg^3 x \sin^2 x} = -\int (ctgx)^{-3} d(ctgx) = -\frac{(ctgx)^{-3+1}}{-3+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2}(ctgx)^{-2} + C = \frac{1}{2ctg^2 x} + C.$$

Пример 15. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+7}}dx$.

Решение. Разобьем данный интеграл на сумму двух:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+7}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+7)}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+7} + C = 3\sqrt{x^2+7} + C,$$

$$\int \frac{5dx}{\sqrt{x^2+7}} = 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} = 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right| + C, \text{ тогда}$$

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+7}}dx = 3\sqrt{x^2+7} + 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right| + C.$$

Метод интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Для успешного применения этого метода целесообразно пользоваться следующими общими указаниями:

а) подынтегральное выражение разбить на два множителя: u и dv (множитель dv обязательно содержит dx);

б) множитель dv выбрать так, чтобы по нему можно была найти первообразную v;

в) интеграл $\int vdu$ должен получиться проще, чем данный интеграл.

Методом интегрирования по частям находят интегралы вида $\int P(x)\sin xdx$, $\int P(x)\cos xdx$, $\int P(x)e^{\alpha x}$, $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)arctgxdx$ и другие, где $P(x)$ – многочлен.

Пример 16. $\int (1-3x)\cos 2xdx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Пусть

$$u = 1-3x,\ dv = \cos 2xdx,$$

$$du = -3dx,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Тогда

$$\int(1-3x)\cos 2xdx=\frac{1}{2}(1-3x)\sin 2x-\int\left(-\frac{3}{2}\right)\sin 2xdx=$$
$$=\frac{1}{2}(1-3x)\sin 2x+\frac{3}{2}\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}(1-3x)\sin 2x-\frac{3}{4}\cos 2x+C.$$

Пример 17. $\int(x^2-1)\ln xdx$.

Решение. Применяя формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int(x^2-1)\ln xdx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & dv=(x^2-1)dx, \\ du=\dfrac{1}{x}, & v=\int(x^2-1)dx=\int x^2dx-\int dx=\dfrac{1}{3}x^3-x \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)dx=$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx+\int dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\ln x-\frac{1}{9}x^3+x+C.$$

Пример 18. $\int(x^2-6)e^{-x}dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

Положим: $\begin{vmatrix} u=(x^2-6), & dv=e^{-x}dx \\ du=2x, & v=-e^{-x} \end{vmatrix}$.

Тогда $\int(x^2-6)e^{-x}dx=-(x^2-6)e^{-x}+\int e^{-x}(2x-6)dx$.

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям.

Обозначим: $\begin{vmatrix} u=2x-6, & dv=e^{-x}dx, \\ du=2dx, & v=-e^{-x} \end{vmatrix}$.

Тогда

$$\int e^{-x}(2x-6)dx=-(2x-6)e^{-x}+2\int e^{-x}dx=-(2x-6)e^{-x}+2(-e^{-x})+C=$$
$$=-(2x-6)e^{-x}-2e^{-x}+C.$$

Следовательно:

$$\int(x^2-6x)e^{-x}dx=-(x^2-6x)e^{-x}-(2x-6)e^{-x}-2e^{-x}+C=$$
$$=-(x^2-6x+2x-6+2)e^{-x}+C=(4+4x-x^2)e^{-x}+C.$$

Пример 19. $\int \frac{xdx}{\sin^2 4x}$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

Положим: $\left| \begin{matrix} u = x, & dv = \frac{1}{\sin^2 4x} dx, \\ du = dx, & v = \int \frac{1}{\sin^2 4x} dx = -\frac{1}{4} ctg 4x \end{matrix} \right|$.

Тогда

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 4x} = -\frac{1}{4} xctg 4x + \frac{1}{4} \int ctg 4x dx = -\frac{1}{4} xctg 4x + \frac{1}{4} \int \frac{\cos 4x}{\sin 4x} dx =$$
$$-\frac{1}{4} xctg 4x + \frac{1}{16} \int \frac{d(\sin 4x)}{\sin 4x} = -\frac{1}{4} xctg 4x + \frac{1}{16} \ln|\sin 4x| + C.$$

Пример 20. $\int e^x \cos 5x dx$.

Решение. Интеграл называют приводящимся к самому себе. Применяют метод интегрирования по частям.

Положим:

$$\left| \begin{matrix} u = e^x, & dv = \cos 5x dx, \\ du = e^x, & v = \frac{1}{5} \sin 5x \end{matrix} \right|$$

Тогда $\int e^x \cos 5x dx = \frac{1}{5} e^x \sin 5x - \frac{1}{5} \int e^x \sin 5x dx$.

К последнему интегралу вновь применим метод интегрирования по частям:

$$\left| \begin{matrix} u = e^x, & dv = \sin 5x dx, \\ du = e^x, & v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{matrix} \right|,$$

Тогда $\int e^x \sin 5x dx = -\frac{1}{5} e^x \cos 5x + \frac{1}{5} \int e^x \cos 5x dx$.

Следовательно: $\int e^x \cos 5x dx = \frac{1}{5} e^x \sin 5x + \frac{1}{25} e^x \cos 5x - \frac{1}{25} \int e^x \cos 5x dx$,

откуда $\frac{26}{25} \int e^x \cos 5x dx = \frac{5}{26} e^x (\sin 5x + \frac{1}{5} \cos 5x) + C$.

Разделив обе части последнего равенства на $\frac{26}{25}$, получим искомый интеграл:

$$\int e^x \cos 5x dx = \frac{125}{676} e^x (\sin 5x + \frac{1}{5}\cos 5x) + C .$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ находятся путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. В результате получаются табличные интегралы вида $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$, $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$ или, соответственно $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$.

Пример 21. $\int \frac{dx}{4x^2 - 16x + 9}$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$4x^2 - 16x + 9 = 4\left(x^2 - 4x + \frac{9}{4}\right) = 4\left[(x^2 - 2x \cdot 2 + 4) - 4 + \frac{9}{4}\right] = 4\left[(x-2)^2 - \frac{7}{4}\right].$$

Таким образом, искомый интеграл сводится к табличному:

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 16x + 9} = \int \frac{dx}{4\left[(x-2)^2 - \frac{7}{4}\right]} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{7}}{2}} \ln\left|\frac{(x-2) - \frac{\sqrt{7}}{2}}{(x-2) + \frac{\sqrt{7}}{2}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln\left|\frac{2x - 4 - \sqrt{7}}{2x - 4 + \sqrt{7}}\right| + C.$$

Пример 22. $\int \frac{dx}{\sqrt{50x-25x^2-9}}$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$50x-25x^2-9=-25\left(x^2-2x+\frac{9}{25}\right)=-25\left[(x^2-2\cdot x\cdot 1+1)-1+\frac{9}{25}\right]=$$

$$=-25\left[(x-1)^2-\frac{16}{25}\right].$$

Следовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{50x-25x^2-9}}=\int \frac{dx}{\sqrt{25\left[\frac{16}{25}-(x-1)^2\right]}}=\frac{1}{5}\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{\frac{16}{25}-(x-1)^2}}=$$

$$=\frac{1}{5}\arcsin\frac{5(x-1)}{4}+C.$$

Для нахождения интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ или $\int \frac{Ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ следует выделить в числителе дроби производную знаменателя и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: первый из них сводится к виду $\int \frac{du}{u}=\ln|u|$ или соответственно $\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}$, а второй – это интеграл, рассмотренный выше.

Пример 23. $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx$.

Решение. Выделяя в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, получим: $6x-1=3(2x-4)+11$.

Следовательно:

$$\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx=\int \frac{3(2x-4)+11}{x^2-4x+13}dx=3\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+11\int \frac{dx}{x^2-4x+13}=$$

$$=3\int \frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13}+11\int \frac{dx}{(x-2)^2+9}=3\ln\left|x^2-4x+13\right|+\frac{11}{3}arctg\frac{x-2}{3}+C.$$

Пример 24. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{2x^2-12x+15}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе под знаком корня:

$$6x-5=\frac{3}{2}(4x-12)+13.$$

Подставив полученное выражение в числитель подынтегральной функции, получим:

$$\int \frac{6x-5}{\sqrt{2x^2-12x+15}}dx=\int \frac{\frac{3}{2}(4x-12)+13}{\sqrt{2x^2-12x+15}}=\frac{3}{2}\int \frac{(4x-12)}{\sqrt{2x^2-12x+15}}dx+$$

$$+13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-12x+15}}=\frac{3}{2}\int (2x^2-12x+15)^{-\frac{1}{2}}d(2x^2-12x+15)+$$

$$13\int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2-6x+\frac{15}{2})}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(2x^2-12x+15)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-\frac{3}{2}}}=$$

$$=3\cdot\sqrt{2x^2-12x+15}+\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2-\frac{3}{2}}\right|+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, следует выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) если рациональная дробь неправильная (степень многочлена числителя больше степени знаменателя), то следует выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$,

где $M(x)$ – многочлен (неполное частное от деления), а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь ($P_1(x)$ – остаток);

2) разложить знаменатель на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \ldots (x^2 + px + q)^n \ldots.$$

3) правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей по схеме:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} +$$
$$+ \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{x^2 + px + q} + \ldots$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m \ldots, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n, \ldots$$

Для этого следует привести правую часть последнего равенства к общему знаменателю, затем приравнять числители. Далее согласно условию равенства двух многочленов приравнять коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях полученного тождества. И, наконец, решив полученную систему линейных уравнений, найдем искомые коэффициенты.

Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов. В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример 25. $\int \frac{16x^3 - 4x^2 + 1}{4x-3} dx$.

Решение. Выделим целую часть дроби, для чего разделим в столбик числитель на знаменатель.

Так как $\frac{16x^3 - 4x^2 + 1}{4x-3} = 4x^2 + 4x + 3 + \frac{10}{4x-3}$, то

$$\int \frac{16x^3 - 4x^2 + 1}{4x-3} dx = \int (4x^2 + 4x + 3 + \frac{10}{4x-3}) dx = 4\int x^2 dx + 4\int x dx + 3\int dx +$$
$$+ \frac{10}{4} \int \frac{d(4x-3)}{4x-3} = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{5}{2}\ln|4x-3| + C.$$

Пример 26. $\int \frac{4x^5+3x^3}{2x^2+5}dx$.

Решение. Так как степень числителя больше степени знаменателя, то дробь, стоящая под знаком интеграла, – неправильная. Нужно выделить целую часть числа, для чего следует разделить числитель на знаменатель.

Получим: $\frac{4x^5+3x^3}{2x^2+5} = 2x^3 - 3{,}5x + \frac{17{,}5x}{2x^2+5}$.

Следовательно:

$$\int \frac{4x^5+3x^3}{2x^2+5}dx = \int (2x^3 - 3{,}5x + \frac{17.5x}{2x^2+5})dx = 2\int x^3 dx - 3{,}5\int xdx + 17{,}5 -$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2+5)}{(2x^2+5)} = \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{35}{8}\ln\left|2x^2+5\right| + C.$$

Пример 27. $\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+6x+5)}dx$.

Решение. Разложим знаменатель на множители, используя формулу:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – действительные корни квадратного трехчлена. Согласно этой формуле имеем:

$$(x-1)(x^2+6x+5) = (x-1)(x+1)(x+5).$$

Тогда

$$\frac{x+3}{(x-1)\left(x^2+6x+5\right)} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+5}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x+3 = A(x+1)(x+5) + B(x-1)(x+5) + C(x-1)(x+1).$$

Действительными корнями знаменателя являются числа -1;-5;1.

При $x=-1$ имеем: -8B = 2, т.е. $B = -\frac{1}{4}$;

при $x=-5$ имеем: $24C = -2$, т.е. $C = -\frac{1}{12}$;

при $x=1$ имеем: $12A = 4$, т.е. $A = \frac{1}{3}$.

Следовательно:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+6x+5)}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{12(x+5)}.$$

Таким образом, задача нахождения данного интеграла упрощается:

$$\int\frac{x+3}{(x-1)(x^2+6x+5)}dx=\int\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{12(x+5)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+5}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{12}\ln|x+5|+C.$$

Пример 28. $\int\frac{x^5+8x^3+7}{x^3-2x^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь. Выделим из нее целую часть, для чего разделим в столбик числитель на знаменатель.

Так как $\frac{x^5+8x^3+7}{x^3-2x^2}=x^2+2x+12+\frac{24x^2+7}{x^3-2x^2}$, то

$$\int\frac{x^5+8x^3+7}{x^3-2x^2}dx=\int\left(x^2+2x+12+\frac{24x^2+7}{x^3-2x^2}\right)dx=$$

$$=\int x^2dx+\int 2xdx+\int 12dx+\int\frac{24x^2+7}{x^3-2x^2}dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+12x+\int\frac{24x^2+7}{x^3-2x^2}dx.$$

Подынтегральную функцию можно представить в виде суммы трех дробей:

$$\frac{24x^2+7}{x^3-2x^2}=\frac{24x^2+7}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}.$$

Найдем коэффициенты A, B, C, для чего освободимся от знаменателя:

$$24x^2+7=A(x-2)+Bx(x-2)+Cx^2.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 0 и 2.

При $x=0$ имеем: 7 = -2A, т.е. $A=-\frac{7}{2}$;

при $x=2$ имеем: 103 = 4C , т.е. $C=\frac{103}{4}$;

при $x=1$ имеем: $31=-A-B+C$, т.е. $B=-\frac{7}{4}$.

Итак, разложение данной рациональной дроби на простейшие приняло вид:

$$\frac{24x^2+7}{x^3-2x^2}=-\frac{7}{2x^2}-\frac{7}{4x}+\frac{103}{4(x-2)}.$$

Таким образом:

$$\int\frac{24x^2+7}{x^3-2x^2}dx=\int\left(-\frac{7}{2x^2}-\frac{7}{4x}+\frac{103}{4(x-2)}\right)dx=-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{103}{4}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{7}{4}\ln|x|+\frac{103}{4}\ln|x-2|+C.$$

Следовательно:

$$\int\frac{x^5+8x^3+7}{x^3-2x^2}dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+12x+\frac{7}{2x}-\frac{7}{4}\ln|x|+\frac{103}{4}\ln|x-2|+C.$$

Пример 29. $\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя и приравниваем многочлены, стоящие в числителях правой и левой частей, откуда

$$x=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1),\ \text{или}$$

$$x=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}A+B=0,\\A-B+C=1,\\A-C=0,\end{cases}$$

откуда $A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=\frac{1}{3}$.

Следовательно:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3(x-1)}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Тогда искомый интеграл равен:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} -$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx == \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{(2x+1) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| -$$

$$-\frac{1}{6} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+0{,}5)^2 - 0{,}75} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln\left|x^2+x+1\right| +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2(x+0{,}5)}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 30. $\int \frac{x^3 - 7x^2 - 3}{x^4 + 4x^2} dx$.

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^4 + 4x^2 = x^2(x^2+4).$$

Подынтегральную функцию представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3 - 7x^2 - 3}{x^4 + 4x^2} = \frac{x^3 - 7x^2 - 3}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x^3 - 7x^2 - 3 = A(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x^2.$$

Действительным корнем знаменателя является число 0.

При $x = 0$ имеем $4A = -3$, т.е. $A = -\frac{3}{4}$.

Перепишем предыдущее равенство в виде:

$$x^3 - 7x^2 - 3 = -\frac{3}{4}(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x^2,$$

$$\text{или} \quad x^3 - 7x^2 - 3 = x^3(B+C) + (D - \frac{3}{4})x^2 + 4Bx - 3.$$

Сравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x, x^0, получаем систему уравнений: $B + C = 1$, $D - \frac{3}{4} = -7$, $4B = 0$, из которой найдем:

$$B = 0, \quad C = 1, \quad D = -\frac{25}{4}.$$

Итак: $\dfrac{x^3-7x^2-3}{x^4-4x^2}=-\dfrac{3}{4x^2}+\dfrac{x-\frac{25}{4}}{x^2+4}=-\dfrac{3}{4x^2}+\dfrac{x}{x^2+4}-\dfrac{25}{4}\cdot\dfrac{1}{x^2+4}$.

Следовательно:

$$\int\frac{x^3-7x^2-3}{x^4+4x^2}dx=\int\left(-\frac{3}{4x^2}+\frac{x}{x^2+4}+\frac{25}{4}\cdot\frac{1}{x^2+4}\right)dx=$$
$$-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\frac{25}{4}\int\frac{dx}{x^2+4}=-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-$$
$$-\frac{25}{8}arctg\frac{x}{2}+C=\frac{3}{4x}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{25}{8}arctg\frac{x}{2}+C.$$

Пример 31. $\displaystyle\int\frac{5-x}{(x+9)^{10}}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной

$x+9=t$, тогда $x=t-9$ и $dx=dt$.

В результате получаем:

$$\int\frac{5-x}{(x+9)^{10}}dx=\int\frac{5-t+9}{t^{10}}dt=\int\frac{14-t}{t^{10}}dt=14\int\frac{dt}{t^{10}}-\int\frac{dt}{t^9}=-\frac{14}{9t^9}+\frac{1}{8t^8}C=$$
$$=\frac{-14}{9(x+9)^9}+\frac{1}{8(x+9)^8}+C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Рассмотрим интегрирование некоторых иррациональностей на примерах.

Пример 32. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-25}}$.

Решение. Используем подстановку $\sqrt{2x-25}=t$, тогда

$$2x-25=t^2,\quad x=\frac{t^2+25}{2},\quad dx=tdt$$

Следовательно:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-25}} = \int \frac{tdt}{\frac{t^2+25}{2}t} = 2\int \frac{dt}{t^2+25} = \frac{2}{5} arctg \frac{t}{5} + C = \frac{2}{5} arctg \frac{\sqrt{2x+25}}{5} + C.$$

Пример 33. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt[6]{x^5}} dx$.

Решение. Используем подстановку $\sqrt[6]{x} = t$, тогда $x = t^6$ и $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2, \sqrt{x} = t^3$. Итак:

$$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt[6]{x^5}} dx = \int \frac{(t^2+2)(t^3+2)}{t^5} 6t^5 dt = 6\int (t^2+2)(t^3+2)dt =$$

$$= 6\int (t^5+2t^3+2t^2+4)dt = 6\int t^5 dt + 6\cdot 2\int t^3 dt + 6\cdot 2\int t^2 dt + 24\int dt =$$

$$= 6\cdot\frac{t^6}{6} + 12\cdot\frac{t^4}{4} + 12\cdot\frac{t^3}{3} + 24t + C = x + 3\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x} + 24\sqrt[6]{x} + C.$$

Пример 34. $\int \frac{2x-5}{\sqrt[3]{x+4}} dx.$

Решение.

$$\int \frac{2x-5}{\sqrt[3]{x+4}} dx = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x+4} = t, \\ x+4 = t^3, \\ dx = 3t^2 dt \end{vmatrix} = \int \frac{2t^3-13}{t}\cdot 3t^2 dt = \int (6t^4 - 39t)dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - \frac{39}{2}t^2 + C = \frac{6}{5}(x+4)\sqrt[3]{(x+4)^2} - \frac{39}{2}\sqrt[3]{(x+4)^2} + C.$$

Пример 35. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 4\ln x - 5}}$.

Решение. Положим $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$ и данный интеграл с новой переменной легко сводится к табличному:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 4\ln x - 5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t-5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2 - 9}} =$$

$$= \ln\left|t + 2 + \sqrt{t^2+4t-5}\right| + C = \ln\left|\ln x + 2 + \sqrt{\ln^2 x + 4\ln x - 5}\right| + C.$$

Тригонометрические подстановки

Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то подстановкой $x=a\sin t$ он приводится к виду $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$.

В интеграле, содержащем радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, обычно полагают $x=\dfrac{a}{\cos t}$, тогда получаем:

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=\sqrt{\frac{a^2-a^2\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{a^2\left(1-\cos^2 t\right)}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t}}=a\,tgt.$$

Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то обычно полагают $x=atgt$, отсюда $\sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos t}$.

Пример 36. $\displaystyle\int\frac{dx}{(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}$.

Решение. Положим $x=5\sin t$, тогда $dx=5\cos tdt$ и заданный интеграл принимает вид:

$$\int\frac{dx}{(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}=\int\frac{5\cos tdt}{(25-25\sin^2 t)\sqrt{25-25\sin^2 t}}=\int\frac{5\cos tdt}{25\cos^2 t\cdot 5\cos t}=$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{25}tgt+C=\frac{1}{25}tg(\arcsin\frac{x}{5})+C=\frac{x}{25\sqrt{25-x^2}}+C.$$

Напомним, как вычислить $tg\left(\arcsin\dfrac{x}{5}\right)$. Пусть $\arcsin\dfrac{x}{5}=\alpha$ – это значит, что $\sin\alpha=\dfrac{x}{5}$ и $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$. Нужно найти $tg\alpha$. При этом $tg\alpha$ имеет такой же знак, как и $\sin\alpha$, и зависит от знака x.

Имеем: $\displaystyle tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\frac{x}{5}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}=\frac{x}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.

Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx,$ где $R-$ рациональная функция.

1. С помощью подстановки

$$tg\frac{x}{2}=t,$$

которую еще называют универсальной тригонометрической подстановкой, подынтегральная функция сводится к рациональной функции от переменной t.

Используя формулы тригонометрии $\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\;\; \cos=\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},$

получим $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}.$

Из равенства $tg\dfrac{x}{2}=t$ имеем: $\dfrac{x}{2}=arctgt,\;\; x=2arctgt.$

Продифференцируем последнее равенство:

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Итак, в результате универсальной тригонометрической подстановки получим:

$$tg\frac{x}{2}=t,\; \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\; dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 37. $\int\dfrac{dx}{7+3\cos x-4\sin x}.$

Решение.

$$\int\frac{dx}{7+3\cos x-4\sin x}=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(7+\frac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2}-\frac{8t}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{7+7t^2+3-3t^2-8t}=$$

$$=\int\frac{dt}{2t^2-4t+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-2t+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1)^2+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{\sqrt{2}\left(t-1\right)}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}\left(tg\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{3}}+C.$$

2. Если для подынтегральной функции интеграла $\int R(\sin x,\cos x)dx$ имеет место тождество $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$, то можно применить подстановку $tgx=t$, тогда

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ x=arctgt,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 38. $\int\frac{2tgx+1}{\cos^2 x+\sin^2 x}dx$.

Решение. Подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса. Положим $tgx=t$, тогда $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

После подстановки получим:

$$\int\frac{2t+1}{\frac{1}{1+t^2}+\frac{2t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{\left(2t+1\right)dt}{1+2t^2}=2\int\frac{tdt}{1+2t^2}+\int\frac{dt}{1+2t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+2t^2\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}arctg(\sqrt{2}\cdot tgt)+C=\frac{1}{2}\ln\left(1+2tg^2x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+C.$$

Правила для нахождения интегралов вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$,

где m и n – целые числа:

1) если одно из чисел m или n нечетное либо нечетные оба, то нечетную степень представляем в виде произведения четной степени на первую и производную последнего множителя вносим под знак дифференциала (или вводим новую переменную);

2) если m и n – четные, то применяем формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 39. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^8 x} dx = -\int \frac{\sin^2 x \cdot}{\cos^8 x} d(\cos x) = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^8 x} d(\cos x) =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^8 x} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos^6 x} = \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C.$$

Пример 40. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Решение. Сначала разложим подынтегральную функцию по формуле суммы кубов, а затем применим формулу понижения степени (дважды) и тригонометрическую подстановку:

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \int \frac{dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x} = \int \frac{dx}{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 - \frac{1-\cos^2 2x}{4} + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{4dx}{1+3\cos^2 2x} = 4\int \frac{dx}{1+\frac{3}{2}(1+\cos 4x)} = 8\int \frac{dx}{5+3\cos 4x} = \begin{vmatrix} 4x = u, \\ dx = \frac{1}{4}du \end{vmatrix} =$$

$$= 2\int \frac{du}{5+3\cos u} = \begin{vmatrix} t = tg\,\frac{u}{2}, \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ du = \frac{2dt}{1+t^2} \end{vmatrix} = 2\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5+\frac{3-3t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 4\int \frac{dt}{8 + 2t^2} = 2\int \frac{dt}{4 + t^2} = arctg\,\frac{t}{2} + C = arctg\,\frac{tg2x}{2} + C.$$

Интегралы вида $\int tg^m x dx,\ \int ctg^m x dx$, где m – целое положительное число, вычисляются при помощи формул

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \text{ и } ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

которые преобразуют интеграл к виду, удобному для непосредственного интегрирования.

Можно также применить подстановку $tgx = t$ или $ctgx = t$. Рассмотрим два варианта решения для нахождения нижеследующего интеграла.

Пример 41. $\int (1 + tgx)^3 dx$.

Решение 1.

$$\int (1 + tgx)^3 dx = \int (1 + 3tgx + 3tg^2 x + tg^3 x)dx = x - 3\ln|\cos x| + 3\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx +$$

$$+ \int tgx \cdot tg^2 x dx = x - 3\ln|\cos x| + 3tgx - 3x + \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= -2x - 3\ln|\cos x| + 3tgx + \frac{1}{2tg^2 x} - \ln|\cos x| + C =$$

$$= -2x - 2\ln|\cos x| + 3tgx + \frac{1}{2}tg^2 x + C.$$

Решение 2. $\int (1 + tgx)^3 dx = \left| \begin{array}{l} tgx = t, \\ x = arctgt, \\ dx = \dfrac{dt}{1 + t^2} \end{array} \right| = \int \dfrac{(1 + t)^3}{1 + t^2} dt.$

Разделив числитель на знаменатель в последнем интеграле, получим:

$$\int (1 + tgx)^3 dx = \int \left(t + 3 + \frac{2t - 2}{1 + t^2}\right)dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{2tdt}{1 + t^2} - 2\int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + \ln|1 + t^2| - 2arctgt = \frac{1}{2}tg^2 x + 3tgx - 2x - 2\ln|\cos x| + C.$$

Для вычисления интегралов вида

$$\int \sin mx \cdot \sin nxdx, \int \cos mx \cdot \cos nxdx, \int \sin mx \cdot \cos nxdx$$

применяются формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

Пример 42. $\int \sin 10x \cdot \sin 15xdx$.

Решение. Применим первую из приведенных выше формул:

$$\frac{1}{2}\int \left(\cos(10x-15x) - \cos(10x+15x)\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos 5xdx - \frac{1}{2}\cos 25xdx =$$

$$= \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{50}\sin 25x + C.$$

Пример 43. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} = \begin{vmatrix} \cos^2 x = t, \\ dt = -2\cos x \sin xdx = \\ = -\sin 2xdx \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right| + C.$$

Пример 44. $\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} = \left| \begin{matrix} \ln x = u, \; \dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} = dv, \\ du = \dfrac{dx}{x}, \; v = \int \dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} = -\dfrac{1}{2(1+x^2)} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

Вычислим последний интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \Rightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=0. \end{cases}$$

Итак: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

Следовательно, искомый интеграл равен:

$$-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C \quad (x>0).$$

Пример 45. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

Решение. Применим методы подстановки и интегрирования по частям.

$$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t, \; \sqrt{1-x^2} = \cos x, \\ dx = \cos t dt, t = \arcsin x \end{matrix} \right| =$$

$$\int t\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (t + t\cos 2t)dt = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}\int t\cos 2t dt = \left| \begin{matrix} t = u, \quad \cos 2t dt = dv, \\ du = dt, v = \dfrac{1}{2}\sin 2t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + C = \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{4}\arcsin x \cdot \sin(2\arcsin x) +$$

$$+ \frac{1}{8}\cos(2\arcsin x) + C.$$

Осталось вычислить $\sin(2\arcsin x)$ и $\cos(2\arcsin x)$.

Пусть $\arcsin x = \alpha$, тогда $\sin\alpha = x$, найдем $\sin 2\alpha =$ $\sin(2\arcsin x)$ и

$$\cos 2\alpha = \cos(2\arcsin x).$$

Раскрыв синус двойного угла, получим:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2x^2.$$

Таким образом, искомый интеграл равен:

$$I = \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{8}(1-2x^2) + C.$$

Если число $\frac{1}{8}$ отнести к постоянной C, то окончательно получим:

$$I = \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Пример 46. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \arccos x = t, \\ dt = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ x = \cos t \end{array} \right| = -\int t\cos^3 t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = u,\ \cos^3 t dt = dv, \\ dt = du, v = \int \cos^3 t dt = \sin t - \dfrac{1}{3}\sin^3 t \end{array} \right| = -t\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right) +$$

$$+ \int\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)dt = -t\sin t + \frac{1}{3}t\sin^3 t - \cos t + \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{9}\cos^3 t + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x + \frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3\arccos x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^3 + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2+x^2}{3}\arccos x - \frac{6x+x^3}{9} + C.$$

Нелли Александровна Ермилова,
ст. преподаватель кафедры ОМиИ АмГУ

ПРАКТИКУМ ПО НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛАМ.
Учебно-методическое пособие

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 28.11.03. Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 4,18, уч.-изд. л. 4,3. Тираж 100. Заказ 224.

Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

Задание 1

1.	$\int \frac{3+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$	16.	$\int \frac{2x^3+5\sqrt{x^3}}{x}xd$
2.	$\int \frac{2\sqrt{x}+4}{2x^2}dx$	17.	$\int \frac{3x^2-2\sqrt[3]{x^2}}{x}dx$
3.	$\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x}{\sqrt{x}}dx$	18.	$\int \frac{2x^3-3\sqrt[3]{x^2}}{x^2}dx$
4.	$\int \frac{2\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}dx$	19.	$\int \frac{2\sqrt[3]{x}-x^7}{\sqrt{x}}dx$
5.	$\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}}{x}dx$	20.	$\int \frac{\sqrt[5]{x^2}-4x^2}{x^4}dx$
6.	$\int \frac{2x^7-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$	21.	$\int \frac{\sqrt{x}-2x^3}{x^6}dx$
7.	$\int \frac{3x^2-\sqrt[6]{x}}{x^2}dx$	22.	$\int \frac{2x^3+3x^2\sqrt{x}}{x}dx$
8.	$\int \frac{2x^3-\sqrt[6]{x^5}}{x^2}dx$	23.	$\int \frac{\sqrt[5]{x^2}-4x}{\sqrt[3]{x}}dx$
9.	$\int \frac{x^3+3\sqrt[6]{x}}{x}dx$	24.	$\int \frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt[3]{x}}dx$
10.	$\int \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}dx$	25.	$\int \left(\frac{2\sqrt[7]{x}}{x}-\frac{\sqrt[5]{x}}{x^3}\right)dx$
11.	$\int \frac{x^3-3\sqrt[6]{x}}{x}dx$	26.	$\int \left(\frac{x}{2\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt[5]{x}}{x}\right)dx$
12.	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[5]{x}}{x}dx$	27.	$\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt[4]{x}}-\frac{\sqrt{x^5}}{x^4}\right)dx$
13.	$\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x}dx$	28.	$\int \left(\frac{5x}{\sqrt[7]{x^3}}-\frac{x}{\sqrt{x^5}}\right)dx$

14.	$\int \frac{\sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x}}{x} dx$	29.	$\int \left(\frac{x^2}{\sqrt[7]{x^3}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^3}} \right) dx$
15.	$\int \frac{2x^3 - 5\sqrt{x^3}}{x} dx$	30.	$\int \frac{7\sqrt[3]{x^4} + 5x}{x^3} dx$

Задание 2

1.	$\int \sqrt{1+x} dx$	16.	$\int \sqrt[3]{(11+6x)^2} dx$
2.	$\int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx$	17.	$\int \sqrt{(1-x)^3} dx$
3.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	18.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-4x)^5}}$
4.	$\int (1+4x)^6 dx$	19.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4+7x)^2}}$
5.	$\int \sqrt{1+3x} dx$	20.	$\int \sqrt{4-4x} dx$
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{5-4x}}$	21.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+4x)^4}}$
7.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$	22.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-4x}}$
8.	$\int \sqrt[3]{3-4x} dx$	23.	$\int \sqrt[4]{1+3x} dx$
9.	$\int \frac{3dx}{(3-4x)^{5/2}}$	24.	$\int \frac{dx}{(2{,}5-4{,}5x)^{2/3}}$
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3-2x)^5}}$	25.	$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(5-4x)^3}}$
11.	$\int \sqrt{(1-3x)^5} dx$	26.	$\int \sqrt[3]{(1-6x)^4} dx$
12.	$\int \sqrt[5]{(5-4x)^3} dx$	27.	$\int \sqrt[5]{(5-4x)^2} dx$
13.	$\int \sqrt[4]{7-8x} dx$	28.	$\int \sqrt[4]{4+9x} dx$

14.	$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(4+5x)}}$	29.	$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{(1+5x)^5}}$
15.	$\int \sqrt[4]{(2+11x)^3}dx$	30.	$\int \sqrt[3]{(0{,}2-11x)^2}dx$

Задание 3

1.	$\int \frac{dx}{7x-2}$	16.	$\int \frac{dx}{11-2x}$
2.	$\int \frac{dx}{2x-7}$	17.	$\int \frac{dx}{7-2x}$
3.	$\int \frac{dx}{3x-5}$	18.	$\int \frac{dx}{7-3x}$
4.	$\int \frac{dx}{3x-4}$	19.	$\int \frac{dx}{1-6x}$
5.	$\int \frac{dx}{4x-3}$	20.	$\int \frac{dx}{6-3x}$
6.	$\int \frac{dx}{15x-9}$	21.	$\int \frac{dx}{3-5x}$
7.	$\int \frac{dx}{0{,}8x-9}$	22.	$\int \frac{dx}{5-2x}$
8.	$\int \frac{dx}{2x+7}$	23.	$\int \frac{dx}{0{,}4-0{,}75x}$
9.	$\int \frac{dx}{3x+5}$	24.	$\int \frac{dx}{25-7x}$
10.	$\int \frac{dx}{3x+4}$	25.	$\int \frac{dx}{17-8x}$
11.	$\int \frac{dx}{0{,}3x+7{,}5}$	26.	$\int \frac{dx}{8-15x}$
12.	$\int \frac{dx}{8x+13}$	27.	$\int \frac{dx}{7+2x}$
13.	$\int \frac{dx}{6x+1}$	28.	$\int \frac{dx}{3-4x}$
14.	$\int \frac{dx}{5x+6}$	29.	$\int \frac{dx}{20-5x}$
15.	$\int \frac{dx}{9x+2}$	30.	$\int \frac{dx}{3-2x}$

Задание 4

1.	$\int \cos(2-3x)dx$	16.	$\int \sin(3{,}2+1{,}5x)dx$
2.	$\int \sin(3-5x)dx$	17.	$\int \cos(2{,}3-13x)dx$
3.	$\int \cos(3-4x)dx$	18.	$\int \sin(1{,}3x-5)dx$
4.	$\int \sin(3-2x)dx$	19.	$\int \cos\left(\frac{3}{4}x+4\right)dx$
5.	$\int 3\cos(3x+4)dx$	20.	$\int \sin(5x+7)dx$
6.	$\int \sin(4x+3)dx$	21.	$\int \cos(13x-4{,}5)dx$
7.	$\int \cos(0{,}5x+3)dx$	22.	$\int \sin(1-5{,}4x)dx$
8.	$\int \sin(5-3x)dx$	23.	$\int \cos(20+3{,}5x)dx$
9.	$\int \cos(3x+5)dx$	24.	$\int \sin(6{,}5x+3)dx$
10.	$\int \sin(7{,}8x+2)dx$	25.	$\int \cos(30x-14)dx$
11.	$\int \cos(0{,}3x+78)dx$	26.	$\int \sin(2{,}8x-3)dx$
12.	$\int \sin(5x-4)dx$	27.	$\int \cos(2-3{,}8x)dx$
13.	$\int \cos\left(\frac{11}{12}x+4\right)dx$	28.	$\int \sin(2{,}5x+4)dx$
14.	$\int \sin(13+5x)dx$	29.	$\int \cos(7-3{,}5x)dx$
15.	$\int \cos(12+3x)dx$	30.	$\int \sin(3{,}5x+4)dx$

Задание 5

1.	$\int e^{9-8x}dx$	16.	$\int \frac{dx}{e^{1-\frac{5}{4}x}}$
2.	$\int e^{7-9x}dx$	17.	$\int \frac{dx}{e^{5-x}}$
3.	$\int e^{9x-7}dx$	18.	$\int \frac{dx}{e^{2x+5}}$
4.	$\int 8e^{9+7x}dx$	19.	$\int \frac{dx}{e^{7-3,5x}}$
5.	$\int 0,9e^{7-9x}dx$	20.	$\int 5e^{5-7x}dx$
6.	$\int 5e^{\frac{2}{3}x-3}dx$	21.	$\int 0,3e^{3-0,5}dx$
7.	$\int 3e^{11-0,3x}dx$	22.	$\int e^{5-3,5x}dx$
8.	$\int \frac{dx}{e^{6-7x}}$	23.	$\int \frac{dx}{e^{2x-3}}$
9.	$\int 7e^{4-3,5x}dx$	24.	$\int e^{6+7x}dx$
10.	$\int \frac{dx}{e^{3x-5}}$	25.	$\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$
11.	$\int \frac{dx}{e^{7-9x}}$	26.	$\int \frac{dx}{e^{3-5x}}$
12.	$\int e^{0,5x-1}dx$	27.	$\int e^{7+9x}dx$
13.	$\int e^{9-0,7x}dx$	28.	$\int e^{7-9x}dx$
14.	$\int e^{0,9x+5}dx$	29.	$\int e^{8-0,2x}dx$
15.	$\int e^{\frac{3}{8}x+5}dx$	30.	$\int e^{0,9x+5}dx$

Задание 6

1.	$\int \frac{dx}{9x^2-6}$	16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+7}}$
2.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$	17.	$\int \frac{dx}{11x^2-3}$
3.	$\int \frac{dx}{9x^2+3}$	18.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$
4.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5+3x^2}}$	19.	$\int \frac{dx}{7x^2+2}$
5.	$\int \frac{dx}{5x^2-3}$	20.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}$
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$	21.	$\int \frac{dx}{2x^2-7}$
7.	$\int \frac{dx}{9x^2-3}$	22.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-7x^2}}$
8.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	23.	$\int \frac{dx}{5x^2+6}$
9.	$\int \frac{dx}{4x^2-7}$	24.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-9x^2}}$
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$	25.	$\int \frac{dx}{4x^2+5}$
11.	$\int \frac{dx}{15x^2+3}$	26.	$\int \frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}$
12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-6}}$	27.	$\int \frac{dx}{7x^2+5}$
13.	$\int \frac{dx}{11x^2+9}$	28.	$\int \frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x^2}}$	29.	$\int \frac{dx}{8x^2+3}$
15.	$\int \frac{dx}{4x^2+3}$	30.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+8}}$

Задание 7

1.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{7-4x^2}}$	16.	$\int \frac{xdx}{8x^2+3}$
2.	$\int \frac{xdx}{4x^2+3}$	17.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$
3.	$\int \frac{xdx}{5x^2-6}$	18.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{8x^2+7}}$
4.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{8-5x^2}}$	19.	$\int \frac{xdx}{11x^2-3}$
5.	$\int \frac{xdx}{6x^2-7}$	20.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+4}}$
6.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{15+4x^2}}$	21.	$\int \frac{xdx}{7x^2+2}$
7.	$\int \frac{xdx}{5x^2-3}$	22.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+4}}$
8.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+3}}$	23.	$\int \frac{xdx}{2x^2-7}$
9.	$\int \frac{xdx}{9x^2-3}$	24.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-7x^2}}$
10.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-5x^2}}$	25.	$\int \frac{xdx}{5x^2+6}$
11.	$\int \frac{xdx}{4x^2-7}$	26.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-9x^2}}$
12.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2+3}}$	27.	$\int \frac{xdx}{4x^2+5}$
13.	$\int \frac{xdx}{15x^2+3}$	28.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{6-5x^2}}$
14.	$\int \frac{xdx}{11x^2+9}$	29.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{7-2x^2}}$
15.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{8x^2-7}}$	30.	$\int \frac{xdx}{7x^2+5}$

Задание 8

1.	$\int \frac{dx}{x\ln^7 x}$	16.	$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln(2x+1)}}$
2.	$\int \frac{3dx}{x\ln^5 3x}$	17.	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(2-x)}}{x-2}dx$
3.	$\int \frac{\sqrt{\ln^3 5x}}{x}dx$	18.	$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$
4.	$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$	19.	$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}$
5.	$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[7]{\ln^3(x+1)}}$	20.	$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}$
6.	$\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$	21.	$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{\ln(2x+1)}}$
7.	$\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$	22.	$\int \frac{dx}{(2+x)\ln^7(2+x)}$
8.	$\int \frac{\ln^2(2-x)}{x-2}dx$	23.	$\int \frac{7dx}{x\ln^8 x}$
9.	$\int \frac{2\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}{2x+1}dx$	24.	$\int \frac{dx}{x\ln^4 2x}$
10.	$\int \frac{\sqrt{\ln(3x+7)}}{3x+7}dx$	25.	$\int \frac{\sqrt{\ln^3 5x}}{x}dx$
11.	$\int \frac{\ln^6 5x}{x}dx$	26.	$\int \frac{dx}{(x+1)\ln^7(x+1)}$
12.	$\int \frac{\sqrt{\ln^7(5x-3)}}{5x-3}dx$	27.	$\int \frac{\ln^3(1-x)}{1-x}dx$
13.	$\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}dx$	28.	$\int \frac{dx}{(3x+1)\sqrt[3]{\ln^2(3x+1)}}$
14.	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln 3x}}{x}dx$	29.	$\int \frac{\sqrt{\ln^3(2-3x)}}{2-3x}dx$
15.	$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{\ln^3(x+1)}}$	30.	$\int \frac{\ln^8(5+3x)}{5+3x}dx$

Задание 9

1.	$\int \frac{\cos 3xdx}{\sqrt{\sin 3x}}$	16.	$\int \sqrt[3]{\cos^4 6x} \sin 6xdx$
2.	$\int \frac{\sin 3xdx}{\sqrt{\cos 3x}}$	17.	$\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[5]{\cos^4 4x}} dx$
3.	$\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{\cos^3 2x}}$	18.	$\int \sqrt[5]{\sin 4x} \cos 4xdx$
4.	$\int \sqrt[3]{\sin^4 3x} \cos 3xdx$	19.	$\int \frac{\sin x}{\sqrt[5]{1+5\cos x}} dx$
5.	$\int \sqrt[4]{\sin^3 7x} \cos 7xdx$	20.	$\int \frac{\sin x}{\sqrt[5]{(1+3\cos x)^2}} dx$
6.	$\int \frac{\sin 5xdx}{\sqrt{\cos^3 5x}}$	21.	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$
7.	$\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2xdx$	22.	$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1+7\sin x)^2}} dx$
8.	$\int \frac{\cos 6xdx}{\sqrt{\sin^3 6x}}$	23.	$\int \sqrt{\sin 3x} \cos 3xdx$
9.	$\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[4]{\cos^3 4x}} dx$	24.	$\int \sqrt[3]{\cos^2 2x} \sin 2xdx$
10.	$\int \frac{\cos 4x}{\sqrt[5]{\sin^3 4x}} dx$	25.	$\int \frac{\sin 6x}{\sqrt[3]{\cos^4 6x}} dx$
11.	$\int \sqrt[5]{\cos^3 4x} \sin 4xdx$	26.	$\int \frac{\cos 4x}{\sqrt[4]{\sin^3 4x}} dx$
12.	$\int \frac{cosxdx}{(1-4\sin x)^3}$	27.	$\int \sqrt[4]{\cos^3 7x} \sin 7xdx$
13.	$\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{(1+7\sin x)^3}}$	28.	$\int \frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$
14.	$\int \sqrt{\cos 3x} \sin 3xdx$	29.	$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+8\sin x}} dx$
15.	$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin^3 2x}} dx$	30.	$\int \sqrt{2+5\cos x} \sin xdx$

Задание 10

1.	$\int e^{6x^2-1}xdx$	16.	$\int e^{3x^2+4}xdx$
2.	$\int e^{5x^2-7}xdx$	17.	$\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$
3.	$\int \frac{dx}{e^{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}$	18.	$\int e^{1-5x^2}xdx$
4.	$\int e^{3-2x^3}x^2dx$	19.	$\int \frac{1}{6}e^{2x^2-1}x^2dx$
5.	$\int \frac{dx}{e^{tgx}\cos^2 x}$	20.	$\int \frac{dx}{e^{tg2x}\cos^2 2x}$
6.	$\int \frac{x^2dx}{e^{x^3-8}}$	21.	$\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$
7.	$\int \frac{x^3dx}{e^{5x^4-1}}$	22.	$\int e^{2x^3-1}x^2dx$
8.	$\int e^{2x^3-1}x^2dx$	23.	$\int e^{2\sin 2x}\cos 2xdx$
9.	$\int e^{6+x^2}xdx$	24.	$\int e^{x^2-3}xdx$
10.	$\int \frac{e^{5tgx+1}}{\cos^2 x}dx$	25.	$\int \frac{\sin xdx}{e^{3\cos x}}$
11.	$\int \frac{\cos xdx}{e^{\sin x}}$	26.	$\int \frac{dx}{e^{ctgx}\sin^2 x}$
12.	$\int \frac{xdx}{e^{x^2+3}}$	27.	$\int \frac{x^4dx}{e^{5x^5+3}}$
13.	$\int \frac{e^{arctg2x}dx}{1+4x^2}$	28.	$\int e^{x^8-7}x^7dx$
14.	$\int \frac{\sin xdx}{e^{3\cos x}}$	29.	$\int e^{3-x^2}xdx$
15.	$\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$	30.	$\int e^{3tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$

Задание 11

1.	$\int \frac{xdx}{1+x^4}$	16.	$\int \frac{xdx}{4-x^4}$
2.	$\int \frac{xdx}{1-x^4}$	17.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$
3.	$\int \frac{2xdx}{1+4x^4}$	18.	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1-4x^4}}$
4.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$	19.	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{8-x^6}}$
5.	$\int \frac{2xdx}{\sqrt{1+x^4}}$	20.	$\int \frac{x^2dx}{8+x^6}$
6.	$\int \frac{x^5dx}{8+x^6}$	21.	$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(3-x^2)^5}}$
7.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$	22.	$\int \frac{x\ dx}{\sqrt[5]{(3-x^2)^4}}$
8.	$\int \frac{xdx}{4+x^4}$	23.	$\int \frac{xdx}{3+x^4}$
9.	$\int x\sqrt{x^2+1}dx$	24.	$\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$
10.	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(x^4+1)^3}}$	25.	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(x^4+1)^3}}$
11.	$\int \frac{6x^5dx}{\sqrt{1-8x^6}}$	26.	$\int \frac{6x^5dx}{1+8x^6}$
12.	$\int \frac{2x^2dx}{8+x^6}$	27.	$\int \frac{x^3dx}{4-x^8}$
13.	$\int \frac{3x\ dx}{\sqrt{(5x^2+1)^3}}$	28.	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^8}}$
14.	$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{(5x^2+3)^3}}$	29.	$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x^2+6)^2}}$
15.	$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{(4x^2+5)^3}}$	30.	$\int \frac{x\ dx}{\sqrt[5]{(5x^2+3)^3}}$

Задание 12

1.	$\int \frac{dx}{\arccos^3 6x\sqrt{1-36x^2}}$	16.	$\int \frac{dx}{arctg\,2x\left(1+4x^2\right)}$
2.	$\int \frac{\sin^3 3x}{\cos^5 3x}dx$	17.	$\int \frac{\arccos 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
3.	$\int \frac{arctg^3 6x}{1+36x^2}dx$	18.	$\int \frac{\arcsin^2 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
4.	$\int \frac{dx}{\arcsin^6 3x\sqrt{1-9x^2}}$	19.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$
5.	$\int \frac{arctg^6 3x}{1+9x^2}dx$	20.	$\int \frac{\arccos^5 5x dx}{\sqrt{1-25x^2}}$
6.	$\int \frac{\sqrt{arctg^3 9x}}{1+81x^2}dx$	21.	$\int \frac{\arccos^3 4x dx}{\sqrt{1-16x^2}}$
7.	$\int \frac{\arcsin^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	22.	$\int \frac{arctg\,2x+3}{1+4x^2}$
8.	$\int \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$	23.	$\int \frac{1-\arcsin 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
9.	$\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx$	24.	$\int \frac{dx}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}$
10.	$\int \frac{dx}{\arccos^2 8x\sqrt{1-64x^2}}$	25.	$\int \frac{\sqrt[3]{arctg 4x}}{1+16x^2}dx$
11.	$\int \frac{\arccos^3 6x}{\sqrt{1-36x^2}}dx$	26.	$\int \frac{arctg^3 2x+5}{1+4x^2}dx$
12.	$\int \frac{1}{\sin^2 3x\cos^2 3x}dx$	27.	$\int \frac{\sqrt{arctg 3x}+8}{1+9x^2}dx$
13.	$\int \frac{dx}{arctg^2 2x\left(1+4x^2\right)}$	28.	$\int \frac{\arcsin^2 2x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$
14.	$\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^7 2x}dx$	29.	$\int \frac{arctg^3 7x}{1+49x^2}dx$
15.	$\int \frac{1}{\sin^4 5x\cos^4 5x}dx$	30.	$\int \frac{\sqrt{arctg 2x}+4}{1+4x^2}dx$

Задание 13

1.	$\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$	16.	$\int \frac{\sqrt[7]{ctg^5 2x}dx}{\sin^2 2x}$
2.	$\int \frac{tg2x}{\cos^2 2x}dx$	17.	$\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 x}}{\sin^2 x}dx$
3.	$\int \frac{\sqrt{tg2x}}{\cos^2 2x}dx$	18.	$\int \frac{ctg3x}{\sin^2 3x}dx$
4.	$\int \frac{dx}{\sqrt{tg^3 2x}\cos^2 2x}$	19.	$\int \frac{\sqrt[3]{ctg3x}-2}{\sin^2 3x}$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{ctg2x}\sin^2 2x}$	20.	$\int \frac{\sqrt[3]{tg^2 x}}{\cos^2 x}dx$
6.	$\int \frac{\sqrt[5]{ctg2x}}{\sin^2 2x}dx$	21.	$\int \frac{dx}{ctg^3 x\sin^2 x}$
7.	$\int \frac{\sqrt{tgx}-1}{\cos^2 x}dx$	22.	$\int \frac{\sqrt[4]{tg8x}}{\cos^2 8x}dx$
8.	$\int \frac{tg^4 2x+5}{\cos^2 2x}$	23.	$\int \frac{tg^3 2x+4}{\cos^2 2x}dx$
9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 2x\sqrt{ctg^3 2x}}$	24.	$\int \frac{1+tg^3 3x}{\cos^2 3x}dx$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 7x\sqrt{ctg^3 7x}}$	25.	$\int \frac{\sqrt{ctg^5 2x+1}}{\sin^2 2x}dx$
11.	$\int \frac{dx}{ctg3x\sin^2 3x}$	26.	$\int \frac{3ctg^2 2x-1}{\sin^2 2x}dx$
12.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{ctg^2 2x}\sin^2 2x}$	27.	$\int \frac{ctg^3 2x-1}{\sin^2 2x}dx$
13.	$\int \frac{\sqrt[3]{ctg4x}}{\sin^2 4x}dx$	28.	$\int \frac{3-3ctg2x}{\sin^2 2x}dx$
14.	$\int \frac{\sqrt[3]{tg3x-6}}{\cos^2 3x}dx$	29.	$\int \frac{ctg^3 2x+2}{\sin^2 2x}dx$
15.	$\int \frac{\sqrt{ctg3x+7}}{\sin^2 3x}dx$	30.	$\int \frac{\sqrt[4]{tg4x}-2}{\cos^2 4x}dx$

Задание 14

1.	$\int \frac{3x-\sqrt{21}}{3x^2+7}dx$	16.	$\int \frac{x+4}{7x^2+3}dx$
2.	$\int \frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5x^2+1}}dx$	17.	$\int \frac{1-2x}{\sqrt{5x^2-1}}dx$
3.	$\int \frac{2x-1}{x^2+9}dx$	18.	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-x^2}}dx$
4.	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-3x^2}}dx$	19.	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+7}}dx$
5.	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}dx$	20.	$\int \frac{1+2x}{5x^2+1}dx$
6.	$\int \frac{1-2x}{\sqrt{5x^2-1}}dx$	21.	$\int \frac{x-1}{3-7x^2}dx$
7.	$\int \frac{3x-1}{3x^2+7}dx$	22.	$\int \frac{x-1}{7x^2+3}dx$
8.	$\int \frac{3-2x}{3x^2-7}dx$	23.	$\int \frac{6-x}{3x^2+5}dx$
9.	$\int \frac{5-x}{3x^2-1}dx$	24.	$\int \frac{5-2x}{7x^2+3}dx$
10.	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+9}}dx$	25.	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+9}}dx$
11.	$\int \frac{x-3}{\sqrt{1-5x^2}}dx$	26.	$\int \frac{2x-1}{5-2x^2}dx$
12.	$\int \frac{x-1}{5-x^2}dx$	27.	$\int \frac{2x+3}{1-3x^2}dx$
13.	$\int \frac{2x+3}{3x^2+1}dx$	28.	$\int \frac{x+3}{4x^2+11}dx$
14.	$\int \frac{x-3}{1-7x^2}dx$	29.	$\int \frac{3x-1}{1-x^2}dx$
15.	$\int \frac{3x-2}{x^2+9}dx$	30.	$\int \frac{2x+7}{\sqrt{3x^2+8}}dx$

Задание 15

1.	$\int (2x-5)\sin 2x dx$	16.	$\int x\cos(2x-3)dx$
2.	$\int (5x-7)\sin 4x dx$	17.	$\int 4x\sin(5x-7)dx$
3.	$\int (11-5x)\cos 2x dx$	18.	$\int 2x\cos(11-5x)dx$
4.	$\int (5-3x)\sin 2x dx$	19.	$\int 2x\sin(5-3x)dx$
5.	$\int x\cos(2x+2)dx$	20.	$\int 3x\sin(2x+2)dx$
6.	$\int (x^2+1)\sin 2x dx$	21.	$\int x^2\cos(2x-1)dx$
7.	$\int (1+2x^2)\sin 3x dx$	22.	$\int (x^2+5)\cos 3x dx$
8.	$\int x^2\cos 7x dx$	23.	$\int x^2\sin 7x dx$
9.	$\int (2x-3)\cos 7x dx$	24.	$\int 4x\sin(5x-7)dx$
10.	$\int 7x\sin(5-4x)dx$	25.	$\int 2x\cos(5-11x)dx$
11.	$\int (5-11x)\cos 3x dx$	26.	$\int 4x\sin(2x-5)dx$
12.	$\int (2x-5)\sin 9x dx$	27.	$\int \left(\frac{4}{3}x+2\right)\sin(x+1)dx$
13.	$\int 5x\sin(\frac{3}{4}x-2)dx$	28.	$\int (3x^2+5)\sin 2x dx$
14.	$\int (7x^2+1)\cos(x+1)dx$	29.	$\int (3x^2+2)\sin 4x dx$

15.	$\int (5x^2+1)\cos 2x dx$	30.	$\int (7x^2+1)\cos x dx$

Задание 16

1.	$\int \left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)\ln x dx$	16.	$\int (1+2x^2)\ln x dx$
2.	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	17.	$\int (1+\sqrt[3]{x})\ln x dx$
3.	$\int \ln(2x-3) dx$	18.	$\int (2x^3+5x^2)\ln x dx$
4.	$\int \frac{\ln x}{3\sqrt{x}} dx$	19.	$\int \left(\frac{2}{x^3}-x^2\right)\ln x dx$
5.	$\int (2x^3+3x)\ln x dx$	20.	$\int (x^2-4x)\ln 3x dx$
6.	$\int \ln(x^3+1) dx$	21.	$\int (7x^2-x)\ln x dx$
7.	$\int \frac{\ln x}{x^3} dx$	22.	$\int (7x+x^2)\ln x dx$
8.	$\int \ln(x^2+1) dx$	23.	$\int (1+x^5)\ln 3x dx$
9.	$\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$	24.	$\int (\sqrt{x}+1)\ln x dx$
10.	$\int (1+x^4)\ln x dx$	25.	$\int \ln(4x+3) dx$
11.	$\int (x^2+5)\ln x dx$	26.	$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
12.	$\int (x^2+1)\ln 2x dx$	27.	$\int \left(x+\frac{1}{x^2}\right)\ln x dx$
13.	$\int (x^2+3x+4)\ln x dx$	28.	$\int \ln(3x^2-6) dx$
14.	$\int (3x+x^2)\ln x dx$	29.	$\int (4-x-x^3)\ln x dx$

15.	$\int (4+x^3)\ln x dx$	30.	$\int (7x-x^2)\ln x dx$

Задание 17

1.	$\int x^2 e^4 dx$	16.	$\int (2-x^2)e^{3x}dx$
2.	$\int (4+x^2)e^{2x}dx$	17.	$\int (1+3x^2)e^{2x}dx$
3.	$\int (1+2x^2)e^{4x}dx$	18.	$\int (3+5x^2)e^{-2x}dx$
4.	$\int (x^2-4)e^{-3x}dx$	19.	$\int x^2 e^{2x+5}dx$
5.	$\int (1-x^2)e^{-5x}dx$	20.	$\int (7+3x^2)e^{7x}dx$
6.	$\int (1+x^2)e^{-2x+3}dx$	21.	$\int (3+x^2)e^{5-2x}dx$
7.	$\int (5-3x^2)e^{5x}dx$	22.	$\int (5x^2-4)e^{3x}dx$
8.	$\int (8x^2+5)e^{-4x}dx$	23.	$\int (1-x^2)e^{-3x}dx$
9.	$\int 3x^2 e^{-5x+4}dx$	24.	$\int (2x+x^2)e^{x}dx$
10.	$\int (4-x^2)e^{4x+1}dx$	25.	$\int (2-x^2)e^{-x}dx$
11.	$\int (5-3x^2)e^{-x}dx$	26.	$\int (5+x^2)e^{-2x}dx$
12.	$\int 3x^2 e^{-x+1}dx$	27.	$\int (\frac{3}{5}x^2-7)e^{4x}dx$
13.	$\int (1-2x^2)e^{-3x+2}dx$	28.	$\int (13-\frac{8}{9}x^2)e^{1+3x}dx$

14.	$\int (\frac{2}{6}x^2 - 8)e^{5x+1}dx$	29.	$\int (13 - \frac{8}{7}x^2)e^{7x}dx$
15.	$\int (5 - 4x^2)e^{8x}dx$	30.	$\int (2 + 3x^2)e^{-4x}dx$

Задание 18

1.	$\int (4 - 3x)e^{-3x}dx$	16.	$\int arctg\sqrt{5x+1}dx$
2.	$\int (4 + 3x)^{3x}dx$	17.	$\int (5x + 6)\cos 2xdx$
3.	$\int (4 - 16x)\sin 4xdx$	18.	$\int (3x - 2)\cos 5xdx$
4.	$\int (1 - 6x)e^{2x}dx$	19.	$\int (x\sqrt{2} - 3)\cos 2xdx$
5.	$\int arctg\sqrt{4x-1}dx$	20.	$\int (4x + 7)\cos 3xdx$
6.	$\int (4x - 2)\cos 4xdx$	21.	$\int (2x - 5)\cos 4xdx$
7.	$\int (5x - 2)e^{3x}dx$	22.	$\int (8 - 3x)\cos 5xdx$
8.	$\int \ln(x^2 + 4)dx$	23.	$\int (x + 5)\sin 3xdx$
9.	$\int \ln(4x^2 + 1)dx$	24.	$\int (2 - 3x)\sin 2xdx$
10.	$\int (2 - 4x)\sin 2xdx$	25.	$\int (4x + 3)\sin 5xdx$
11.	$\int arctg\sqrt{6x-1}dx$	26.	$\int (7x - 10)\sin 4xdx$
12.	$\int e^{-2x}(4x - 3)dx$	27.	$\int (\sqrt{2} - 8x)\sin 3xdx$
13.	$\int e^{-3x}(2 - 9x)dx$	28.	$\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

14.	$\int arctg\sqrt{2x-1}dx$	29.	$\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
15.	$\int arctg\sqrt{3x-1}dx$	30.	$\int x\sin 3xdx$

Задание № 19

1.	$\int xarctg5xdx$	16.	$\int arctg2xdx$
2.	$\int \arcsin 2xdx$	17.	$\int xarctg3xdx$
3.	$\int \arccos 2xdx$	18.	$\int \frac{xdx}{\sin^2 2x}$
4.	$\int \arccos 2xdx$	19.	$\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}dx$
5.	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$	20.	$\int arctg\ 2xdx$
6.	$\int \arcsin 8xdx$	21.	$\int xarctg\ 2xdx$
7.	$\int arcctgxdx$	22.	$\int \arcsin 3xdx$
8.	$\int \arcsin 9xdx$	23.	$\int \arcsin 5xdx$
9.	$\int arctg5xdx$	24.	$\int \arccos 3xdx$
10.	$\int (x+1)arctgxdx$	25.	$\int \arccos 5xdx$
11.	$\int (x+2)arctgxdx$	26.	$\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-2x}}dx$
12.	$\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}$	27.	$\int \arcsin 5xdx$
13.	$\int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-2x}}dx$	28.	$\int arctg5xdx$

14.	$\int arctg4xdx$	29.	$\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+2x}}dx$
15.	$\int xarctg3xdx$	30.	$\int xarctgxdx$

Задание № 20

1.	$\int e^x \sin 5xdx$	16.	$\int e^x \cos 6xdx$
2.	$\int e^{3x} \cos xdx$	17.	$\int e^x \sin xdx$
3.	$\int e^{2x} \sin 3xdx$	18.	$\int e^x \cos(3x+1)dx$
4.	$\int \sqrt{16+x^2}dx$	19.	$\int e^{-x} \cos 3xdx$
5.	$\int \sqrt{25+x^2}dx$	20.	$\int \sqrt{36+x^2}dx$
6.	$\int e^{3x} \cos 4xdx$	21.	$\int e^{4x} \cos 5xdx$
7.	$\int e^{4x} \cos 3xdx$	22.	$\int e^{-x} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)dx$
8.	$\int e^{2x} \sin 5xdx$	23.	$\int \sqrt{x^2+7}dx$
9.	$\int \sqrt{2+x^2}dx$	24.	$\int e^{6x} \cos(11-\frac{6}{5}x)dx$
10.	$\int e^x \sin 2xdx$	25.	$\int e^{-3x} \sin(4x+1)dx$
11.	$\int e^{2x} \cos 3xdx$	26.	$\int \sqrt{x^2+49}dx$
12.	$\int \sqrt{x^2+1}dx$	27.	$\int e^{-4x} \cos(2x+1)dx$

13.	$\int e^x \sin 6x dx$	28.	$\int \sqrt{11+x^2} dx$
14.	$\int e^{6x} \sin x dx$	29.	$\int e^{6x} \sin x dx$
15.	$\int \sqrt{3+x^2} dx$	30.	$\int e^{-x} \sin 6x dx$

Задание № 21

1.	$\int \frac{dx}{21+7x-x^2}$	16.	$\int \frac{dx}{x^2-3x-5}$
2.	$\int \frac{dx}{4x^2+4x+3}$	17.	$\int \frac{dx}{x^2+10x+3}$
3.	$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$	18.	$\int \frac{dx}{8-x^2-2x}$
4.	$\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$	19.	$\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$
5.	$\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$	20.	$\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$
6.	$\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$	21.	$\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$
7.	$\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$	22.	$\int \frac{dx}{5-2x-3x^2}$
8.	$\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$	23.	$\int \frac{dx}{2x^2-4x+1}$
9.	$\int \frac{dx}{x^2-5x-3}$	24.	$\int \frac{dx}{2-8x-x^2}$
10.	$\int \frac{dx}{2x^2-4x+3}$	25.	$\int \frac{dx}{6x-x^2-4}$
11.	$\int \frac{dx}{10x^2+20x+50}$	26.	$\int \frac{dx}{4x^2-8x+24}$
12.	$\int \frac{dx}{9-4x-2x^2}$	27.	$\int \frac{dx}{5x^2-10x+20}$

13.	$\int \frac{dx}{3x^2+6x-9}$	28.	$\int \frac{dx}{3x^2+6x-18}$
14.	$\int \frac{dx}{3x^2-2x+1}$	29.	$\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$
15.	$\int \frac{dx}{2x^2-12x+4}$	30.	$\int \frac{dx}{2x^2+6x+11}$

Задание № 22

1.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-3x+8}}$	16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}}$
2.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$	17.	$\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x-x^2}}$
3.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$	18.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$
4.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$	19.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-x^2}}$	20.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$	21.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-4x^2}}$
7.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$	22.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$
8.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+8x-2x^2}}$	23.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$
9.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+7x-x^2}}$	24.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+1}}$
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-7x-x^2}}$	25.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x-2x^2}}$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$	26.	$\int \frac{dx}{\sqrt{6-8x-x^2}}$
12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+1}}$	27.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-6x-3x^2}}$

13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x+2x^2}}$	28.	$\int \frac{dx}{\sqrt{8-16x-4x^2}}$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-2x^2}}$	29.	$\int \frac{dx}{\sqrt{12-4x-4x^2}}$
15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2x+6}}$	30.	$\int \frac{dx}{\sqrt{6+4x-4x^2}}$

Задание № 23

1.	$\int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}dx$	16.	$\int \frac{3x+1}{3x^2-2x+3}dx$
2.	$\int \frac{x+1}{5x^2-3x-7}dx$	17.	$\int \frac{2x+4}{6-4x-4x^2}dx$
3.	$\int \frac{x+3}{x^2-6x+13}dx$	18.	$\int \frac{2x+5}{1-x-2x^2}dx$
4.	$\int \frac{x}{11-4x-x^2}dx$	19.	$\int \frac{6x+5}{1-4x-2x^2}dx$
5.	$\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$	20.	$\int \frac{6x+5}{3x^2-5x+2}dx$
6.	$\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$	21.	$\int \frac{x+6}{1-x-3x^2}dx$
7.	$\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx$	22.	$\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$
8.	$\int \frac{x+1}{3x^2-2x+3}dx$	23.	$\int \frac{2x+3}{5x-3x^2-2}dx$
9.	$\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+6}dx$	24.	$\int \frac{2x+3}{x^2-12x+7}dx$
10.	$\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$	25.	$\int \frac{x+4}{3x^2+12x+4}dx$
11.	$\int \frac{5x+1}{4x-x^2+1}dx$	26.	$\int \frac{x+6}{1-2x^2+x}dx$

12.	$\int \frac{x+1}{1-2x^2-x}dx$	27.	$\int \frac{1-x}{1-2x^2+x}dx$
13.	$\int \frac{2x+3}{3x^2-9x+1}dx$	28.	$\int \frac{3x+6}{3x^2-5x+2}dx$
14.	$\int \frac{4x-3}{x+13-x^2}dx$	29.	$\int \frac{2x+5}{2-2x-2x^2}dx$
15.	$\int \frac{x+1}{13-5x-x^2}dx$	30.	$\int \frac{6x+1}{2-4x-4x^2}dx$

Задание № 24

1.	$\int \frac{8x+3}{\sqrt{27+12x-4x^2}}dx$	16.	$\int \frac{5x}{\sqrt{x-6x^2+4}}dx$
2.	$\int \frac{3x}{\sqrt{x-4x^2+3}}dx$	17.	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{1+6x-x^2}}dx$
3.	$\int \frac{4x+1}{\sqrt{2-9x^2+18x}}dx$	18.	$\int \frac{3x}{\sqrt{1-2x+9x^2}}dx$
4.	$\int \frac{x+1}{\sqrt{1+2x+4x^2}}dx$	19.	$\int \frac{1-2x}{\sqrt{5x^2+15x+20}}dx$
5.	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x+1-2x^2}}dx$	20.	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x+1-3x^2}}dx$
6.	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x+1-x^2}}dx$	21.	$\int \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$
7.	$\int \frac{2x+5}{\sqrt{8x+9-4x^2}}dx$	22.	$\int \frac{5x-2}{\sqrt{7-10x-5x^2}}dx$
8.	$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-4x^2}}dx$	23.	$\int \frac{x}{\sqrt{1-5x+4x^2}}dx$
9.	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{1-5x-2x^2}}dx$	24.	$\int \frac{5x+1}{\sqrt{2x^2-6x+11}}dx$
10.	$\int \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$	25.	$\int \frac{4x+3}{\sqrt{3x^2-3x+18}}dx$
11.	$\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+5x+13}}dx$	26.	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{1+6x-3x^2}}dx$

12.	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-4x+1}}dx$	27.	$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+8x+36}}dx$
13.	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$	28.	$\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$
14.	$\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$	29.	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-12x+9}}dx$
15.	$\int \frac{x-3}{\sqrt{1-4x-2x^2}}dx$	30.	$\int \frac{5x+3}{\sqrt{3x^2-2x+6}}dx$

Задание № 25

1.	$\int \frac{12x^4-4x^3+27}{6x+7}dx$	16.	$\int \frac{5x^3-3x^2+4x-2}{5x-3}dx$
2.	$\int \frac{4x^4+3x^2-4}{2x+1}dx$	17.	$\int \frac{2x^4+5x^3+4}{2x-1}dx$
3.	$\int \frac{5x^3-6x^2+7x}{2-5x}dx$	18.	$\int \frac{5x^3-4x^2+6x}{5x-3}dx$
4.	$\int \frac{2x^4+5x^2+3x+1}{3x-1}dx$	19.	$\int \frac{10x^4+2x+1}{5x-4}dx$
5.	$\int \frac{6x^3-7x^2+2}{3x+2}dx$	20.	$\int \frac{15x^4 2x^2-3x-1}{5x+1}dx$
6.	$\int \frac{7x^3-5x^2+3x-1}{7x+2}dx$	21.	$\int \frac{14x^3-6x^2-2x}{7x+2}dx$
7.	$\int \frac{18x^4+6x^3+5}{9x-7}dx$	22.	$\int \frac{2x^4+3x^3-4}{4x-5}dx$
8.	$\int \frac{9x^3+7x^2+5x+3}{3x-2}dx$	23.	$\int \frac{3x^3-5x^2+2x-4}{3x+5}dx$
9.	$\int \frac{8x^4+6x^3-5x+4}{4x+3}dx$	24.	$\int \frac{5x^4+2x^3-4x+5}{5x+7}dx$
10.	$\int \frac{6x^3-5x^2+4x}{5-2x}dx$	25.	$\int \frac{7x^3+9x^2-5x}{6x+7}dx$
11.	$\int \frac{4x^3-5x^2+1}{2x+7}dx$	26.	$\int \frac{6x^4+8x^3-4x+5}{3x+2}dx$

12.	$\int \frac{2x^4 + 10x^3 - 5x^2}{2x - 3} dx$	27.	$\int \frac{6x^4 + 11}{2x + 3} dx$
13.	$\int \frac{5x^3 - 7x^2 + x - 3}{5x + 2} dx$	28.	$\int \frac{6x^3 - 2x^2 + 1}{3x - 4} dx$
14.	$\int \frac{18x^4 - 5x^3 + 6x^2}{5x - 4} dx$	29.	$\int \frac{8x^3 - 3x^2 + 4x + 2}{4x - 2} dx$
15.	$\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 4}{2x - 2} dx$	30.	$\int \frac{6x^4 - x^3 + 2x^2 + 5}{3x + 1} dx$

Задание № 26

1.	$\int \frac{10x^4 - 7}{5x^2 + 3} dx$	16.	$\int \frac{3x^5}{6x^2 + 1} dx$
2.	$\int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$	17.	$\int \frac{8x^6}{4x^2 + 3} dx$
3.	$\int \frac{x^4}{x^2 - 3} dx$	18.	$\int \frac{18x^4}{9x^2 + 1} dx$
4.	$\int \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$	19.	$\int \frac{10x^5}{5x^2 + 4} dx$
5.	$\int \frac{2x^5}{x^2 - 4} dx$	20.	$\int \frac{2x^4 + 5}{x^2 - 3} dx$
6.	$\int \frac{3x^6}{x^2 + 9} dx$	21.	$\int \frac{2x^3 - 5}{x^2 - 5} dx$
7.	$\int \frac{5x^4}{x^2 - 5} dx$	22.	$\int \frac{2x^5}{2x^2 + 3} dx$
8.	$\int \frac{3x^5}{3x^2 + 4} dx$	23.	$\int \frac{6x^6 + 1}{3x^2 + 2} dx$
9.	$\int \frac{7x^6}{7x^2 + 5} dx$	24.	$\int \frac{8x^4 + 5}{x^2 - 3} dx$
10.	$\int \frac{x^4}{x^2 - 5} dx$	25.	$\int \frac{4x^5}{2x^2 + 3} dx$

11.	$\int \frac{14x^6+1}{7x^2-3}dx$	26.	$\int \frac{10x^5+x}{2x^2+4}dx$
12.	$\int \frac{9x^4+8}{3x^2-1}dx$	27.	$\int \frac{2x^3-5x}{x^2+1}dx$
13.	$\int \frac{6x^5+7}{3x^2-1}dx$	28.	$\int \frac{15x^5+1}{3x^2+4}dx$
14.	$\int \frac{8x^6+9}{2x^2+5}dx$	29.	$\int \frac{4x^5+3x^3}{2x^2+5}dx$
15.	$\int \frac{18x^4-3}{6x^2+1}dx$	30.	$\int \frac{15x^6+x}{3x^2+1}dx$

Задание № 27

1.	$\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+3)}dx$	16.	$\int \frac{3x^2-7x+4}{(x^2+4x+3)(x-4)}dx$
2.	$\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+x-2)(x+3)}dx$	17.	$\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$
3.	$\int \frac{6x}{x^3+2x^2-x-2}dx$	18.	$\int \frac{7x^2+3x+30}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$
4.	$\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$	19.	$\int \frac{6x^2}{(x^2+3x+2)(x+1)}dx$
5.	$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$	20.	$\int \frac{6x^2+x+1}{(x^2-1)(x+2)}dx$
6.	$\int \frac{x^2-5x+7}{(x^2+2x-3)(x+2)}dx$	21.	$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$
7.	$\int \frac{40x^2+37x+36}{(x^2+8x+15)(x+1)}dx$	22.	$\int \frac{x^2-26}{(x^2-5x+4)(x+3)}dx$
8.	$\int \frac{x^2+10x-7}{(x^2-x-12)(x-1)}dx$	23.	$\int \frac{x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$
9.	$\int \frac{2x^2+26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$	24.	$\int \frac{12x^2-5x+7}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$
10.	$\int \frac{21x^2+3x+24}{(x^2+x-2)(x+1)}dx$	25.	$\int \frac{4x-6}{(x^2-x-12)(x-1)}dx$
11.	$\int \frac{2x^2+12x-6}{(x^2+8x+15)(x+1)}dx$	26.	$\int \frac{x^2+5x-6}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$
12.	$\int \frac{x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}dx$	27.	$\int \frac{43x-1}{(x^2-5x+6)(x-1)}dx$
13.	$\int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$	28.	$\int \frac{x^2+x-1}{(x^2+x-2)(x+1)}dx$
14.	$\int \frac{9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}dx$	29.	$\int \frac{3x^2-3x-24}{(x^2-x+2)(x-3)}dx$
15.	$\int \frac{7x^2-8x+3}{(x^2-5x+6)(x+5)}dx$	30.	$\int \frac{3x^2-15}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx$

Задание № 28

1.	$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$	16.	$\int \frac{x^3-4x+5}{(x-1)(x^2-1)}dx$
2.	$\int \frac{x^3-3x}{(x+1)(x^2-1)}dx$	17.	$\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+2x^2}dx$
3.	$\int \frac{x^4-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$	18.	$\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-2x^2}dx$
4.	$\int \frac{x^2+2}{x^3-2x^2+x}dx$	19.	$\int \frac{3x^3-5x^2+6}{(x-2)(x^2-4)}dx$
5.	$\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x+1)(x^2+8)}dx$	20.	$\int \frac{x^5+2x^3+1}{x^3-x^2}dx$
6.	$\int \frac{4x^4+1}{(x-1)(x^2-1)}dx$	21.	$\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x^3+2x^2+x}dx$
7.	$\int \frac{x^5+2}{x^3+x^2}dx$	22.	$\int \frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$
8.	$\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}dx$	23.	$\int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx$
9.	$\int \frac{5x^4-3x^2-4}{x^3-x^2}dx$	24.	$\int \frac{x^4+2x^3-3x^2+5}{x^3+x^2}dx$
10.	$\int \frac{3x^3+2}{(x+1)(x^2+x)}dx$	25.	$\int \frac{4x^4+x^3-5x+7}{(x+1)(x^2-2x+1)}dx$
11.	$\int \frac{2x^4-4x^3+6x+1}{x^3-2x^2+x}dx$	26.	$\int \frac{x^5+2x^2-1}{x^2-x^3}dx$
12.	$\int \frac{2x^4-3x^2-4}{x^3-x^2}dx$	27.	$\int \frac{2x^4-3x^2+5x-1}{x^3-2x^2+1}dx$
13.	$\int \frac{x^5+5x^2+3}{x^3-x^2-x+1}dx$	28.	$\int \frac{x^5+3x-2}{x^3-2x^2+x}dx$
14.	$\int \frac{3x^3-7x^2+2}{(x-1)(x^2-x)}dx$	29.	$\int \frac{2x^4-3x^3+2x^2+x-4}{x^3+x^2}dx$
15.	$\int \frac{x^4+x^3+2}{2x^2+x^3)}dx$	30.	$\int \frac{2x^4-4x^3-1}{x^3+2x^2+x}dx$

Задание № 29

1.	$\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$	16.	$\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2-6x+3)}dx$
2.	$\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$	17.	$\int \frac{19x-34}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
3.	$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$	18.	$\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$
4.	$\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$	19.	$\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx$
5.	$\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$	20.	$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$
6.	$\int \frac{8}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$	21.	$\int \frac{5x}{x^3-1}dx$
7.	$\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$	22.	$\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$
8.	$\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$	23.	$\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
9.	$\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$	24.	$\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$
10.	$\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$	25.	$\int \frac{36}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$
11.	$\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$	26.	$\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$
12.	$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$	27.	$\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$
13.	$\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$	28.	$\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x-6)}dx$
14.	$\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$	29.	$\int \frac{-3x^2+4x-7}{x^3-1}dx$
15.	$\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx$	30.	$\int \frac{-x^2+7x-12}{x^3+8}dx$

Задание № 30

1.	$\int \frac{5x}{x^4+3x^2-4}dx$	16.	$\int \frac{x^3}{x^4+5x^2+4}dx$
2.	$\int \frac{3x}{x^4+4x^2}dx$	17.	$\int \frac{x^3-3}{x^4-1}dx$
3.	$\int \frac{x^3-7x^2-3}{x^4+4x^2}dx$	18.	$\int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}dx$
4.	$\int \frac{7x-2}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$	19.	$\int \frac{4x-2}{x^4+3x^2-4}dx$
5.	$\int \frac{1}{x^4-x^2}dx$	20.	$\int \frac{4x^2-1}{x^4-x^2}dx$
6.	$\int \frac{2x^3-2x-5}{x^4+3x^2-4}dx$	21.	$\int \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx$
7.	$\int \frac{2-8x}{x^4+4x^2}dx$	22.	$\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}dx$
8.	$\int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$	23.	$\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}dx$
9.	$\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}dx$	24.	$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}dx$
10.	$\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx$	25.	$\int \frac{x^4+x^3+2x^2+x+2}{x^4+5x^2+4}dx$
11.	$\int \frac{5}{x^4+4x^2-4}dx$	26.	$\int \frac{x^3+8x^2}{x^4+4x^2}dx$
12.	$\int \frac{2x^3-2x^2+5}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$	27.	$\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^4-x^2}dx$
13.	$\int \frac{x^3-x-5}{x^4+3x^2-4}dx$	28.	$\int \frac{x^3-x+1}{x^4+x^2}dx$
14.	$\int \frac{2x^2-7x+10}{(x-1)(x^3-x^2+4x-1)}dx$	29.	$\int \frac{x+2}{x^4+4x^2}dx$
15.	$\int \frac{x^3-x}{x^4+x^2}dx$	30.	$\int \frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2-4}dx$

Задание № 31

1.	$\int \frac{x-1}{(x-2)^3}dx$	16.	$\int \frac{x}{(1-x)^9}dx$
2.	$\int \frac{x-6}{(x-7)^7}dx$	17.	$\int \frac{12+x}{(x+3)^3}dx$
3.	$\int \frac{x+6}{(x+9)^4}dx$	18.	$\int \frac{x-10}{(x-5)^{11}}dx$
4.	$\int \frac{x+12}{(x-9)^7}dx$	19.	$\int \frac{x-2}{(x-1)^9}dx$
5.	$\int \frac{x-3}{(x-1)^9}dx$	20.	$\int \frac{x+3}{(x-1)^{10}}dx$
6.	$\int \frac{x-3}{(x-2)^5}dx$	21.	$\int \frac{x+2}{(x+3)^3}dx$
7.	$\int \frac{x-6}{(x-7)^7}dx$	22.	$\int \frac{x-6}{(7-x)^4}dx$
8.	$\int \frac{x+2}{(x-2)^5}dx$	23.	$\int \frac{x-1}{(2-x)^5}dx$
9.	$\int \frac{x+3}{(7-x)^7}dx$	24.	$\int \frac{x+9}{(5-x)^{11}}dx$
10.	$\int \frac{x-1}{(x-2)^5}dx$	25.	$\int \frac{3+x}{(2-x)^5}dx$
11.	$\int \frac{x+8}{(5-x)^{11}}dx$	26.	$\int \frac{x}{(x-5)^{11}}dx$
12.	$\int \frac{x-1}{(x+3)^4}dx$	27.	$\int \frac{2+x}{(2-x)^5}dx$
13.	$\int \frac{x-13}{(x+9)^4}dx$	28.	$\int \frac{x+21}{(x-7)^7}dx$
14.	$\int \frac{x+4}{(x+3)^3}dx$	29.	$\int \frac{5+x}{(1-x)^9}dx$
15.	$\int \frac{x+7}{(1-x)^3}dx$	30.	$\int \frac{x+1}{(x-7)^7}dx$

Задание № 32

1.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}+3}dx$	16.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}dx$
2.	$\int \frac{\sqrt{x}}{x-3}dx$	17.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx$
3.	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}dx$	18.	$\int \frac{1}{3+\sqrt{x-1}}dx$
4.	$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$	19.	$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx$
5.	$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$	20.	$\int \frac{x}{3+\sqrt{x+2}}dx$
6.	$\int \frac{1}{3+\sqrt{x+3}}dx$	21.	$\int \frac{1}{3+\sqrt{x+2}}dx$
7.	$\int \frac{1}{1+\sqrt{x-2}}dx$	22.	$\int \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}dx$
8.	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-2}}dx$	23.	$\int \frac{1}{3-\sqrt{x}}dx$
9.	$\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x-2}+1)}dx$	24.	$\int \frac{\sqrt{x}}{5-x}dx$
10.	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$	25.	$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}dx$
11.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$	26.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$
12.	$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$	27.	$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$
13.	$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$	28.	$\int \frac{1}{2+\sqrt{x+2}}dx$
14.	$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$	29.	$\int \frac{1}{x\sqrt{3-x}}dx$
15.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}dx$	30.	$\int \frac{1}{2+\sqrt{x+3}}dx$

Задание № 33

1.	$\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}dx$	16.	$\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$
2.	$\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$	17.	$\int \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{2x+1}dx$
3.	$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$	18.	$\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$
4.	$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x+3}}dx$	19.	$\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$
5.	$\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}dx$	20.	$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[2]{x}-\sqrt[3]{x}}dx$
6.	$\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+1}dx$	21.	$\int \frac{(x+1)+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1}}dx$
7.	$\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx$	22.	$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^3}}dx$
8.	$\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$	23.	$\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$
9.	$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$	24.	$\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}dx$
10.	$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$	25.	$\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}dx$
11.	$\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$	26.	$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt[3]{2x+1}}dx$
12.	$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt[4]{2x+1}}dx$	27.	$\int \frac{\sqrt{x}}{4x+\sqrt[3]{x^2}}dx$
13.	$\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$	28.	$\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$
14.	$\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1-\sqrt[3]{x})}dx$	29.	$\int \frac{\sqrt{4x+1}}{1-\sqrt{4x+1}}dx$
15.	$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(4+\sqrt[3]{x})}dx$	30.	$\int \frac{(x+1)+\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}dx$

Задание № 34

1.	$\int \frac{1}{x(\ln^2 x - 6\ln x)} dx$	16.	$\int \frac{\ln x - 1}{x\ln^2 x} dx$
2.	$\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 8\ln x + 1)} dx$	17.	$\int \frac{1}{x\sqrt{3 - \ln^2 x}} dx$
3.	$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x - 6\ln x + 1}} dx$	18.	$\int \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx$
4.	$\int \frac{1}{x\sqrt{6 + \ln x - \ln^2 x}} dx$	19.	$\int \frac{1}{e^x\sqrt{1 - e^{-2x}}} dx$
5.	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 6e^x + 10} dx$	20.	$\int \sqrt{1 - e^x} \cdot e^x \cdot dx$
6.	$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 4e^x + 5}} dx$	21.	$\int \frac{1}{e^{2x} + 2e^x + 5} dx$
7.	$\int \frac{1}{e^{2x} + 2e^x} dx$	22.	$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$
8.	$\int \frac{1}{\sqrt{(1 + x^3)^3}} dx$	23.	$\int \sqrt{e^x + 1} \cdot dx$
9.	$\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x^{\ln x}} dx$	24.	$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x - 6\ln x}} dx$
10.	$\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx$	25.	$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx$
11.	$\int \frac{1}{e^x - 1} dx$	26.	$\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$
12.	$\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$	27.	$\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1} dx$
13.	$\int \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}} dx$	28.	$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$
14.	$\int \frac{1}{e^{3x} - e^x} dx$	29.	$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1} dx$
15.	$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 4} dx$	30.	$\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$

Задание № 35

1.	$\int \sqrt{16-x^2}dx$	16.	$\int \frac{1}{\sqrt{(9+x^2)^3}}dx$
2.	$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$	17.	$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$
3.	$\int \frac{1}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}dx$	18.	$\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$
4.	$\int \frac{1}{\sqrt{(5-x^2)^3}}dx$	19.	$\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$
5.	$\int x^8\sqrt{16-x^2}dx$	20.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$
6.	$\int x^4\sqrt{25-x^2}dx$	21.	$\int x^5\sqrt{9-x^2}dx$
7.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$	22.	$\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$
8.	$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$	23.	$\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$
9.	$\int \frac{1}{\sqrt{(16-x^2)^2}}dx$	24.	$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$
10.	$\int x^4\sqrt{4-x^2}dx$	25.	$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$
11.	$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$	26.	$\int \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}dx$
12.	$\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$	27.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$
13.	$\int \frac{x^4}{\sqrt{(8-x^2)^3}}dx$	28.	$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$
14.	$\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}dx$	29.	$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

15.	$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$	30.	$\int \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}dx$

Задание № 36

1.	$\int \frac{1}{5+2\sin x+3\cos x}dx$	16.	$\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$
2.	$\int \frac{1}{5-4\sin x+2\cos x}dx$	17.	$\int \frac{1}{8+4\cos x}dx$
3.	$\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx$	18.	$\int \frac{1}{3\sin x-4\cos x}dx$
4.	$\int \frac{1}{5+3\cos x-5\sin x}dx$	19.	$\int \frac{1}{7\sin x-3\cos x}dx$
5.	$\int \frac{1}{5\cos x+10\sin x}dx$	20.	$\int \frac{1}{2+3\cos x+4\sin x}dx$
6.	$\int \frac{1}{3+2\cos x-\sin x}dx$	21.	$\int \frac{1}{4\cos x+\sin x}dx$
7.	$\int \frac{1}{5-3\cos x}dx$	22.	$\int \frac{1}{3\cos x-4\sin x}dx$
8.	$\int \frac{1}{8-4\sin x+7\cos x}dx$	23.	$\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$
9.	$\int \frac{1}{3+5\cos x}dx$	24.	$\int \frac{1}{5+\sin x+3\cos x}dx$
10.	$\int \frac{1}{2\sin x+3\cos x+3}dx$	25.	$\int \frac{1}{4\sin x+2\cos x+5}dx$
11.	$\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$	26.	$\int \frac{1}{4-4\sin x+3\cos x}dx$
12.	$\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}dx$	27.	$\int \frac{1}{\cos x-3\sin x}dx$
13.	$\int \frac{1}{3+2\cos x-\sin x}dx$	28.	$\int \frac{1}{3+5\sin x+3\cos x}dx$
14.	$\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$	29.	$\int \frac{1}{3\sin x+7\cos x}dx$

15.	$\int \frac{1}{3\sin x - \cos x} dx$	30.	$\int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$

Задание № 37

1.	$\int \frac{1}{8\sin^2 x - 16\sin x \cos x} dx$	16.	$\int \frac{1}{\sin x \cos^7 x} dx$
2.	$\int \frac{1}{16\sin^2 x - 8\sin x \cos x} dx$	17.	$\int \frac{1}{1 + 3\cos^2 x} dx$
3.	$\int \frac{2tgx + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$	18.	$\int \frac{tgx}{1 - ctg 2x} dx$
4.	$\int \frac{1}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$	19.	$\int \frac{1}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x} dx$
5.	$\int \frac{1}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} dx$	20.	$\int \frac{1}{6\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$
6.	$\int \frac{1}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x} dx$	21.	$\int \frac{3tgx - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$
7.	$\int \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x} dx$	22.	$\int \frac{1}{3 - 2\sin^2 x} dx$
8.	$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x} dx$	23.	$\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin^4 x} dx$
9.	$\int \frac{1}{16\sin^2 x + 7\cos^2 x} dx$	24.	$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx$
10.	$\int \frac{1}{2\sin^2 x + 7\cos^2 x} dx$	25.	$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$
11.	$\int \frac{1}{\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x} dx$	26.	$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx$
12.	$\int \frac{1}{3\sin^2 x - 5\cos^2 x} dx$	27.	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$
13.	$\int \frac{1}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x} dx$	28.	$\int \frac{1}{3\cos^2 x - 2} dx$
14.	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$	29.	$\int \frac{1}{5 + 3\sin^2 x} dx$

15.	$\int \frac{3tgx-1}{\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$	30.	$\int \frac{1}{2\cos^2 x+3}dx$

Задание № 38

1.	$\int \cos^5 x \sin^4 xdx$	16.	$\int \cos^2 x \sin^4 xdx$
2.	$\int \cos^3 x \sin^5 xdx$	17.	$\int \cos^4 x \sin^2 xdx$
3.	$\int \frac{3\cos x}{\sin^4 x}dx$	18.	$\int \cos^3 x \sin^4 xdx$
4.	$\int \cos^8 x \sin^3 xdx$	19.	$\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}dx$
5.	$\int \cos^2 3x \sin^4 3xdx$	20.	$\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 xdx$
6.	$\int \cos 2x \sin^4 2xdx$	21.	$\int \cos^4 2x \sin^2 2xdx$
7.	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$	22.	$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[6]{\sin^3 x}}dx$
8.	$\int \cos^3 x \sqrt[3]{\sin^2 2x}dx$	23.	$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$
9.	$\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2xdx$	24.	$\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 xdx$
10.	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$	25.	$\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos^3 2xdx$
11.	$\int \cos^4 x \sin^5 xdx$	26.	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$
12.	$\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$	27.	$\int \cos^3 x \sin^6 xdx$
13.	$\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cos^3 xdx$	28.	$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx$

14.	$\int \cos x \sin^3 x dx$	29.	$\int \sqrt[5]{\sin^3 x} \cos^5 x dx$
15.	$\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$	30.	$\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt{\sin^2 x}} dx$

Задание № 39

1.	$\int (3 - \sin 2x)^2 dx$	16.	$\int (tg 2x + tg 2x)^2 dx$
2.	$\int ctg^5 2x dx$	17.	$\int tg^3 \left(\frac{x}{3}\right) dx$
3.	$\int \left(x + ctg^3 \frac{x}{2}\right) dx$	18.	$\int ctg^4 x dx$
4.	$\int \left(1 + tg \frac{x}{2}\right)^3 dx$	19.	$\int ctg^3 x dx$
5.	$\int (1 + 3tgx)^3 dx$	20.	$\int tg^5 2x dx$
6.	$\int (2 + ctgx)^3 dx$	21.	$\int ctg^4 5x dx$
7.	$\int (tgx + ctgx)^2 dx$	22.	$\int tg^4 x dx$
8.	$\int (1 + tg 7x)^2 dx$	23.	$\int tg^3 x dx$
9.	$\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx$	24.	$\int (2x + tg^2 7x) dx$
10.	$\int tg^4 3x dx$	25.	$\int tg^4 \left(\frac{2x}{3}\right) dx$
11.	$\int ctg^3 (x - 2) dx$	26.	$\int (1 - tgx)^2 dx$
12.	$\int (x + tg^3 4x) dx$	27.	$\int tg^3 \left(\frac{x}{2}\right) dx$
13.	$\int tg \left(\frac{4x}{3}\right) dx$	28.	$\int \left(ctg\left(\frac{x}{3}\right) + 2\right) dx$

14.	$\int tg^4(x-6)dx$	29.	$\int tg^3 4xdx$
15.	$\int (1-ctg2x)dx$	30.	$\int ctg^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$

Задание № 40

1.	$\int \sin 7x \sin 5xdx$	16.	$\int \sin 8x \cdot \cos 7xdx$
2.	$\int \sin 7x \sin 5xdx$	17.	$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$
3.	$\int \sin 2x \cos xdx$	18.	$\int (3-\sin 2x)^2 dx$
4.	$\int \sin 2x \cos xdx$	19.	$\int (4+\cos 2x)^2 dx$
5.	$\int \sin^2 3xdx$	20.	$\int \cos^2 3xdx$
6.	$\int (\sin x - \cos x)^2 dx$	21.	$\int \sin 4x \cos 3xdx$
7.	$\int \sin 3x \cdot \cos 4xdx$	22.	$\int (1+\cos 2x)^2 dx$
8.	$\int \sin 4x \sin 3xdx$	23.	$\int \cos 3x \cdot \cos 4xdx$
9.	$\int (1-\cos 2x)^3 dx$	24.	$\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx$
10.	$\int \left(4+\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2 dx$	25.	$\int (2+\cos 4x)^2 dx$
11.	$\int \sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)dx$	26.	$\int \left(5+\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\right)^2 dx$
12.	$\int \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right)dx$	27.	$\int \left(3+\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 dx$
13.	$\int \left(1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx$	28.	$\int (3+5\cos x)^2 dx$

14.	$\int\left(1+\cos\left(\frac{5x}{3}\right)\right)^2 dx$	29.	$\int\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx$
15.	$\int(\sin x+\cos x)^2 dx$	30.	$\int(\sin x+\cos x)^3 dx$

Задание № 41

1.	$\int\frac{1}{\sin^4 x}dx$	16.	$\int\frac{\cos^2 3x}{\sin^4 3x}dx$
2.	$\int\frac{1}{\cos^4 2x}dx$	17.	$\int\frac{\sin^2 4x}{\cos^4 4x}dx$
3.	$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$	18.	$\int\frac{\cos^3 2x}{\sin^5 2x}dx$
4.	$\int\frac{1}{\sin^4 3x}dx$	19.	$\int\frac{\sin^3 3x}{\cos^5 3x}dx$
5.	$\int\frac{1}{\cos^4 3x}dx$	20.	$\int\frac{\sin^3 2x}{\cos^7 2x}dx$
6.	$\int\frac{1}{\sin^6 x}dx$	21.	$\int\frac{\cos^3 3x}{\sin^7 3x}dx$
7.	$\int\frac{1}{\cos^6 x}dx$	22.	$\int\frac{\sin^5 2x}{\cos^7 2x}dx$
8.	$\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$	23.	$\int\frac{\cos^5 3x}{\sin^7 3x}dx$
9.	$\int\frac{1}{\sin^4 2x\cos^4 2x}dx$	24.	$\int\frac{\sin^2 2x}{\sin^{11} 2x}dx$
10.	$\int\frac{1}{\sin^4 2x}dx$	25.	$\int\frac{1}{\cos^4 5x}dx$
11.	$\int\frac{\cos^2 2x}{\sin^4 2x}dx$	26.	$\int\frac{1}{\sin^4 5x}dx$
12.	$\int\frac{\sin^3 3x}{\cos^5 3x}dx$	27.	$\int\frac{1}{\sin^4 5x\cos^4 5x}dx$
13.	$\int\frac{1}{\sin^2 2x\cos^2 2x}dx$	28.	$\int\frac{\sin^3 2x}{\cos^7 2x}dx$

14.	$\int \frac{1}{\sin^6 2x} dx$	29.	$\int \frac{\cos^3 3x}{\sin^7 3x} dx$
15.	$\int \frac{1}{\cos^6 2x} dx$	30.	$\int \frac{1}{\sin^2 3x \cos^2 3x} dx$

С о д е р ж а н и е

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1984
2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1988.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Задачи. М.: Наука, 1987
4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Высш. шк., 2000.
5. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1991.
6. *Демидович Б.П.,Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс высшей математики. М.: Астрель -АСТ, 2001.
7. *Кузнецов Л.*А. Сборник заданий по высшей математике. ТР. М.: Высшая школа,1983.
8. *Пискунов Н.С*. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1. М.: Наука, 1985.
9. *Фихтенгольц Г.М*. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. М.: Наука,1969.
10. *Щипачев В.С*. Основы высшей математики. М.: Высшая школа, 1994.