Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

________Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно – методический

комплекс дисциплины

для специальностей

010101 – математика

010501 – прикладная математика

010701 - физика

Составители: **доцент В.В.Сельвинский, ст. преп. М.Г.Ляпунова**

Благовещенск

2007

ББК
С

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

В.В.Сельвинский, М.Г.Ляпунова

Математический анализ. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010101 «Математика», 010501 «Прикладная математика», 010701 «Физика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − с.

Учебно – методический комплекс дисциплины "Математический анализ" содержит рабочую программу дисциплины, план-конспект лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список. Предназначен ведущим преподавателям и студентам, изучающим данную дисциплину.

1. ВЫПИСКИ ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010101 – «Математика»

Квалификация – Математик

(Специальность 010501 – «Прикладная математика и информатика»

Квалификация – Математик, системный программист)

ОПД.Ф.01 **Математический анализ**

Предмет математического анализа, сведения о множествах и логической символике, отображение и функции. Действительные числа: алгебраические свойства множества **R** действительных чисел; аксиома полноты множества **R**. Действия над действительными числами, принцип Архимеда. Основные принципы полноты множества **R:** существование точной верхней (нижней) грани числового множества, принцип вложенных отрезков, дедекиндово сечение, лемма о конечном покрытии.

Теория пределов: предел числовой последовательности; основные свойства и признаки существования предела; предельные точки множества и теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности; предел монотонной последовательности; число "***e***", верхний и нижний пределы; критерий Коши существования предела. Топология на **R**; предел функции в точке; свойства пределов; бесконечно малые и бесконечно большие функции и последовательности; предел отношения синуса бесконечно малого аргумента к аргументу; общая теория предела; предел функции по базису фильтра (по базе); основные свойства предела; критерий Коши существования предела; сравнение поведения функций на базе; символы "**o**", "**O**", "~".

*Итерационные последовательности; простейшая форма принципа неподвижной точки для сжимающего отображения отрезка, итерационный метод решения функциональных уравнений.

Непрерывные функции: локальные свойства непрерывных функций; непрерывность функции от функции; точка разрыва; ограниченность функции, непрерывной на отрезке; существование наибольшего и наименьшего значений; прохождение через все промежуточные значения; равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке; монотонные функции, существование и непрерывность обратной функции, непрерывность элементарных функций.

Дифференциалы и производные: дифференцируемость функции в точке; производная в точке, дифференциал и их геометрический смысл; механический смысл производной; правила дифференцирования; производные и дифференциалы высших порядков; формула Лейбница. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях; локальная формула Тейлора; асимптотические разложения элементарных функций; формула Тейлора с остаточным членом; применение дифференциального исчисления к исследованию функций, признаки постоянства, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, раскрытие неопределенностей; геометрические приложения.

Неопределенный интеграл: первообразная функция, неопределенный интеграл и его основные свойства; таблица формул интегрирования; замена переменной, интегрирование по частям; интегрирование рациональных функций; интегрирование некоторых простейших иррациональных и трансцендентных функций.

Определенный интеграл: задачи, приводящие к понятию определенного интеграла; определенный интеграл Римана; критерий интегрируемости; интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции и ограниченной функции с конечным числом точек разрыва;

свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении; дифференцирование по переменному верхнему пределу; существование первообразной от непрерывной функции; связь определенного интеграла с неопределенным: формула Ньютона-Лейбница; замена переменной; интегрирование по частям; длина дуги и другие геометрические, механические и физические приложения; функции ограниченной вариации; теорема о представлении функции ограниченной вариации и основные свойства; интеграл Стилтьеса. Признаки существования интеграла Стилтьеса и его вычисления.

Функции многих переменных: Евклидово пространство **n** измерений; обзор основных метрических и топологических характеристик точечных множеств евклидова пространства; функции многих переменных, пределы, непрерывность; свойства непрерывных функций; дифференциал и частные производные функции многих переменных; производная по направлению; градиент; достаточное условие дифференцируемости; касательная плоскость и нормаль к поверхности; дифференцирование сложных функций; частные производные высших порядков, свойства смешанных производных; дифференциалы высших порядков; формула Тейлора для функций нескольких независимых переменных; экстремум; отображения $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, их дифференцирование, матрица производной; якобианы; теоремы о неявных функциях; замена переменных; зависимость функций; условный экстремум.

*Локальное обращение дифференцируемого отображения $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ и теорема о неявном отображении; принцип неподвижной точки сжимающего отображения полного метрического пространства.

Числовые ряды: сходимость и сумма числового ряда; критерий Коши; знакопостоянные ряды; сравнение рядов; признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак сходимости; признак Лейбница; абсолютная и условная сходимость; преобразование Абеля и его применение к рядам;

перестановка членов абсолютно сходящегося ряда; теорема Римана; операции над рядами; двойные ряды; понятие о бесконечных произведениях.

Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость; признаки равномерной сходимости; теорема о предельном переходе; теоремы о непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании; степенные ряды, радиус сходимости, формула Коши-Адамара; равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда; почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов; ряд Тейлора; разложение элементарных функций в степенные ряды; оценка с помощью формулы Тейлора погрешности при замене функции многочленом; ряды с комплексными членами; формулы Эйлера; применение рядов к приближенным вычислениям; теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

Несобственные интегралы: интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций; признаки сходимости; интегралы, зависящие от параметра; непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; несобственные интегралы, зависящие от параметра: равномерная сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; применение к вычислению некоторых интегралов; функции, определяемые с помощью интегралов, бета- и гамма-функции Эйлера.

Ряды Фурье: ортогональные системы функций; тригонометрическая система; ряд Фурье; равномерная сходимость ряда Фурье; признаки сходимости ряда Фурье в точке; принцип локализации; минимальное свойство частных сумм ряда Фурье; неравенство Бесселя; достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье; сходимость в среднем; равенство Парсеваля; интеграл Фурье и преобразование Фурье.

Двойной интеграл и интегралы высшей кратности: двойной интеграл, его геометрическая интерпретация и основные свойства; приведение двойного интеграла к повторному; замена переменных в двойном интеграле; понятие об аддитивных функциях области; площадь поверхности; механические и физические приложения двойных интегралов; интегралы высшей кратности; их определение, вычисление и простейшие свойства; несобственные кратные интегралы.

Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности: криволинейные интегралы; формула Грина; интегралы по поверхности; формула Остроградского; элементарная формула Стокса; условия независимости криволинейного интеграла от формы пути.

Элементы теории поля: скалярное поле; векторное поле; поток, расходимость, циркуляция, вихрь; векторная интерпретация формул Остроградского и Стокса; потенциальное поле; векторные линии и векторные трубки; соленоидальное поле; оператор "набла".

*Понятие о дифференциальных формах и интегрирование их по цепям; абстрактная теорема Стокса и получение из нее элементарной формулы Стокса и формулы Гаусса-Остроградского.

Примечание: разделы, помеченные звездочкой, при необходимости могут быть опущены. 810

Специальность 010701 – «Физика»

Квалификация – инженер физик

ЕН.Ф.03 Математический анализ.

Предмет математики. Физические явления как источник математических понятий. Пределы и непрерывность функции. Производная функции. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях. Исследование поведения функций и построение их графиков. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Геометрические приложения дифференциального исчисления. Кратные интегралы. Ряды. Несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра. Ряд и интеграл Фурье. Элементы теории обобщенных функций. 540 часов.

2.РАБОЧИЕ ПРОГРАММЫ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Математический анализ"**

для специальности 010101–«Математика»,010501–«Прикладная математика»

Курс 1, 2 Семестр 1– 4

Лекции 288 час. Экзамен 1– 4 семестр.

Практические (семинарские) занятия 288 час. Зачет 1– 4 семестр.

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа для специальностей: 010101– 234 час.
010501– 240 час.
Всего часов для специальностей: 010101– 810 час.
010501– 816 час.

Составители: В.В.Сельвинский, зам. зав. кафедрой, доцент;
М.Г.Ляпунова, доцент.

Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

Цели и задачи дисциплины, её место в учебном процессе

1. Цель преподавания дисциплины.

Дисциплина "Математический анализ" ставит своей целью ознакомление студентов с фундаментальными понятиями и методами исследования переменных величин посредством анализа бесконечно малых, основы которого составляет теория дифференциального и интегрального исчисления. Объектами изучения являются топологические поля вещественных и комплексных чисел и их различные непрерывные и гладкие отображения /функций/. В терминах этих отображений формулируются как законы природы так и разнообразные процессы, возникающие в технике. Отсюда объективная важность методов математического анализа как средства изучения отображений /функций/.

2. Задачи изучения дисциплины.

В процессе обучения студенты должны прочно усвоить основные понятия и методы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов и бесконечных произведений, теории несобственного интеграла и элементы теории поля; приобрести прочные навыки и умения решения задач по математическому анализу.

3. Место дисциплины в учебном процессе.

Математический анализ тесно связан с дисциплинами "Аналитическая геометрия", "Линейная алгебра и геометрия", "Алгебра", и является базой для дисциплин "Теория функций комплексного переменного", "Функциональный анализ и интегральные уравнения", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения с частными производными", "Теория вероятностей", "Математическая статистика", "Теория случайных процессов", "Вариационное исчисление и методы оптимизации" и других математических дисциплин, а также для многих разделов механики, физики и других естественно-научных и технических дисциплин.

Содержание дисциплины

Наименование разделов (тем), их содержание, объем в часах лекционных занятий.

1.Введение…………………………………………………………...(4 часа)

Предмет математического анализа, краткие исторические сведения. Роль и место математического анализа в системе математического образования и в современном естествознании. Основные сведения о множествах и об исчислении высказываний. Основные логические операции над высказываниями, логическая символика. Необходимые и достаточные, условия. Предикаты и кванторы существования и общности. Отображения множеств и функций.

2.Теория действительных и комплексных чисел………………(10 часов)

Натуральные числа и аксиома Пеано. Аксиома математической индукции. Сравнение натуральных чисел и арифметические операции над числами, их основные свойства. Дроби. Сравнение дробей и арифметические операции над дробями и их свойства. Поле рациональных чисел, его плотность. Поле действительных чисел. Аксиоматическое определение поля действительных чисел. Конструкции поля действительных чисел из поля рациональных чисел. Принцип Архимеда. Принцип непрерывности поля вещественных чисел по Кантору. Несобственные числа. Числовые промежутки. Границы числовых множеств. Существование точной верхней /нижней/ границе числового множества. Дедекиндовы сечения в поле вещественных чисел. Принцип Дедекинда. Плотность действительных чисел, плотность поля вещественных чисел. Измерение отрезков. Числовая прямая. Определение степенной, показательной и логарифмических функций. Поле комплексных чисел и его основные алгебраические свойства. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Эйлера. Извлечение корня из комплексного числа.

3. Теория пределов………………………………………………(16 часов)

Предел числовой последовательности. Определение и основные свойства. Предельные точки множества и последовательности. Частичные пределы последовательности. Верхние и нижние пределы последовательности, их основные свойства. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся последовательности. Предел монотонной последовательности. Число "е" и его иррациональность. Критерии Коши существования предела. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Переход к пределу в неравенствах. Замечательные пределы. Изображение вещественных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность рациональных чисел и несчетность действительных чисел. /Теорема Кантора/. Топологические поля вещественных чисел. Открытые и замкнутые множества, их основные свойства. Внутренность и внешность множеств. Точки прикосновения и предельные точки множеств. Изолированные точки. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Замыкание множества, производное множество. Граничные точки множества, граница множества. Всюду плотные множества, всюду плотность множества рациональных чисел /сепарабельность поля вещественных чисел/. Компактные множества. Теорема Бореля-Лебега о конечных покрытиях компактных множеств. Связные множества.

4.Числовые функции……………………………………………(2 часа)

Способы задания функций. График функций. Неявный и параметрический способы задания функций. Основные элементарные функции и их классификация.

5.Предел функции в точке………………………………………(8 часов)

Различные определения предела функции в точке, их эквивалентность, связь с пределом последовательности. Односторонние пределы функции в точке. Предел сложной функции / замена переменной /. Основные свойства предела функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними и пределом функции. Предел монотонных функций. Критерий Коши существования предела функции. Два замечательных предела. Базовые пределы. Асимптотическое сравнение функций. Сравнение функции. / Символы "о" - малое и "О" - большое/. Итерационные последовательности и простейшие теоремы о принципе неподвижной точки для сжимающего отображения отрезка. Итерационный метод решения простейших функциональных уравнений.

6.Непрерывные функции…………………………………………(8 часов)

Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрывов функции и их классификация. Односторонняя непрерывность функции в точке. Общие свойства непрерывных функций в точке. Непрерывность сложных функций. Свойства непрерывных функций на компактах множествах /Теоремы Вейерштрасса/, Теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции непрерывной на компакте. Монотонные функции. Существование и непрерывность обратной функции. Непрерывность элементарных функций.

7.Дифференциальное исчисление функции одной переменной…(18 час)

Определение производной и дифференциала функции, их геометрический и физический смысл. Дифференцируемость функции в точке. Основные свойства операций дифференцирования /Правило дифференцирования/. Производная обратной функции. Производная и дифференциал сложной функции, инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы основных элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения. Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя. Формула Тейлора /Маклорена/ и ее остаточные члены в различных видах. Понятие числового ряда и его суммы. Ряд Тейлора /Маклорена/. Формулы и ряды Тейлора /Маклорена/ для основных элементарных функций.

8.Применение дифференциального исчисления к исследованию функции…………………………………………………………...(6 часов)

Признаки знакопостоянства и критерий монотонности функций. Необходимые и достаточные условия экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве. Выпуклость и точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций. Вектор-функция: понятие предела, непрерывность, дифференцируемость.

1 курс, 2 семестр.

9.Неопределенный интеграл…………………………………….(16 часов)

Определение первообразной и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица простейших неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования: метод введения нового аргумента, метод разложения, метод замены переменной и интегрирование по частям. Классы интегрируемых функций. Интегрирование рациональных и некоторых иррациональных функций. Метод Остроградского. Интегрирование дифференциального бинома /случаи Чебышева/. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых трансцендентных функций. Интегральный синус, логарифм.

10. Определенный интеграл…………………………………….(20 часов)

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл Римана. Критерий интегрируемости. Интеграл Римана-Стилтьеса, его основные свойства. Интегрируемость непрерывность ограниченной и монотонной функции. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Интегрируемость сложной функции. Теоремы о среднем значении. Дифференцирование по переменному верхнему пределу и существование первообразной от непрерывной функции. Связь неопределенного интеграла с определенным: формула Ньютона-Лейбница. Замена переменного и интегрирование по частям. Вычисление интеграла Римана-Стилтьеса. Функции ограниченной вариации и их основные свойства. Интеграл Стилтьеса относительно функции ограниченной вариации.

11.Приложение определенного интеграла……………………...(14 часов)

Вычисление площадей, длин дуг, объёмов и площадей поверхностей вращения. Вычисление координат центра тяжестей и моментов плоских фигур. Приложение определенного интеграла к задачам механики, физики.

12. Несобственные интегралы…………………………………...(10 часов)

Понятие несобственного интеграла, его сходимость /расходимость/. Критерий сходимости Коши. Признаки сходимости. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости. Главное значение несобственного интеграла в смысле Коши.

13.Приближенные вычисления определенных интегралов……..(4 часа)

Приближенные вычисления определенных интегралов по формулам, трапеций, парабол /Формула Симпсона/. Оценка погрешностей.

14.Метрическое и евклидово, пространства……………………(8 часов)

Понятие метрического пространства (МП) и его топология. Евклидовы пространства. Предел последовательности в МП и его основные свойства. Сходящиеся последовательности в многомерных евклидовых пространствах. Подпоследовательности последовательности и частичные пределы

/предельные точки/ последовательности. Фундаментальные последовательности /последовательности Коши/. Критерий Коши сходимости последовательности. Полнота МП. Пополнение МП /схема, основные идеи/.

2 курс, 3 семестр

15.Отображения метрических пространств и функции многих переменных……………………………………………………………(8 часов)

Пределы и непрерывность отображений метрических пространств (МП) и их основные свойства. Кратные пределы. Изометрия гомеоморфизма. Свойства непрерывных функций на компактах. Равномерно непрерывные отображения МП.

16.Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных……………………………………………………………… (32 час)

Частные производные и частные дифференциалы. Дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Достаточное условие дифференцируемости. Основные свойства дифференциала. Производная и дифференциал сложной функции. Инвариантность 1-го дифференциала и не инвариантность 2-го дифференциала. Производная по направлению и ее физический смысл. Градиент функции и его экстремальное свойство. Геометрический смысл частного дифференцирования и дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к гладкой поверхности. Касательный вектор и касательное пространство к гладкой кривой и поверхности. Частные производные высших порядков. Коммутативные свойства смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Формула для дифференциала высшего порядка. Формула и ряд Тейлора для функции нескольких независимых переменных. Классы гладких и аналитических функций. Локальный экстремум. Необходимое условие локального экстремума гладкой функции. Линейные отображения конечномерных евклидовых пространств. Матрица линейного отображения. Ранг линейного отображения и его геометрический смысл. Дефект линейного отображения. Норма линейного оператора и ее основные свойства. Обратимые линейные операторы. Линейные нормативные пространства линейных операторов. Нормированная алгебра линейных операторов. Дифференцируемость отображений конечномерных евклидовых пространств. Дифференциал и производная этих отображений. Якобиева матрица производной. Якобиан. Дифференциал сложного отображения. Ранг гладкого отображения. Диффеоморфизмы. Замена переменных. Теорема об обратном отображении. Понятие неявного отображения функции. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости неявного отображения. Теорема о ранге и линеаризации гладкого отображения. Гладкие многообразия и их касательные пространства. Функциональная зависимость. Достаточные условия локального экстремума. Гессиан и теорема Норса. Условный экстремум и его нахождение с помощью функции Лагранжа. Абсолютный экстремум. Принцип неподвижной точки сжимающего отображения полного метрического пространства.

17.Числовые ряды……………………………………………….(8 часов)

Понятие числового ряда и его суммы. Критерий Коши сходимости числового ряда. Признаки сходимости знакопостоянного ряда. Признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, признак Раабе, признак Гаусса, интегральный признак Коши. Признаки сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимость ряда. Признаки Лейбница. Преобразование Абеля и его приложение к рядам. Признаки сходимости ряда Абеля и Дирихле. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана. Операции над рядами. Двойные ряды.

Понятия о бесконечных произведениях и основные их признаки сходимости. Формула Стирлинга.

18.Функциональные последовательности и ряды………………(8 часов)

Области сходимости функциональных последовательностей и рядов. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле о равномерной сходимости функционального ряда. Теоремы о предельном переходе, непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании функциональных последовательностях и рядов.

19.Степенные ряды……………………………………………..(8 часов)

Понятие степенного ряда, интервал и радиус сходимости, его вычисление по формулам Коши-Адамара и Даламбера. Теорема Абеля о сходимости, расходимости степенного ряда. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды. Оценка с помощью формулы Тейлора погрешностей при замене функции многочленом. Ряды с комплексными членами. Формула Эйлера. Применение рядов к приближенным вычислениям определенных интегралов. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами на отрезке. Теорема Стоуна.

20.Несобственные интегралы, зависящие от параметра………(8 часов)

Равномерная сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Критерий равномерной сходимости интеграла Коши и Вейерштрасса. Применение к вычислению некоторых интегралов. Функция, определяемая с помощью интеграла. Гамма и Бетта функции Эйлера и их основные свойства.

2 курс, 4 семестр

21.Краткие интегралы……………………………………………(32 часов)

Задачи, приводящие к понятию кратких интегралов. Определение двойного интервала, его геометрическая интерпретация и основные свойства. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их непрерывность, дифференцирование и интегрируемость по параметру. Повторные интегралы. Приведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Площадь поверхности. Вычисление объемов. Приложение двойных интегралов к задачам механики и физики. Интегралы более высокой кратности, их определения, вычисления и простейшие свойства. Замена переменных. Приложения тройных интегралов к задачам механики и физики. Несобственные кратные интегралы, их сходимость /расходимость/.

22.Криволинейные поверхностные интегралы………………...(24 часов)

Криволинейные интегралы 1-го, 2-го родов, их механический и физический смысл, основные свойства.

Связь криволинейного интеграла с двойным. Формула Грина.

Поверхностные интегралы 1-го, 2-го рода, их физический смысл и основные свойства. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Скалярные и векторные поля. Расходимость (дивергенция), вихрь (ротор), поток, циркуляция. Векторная интерпретация формул Остроградского и Стокса. Потенциальное векторное поле и его потенциал. Условие потенциальности векторного поля. Оператор "Набла" и его использование. Векторные линии и векторные трубки.

Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних форм по цепям. Общая теорема Стокса и её частные случаи: формула Ньютона-Лейбница, Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

23.Ряды Фурье………………………………………………………(16 часов) Ортонормальные системы функций. Тригонометрические полиномы и ряд Фурье. Свойства минимальности частных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Ядро Дирихле и ядро Фейера. Теорема о локонизации. Равномерна сходимость ряда Фурье. Признаки сходимости ряда Фурье в точке. Достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье. Сходимость в среднем. Равенство Ляпунова-Парсеваля. Интегрирование рядов Фурье. Простейшие методы суммирования рядов. Интеграл Фурье. Достаточные условия представления функции интегралом Фурье. Преобразования Фурье.

Практические (семинарские) занятия

№ п/п	Наименование темы	Кол-во часов
1 семестр		
1	Поле действительных комплексных чисел.	8
2	Предел последовательности.	8
3	Предел функции.	10
4	Производная и дифференциал функции одного переменного.	12
5	Теоремы Ролл Лагранжа, Коши о конечных приращениях.	8
6	Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя.	10
7	Формула и ряд Тейлора (Маклорена).	8

8	Применение дифференциального исчисления к исследованию функции, построение графиков.	8
	Итого:	72
2 семестр		
9	Неопределенный интеграл.	12
10	Определенный интеграл.	12
11	Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики и физики.	16
12	Несобственные интегралы.	10
13	Приближенные вычисления определенных интегралов.	12
14	Топология метрических и евклидовых пространств и их непрерывные отображения.	10
	Итого:	72
3 семестр		
15	Предел, непрерывность, дифференцируемость отображений, областей, евклидовых пространств, метрические приложения.	8
16	Неявные функции и отображения.	10
17	Экстремум функции многих переменных.	12
18	Сходимость числовых рядов.	10
19	Функциональные последовательности ряды.	12
20	Разложение функций в степенные ряды.	10
21	Собственные и несобственные интегралы, зависящие от пара метра	6
22	Гамма и бетта функции Эйлера.	4

	Итого:	72
4 семестр		
23	Кратные интегралы и их применение.	12
24	Криволинейные и поверхностные интегралы и их применение.	12
25	Интегральные теоремы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.	12
26	Элементы теории поля.	12
27	Ряды Фурье.	12
28	Преобразования Фурье.	12
	Итого:	72
	Итого за 1-2 курс:	288

Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний студентов

1.Контрольные работы.

Три контрольных работы в семестре (1-4. семестры ; 5,10,15 недели.)

2.Коллоквиумы.

По одному коллоквиуму в семестре; 8 неделя.

3.Индивидуальные задания (РГР).

Количество работ в семестре – 2; недели –2, 9.

4 Рефераты.

Количество рефератов – по одному в семестре.

5 Индивидуальные домашние задания.

Количество заданий – по одному в семестре.

Вопросы к экзамену по математическому анализу в первом семестре

для специальностей 010101; 010501.

1 Множества и операции над ними.

2 Рациональные числа и их свойства.

3 Действительные числа, их аксиоматика.

4 Верхняя и нижняя грани. Теорема о существовании верхней грани.

5 Принцип полноты Дедекинда.

6 Типы точек (внутренняя, граничная, предельная, изолированная точка прикосновения). Открытые и замкнутые множества.

7 Комплексные числа. Действия с комплексными числами.

8 Предел последовательности, геометрическая интерпретация.

9 Свойства предела последовательности (единственность, ограниченность последовательности, имеющей предел).

10 Свойства пределов последовательности, связанные с неравенствами.

11 Бесконечно малые последовательности и их свойства.

12 Теорема о пределе суммы, произведения и частного сходящихся последовательностей.

13 Монотонные последовательности. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности.

14 Число e.

15 Теорема Больцано - Вейерштрасса.

16 Критерий Коши сходимости последовательности.

17 Два определения предела функции в точке и их эквивалентность. Геометрическая интерпретация предела

18 Предел функции на бесконечности. Геометрическая интерпретация.

19 Бесконечно большие функции, их свойства, связь с бесконечно малыми.

20 Арифметические свойства предела функции.

21 Дальнейшие свойства предела функции.

22 Односторонние пределы, связь с пределом функции в точке.

23 Первый и второй замечательные пределы.

24 Пределы, вытекающие из второго замечательного предела.

25 Определение непрерывности функции в точке, геометрическая интерпретация.

26 Предел композиции.

27 Арифметические свойства непрерывных функций.

28 Предельный переход под знаком непрерывной функции, непрерывность композиции.

29 Точки разрыва и их классификация.

30 Промежуточные значения непрерывной функции (первая и вторая теоремы Больцано - Коши).

31 Теорема об ограниченности непрерывной функции.

32 Вторая теорема Вейерштрасса.

33 Определение равномерной непрерывности. Теорема Кантора.

34 Модуль непрерывности, критерий непрерывности.

35 .Непрерывность элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций

36 Непрерывность обратной функции.

37 Непрерывность гиперболических и обратных гиперболических функций

38 Понятие производной, геометрический и механический смысл.

39 Дифференцируемость функции, дифференциал, геометрический и механический смысл дифференциала.

40.Правила дифференцирования.

41.Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно показательной функции.

42.Дифференцирование элементарных функций.

43.Производные и дифференциалы высших порядков.

44.Бином Ньютона.

45.Формула Лейбница.

46.Условия возрастания и убывания функции в точке и на промежутке.

47.Необходимые условия экстремума.

48.Достаточные условия экстремума.

49.Условия выпуклости, точки перегиба.

50.Теорема Ферма, геометрический смысл.

51.Теорема Ролля, геометрический и алгебраический смыслы.

52.Теоремы Лагранжа, Коши, их следствия и геометрический смысл.

53.Теорема Дарбу.

54.Первая и вторая теоремы Лопиталя и их следствия.

55.Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Лагранжа, Коши. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.

56.Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Задачи на оптимизацию.

Упражнения.

1. Найти область определения функции.
2. Доказать, исходя из определения предела:
   а) последовательности на языке «$\varepsilon - n_{\varepsilon}$»;
   б) функции в точке на языке «$\varepsilon - \delta$».
3. Доказать, исходя из определения:
   а) непрерывность функции в точке на языке «$\varepsilon - \delta$», на языке приращений, предела.
   б) равномерную непрерывность.
4. Вычислить пределы, связанные с раскрытием неопределенностей:

$$\left[\frac{0}{0}\right];\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ [\infty - \infty];\ [1^{\infty}];\ [\infty^{0}];\ [0\infty];\ [0^{0}].$$

5. Найти производную:

   а) по определению;

   б) по правилам дифференцирования;

   в) параметрически заданной функции.

6. Найти дифференциал функции.

7. Вычислить приближенно значение функции.

8.Исследовать функцию на экстремум, на выпуклость, вогнутость.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Вопросы к экзамену по математическому анализу во втором семестре для специальностей 010101 ; 010501

1. Восстановление функций по ее производной. Первообразная и неопределенный интеграл, их свойства.
2. Методы интегрирования по частям и подстановкой в неопределенном интеграле.
3. Интегрирование простейших рациональных функций.
4. Интегрирование рациональных функций. Метод Остроградского.
5. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.
6. Интегрирование квадратичных иррациональностей.
7. Интегрирование биномиального дифференциала.
8. Интегрирование тригонометрических функций.
9. Интегрирование гиперболических функций.
10. Интегрирование некоторых трансцендентных функций.
11. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
12. Интегрирование простейших иррациональностей.
13. Эллиптические интегралы.
14. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла.
15. Ограниченность интегрируемой функции.

16. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства.
17. Критерий интегрируемости.
18. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
19. Свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами.
20. Свойства определенного интеграла, связанные с равенствами.
21. Теорема о среднем в интегральном исчислении и ее следствие.
22. Обобщенная теорема о среднем и ее следствие.
23. Интегрирование кусочно-непрерывных функций.
24. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.
25. Интеграл Римана-Стилтьеса.
26. Свойства интеграл Римана-Стилтьеса (теоремы 1-3).
27. Свойства интеграл Римана-Стилтьеса (теоремы 4-5).
28. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
29. Свойства интеграл Римана-Стилтьеса.
30. Интегрирование сложной функции в интеграле Стилтьеса.
31. Интеграл Стилтьеса как предел суммы.
32. Функции с ограниченным изменением.
33. Интеграл Стилтьеса. Дальнейшие свойства интеграла Стилтьеса.
34. Мера открытого плоского множества.
35. Вычисление площадей плоских фигур.
36. Вычисление длин дуг.

37. Дифференциал дуги.
38. Непрерывные кривые.
39. Спрямляемость кривых.
40. Понятие кубируемости и объема тел.
41. Объем тела вращения.
42. Площадь поверхности вращения.

43. Работа переменной силы.

44. Вычисление статических моментов, массы кривой.

45. Центр тяжести кривой.

46. Первая теорема Гульдина.

47. Вычисление массы статических моментов плоской фигуры.

48. Координаты центра тяжести плоской фигуры.

49. Вторая теорема Гульдина.

50. Приближенные методы вычисления определенного интеграла (метод прямоугольников).

51. Приближенные методы вычисления определенного интеграла (метод трапеций).

52. Приближенные методы вычисления определенного интеграла (метод параболических трапеций). Формула Симпсона.

53. Несобственные интегралы первого рода. Формулы интегрального исчисления для несобственного интеграла первого рода.

54. Несобственные интеграла первого рода от неотрицательных функций. Признаки сравнения.

55. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода.

56. Абсолютная сходимость несобственных интегралов.

57. Несобственные интегралы второго рода. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов от неограниченных функций.

58. Несобственные интегралы второго рода от неотрицательных функций на [a,b). Признаки сравнения.

59. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов второго рода.

60. Понятие метрического пространства и его топология. Евклидовы пространства.

61. Предел последовательности в метрическом пространстве и его основные свойства.

62. Сходящиеся последовательности в многомерных пространствах. Фундаментальные последовательности.

63. Критерий Коши сходимости последовательности.

64. Полнота метрических пространств. Пополнение метрического пространства.

Вопросы к экзамену по математическому анализу на третий семестр для специальностей 010101; 010501.

1 .Непрерывность функций n переменных.

2.Касательный вектор и касательное пространство к гладкой кривой.

3.Дифференциалы высших порядков. Нарушение свойства инвариантности их формы.

4.Частные производные и частные дифференциалы, геометрический смысл.

5. Компактные множества в метрических пространствах.
Свойства компактных множеств.

6. Критерий компактности в евклидовом пространстве R^k.

7. Пределы отображений в метрических пространствах.

8. Предел последовательности в метрических пространствах и его свойства. Фундаментальные последовательности.

9. Предел функции двух переменных. Двойные и повторные пределы, их связь.

10. Непрерывные отображения метрических пространств и их свойства.

11. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций нескольких переменных.

12. Равномерная непрерывность непрерывных отображений.

13. Теоремы о функциях, непрерывных на множествах.

14. Дифференцируемость функций n переменных, полный дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции.

15. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.

16. Производная сложной функции нескольких переменных.

17. Дифференциал сложной функции. Инвариантность дифференциала первого порядка.

18. Производная по направлению, ее физический смысл.

19. Градиент функции и его экстремальное свойство.

20. Касательная плоскость и нормаль к гладкой поверхности.

21. Частные производные высших порядков. Коммутативное свойство смешанных производных.

22. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

23. Локальный экстремум. Необходимые и достаточные условия локального экстремума.

24. Критерий знакоопределенности квадратичной формы.

25. Неявные функции, определяемые одним уравнением и их дифференцирование.

26. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

27. Зависимость функций. Достаточные условия зависимости.

28. Функциональные матрицы и их приложения.

29. Замена переменных.

30. Дифференцируемость отображений конечномерных евклидовых пространств.

31. Отображение с неравным нулю якобианом. Теорема об обратном отображении.

32. Интегралы, зависящие от параметров и их непрерывность.

33. Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра.

34. Интегрирование интегралов, зависящих от параметра.

35. Функции Эйлера и их свойства.

36. Числовые ряды: понятие ряда, сходимости, суммы. Критерий Коши сходимости числового ряда.

37. Достаточные признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнения, Даламбера, Коши.

38. Признаки Куммера, Раабе, Гаусса, интегральный признак Коши.

39. Признаки сходимости знакопеременных рядов, признак Лейбница Абсолютная и условная сходимость рядов.

40. Признаки сходимости Дирихле и Абеля. Преобразование Абеля и его применение к рядам.

41. Перестановка членов абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана.

42.Операции над рядами. Бесконечные произведения, их основные признаки
сходимости.

42. Функциональные последовательности и ряды. Область сходимости функциональных последовательностей и рядов. Равномерная сходимость.
Критерий Коши.

44.Признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле о равномерной сходимости
функциональных рядов.

45.Теоремы о предельном переходе, непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

46.Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости, его вычисление по формулам Коши и Даламбера. Теорема Абеля о сходимости и расходимости степенных рядов.

47.Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда.
Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

48. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Оценка с помощью формулы Тейлора погрешности при замене функции многочленом.

49.Применение рядов к вычислению пределов, определенных интегралов, чисел π, е, логарифмов, корней.

50.Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций на отрезке многочленами.

Вопросы к экзамену по математическому анализу на 4 семестр для специальностей 010101; 010501.

1. .Линейные отображения конечномерных евклидовых пространств. Матрица
линейного отображения. Ранг и дефект линейного отображения.
2. Норма линейного оператора и ее основные свойства. Обратимые операторы.
Линейные нормированные пространства линейных операторов. Алгебра линейных операторов. Линейные функционалы.
3. Сжимающие отображения. Принцип неподвижной точки сжимающего отображения полного метрического пространства.
4. Ортонормальные системы функций. Ряды Фурье.
5. Свойство минимальности частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
6. Ядро Дирихле. Теорема о локализации.
7. Равномерная сходимость ряда Фурье. Признаки сходимости ряда Фурье в точке.
8. Достаточные условия разложимости функций в тригонометрический ряд.
9. Сходимость в среднем ряда Фурье. Интегрирование рядов Фурье.
10. Простейшие методы суммирования рядов.
11. Интеграл Фурье. Достаточные условия представления функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье.
12. Поверхностные интегралы первого и второго родов, их физический смысл, основные свойства и вычисление.

13. Формула Остроградского - Гаусса, вывод, векторная интерпретация.

14. Формула Стокса, вывод, векторная интерпретация.

15. Скалярные и векторные поля. Векторные линии и векторные трубки. Дивергенция (расходимость), ротор (вихрь), поток, циркуляция.

16. Потенциальное векторное поле и его потенциал, условие потенциальности векторного поля.

17. Свертка функций и ее свойства.

18. Понятие объема в n-мерном пространстве. Множества меры нуль.

19. Квадрируемые и кубируемые множества.

20. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

21. Определение двойного интеграла для прямоугольника и его существование.

22. Определение и существование двойного интеграла для произвольной области.

23. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области и его эквивалентность первому определению.

24. Основные свойства двойного интеграла.

25. Повторные интегралы. Приведение двойного интеграла к повторному.

26. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

27. Площадь поверхности. Вычисление площади поверхности и объемов тел с помощью двойного интеграла.

28. Приложения двойного интеграла к задачам механики.

29. Интегралы более высокой кратности, определение, свойства и вычисление.

30. Замена переменных в n-кратном интеграле

31. Кратные несобственные интегралы. Условия сходимости для неотрицательных функций.

32. Несобственные кратные интегралы от знакопеременных функций. Абсолютная сходимость.

33. Гладкие кривые линии и их длина.

34. Криволинейные интегралы первого рода, их физический смысл и свойства. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

35. Работа переменной силы. Криволинейные интегралы второго рода, их свойства.

36. Вычисление криволинейного интеграла второго рода посредством определенного.

37. Связь криволинейного интеграла с двойным. Формула Грина – Остроградского.

38. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Вопросы к зачету на первый семестр
для специальностей 010101; 010501

1.

1. Определение и свойства действительного числа.

2. Определение предела последовательности и предела функции в точке и на бесконечности, их геометрический смысл.

3. Определение непрерывности и равномерной непрерывности.

4. Свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке.

5. Замечательные пределы и их следствия.

6. Определение производной и дифференциала, их геометрический и механический смыслы.

7. Правила дифференцирования.

8. Условия монотонности, экстремумов, выпуклости, точек перегиба.

9. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Дарбу, Лопиталя.

10. Формула Тейлора.

Упражнения

1. Доказать, исходя из определения:

а) на языке $\varepsilon - n_{\varepsilon}$, существование предела последовательности,

б) на языке $\varepsilon - \delta$, существование предела функции,

в) непрерывность функции в точке,

г) равномерную непрерывность функции на множестве E.

2. Найти производную, дифференциал:

а) по определению,

б) по правилам дифференцирования.

3. Найти пределы, связанные с раскрытием неопределенностей, применяя:

а) элементарные преобразования,

б) таблицу эквивалентностей,

в) правила Лопиталя.

4. Провести полное исследование функции и построить график.

5. Разложить функцию по формуле Тейлора

Вопросы к зачету на второй семестр
для специальностей : 010101;010501

1. Определение неопределенного интеграла.
2. Методы интегрирования.
3. Интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических функций.
4. Определение определенного интеграла и его свойства.
5. Классы интегрируемых функций.
6. Интеграл Римана-Стилтьеса, интеграл Стилтьеса и их свойства.
7. Приложения определенного интеграла к вычислению геометрических и физических величин.

8. Приближенные методы вычисления определенных интегралов.

9. Несобственные интегралы первого и второго родов, их признаки сходимости.

10. Сходящиеся последовательности в метрических пространствах. Полные метрические пространства.

Упражнения

1. Вычисление неопределенного интеграла по частям и подстановкой.
2. Интегрирование рациональных функций.
3. Интегрирование квадратичных иррациональностей.
4. Интегрирование биномиального дифференциала.
5. Вычисление величин:

а) площади плоской фигуры,

б) длины дуги кривой,

в) объема тела вращения,

г) площади поверхности вращения,

д) работы,

е) статических моментов,

ж) координат центра масс кривой и плоской фигуры.

Вопросы к зачету на третий семестр для специальностей: 010101; 010501

1. Предел функции *n*- переменных. Двойные и повторные пределы для функции двух переменных.
2. Частные производные и частные дифференциалы, геометрический смысл.

3. Производная и дифференциал сложной функции n переменных. Инвариантность дифференциала первого порядка, нарушение инвариантности дифференциалов высших порядков.

4. Производная по направлению, градиент.

5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

6. Локальный и условный экстремумы.

7. Замена переменных.

8. .Числовые ряды. Достаточные признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнения, Даламбера, Коши, Куммера, Раабе, Гаусса, интегральный.

9. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле.

10. Функциональные и степенные ряды, признаки равномерной сходимости.

11. Интегрирование и дифференцирование функциональных и степенных рядов.

12. .Ряд Тейлора.

13. Вычисление чисел *л,е*, логарифмов.

Упражнения

1. Нахождение:

а) пределов функции нескольких переменных,

б) частных производных и дифференциалов,

в) производной по направлению и градиента,

г) касательной плоскости и нормали к поверхности,

д) локального и условного экстремумов функции нескольких переменных.

1. Исследование на сходимость числовых рядов по определению и с помощью достаточных признаков.

2. Преобразование Абеля и его применение к рядам.

3. Исследование на равномерную сходимость функциональных и степенных рядов.

4. Оценка с помощью формулы Тейлора погрешности при замене функции многочленом.

Вопросы к зачету на четвертый семестр
для специальностей: 010101, 010501

1. Норма линейного оператора и линейного функционала.
2. Принцип неподвижной точки.
3. Ряд Фурье. Разложение функций в ряд Фурье.
4. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье и свертка функций.
5. Двойные, тройные и n- кратные интегралы.
6. Криволинейные и поверхностные интегралы.
7. Приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов к вычислению геометрических и физических величин.

Упражнения

1. Нахождение нормы линейных операторов и функционалов.
2. Применение принципа неподвижной точки к решению дифференциальных и интегральных уравнений.
3. Разложение функции в ряд Фурье.
4. Вычисление двойных, тройных, криволинейных, поверхностных интегралов.
5. Приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов к вычислению объемов тел, площади поверхности, работы, координат центра масс тел, потока векторного поля непосредственно и по формуле Остроградского- Гаусса, циркуляции векторного поля непосредственно и по формуле Стокса.

Учебно-методические материалы по дисциплине

Основная литература:

1. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Основы математического анализа.: Учеб. в 2-х ч. - М.: Наука, Физматлит, 1998.
2. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. Учеб. пособие для ВУЗов.- М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Изд. АСТ", 2004.-558 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа.: Учеб. в 2-х т.

   -2-е изд., перераб. и доп.- Висагинас: Alfa, 1998.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа.: Учеб.для вузов.-5-е изд.,перераб.-М.: Физматлит, 2000.-592 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х ч.- СПб.: Лань, 1999.-441 с., 464 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т.-СПб.:Лань, 1997.

Дополнительная литература:

1. Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие.-5-е изд., испр.-М.: Физматлит, 2002.-480 с.
2. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов, -М.: Наука, 1997.-416 с.
3. Долгих В.Я., Максименко В.Н., Сажин И.А. Математический анализ в примерах и задачах.: Изд. Новосиб. гос. тех. ун-та, 2002.-139 с.
4. Ляпунова М.Г. Ряды. Учеб.-метод. пособие.: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2004.-135 с
5. Шипачев В.С. Математический анализ. -М.: Высш. шк., 2002.-176 с.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Математический анализ"**

для специальности 010701–"Физика"

Курс 1,2 Семестр 1–3

Лекции 180 (72+72+36) час. Экзамен 1–3 семестр.

Практические (семинарские) занятия 180 (72+54+54) час. Зачет (нет).

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 180 час.

.

Всего 540 час.

Составитель М.Г.Ляпунова, доцент.

Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

Цели и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

1. Цель преподавания учебной дисциплины.

Целью преподавания математического анализа является создание фундамента для успешного овладения методами математической физики, изучения разделов курса "Теоретическая физика", чтения научной литературы, а в конечном счете - создание основы высокой квалификации молодых специалистов.

2. Задачи изучения дисциплины.

Основная задача состоит в том, чтобы обеспечить глубокую математическую подготовку студентов физической специальности.

3. Перечень дисциплины с указанием разделов, усвоение которых студентами необходимо для изучения данной дисциплины.

Аналитическая геометрия и линейная алгебра, все её разделы.

4. Перечень основных изменений и навыков, приобретаемых студентами при изучении дисциплины.

Студенты должны хорошо усвоить основные математические понятия, в совершенстве владеть техникой дифференцирования и интегрирования, уметь применять полученные знания в изучении физики.

Содержание дисциплины.

1. Наименование разделов (тем), их содержание, объём в часах лекционных занятий.

I семестр. (72 часа)

1.1. Введение - 2 часа

Предмет математики. Физические явления как один из источников математических понятий. Роль вычислительной математики и математического эксперимента в физике. Основные математические понятия, связанные с изучением функций.

1.2. Теория пределов - 28 часов

Основные сведения о вещественных числах. Точные грани числовых множеств - 6 часов.

Числовые последовательности. Основные теоремы о пределах. Предел монотонной последовательности - 4 часа.

Число *e*. Рекуррентные формулы и их применение в приближенных вычислениях. Предельные точки последовательности. Общий критерий сходимости - 8 часов.

Предел функции. Критерий Коши существования предела функции. Сравнение бесконечно-малых - 4 часа.

Непрерывность функции. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы: $lim\ (sinx/x)$; $lim\ (1+x)^{1/x}$ -6 час..

1.3. Производная и неопределенный интеграл - 18 часов.

Производная. Основные правила и формулы дифференцирования - 2час

Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная функции, заданной параметрически. Производные вектор-функции - 8 часов.

Неопределенный интеграл. Основные методы и формулы интегрирования. Интегрирование в элементарных функциях -10 часов.

1.4. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях - 12 часов.

Точные грани функций. Основные теоремы о непрерывных функциях. Равномерная непрерывность - 4 часа.

Возрастание и убывание функции в точке. Теорема о нуле производной. Формула конечных приращений. Основная теорема о неопределенном интеграле. Правила раскрытия неопределенностей - 4 часа.

Приближенное решение уравнений методами вилки, итераций, хорд и касательных. Оценка скорости сходимости этих методов - 4 часа.

1.5. Формула Тейлора - 4 часа.

Вывод формулы Тейлора. Различные виды остаточного члена в формуле Тейлора - 2 часа.

Применение формулы Тейлора в приближенных вычислениях - 2 часа.

1.6. Исследование поведения функции и построение графиков - 8 часов.

Условия монотонности функции. Экстремум. Направление выпуклости, точки перегиба - 4 часа.

Асимптоты. Построение графика функции. Построение кривых, заданных параметрически - 4 часа.

II семестр. (72 часа)

1.7. Определенный интеграл - 12 часов.

Понятие определенного интеграла, его свойства и существование для непрерывных и кусочно-непрерывных функций - 4 часа.

Оценки интегралов. Формулы среднего значения, вязь с неопределенным интегралом - 4 часа.

Геометрические и физические приложения. Приближенное вычисление интегралов и оценка погрешностей - 4 часа.

1.8. Функции нескольких переменных - 16 часов.

Определение функции нескольких переменных, её предел и непрерывность по совокупности аргументов - 2 часа.

Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функции - 2 часа.

Касательная плоскость и нормаль. Дифференцируемость сложной функции. Замена переменных. Производная по направлению. Градиент. -4ч.
Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. - 4 ч.

Экстремум функции нескольких переменных. Неявные функции. Зависимость функций. Условный экстремум. Алгоритм поиска экстремумов функций нескольких переменных - 4 часа.

1.9. Геометрические приложения дифференциального исчисления-12 час.

Понятие об особых точках плоских кривых. Касание кривых. Соприкасающая окружность. Огибающая семейства кривых. Кривизна плоской кривой - 4 часа.

Внутренние координаты на поверхности. Первая квадратичная форма. Измерение длин, углов, площадей на поверхности. Индикатриса кривизн. Вторая квадратичная форма. Главные кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности - 8 часов.

1.10. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра - 8 часов.

Несобственные интегралы и признаки сходимости - 4 часа.

Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Непрерывность интегралов, зависящих от параметра. Эйлеровы интегралы. Формула Стирлинга - 4 часа.

1.11. Кратные интегралы, криволинейные и интегралы по поверхности - 24 часа.

Двойной интеграл и его основные свойства - 2 часа.

Вычисление двойных интегралов - 2 часа.

Замена переменных. Геометрические и физические приложения - 4 часа
Тройные и n-кратные интегралы, свойства и способы вычисления- 4 часа
Несобственные кратные интегралы. Приближенные методы вычисления кратных интегралов - 4 часа.

Криволинейные интегралы. Интегралы по поверхности - 8 часов.

III семестр. (36 часов)

1.12. Ряды - 18 часов.

Числовые ряды - 4 часа.

Абсолютная и условная сходимости - 4 часа.

Основные признаки сходимости. Действия над рядами - 4 часа.

Функциональные ряды. Равномерная сходимость и сходимость в среднем. Критерий равномерной сходимости - 4 часа.

Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов - 2 часа.

1.13. Ряд и интеграл Фурье - 18 часов.

Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье - 4 часа.

Ряд Фурье по ортогональной системе элементов гильбертова пространства. Неравенство Бесселя. -2 часа.

Полные и замкнутые системы. Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Сходимость и равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье - 4 часа.

Влияние гладкости функции на порядок её коэффициентов Фурье. Почленное дифференцирование ряда Фурье - 2 часа.

Комплексная форма ряда Фурье. Понятие о кратных рядах Фурье. Интеграл Фурье и его комплексная форма - 4 часа.

Методы приближенного суммирования рядов Фурье. Понятие обобщенной функции - 2 часа.

2. Практические (семинарские) занятия, наименование тем, их содержание и объём в часах.

I семестр. (72 часа)

2.1. Основные математические понятия, связанные с изучением функций - 2 часа.

2.2. Теория пределов

Вещественные числа. Точные грани числовых множеств. Числовые последовательности - 4 часа.

Предел последовательности. Число *e*. Рекурентные формулы и их применение в приближенных вычислениях. Общий критерий сходимости - 6 час.

Предел функции. Критерий Коши. Сравнение бесконечно-малых. Непрерывность функции. Точки разрыва. Замечательные пределы - 8 часов.

2.3. Производная и неопределенный интеграл - 12 часов.

Производная. Техника дифференцирования - 6 часов.

Неопределенный интеграл. Техника интегрирования - 6 часов.

2.4. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях - 10 часов..

Точные грани функций. Равномерная непрерывность функции - 4 часа.

Возрастание и убывание функции в точке. Формула конечных приращений. Правила раскрытия неопределенностей - 4 часа.

Приближенное решение уравнений методами вилки, итераций, хорд и касательных - 2 часа.

2.5. Формула Тейлора - 4 часа.

2.6. Исследование поведения функций и построение графиков - 8 часов.

Монотонность и экстремум функции. Направление выпуклости, Точки перегиба - 4 часа.

Асимптоты. Построение графика функции. Построение кривых, заданных параметрически - 4 часа.

II семестр. (54 часа)

2.7.Определенный интеграл - 10 часов.

Техника нахождения определенных интегралов, оценки интегралов, формулы среднего значения - 4 часа.

Геометрические и физические приложения – 4 часа.

Приближенное вычисление интегралов и оценка погрешностей - 2 часа.

2.8.Функции нескольких переменных - 12 часов.

Область определения функции, предел и непрерывность по совокупности аргументов - 2 часа.

Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функции. Замена переменных - 4 часа.

Производная по направлению и градиент - 2 часа.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора - 2 часа.

Экстремум функции нескольких переменных, условны экстремум - 2 ч.

2.9.Геометрические приложения дифференциального исчисления - 6 час.

Кривизна и радиус кривизны плоско кривой - 2 часа.

Внутренние координаты на поверхности. Первая и вторая квадратичные формы. Главные кривизны, полная и средняя кривизна поверхности -4 ч.

2.10.Несобственные интегралы и интегралы зависящие от параметра

Несобственные интегралы и признаки сходимости - 4 часа.

Непрерывность интегралов, зависящих от параметра. Эйлеровы интегралы. Формула Стирлинга - 2 часа.

2.11.Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы - 20 час.

Вычисление двойных интегралов, их геометрические и физические приложения - 6 часов.

Тройные интегралы и их приложения - 2 часа.

Криволинейные интегралы и поверхностные интегралы - 4 часа.

Поверхностные интегралы. Приложения. Формулы Остроградского, Гаусса, Стокса - 8 часов.

III семестр. (54 часа)

2.12. Ряды – 26 часов.

Числовые ряды, их исследование на сходимость, действия над рядами - 12 часов.

Функциональные ряды, область сходимости, критерий равномерной сходимости - 8 часов.

Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов - 6 часов.

2.13. Ряд и интеграл Фурье - 28 часов.

Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье - 6 часов.

Ряд Фурье по ортогональной системе элементов гильбертова пространства. неравенство Бесселя - 4 часа.

Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Сходимость и равномерная сходимость ряда Фурье - 4 часа.

Почленное дифференцирование ряда Фурье - 4 часа.

Комплексная форма ряда Фурье. Интеграл Фурье и его - 4 часа.

Методы приближенного суммирования рядов Фурье - 6 часов.

Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний студентов

1. Контрольные работы:

1-я работа - 6 неделя текущего семестра

2-я работа - 16 неделя текущего семестра

2. Коллоквиумы:

1-й колл.- 7 неделя текущего семестра

2-й колл.- 15 неделя текущего семестра

3. Расчетно-графические работы: одна работа в семестр.

4. Рефераты: один реферат в семестр.

Учебно-методические материалы по дисциплине

Основная литература:

1. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Основы математического анализа.: Учеб. в 2-х ч. - М.: Наука, Физматлит, 1998.

2. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. Учеб. пособие для ВУЗов.- М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Изд. АСТ", 2004.-558 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа.: Учеб. в 2-х т.

-2-е изд., перераб. и доп.- Висагинас: Alfa, 1998.

4. Никольский С.М. Курс математического анализа.: Учеб.для вузов.-5-е изд.,перераб.-М.: Физматлит, 2000.-592 с.

5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х ч.- СПб.: Лань, 1999.-441 с., 464 с.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т.-СПб.:Лань, 1997.

Дополнительная литература:

1. Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие.-5-е изд., испр.-М.: Физматлит, 2002.-480 с.

2. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов, -М.: Наука, 1997.-416 с.

3. Долгих В.Я., Максименко В.Н., Сажин И.А. Математический анализ в примерах и задачах.: Изд. Новосиб. гос. тех. ун-та, 2002.-139 с.

4. Ляпунова М.Г. Ряды. Учеб.-метод. пособие.: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2004.-135 с

5. Шипачев В.С. Математический анализ. -М.: Высш. шк., 2002.-176 с.

3. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
для специальностей 010101 – математика
010501 – прикладная математика и информатика
(240 часов)

I семестр	010101	010501
1.Реферат по теме "Роль и место математического анализа в системе математического образования и в современном естествознании (2 нед.)	4 час	4 час
2. Индивидуальное задание (РГР) по теме "Производная и дифференциал" (9 нед.)	6 час	6 час
3. Подготовка к коллоквиуму по теме "Введение в анализ" (12 нед.)	6 час	6 час
4. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий (еженед.)	30 ч.	30 ч.
5. Подготовка к экзамену	14 ч.	16 ч.
Итого:	60 ч.	62 ч.
II семестр		
1. Индивидуальное задание (РГР) по теме "Приложения определенного интеграла" (9 нед.)	6 час	6 час
2. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий (еженед.)	30 ч.	30 ч.
3. Подготовка к коллоквиуму по теме "Определенный и неопределенный интегралы" (12 нед.)	6 час	6 час
4. Подготовка к экзамену	16 ч.	18 ч.
Итого:	58 ч.	60 ч.
III семестр		
1. Индивидуальное задание (РГР) по теме "Ряды" (9 нед.)	6 час	6 час
2. Подготовка к коллоквиуму по теме "Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных" (6 нед.)	6 час	6 час
3. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий (еженед.)	30 ч.	30 ч.
4. Подготовка к экзамену	16 ч.	18 ч.
Итого:	58 ч.	60 ч.
IV семестр		
1. Индивидуальное задание (РГР) по теме "Кратные и криволинейные интегралы" (6 нед.)	6 час	6 час
2. Подготовка к коллоквиуму по теме " Кратные и криволинейные интегралы " (9 нед.)	6 час	6 час
3. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий (еженед.)	30 ч.	30 ч.
4. Подготовка к экзамену	16 ч.	16 ч.
Итого:	58 ч.	58 ч.

График самостоятельной работы студентов
для специальности 010701 – физика
(180 часов)

Iсеместр

72 час

1. Реферат по теме "Физические явления как один из источников математических понятий 4 час
2. Расчетно- графическая работа по теме "Производная и неопределенный интеграл 6 час
3. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий 34 час
4. Подготовка к коллоквиуму 6 час
5.Подготовка к экзамену 22 час

II семестр

1. Расчетно-графическая работа по теме "Кратные и поверхностные интегралы 8 час
2. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий 34 час
3.Подготовка к коллоквиуму 6 час
4. Подготовка к экзамену 24 час

III семестр

1. Расчетно-графическая работа по теме "Ряды" 6 час
2. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий 12 час
3. Подготовка докладов по теме "Ряды Фурье" 6 час
4. Подготовка к экзамену 12 час

3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

План – конспект лекций по математическому анализу

1- ый семестр

Лекция 1, 2

Тема. Предмет математического анализа. Система обозначений и простейшие понятия. Понятия теории множеств.

Математический анализ – часть математики, в которой функции и их обобщения исследуются методом бесконечно малых.

Математический анализ охватывает большую часть математики, в него входят: дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, теория функций комплексного переменного, теория дифференциальных, интегральных уравнений, теория функций действительного переменного, дифференциальная геометрия, вариационные исчисления, функциональный анализ и некоторые другие математические дисциплины.

Основатели математического анализа: Исаак Ньютон, Жозеф Луи Лагранж, Готфрид Вильгельм Лейбниц, Леонард Эйлер и другие.

База математического анализ была разработана в начале XIX века.

Система обозначений и простейшие понятия:

P, Q, R – некоторые высказывания.

$P \Rightarrow Q$ - из высказывания P следует Q.

$P \Leftrightarrow Q$ – Высказывание P имеет место тогда и только тогда, когда имеет место высказывание Q.

$\vee$: P, Q $\to$ $P \vee Q$ – дизъюнкция, P или Q имеет место, справедливо или P или Q.

$\wedge$: P, Q$\to$$P \wedge Q$ – приводит к образованию нового высказывания (конъюнкция) справедливо и P, и Q одновременно.

P$\to$ $\rceil P, \overline{P}$ – отрицание (унитарная операция).

Понятия теории множеств

Множество – совокупность каких-либо объектов, объединенных общим признаком. Обозначения:

A, B, C – множество;

a, b, c – элементы множества;

$a \in A$ - a является элементом множества A;

$A \subset B$ - включение – A включено в B или A является подмножеством B.

Операции над множествами:

1. $A, B \xrightarrow{\bigcup} A \bigcup B$

$$a \in A \bigcup B \Leftrightarrow (a \in A) \vee (a \in B)$$

2. $A, B \xrightarrow{\bigcap} A \bigcap B$

$$a \in A \bigcap B \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B)$$

3. Операция вычитания

$$A, B \xrightarrow{\setminus} A \setminus B$$

$$a \in A \setminus B \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \notin B)$$

4. Симметрическая разность

$$A, B \xrightarrow{\Delta} A \Delta B$$

$$(a \in A \Delta B) \Leftrightarrow (a \in A \setminus B) \vee (a \in B \setminus A)$$

5. U – универсум – универсальное множество, т.е. множество всех множеств (подмножеств).

Равенство двух множеств означает, что каждый элемент множества стоящего слева от знака равенства является элементом множества стоящего справа и наоборот.

$$A = B \xleftrightarrow{def} (\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\forall b : b \in B \Rightarrow b \in A)$$

Definition - определение.

$$U = R = (-\infty, \infty)$$

Q – множество рациональных чисел

$C_R Q$ – множество иррациональных чисел

Формулы двойственности де Моргана

1. $C(A \bigcup B) = CA \bigcap CB$

2. $C(A \bigcap B) = CA \bigcup CB$

Если U – универсум, то $P(U)$ - множество всех подмножеств универсума.

$U = \{a, b, c\}$

$P(U) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, U\}$

Одной из характеристик множества U является мощность множества, которая определяется его кардинальным числом (card U); для конечного множества card U равно количеству элементов множества.

Пусть U – конечное множество $cardU = n \Rightarrow card\ P(U) = 2^n$.

Выборки, которые отличаются только составом элементов, но не порядком расположения в выборке называются сочетанием.

C_m^k - число сочетаний;

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Очевидно, что $C_m^k = C_m^{m-k}$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + .. + C_n^n b^n$$

$$a = b = 1 \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + .. + C_n^n \Rightarrow card\ P(U) = 2^n$$

Для бесконечных множеств

$$card\ P(U) = 2^{cardU}.$$

Лекция 3

Тема. Натуральные числа. Аксиоматическое определение множества натуральных чисел. Аксиома полной математической индукции.

Некоторое множество N – множество натуральных чисел, если оно обладает следующими свойствами (подчиняется аксиомам):

а) некоторый элемент 1 (единица), $1 \in N$;

б) $\forall n \in N$ определен следующий за ним элемент n', n предшествует n';

в) 1 не предшествует никакое число, т.е. не существует n, такой что $n'=1$;

г) $n' = m' \Leftrightarrow n = m$;

д) Аксиома полной индукции. Если $M \subset N$ и N обладают свойствами

$$M : \{1 \in M\} \wedge \{m \in M \Rightarrow m' \in M\} \Rightarrow M = N$$

По определению $n+1 := n'$.

Замечание. На основе этой аксиомы формулируется принцип доказательства утверждения зависящего от натурального числа *n* – метод полной математической индукции.

Пусть $P(m)$ - утверждение, содержащее натуральное число *m*.

1. Если это утверждение истинно при $m=1$;

2. Из предположения, что $P(m)$ - истинно при *m* следует, что $P(m)$ - истинно при $(m+1)$;

тогда из 1), 2) $\Rightarrow$ $P(m)$ истинно для $\forall m \in N$.

С помощью этого метода определяются операции сложения и умножения для натуральных чисел:

$$n+1 := n'; \quad n+(m+1) := (n+m)+1,$$

в частности, $n+2 = (n+1)+1 = n'+1 = (n')'$;

$$n \cdot 1 := n; \quad n \cdot (m+1) := n \cdot m + n,$$

в частности, $n \cdot 2 = n \cdot 1 + n$.

$X \times Y$ - декартово произведение множеств X, Y;

$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X,\ y \in Y \}$.

Для операций $+, \cdot$:

$$+ : N \times N \xrightarrow{+} N \qquad p = m + n$$

$$\cdot : \ N * N \xrightarrow{\cdot} N \qquad l = m \cdot n$$

Свойства этих операций

I. 1) $m + n = n + m$ – коммутативность сложения;

2) $(n + m) + k = n + (m + k)$ – ассоциативность сложения.

II. 1) $n \cdot m = m \cdot n$ – коммутативность умножения;

2) $n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$ – ассоциативность умножения;

3) $n \cdot 1 = n$ – свойство единицы.

III. $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$ – дистрибутивность.

Отношение порядка на множестве N : $\quad n > m \Leftrightarrow \exists k \in N : n = m + k$.

Свойства отношения порядка

1) $\forall n, m \in N \ \ (n = m) \vee (n > m) \vee (n < m)$

2) $n < m \Rightarrow \forall k \in N \quad n + k < m + k$

3) $n < m \Rightarrow \forall k \in N \ \ n \cdot k < m \cdot k$.

Операции вычитания и деления не являются замкнутыми в множестве натуральных чисел – это заставляет искать множество более широкое.

Вводится число «0»: $N_0 = N \bigcup \{ 0 \}$.

Операции для «0»: $\forall n \in N \quad n + 0 = 0 + n = n; \quad n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0; \quad 0 < n$.

Вводится дробь: $\forall n, m \in N \quad (n, m) \to \frac{n}{m}$.

Операции с дробями:

$\frac{n}{1} = n$ – соответствие дробей и натуральных чисел;

$\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} = \frac{n \cdot m_1 + n_1 \cdot m}{m \cdot m_1}$ – сложение дробей;

$\frac{n}{m} \cdot \frac{n_1}{m_1} = \frac{n \cdot n_1}{m \cdot m_1}$ – умножение дробей;

$0 + \frac{n}{m} = \frac{n}{m} + 0 = \frac{n}{m}$ – сложение с нулем;

$0 \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m} \cdot 0 = 0$ – умножение с нулем;

$\frac{n}{m} < \frac{n_1}{m_1} \Leftrightarrow n \cdot m_1 > m \cdot n_1$ – отношение порядка для дробей;

$\frac{0}{n} := 0$ – соответствие нулей.

D – множество всех дробей: $D = \{ \frac{m}{n} : m \in N_0, n \in N \}$.

$\frac{n}{m} = \frac{n_1}{m_1} \Leftrightarrow n * m_1 = m * n_1$ – условие эквивалентности (равенства) дробей.

Это условие разбивает все множество D на попарно не пересекающиеся классы равных между собой дробей. Операции сложения и умножения над конкретными дробями, приводят к равной дроби, если слагаемые или множители заменить на равные. Заметим, если натуральные числа складывать или умножать по правилу сложения или умножения дробей, то результат не меняется.

Отношение эквивалентности: $N \sim D_1 = \{\frac{n}{1} : n \in N\}$ – выражает взаимно однозначное соответствие, $n \leftrightarrow \frac{n}{1}$. В этом случае говорят, что множества N и D_1 изоморфны.

Пусть $X \notin \varnothing$ на котором задано некоторое бинарное отношение «~», т. е. для любой пары элементов множества X это отношение либо истинно, либо ложно. Это отношение называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:

1) $a \sim a \quad \forall a \in X$ - рефлексивность;

2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in X$ - симметричность;

3) $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad \forall a, b, c \in X$ - транзитивность.

Лекция 4, 5

Тема. Поле рациональных чисел. Аксиома Архимеда.

Поле рациональных чисел

$D = \{\frac{p}{q} : p \in N_0, q \in N\}$ - множество дробей.

Геометрически две эквивалентные дроби $\frac{n}{m}$ и $\frac{n_1}{m_1}$ выражают длину одного и того же отрезка, выраженную в различных масштабных долях $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{m_1}$.

Определение. Неотрицательным рациональным числом r назовем класс эквивалентности

$$r = \{ \frac{n}{m} : \frac{n}{m} \sim \frac{n_1}{m_1}; \frac{n}{m}, \frac{n_1}{m_1} \in D \} = \widehat{\frac{n}{m}}.$$

Q_+ - множество всех неотрицательных рациональных чисел;

полагают $\frac{n}{m} = \frac{n_1}{m_1} \Leftrightarrow \frac{n}{m} \sim \frac{n_1}{m_1}$. Определяют $0 \in Q_+ : 0 = \widehat{\frac{0}{n}}$;

$$\widehat{\frac{n}{m}} + \widehat{\frac{n_1}{m_1}} := \widehat{\frac{n \cdot m_1 + m \cdot n_1}{m \cdot m_1}}$$ – сложение рациональных чисел;

$$\widehat{\frac{n}{m}} \cdot \widehat{\frac{n_1}{m_1}} = \widehat{\frac{n \cdot n_1}{m \cdot m_1}}$$ - умножение рациональных чисел.

Эти операции обладают теми же свойствами, как и в множестве натуральных чисел.

Рассмотрим расширение Q_+: $Q_- = \{-r : r \in Q_+\}$

Определим отношение порядка и операции сложения, умножения рациональных чисел:

$r_1 \geq 0, r_2 \geq 0 \Rightarrow r_1 + r_2$ по правилам Q_+;

$r_1 \leq 0, r_2 \leq 0 \Rightarrow r_1 + r_2 := -((-r_1) + (-r_2))$;

$$r_1 \geq 0, r_2 \leq 0 \Rightarrow r_1 + r_2 := \begin{cases} r_1 - |r_2|, r_1 \geq |r_2| \\ -(|r_2| - r_1), r_1 \leq |r_2| \end{cases};$$

$$r_1 \leq 0, r_2 \geq 0 \Rightarrow r_1 + r_2 := r_2 + r_1$$

$$r_1 \cdot r_2 = \begin{cases} \text{как в } Q_+,\ \text{если } r_1 \geq 0, r_2 \geq 0; \\ -|r_1||r_2|,\ \text{если } r_1 \geq 0, r_2 \leq 0; \\ |r_1||r_2|,\ \text{если } r_1 \leq 0, r_2 \leq 0. \end{cases}$$

{Q,+, ·} – поле рациональных чисел.

I. 1) $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$ - коммутативность;

2) $r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$ - ассоциативность;

3) $r_1 + 0 = r_1$ -существование нуля;

4) $\forall r \in Q, \exists -r : r + (-r) = 0$.

II. 1) $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$- коммутативность;

2) $r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3$- ассоциативность;

3) $\exists! \in Q : \forall r \in Q,\ r_1 \cdot 1 = r_1$-существование единицы;

4) $Q^* = \{Q \setminus 0\} \Rightarrow \forall r \in Q^*, \exists r^{-1} \in Q^* : r \cdot r^{-1} = 1$-существование обратного элемента;

III. $r \cdot (r_1 + r_2) = r \cdot r_1 + r \cdot r_2$ - дистрибутивность.

IV. Свойства, связанные порядком

0. $\forall r, s \in Q \quad r < s$, либо $r = s$, либо $r > s$. Q – упорядочено;

1. $r \leq r \quad \forall r \in Q$ - рефлексивность;

2. $r \leq s, s \leq r \Rightarrow r = s$ - симметричность;

3. $r \le s, s \le k \Rightarrow r \le k$ - транзитивность;

4. $r_1 \ge r_2 \Rightarrow r_1 + r \ge r_2 + r \quad \forall r \in Q$;

5. $r \ge 0, s \ge 0 \Rightarrow r \cdot s \ge 0$.

Аксиома Архимеда:

$\forall r \in Q_+ \ \exists n \in N : n > r$ или $r > 0, s > 0, r, s \in Q_+ \Rightarrow \exists n \in N : n \cdot r > s$

Замечание. Поле рациональных чисел недостаточно для алгебраических задач.

Утверждение. Квадратное уравнение $x^2 = 2$ не имеет решение в поле рациональных чисел

Определение. Число $r \in Q$ называется пределом последовательности $\{r_n\} \Leftrightarrow (\{r_n\}$ сходится к $r)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ (\varepsilon \in Q) \ \ \exists n_0 \in N : \rho(r, r_n) = |r - r_n| < \varepsilon \ \ \forall n \ge n_0$$

Определение. Последовательность $\{r_n\}$ называется фундаментальной (Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ (\varepsilon \in Q) \ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \rho(r_n, r_{n+p}) = |r_n - r_{n+p}| < \varepsilon \ \ \forall n \ge n_0 \ \ \forall p \in N$$

Фундаментальность – внутреннее свойство самой последовательности.

Утверждение. Если существует предел $\exists \lim\limits_{n \to \infty} r_n = r \Rightarrow \{r_n\}$ - фундаментальная последовательность.

Лекция 6

Тема. Построение поля действительных чисел.

Известно три подхода к построению поля действительных чисел.

I. Модель Вейерштрасса. Любое рациональное число можно представить путем формального деления числителя на знаменатель в виде конечной или бесконечной десятичной дроби $\frac{1}{2} = 0.5 = 0.4999... = 0.4(9)$

В общем случае r – рациональное число, a_0 - целая часть:

$r = a_0, a_1 a_2 ... a_n (b_1 b_2 ... b_m)$, $a_0 \in Z$,

$a_i, b_j \in \{0,1,..,9\},\ (i=1,..,n),(j=1,..,m)$

Иррациональным числом называется десятичная непериодическая дробь:

$\alpha = 0{,}1010010001...$

Множество рациональных и иррациональных чисел образуют множество вещественных чисел R.

$Q \subset R$

Рассмотрим

1. $\underline{\alpha}^{(n)} := \alpha_{0,}\alpha_1...\alpha_n \in Q, \quad \underline{\alpha}^{(n)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n}$

2. $\overline{\alpha}^{(n)} = \underline{\alpha}^{(n)} + \frac{1}{10^n}$.

Таким образом $\underline{\alpha}^{(n)} \le \alpha \le \overline{\alpha}^{(n)} \quad \forall n \in N_0$

Числа $\underline{\alpha}^{(n)}$, $\overline{\alpha}^{(n)}$ – n-ое приближение до 10^{-n} числа α с остатком и избытком.

II. Построение поля вещественных чисел по Дедекинду.

Исходным будет линейное упорядоченное поле чисел. $\square = \{Q,+,*,\ge\}$

Определение. Сечением множества рациональных чисел Q называется пара подмножеств *(A,B)* : $A \subset Q$, $B \subset Q$, обладающая свойствами:

1. $A \ne \varnothing$ и $B \ne \varnothing$

2. $A \cup B = Q$

   $A \cap B = \varnothing$

3. $\forall a \in A, b \in B \quad a \le b$

$B = Q \setminus A$
$A = Q \setminus B$

Утверждение. Множество рациональных чисел является плотным множеством, т.е. $\forall r_1, r_2 \in Q \ \exists r \in Q : r_1 < r < r_2$

Утверждение. Всякое сечение *(A,B)* в множестве рациональных чисел может быть одним из трех следующих типов.

I. В нижнем классе А имеется наибольшее число r, а в верхнем классе В нет наименьшего рационального числа.

II. В нижнем классе А – нет наибольшего числа r, а в верхнем классе В есть наименьшее.

III. В нижнем классе А нет наибольшего, а в верхнем В нет наименьшего рационального числа.

Теорема. Между любыми двумя неравными вещественными числами можно вставить, по меньшей мере, одно рациональное число, т.е. $\forall \alpha, \beta \in R : \alpha < \beta \;\; \exists r \in Q : \alpha < r < \beta$.

Теорема Дедекинда. Всякое сечение *A/B* в области вещественных чисел R обладает тем свойством, что всегда либо в нижнем классе *A* есть наибольшее число, либо в верхнем классе *B*, есть наименьшее, т.е. в множестве вещественных чисел нет сечения III типа.

Множество действительных чисел ***R*** называют числовым континуумом.

Лекция 7

Тема. Границы числовых множеств. Существование верхней (нижней) границы числового множества. Расширение множества действительных чисел.

Граница числовых множеств.

$\mathbb{R}$ – поле, R – множество $\mathbb{R} = \{R, +, \cdot, \leq\}$. Пусть $A \subset R$, $A \neq \varnothing$

Определение. Элемент $M \in R$ называется верхней границей подмножества *A*, если $a \leq M$, $\forall a \in A$. Соответственно число $m \in R$ называется нижней границей множества А $\Leftrightarrow a \geq m \;\; \forall a \in A$.

Если множество *A* имеет верхнюю границу, то говорят, что оно ограничено сверху, нижнюю границу – снизу.

Определение. Наименьшая из всех верхних границ множества *A* называется точной верхней гранью множества *A* и обозначается $sup\, A$

$M^* = sup\ A$

Наибольшая из всех нижних границ называется точной нижней гранью множества A и обозначается $inf\ A$

$m^* = inf\ A$

$M^* = sup\ A \Leftrightarrow$, если

1) $\forall a \in A\ \ a \le M^*$

2) $\forall a \in A\ \ a \le M \Rightarrow M^* \le M$

$m^* = inf\ A \Leftrightarrow$ 1) $\forall a \in A\ \ m^* \le a$; 2) $\forall a \in A\ \ m \le a \Rightarrow m \le m^*$

Замечание. Иногда условие 2 для sup, inf формулируется в следующем эквивалентном виде:

(sup) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A\ :\ a_\varepsilon > M^* - \varepsilon$;

(inf) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A : a_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Очевидно, что sup, inf множества единственны, если они существуют.

Теорема. Если множество A ограничено сверху, то $\exists\ M^* = sup\ A$. Если множество А ограничено снизу, то $\exists m^* = inf\ A$.

Следствие. Если множество A ограничено, то существует sup, inf этого множества, $\exists\ M^* = sup\ A$, $\exists m^* = inf\ A$.

Определение. Если $sup\ A = M^* \in A$, то он называется наибольшим элементом множества A ($max\ A = M^*$). Если $inf\ A = m^* \in A$, то он называется наименьшим элементом множества A ($m^* = min\ A$).

Расширение множества вещественных чисел (R)

$R \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} = \overline{R}$ - расширение

Если множество $X \subset \overline{R}$ не ограниченно

а) сверху, то пишут $sup\ X = +\infty$

б) снизу, то пишут $inf\ X = -\infty$

Операции с символами «+ ∞» и «– ∞» :

1) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

2) $\pm\infty+c=\pm\infty$, $c\in R$

3) $(+\infty)c=\begin{cases}+\infty, c>0\\ -\infty, c<0\end{cases}$

4) $(+\infty)(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)(-\infty)=+\infty$

$(-\infty)(+\infty)=-\infty$

5) $\dfrac{c}{\pm\infty}=0$

6) $0^{+\infty}=0$

Виды неопределенности:

1) $\infty-\infty$

2) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3) 1^{∞}

4) $\infty^{0}, 0^{0}$

III Третий подход к построению поля действительных чисел основан на принципе стягивающихся отрезков (сформулированный Кантором Георгом (1845-1918)).

Определение. $\{[a_n,b_n]\}$ – последовательность вложенных отрезков $\Leftrightarrow$

1) $a_1\le a_2\le..\le a_n\le..$;

2) $b_1\ge b_2\ge..\ge b_n\ge..$;

т.е. по индукции $[a_{n+1},b_{n+1}]$ оказывается частью для отрезка $[a_n,b_n]$ $\forall n\in N$.

Теорема. Всякая последовательность вложенных отрезков имеет хотя бы одну общую точку.

Доказательство. Пусть $\{[a_n,b_n]\}$ последовательность вложенных отрезков. Заметим, что последовательность чисел $\{a_n\}$ ограничена сверху, поскольку верхней гранью для этой последовательности будет любое число $b_n \Rightarrow \exists \sup\{a_n\} = \alpha$. Заметим, что $\alpha \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in N$, так как $\alpha \geq a_n \quad \forall n \in N$; $\alpha \leq b_n \quad \forall n \in N$.

Определение. Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если длина $\rho(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Теорема Кантора. Всякая стягивающаяся последовательность отрезков имеет единственную общую точку.

Замечание. Теорема Кантора является эквивалентной теореме Дедекинда и устанавливает свойства непрерывности множества вещественных чисел.

Лекция 8

Тема. Существование корня. Степень с целым показателем. Существование степени с рациональным показателем. Степень с вещественным показателем. Модуль числа. Существование логарифмов.

Существование корня

1. Степень с целым показателем x^n, x^{-n}.

Определение. Корнем n-ой степени из действительного числа α называется действительное число γ, такое, что $\gamma^n = \alpha$.

$\gamma : \gamma^n = \alpha$

2. Существование степени с рациональным показателем

Определим $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{x})^m, x > 0$

Все свойства степени с рациональным показателем x^r выводятся обычным способом:

$$x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1 + r_2}$$

$$x^r \cdot y^r = (x \cdot y)^r$$

$$\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y} \right)^r$$

$$(x^n)^m = x^{n*m}$$

Свойство монотонности. Если $r_1 > r_2 \Rightarrow x^{r_1} > x^{r_2}$ при $x > 1$

$x^{r_1} < x^{r_2}$ при $0 < x < 1$

3. Степень с вещественным показателем

Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$ - вещественные числа.

Определение. Степенью числа $\alpha > 0$ с вещественным показателем β называется вещественное $\gamma : \alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}$, при всех b, b' удовлетворяющих условию $b, b' \in Q : b < \beta < b'$.

В этом случае полагаем, что γ есть по определению $\gamma = \alpha^{\beta}$

Модуль числа

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Свойства:

1) $|x| = |-x|$

2) $-|x| \leq x \leq |x|$

3) $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$

4) $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow (x < -\varepsilon) \vee (x > \varepsilon)$

5) $|x + y| \leq |x| + |y|$

6) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

7) $|x||y| = |xy|$

Лекция 8, 9

Тема. Поле комплексных чисел и его основные алгебраические свойства. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Эйлера. Извлечение корня из комплексного числа.

Комплексные числа

Комплексным числом – называется упорядоченная пара вещественных чисел a и b.

$$x = (a,b) \quad a,b \in R$$

Пусть $x = (a,b)$, $y = (c,d)$, $z = (e,f)$

$u = (1,0)$ - единица

$n = (0,0)$ - нуль

По определению $x = y \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$.

Определим операции сложения и умножения: $x + y = (a + c, b + d)$, $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$

Свойства

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $x \cdot y = y \cdot x$
4. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
5. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
6. $x + n = x$

   $x \cdot n = n$

   $x \cdot u = x$
7. $x + y = x + z \Rightarrow y = z$
8. $\forall x \quad \exists! y : x + y = n$

   $-x := y$

$x+(-x)=n$

$x-x=n$

Определение. $x=(a,b)$ $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$

Свойства: 1. $|x|>0$, если $x\neq n$

$|x|=0$, если $x=n$

2. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

Утверждение. $x\cdot y=n\Rightarrow(x=n)\vee(y=n)$.

Утверждение. $\forall x\neq n$ $\exists! y: xy=u$ $y=\dfrac{u}{x}$ - обратный элемент.

Таким образом, комплексные числа со сложением и умножением подчиняются всем законам арифметики.

Замечание. $\forall a,b\in R$ имеем

1) $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$

2) $(a,0)(b,0)=(ab,0)$

3) $\dfrac{(a,0)}{(b,0)}=\left(\dfrac{a}{b},0\right)$ $b\neq 0$

4) $|(a,0)|=|a|$

Комплексные числа вида $(a,0)$ обладают теми же арифметическими свойствами, что и вещественные числа a. Это отождествление превращает множество вещественных чисел ***R*** в подмножество комплексных чисел ***C***.

$R\subset C$

$0=(0,0)$, $1=(1,0)$

Определение. Число $i:=(0,1)$ - мнимая единица

Свойства: 1. $i^2=-1=(-1,0)$

2. $\forall a,b\in R\Rightarrow(a,b)=a+i\cdot b$

Утверждение. $\rfloor$ $x,y\in C\Rightarrow|x+y|\le|x|+|y|$

Определение. Если $z=a+i\cdot b\in C$, $\overline{z}=a-i\cdot b$ - комплексно сопряженное число для z.

Свойства: 1. $\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$

2. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

3. $x \cdot \overline{x} = |x|^2$

4. $x + \overline{x} = 2a$ - вещественное

В отличии от поля вещественных чисел поле комплексных чисел не является линейно упорядоченным полем.

$$\forall x = (a,b) \in C \to M(a,b)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi : tg\varphi = \frac{a}{b}$$

$$\varphi = arg\, z$$

$$\varphi \in [0;2\pi)$$

$$r \in (0;\infty)$$

$$\begin{cases} a = r \cdot cos\,\varphi \\ b = r \cdot sin\,\varphi \end{cases}$$

$$|z| = a + i \cdot b = r(cos\,\varphi + i \cdot sin\,\varphi)$$

Свойства:

$$\begin{cases} z_1 = r_1(cos\,\varphi_1 + i \cdot sin\,\varphi_1) \\ z_2 = r_2(cos\,\varphi_2 + i \cdot sin\,\varphi_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ - формула Эйлера

$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма комплексного числа

$$\forall z \in C \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), k = 0,...n-1$$

Таким образом, корню n–ой степени из комплексного числа ставится в соответствие *n* значений:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = r\left(cos\left(\varphi + 2k\pi\right) + i \cdot sin\left(\varphi + 2k\pi\right)\right) = z$$

Лекция 10

Тема. Числовая последовательность. Ограниченная последовательность. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности. Предел числовой последовательности: определение и основные свойства. Единственность предела.

Предел числовых последовательностей

Определение. Если каждому натуральному *n* ставится в соответствие вещественное число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$

Числа x_n - члены последовательности.

Определение. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ - две числовые последовательности, то последовательности:

$\{x_n + y_n\}$ - сумма этих последовательностей;

$\{x_n \cdot y_n\}$ - произведение;

$\{x_n - y_n\}$ - разность;

$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ - отношение (частное) $y_n \neq 0$.

Последовательность называется ограниченной сверху $\{x_n\} \Leftrightarrow \exists a \in R : x_n \leq a \quad \forall n \in N$; $\{x_n\}$ - ограничена снизу $\Leftrightarrow \exists a \in R : x_n \geq a \quad \forall n \in N$;

$\{x_n\}$ - ограничена $\Leftrightarrow \exists a \in R : |x_n| \leq a \quad \forall n \in N$; $\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n_0 : |x_n| > M \quad \forall n \geq n_0$; $\{x_n\}$ - бесконечно малая $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : |x_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Утверждение 1. Всякая бесконечно малая последовательность ограничена: $\{x_n\}$ - б.м.п. $\Rightarrow \{x_n\}$ - ограничена.

Утверждение 2. а) Если $\{x_n\}$ - б.б.п. $(x_n \neq 0) \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - б.м.п. б) Если $\{x_n\}$ - б.м.п. $\Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - б.б.п.

Утверждение 3. Сумма б.м.п. есть б.м.п., т.е. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - б.м.п. $\Rightarrow \{x_n + y_n\}$ - б.м.п.

Утверждение 4. Произведение б.м.п. на ограниченную последовательность есть б.м.п., т.е. пусть $\{x_n\}$ - б.м.п., $\{y_n\}$ - ограниченная последовательность $\Rightarrow \{x_n \cdot y_n\}$ - б.м.п.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется сходящейся по определению, если $\exists l \in R : \alpha_n = a_n - l$ – б.м.п.

Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится или имеет предел l

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n \;\; (a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : |a_n - l| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$$

Если последовательность не имеет предела, то будем говорить, что она расходится.

$a_n = (-1)^n$ - расходящаяся последовательность.

Утверждение 5. Если $\{a_n\}$ сходится, то она имеет единственный предел ($\exists! \; l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$).

Утверждение 6. Пусть $\begin{array}{l} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1 \\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_2 \end{array} \Rightarrow c_n = a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1 \pm l_2$.

Утверждение 7. Пусть $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_2 \Rightarrow a_n \cdot b_n = c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1 \cdot l_2$.

Утверждение 8. Пусть $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_2 \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$, $b_n \neq 0$.

Лекция 11

Тема. Переход к пределу в неравенствах. Теорема Штольца. Предел монотонной последовательности.

Предельный переход в неравенствах.

Утверждение 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, а также $a_n > c \quad \forall n \in N \Rightarrow l \geq c$.

Утверждение 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, $a_n < b_n \ \forall n \Rightarrow l_1 \leq l_2$.

Утверждение 3. Пусть $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in N \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$.

Теорема Штольца. Пусть 1) $y_{n+1} > y_n > 0 \quad \forall n \in N$ строго возрастающая положительная последовательность; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$; 3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

Определение. Последовательность называется убывающей, если $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in N$. Последовательность называется возрастающей, если $x_{n+1} > x_n$ $\forall n \in N$.

Теорема Вейерштрасса. Пусть $\{a_n\}$ не убывающая и ограниченная сверху последовательность $\Rightarrow \{a_n\}$ - последовательность сходится, т.е. имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

Следствие. Невозрастающая ограниченная снизу последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Рассмотрим $\{b_n\} : b_n = -a_n$.

Пример. Итерационная формула Герона. Каждый член последовательности определяется через предыдущий $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. $a > 0$ - фиксированное число; $x_1 > 0$.

Покажем, что $\{x_n\}$ убывающая последовательность ограниченная снизу величиной $\sqrt{a}$.

Имеем $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a\right) = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n} > 0$

$$x_n - x_{n+1} = x_n^2 - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} > 0 \Rightarrow \{x_n\} \quad \text{- убывающая,} \quad x_n > \sqrt{a}\,.$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \Rightarrow x = \sqrt{a}\,.$$

Лекция 12

Тема. Число "e" и его иррациональность. Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся последовательности.

Число e

Утверждение 1. Последовательность $\{a_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Утверждение 2. Пусть $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$.

Доказательство. Имеем $c_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$.

$c_{n+1} > c_n \Rightarrow \{c_n\}$ - возрастающая ограниченная сверху.

И по теореме Вейерштрасса существует предел $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = e_1$.

Заметим, что $a_n < c_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n \quad e \le e_1$.

Рассмотрим $a_n = 2 + \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \ge d_s(n) = 2 + \sum\limits_{k=2}^{s} \frac{n(n-1)\cdot ... \cdot (n-k+1)}{k! \cdot n^k} \quad \forall s \le n$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Отсюда $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} d_s(n) = c_s$

$\lim\limits_{n\to\infty} d_s(n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \sum\limits_{k=2}^{s} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{n}\right) = 2 + \sum\limits_{k=2}^{s} \frac{1}{k!} = c_s \Rightarrow$ e – верхняя грань для $\{c_s\}$, т.е. $e \ge c_s$. Значит $e \ge \lim\limits_{n\to\infty} c_s = e_1 \Rightarrow e = e_1$.

Утверждение 3. Число e иррациональное.

Доказательство. Представим число е в виде $e = c_n + r_n$, r_n - остаток.

$$c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Заметим, что

$$0 < r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} ... + \right) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\frac{n+2}{(n+1)()n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1.$$

Допустим противное, что $e = \frac{m}{n}$ несократимая дробь.

$\Rightarrow 0 < e - c_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ или $0 < n!(e - c_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow$, что $A = n!(e - c_n)$ является целым числом и это число расположено между 0 и $\frac{1}{n}$. Отсюда вытекает, что е – иррациональное число.

Частичный предел последовательности.

Определение. Пусть $\{a_n\}$ некоторая последовательность, а $\{k_n\}$ - некоторая строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда $\{b_n\} = \{a_{k_n}\}$ - подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$.

Если при этом существует предел $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = l$, то l - частичный предел, или предельная точка $\{a_n\}$.

Заметим, что $\{a_n\}$ может не иметь предел, но может иметь частичные пределы.

Теорема Больцана-Вейерштрасса. Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Рассмотрим $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность. Это значит можно указать число, которое превосходит все члены последовательности по модулю.

$\exists c > 0 : |a_n| < c \quad \forall n \in N$.

Рассмотрим отрезок $I_0 = [-c, c]$. Разделим его пополам и обозначим I_1 одну из двух частей, содержащих бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. И отсюда взяли $a_{n_1} \in I_1$ $b_1 = a_{n_1}$. Затем I_1 разобьем на две части и обозначим I_2 одну из двух частей, содержащих бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выбираем $a_{n_2} \in I_2$ $n_2 > n_1$ $b_2 = a_{n_2}$. И т.д.

Таким образом выстраиваем последовательность $\{b_k\} = \{a_{n_k}\}$.

Имеем: $I_0 \supset I_1 \supset ... \supset I_k \supset ...$ - последовательность вложенных отрезков.

$\delta_k = 2c\dfrac{1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ – длина отрезка I_k.

Т. е. $\{I_k\}$ - стягивающаяся последовательность вложенных отрезков. По теореме Кантора она имеет одну общую точку $l \in \bigcap I_K$.

Утверждение. $l = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$ $\quad I_k = [s_k, t_k]$, то имеем $s_k \le b_k \le t_k$, то при этом $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = \lim\limits_{k\to\infty} t_k = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = l$.

Лекция 13

Тема. Критерий Коши для сходимости последовательности. Числовые функции. Способы задания функций. Графики функций. Неявный и параметрический способы задания функций. Основные элементарные функции и их классификация. Предел функции в точке. Односторонние пределы функции в точке.

Критерии Коши для сходимости последовательности

Определение. $\{a_n\} \subset R$ называется фундаментальной (последовательностью Коши) $\Leftrightarrow$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) : |a_m - a_n| < \varepsilon$ $\forall m, n > n_0$.

Критерий Коши. Для того чтобы $\{a_n\} \subset R$ сходилась необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.

Доказательство: 1. Пусть $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0=n_0(\varepsilon):|a_n-l|<\dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall n>n_0$. Выберем $m,n>n_0$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists n_0=n_0(\varepsilon):|a_m-a_n|=|a_m-l-(a_n-l)|\le|a_m-l|+|a_n-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

2. $\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность. Покажем, что $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность. Действительно $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0=n_0(\varepsilon):\left|a_n-a_{n_0}\right|<\varepsilon \quad \forall n>n_0 \quad a_{n_0}-\varepsilon<a_n<a_{n_0}+\varepsilon$.

$M=\max\limits_{n\le n_0}\{|a_n|\}$

$\forall n\in N \quad -M-\left|a_{n_0}\right|-\varepsilon\le a_n\le M+\left|a_{n_0}\right|+\varepsilon\Rightarrow\{a_n\}$ - ограничена.

По теореме Больцана-Вейерштрасса из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\Rightarrow \exists\{a_{nk}\}\subset\{a_n\}:\lim\limits_{k\to\infty}a_{nk}=l$.

Рассмотрим $|a_n-l|\le|a_n-a_{nk}|+|a_{nk}-l|<\varepsilon \qquad \forall\varepsilon>0 \qquad \exists n_0=n_0(\varepsilon)$ $\forall n>n_0\Rightarrow a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}l$.

Предел функции в точке

Пусть $f(x)$ определена на всей числовой оси $R \ (A\subset R)$. Множество А может быть – интервалом, отрезком, совокупностью промежутков.

Определение. Точка x_0 называется предельной точкой множества А, если: $\forall\delta>0 \quad \exists x\in A:0<|x-x_0|<\delta$, т.е. в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное много точек множества А.

Определение. Множество точек $x\in A$ и удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$ называется проколотой δ - окрестностью точки x_0 относительно множества А.

Обозначение $O_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A$.

Определение. Число l называется пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$ или убывающая. Обозначается $l=\lim\limits_{x\to x_0}f(x);f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}l$.

Функция убывающая $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta$, то $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ или $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \ \ \forall x \in O_\delta(x_0)$.

Определение. Число l называется правым пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Обозначается $l = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ или $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)\right)$.

Определение. Число l называется левым пределом $f(x)$ при $x \to x_0$.

$l = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : -\delta < x - x_0 < 0$.

Определение. Число l называется пределом $f(x)$ при $x \to x_0$ или $l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Определение. Число l называется левым пределом $f(x)$ при $x \to +\infty$ или $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Определение. Число l называется левым пределом $f(x)$ при $x \to -\infty$ или $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 : x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Лекция 14

Тема. База множеств. Предел функции по базе. Ограниченные функции. Единственность предела. Основные свойства предела функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними и пределом функции. Критерий Коши существования предела функции. Предел сложной функции.

База множеств. Предел функции по базе

Предел функции по базе обобщает все перечисленные определения.

Определение 1. Пусть A – область определения функции $f(x)$. Тогда совокупность $\{b\} = B$, где $b \subset A$, называется базой множеств, если для ее элементов выполнены следующие условия:

1) B состоит из бесконечного числа непустых множеств $\{b\}$;

2) для любых двух элементов базы можно указать третий, который принадлежит пересечению первых двух:

$\forall b_1, b_2 \in B \ \ \exists b_3 \in B : b_3 \subset (b_1 \cap b_2)$.

Элементы множества B называются окончаниями. Множество A – основное множество базы B.

Определение 2. Число l называется пределом $f(x)$ по базе B (обозначается $\lim\limits_{B} f(x) = l$ или $f(x) \xrightarrow[B]{} l$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in B : |f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in b$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $D \subset A$, если $\exists c > 0 : |f(x)| < c \ \ \forall x \in D$.

Функция, ограниченная на каком-либо окончании b называется финально ограниченной относительно этой базы.

Утверждение. Если предел функции по базе B существует, то он единственный.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существует $l_1 = l_2$, $l_1 = \lim\limits_{B} f(x)$ и $l_2 = \lim\limits_{B} f(x)$.

Выберем $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$. Тогда $\exists b_1(\varepsilon) : |f(x) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\exists b_2(\varepsilon) : |f(x) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Т.к. b_1, b_2 окончания, то $\exists b_3 \subset (b_1(\varepsilon) \cap b_2(\varepsilon))$

$|l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) - (l_2 - f(x))| \le |(l_1 - f(x))| + |(l_2 - f(x))| < \varepsilon$ - противоречие.

Утверждение. $\exists \lim\limits_{B} f(x) = l_1$, $\exists \lim\limits_{B} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists \lim\limits_{B} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$.

Доказательство. $\exists \lim\limits_{B} f(x) = l_1 \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_1 \in B : |f(x) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in b_1$;

$\exists \lim\limits_{B} g(x) = l_2 \ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists b_2 \in B : |g(x) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} \ \ \forall x \in b_2$.

Поскольку b_1, b_2 окончания базы, то

$\exists b_3 \subset b_1 \cap b_2 : |f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \le |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Определение. Если $\lim\limits_{B}\alpha(x)=0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией по базе B.

Замечание. Из определения предела вытекает, что $\exists\lim\limits_{B} f(x)=l \Leftrightarrow \alpha(x)=f(x)-l$ является бесконечно малой функцией.

Утверждение. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция по базе B. Если функция $f(x)$ финально ограничена по базе B и выполняется условие $|\beta(x)|\le|\alpha(x)||f(x)|$, то $\beta(x)$ - бесконечно малая функция по базе B.

Утверждение. Пусть $\exists\lim\limits_{B} f(x)=l_1$, $\exists\lim\limits_{B} g(x)=l_2 \Rightarrow \exists\lim\limits_{B} f(x)\cdot g(x)=l_1\cdot l_2$.

Утверждение. Если $\exists\lim\limits_{B} f(x)=l_1$, $\exists\lim\limits_{B} g(x)=l_2 \Rightarrow \exists\lim\limits_{B}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$.

Критерий Коши существования предела функции

Теорема. Для существования предела функции по базе B $\exists\lim\limits_{B} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists b=b(\varepsilon):|f(x)-f(y)|<\varepsilon\ \ \forall x,y\in b$.

Доказательство. 1. Из $\exists\lim\limits_{B} f(x)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \ \exists b=b(\varepsilon):|f(x)-l|<\varepsilon\ \ \ \forall x\in b(\varepsilon)$.

Пусть $x,y\in b(\varepsilon)$, тогда

$$|f(x)-f(y)|=|(f(x)-l)+(f(y)-l)|\le|f(x)-l|+|f(y)-l|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon .$$

1. Заметим, что $f(x)$ финально ограничена, т.к. $|f(x)|<|f(y)|+\varepsilon$ $\forall x\in b$.

Обозначим $m(\varepsilon)=\inf\limits_{x\in b} f(x)$, $M(\varepsilon)=\sup\limits_{x\in b} f(x)$. Заметим, что $M(\varepsilon)-m(\varepsilon)\le\varepsilon$.

Рассмотрим строго монотонную последовательность сводящуюся к нулю $\{\varepsilon_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Можно считать, что из того, что $n_1>n_2$ $\ b(\varepsilon_{n_2})\subset b(\varepsilon_{n_1})\Rightarrow$ последовательность $m(\varepsilon_n)$ - монотонно возрастает; $M(\varepsilon_n)$ - монотонно убывает при $n\to\infty$.

Тогда последовательность отрезков $I_n=[m(\varepsilon_n),M(\varepsilon_n)]$ является стягивающейся и имеет единственную общую точку l $\ \Rightarrow\exists! l\in\cap I_n\ \ \ \forall n$ $m(\varepsilon_n)<l\le M(\varepsilon_n)\Rightarrow 0\le l-m(\varepsilon_n)\le M(\varepsilon_n)-m(\varepsilon_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

$$\left|f(x)-l\right| < M(\varepsilon_n)-m(\varepsilon_n) \le \varepsilon_n \Rightarrow \lim_B f(x)=l.$$

Предел сложной функции

Сложной функцией $h(x)$ называется функция вида $h(x)=f(g(x))$, при этом $D(f(y))$ содержит все множество значений функций $g(x)$

$$x \to g(x) \to f(g(x)).$$

Функцию $h(x)$ называют композицией и суперпозицией функций f, g, $h = g \circ f$.

Теорема 1. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$ и $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=f(y_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(y_0)$.

Доказательство. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|f(g(x))-f(y_0)\right|<\varepsilon$.

Имеем $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=f(y_0) \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0: \left|y-y_0\right|<\delta_1 \Rightarrow \left|f(y)-f(y_0)\right|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0 \Rightarrow \forall\delta_1>0 \quad \exists\delta=\delta(\delta_1)>0: \left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|g(x)-y_0\right|<\delta_1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0$

$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|f(y)-f(y_0)\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim f(g(x))=y(x_0)$.

Теорема 2. Пусть $\lim\limits_B f(x)=l$, тогда для того чтобы $\exists \lim\limits_D f(g(t))=l$ достаточно чтобы при отображении $x=g(t)$ каждое окончание базы B целиком содержала образ некоторого окончания базы D.

Доказательство. По условию $\lim\limits_B f(x)=l \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists b=b(\varepsilon): \left|f(x)-l\right|<\varepsilon \quad \forall x\in b$. Из условия теоремы следует, что $\exists d\in D: d\subset b\in B \Rightarrow \forall x\in d \ \left|f(x)-l\right|<\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists d=d(\varepsilon): \left|f(x)-l\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_D f(x)=l$.

Лекция 15

Тема. Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность функции в точке. Общие свойства непрерывных функций в точке. Непрерывность элементарных функций.

Сравнение бесконечно малых функций

Определение 1. $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ - бесконечно малые функции по базе B.

Тогда, если $\alpha(x)=\beta(x)\cdot\gamma(x)$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с функциями $\beta(x), \gamma(x)$. Обозначается $\alpha(x)=o(\beta(x))$, $\alpha(x)=o(\gamma(x))$.

Определение 2. Бесконечно малые функции $\alpha(x), \beta(x)$ называются эквивалентными по базе B, $\alpha(x) \sim \beta(x)$, если $\delta(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ есть величина более высокого порядка малости.

Утверждение. $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} \sim 1 \quad \left(\lim\limits_{B} \dfrac{\alpha}{\beta}=1\right)$.

Доказательство. $\alpha \sim \beta \Rightarrow \delta=\alpha-\beta \Rightarrow \alpha=\beta+\delta$, δ имеет более высокий порядок малости относительно β. $\delta=\beta \cdot \gamma \quad \gamma$ - бесконечно малая функция $\Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=1+\gamma \xrightarrow[B]{} 1$.

Определение 3. Говорят, что бесконечно малые функции $\alpha(x), \beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости по базе B, если

$$\lim_{B} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A \text{ , где } A \neq 0, A \neq \infty$$

Обозначают $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Определение 4. Пусть $g(x)$ не обращается в нуль на окончании b из базы B.

1. Если $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ - финально ограниченная функция по базе B, то $f(x)=O(g(x))$.

2. Если $h(x)$ - бесконечно малая функция, то $f(x)=o(g(x))$.

3. Если $\exists \delta>0: \forall b \in B \quad \exists x \in b:|h(x)|>\delta>0$, то $f(x)=\Omega(g(x))$ по базе B.

4. Если $f(x)=O\left(x^{m}\right), x \rightarrow 0$, то $f(x)$ имеет порядок малости x^{m}.

Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_{0}, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1. $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0:\left|x-x_{0}\right|<\delta \Rightarrow\left|f(x)-f\left(x_{0}\right)\right|<\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$.

4. $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция, при $x \to x_0$ $\alpha(x_0) = 0$.

Определение. $f(x)$ называется непрерывной в точке слева, если $f(x_{0-}) = \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0)$.

$f(x)$ называется непрерывной в точке справа, если $f(x_{0+}) = \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0)$.

Утверждение. $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она непрерывна слева, и непрерывна справа в точке x_0.

Свойства непрерывных функций:

Пусть f, g - непрерывны в точке x_0, тогда

1. $c_1 f + c_2 g$ - непрерывна в точке x_0; c_1, c_2 - числа.

2. $f \cdot g$ - непрерывно в точке x_0

3. $\dfrac{f}{g}$ - непрерывно в точке x_0, $g\left(x_0\right) \neq 0$

4. Пусть $f(x_0) > 0$ $\left(f(x_0) < 0\right)$, то $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$ $\left(f(x) < 0\right)$ $\forall x \in O_\delta(x_0)$, т.е. непрерывная функция сохраняет знак в окрестности своей точки непрерывности.

5. $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности своей точке непрерывности, $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

6. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Следовательно $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Непрерывность элементарных функций

К элементарным функциям относят:

1. Многочлены (полиномы)

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \; a_0 \neq 0$$

2.Рациональные

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x), Q(x)$ - многочлены

3.Показательная

$f(x)=a^x \quad a>0, a\neq 1$

4. Степенная

$f(x)=a^{\beta}, \alpha\in R$

5. Логарифмическая

$f(x)=\log_a x \qquad a>0, a\neq 1$

6. Тригонометрические

$\sin x, \cos x, tgx, ctgx$

7. Обратные тригонометрические

$\arccos x, \arcsin x, arctgx, arcctgx$

Элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены.

Утверждение. $f(x)=\sin x$ непрерывна в $\forall x_0\in R$.

Доказательство. Рассмотрим $|f(x)-f(x_0)|=|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq 2\frac{|x-x_0|}{2}\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leq|x-x_0|$. Из того, что $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

Лекция 16, 17

Тема. Два замечательных предела. Непрерывность функций на множестве. Монотонные функции. Критерий непрерывности монотонной функции. Существование и непрерывность обратной функции. Свойства непрерывных функций на отрезке.

Замечательные пределы

Утверждение. Имеют место соотношения:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Доказательство. а) Рассмотрим $f(x) = [x]$ $x \to +\infty$ $x > 0$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e \Rightarrow 1) \forall\varepsilon > 0$

$\exists n_1 = n_1(\varepsilon) = [x]_1 : \left|\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)^x - e\right| < \varepsilon$ $\forall n > n_1$; 2) $\forall\varepsilon > 0$

$\exists n_2 = n_2(\varepsilon) = [x]_2 : \left|\left(1+\dfrac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} - e\right| < \varepsilon$ $\forall n > n_2$

$n_0 = \max(n_1, n_2)$

$\forall n > n_0$ $e - \varepsilon < \left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \left(1+\dfrac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = / y = -x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty / = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}.$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = e$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = / y = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty / = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = e$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $g(y) = \left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$.

Утверждение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Лекция 18

Тема. Непрерывность функции на множестве.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве $A \subset R$, если она непрерывна в каждой точке множества A.

Если множество A является отрезком ($A=[a,b]$), то в точках a и b требуется непрерывность справа и слева соответственно.

Определение. Функция $f(x)$ на множестве A называется

1) неубывающей на множестве A, если из того что $a<b \Rightarrow f(a)\le f(b)$;

2) невозрастающей на множестве A, если из того что $a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b)$;

3) возрастающей или строго возрастающей, если $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$;

4) убывающей или строго убывающей, если $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$.

Функции вида 1-4) образуют класс монотонных функций.

Определение. Если в некоторой точке x_0 нарушается определение непрерывности, то x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x), \lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)$. Если в точке x_0 один из пределов не существует или равен $+\infty$, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Определение. Разрыв первого рода в точке x_0 называется устранимым, если односторонние пределы равны.

Теорема 1. (о точке разрыва монотонной функции на отрезке). Если $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, то она может иметь на этом отрезке разрывы только первого рода. Более того, $\forall x_0 \in [a,b]$

а) если $f(x)$ не убывает, то $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)=\inf\limits_{x>x_0} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)=\sup\limits_{x<x_0} f(x)=l_2$, $l_2 \le f(x_0)\le l_1$;

б) если $f(x)$ не возрастает, то $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)=\sup\limits_{x>x_0} f(x)=l_1$ $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)=\inf\limits_{x<x_0} f(x)=l_2$ $l_1 \le f(x_0)\le l_2$.

<u>Лекция 19</u>

Тема. Критерий непрерывности монотонной функции.

Теорема 2 (критерий непрерывности монотонной функции). Пусть $f(x)$ определена и монотонна на $[a,b]$, тогда для непрерывности ее на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $l \in [f(a), f(b)]$ $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = l$.

Теорема 3. (об обратной функции). Пусть $y = f(x)$ - строго возрастающая и непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\exists x = g(y)$ - строго возрастающая, определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$ и непрерывная на нем такая, что $g\left(f(x)\right) = x$.

Общие свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 1. (об обращении функции в нуль). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ ($f(x) \in C[a,b]$).

Пусть $f(x)$ на концах $[a,b]$ принимает значение разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$, тогда $\exists c \in [a,b] : f(c) = 0$.

Теорема 2. (о промежуточных значениях непрерывных функций). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и на $f(a) = \alpha, f(b) = \beta, (\alpha \le \beta)$ и c - любое число из $[\alpha, \beta]$. Тогда $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = c$, т.е. непрерывная $f(x)$ принимает все промежуточные значения на $[a,b]$ между наибольшим и наименьшим значениями.

Доказательство. Рассмотрим $g(x) = f(x) - c$ для $g(x)$ будут выполнены условия теоремы 1, т.е. $g(x)$ - непрерывна на $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков

$$g(a) = f(a) - c \le 0$$

$$g(b) = f(b) - c \ge 0$$

По теореме 1 $\exists x_0 \in [a,b] : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$.

Теорема 3. (об ограниченности непрерывной функции на отрезке). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ $\Rightarrow f(x)$ - ограничена на $[a,b]$.

Лекция 20

Тема. Равномерная непрерывность функции. Теорема Гейне-Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

Теорема 4. (о достижении непрерывной функции точной верхней и нижней граней). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, тогда $\exists x_1 \in [a,b]: f(x_1) = \sup f(x_1), x \in [a,b]$, $\exists x_2 \in [a,b]: f(x_2) = \inf f(x_2), x \in [a,b]$,

т.е. функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке $[a,b]$.

Доказательство (от противного). Пусть $A = sup\, f(x),\ x \in [a,b]$; $A \neq f(x)$ ни при каком $x \in [a,b]$. Тогда $A > f(x), \forall x \in [a,b]$. Тогда $g(x) = \dfrac{1}{A - f(x)}$ - непрерывна, а значит и ограничена на $[a,b]$. Т.е. $\dfrac{1}{A - f(x)} < B \Rightarrow f(x) < A - \dfrac{1}{B}$, т.е. $A - \dfrac{1}{B}$ - верхняя грань множества значений $\{f(x)\}$, которая получается меньше точной верхней грани (противоречие).

Равномерная непрерывность функции

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon\ \ \forall x_1, x_2 \in X$.

Теорема Гейне- Кантора. Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Доказательство. (от противного). Пусть $f(x)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$ $\exists \alpha, \beta \in X = [a,b] : |\alpha - \beta| < \delta$, но $|f(\alpha) - f(\beta)| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\{\delta_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ $\Rightarrow$ $\forall n\ \ \exists \alpha_n, \beta_n : |\alpha_n - \beta_n| < \delta_n$,

но $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon$.

$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ - ограниченные последовательности. Значит по теореме Больцана-Вейерштрасса $\exists\{\alpha_{n_k}\}\subset\{\alpha_n\}:\alpha_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x_0\in X$. Учитывая, что $\left|\alpha_{n_k}-\beta_{n_k}\right|<\dfrac{1}{n_k}$ $\Rightarrow\beta_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x_0$. Из того, что $f(x)$ непрерывна $\Rightarrow f\left(\alpha_{n_k}\right), f\left(\beta_{n_k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}f(x_0)\Rightarrow\exists k_0:\left|f\left(\alpha_{n_k}\right)-f\left(\beta_{n_k}\right)\right|<\varepsilon\ \ \forall k>k_0$ - противоречие.

Замечание. Доказанная теорема справедлива также на более широком классе множеств, называемых компактными множествами.

Замкнутые и открытые множества.

Определение. Предельной точкой множества $X\subset R$ называется точка x_0 каждая δ окрестность которой содержит помимо самой точки x_0 и другие точки множества X. Точка x_0 необязательно принадлежит множеству X.

Определение. Множество точек называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Множество точек называется открытым, если каждая точка этого множества входит в это множество с некоторой своей δ окрестностью.

Утверждение. а) Если A – замкнутое множество, то множество $A_1=R\setminus A$ - открытое; б) Если B – отрытое множество, то множество $B_1=R\setminus B$ - замкнутое.

Утверждение. а) Любое объединение открытых множеств открыто; б)_ Любое пересечение замкнутых множеств замкнуто. Конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.

Лекция 21

Тема. Компакты

Определение. Ограниченное замкнутое множество на числовой прямой называется компактом.

Определение. Пусть заданы множество A и система множеств типа $\{B\}$. Будем говорить, что $\{B\}$ есть покрытие A, если $\forall \alpha \in A \;\; \exists B \in \{B\} : \alpha \in \beta$.

Утверждение. Лемма Бореля. Из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 1. (обобщение теоремы Гейне- Кантора). Функция непрерывная на компакте равномерно непрерывна на нем.

Замечание. Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \;\; \exists a_1(\delta), a_2(\delta) \in A : |a_1 - a_2| < \delta, |f(a_1) - f(a_2)| \geq \varepsilon$.

Приращение функции.

Производная и дифференциал функции.

Геометрический смысл производной.

Механическая интерпретация.

Утверждение. Если $f(x)$ - дифференцируема в точке $x = a \Rightarrow f(x)$ - непрерывна в точке $x = a$. Обратное утверждение не верно.

Определение. Левой производной $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется предел отношения $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Правой производной $y = f(x)$ при $x = a$ называется предел отношения $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Утверждение. $f(x)$ дифференцируемая в точке a тогда и только тогда, когда она имеет левую и правую производные и эти производные совпадают.

Лекция 22

Тема. Дифференцирование сложной функции.

Теорема. Пусть $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = t_0$ причем $\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = \alpha$. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, причем $f'(x_0) = \beta$. Тогда $g(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке $t = t_0$, причем $g'(t_0) = f_x'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) = \alpha \cdot \beta$.

Теорема. (О производной обратной функции). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$, $g(y)$ является обратной для $f(x)$, определена на $[f(a), f(b)]$, $f(a) < f(b)$.

Пусть $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \left(f(a), f(b)\right) : f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$. Если $\exists f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists g'(y_0) \ : \ g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема (об инвариантности формы первого дифференциала). $dy = f'(x)dx$ не изменяется, если роль аргумента x будет играть функция $f(t)$ новой независимой переменной, т.е.

$$dy = f_x'(\varphi(t))d\varphi(t) = f_x'(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Правила дифференцирования.

$f(x)$, $g(y)$ - дифференцируемые функции. $c = const$

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
2. $f(x) = const \to f'(x) = 0$
3. $(f(x) + g(y))' = f'(x) + g'(y)$
4. $(f(x) \cdot g(y))' = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(y)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(y) - f(x)g'(y)}{g^2(y)}$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f = f + \Delta f, \quad g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g = g + \Delta g$$

Производные элементарных функций

1. $x' = 1$

$f(x) = x \qquad \dfrac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + ...) - x^n}{\Delta x} \to nx^{n-1}$$

3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$

8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

12. $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$

13. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

14. $(a^x)' = a^x \ln a$

Лекция 23

Тема. Производные и дифференциалы высших порядков.

По индукции полагаем $f^n(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Теорема. (Формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{n-k}$$

Доказательство. (по индукции) Рассмотрим основание индукции

$n = 1 \quad (uv)' = uv' + u'v$

$m = n \quad (uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{m-k}$

$n = m + 1$

$$(uv)^{(m+1)}=\left((uv)^{m}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{m}C_m^k u^{(k)}v^{m-k}\right)'=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(k+1)}v^{(m-k)}\right)=$$

$$=C_m^0u^{(0)}v^{(m+1)}+\sum_{k=1}^{m}\left(C_m^k+C_m^{k-1}\right)u^{(k)}v^{(m-k+1)}+C_m^m u^{(k+1)}v^{(0)}=$$

$$=C_{m+1}^0u^{(0)}v^{(m+1)}+\sum_{k=1}^{m}C_{m+1}^k u^{(k)}v^{(m-k+1)}+C_{m+1}^{m+1}u^{(k+1)}v^{(k+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k u^{(k)}v^{(m-k+1)}$$

$y=f(x)$ дифференцируема на $x\in(a,b)$

$df=df(x;dx)=f'(x)dx$ - дифференциал. Полагаем $dx=\Delta x$.

Определение дифференциала второго порядка

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=(f'(x))'dxdx=f''(x)(dx)^2$$

$$d^nf=f^{(n)}(x)(dx)^n$$

$$f'(x)=\frac{df}{dx}(x),\ldots,f^{(n)}(x)=\frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

Правила для вычисления дифференциала аналогично правилам для вычисления производной.

$f(x)$, $g(x)$ $\quad c=const$

$$dc=(c)'dx=0$$

$$d(cf)=(cf)'dx=cf'dx=cdf$$

$$d(f+g)=(f+g)'dx=f'dx+g'dx=df+dg$$

$$d(fg)=(fg)'dx=(f'g+fg')dx=df\cdot g+fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)'dx=\left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)dx=\frac{df\cdot g-fdg}{g^2}$$

Замечание. Второй дифференциал не обладает свойством инвариантности, т.е., если $g=f(\varphi(t))$, то

$$dg=f_x'(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

$$d^2g=\left(f_x'(\varphi(t))\varphi'(t)\right)'dt^2=\left(f_{xx}''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2+f_x'(\varphi(t))\varphi''(t)\right)dt^2$$

Возрастание и убывание функции в точке

Пусть x_0 - внутренняя точка области, определяющей функции $f(x)$.

Определение. $f(x)$ - возрастает в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки выполняется:

$f(x) < f(x_0), x > x_0$
$f(x) > f(x_0), x < x_0$

Определение. $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум (локальный минимум), если в некоторой проколотой окрестности этой точки $f(x_0) > f(x)$, $(f(x_0) < f(x))$.

Точка локального максимума и минимума называется точкой локального экстремума.

Теорема. (Лемма Дарбу, достаточное условие возрастания и убывания функции в точке). Если $f'(x_0) = c > 0$, то точка x_0 - точка возрастания функции. Если $f'(x_0) = -c < 0$, то точка x_0 - точка убывания функции.

Теорема Роля. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = 0$.

Лекция 24

Тема. Теорема Коши о конечных приращениях.

Теорема Коши. (О конечных приращениях). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b). Пусть $g'(x) \neq 0$ на (a,b). Тогда

$$\exists \xi \in (a,b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Следствие (теорема Лагранжа о конечных приращениях). $g(x) = x \Rightarrow \exists \xi \in (a,b): \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Определение. Внутренняя точка x_0 называется точкой несобственного локального максимума (или локального максимума в широком смысле), если существует проколотая Δ окрестность в точке x_0, в которой $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leq 0$.

Теорема Ферма. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и x_0 - внутренняя точка локального экстремума. Если $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$.

Приложение.

1. Неравенство Юнга.

$x^{\alpha} \le \alpha x+\beta, \alpha,\beta,x>0 \qquad \alpha+\beta=1$

2. Неравенство Гельдера

$x=\dfrac{a}{b}>0 \Rightarrow a^{\alpha}b^{\beta} \le \alpha a+\beta b, \quad a,b\ge 0$

$$a=a_k=\frac{u_j^{1/\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} u_j^{1/\alpha}}$$

$$b=b_k=\frac{v_j^{1/\beta}}{\sum_{j=1}^{n} v_j^{1/\beta}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \to \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{u_j^{1/\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} u_j^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}\left(\frac{v_j^{1/\beta}}{\sum_{j=1}^{n} v_j^{1/\beta}}\right)^{\beta} \le 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \le \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n} v_j^{1/\beta}\right)^{\beta}$$

3. Неравенство Минковского

$p=\dfrac{1}{\alpha}$ и $q=\dfrac{1}{\beta}$, $\alpha,\beta>1$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{p+q}{pq}=1 \Rightarrow p+q=pq$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)(a_k+b_k)^{p-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

Из неравенства Гельдера $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$$\sum b_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \left(\sum b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum\left(a_k+b_k\right)^p \le \left(\left(\sum a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum\left(a_k+b_k\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum\left(a_k+b_k\right)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum\left(a_k+b_k\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$p>1 \quad a_k, b_k \ge 0, \forall k$

Производная функции, заданной параметрически

$$\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\varphi(t) \end{aligned} \tag{1}$$

$\varphi,\psi \in D(a,b) \qquad \varphi'(t)\ne 0$ на (a,b).

Следовательно $\varphi(t)$ - строго монотонная. $\exists t=g(x)$ - обратная функция $\varphi(t)$, т.е. $\varphi\big(g(x)\big), g\big(\varphi(t)\big)=t$.

Функция g определена на $\big(\varphi(a),\varphi(b)\big) \qquad \varphi(a)<\varphi(b)$

$y=f(x)=\psi(x)$ на $\big(\varphi(a),\varphi(b)\big)$.

Уравнение (1) называют параметрическим заданием функции f.

Найдем $f'(x)=\big(\psi\big(g(x)\big)\big)_x'=\psi_g'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

$$g'(x)=\big(g\big(\varphi(t)\big)\big)_\varphi'=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\varphi\big(g(x)\big)=x \Rightarrow \varphi_g'\cdot g_x'=1 \to g_x'=\frac{1}{\varphi_g'}=\frac{1}{\varphi'}$$

$f_x'=\dfrac{\psi_g'}{\varphi_g'}=\dfrac{\psi_t'}{\varphi_t'}$ - правило вычисления функции заданной параметрически.

$$f_{xx}''=\left(f_x'\right)_x'=\left(\frac{\psi_t'}{\varphi_t'}\right)_x'=\left(\frac{\psi_t'}{\varphi_t'}\right)_t'\cdot t_x'=\frac{\psi_{tt}''\cdot\varphi_t'-\psi_t'\cdot\varphi_{tt}''}{\left(\varphi_t'\right)^3}$$

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'},$$

$$y_{xx}''=\frac{y_{tt}''\cdot x_t'-y_t'\cdot x_{tt}''}{\left(x_t'\right)^3}$$

Лекция 25

Тема. Правило Лопиталя

Теорема 1. (раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$). Пусть

1) $f(x), g(x)$ определены на $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ и дифференцируемы на нем за исключением, быть может, $x=a$.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

3) $f'(x)$ и $g'(x)$ не равны нулю при $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2)$ $\quad x \neq a$.

4) Существует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема 2. (раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$). Пусть

1) $f(x), g(x)$ дифференцируемы в интервале $(a-h, a+h)$.

2) $f'(x), g'(x) \neq 0 \qquad x \in (a-h, a+h)$.

3) $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to a$

4) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Лекция 26

Тема. Формула Тейлора

Определение. Многочленом Тейлора степени n для $f(x)$, имеющей в точке $x=a$ n - ую производную называется выражение

$$f_n(a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$r_n(x) = f(x) - f_n(a,x)$ называется остаточным членом.

Таким образом формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Пусть $f(x)$ - дифференцируемая $(n-1)$ раз в некоторой окрестности точки $x=a$ и существует n - ая производная в точке a

$$f^{(n)}(a) \Rightarrow r_n(x) = f(x) - f_n(a,x) = o\left((\Delta x)^n\right)$$
$$\Delta x = x - 1$$

Доказательство. Заметим, что $r_n(a) = r_n^{'}(a) = ... = r^{(n-1)}(a) = 0$. Рассмотрим $\alpha(x) = \dfrac{r_n(x)}{(x-a)^n}$; применим правило Лопиталя $(n-1)$ раз

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = ... = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{r_n^{n-1}(x)}{x-a} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f_n^{(n-1)}(a,x)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^n(a)\Delta x}{x-a} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a) = o\left((\Delta x)^n\right)$$

Заметим, что при $n=1$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r_1(x)$$
$$r_1(x) = o(\Delta x)$$
$$\Delta x = x - a$$

Формула Тейлора обобщает понятие дифференцирования функции

$$\Delta f = f(x) - f(a)$$
$$f'(a)\Delta x$$
$$r_1(x)$$

Учитывая, что $\Delta x = dx$

$$d^n f = f^{(n)}(x)dx$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + r_n(x).$$
$$\Delta f = df + \frac{1}{2!}d^2 f + ... + \frac{1}{n!}d^{(n)} f + r_n(x), r_n(x) = o\left((\Delta x)^n\right)$$

Замечание. При некотором $n \in N$ $f'(x)$, $g'(x)$ имеют касания n-ого порядка в точке x_0, если при $x \to x_0$ $\quad f(x) - g(x) = o\left(|x - x_0|^n\right)$.

Если $n=1$ - значит графики этих функций имеют общую точку касания x_0.

Формула Тейлора утверждает, что многочлен Тейлора $f_n(a,x)$ имеет касание n-ого порядка с функцией $f(x)$.

Замечание. Если два многочлена n-ой степени $P_n(x), Q_n(x)$ имеют касание n – ого порядка в точке x_0 с какой-либо функцией $g(x)$, то эти многочлены тождественно совпадают, соответствующие коэффициенты равны

$$h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) = P_n(x) - g(x) + g(x) - Q_n(x) = o\left((\Delta x)^n\right).$$

Так как разность многочленов n-ой степени не может дать степень x больше, чем $n \Rightarrow h_n(x) \equiv 0 \Rightarrow P_n(x) = Q_n(x)$. Эти рассуждения являются доказательством единственности представления многочлена Тейлора для данной функции.

Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме

Теорема. Пусть $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на (x_0, x_1). Пусть $a < b$ - две точки из (x_0, x_1), тогда

$$\forall \alpha > 0 \qquad \exists c \in (a,b) : r_n(b) = f(b) - f_n(a,b) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{\alpha}(b-c)^{(n+1)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad (1)$$

$$f_n(a,b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

Замечание. Остаточный член в форме (1) называют остаточным членом в форме Шлемильха - Роша .

Следствие. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлёмильха - Роша верна и при $a \geq b$.

Частные случаи:

1. $\alpha = n+1$

$$r_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$ - остаточный член в форме Лагранжа

$c \in (a,b)$

2. $\alpha = 1$

$$r_n(b) = (b-a)(b-c)^n\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} = (b-a)^{n+1}(1-\theta)^n\frac{f^{(n+1)}((a+\theta)(b-a))}{n!}$$

$$\theta = \frac{c-a}{b-a}$$
$$1-\theta = \frac{b-c}{b-a}$$
$$c = a + \theta(b-a)$$
$$0 < \theta < 1$$

Замечание. При $a = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Замечание. Большая определенность выражения остаточного члена в общей форме достигается за счет повышения требований к основной функции.

Лекция 27

Тема. Формула Тейлора для некоторых функций

$$x = x_0$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x)$$
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\xi}{(n+1)!}(x-x_0)^n \qquad x_0 > \xi > x, x_0 < \xi < x$$

1. $f(x) = e^x \quad f^{(n)}(x) = e^x$

$$x = x_0 \qquad e^x = e^{x_0} + \frac{e^{x_0}}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0)$$
$$x_0 = 0 \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x_0); r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad |\theta| < 1$$
$$\forall x \qquad \lim_{x\to\infty} r_n(x) = 0$$

2. $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, \ldots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$x_0 = 0 \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{(n+1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_n(x)$$

$$r_n(x)=\frac{\sin\theta x}{(2n)!}x^{2n} \qquad |\theta|<1$$

$$\forall x \qquad \lim_{x\to\infty} r_n(x)=0$$

3. $f(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}+r_n(x)$$

$$r_n(x)=\frac{\sin\theta x}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$\forall x \qquad \lim_{x\to\infty} r_{2n-1}(x)=0$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$

$$f'=\frac{1}{1+x};f''=-\frac{1}{(1+x)^2};...;f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+r_n(x)$$

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n(1+\theta x)^{n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ при $|x|<1$

5. $f(x)=(1+x)^\alpha \qquad \alpha\notin N$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$x_0=0 \qquad (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}x^n+r_n(x)$$

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ только при $|x|<1$.

Исследование функций

Теорема 1. $f(x)$ дифференцируема в $\overset{\circ}{U}(x_0)=\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, x_0 - стационарная точка.

$x_0 : f'(x_0)=0 \Rightarrow$

1) если $f'(x)>0$ слева от x_0, $f'(x)<0$ справа от x_0 $\Rightarrow$ точка x_0 - точка строгого локального максимума $f(x)$

2) если $f'(x)<0$ слева от x_0, $f'(x)>0$ справа от x_0 $\Rightarrow$ точка x_0 - точка строгого локального минимума $f(x)$

3) если $f'(x)$ одного знака в окрестности точки x_0. Точка x_0 не является точкой экстремума.

Теорема 2. Пусть $f'(x_0)=0$ и $\exists f''(x_0) \Rightarrow$

1) если $f''(x_0)<0$ $\Rightarrow$ x_0 - точка строгого локального максимума;

2) если $f''(x_0)>0$ $\Rightarrow$ x_0 - тоска строгого локального минимума.

Лекция 28

Тема. Выпуклые функции

Теорема 3. Пусть $f''(x_0)=...=f^{(2k-1)}(x_0)=0$, $f^{(2k)}(x_0)\neq 0$ $\Rightarrow$

1) если $f^{(2k)}(x_0)<0 \Rightarrow$ x_0 - точка локального максимума $f(x)$;

2) если $f^{(2k)}(x_0)>0 \Rightarrow$ x_0 - точка локального минимума $f(x)$;

Определение. 1) $f(x)$ называется выпуклой вверх на $(a;b)$, если график функции лежит под касательной для любой точки данного интервала, т.е.

$f(x)\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad \forall x,x_0\in(a;b)$.

2) $f(x)$ называется выпуклой вниз на $(a;b)$, если график функции лежит над касательной для любой точки данного интервала, т.е.

$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad \forall x,x_0\in(a;b)$

Теорема 4. 1. Если $f''(x_0)\leq 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ выпукла вверх на $(a;b)$.

2. Если $f''(x_0)\geq 0$ на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ выпукла вниз на $(a;b)$.

Доказательство. Формула Тейлора $\Rightarrow$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,\ x,x_0\in(a;b)$$

1. $f''(c)\le 0 \Rightarrow f(x)\le f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow f(x)$ - выпуклость вверх;

2. $f''(c)\ge 0 \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow f(x)$ - выпукла вниз.

Замечание. Если в определение 1, 2 имеет место строгие неравенства, то $f(x)$ называется строго выпуклой вверх (вниз).

Теорема 5. Пусть $f(x)\in D(a,b)$ - выпукла на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ непрерывна и монотонна на $(a;b)$.

Лекция 29

Тема. Точки перегиба

Определение. $x_0\in(a;b)$ - точка перегиба дифференцируемой функции $f(x)$, если $\exists\delta$ - окрестность точки x_0, такая, что и в правой, и в левой ее полуокресностях функция $f(x)$ является выпуклой, но имеет разные направления выпуклости.

Лемма. Если точка x_0 - точка перегиба $f(x)$ и $\exists f'(x)$ на $(a;b)$, то в некоторой δ - окрестности точка x_0 разность $r(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x)(x-x_0)$ является монотонной функцией.

Теорема 1. (необходимое условие перегиба). Если $f(x)$ в x_0 имеет $f''(x)$ и x_0 - точка перегиба $\Rightarrow f''(x_0)=0$.

Теорема 2. (достаточное условие строгого перегиба)

1) Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 ($\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$). Вторая производная имеет разные знаки ($f''(x)$ $x<x_0$ и $x>x_0$). Тогда, если $f''(x_0)=0$ или не существует, то x_0 - точка строгого перегиба функции $f(x)$.

2) Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$ $f''(x_0)=0$ и $\exists f'''(x_0)\ne 0$, тогда x_0 - точка строгого перегиба.

3) Пусть $x_0\in(a;b)$ и $f(x)$ $2k$ раз дифференцируема на $(a;b)$.

Пусть $\exists f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$

$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(2k)}(x_0) = 0 \Rightarrow$ точка x_0 - точка строгого перегиба.

Доказательство. 1) Так как $f''(x)$ меняет знак при $x < x_0$ и $x > x_0$, то $f(x)$ - имеет разные направления строгой выпуклости в этих частях δ - окрестности $\Rightarrow$ точка x_0 - точка строгого перегиба;

2) Так как $f'''(x_0) \neq 0$. Если $f'''(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x)$ - строго возрастает в x_0; если $f'''(x_0) < 0 \Rightarrow f''(x)$ - строго убывает в x_0.

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ точка x_0 - строгого перегиба

3) Заметим, что $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, точка x_0 - точка возрастания или убывания $f^{(2k)}(x)$. Рассмотрим $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, $f^{(2k)}(x)$ меняет знак проходя через точку x_0 и сохраняет знак внутри каждой полуокрестности.

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + ... + \frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-3)!}(x - x_0)^{2k-3} + \frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x - x_0)^{2k-2} =$$

$$= \frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x - x_0)^{2k-2}$$

$x < c < x_0, x > c > x_0$

$\Rightarrow$ знак $f''(x)$ совпадает со знаком $f^{(2k)}(c)$, т.е. их знаки совпадают в разных полуокрестностях $\Rightarrow$ точка x_0 - точка строгого перегиба.

Исследование функции

Определение. Прямая $x = a$ на плоскости Oxy называется вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если хотя бы один из ее пределов ($\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$) равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$; $\alpha(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Аналогично, при $x \to -\infty$.

Теорема. Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ для $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при $x \to +\infty$:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = b$, $\quad k, b \in R$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $y = kx + b$ - асимптота $\Rightarrow$

$$\alpha(x) = f(x) - kx - b \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - kx - b}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\left(f(x) - kx - b \right) + b \right) = b$$

$(\Leftarrow)$. Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = b \Rightarrow f(x) - kx = b + \alpha(x)$, $\alpha(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Общая схема исследования графика функции

1. Найти область определения $f(x)$
2. Четность
3. Периодичность
4. Точки пересечения графика с осями координат
5. Определение участков монотонности и локального экстремума функции
6. Найти участки выпуклости и точки перегиба
7. Найти асимптоты

Лекция 30

Тема. Интерполирование функций

Интерполирование функции – процесс приближенного вычисления функций в промежуточных точках по отношению к точкам, в которых значение функции известно.

Один из методов интерполяции является замена искомой функции алгебраическим многочленом, значения которого в заданных точках совпадают со значениями функции.

Пусть в точках $x_1,\ldots,x_n$ многочлен $P(x)$ принимает значения $f(x_1),...,f(x_n)$, совпадающие со значениями функции $y=f(x)$.

Теорема 1. $\exists! P(x)$ степени $(n-1)$ такой, что $P(x_k)=f(x_k), \left(k=\overline{1,n}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим многочлены вида

$$Q_k(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)...(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)} \qquad (1)$$

Заметим, что $Q_k(x)=\begin{cases}1, & x=x_k\\ 0, & x=x_j, j\neq k\end{cases}$

$Q_k(x)$ - является многочленом степени $(n-1)$.

Составим многочлен

$$P(x)=f(x_1)Q_1(x)+f(x_2)Q_2(x)+...+f(x_n)Q_n(x) \qquad (2)$$

$P(x_k)=f(x_k)\ \left(k=\overline{1,n}\right)$

$P(x_k)$ - многочлен, который удовлетворяет условию теоремы 1.

Пусть $\exists R(x): R(x_k)=f(x_k)\ \left(k=\overline{1,n}\right)$ степени $(n-1)$.

Составим разность $F(x)=P(x)-R(x)$. Очевидно $F(x)$ представляет собой многочлен в степени не выше $(n-1)$. При этом $F(x_k)=0\ \left(k=\overline{1,n}\right)$, т. е. имеет n - корней.

$F(x)\equiv 0 \Rightarrow P(x)\equiv R(x)$

$P(x)$ единственен.

Формула (2) называется интерполяционной формулой Лагранжа. Точки $x_1,\ldots,x_n$ - узлы интерполяции.

Пусть $f(x)$ некоторая функция.

$P_k(x)$ многочлен степени $(n-1)$: $P_k(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{1,k}$, тогда формулу (2) можно записать в виде

$$P(x)=P(x_1)+\sum_{k=2}^{n}\left(P_k(x)-P_{k-1}(x)\right)=P_n(x)$$

Многочлен $P_k(x)-P_{k-1}(x)$ в силу определения обращается в нуль в точках $x_1,...,x_{k-1}$. Значит, его можно представить в виде

$$P_k(x)-P_{k-1}(x)=A_k(x-x_1)...(x-x_{k-1})$$

коэффициент A_k совпадает с коэффициентом при старшей степени многочлена $P_k(x)$.

В силу формулы (2) можно записать в виде

$$P(x)=f_1(x_1)+(x-x_1)f_2(x_1,x_2)+...+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{n-1})f_n\left(\overline{x_1,x_n}\right) \quad (3)$$

$$f_1(x_1)=P(x_1)=f(x_1)$$

Формула (3) называется интерполяционной формулой Ньютона. А функция $f_k\left(\overline{x_1,x_k}\right)$ - называются интерполирующими функциями.

Полагая в формуле Ньютона $x=x_n$, получаем

$$f(x_n)=P(x_n)=f(x_1)+(x_n-x_1)f_2(x_1,x_2)+...+(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})f_n\left(\overline{x_1,x_n}\right)$$

Узел x_n - произвольное число, поэтому, заменяя x_n на x будем иметь

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f_2(x_1,x_2)+...+(x-x_1)...(x-x_{n-1})f_n(x_1,...,x_{n-1},x) \quad (4)$$

Если исключить узел x_{n-1}, то формула примет вид

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f_2(x_1,x_2)+...+(x-x_1)...(x-x_{n-2})f_{n-1}(x_1,...,x_{n-2},x) \quad (5)$$

Составляем (4)-(5) $\Rightarrow$

$$f_n(x_1,...,x_{n-1},x)=\left(f_{n-1}(x_1,...,x_{n-2},x)-f_{n-1}(x_1,...,x_{n-2},x_{n-1})\right)\Big/(x-x_{n-1}) \quad (6)$$

(6) $\Rightarrow$ при $n=2$ $\qquad f_2(x_1,x)=\left(f_1(x)-f_1(x_1)\right)\Big/(x-x_1)$

$$n=3 \qquad f_3(x_1,x_2,x)=\left(f_2(x_1,x)-f_2(x_1,x_2)\right)\Big/(x-x_2)$$

....

Преимущество этих формул в том, что все последующие вычисляются через предыдущую.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ имеет n - ую производную на $[a,b]$ $a\le x_1<x_2<\ldots<x_n\le b$, тогда имеет место формула

$f(b)=P_n(b)-Q(b)$, где $Q(b)=\dfrac{f^n(c)}{n!}(b-x_1)(b-x_2)\cdot\ldots\cdot(b-x_n)$

$P_n(x)$ - интерполяционный многочлен Лагранжа.

Приближенные методы решения уравнений

Метод хорд.

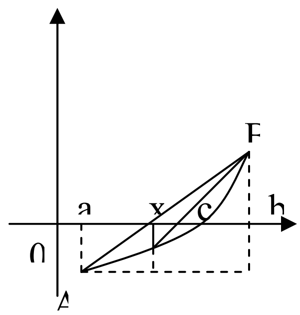
Пусть $y=f(x)$ - функция непрерывная на $[a,b]$

$f(a)\cdot f(b)<0$

$\exists! c\in[a,b]: f(c)=0$

c - корень уравнения $f(x)=0$

$f(a)<0, f(b)>0$



$\dfrac{x_1-a}{0-f(a)}=\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$ из подобия треугольников

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) \qquad (1)$$

если $f(x_1)>0,\ b:=x_1,\ a:=a$, переходим к $[a;x_1]$; если $f(x_1)<0,\ a:=x_1,\ b:=b$, переходим к $[x_1;b]$. И так далее. Получаем последовательность $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$. Процесс продолжается до тех пор, когда становится $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$.

Метод касательных (Ньютона).

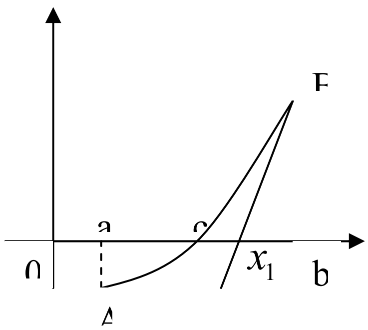
Пусть $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема, т.е. $f(x)$ имеет в каждой внутренней точке производную, а на концах отрезка $[a,b]$ вторую правую производную и левую.

Пусть $f''(x) \neq 0$ на (a,b), т.е. $[a,b]$ является единым участком выпуклости.

$x_0 = a$ либо $x_0 = b : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \qquad f''(x_0) > 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

В точке x_0 строится касательная, пересекающая *Ox*; в x_1 - первое приближение точки c.

$x_0 = b$



Уравнение касательной в точке $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = 0 \quad x = x_1 \to x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$(x_1, f(x_1)), \;\; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

....

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

<u>Лекция 31</u>

<u>Тема</u>. Векторная функция. Предел и непрерывность векторной функции. Производная векторной функции. Годограф.

Векторная функция

Если каждому значению переменной t из некоторого множества $\{t\}$ ставится в соответствие определенный вектор $\bar{r}(t)$, то говорят, что на множестве $\{t\}$ задана векторная функция $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные орты

(x, y, z) - координаты вектора

Задание векторной функции $\bar{r} = \bar{r}(t)$ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Векторная функция имеет наглядное представление.

Определение. Годографом вектора $\bar{r}(t)$ называется геометрическое место концов этого вектора при различных t, если его каждый раз откладывать от начала координат.

Определение. $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{a} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : |t - t_0| < \delta \Leftrightarrow \left| \bar{r}(t) - \bar{a} \right| < \varepsilon$

$\left| \bar{r}(t) - \bar{a} \right| = \sqrt{\left(x(t) - ax\right)^2 + \left(y(t) - ay\right)^2 + \left(z(t) - az\right)^2}$.

Определение. Функция $\bar{r}(t)$ - непрерывна в $t = t_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : |t - t_0| < \delta \Leftrightarrow \left| \bar{r}(t) - \bar{r}(t_0) \right| < \varepsilon$.

$\bar{r}(t)$ имеет предел в t_0 $\Leftrightarrow$ имеют пределы скалярные функции $x(t), y(t), z(t)$.

Производной $\bar{r}'(t)$ в точке t называется предел $\bar{r}'(t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$

$\bar{r}'(t)$ - существует $\Leftrightarrow \exists x'(t), y'(t), z'(t)$.

Пользуясь представлениями векторных функций через скалярные, нетрудно доказать правила дифференцирования произведения векторных функций

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2(t)\right)=\frac{d\bar{r}_1(t)}{dt}\cdot\bar{r}_2(t)+\bar{r}_1(t)\cdot\frac{d\bar{r}_2(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}_1(t)\times\bar{r}_2(t)\right)=\frac{d\bar{r}_1(t)}{dt}\times\bar{r}_2(t)+\bar{r}_1(t)\times\frac{d\bar{r}_2(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t),\bar{r}_3(t)\right)=\left(\frac{d\bar{r}_1(t)}{dt}\cdot\bar{r}_2(t)\bar{r}_3(t)\right)+\left(\bar{r}_1(t)\cdot\frac{d\bar{r}_2(t)}{dt}\cdot\bar{r}_3(t)\right)+\left(\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2(t)\frac{d\bar{r}_3(t)}{dt}\right)$$

Лекция 32

Тема. Счетные и несчетные множества. Теорема Кантора о множестве всех подмножеств данного множества. Несчетность множества последовательностей, состоящих из единиц и нулей. Множество мощности континуума.

Счетные и несчетные множества

Определение. Множества A, B эквивалентны, если между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие.

$\forall a\in A \qquad \exists! b\in B$

$\forall b\in B \qquad \exists! a\in A$

$F: A\to B$

Определение. Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Утверждение. множество всех рациональных чисел является счетным.

Утверждение. сумма конечного или счетного числа счетных множеств счетно.

Теорема Кантора. (О множестве всех подмножеств) Совокупность $z=\Omega(X)$ сама образует множество, не эквивалентное X.

Замечание. Эта теорема справедлива и для пустого и для конечного множества.

W - мощность множества

$W(\varnothing) = 0$

$W(\Omega(\varnothing)) = 1$

$X = \{1, 2, \ldots, k\}$

$W(X) = k$

$W(\Omega(X)) = 2^k$

$X : W(X) = \omega$

$W(\Omega(X)) = 2^\omega$

Определение. Бесконечное множество, не эквивалентное множеству натуральных чисел, называется несчетным.

Утверждение. Множество точек отрезка $[0,1]$ имеет мощность континуума.

Лекция 33

Тема. Евклидовы пространства. Метрические пространства.

Множество $\boldsymbol{R}^k$. Векторное пространство над полем вещественных чисел. Скалярное произведение векторов. Норма вектора. Евклидово пространство.

Метрические пространства. Метрика, или функция расстояния. Выпуклое множество. Окрестность точки. Предельная точка. Изолированная точка. Замкнутое множество. Внутренняя точка. Открытое множество. Дополнение множества. Совершенное множество.

Лекция 34

Тема. Метрические пространства. Компактные множества.

Теорема. Всякая окрестность является открытым множеством.

Теорема. Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Теорема. Для любого семейства множеств, конечного или бесконечного, Дополнение объединения множеств семейства совпадает с пересечением дополнений этих множеств.

Теорема. а) объединение любой совокупности открытых множеств является открытым множеством;

б) пересечение любой совокупности замкнутых множеств является замкнутым множеством;

в) пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;

г) объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Множество, открытое относительно другого множества.

Компактные множества. Открытое покрытие множества. Конечное подпокрытие. Замкнутость и ограниченность компактного множества.

Лекция 35

Тема. Канторово совершенное множество. Принцип неподвижной точки для сжимающего отображения отрезка.

Пример построения канторова совершенного множества.

Связные множества. Связные подмножества вещественной прямой.

Пример неизмеримого множества.

Теорема о неподвижной точке для сжимающего отображения отрезка. Уравнение Кеплера.

Лекция 36

Тема. Обобщение понятия предела по Гейне на функции, сходящиеся по базе множеств.

Предел функции по Гейне. Теорема о сходимости функции по Коши и по Гейне.

Последовательность, фундаментальная по базе.

Последовательность, монотонная по базе.

Основная последовательность окончаний.

Эквивалентность понятия пределов функции по Гейне и по Коши.

Частичный предел по базе. Верхний и нижний предел по базе. Верхнее и нижнее предельные числа. Колебание функции по базе.

План – конспект лекций по математическому анализу
2- ой семестр

Лекция 1

Тема. Неопределенный интеграл

Определение. Непрерывная функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на (a,b), если в каждой точке x этого промежутка $\forall x \in (a,b)$, быть может, за исключением конечного числа точек выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$- первообразные для $f(x)$ на (a,b). Тогда $\exists\ c: F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in (a,b)$.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на данном интервале называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Замечание. Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал первообразной, т.к. $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ имеет место следующее равенство $\int dF(x) = F(x) + c$, $d(\int f(x)dx) = dF(x) = f(x)dx$, $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Свойства неопределенного интеграла

1. Следующие равенства эквивалентны:

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow (\int f(x)dx)' = (\int g(x)dx)' \Leftrightarrow d(\int f(x)dx) = d(\int g(x)dx$$

2. Линейность интеграла

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx\,,\ \alpha \in R$$

3. Правило интегрирования по частям

$$\int u(x)dvx = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

$dv(x) = v'(x)dx$, $du(x) = u'(x)dx$, $dv(x) = v'(x)$, $du(x) = u'(x)dx$.

4. Правило замены переменной

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Интегралы от элементарных функций.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

4. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + c$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{ar}\,c\sin x + c$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

8. $\int e^x dx = e^x + c$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

10. $\int \cos x dx = \sin x + c$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

13. $\int shx = chx$

14. $\int chx = shx$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -chx + c$

Лекция 2, 3

Тема. Алгебраические многочлены

Определение. Алгебраическим многочленом n-ой степени называется уравнение вида: $P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z + c_n$, $c_0 \neq 0$, $z = (x, y) = x + iy$, $c_0, c_1, ..., c_n -$ постоянные коэффициенты.

Определение. Корнем многочлена называется число $P_n(z) \Leftrightarrow P_n(b) = 0$.

Теорема. Многочлен $P_n(z)$ ненулевой степени $n \neq 0$ делится на двучлен $(z - b)$, когда b-корень $P(b) = 0$.

Лемма. Если $a \in C$ является корнем кратности α $f(z)$, то это число a является корнем кратности $\alpha - 1$ многочлена $f'(z)$.

Теорема. Для того, чтобы комплексное число $a \in C$ являлось корнем кратности α, многочлена $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:

1. $f(a) = f'(a) = ... = f^{(\alpha-1)}(a) = 0$
2. $f^{(\alpha)}(a) \neq 0$

Определение. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$.

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе. В противном случае дробь называется неправильной.

Лемма. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$-правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет число $a \in C$ корнем кратности α. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: a-корень кратности α $Q(z)$. $Q(z)=(z-a)^2\varphi(z)$, $\varphi(a)\neq 0$, тогда для этой дроби справедливо представление: $\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{A}{(z-a)^\alpha}+\dfrac{\psi(z)}{(z-a)^{\alpha-k}\varphi(z)}$, $A=\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$, $\varphi(z)$-многочлен.

Теорема. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$- правильная рациональная дробь, $Q(z)=(z-a)^\alpha(z-b)^\beta...(z-c)^\gamma$, тогда справедливо следующее представление: $\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{A_1}{(z-a)^\alpha}+\dfrac{A_2}{(z-a)^{\alpha-1}}+...+\dfrac{A_\alpha}{(z-a)}+\dfrac{B_1}{(z-b)^\beta}+...+\dfrac{C_\gamma}{(z-c)}$, $A_1,A_2,...,C_\gamma$- постоянные комплексные числа.

Теорема. Если $a\in C$-корень алгебраического многочлена $f(z)$ с вещественными коэффициентами и сопряженное ему комплексное число $\bar{a}$ тоже является корнем многочлена $f(z)$, прием кратность его совпадает с кратностью корня a.

Лемма. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$- правильная дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вещественное число a- корень кратности α: $Q(x)=(x-a)^\alpha\varphi(x)$, $\varphi(a)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}+\dfrac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}$, $A=\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$, $\psi(x)$-многочлен.

<u>Лекция 4, 5</u>

<u>Тема</u>. Интегрирование рациональных дробей

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и рациональной дроби.

$$n \ge m\,, \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Q_m(x)S_l(x) + R_k(x)}{Q_m(x)} = S_l(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}\,, \quad m + l = n\,.$$

ТИПЫ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

1. $\dfrac{B}{x-b}$

2. $\dfrac{B}{(x-b)^{\beta}}$, $\beta > 1$

3. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)}$, $p^2 - 4q < 0$

4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^2}$, $\alpha > 0$

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Определение. Делителем двух многочленов $f(z), \varphi(z)$ называется любой многочлен, на который делятся оба многочлена $f(z), \varphi(z)$. Наибольший общий делитель двух многочленов называется такой их делитель, который делится на любой другой делитель этих двух многочленов.

Пусть требуется найти НОД $f(z)$, $\varphi(z)$. Представим

$$f(z) = \varphi(z)q(z) + r_1(z)\,, \ \deg r_1(z) < \deg \varphi(z)\,.$$

$$\varphi(z) = r_1(z)q_1(z) + r_2(z)\,, \ \deg r_2(z) < \deg r_1(z)$$

$$r_1(z) = r_2(z)q_2(z) + r_3(z)\,, \deg r_3(z) < \deg r_2(z)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{k-2}(z) = r_{k-1}(z)q_{k-1}(z) + r_k(z) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)q_k(z) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Здесь степень $r_j(z)$ уменьшается по сравнению с $r_{j-1}(z)$ по крайней мере на единицу. Процесс разложения обязательно закончится по крайней мере $r_k(z)=c_0$. Утверждается , что последний, отличающийся от нуля, остаток $r_k(z)$ является наибольшим общим делителем $f(z)$, $\varphi(z)$. Действительно, поднимаясь вверх от уравнения r_{r+1} к r_1, заметим, что $r_k(z)$ делит многочлены $r_{k-1}(z), r_{k-2}(z),...$, а значит и $f(z)$, $\varphi(z)$. С другой стороны, если некоторый многочлен $r_0(z)$ является делителем $f(z)$, $\varphi(z)$, то из первой формулы следует, что $r_0(z)$ является делителем $r_1(z)$. Опускаясь до к-го уравнения, получаем, что $r_0(z)$ является делителем $r_1(z)$. Описанный процесс нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов называется алгоритмом Евклида.

МЕТОД ОСТРОГРАДСКОГО

Метод выделения рациональной части интеграла от правильной дроби.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная несократимая дробь.

$$Q(x)=(x-b_1)^{\beta_1}...(x-b_m)^{\beta_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\alpha_1}...(x^2+p_nx+q_n)\alpha_n \quad (1)$$

Тогда рациональная часть интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ равна сумме правильных рациональных дробей, знаменатели которых соответственно равны $(x-b_1)^{\beta_1-1}$, $\dots,(x-b_m)^{\beta_m-1}$, $(x^2+p_1x+q_1)^{\alpha_1-1},\dots,$ $(x^2+p_nx+q_n)^{\alpha_n-1}$ и представляют собой правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой $Q(x)$ является произведением всех сомножителей.

Поскольку нерациональная функция, полученная при интегрировании дробей вида $\frac{A}{x-b}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, то сумма простых дробей, интегралы которых представляют собой нерациональные функции, равные правильной рациональной дроби $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, знаменатель которой равен $Q_2(x) = (x - b_1)(x - b_2)...(x - b_m)(x^2 + p_1 x + q_1)...(x^2 + p_n x + q_n)$ (3). Таким образом, приходим к формуле Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (4)$$

$Q_1(x), Q_2(x)$ определены и они могут быть вычислены без разложения многочлена $Q(x)$ на производные неприводимых множителей.

$Q_1(x)$ представляет собой НОД двух многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$. И может быть вычислен при помощи алгоритма Евклида.

Многочлен $Q_2(x)$ представляет собой частное от $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ и может быть вычислен в результате деления столбиком. $P_1(x), P_2(x)$ определяются как многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых на единицу меньше степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для нахождения неопределенных коэффициентов дифференцируют (4) , приводят к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях.

Лекция 6

Тема. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

Определение. Одночленом степени n двух переменных x и y называется выражение $x^{k_1} y^{k_2}$

Определение. Многочленом степени n двух переменных x и y называется линейная комбинация всех одночленов степени $k \le n$, т.е. $P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + ... + a_{20}x^2 + ... + a_{0n}y$

Определение. Рациональной функцией $R(x, y)$ двух переменных x и y называется отношение вида $R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$

1. $\int R(\sin x, \cos x) dx$

2. $\int R(\sin x)\cos x dx$

3. $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$

Лекция 7

Тема. Определенный интеграл.

Определение. Конечное множество $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ называется разбиением отрезка $[a,b]$, если имеется такое соотношение $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Определение. Разбиение T_2 называется измельчением T_1, если имеет место $T_1 \subset T_2$. $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ -длина отрезка Δ_k.

Определение. Совокупность точек $V = \{x_0, x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n\}$ называется размеченным разбиением отрезка $[a,b]$.

Определение. Сумма $\sigma(V) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ - интегральная сумма функции.

Определение. Число I называется определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \Delta_V < b \Rightarrow |\sigma(v) - I| < \varepsilon, I = \lim \sigma(V)$, $I = \lim \sigma(V), \Delta V \to 0$, $I = \int_a^b f(x)dx$.

Определение. Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана, называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, тогда она ограничена на этом же отрезке.

КРИТЕРИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Определение. Верхней суммой Дарбу функции $f(x)$ на $[a,b]$ отвечающей разбиению $T=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ называется сумма $S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, $M_k=\sup f(x)$, $x\in\Delta_k$.

Определение. Нижней суммой Дарбу называется $s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$, $m_k=\inf f(x)$, $x\in\Delta_k$.

Определение. Число $I^*=\inf S(T), T\in A'$-верхний интеграл $f(x)$ на $[a,b]$, а число -$I_*=\sup s(T), T\in A'$-нижний интеграл $f(x)$ на $[a,b]$, A'- множество неразмеченных разбиений.

Лекция 8

Тема. Свойства сумм Дарбу.

1. $\forall V$ имеем $s(T(V))\le\sigma(V)\le S(T), V$-размеченное разбиение.

2. T_0-фиксированное разбиение, $\alpha(T_0)$- множество разметок этого разбиения, то

$\forall k\exists\xi_k\in\Delta_k : f(\xi_k)=m_k$ (*)

$\left\{\begin{matrix} s(T_0)=\inf\sigma(V), V\in\alpha(T_0) \\ S(T_0)=\sup\sigma(V), V\in\alpha(T_0)\end{matrix}\right\}$, используя (*).

3. $s(T_1)\le S(T_2)$, $\forall T_1,T_2\in A'; T_3=T_1\cup T_2 \Rightarrow S(T_1)<s(T_3)\le S(T_3)\le S(T_2)$.

4. Для ограниченной функции верхние и нижние интегралы существуют. Для любого разбиения T: $s(T)\le I_*\le I^*\le S(T)$.

Теорема. (Критерий Римана). Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на $[a,b]$ необходимо и достаточно $\lim(S(T)-s(T))=0, \Delta_T\to 0$.

Лекция 9

Тема. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Теорема. Всякая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x) \in R[a,b]$.

Теорема. Всякая функция ограниченная и монотонная на $[a,b]$ интегрируема на нем.

Теорема. Всякая ограниченная на $[a,b]$ функция, непрерывная всюду за исключением конечного числа разрывов, интегрируема на этом отрезке (кусочно-непрерывная функция).

Лекция 10

Тема. Свойства определенного интеграла.

Пусть $f(x) \neq 0$ в конечном числе точек $[a,b]$, в остальных точках $f(x) = 0$. Тогда $f(x) \in R[a,b]$ и $\int_a^b f(x)dx = 0$.

1. $$\begin{aligned} & f(x), g(x) \in R[a,b] \Rightarrow \\ & a) f(x) + g(x) \in R[a,b] \\ & \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

$$\forall k \in R \exists kf(x) \in R[a,b]$$
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3 $$\begin{aligned} & a) f(x) \in R[a,b], f(x) \geq 0 на [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \\ & b) f(x) \in R[a,b], f(x) \geq 0 на [a,b] \exists x_0 \in R[a,b] : f(x_0) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0 \end{aligned}$$

4 Если $f(x) \in C[a,b], f(x) \geq 0$ и $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0, \forall x \in [a,b]$.

5 $f(x) \geq g(x) на [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

6 $m \leq f(x) \leq M на [a,b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

7 $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow |f(x)\in R[a,b]|$ и имеет место оценка $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\geq \int\limits_a^b |f(x)\,dx|$.

8 $f(x), g(x)\in R[a,b]\Rightarrow f(x)g(x)\in R[a,b]$.

Теорема. (Об интегрируемости сложной функции).

Пусть $f(x)\in R[a,b]$, $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x), M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

$\varphi(y)\in C[m,M]\Rightarrow h(x)=\varphi(f(x))\in R[a,b]$.

Лекция 11

Тема. Аддитивность интеграла Римана.

Теорема. $f(x)\in R[a,b]\Leftrightarrow \forall c\in[a,b]: f(x)\in R[a,c], f(x)\in[c,b]$ выполняется $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Дополнительно по определению предполагают $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$.

ИНТЕГРАЛ РИМАНА КАК ФУНКЦИЯ ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛА

Теорема. Если

$f(x)\in R[a,b]\Rightarrow \forall x\in[a,b], f(x)\in R[a,x]\Rightarrow \exists F(x)=\int\limits_a^x f(u)\,du,\ F(x)=\int\limits_a^x f(u)\,du\in C[a,b]$.

Теорема (Ньютона-Лейбница). Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и имеет не более конечного числа точек разрыва, тогда $F(x)=\int\limits_a^x f(u)\,du$ является первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$ и для любой первообразной $\Phi(x)$ имеет место формула (Ньютона-Лейбница)

$$\int\limits_a^b f(u)\,du=\Phi(b)-\Phi(a), \int\limits_a^b f(u)\,du=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема. Пусть $f(x) \in C[x_0, x_1], [a,b] \subset [x_0, x_1], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b,$ $\varphi(t) \in C[\alpha, \beta]$, $x_0 \le \varphi(t) \le x_1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема. Пусть

$$f(x), g(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Лекция 12

Тема. Среднее значение определенного интеграла.

Теорема. (О среднем значении определенного интеграла). $f(x), g(x) \in R[a,b]$, $g(x) \ge 0, m \le f(x) \le M : m = \inf\limits_{[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Пусть $f(x) \in C[a,b], g(x) \in R[a,b], g(x) \ge 0 \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Пусть $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Величину $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ - среднее значение $f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема. $$f(x) \in C[a,b], g(x) \in C'[a,b], g'(x) \ge 0 \Rightarrow$$
$$\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx$$

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ.

Утверждение. Пусть $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$ $n+1$- раз непрерывно дифференцируема на $[a,b]$.

$f(b)=f_n(a,b)+R_n(a,b)$, где $f_n(a,b)$- многочлен Тейлора. $f_n(a,b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+...+\frac{f^n(a)(b-a)^n}{n!}$.

$R_n(a,b)=\frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$.

Замечание. Если сделать замену $t=a+u(b-a)$, $0\le u\le 1$ тогда $R_n(a,b)=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^1 f^{(n+1)}(a+u(b-a))(1-u)^n\,du.$

Замечание. Если применить к остатку $R_n(a,b)$ теорему о среднем, то можно получить формулу Тейлора с остаточным членом, а именно

$$R_n(a,b)=\frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{n+1}(t)(b-t)^{n+1-\alpha}(b-t)^{\alpha-1}dt=\frac{1}{n!\alpha}f^{n+1}(c)(b-c)^{n+1-\alpha}(b-a)^{\alpha}.$$

Лекция 13

Тема. Интегральные неравенства.

1.Неравенство Гельдера.

Теорема. Пусть $p,q>0:\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, f(x),g(x)\in R[a,b]\Rightarrow\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right|\le$

$$\le\left(\int\limits_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int\limits_a^b|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Замечание. Если $p=q=2$, то неравенство Гельдера называется неравенством Коши- Буняковского.

4. НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО.

Теорема. Пусть $p \geq 1, f(x), g(x) \in R[a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b \left| f(x) + g(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b \left| f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left| g(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

5. Теорема. Пусть $f_1(x), ..., f_m(x) \in R[a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\int_a^b f_1(x)dx \right)^2 + ... + \left(\int_a^b f_m(x)dx \right)^2} \leq \int_a^b \sqrt{f_1^2(x) + ... + f_m^2(x)}dx.$$

КРИТЕРИЙ ЛЕБЕГА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУКЦИИ ПО РИМАНУ

Определение. Множество точек A на числовой прямой имеет лебегову меру нуль, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечное или счетное покрытие множества A интервалами с общей длиной, не превосходящей ε.

$\forall \varepsilon > 0 \exists I_1, ..., I_n$ с длинами $\delta_1, ..., \delta_n : A \subset \cup T_n, S_n = \delta_1 + ... + \delta_n < \varepsilon, \forall n \in N, \mu(A) = 0$.

Утверждение. Любое не более чем счетное множество точек X_n на численной прямой имеет Лебегову меру нуль.

Утверждение. $B \subset A, n(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$. Это следует из того, что любое множество A будет являться покрытием множества B.

Определение. Колебанием функции $f(x)$ в т. x_0 называется величина $\omega(x_0) = \omega_f(x_0) \inf_{\delta > 0} \sup_{x,y \in I} (f(x) - f(y))$, $\omega(x_0) = \inf_{\delta > 0} (M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0))$, где $M_\delta(x_0) = \sup_{x \in I(\delta, x_0)} f(x)$, $m_\delta(x_0) = \inf_{x \in I(\delta, x_0)} f(x)$.

Лемма. $f(x)$ непрерывна в т. $x_0 \Leftrightarrow \omega_f(x_0)=0$.

Теорема. (критерий Лебега) Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ на $[a,b]$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы множество D точек разрыва этой функции имела Лебегову меру нуль $\mu(D)=0$.

Лекция 14

Тема. Несобственные интегралы.

Несобственный интеграл является обобщением понятия интеграла Римана.

1. функции зададим на бесконечном промежутке

$\int\limits_a^\infty f(x)dx, \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx, \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ - несобственные интегралы 1 рода.

2. на неограниченной функции $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение. Пусть a – вещественное число, $\forall A>a, f(x)\in R[a,A]: F(A)=\int\limits_a^b f(x)dx$ при $A\to+\infty$ $\exists I=\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)$-несобственный интеграл 1 рода.

Аналогично определяются несобственные интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx$: $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx+\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

КРИТЕРИЙ КОШИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема. (критерий сходимости несобственного интеграла 1 рода) Для сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Коши $\forall\varepsilon > 0 \exists B = B(\varepsilon): \forall A_1, A_2 > B: \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Теорема. (общий признак сравнения). Пусть $\forall x \in [a, +\infty]$ выполняется условие $|f(x)| \le |g(x)|$ и пусть $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$- сходится, тогда будет сходиться и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится ,если сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$.

Определение. $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ условно сходится $\Leftrightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$-сходится, а $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$-расходится.

Теорема. (признак Дирихле). Пусть $\forall x \in [a, +\infty], F(x) = \int\limits_a^{x} f(u)\,du$- ограничена и $g(x) \ge 0$-невозрастающ. функция: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0 \Rightarrow I = \int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\,dx$- сходится.

Теорема (признак Абеля): Пусть $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$-сходится и $g(x) \ge 0$ неогран, монотон. и ограничена снизу на промежутке $[a, +\infty] \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\,dx$-сходится.

Лекция 15

Тема. Несобственные интегралы 2 рода.

Определение. Пусть 1) $f(x)$-задана и неогран на $[a,b]$.

2) $\forall\alpha(a\le\alpha\le b), f(x)$-огранич., интегрируемая на $[a,\alpha]$ функция.

3) $\exists I=\lim\limits_{\alpha\to b-}\int\limits_a^\alpha f(x)dx\Rightarrow I=\int\limits_a^b f(x)dx$-несобственный интеграл 2 рода.

Замечание. 1. b - особая точка I.

2 Если предел I существует ,то несобственный интеграл сходится, если нет-расходится.

3. Если особая точка интеграл является нижним пределом, то несобственный интеграл определяется как $I=\lim\limits_{\alpha\to a+}\int\limits_\alpha^b f(x)dx$.

4. Если особая точка лежит внутри отрезка $[a,b]$: $a<c<b$, то $I=\lim\limits_{\alpha\to c-}\int\limits_a^\alpha f(x)dx+\lim\limits_{\alpha\to c+}\int\limits_\alpha^b f(x)dx$.

5. Для случая $a<c<b$ имеет место определения значения неопределенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ в смысле главного значения по Коши, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\alpha} f(x)dx+\int_{c+\alpha}^b f(x)dx\right)$.

Рассмотрим свойства интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой b. Свойства этого интеграла аналогичны свойствам несобственного интеграла 1 рода.

1. Критерий сходимости несобственного интеграла 2 рода

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\alpha_1, \alpha_2\left(b-\delta < \alpha_1 < \alpha_2 < b\right)$,

$\left|\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

2. Признак сравнения.

$\forall x \in [a,b], |f(x)| \le g(x), \int\limits_a^b g(x)dx$ -сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ -абсолютно сходится.

3. Несобственный интеграл 2 рода называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$.

4. Интеграл условно сходится $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если

A) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ -сходится

B) $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ -расходится.

Замечание. Для интегралов 2 рода справедливы признаки Дирихле и Абеля.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕСОБСТВЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема. Пусть $\varphi'(t) \in C[\alpha,\beta], \varphi'(t) \ne 0, f(x) \in C[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$, тогда $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\varphi'(t)\right)dt$.

Теорема.

1. $f'(x), g'(x) \in C[a,+\infty]$.

2. сходится хотя бы один из $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$ или $\int\limits_a^{+\infty} f(x)'g(x)\,dx$.

3. $\exists l_1 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x), a$-особая точка, то $\exists l_2 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)$. Тогда существуют оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$.

Лекция 16

Тема. Кривые в пространстве R^n

Определение. Кривой l в пространстве R^n называется множество точек $M \subset R^n$, определяемое значениями $(\varphi_1(t),...\varphi_m(t))$ некоторой вектор-функции $x_1 = \varphi_1(t), x_m = \varphi_1(t)$ или $\overline{r} = \overline{r}(t)$, заданной на некотором промежутке $I \subset R^n$ вещественной прямой и непрерывной в каждой его точке, $I = [a,b]$.

Определение. $\overline{c} = (c_1,...,c_m) \in L$ называется кратной точкой кривой L, если имеются по крайней мере 2 разные точки из промежутка $I : r(t_1) = r(t_2) = \overline{c}$.

Определение. Кривая l, имеющая только конечное число кратных точек, называется параметризуемой кривой. Кривая, не имеющая кратных точек, за исключением быть может концевых точек промежутка I, называется простой кривой.

Определение. Если только в концевых точкках t_1, t_2 значения вектор-функции совпадают, то кривая L называется простой замкнутой кривой.

Лемма. Всякую параметризуемую кривую можно представить в виде объединения конечного числа простых кривых.

Определение. Функция $f(t)$, непрерывная на $[a,b]$ называется кусочно-линейной, если $\forall t \in [a,b]$ за исключением конечного числа точек $t_1,...t_{n-1}$

производная $f'(t)$ является постоянной на каждом из отрезков $(t_k;t_{k+1})$, т.е. $f(t)=\alpha_k t+\beta_k$ - линейная функция.

Определение. Простая кривая L называется ломаной линией, если функции $(\varphi_1(t),...\varphi_m(t))$ являются кусочно-линейными.

Каждая ломаная состоит из отдельных отрезков, которые называются ее звеньями, а концы этих отрезков точек $A_1,...,A_n$ называются ее узлами. Если $A_k=(x_{1k},...,x_{mk})$, то длина ломаной равна $|l|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_{1k}-x_{1k-1})^2+...+(x_{mk}-x_{mk-1})^2}$.

Определение. Ломаная l, соответствующая разбиению $T=[a,b]$, называется вписанная в кривую L, заданную функциями $x_1=\varphi_1(t),x_m=\varphi_1(t)$, $t\in[a,b]$, если начальная точка звена совпадает с предыдущим, и узлы ломаной лежат на L.

Определение. Простая кривая L называется спрямляемой, если длины $|l|$ всех ломаных l, вписанных в кривую L образуют оганиченное сверху множество. Длиной $|L|$ спрямляемой кривой L называется число, равное точной верхней грани длин всех ломаных, вписанных в данную кривую.

Теорема. (о длине дуги кривой). Пусть $\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)$ задают простую кривую L, имеют непрерывную производную на $[a,b]\Rightarrow L$ - спрямляема и ее длина $|L|=\int\limits_a^b\sqrt{\left((\varphi'_1(t))^2+...+(\varphi_m'(t))^2\right)}dt$.

Следствие. Пусть $S=S(u)$- длина дуги L, заданной уравнениями $x_1=\varphi_1(t), x_m=\varphi_1(t)$, $a\le t\le u$, тогда для дифференциала длины дуги ds спрвведлива формула $ds: ds^2=dx_1^2+...+dx_m^2$.

Лекция 17

Тема. Мера Жордана.

$\mu(P)$ - площадь простой плоской фигуры P.

Плоская фигура- фигура, которая является объединением конечного числа прямоугольников и треугольников.

Площадь обладает свойствами:

1 Для каждой фигуры P, имеющей площадь, $\mu(P)$ неотрицательна и однозначно определена.

2 Площадь квадрата со стороной $a=1$, также равна $\mu(P)=1$.

3 $\mu(P)$ является аддитивной, т.е. $p=p_1\cup p_2, p_1\cap p_2=\varnothing$, то $\mu(P)=\mu(p_1)+\mu(p_2)$

4 $\mu(P)$ является инвариантной относительно всех движений плоскости, т.е. если p_1, p_2 можно совместить путем поворота или параллельного переноса, то их меры совпадают: $\mu(p_1)=\mu(p_2)$.

5 $\mu(P)$ является монотонной, т.е. если p_1 содержится в p_2, то мера $\mu(p_1)\le\mu(p_2)$.

В дальнейшем простейшей будем называть фигуру, являющуюся объединением конечного числа стандартных прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Площадь такого прямоугольника есть произведение длин его смежных сторон. В общем случае для плоской ограниченной фигуры введем понятие верхней площади фигуры, как точную нижнюю грань площадей $\mu(P_1)$ всех открытых простых плоских фигур, описанных вокруг P, $P \subset P_1$, а также нижнюю площадь фигуры как верхнюю грань площадей $\mu(P_2)$ всех замкнутых простых фигур P_2, вписанных в P.

Верхнюю площадь обозначим $\mu^*(P)$, а нижнюю- $\mu_*(P)$. Для простых фигур P $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$.

$$\mu^*(P) = \inf_{P \subset P_1} \mu(P_1),$$

$$\mu_*(P) = \sup_{P \subset P_2} \mu(P_2).$$

Такие же рассуждения применимы по отношению к обьемам тел.

КРИТЕРИИ ИЗМЕРИМОСТИ МНОЖЕСТВА ПО ЖОРДАНУ

∂P - множество всех граничных точек множества P, т.е. множество таких точек, каждая окрестность которой содержит как точки, принадлежащие P, так и не принадлежащие ей.

Лемма. (о связности отрезка на плоскости). Пусть на плоскости задан отрезок l с концами A_1, A_2 и некоторое множество $M : A_1 \in M, A_2 \notin M$ тогда $\exists A_0 \in l : A_0 \in \partial M$.

Теорема. (критерий квадрируемости фигуры), измеримость плоской мерой. Фигура P квадрируема $\Leftrightarrow$ $\mu(\partial P) = 0$.

Лекция 18

Тема. Свойства меры Жордана.

1 Множество измеримых фигур замкнуто относительно $\cup, \cap, \setminus$ множеств. Если P_1, P_2-измеримые множества, то $P_1 \cup P_2, P_1 \cap P_2, P_1 \setminus P_2$ тоже измеримы.

2 Свойство монотонности $\mu(P)$. Если $P_1 \subset P_2 \Rightarrow$ всякая простейшая фигура, описанная вокруг P_2 содержит P_1.

3 $\mu(P)$ инвариантна относительно всех движений плоскости параллельного переноса и поворота.

4 Свойство аддитивности меры Жордана. Заметим, что для простых фигур справедливо неравенство $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$. Также верно равенство $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) + ... +$.

ИЗМЕРИМОСТЬ СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

Лемма. Пусть L- кривая, заданная уравнениями вида $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a,b]$ и является спрямляемой кривой, тогда длина $s(t)$- часть этой кривой, соответствующая отрезку $[a,t]$ является непрерывной и монотонной возрастающей функцией параметра t.

Теорема. Пусть L- спрямляемая кривая, тогда она имеет плоскую меру Жордана $\mu(L) = 0$.

Следствие. Пусть граница фигуры P является спрямляемой кривой, тогда P измерима по Жордану.

Лекция 19

Тема. Измеримость криволинейной трапеции.

Теорема. Пусть $f(x)$ ограничена и неотрицательна на $[a,b]$ и $f(x) \in [a,b] \Leftrightarrow P$ измерима по Жордану.

Лекция 20

Тема. Объем тела.

Лекция 21

Тема. Физические приложения определенного интеграла.

Лекция 22

Тема. Приближенные методы вычислений определенного интеграла.

Лекция 23, 24

Тема. Элементы теории меры и интеграла Лебега.

ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МЕРЫ ЛЕБЕГА

Рассмотрим случай плоской меры Лебега.

Определение. Пусть ограниченная плоская фигура P покрыта конечным или счетным множеством стандартных открытых прямоугольников h_n, n = 1,… . Совокупность H = $\{h_n\}$ всех этих прямоугольников назовем **покрытием** плоского множества P (или фигуры P). Величину

$$\mu_H = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{s=1}^{n} h_s\right),$$

назовем мерой покрытия H. Множество H называется простейшим множеством.

Определение. Число $\mu^*\left(P\right)=\inf\limits_{H}\mu_H$, где инфимум берется по всем возможным покрытиям простейшими множествами фигуры P, называется верхней мерой Лебега фигуры P.

Очевидно, имеем $0\le\mu^*\left(P\right)<+\infty$, поскольку в силу ограниченности фигуры P найдется стандартный квадрат K со стороной l такой, что $P\subset K$. Отсюда получим, что $\mu^*\left(P\right)\le l^2$.

Определение. Пусть $CP=K\setminus P$, где K — стандартный квадрат, покрывающий фигуру P. Нижней мерой Лебега плоского множества P назовем число $\mu_*(P)=\mu(K)-\mu^*(CP)$.

Определение. Плоское множество P называется измеримым по Лебегу, если $\mu^*(P)=\mu(P)=\mu_*(P)$, а число $\mu(P)$ называется плоской мерой Лебега.

Докажем следующий критерий измеримости множества по Лебегу.

Теорема. Пусть A — ограниченное множество. Тогда для измеримости по Лебегу множества A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для всякого $\varepsilon>0$ существовало бы простейшее множество $B=B\left(\varepsilon\right)$, такое, что справедливо неравенство $\mu^*\left(A\Delta B\right)<\varepsilon$. Это значит, что любое измеримое по Лебегу множество с любой степенью точности может быть аппроксимировано простейшими множествами.

Исходя из доказанного критерия, очевидно, имеем, что для любых измеримых множеств A и B, их объединение, пересечение, разность и симметрическая разность являются измеримыми множествами. Более того, если измеримые множества A и B не пересекаются, то $\mu\left(A\cup B\right)=\mu\left(A\right)+\mu\left(B\right)$.

Мы не будем детально изучать свойства множеств, измеримых по Лебегу, но следует отметить, что это ненамного сложнее, чем изучение измеримости по Жордану. Тем не менее, мера Лебега обладает существенным преимуществом перед мерой Жордана, так как помимо свойств инвариантности относительно движений плоскости и монотонности, она обладает свойством счетной аддитивности взамен свойства конечной аддитивности, которым обладала мера Жордана. Уточним, что имеется в виду.

Теорема. Пусть $A_1,...,A_n,...$ — бесконечная последовательность непересекающихся множеств, измеримых по Лебегу. Пусть их объединение $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ является ограниченным множеством. Тогда множество A измеримо по Лебегу, причем $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_1)+...+\mu(A_n)\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_n)$.

Важным следствием доказанного выше свойства счетной аддитивности меры Лебега является измеримость пересечения счетного числа измеримых множеств, а также измеримость объединения счетного или конечного числа измеримых множеств при условии ограниченности этого объединения.

В частности, отсюда имеем измеримость любого ограниченного открытого множества как объединения не более чем счетного числа открытых стандартных прямоугольников. Но тогда и любое замкнутое множество будет измеримым как дополнение до открытого множества, а, следовательно, будет измеримым по Лебегу и любое не более, чем счетное, объединение и пересечение открытых и замкнутых множеств.

свойство меры Лебега: свойство непрерывности**.**

Теорема. Пусть $A_1,...,A_n,...$ — измеримые множества,

и пусть $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ —ограниченное множество. Кроме того, пусть $A_1\subset A_2\subset...\subset A_n\subset...$. Тогда $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

Отметим, что не всякое множество на плоскости измеримо по Лебегу, но неизмеримые множества имеют довольно экзотический вид. Можно поставить вопрос о том, как связаны между собой понятия измеримых множеств для разных размерностей. Например, если мы имеем измеримую плоскую фигуру P и будем пересекать ее прямыми, параллельными одной из осей координат. Тогда в сечении будут получаться линейные ограниченные множества. Измеримы ли они по Лебегу? Этот, вопрос на самом деле имеет принципиально важное значение и вот ответ на него. Да, но за исключением некоторого множества прямых, которое в пересечении с другой осью координат образует множество линейной меры нуль.

Вообще, если какое-нибудь условие выполнено для всех точек множества $M \subset R$, за исключением множества точек M' *С* M, мера которого равна нулю, $\mu(M')=0$, то говорят, что это условие имеет место для почти всех точек множества M. Термин почти все в смысле меры Лебега означает, что некоторое свойство выполняется на всем множестве, за исключением, быть может, множества меры нуль.

Лекция 25, 26

Тема. Интеграл Лебега.

Понятие линейной меры Лебега позволяет расширите класс интегрируемых функций с помощью введения понятия интеграла Лебега. Для того чтобы сказать, что это такое, сначала введем понятие измеримой функции.

Определение. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, называется измеримой на этом отрезке, если для всякого $\forall y \in R$ множество $E=\{x\in[a,b]: f(x)<y\}$, является измеримым множеством на отрезке $[a,b]$ в смысле линейной меры Лебега.

Из свойств меры Лебега имеем, что вместе с множеством E измеримыми будут множества точек $x\in[a,b]$, для которых справедливы соотношения $f(x)\ge y, f(x)=y, z<f(x)\le y$.

В частности, любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция *f(x)* измерима, поскольку множество $I_y = \{x \in [a,b] | f(x) \ge y\}$ будет замкнутым, а любое замкнутое множество является измеримым.

Определение. Сумму $S_n = \sum_{s=0}^{n-1} \mu_s y_s$ назовем интегральной суммой Лебега. Можно доказать, что всегда существует предел $I = \lim_{n\to\infty} S_n$ Этот предел называется интегралом Лебега от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается так: $(L)\int_a^b f(x)\,dx$.

Поскольку для любой интегрируемой по Риману функции множество точек разрыва имеет меру нуль (критерий Лебега), в силу доказанного выше она измерима по Лебегу. Более того, интеграл Лебега от этой функции равен интегралу Римана: $(L)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Заметим, что поэтому для интеграла Лебега используется то же обозначение, что и для интеграла Римана.

Перейдем теперь к рассмотрению неограниченных измеримых функций на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим сначала случай неотрицательной функции $f(x)$. Для любого вещественного числа y определим функцию $f_y(x)$ следующим образом:

$$f_y(x) = \left\{ \begin{matrix} f(x), & f(x) \le y, \\ y, & f(x) > y \end{matrix} \right\}.$$

Эта функция измерима. Тогда интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to\infty}\int_a^b f_y(x)\,dx$.

Если этот предел конечен, то функция $f(x)$ называется суммируемой**.** Очевидно, что суммируемая функция может обращаться в бесконечность лишь на множестве лебеговой меры нуль.

Пусть теперь функция $f(x)$ принимает значения произвольного знака. Тогда определим функции $f_+(x)=\max\left(f(x),0\right)$, $f_-(x)=\max\left(-f(x),0\right)$,

Функция $f(x)$ суммируема**,** если суммируемы обе функции $f_+(x), f_-(x)$, и интеграл от функции $f(x)$ равен разности интегралов от функций $f_+(x), f_-(x)$.

Из определения суммируемой функции непосредственно следует, что:

1) Вместе с $f(x)$ будет суммируемой функция $\left|f(x)\right|$, $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx$.

2) Если $f(x)$ - измерима и $\left|f(x)\right|$ -суммируема, то функция $f(x)$ - суммируема;

3) Если $f(x)$ - измерима и модуль ее не превосходит суммируемой функции $g(x)$*,* то функция $f(x)$ - суммируема;

4) Если $f(x)$ суммируема и $g(x)$ ограниченная измеримая функция, то их произведение является суммируемой функцией;

5) Если $f(x)$ - суммируемая функция и $g(x)$ не совпадает с ней на множестве меры нуль, то функция $g(x)$ - суммируема, и интегралы от этих функций равны между собой.

6) $f(x)$ измерима, $g(x)$ суммируема, $f(x)=g(x)$ на $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Теорема. (теорема Лебега). Пусть на отрезке $[a,b]$ последовательность измеримых функции $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ и пусть для некоторой суммируемой функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$ выполнено неравенство

$\left|f_n(x)\right| \le g(x), \forall x \in [a,b]$. Тогда предельная функция $f(x)$ суммируема и имеет место равенство $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Отметим еще один факт, состоящий в том, что для ограниченной неотрицательной функции интегрируемость по Лебегу эквивалентна измеримости по Лебегу ее криволинейной трапеции.

Лекция 26, 27

Тема. Интеграл Стильтьеса.

Имеется еще одно обобщение понятия интеграла Римана - это интеграл Стильтьеса**.** Он отражает другую особенность интеграла Римана по сравнению с интегралом Лебега. Если мера Лебега и интеграл Лебега вводились для того, чтобы расширить класс измеримых множеств и класс интегрируемых функций, То введением интеграла Стильтьеса мы решаем другую задачу. Дело в том, что на интеграл $I = \int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, т.е. $f(x) \in C[a,b]$.

$I = I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, $I(f)$- функционал, заданный на пространстве непрерывных функций.

Более того, функционал $I(f)$, ставящий всякой функции $f \in C[a,b]$ в соответствие число $I(f)$, называется **линейным функционалом,** если выполняются следующие свойства:

1. Аддитивность: $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$;

2. Однородность: $I(cf) = cI(f), \forall c \in R$;

3. Ограниченность: существует $M > 0$ такое, что для любой функции $f \in C[a,b]$ справедливо неравенство $\left|I(f)\right| \le M\|f\|$. Наименьшее из таких чисел M называется нормой линейного функционала / и обозначается $\|I\|$.

Расширение понятия интеграла Римана в указанном направлении и достигается введением понятия интеграла Стильтьеса**.** Для этого нам потребуется определить новый класс функций.

Определение. Функция $u(x)$ называется функцией с ограниченным изменением или, что то же самое, функцией ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ если существует вещественное число $M>0$ такое, что для любого разбиения T: $\forall T=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ выполняется неравенство $V(u;T)=\sum_{s=1}^{n}\left|u(t_s)-u(t_{s-1})\right|<M$.

Величина, равная $\sup V(u;T)=V_a^b(u)$, называется полным изменением или полной вариацией функции $f(x)$ отрезке $[a,b]$. Отметим следующие свойства функций с ограниченным изменением на отрезке.

1. Сумма двух функций с ограниченным изменением есть функция с ограниченным изменением.

Действительно, пусть $u(x)=f(x)+g(x)$. Тогда для любого разбиения Г отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство $V(u,T)\le V(f,T)+V(g,T)\Rightarrow V_a^b(u)\le V_a^b(f)+V_a^b(g)$. Отсюда следует, что полное изменение $V_a^b(u)$ функции $u(x)$ не превосходит суммы полных изменений функций $f(x)$ и $g(x)$.

2. Ограниченная монотонная функция на отрезке $[a,b]$ функция с ограниченным изменением.

Рассмотрим только случай неубывающей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Имеем $V_a^b(f)=f(b)-f(a)$.

3. Пусть $a<c<b$ и функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$ тогда имеет место равенство $V_a^b(f)=V_a^c(f)-V_c^b(f)$.

4. Каждая функция с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$ может быть представлена как разность двух ограниченных монотонно возрастающих функций.

5. Функция с конечным числом максимумов и минимумов на отрезке $[a,b]$ является функцией с ограниченным изменением.

Определение. Пусть $f(x)$- непрерывная функция и $u(x)$-функция с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$ и пусть $V=\{a=t_0<t_1<...<t_n=b;\xi_1,...,\xi_n\}$ -размеченное разбиение отрезка $[a,b]$ и $T = T(V)$ — соответствующее ему неразмеченное разбиение. Пусть, кроме того, $\Delta_s u=u(t_s)-u(t_{s-1})$, $\sigma(V)=\sigma_u(V)=\sum_{s=1}^{n} f(\xi_s)\Delta_s u$.

Тогда $\sigma(V)$ называется интегральной суммой Стильтьеса.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta_T\to 0}\sigma(V)=I_u(f)$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по функции $u(x)$ на отрезке $[a,b]$, а величина $I=I_u(f)$- интегралом Стильтьеса от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ (или относительно функции $u(x)$) и обозначается так: $I=I_u(f)=\int_a^b f(x)du(x)$.

Этот предел можно рассматривать как предел по базе *B*, окончаниями которой $b=b_\delta$ служат множества, состоящие из размеченных разбиений V с диаметром $\Delta_\delta<\delta$. Следовательно, предел I единственен.

Теорема. (достаточное условие интегрируемости). Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$. Тогда для существования интеграла Стильтьеса $\int_a^b f(x)du(x)$ достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на $[a,b]$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА

1. Если функция $u(x)$ дифференцируема, то имеет место равенство $\int_a^b f(x)du(x)=\int_a^b f(x)u'dx$, где последний интеграл понимается как интеграл Римана.

2. Свойство линейности:

$$\int_a^b \left(f_1(x)+f_2(x)\right)du(x)=\int_a^b f_1(x)du(x)+\int_a^b f_2(x)du(x).$$

3. При $a<c<b$ имеем $\int_a^b f(x)du(x)=\int_a^c f(x)du(x)+\int_c^b f(x)du(x)$.

(свойство аддитивности).

4. Если $f'(x)$ и $u(x)$ интегрируемы по Риману, то имеет место следующее правило интегрирования по частям: $\int_a^b f(x)du(x)=\int_a^b f(x)u(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)u(x)$, где последний интеграл понимается как интеграл Римана.

5. Если $u(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a,b]$ и $f(x)\geq g(x)$ на этом отрезке, то $\int_a^b f(x)du(x)\geq\int_a^b g(x)du(x)$.

Лекция 28, 29

Тема. Общий вид линейного функционала в пространстве *C[a, b]*.

Теорема (Об общем виде линейного функционала в пространстве *C[a,b]*).

1) Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$.Тогда интеграл Стильтьеса $\int_a^b f(x)du(x)$ является линейным функционалом в пространстве $C[a,b]$.

2) Пусть $I(f)$- любой линейный функционал в $C[a,b]$.Тогда существует функция $u(x)$ с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$ такая, что $I(f)$ представляется в виде $I(f)=\int_a^b f(x)du(x)$.

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ

Было показано, что с помощью интеграла Стильтьеса можно выражать линейные функционалы, определенные на пространстве непрерывных функций $C[a,b]$. На примере пространства $C[a,b]$ мы познакомились с функциональным пространством. Может возникнуть вопрос: почему множество непрерывных на $C[a,b]$ отрезке$[a,b]$ функций называется пространством? Ответ достаточно прост. Дело в том, что термин "пространство" по существу эквивалентен термину "множество". Отличие состоит в том, что термин пространство "в чистом виде" употребляется редко, а чаще в сочетании с другими терминами, например: топологическое пространство, метрическое, линейное, нормированное пространства и т.д. Все эти понятия играют важную роль в математике вообще и в математическом анализе в частности.

ПРОСТРАНСТВА

1 Топологические

1.1 Хаусдорфовы

1.2 Линейные топологические

1.1.1 Метрические$\to$Нормированные

1.1.1.1 Полные $\to$Банаховы$\to$Гильбертовы$\to$Евклидовы

1.2 Линейные(векторные)

1.2.1 Нормированные.

Перейдем к определению пространств, указанных выше.

Пусть X - некоторое множество, $\sum = \sum_X$ - множество, состоящее из некоторых подмножеств множества X, т.е. $\sum \subset \Omega_X$ где Ω_X - множество всех подмножеств X. Пусть $\sum$ обладает следующими свойствами:

1. $X \in \sum, \varnothing \in \sum$;

2. а) Если $A, B \in \sum \Rightarrow A \cap B \in \sum$;

б) Объединение любого числа элементов из $\sum$ принадлежит $\sum$.

Для того чтобы указать, что элементами $\sum$ являются некоторые подмножества множества X, говорят, что $\sum$ есть некоторая система подмножеств.

Определение. Каждая система подмножеств $\sum$, удовлетворяющая свойствам 1 и 2, называется топологией на множестве X.

Определение. Пара множеств $\left(X, \sum\right)$называется топологическим пространством.

Часто говорят просто, что X — топологическое пространство, если на нем задана топология $\sum$. Каждый элемент$\sigma \in \sum$, т.е. каждое подмножество а

$\sigma \in X$, принадлежащее системе $\sum$, называется открытым множеством (в топологии $\sum$).

Любое подмножество $A \subset X$ такое, что $X \setminus A \in \sum$, называется замкнутым множеством.

Пусть x-некоторая точка, принадлежащая *X*. Тогда любой элемент $\sigma \in \sum$, которому принадлежит точка *x,* называется окрестностью точки x, т.е. любое открытое множество, содержащее точку *x,* называется ее окрестностью. Фиксированные окрестности точки *x* часто обозначают символом σ_x.

Определение. Топологическое пространство $T = \left(X, \sum\right)$ называется хаусдорфовым, если любые две различные точки x и y этого пространства имеют непересекающиеся окрестности $\sigma_x \cap \sigma_y = \varnothing$.

Определение. Пусть задан декартов квадрат $X^2 = X \times X$ некоторого множества X и пусть на множестве X^2 определена числовая функция $\rho(x_1, x_2)$ со следующими свойствами:

1).для любых $(x_1, x_2) \in X^2, \rho(x_1, x_2) \geq 0, \rho(x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$;

2) для любых $(x_1, x_2) \in X^2$, имеем $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ (симметричность);

3) для любых $x, y, z \in X^2$ справедливо неравенство треугольника: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Тогда пара X, ρ или само множество X называется метрическим пространством, а функция $\rho(x_1, x_2)$ называется метрикой этого пространства, или расстоянием от точки x_1 до точки x_2, или функцией расстояния.

Определение. Последовательность точек $X_1, ..., X_n, ...$ метрического пространства (X, ρ) называется последовательностью Коши или чаще фундаментальной последовательностью, если она удовлетворяет условию Коши, а именно: для всякого числа $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n_1, n_2 > n_0, \rho\left(X_{n_1}, X_{n_2}\right) < \varepsilon$.

Определение. Последовательность $\{X_n \in X\}$ называется сходящейся к точке $a \in X$, если числовая последовательность $\rho_n = \rho(X_n, a) \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$.

Определение. Метрическое пространство (X, p) называется полным, если всякая последовательность Коши сходится к некоторой точке $a \in X$.

Определение. Множество $X = \{x\}$ назовем линейным пространством, если выполнены следующие условия:

1) для любых двух элементов $x, y \in X$ однозначно определен элемент z такой, что $z = x + y$ называемый их суммой, причем:

а) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

б) $x + y = y + x$;

в) $0 + x = x + 0$;

г) $x + (-x) = 0$;

2) $\forall \alpha \in R, \forall x \in X \quad \exists \alpha x \in X$

а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

б) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;

3) операции сложения и умножения

а) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

б) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Примерами линейных пространств являются n-мерное векторное пространство, пространство непрерывных функций $C[a,b]$. Элементы линейного пространства называются векторами.

Определение. Линейное пространство X называется нормированным, если для любого вектора x определена его норма $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:

1)$\|0\| = 0$;

2) для любого $x \neq 0, \|x\| > 0$;

3) для всякого вещественного числа а имеем $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in R$;

4) для любых элементов $x, y \in X$ справедливо неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Заметим, что пространство $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, является нормированным пространством с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Утверждение. Функция $\rho(x, y) = \|x - y\|$, определенная на декартовом квадрате X^2, где X-нормированное пространство, является метрикой на пространстве X.

Определение. Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Теперь мы переходим к определению гильбертова пространства. Для этого нам потребуется определение скалярного произведения. Пусть на множестве X задана структура линейного пространства. Определим функцию $f(a,b)$ на декартовом квадрате X^2 , $a,b \in X$. Пусть далее функция $f(a,b)$ обладает следующими свойствами.

1. Для любого элемента $a \in X$ имеем $f(a,a) > 0, a \neq 0$ (положительность),

2. Для любых элементов $a,b \in X : f(a,b) = f(b,a)$ (симметричность) .

3. Для любых элементов $a,b,c \in X : f(a+b,c) = f(a,c) + f(b,c)$ (аддитивность).

4. Для любых элементов $a,b \in X$ и любого вещественного числа λ справедливо равенство $f(\lambda a,b) = \lambda f(a,b)$(однородность).

Функцию $f(a,b)$ со свойствами 1 - 4 называют скалярным произведением. Будем записывать ее просто как (a,b).

Оказывается, что функция $f(a,a)=\|a\|$ является нормой, и само пространство X с этой нормой, таким образом, является нормиро ванным.

Полное метрическое пространство X с метрикой $\rho(x,y)=\|x-y\|$ называется гильбертовым пространством. Следовательно, гильбертово пространство — частный случай банахова пространства X с нормой $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Конечномерное гильбертово пространство называется евклидовым пространством.

Лекция 30, 31

Тема. Хаусдорфовость метрического пространства в естественной топологии.

Определение. При любом $\varepsilon>0$ открытым шаром $O(a,\varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке a в метрическом пространстве (X,ρ) называется множество, состоящее из всех точек $x\in X$, удовлетворяющих условию $O(a,\varepsilon)=\{x\in X:\rho(x,a)<\varepsilon\}$.

Определение. Шар $O(a,\varepsilon)$ называется также ε-окрестностью точки a.

Определение. Множество точек $K(a,\varepsilon)$, определяемое условием $K(a,\varepsilon)=\{x\in X:\rho(x,a)\le\varepsilon\}$, называется замкнутым шаром радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке a.

Определение. Точка $a\in M\subset X$ называется внутренней точкой множества M , если она имеет ε-окрестность, целиком составленную из точек множества M.

Определение. Множество M называется открытым, если любая его точка является внутренней.

Утверждение. Пересечение двух открытых в X множеств M_1 и M_2 - открытое множество.

Утверждение. Объединение любого числа открытых множеств M является открытым множеством.

Итак, введенные нами открытые множества образуют топологию, которую называют естественной топологией метрического пространства. Это пространство будет и хаусдорфовым.

ВНУТРЕННИЕ, ВНЕШНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Любое открытое множество σ, содержащее точку x, называется окрестностью точки x.

Определение. Всякое множество x метрического пространства X, дополнение которого $\sigma = X \setminus x$ открыто, называется замкнутым.

Определение. Внешней точкой множества A называется всякая внутренняя точка его дополнения $B = X \setminus A$.

Определение. Точка z называется граничной точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой этого множества.

Множество $\{z\}$ всех граничных точек A называется границей и обозначается через ∂A.

Утверждение. Пусть $B = X \setminus A$. Тогда $\partial A = \partial B$, т.е. множества A и B имеют общую границу.

Утверждение. Если множество A - замкнуто, то $\partial A \subset A$.

Определение. а) Точка a называется предельной точкой множества A, если в любой ε-окрестности точки а содержится хотя бы одна точка $x \in A$ такая, что $x \neq a$;

б) Точка a называется предельной точкой множества A, если существует последовательность точек $\{x_n\} \subset A$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Утверждение. Определения а) и б) эквивалентны.

Определение. Если точка $x \in A$, но не является предельной точкой множества A, то она называется изолированной точкой множества A.

Утверждение. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a, то а - единственная ее предельная точка.

Теорема. а) Множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

б) Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда содержится в нем, т.е. $\partial A \subset A$.

ЛЕММА О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СТЯГИВАЮЩИХСЯ ШАРОВ. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим два свойства полных метрических пространств. Первое - лемма о последовательности стягивающихся шаров.

Лемма. Пусть $K(x_1, r_1) \supset K(x_2, r_2) \supset ...$последовательность вложенных замкнутых шаров в полном метрическом пространстве X, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \exists! x_0 \in$принадлежащая всем шарам.

Определение. Пусть X-полное метрическое пространство, и пусть $f: X \to X$ отображение этого пространства в себя, причем существует вещественное число a с условием $0 < a < 1$ такое, что для любых $a, b \in X$ имеем $\rho(f(b), f(a)) \le \alpha\rho(b, a)$, тогда f-сжимающее, α-коэффициент сжатия.

Теорема. Если $f: X \to X$-сжимающее отображение, то существует единственная точка $x \in X$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

Точка x_0 называется неподвижной точкой сжимающего отображения f.

<u>Лекция 32, 33</u>

<u>Тема</u>. Непрерывные отображения метрических пространств.

Определение. Пусть заданы два метрических пространства (X,ρ_x) и (Y,ρ_y), и пусть определено отображение $F: X \to Y$. Тогда отображение F называется непрерывным в точке x_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x с условием $\rho(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(F(x),F(x_0)) < \varepsilon$ т.е. в пространстве Y любая ε-окрестность $O_y(F(x),\varepsilon)$ точки $F(x_0) \in Y$ содержит целиком образ некоторой S-окрестности этой точки при отображении F, а именно: $F(O_x(x_0,\delta)) \subset O_y$.

Теорема. Пусть отображения $F: X \to Y$ и $G: Y \to Z$ таковы, что отображение F непрерывно в точке $x_0 \in X$, а отображение G непрерывно в точке $y_0 = F(x_0) \in Y$. Тогда композиция отображений F и G, т.е. отображение X, где $H'(x) = G(F(x),H)$ является непрерывной функцией в точке x_0.

Теорема. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset X$ в метрическом пространстве X сходится к точке x_0, а отображение $F: X \to Y$ непрерывно в точке x_0. Тогда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = F\left(\lim\limits_{n\to\infty} X_n\right)$.

Лекция 34, 35

Тема. Понятие компакта. Компакты в R^n и полнота пространства r*. свойства непрерывных функций на компакте.

Определение. Множество K в метрическом пространстве X называется компактом, если из любого покрытия открытыми множествами этого компакта можно выделить конечное подпокрытие.

Определение. Множество B в метрическом пространстве называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре $O(x_0,r)$ с центром в точке x_0 радиуса r.

Лемма. Компакт является ограниченным множеством.

Лемма. Пусть K - компакт. Тогда любая бесконечная последовательность $\{x_n\} \subset K$ имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую K .

Лемма. Компакт K является замкнутым множеством.

Теорема. Любой замкнутый куб в R^n, т.е. множество точек $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ с условием $a_s \le x_s \le a_s + l$ является компактом.

Теорема. Пусть для любых двух точек $a, b \in R^n$ определено скалярное произведение (a, b) и метрика $\rho(a, b)$ задается равенством $\rho(a, b) = \sqrt{(a-b, a-b)}$. Тогда метрическое пространство R^n с метрикой ρ является полным.

Теорема. Множество $K \subset R^n$ является компактом тогда и только тогда, когда K ограничено и замкнуто.

Теорема (О свойствах функций, непрерывных на компакте). Пусть $f(x)$ непрерывна на компакте $K \subset M^n$. Тогда:

1) $f(x)$ - ограничена на K;

2) существуют $x_1, x_2 \in K : f(x_1) = m = \inf\limits_{x \in K} f(x); f(x_2) = M = \sup\limits_{x \in K} f(x)$.

Лекция 36

Тема. Связные множества и непрерывность.

Определение. Множество A в метрическом пространстве X называется связным, если при любом его разбиении на два непустых непересекающихся подмножества $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ они будут иметь общую граничную точку, принадлежащую A, т.е. точку a с условием: 1) $a \in A$; 2) в любой ε - окрестности точки a есть как точки из множества A_1, так и точки из множества A_2.

Примерами связных множеств на плоскости являются отрезок, прямоугольник, круг.

Связное открытое множество называется областью, а связное множество, являющееся компактом, — континуумом.

Теорема. Пусть A - связное множество в R^n, функция $F(x)$ непрерывна на A, и пусть в точках $x_1, x_2 \in A$: $F(x_1)=a,\ F(x_2)=b,\ a<b \quad \Rightarrow \quad \forall c \in (a,b)$ (c- число) $\exists\ x_3 \in A : F(x_3)=c$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ В $\mathbf{R}^n$

$\bar{x}=\bar{a}$; $O_\delta(a)=\{\bar{x}\in \mathbf{R}^n : |\bar{x}-\bar{a}|<\delta\}$

Функция $f(\bar{x})$, заданная на множестве $A\subset \mathrm{R}^n$, является непрерывной на множестве $B\subset A$, если $f(\bar{x})$ непрерывна для любой точки $\bar{x}\in B$.

Пусть $a = (a_1,...,a_n) \in \mathrm{R}^n$ и функция $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки a. Выделим одну из координат точки a. Пусть это будет координата с номером s, $1 \le s \le n$, и обозначим через $M \subset \mathrm{R}^n$ множество всех тех точек, у которых все координаты, кроме s-й, совпадают с координатами точки a. Т.о. для точек $\bar{x}\in M$, получаем функцию $\varphi(x_s)=f(a_1,a_2,...,x_s,...,a_n)$одной переменной.

Опр.1. Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}=\bar{a}$ по переменной x_s если функция $\varphi(x_s)$ непрерывна в точке $x_s = a_s$.

Опр.2. Направлением в R^n называется любой единичный вектор $\bar{e}\in \mathrm{R}^n$

Опр.3. Множество всех точек $\bar{x}=\bar{a}+t\cdot\bar{e}$ $t\in$ R называется:

а) открытым лучом, выходящим из точки a в направлении e, если $t > 0$;

б) замкнутым лучом, — если $t \ge 0$;

в) прямой, проходящей через точку a при произвольных t

Рассмотрим функцию $\psi(t)=f(\bar{a}+t\cdot\bar{e})$.

Опр.4. Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}=\bar{a}$ по направлению e, если функция $\psi(t)$ непрерывна в точке $t = 0$.

Имеет место следующее очевидное свойство. Если $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}=\bar{a}$, то она непрерывна в этой точке по любому направлению *e*. Обратное, вообще говоря, неверно.

Утв. Для непрерывности отображения *F*: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ необходимо и достаточно, чтобы все функции $\varphi_s(\bar{x})$, были бы непрерывны в точке $\bar{x}=\bar{a}$

Д о к - в о следует из определения непрерывного отображения, поскольку
$$|a_s-b_s| \le \sqrt{\sum_{t=1}^{n}(a_s-b_s)^2}.$$

Т е о р е м а 1. (о непрерывности сложного отображения)

Пусть f: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, g: $\mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ и пусть отображение $f(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{x}=\bar{x}_0$, а функция $g(\bar{y})$ непрерывна, в точке $\bar{y}_0=f(\bar{x}_0)$. Пусть также в некоторой окрестности точки $\bar{x}_0$ определена сложная функция $h(\bar{x})=g(f(\bar{x}))$. Тогда функция $h(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}=\bar{x}_0$.

Опр.5. Функция *F*: $\mathrm{A}\to\mathrm{R}$, $\mathrm{A}\subset\mathrm{R}^n$, называется равномерно непрерывной на множестве А, если для любого $\varepsilon>$ О существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых $x,y\in\mathrm{A}$ с условием $\rho(\bar{x},\bar{y})<\delta$ имеем $|F(\bar{x})-F(\bar{y})|<\delta$.

Т е о р е м а 2 . Функция *f*, непрерывная на компакте *K*, является равномерно непрерывной на нем.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ В R^n

Пусть числовая функция $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}\in\mathrm{R}^n$.

Опр.1. Приращением $\Delta f(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ называется разность $\Delta f(\bar{x})=f(\bar{x})-f(\bar{a})$. Разность $\Delta\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}$ называется приращением аргумента $\bar{x}$.

Длина вектора $\Delta\bar{x}$ обозначается через $|\Delta\bar{x}|$ и равна $\rho(\bar{x},\bar{a})$.

Утв.1. Если функция $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}=\bar{a}$, то приращение ее $\Delta f(\bar{x})$ стремятся к нулю при $\Delta\bar{x}$, стремящемся к нулю, т.е. $\Delta f(\bar{x})$= o(1).

Д о к - в о следует из определения и свойств предела функции по базе множеств.

Опр.2. Линейная функция от приращения аргумента $\Delta\bar{x}$ называется дифференциалом $d\,f(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$, если приращение $\Delta f(\bar{x})$ при $\Delta\bar{x}\to 0$ можно представить в виде $\Delta f(\bar{x})= d\,f(\bar{x})+o(|\Delta\bar{x}|)$.

Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}=\bar{a}$, если существует дифференциал $d\,f(\bar{x})$ функции в точке $\bar{x}=\bar{a}$.

Утв.2. Если функция дифференцируема в точке $\bar{x}=\bar{a}$, то она непрерывна в этой точке.

Т е о р е м а 1 . Пусть $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}=\bar{a}$, тогда все координатные функции $\varphi_s(x_s)=f(a_1,a_2,...,x_s,...,a_n))$ дифференцируемы в точках $x_s=a_s$, s=1,…,n, причем' $A_s=\varphi_s(a_s)$.

Д о к - в о . Рассмотрим приращение

$$\Delta\varphi(x_s)=\varphi(x_s)-\varphi(a_s)=\Delta f\Big|_{\substack{x_i=a_i\\ i\neq s}}=A_s\Delta x_s+o(|\Delta\bar{x}|)\Rightarrow A_s=\lim_{\Delta x_s\to 0}\frac{\Delta\varphi_s(x_s)}{\Delta x_s}=\varphi_s'(a_s)$$

Опр.3. Производная $\varphi_s'(a_s)$, когда она существует, называется частной производной функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ по s-й переменной/

С л е д . Дифференциал функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ однозначно записывается в виде

Т е о р е м а 2. Пусть в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ существуют все ее частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}, s=1,...,n$ и эти частные производные непрерывны в точке $\bar{x}=\bar{a}$. Тогда функция $f(\bar{x})$является дифференцируемой в этой точке.

Д о к - в о . Приращение $\Delta f(\bar{x})$функции $f(\bar{x})$ в точке (a,b) можно записать так:

$$\Delta f(x,y)=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=\left(f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b+\Delta y)\right)+\left(f(a,b+\Delta y)-f(a,b)\right)$$

К каждой из двух разностей в скобках можно применить формулу конечных приращений Лагранжа, т.к. в рассматриваемой окрестности точки (a,b) функция $f(x,y)$ имеет:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a+\xi\Delta x,b+\Delta y)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+o(1),\ \xi\geq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\eta\Delta y)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+o(1),\ \eta\geq 0$$

$$\Rightarrow\ \Delta f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y+o(|\Delta x|+|\Delta y|)$$

Поскольку $|\Delta x|\leq|\Delta\bar{x}|,|\Delta y|\leq|\Delta\bar{x}|,\Delta\bar{x}=(\Delta x,\Delta y),\ \ o(|\Delta x|+|\Delta y|)=o(|\Delta\bar{x}|)$,

имеем $\Delta f(x,y)=\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}dy+o(|\Delta\bar{x}|)=df(\bar{x})+o(|\Delta\bar{x}|)$

т.е. функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x,y)=(a,b)$. Теорема доказана.

Зам. Существование частных производных в точке не гарантирует дифференцируемости функции.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Т е о р е м а . Пусть $\varphi(\bar{x})=(\varphi_1(\bar{x}),...,\varphi_m(\bar{x}))$ есть отображение из R^n в R^m, определенное в некоторой окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}$ и дифференцируемое в этой точке. Пусть для всякого $\varepsilon>0$ при отображении φ образ некоторой δ-окрестности $O(\bar{a},\delta)$ содержится в ε-окрестности точки $\bar{b}=\varphi(\bar{a})$. Пусть для любой точки $y\in O(\bar{b},\varepsilon)$ определена числовая функция $f(\bar{y})$, которая является дифференцируемой в точке b. Тогда сложная функция $h(\bar{x})=f(\varphi(\bar{x}))$является дифференцируемой в точке $\bar{x}=\bar{a}$, причем имеют место равенства

$$\frac{\partial h}{\partial x_s}=\frac{\partial h}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}+...+\frac{\partial h}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_s},\qquad s=1,...,n$$

Здесь частные производные по переменной x_s, рассматриваются в точке $\bar{x}=\bar{a}$, а частные производные по y_l — в точке $\bar{y}=\bar{b}$.

Д о к - во. Ввиду дифференцируемости функции $f(\bar{y})$ в точке $\bar{y}=\bar{b}$ приращение функции Δf при произвольном приращении аргумента $\Delta y=\bar{y}-\bar{b}$ можно представить так: $\Delta f = df + o(|\Delta\bar{y}|)$, где $df = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_l}\Delta y_l$

Подставим вместо Δy_l приращение $\Delta\varphi_l$ функции $\varphi_l(\bar{x})$ соответствующее приращению $\Delta\bar{x}$ аргумента $\bar{x}$. Тогда слева в этой формуле мы получим $\Delta h(\bar{x})$ и она принимает вид $\Delta h(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_l}\Delta\varphi_l(\bar{x}) + o(|\Delta\varphi(\bar{x})|)$.

В силу дифференцируемости функций $\varphi_l(\bar{x})$ имеем $\Delta\varphi_l(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s}\Delta x_s + o(|\Delta\bar{x}|)$, где $l=1,\ldots,m$

Частные производные функций $\varphi_l(\bar{x})$в точке $\bar{x}=\bar{a}$ — это конкретные вещественные числа. Поэтому существует число M > 0, такое, что они по абсолютной величине не превосходят M. Тогда имеем $|\Delta\varphi_l(\bar{x})| \le 2Mn|\Delta\bar{x}|$, $|\Delta\varphi| \le 2Mn^2|\Delta\bar{x}|$

Отсюда найдем $o(|\Delta\phi(\bar{x})|) = o(|\Delta\bar{x}|)$

Подставляя теперь значения $\Delta\varphi_l(\bar{x})$ в формулу для $\Delta h(\bar{x})$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Пусть задано направление $\bar{e}=(e_1,\ldots,e_n)$, $|\bar{e}|=1$, и $\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_n$ – направления векторов осей координат $Ox_1,\ldots,Ox_n$. Тогда, очевидно, если a_s есть угол между $\bar{k}_s$ и $\bar{e}$, то $e_s = (\bar{e},\bar{k}_s) = |\bar{e}|\cdot|\bar{k}_s|\cos a_s = \cos a_s$

В силу этого определения числа $e_1,\ldots,e_n$ называются направляющими косинусами направления $\bar{e}$.

Пусть $f(\bar{x})$ — дифференцируемая функция в точке $\bar{x}=\bar{a}$, и $\bar{e}$ — некоторое направление. Рассмотрим сложную функцию $h(t)=f(\bar{a}+t\bar{e})$. Она является функцией от одной переменной *t*, и в силу теоремы о дифференцируемости сложной функции при $t = 0$ справедливо равенство $dh(t)=h'(0)dt=\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_s}\cdot e_s dt$.

Тогда имеем $h'(0)=\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_s}\cos a_s$.

Опр.1. Величина $h'(0)$ называется производной функции $f(\bar{x})$ по направлению $\bar{e}$ в точке $\bar{a}$. Обозначение: $\frac{\partial f}{\partial e}=\left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial e}\right|_{\bar{x}=\bar{a}}=h'(0)$.

Опр.2. Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\nabla f$ называется градиентом функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ и обозначается так: $\nabla f=\operatorname{grad} f$ /

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial e}=(\bar{e},\operatorname{grad} f)=(\bar{e},\nabla f)$, где $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ называется оператором "набла".

Свойства производной по направлению.

1°. Максимальное значение производной функции $f(\bar{x})$ по направлению равно длине вектора градиента и достигается при $\bar{e}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

2°. Производная по направлению равна нулю, если вектор градиента равен нулю или он ортогонален вектору направления.

Опр.3. Поверхности вида $f(\bar{x})=c$, где c=const называются поверхностями уровня функции *f*, т.е. поверхности, на которых функция принимает одно и тоже значение.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Опр.1. Поверхностью *P* в R^3 называется график всякой непрерывной функции $z=f(x,y)$, заданной в некоторой области $\Omega\subset R^2$. Другими словами, поверхность P — это множество точек $(x,y,z)\in$ R^3, где координата $z\in$ R и точка $(x,y)\in$ R^2 связаны соотношением $z=f(x,y)$.

Опр.2. Говорят, что поверхности $z=f_1(x,y)$ и $z=f_2(x,y)$ касаются друг друга в точке (a,b,c), если $c=f_1(a,b)=f_2(a,b)$ и разность $r(x,y)=f_1(x,y)-f_2(x,y)=o(|\bar{x}-\bar{a}|)$ при $|\bar{x}-\bar{a}|\to 0$ $\bar{a}=(a,b,c)$.

График линейной функции $z=kx+ly+m$, $k,l,m\in$R является плоскостью в R^3

Т е о р е м а . Пусть функция $f(\bar{x})$, $\bar{x}\in O(\bar{a},\varepsilon)\subset$ r^2 — дифференцируема в точке $\bar{x}=\bar{a}=(a_1,a_2)$ и $z_0=f(\bar{a})$. Тогда плоскость П, задаваемая линейным уравнением вида $z-z_0=\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_2}(x_2-a_2)$ касается поверхности P: $z=f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$.

Д о к - в о . Рассмотрим плоскость П как график линейной функции $g(\bar{x})$, где $g(\bar{x})=z_0+df(\bar{x})$.

Поскольку функция $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}=\bar{a}$, имеем $f(\bar{x})-g(\bar{x})=f(\bar{a})+df(\bar{x})+o(|\Delta\bar{x}|)-z_0-df(\bar{x})=o(|\Delta\bar{x}|)$.

Следовательно, исходя из определения поверхности, П и P касаются друг друга. Теорема доказана.

Опр.3. Нормалью к поверхности P : $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0) называется прямая, проходящая через точку (x_0,y_0,z_0), параллельно вектору $(f'_x,f'_y,-1)$.

Вывод. Геометрический смысл дифференциала функции $z=f(x,y)$ состоит в следующем: $z-z_0=df\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ представляет собой уравнение касательной плоскости в точке (x_0,y_0,z_0): $z_0=f(x_0,y_0)$

§ 6. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $f(\bar{x})$ имеет в некоторой ε-окрестности $O(\bar{a},\varepsilon)$ все первые частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}$, $s=1,...,n$. Эти частные производные сами являются функциями от n переменных и могут иметь частные производные, т.е. можно определить следующие величины $\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}=f''_{x_s x_r}=\left(f'_{x_s}\right)'_{x_r}$, $s,r=1,\dots,n$.

Эти величины называются частными производными второго порядка**.** Если $s\neq r$, то они называются смешанными производными.

Т е о р е м а (Шварца). Пусть функция $f(\bar{x})$ в некоторой окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}$ имеет смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, причем они непрерывны в точке $\bar{x}=\bar{a}$. Тогда в точке $\bar{x}=\bar{a}$ эти производные равны между собой, т.е. $f''_{x_1x_2}(\bar{a})=f''_{x_2x_1}(\bar{a})$.

Д о к - в о . Будем считать, что n = 2 и $f(\bar{x})=f(x_1,x_2)$. Положим

$$\Delta^2 f=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2),$$

$$\varphi(x)=f(x,a_2+h_2)-f(x,a_2),$$

Применяя дважды формулу Лагранжа конечных приращений, получим

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=h_1\varphi'(a_1+\theta_1h_1)=h_1\Big(f'_{x_1}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2)-f'_{x_1}(a_1+\theta_1h_1,a_2)\Big)=$$
$$=h_1h_2\,f''_{x_1x_2}(a_1+\theta_1h_1,a_2+\theta_2h_2)$$

В силу непрерывности функции $f''_{x_1x_2}(x_1,x_2)$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ имеем

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=h_1h_2\Big(f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)+o(1)\Big)$$

С другой стороны, $\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=\psi(a_2+h_2)-\psi(a_2)$, где $\psi(x)=f(a_1+h_1,x)-f(a_1,x)$.

Вновь применяя теорему Лагранжа, находим

$$\psi(a_2+h_2)-\psi(a_2)=h_2\Big(f'_{x_2}(a_1+h_1,a_2+\theta_2')-f'_{x_2}(a_1,a_2+\theta_2')\Big)=$$
$$=h_1h_2\,f''_{x_2x_1}(a_1+\theta_1'h_1,a_2+\theta_2'h_2)=h_1h_2\Big(f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)+o(1)\Big)$$

Отсюда $h_1h_2\Big(f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)+o(1)\Big)=h_1h_2\Big(f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)+o(1)\Big)$,

т.е. получаем справедливость равенства $f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а (Юнга). Пусть функции $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ и $f'_{x_2}(x_1,x_2)$ определены в некоторой окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}=(a_1,a_2)$ и дифференцируемы в точке $\bar{a}$. Тогда $f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)$

Д о к - в о . Рассмотрим функции

$$\Delta^2 f = f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2),$$

$$\varphi(x)=f(x,a_2+h_2)-f(x,a_2),$$

Имеем $\Delta^2 f=\varphi(a_1+h)-\varphi(a_1)$. Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\Delta^2 f = h\varphi'(a_1+\theta_1 h)=h\Big(f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2+h)-f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2)\Big)$$

В силу того что функция $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ дифференцируема в точке $\bar{x}=\bar{a}$,

$$f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2+h)-f'_{x_1}(a_1,a_2)=\theta_1 h f''_{x_1x_1}(\bar{a})+h f''_{x_1x_2}(\bar{a})+o(h),$$

$$f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2)-f'_{x_1}(a_1,a_2)=\theta_1 h f''_{x_1x_1}(\bar{a})+o(h).$$ Следовательно,

$$\Delta^2 f = h^2 f''_{x_1x_2}(\bar{a})+o(h^2).$$

Аналогично $\Delta^2 f = h\psi'(a_2+\theta_2 h)=h^2 f''_{x_2x_1}(\bar{a})+o(h^2)$, т.е. получаем справедливость равенства $f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)$. Теорема доказана.

Опр. Функция $f(\bar{x})$ называется дважды дифференцируемой в точке, если все первые производные дифференцируемы. функция $f(\bar{x})$ называется *n* раз дифференцируема, если все частные производные (*n*-1)-го порядка являются дифференцируемыми функциями.

Т е о р е м а (достаточное условие дифференцируемости). Для того чтобы функция $f(\bar{x})$ была *n* раз дифференцируема в точке, достаточно, чтобы все частные производные порядка *n* были непрерывны в этой точке.

Д о к - в о проводится по индукции.

С л е д . (из теоремы Юнга). Если функция $f(\bar{x})$ является *n* раз дифференцируемой, то смешанные частные производные до порядка *n* не зависят от порядка, в котором производится дифференцирование.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $f(\bar{x})$ дважды дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Зафиксируем приращение $d\bar{x} = \bar{h}$. Тогда получим новую функцию $g(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{h}) = df(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} h_s \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}$

Это дифференцируемая функция в точке $\bar{x} = \bar{a}$, и ее дифференциал $dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g(\bar{a})}{\partial x_r} \cdot \Delta x_r$, т.е. $dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} h_s \Delta x_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s} \right) \Bigg|_{\bar{x}=\bar{a}}$.

Положим теперь $h_s = \Delta x_s = dx_s$. Тогда получим $d^2 f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r} dx_s dx_r$.

Это выражение называется вторым дифференциалом функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Аналогично определяется дифференциал $d^k f(\bar{x})$ порядка k:

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \cdots \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_s \ldots \partial x_r} dx_s \ldots dx_r$$

Т е о р е м а 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $f(\bar{x})$ дифференцируема k раз в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Тогда, при $\bar{x}$, стремящемся к $\bar{a}$, справедлива следующая формула: $f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + r(\bar{x})$,

где $P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{2!} d^2 f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \ldots + \frac{1}{k!} d^k f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}$, $r(\bar{x}) = o\left(|\bar{x} - \bar{a}|^k\right)$.

Д о к - в о . Применим метод математической индукции. При $k = 1$ утверждение теоремы следует из определения дифференциала функции. Предположим, что $k > 1$.

Из условия теоремы вытекает, что функция $r(\bar{x})$ в некоторой окрестности U точки $\bar{x} = \bar{a}$ имеет все производные до порядка $(k-1)$ включительно. Кроме того, в точке $\bar{a}$ сама функция и все ее частные производные до k-го порядка включительно равны нулю. Далее, пусть $\bar{x} \in U$ и $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$. Тогда имеем

$r(\overline{x}) = r(\overline{x}) - r(\overline{a}) = r(\overline{a} + \Delta\overline{x}) - r(\overline{a}) = D_1 + \cdots + D_n$, где при $s = 1,...,n$ величины D_s определены равенствами

$D_s = r(a_1 + \Delta x_1,...,a_s + \Delta x_s, a_{s+1},...,a_n) - r(a_1 + \Delta x_1,...,a_{s-1} + \Delta x_{s-1}, a_s,...,a_n) = g(a_s + \Delta x_s) - g(a_s)$.

Применяя формулу Лагранжа к каждой величине D_s, получим

$D_s = g'_{x_s}(a_s + \xi_s \Delta x_s)\Delta x_s = r'_{x_s}(\overline{a} + \overline{\upsilon}_s)\Delta x_s$, $0 \le \xi_s \le 1$, где $\overline{\upsilon}_s = (\Delta x_1,...,\Delta x_{1-1}, \xi_s \Delta x_s, 0,...,0)$.

Следовательно, $r(\overline{x}) = r'_{x_1}(\overline{a} + \overline{\upsilon}_1)\Delta x_1 + \cdots + r'_{x_n}(\overline{a} + \overline{\upsilon}_n)\Delta x_n$.

Заметим, что точка $\overline{a} + \overline{\upsilon}_s \in U$ для каждого $s = 1,...,n$. Поэтому к частным производным в правой части последнего равенства можно применить предположение индукции с заменой значения параметра k на $k-1$. Тогда при всех s от 1 до n будем иметь $r'_{x_s}(\overline{a} + \overline{\upsilon}_s) = o\left(|\overline{x} - \overline{a}|^{k-1}\right)$.

Отсюда следует, что $r(\overline{x}) = o\left(|\overline{x} - \overline{a}|^{k}\right)$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(\overline{x})$ имеет $(k+1)$-й дифференциал для любого $\overline{x} \in O(\overline{a}, \varepsilon)$, где ε — некоторое положительное число. Тогда, для любой точки $\overline{b} \in O(\overline{a}, \varepsilon)$ существует точка $\overline{c} = \overline{a} + \theta(\overline{b} - \overline{a})$, $0 < \theta < 1$, такая, что

$$f(\overline{b}) = f(\overline{a}) + \sum_{s=1}^{k} \left.\frac{d^s f(\overline{a})}{s!}\right|_{d\overline{x} = \overline{x} - \overline{a}} + \left.\frac{d^{k+1} f(\overline{c})}{(k+1)!}\right|_{d\overline{x} = \overline{b} - \overline{a}}$$

Д о к - в о . Пусть $g(t) = f(\overline{a} + t(\overline{b} - \overline{a}))$. Тогда по формуле Тейлора для одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$g(1) = g(0) + \dfrac{g'(0)}{1!} + \cdots + \dfrac{g^{(k)}(0)}{k!} + \dfrac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}$, где $0 < \theta < 1$ – некоторая постоянная.

Поскольку справедливы равенства $g(0) = f(\overline{a})$, $g'(0) = df(\overline{a})\big|_{d\overline{x} = \overline{b} - \overline{a}}$, …, $g^{(k)}(0) = d^k f(\overline{a})\big|_{d\overline{x} = \overline{b} - \overline{a}}$, $g^{(k+1)}(\theta) = d^{k+1} f(\overline{c})\big|_{d\overline{x} = \overline{b} - \overline{a}}$, подставляя их в предыдущее соотношение, получим утверждение теоремы! Теорема 2 доказана.

§8. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Опр.1. Точка $\bar{a} \in \mathrm{R}^n$ называется точкой строгого локального максимума функции $f(\bar{x})$, если существует ε-окрестность $O(\bar{a},\varepsilon)$ точки $\bar{a}$ такая, что для любой точки $\bar{x} \neq \bar{a}$ и $\bar{x} \in O(\bar{a},\varepsilon)$ имеем неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$;

если $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — точка нестрогого максимума;

если $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — точка строгого минимума;

если $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — точка нестрогого минимума.

Точки максимума и минимума называют точками локального экстремума.

Т е о р е м а 1 (необходимое условие экстремума). Если $\bar{a}$ — точка локального экстремума (нестрогого) функции $f(\bar{x})$ и существует дифференциал $df(\bar{x})$ ее в этой точке, то для любого приращения $\Delta\bar{x}$ имеем $df(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0$, или $f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0$.

Д о к - в о . Очевидно, достаточно доказать, что при $s = 1,\ldots,n$ выполняются равенства $\left.\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0$.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e}_s)$, где $\bar{e}_s$ — направляющий вектор оси Ox_s. Тогда ясно, что $g(t)$ имеет в нуле точку локального экстремума, откуда $g'(0) = 0$. Но так как

$\dfrac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_s} = g'(0) = 0$, то это доказывает утверждение теоремы 1.

Опр.2. Точка $\bar{a}$, в которой градиент функции $f(\bar{x})$ обращается в $\bar{0}$, называется стационарной точкой функции $f(\bar{x})$.

Опр.3. Стационарная точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ называется регулярной, если в этой точке существует второй дифференциал $d^2 f(\bar{x})$, и он является невырожденной квадратичной формой от переменных $dx_1,\ldots,dx_n$, т.е. определитель матрицы этой квадратичной формы отличен от нуля.

Т е о р е м а 2 (достаточное условие экстремума). Пусть $\bar{a}$ есть регулярная стационарная точка функции $f(\bar{x})$, т.е. дифференциал этой функции в точке

$\bar{a}$ обращается в нуль и существует второй дифференциал в этой точке с невырожденной квадратичной формой от переменных $dx_1,...,dx_n$. Тогда

1) если в этой точке $d^2 f(\bar{x})$ является положительно определенной квадратичной формой, то в точке $\bar{x} = \bar{a}$ функция $f(\bar{x})$ имеет локальный минимум;

2) если $d^2 f(\bar{x})$ — отрицательно определена, то $\bar{a}$ — точка локального максимума;

3) если $d^2 f(\bar{x})$ является неопределенной формой, то точка $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума.

Д о к - в о . 1) Обозначим через А матрицу квадратичной формы $d^2 f(\bar{x})$ от переменных Δx_s, $s = 1,...,n$, а через $S(\bar{a})$ — множество точек $\bar{x} \in \mathrm{R}^n$ с условием $|\Delta\bar{x}| = 1$.

Множество $S(\bar{a})$ ограничено и является замкнутым, так как совпадает со своей границей $\partial S(\bar{a})$, и поэтому содержит эту границу. Следовательно, $S(\bar{a})$ — компакт, а потому на множестве $S(\bar{a})$ второй дифференциал как функция от приращения $\Delta\bar{x}$ достигает своего минимума m, т.е. найдется вектор $\bar{e}_0$, $|\bar{e}_0| = 1$ такой, что $d^2 f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}=\bar{e}_0} = m > 0$. Заметим, что для любого вектора $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{x} = |\Delta\bar{x}| \cdot \bar{e}$, $|\bar{e}| = 1$, имеем

$$d^2 f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}} = |\Delta\bar{x}|^2 d^2 f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\bar{e}}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получим $\Delta f(\bar{x}) = df(\bar{a}) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{a}) + o\left(|\Delta\bar{x}|^2\right) \geq \frac{1}{2}|\Delta\bar{x}|^2 m(1 + o(1))$,

т.е. найдется ε>0, такое, что для любой точки $\bar{x} \in O(\bar{a},\varepsilon)$ выполняется неравенство $\Delta f(\bar{x})$>0.

2) рассматривается аналогично.

3) В силу неопределенности квадратичной формы $d^2 f(\bar{a})$ получим $m < 0 < M$, где

$$M=\sup_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2 f(\bar{a}) = \inf_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2 f(\bar{a}),$$

причем величина M достигается на векторе $\bar{e}_1$, а величина m — на векторе $\bar{e}_2$. Тогда функция $g_1(t)=f(\bar{a}+t\bar{e}_1)$ при $t=0$ имеет локальный максимум, а функция $g_2(t)=f(\bar{a}+t\bar{e}_2)$ — локальный минимум, а сама функция $f(\bar{x})$ в любой окрестности точки $\bar{a}$ принимает значения, как большие $f(\bar{a})$, так и меньшие $f(\bar{a})$, т.е. точка $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума. Теорема 2 доказана.

§ 9. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть заданы точка $(\bar{a},b)=(a_1,...,a_{n-1},b)\in \mathrm{R}^n$, некоторая ее ε-окрестность и множество точек, принадлежащих этой ε-окрестности и удовлетворяющих уравнению $f(\bar{x},y)$=0.

Опр.1. Функция $\varphi(\bar{x})$, зависящая от (n-1)-й переменной $\bar{x}=(x_1,...,x_{n-1})$ и заданная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$, называется неявной функцией, соответствующей уравнению $f(\bar{x},y)$=0, если для любой точки $\bar{x}$ из этой δ-окрестности имеет место равенство $f(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=0$

Опр.2. Функция $f(\bar{x})$ называется гладкой в области $\Omega\subset \mathrm{R}^n$, если для любой точки $\bar{x}\in\Omega$ она является дифференцируемой и ее частные производные непрерывны.

Т е о р е м а (теорема о неявной функции). Пусть:

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой ε-окрестности Ω точки $(a,b)\in \mathrm{R}^2$;

2) $f(a,b)$=0;

3) для любой точки $(x,y)\in\Omega$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями;

4) $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}>0$

Тогда существует единственная функция $y=\varphi(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки a, такая, что:

1) $\varphi(a)=b$;

2)для любой точки x, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(x,\varphi(x))=0$; Более того, оказывается, что эта функция $\varphi(x)$ является гладкой, причем $\varphi'(x)=-\dfrac{f'_x(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}$.

Д о к - в о . Так как $f'_y(x,y)$ — непрерывна на Ω и $f'_y(a,b)$>0, то существует замкнутый .квадрат $K\subset\Omega$ с центром в точке (a,b) и со сторонами, параллельными осям координат, длины $2h$, внутри которого минимальное значение $f'_y(x,y)$ равно m>0. В силу того, что $f'_y(x,y)$>0, функция $f(a,y)$ возрастает. Далее, так как $f(a,b)$=0, то $f(a,b+h)$>0 и $f(a,b-h)$<0. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ существует число δ>0 такое, что для любого значения $x\in[a-\delta,a+\delta]$ имеем $f(x,b+h)$>0 и $f(x,b-h)$<0.

Отсюда следует, что на отрезке, соединяющем точки $A_1=A_1(x)=(x,b-h)$ и $A_2=A_2(x)=(x,b+h)$, монотонная функция $g(y)=f(x,y)$ обращается в нуль только в одной точке y_x.

Каждой точке $x\in[a-\delta,a+\delta]$ поставим в соответствие точку y_x. Оно определяет функцию $y=\varphi(x)=y_x$, для которой $f(x,\varphi(x))=f(x,y_x)=0$, при этом из равенства $f(a,b)=0$ имеем $\varphi(a)=y_a=b$.

Функция $\varphi(x)$ и является искомой. Надо только доказать, что $y=\varphi(x)$ дифференцируема внутри интервала $(a-\delta,a+\delta)$, причем $\varphi'(x)=-\dfrac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}$

Докажем сначала непрерывность $\varphi(x)$. Пусть точки x и x_0 принадлежат интервалу $(a-\delta,a+\delta)$. Покажем, что $\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)\to 0$ при $\Delta x=x-x_0\to 0$. Положим $y=\varphi(x)$, $y_0=\varphi(x_0)$, $\Delta y=\Delta\varphi(x)$.

Имеем $f(x,y)=f(x_0,y_0)=0$. Следовательно, для функции $g(t)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$ справедливы равенства $g(0)=g(1)=0$. Функция $g(t)$ при любом $t\in[0,1]$ имеет производную $g'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta y$

По теореме Ролля существует число $\theta\in(0,1)$ такое, что $g'(\theta)=0$. Отсюда получим

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{f'_x(\bar{\xi})}{f'_y(\bar{\xi})}$, где $\bar{\xi}=(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$. Следовательно,

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\le\frac{M}{m},\ M=\max_K\left|f'_x(x,y)\right|,\ m=\min_K\left|f'_y(x,y)\right|>0,$$

т.е. величина $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — ограничена. Поэтому имеем, что $\Delta y=\Delta x\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т.е. $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Кроме того, так как при $\Delta x\to 0$ имеем, что $\Delta y\to 0$, то $\bar{\xi}\to(x_0,y_0)$. Далее, в силу непрерывности частных производных f'_x и $f'_y>$ 0 получим $\varphi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{f'_x(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}$.

Теорема доказана.

Зам. 1. Случай $f'_y(x,y)<0$ сводится к рассмотренному заменой функции f на $g=-f$

С л е д . (общая теорема о неявной функции). Пусть: 1) функция $f(\bar{x},y)$ непрерывна в некоторой ε-окрестности Ω точки $(\bar{a},b)=(a_1,\ldots,a_{n-1},b)\in \mathrm{R}^2$

2) $f(a,b)=0$; 3) для любой точки $(\bar{x},y)\in\Omega$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями; 4) $\dfrac{\partial f(\bar{a},b)}{\partial y}>0$

Тогда существует единственная функция $y=\varphi(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$ такая, что:

1) $\varphi(\bar{a})=b$;

2) для любой точки $\bar{x}$, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=0$

3) функция $\varphi(\bar{x})$ является гладкой, причем $\varphi'_{x_s}(x) = -\dfrac{f'_{x_s}(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}$

Д о к - в о. Совпадает с доказательством теоремы. Надо только вместо точек $(a, b \pm h)$ рассмотреть точки $(\bar{a}, b \pm h)$, а вместо интервала $(a-\delta, a+\delta)$ — шар $O(\bar{a}, \delta)$.

§ 10. СИСТЕМА НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим отображение $f: R^n \to R^m, f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),...,f_m(\bar{x}))$

Пусть все функции $f_1(\bar{x}),...,f_m(\bar{x})$ являются гладкими в ε-окрестности $O(\bar{a},\varepsilon)$ точки $\bar{a}$. Тогда такое отображение называется гладким.

Опр. 1. Пусть функции $f_1(\bar{x}),...,f_m(\bar{x})$ дифференцируемы в точке $\bar{x} \in R^n$. Тогда матрица $J = J_f = \left\| \dfrac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_s} \right\|, k = 1,...,m; s = 1,...,n$; имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей Якоби отображения $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),...,f_m(\bar{x}))$.

Строки матрицы Якоби представляют собой градиенты функций $f_k(\bar{x}), k = 1,...,m$.

Пусть $m \le n$, Рассмотрим какие-либо m различных столбцов матрицы J. Они образуют подматрицу $J(k_1,...,k_m)$ порядка $m \times n$ матрицы J, где $k_1,...,k_m$ — номера выбранных столбцов.

Опр. 2. Определитель Н матрицы $J(k_1,...,k_m)$ называется якобианом (одним из якобианов) отображения $f(\bar{x})$ и обозначается так: $H = \dfrac{D(f_1,...,f_m)}{D(x_{k_1},...,x_{k_m})}$

Опр. 3. Дифференцируемое отображение $f(\bar{x})$ называется невырожденным в точке $\bar{x} = \bar{a}$, если один из якобианов этого отображения отличен от нуля.

Это означает, что:

1) матрица J имеет максимальный ранг

2) градиенты функций $f_1(\bar{x}),...,f_m(\bar{x})$ — линейно независимы в этой точке.

Т е о р е м а (теорема о системе неявных функций).

Пусть $n = m + p, p > 0$, и пусть:

1) отображение $f : R^n \to R^m$ — невырожденное в точке $(\bar{a}, \bar{b})$, где $\bar{a} = (a_1,...,a_p)$ и $\bar{b} = (b_1,...,b_m)$, и гладкое в некоторой окрестности $\Omega = O((\bar{a}, \bar{b}), \varepsilon)$ точки $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$;

2) $f(\bar{a}, \bar{b}) = 0$;

3) $H(\bar{y}) = \dfrac{D(f_1,..., f_m)}{D(y_1,..., y_m)} \neq 0$

Тогда в некоторой окрестности $O(\bar{a}, \delta) = \Omega_1 \subset R^p$ точки $\bar{a}$ существует единственное гладкое отображение $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}),..., \varphi_m(\bar{x}))$, где $\bar{x} = (x_1,..., x_p)$, обладающее следующими свойствами:

1) $f(\bar{a}, \varphi(\bar{a})) = 0$;

2) для всех $x \in \Omega_1$ имеем $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$;

3) $J_\varphi(\bar{x}) = -A^{-1}B$, где $A = J_f(\bar{y}), B = J_f(\bar{x})$.

Здесь А и В — две части матрицы Якоби J_f, отвечающие переменным $y_1,..., y_m$ и $x_1,..., x_p$ соответственно.

Другими словами, эта теорема утверждает, что система уравнений

$f_k(x_1,..., x_p, y_1,..., y_m) = 0, k = 1,..., m$,

разрешима относительно переменных $y_1,..., y_m$ как функций от переменных ($x_1,..., x_p$) таким образом, что функции удовлетворяют тождествам $f_k(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \equiv 0$, $\forall \bar{x} \in \Omega_1$, где Ω_1 — некоторая окрестность точки а, причем:

а) $f(\bar{a}, \varphi(\bar{a})) = 0$;

б) $f(\bar{x}, \bar{y})$ является невырожденным гладким отображением в некоторой окрестности точки $(\bar{a}, \bar{b})$ с условием $\dfrac{D(f_1,..., f_m)}{D(y_1,..., y_m)} \neq 0$.

Д о к - в о. Рассмотрим определитель Якоби $H(\bar{y})$ матрицы А. Разложим его по последнему столбцу. Получим: $H(\bar{y}) = H_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} + H_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} + \cdots + H_m \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}$.

Так как $H(\bar{y})$ не обращается в нуль в точке $(\bar{a},\bar{b})$, то по крайней мере один из миноров матрицы А не равен нулю. Без ограничения общности можно считать, что $H_1 \neq 0$.

Будем проводить доказательство методом математической индукции по числу уравнений *m*. При *m*=1 утверждение теоремы доказано в предыдущей теореме. Предположим, что теорема верна для *m*-1 уравнения. Докажем ее для *m* уравнений.

Поскольку $H_1 \neq 0$, применяя предположение индукции к функциям $f_2(\bar{x},\bar{y}),..,f_m(\bar{x},\bar{y})$, получим, что существуют функции $y_1 = \psi_1(\bar{x},y_m),...,y_{m-1} = \psi_{m-1}(\bar{x},y_m)$, удовлетворяющие условиям $f_k(\bar{x},\psi_1,...,\psi_{m-1},y_m) = 0, k = 2,...,m$, для любой точки $(\bar{x},y_m)$ в некоторой окрестности Ω_0 точки $(\bar{a},b_m)$. Подставим теперь $\psi_1,...,\psi_{m-1}$ в функцию $f_1(\bar{x},\bar{y})$. Имеем:

$$f_1(\bar{x},\bar{\psi}(\bar{x},y_m),y_m) = \Phi(\bar{x},y_m).$$

Покажем, что $\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \neq 0$ в точке $(\bar{a},b_m)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}$$

$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m}$$

$$0 = \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}$$

Домножим первое уравнение на H_1, второе — на H_2 и т.д. Сложим получившиеся выражения. В результате будем иметь $H_1\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = H$. Т.к. H и H_1 не равны нулю, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \neq 0$.

Следовательно, по теореме о неявной функции существует единственная функция $y_m = \varphi_m(\bar{x})$, такая, что $f_k(\bar{x},\bar{\varphi}(\bar{x})) \equiv 0$ в некоторой окрестности Ω точки $\bar{a}$, где $\varphi_1(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x},\varphi_m(\bar{x})),...,\varphi_{m-1}(\bar{x}) = \psi_{m-1}(\bar{x},\varphi_m(\bar{x}))$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала при $k=1,\dots,m$ имеем

$$0=df_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f_k}{\partial x_p}dx_p+\frac{\partial f_k}{\partial y_1}d\varphi_1(\bar{x})+\dots+\frac{\partial f_k}{\partial y_m}d\varphi_m(\bar{x})$$

В векторном виде это можно записать так: $Bd\bar{x}+Ad\varphi(\bar{x})=0$, где

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{pmatrix},\ d\varphi(\bar{x})=\begin{pmatrix}d\varphi_1(\bar{x})\\ \dots\\ d\varphi_m(\bar{x})\end{pmatrix},\ d\bar{x}=\begin{pmatrix}dx_1\\ \dots\\ dx_m\end{pmatrix}.$$

Имеет место равенство $d\varphi(\bar{x})=J_\varphi(\bar{x})d\bar{x}$, где

$$J_\varphi(\bar{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_p}\end{pmatrix}$$

Таким образом, получим $AJ_\varphi(\bar{x})d\bar{x}+Bd\bar{x}=0$, т.е. $\left(J_\varphi(\bar{x})+A^{-1}B\right)d\bar{x}=0$

Итак, линейное отображение переводит любой вектор $d\bar{x}\in R^n$ в нулевой вектор. Следовательно, это нулевое отображение и $J_\varphi(\bar{x})+A^{-1}B=\bar{0}$, т.е. $J_\varphi(\bar{x})=-A^{-1}B$

Теорема доказана.

С л е д . (теорема об обратном отображении). Пусть гладкое отображение $\varphi: R^n\to R^m$ в окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}$, невырожденное в этой точке. Тогда существует обратное гладкое отображение $\psi(\bar{x})=\varphi^{-1}(\bar{x})$, определенное в некоторой δ-окрестности точки $\bar{b}=\varphi(\bar{a})$, т.е. такое отображение, что $\psi(\varphi(\bar{x}))=\bar{x}$, причем матрица Якоби J_ψ отображения $\psi(\bar{y})$ равна $J_\psi=J_\varphi^{-1}$

Д о к - в о . Эта теорема является прямым следствием теоремы о системе неявных функций. Надо только записать равенство $\bar{y}-\varphi(\bar{x})=0$ в виде системы неявных функций

$f_1(\bar{x},\bar{y})=\varphi_1(\bar{x})-y_1=0$,

… … … … …

$f_n(\bar{x},\bar{y})=\varphi_n(\bar{x})-y_n=0$, а затем по этой теореме выразить $\bar{x}$ через $\bar{y}$.

§11. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Опр.1. Пусть Ω — область точек R^n, на которой определены гладкие функции $\varphi_1(\bar{x}),...,\varphi_m(\bar{x}) < n$. Тогда множество $\Omega_1 \subset \Omega$ решений системы уравнений $\varphi_k(\bar{x}) = 0, k = 1,...,m$, называется многообразием, порожденным функциями $\varphi_1,...,\varphi_m$. Уравнение $\varphi_k(\bar{x}) = 0$ называется уравнением связи для многообразия Ω.

Опр.2. Точка $\bar{a}$ называется точкой условного локального максимума на многообразии Ω, если в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ для любой точки $\bar{x}$, принадлежащей этой окрестности и многообразию Ω, справедливо неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$.

Аналогично определяются точки условного локального минимума и экстремума.

Если связи отсутствуют, то условный локальный экстремум называется безусловным экстремумом.

Опр.3. Точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ называется особой, если $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \bar{0}$, и неособой, если $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$.

Опр.4. Многообразие Ω_1 называется невырожденным, если для любой точки $\bar{x} \in \Omega_1$ векторы градиентов $\Phi_s = \operatorname{grad} \varphi_s(\bar{x})$ при $s = 1,...,m$ являются линейно независимыми.

Т е о р е м а (необходимое условие условного экстремума). Для того чтобы неособая точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ была бы точкой условного экстремума, функции $f(\bar{x})$ на невырожденном многообразии Ω_1 необходимо, чтобы вектор $\bar{F} = \operatorname{grad} f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ выражался в виде линейной комбинации градиентов $\Phi_1 = \operatorname{grad} \varphi_1(\bar{x}), \ldots, \Phi_m = \operatorname{grad} \varphi_m(\bar{x})$ в этой точке, т.е. чтобы существовали вещественные числа $\lambda_1,...,\lambda_m$ такие, что

$$\overline{F} = \lambda_1 \overline{\Phi}_1 + \cdots + \lambda_m \overline{\Phi}_m .$$

Д о к - в о . Найдем *n-m*. линейно независимых векторов $\overline{\alpha}_{m+1},...,\overline{\alpha}_n \in R^n$ таких, что каждый из этих векторов одновременно перпендикулярен вектору $\overline{F}$ и векторам $\overline{\Phi}_k$. Отсюда будет следовать, что векторы $\overline{\alpha}_i$ образуют (*n-m*) – пространство L, обладающее свойством $\overline{F} \perp L$ и $\overline{\Phi}_k \perp L, k = 1,...,m$. Ортогональное дополнение пространства $L^{\perp}$, состоящее из всех векторов $\overline{x} \in R^n$, ортогональных к L, содержит вектора $\overline{F}$ и $\overline{\Phi}_1,...,\overline{\Phi}_m$. Размерность пространства $L^{\perp}$ равна *m*. Поскольку вектора $\overline{\Phi}_1,...,\overline{\Phi}_m$ — линейно независимы, они образуют базис L. Следовательно, вектор $\overline{F}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{\Phi}_1,...,\overline{\Phi}_m$.

$\overline{\alpha}_{m+1},...,\overline{\alpha}_n \in L$, без ограничения общности будем считать, что $\dfrac{D(\varphi_1,...,\varphi_m)}{D(x_1,...,x_m)} \neq 0$.

По теореме о системе неявных функций в некоторой ε-окрестности точки $\overline{a} \in R^n$ существует m гладких функций $\psi_1(\overline{z}),...,\psi_m(\overline{z})$, где $\overline{z} = (x_{m+1},...,x_n)$ таких, что

$$\varphi_k(\psi_1(\overline{z}),...,\psi_m(\overline{z}),\overline{z}) \equiv 0, \tag{1}$$

а также $\varphi_k(\psi_1(\overline{z}_0),...,\psi_m(\overline{z}_0),\overline{z}_0) \equiv 0$, $(\psi_1(\overline{z}_0),...,\psi_m(\overline{z}_0),\overline{z}_0) = \overline{a}$.

Продифференцируем тождество (1) по переменным $x_{m+1},...,x_n$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_r} = 0, r = m+1,...,n. \tag{2}$$

Добавим к этому необходимое условие экстремума функции $f(\psi_1(\overline{z}),...,\psi_m(\overline{z}),\overline{z})$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0, \tag{3}$$

$$\overline{\Phi}_k = \operatorname{grad} \varphi_k = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1},...,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m},\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{m+1}},...,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \right), \quad \overline{F} = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

В качестве векторов $\overline{\alpha}_r = \left(\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_r}, \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_r},...,\dfrac{\partial \psi_m}{\partial x_r},0,...,0,1,0,...,0 \right)$, где 1 стоит на r – месте.

$\overline{\Phi}_k \cdot \overline{\alpha}_r = 0$, в силу равенств (2) следует, что $\overline{\Phi}_k \perp \overline{\alpha}_r, \forall k = 1,...,m; r = m+1,...,n$.

$\overline{F} \cdot \overline{\alpha}_r = 0$, в силу равенств (3) следует, что $\overline{F} \perp \overline{\alpha}_r, \forall k, r$.

$\overline{F}, \overline{\Phi}_k \in L$, dim=m, следовательно $\overline{F} = \lambda_1 \overline{\Phi}_1 + \cdots + \lambda_m \overline{\Phi}_m$. Теорема доказана.

С л е д . (метод множителей Лагранжа). Для того, чтобы функция $f(\overline{x})$, при ограниченных $\varphi_k(\overline{x}) = 0$, $k = 1,...,m$, имела экстремум в точке $\overline{x} = \overline{a}$ необходимо, чтобы точка $\overline{a}$ была стационарной для функции Лагранжа $L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x}) - \lambda_1 \varphi_1(\overline{x}) - \cdots - \lambda_m \varphi_m(\overline{x})$. $\lambda_1,...,\lambda_m$ – множители Лагранжа.

Д о к - в о . Рассмотрим условие стационарности для функции Лагранжа по переменным $\overline{x}$ и $\overline{\lambda}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} - \cdots - \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_s} = \varphi_s(\overline{x}) = 0, s = 1,...,m \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = \lambda_1 \overline{\Phi}_1 + \cdots + \lambda_m \overline{\Phi}_m \\ \varphi_s(\overline{x}) = 0 \end{cases}$$

Эти уравнения выражают необходимое условие экстремума функции $f(\overline{x})$ на многообразии Ω_1. Следствие доказано.

§ 12. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. МАТРИЦА ЯКОБИ

Опр.1. Пусть отображение $\alpha : R^n \to R^m$ определено в некоторой окрестности точки $\overline{x} = \overline{0}$. Тогда будем говорить, что $\alpha(\overline{x})$ есть о-малое от длины вектора $\overline{x}$, и обозначать это так: $\alpha(\overline{x}) = o(|\overline{x}|)$, если $\lim\limits_{\overline{x} \to 0} \dfrac{|\alpha(\overline{x})|}{|\overline{x}|} = 0$

Опр.2. Линейное отображение $l(\Delta \overline{x})$ из R^n в R^m называется дифференциалом отображения $f(\overline{x})$ в точке $\overline{x} = \overline{a}$, если $\Delta f(\overline{x}) = l(\Delta \overline{x}) + o(|\overline{x}|)$. Обозначение: $l(\Delta \overline{x}) \equiv df(\overline{x})\big|_{\overline{x} = \overline{a}, \overline{h} = \Delta \overline{x}}$. Если существует дифференциал отображения в точке, то оно называется дифференцируемым в этой точке. Дифференциал отображения можно определить следующим равенством: $\lim\limits_{\Delta\bar{x}\to 0}\dfrac{|\Delta f(\bar{x})-df(\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|}=0$.

Утв.1. Если дифференциал отображения существует, то он определен однозначно.

Д о к - в о . Пусть $l_1(\Delta\bar{x})$ и $l_2(\Delta\bar{x})$ — дифференциалы отображения $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$. Положим $l(\Delta\bar{x})=l_1(\Delta\bar{x})-l_2(\Delta\bar{x})$. Из неравенства треугольника имеем

$|l(\Delta\bar{x})|\le|\Delta f(\bar{x})-l_1(\Delta\bar{x})|+|\Delta f(\bar{x})-l_2(\Delta\bar{x})|$. В силу определения дифференциала отображения отсюда получим $\lim\limits_{\Delta\bar{x}\to 0}\dfrac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|}=0$

Далее, поскольку отображение $l(\Delta\bar{x})$ — линейно, для любого приращения $\Delta\bar{x}$ будем иметь $\dfrac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|}=\lim\limits_{\Delta\bar{x}\to 0}\dfrac{|l(t\Delta\bar{x})|}{|t\Delta\bar{x}|}=0$

Таким образом, отображение $l(\Delta\bar{x})$ переводит все линейное пространство в нулевой вектор. Следовательно, отображение $l(\Delta\bar{x})$ — нулевое, что и требовалось доказать.

Утв.2. Пусть $f(\bar{x})$ — дифференцируемое отображение. Тогда имеет место равенство

$\Delta f(\bar{x})=J_f(\bar{a})\cdot\Delta\bar{x}+o(|\Delta\bar{x}|)$.

Д о к - в о очевидно, если его расписать по каждой компоненте отображения.

Свойства дифференциала отображения.

1°. Дифференциал $df(\bar{x})$ отображения $f(\bar{x})$ существует тогда и только тогда, когда существуют все дифференциалы $df_k(\bar{x})$ функций $f_k(\bar{x})$, $f(\bar{x})=(f_1(\bar{x}),\ldots,f_m(\bar{x}))$

2°. Если отображение $\bar{y}=g(\bar{x})$ дифференцируемо в точке $\bar{a}$, а отображение $f(\bar{y})$ дифференцируемо в точке $\bar{b}=g(\bar{a})$, и образ некоторой окрестности точки $\bar{a}$ при отображении g содержится в некоторой окрестности точки $\bar{b}$, то отображение $h(\bar{x})=f(g(\bar{x}))$ дифференцируемо и $J_h(\bar{x})=J_f(g(\bar{x}))\cdot J_g(\bar{x})$.

3°. Отображение $f : R^n \to R^m$, которое является гладким в некотором шаре $O(\overline{a},\varepsilon), \overline{a} \in R^n, \varepsilon > 0$, заведомо будет дифференцируемым во всем шаре $O(\overline{a},\varepsilon)$.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ. КРИТЕРИЙ КОШИ

Опр.1. Пусть $\{a_n\}$ — произвольная числовая последовательность. Числовым рядом называется формальная бесконечная сумма s вида $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Опр.2. Величина $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется n-й частичной суммой ряда, а последовательность s_n называется последовательностью частичных сумм.

Опр.3. Если последовательность s_n частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу s, т.е. если $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, а число s — его суммой $\sum a_n = s$. Если же последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела, то говорят, что ряд $\sum a_n$ расходится.

Опр.4. Если ряд $\sum a_n$ сходится к числу s, то последовательность $r_n = s - s_n$ называется остаточным членом или остатком ряда.

С помощью ряда $\sum a_n$ можно составить другие ряды.

а) Отбросить первых m членов, то $b_n = a_{n+m}$.

б) Составить ряд $\sum_{s=1}^{\infty} a_s$, т.у. ряд который получается из исходного выборочным отбрасыванием конечного или бесконечного числа каких-либо его членов.

Утв.1. Остаточный член r_n ряда, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ можно представить в виде ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ в том смысле, что:

1) оба ряда сходятся или расходятся одновременно;

2) его сумма равна r_n когда исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Д о к - в о . 1) при $k \geq 1$ для частичных сумм s'_k ряда $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ и s_{k+n} ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет место равенство $s'_k = s_{k+n} - s_n$. Очевидно при фиксированном n сходимость и расходимость последовательностей s'_k и s_{k+n} имеют место одновременно.

2) В случае, когда оба ряда сходятся можно перейти к пределу при $k \to \infty$ в равенстве $s'_k = s_{k+n} - s_n$. Тогда получим $s'_k = \lim_{k\to\infty} s'_k = \lim_{k\to\infty} s_{k+n} - s_n = s - s_n = r_n$.

Утверждение доказано.

Утв.2. Отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Д о к - в о . Пусть мы отбросили члены ряда $\sum a_n$ с номерами $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Оставшиеся слагаемые перенумеруем в порядке возрастания их прежних номеров. Общий член получившейся таким образом последовательности обозначим через b_n. Тогда при любом $m > n_k$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m-k} b_n + a_{n_1} + \cdots + a_{n_k}$$

Отсюда следует, что последовательности частичных сумм этих рядов $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ и $s'_m = \sum_{n=1}^{m-k} b_n = s_m - a_{n_1} - \cdots - a_{n_k}$ сходятся и расходятся одновременно. Утверждение доказано.

Свойства рядов:

1. Если ряд $\sum a_n = s$ сходится и для любых $c \in R$,то ряд $\sum ca_n$ сходится и его сумма $\sum ca_n = cs$
2. Если ряды $\sum a_n = s$ и $\sum b_n = t$ сходятся, то ряд $\sum (a_n + b_n) = s + t$ сходится.

Утв.3. (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Д о к - в о . Имеем $a_n = s_n - s_{n-1}$. Отсюда при $n \to \infty$ получим $a_n \to s - s = 0$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 1 (критерий Коши). Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого ε>0 существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всяком натуральном p и всех $n > n_0(\varepsilon)$ имело место неравенство $\left|s_{n+p} - s_n\right| = \left|\sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| < \varepsilon$.

Д о к - в о следует из критерия Коши для последовательности частичных сумм.

Т е о р е м а 2 (критерий Коши для расходимости ряда). Для расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно ε>О с условием, что для любого $n_0 \geq 1$ найдутся натуральные $n > n_0$ и p, для которых справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \geq \varepsilon$.

Д о к - в о следует из критерия Коши расходимости последовательности.

Опр.5. Всякое выражение вида $s_{n+p} - s_n = \sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m$ называется отрезком ряда $\sum a_n$.

§ 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Опр.1. Ряд $\sum a_n$ называется рядом с неотрицательными членами, если при всех n имеем $a_n \leq 0$.

Т е о р е м а 1. Для сходимости ряда $\sum p_n$, где $p_n \geq 0$ при всех n, необходима и достаточна ограниченность последовательности его частичных сумм.

Д о к - в о. Т. к. $p_n \geq 0$, имеем, что последовательность $\{s_n\}$ не убывает и ограничено. Тогда $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \Rightarrow \sum p_n$ сходится. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 (признак сравнения). Пусть $\sum p_n$ и $\sum q_n$ — два ряда с неотрицательными членами и пусть, начиная с некоторого n_0, для всех $n \geq n_0$ имеем $0 \leq q_n \leq p_n$. Тогда:

а) сходимость ряда $\sum p_n$ влечет за собой сходимость ряда $\sum q_n$;

б) из расходимости ряда $\sum q_n$ следует расходимость ряда $\sum p_n$.

Д о к - в о. Отбросить первые n_0 членов каждого ряда. При всех $n > n_0$ полагаем $s_n = \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} p_k$ и $t_n = \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} q_k$. Тогда имеем $0 \leq t_n \leq s_n$.

а) последовательность $\{s_n\}$ ограничена, следовательно, и $\{t_n\}$ тоже ограничена и ряд $\sum q_n$ сходится.

б) последовательность $\{t_n\} \to \infty$, поэтому $\{s_n\} \to \infty$, т.е. ряд $\sum p_n$ расходится. Теорема доказана.

Опр.2. Ряд $\sum p_n$ в теореме 2 называется мажорантой для ряда $\sum q_n$, а ряд $\sum q_n$ — минорантой для ряда $\sum p_n$.

Т е о р е м а 3 (обобщенный признак сравнения). Если в условии предыдущей теоремы неравенство $q_n \leq p_n$ заменить неравенством $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n}$, то ее утверждение также будет иметь место.

Д о к - в о. Поскольку отбрасывание нескольких первых членов ряда не влияет на его сходимость, с самого начала можно считать, что n_0=1. Перемножая все неравенства из условия теоремы до номера n

включительно, приходим к неравенствам вида $\frac{q_n}{q_1} \le \frac{p_n}{p_1}$, $q_n p_1 \le p_n q_1$; $p_1 t_n \le q_1 s_n$. Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (признак Даламбера). Пусть для членов ряда $\sum p_n$ начиная с некоторого номера n_0, выполнены условия:

1) $p_n > 0$;

2) $D_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} \le q, 0 \le q \le 1$, то $\sum p_n$ сходится.

Если же при всех $n \ge n_0$ $\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge 1$, то ряд $\sum p_n$ расходится.

Д о к - в о . Сравним ряд $\sum p_n$ со сходящимся рядом $\sum b_n$, где $b_n = q^n$. При $n \ge n_0$ имеем $\frac{p_{n+1}}{p_n} \le q = \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, ряд $\sum b_n$ сходится, следовательно ряд $\sum p_n$ сходится по признаку сравнения.

$\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge 1$, то $p_{n+1} \le p_n \le p_{n_0}$; $\lim\limits_{n \to \infty} \ge p_{n_0} > 0$ - нарушен необходимый признак сходимости ряда, следовательно ряд расходится. Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 (признак Даламбера в предельной форме). Рассмотрим ряд $\sum p_n$ с условием p_n>0 для всех n. Положим $q = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}$, $r = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}$.

Тогда при $q < 1$ ряд $\sum p_n$ сходится, а при $r > 1$ — расходится.

Зам. $q = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}$ при q=1 вопрос о сходимости ряда $\sum p_n$ остается открытым.

Несколько более тонкий признак дает следующая теорема.

Т е о р е м а 6 (признак Коши). а) Если для членов ряда $\sum p_n$ с условием p_n>0, начиная с некоторого номера n_0, имеет место неравенство $p_n^{1/n} \ge q$, где число $q < 1$ и фиксировано, то ряд $\sum p_n$ сходится.

б) Если же для бесконечно многих n имеем $p_n^{1/n} \geq 1$, то этот ряд расходится.

Д о к - в о . а) Имеем $p_n^{1/n} \geq q$, $p_n \geq q^n$, следовательно $\sum p_n \leq \sum q_0^n < \infty$ – сходятся как бесконечно убывающая геометрическая последовательность.

б) $p_n^{1/n} \geq 1$,то $p_n \geq 1$. Следовательно, ряд $\sum p_n$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \neq 0$. Теорема 6 доказана.

Т е о р е м а 7 (признак Коши в предельной форме). Пусть $q_0 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n^{1/n}$ где $p_n \geq 0$ при всех n. Тогда при $q < 1$ ряд $\sum p_n$ сходится, а при $q > 1$ — расходится.

Признак Коши, хотя и сильнее признака Даламбера так же не позволяет решить вопрос о сходимости рядов, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n^{1/n} = 1$.

§3. ОСНОВНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Т е о р е м а 1 (признак Раабе). 1) Ряд $\sum p_n$ сходится, если для всех n, начиная с некоторого значения n_0, и некоторого α>1 имеет место неравенство $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$

2) Ряд $\sum p_n$ расходится, если, начиная с некоторого n_1, выполнено неравенство $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$.

Д о к - в о . 1) Воспользуемся обобщенным признаком. Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum \frac{1}{n^\beta}$, $\beta = \frac{\alpha+1}{2}, \alpha > \beta > 1$ Этот ряд сходится. Обозначим, его общий член через $q_n = \frac{1}{n^\beta}$. Тогда при $n \to \infty$ имеем

$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Начиная с некоторого номера $1 - \frac{\alpha}{n} \ge \frac{p_{n+1}}{p_n}$, следовательно ряд $\sum p_n$ сходится, т.к. $\frac{q_{n+1}}{q_n} \ge \frac{p_{n+1}}{p_n}$.

2) При $n \ge 2$ положим $b_n = \frac{1}{n-1}$ и $b_1 = 1$. $\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge \frac{n-1}{n} = \frac{1/n}{1/(n-1)} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$; ряд $\sum b_n$ расходится, следовательно ряд $\sum p_n$ расходится. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 (признак Раабе в предельной форме). Пусть p_n>0 для всех n и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{p_{n+1}}{p_n}\right) = l$

Тогда при $l > 1$ ряд $\sum p_n$ сходится, а при $l < 1$ — расходится.

Т е о р е м а 3 (признак Куммера). Пусть $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ — две последовательности положительных чисел.

1. Если существует $\alpha > 0$ и номер n_0 такие, что для всех $n > n_0$ имеем $c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \alpha$, то ряд $\sum a_n$ сходится.

2. Если найдется число n_0 такое, что при всех $n \ge n_0$ выполнено неравенство $c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 0$ и ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ расходится, то и ряд $\sum a_n$ тоже расходится.

Д о к - в о . $n_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1} \ge \alpha a_n$. Суммируя это неравенство по п при всех $n = 1,\ldots,m$, получим $c_1 a_1 - c_{m+1}a_{m+1} \ge \alpha(a_1 + \cdots + a_m)$, откуда

$$s_m = a_1 + \cdots + a_m \le \frac{c_1 a_1 - c_{m+1}a_{m+1}}{\alpha} < \frac{c_1 a_1}{\alpha}.$$

Это означает, что все частичные суммы s_n ряда $\sum a_n$ ограничены в совокупности, следовательно этот ряд сходится.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}$ и по обобщенному признаку сравнения ряд $\sum a_n$ расходится, т.к. расходится ряд с меньшими соответствующими членами. Теорема доказана.

С л е д . 1. а) Положим $c_n = 1$ для всех n. Условие сходимости ряда $\sum a_n$ тогда запишется в виде: $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha$ или $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \alpha$. Таким образом мы получаем признак Даламбера.

б) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ для всех $n \geq n_0$. Таким образом мы получаем признак Даламбера.

С л е д . 2. а) Положим $c_n = n - 1$. Тогда сходимость ряда $\sum a_n$ имеет место при выполнении условия $n - 1 - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha$, т.е. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha + 1}{n}$. Получаем признак Рабе.

б) Расходимость ряда $\sum a_n$ наступает при условии $c_n = n - 1$, $n - 1 - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$, т.е. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Получим признак Рабе.

С л е д . 3 (признак Бертрана).

1. Ряд $\sum a_n$, $a_n > 0$ сходится, если существует α>0 и номер n_0 такие, что при всех $n > n_0$ выполнены неравенства $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\alpha}{n \ln n}$

2. Данный ряд расходится, если при всех достаточно больших n имеет место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\alpha}{n \ln n}$

Т е о р е м а 4 (признак Гаусса). Если $a_n > 0$ для всех натуральных n, ε>0 — некоторая постоянная и $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, то:

1) ряд $\sum a_n$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$;

2) если $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leq 1$.

Д о к - в о . 1) Имеем $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{\alpha}$ при $n \to \infty$, поэтому по признаку Даламбера ряд $\sum a_n$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$.

2) Если $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$, то в соответствии с признаком Раабе имеем

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \mu .$$

Тогда ряд $\sum a_n$ сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$.

Если $\lambda = 1, \mu = 1$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $n \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon_0}}\right)$. Но поскольку $\ln n = o\left(n^{\varepsilon_0}\right)$, $\frac{1}{\ln n} = O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon_0}}\right)$, то

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon_0}}\right) > 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n}$. Тогда ряд $\sum a_n$ расходится по признаку Бертрана.

Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[1,+\infty)$ и $f(x)$ убывает на нем. Тогда:

1) если $0 \le p_n \le f(n)$ при всех $n \ge n_0$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum p_n$ тоже сходится;

2) если $p_n \ge f(n) \ge 0$ при всех $n \ge n_0$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum p_n$ тоже расходится;

Д о к - в о . $n_0 = 1$, т.к. $f(x)$ монотонно убывает, при всяком натуральном k и $k \le x \le k+1$ имеем $f(k) \ge f(x) \ge f(k+1)$.

Интегрируя это неравенство по указанному промежутку, получим

$$f(k) \ge \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \ge f(k+1)$$

Просуммируем эти неравенства по k от 1 до n-1. Получим

$$s_{n-1} \ge \int\limits_1^n f(x)dx \ge \sum_{k=1}^n f(k) - f(1) = s_n - f(1)$$

Случай 1. Если интеграл $I=\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то при $n \geq 2$ для частичных сумм s_n имеет место оценка $s_n \leq f(1)+\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$. Ряд $\sum f(n)$ сходится, то и ряд $\sum p_n$ сходится.

Случай 2. Если интеграл $I=\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то s_n – неограниченная последовательность. Ряд $\sum f(n)$ расходится, то и ряд $\sum p_n$ расходится. Теорема 5 доказана.

Зам. В условии теоремы 5 интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ можно заменить интегралом $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

§ 4. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ. РЯДЫ ЛЕЙБНИЦА

Рассмотрим ряд $\sum a_n$, где члены ряда могут иметь как положительные так и отрицательные знаки.

Опр.1. Ряд $\sum a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum |a_n|$

Опр.2. Сходящийся ряд $\sum a_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum |a_n|$ расходится.

Теорема 1. Всякий абсолютно сходится ряд, является сходящимся.

Док-во. По критерию Коши из сходимости ряда $\sum |a_n|$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $p \geq 1$ и $n > n_0$ имеем $\sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon$, откуда $\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon$. Это означает (по критерию Коши),что ряд $\sum a_n$ сходится. Теорема доказана.

Опр.3. Числовой ряд $\sum a_n$ называется знакочередующимся, если все его соседние члены имеют разные знаки.

Опр.4. Знакочередующийся ряд называется рядом Лейбница, если модуль его общего члена монотонно стремится к нулю.

Т е о р е м а 2 . Всякий ряд Лейбница сходится.

Д о к - в о . Рассмотрим последовательность частичных сумм $\{s_n\}$, заметим, что подпоследовательность нечетных частичных сумм монотонно убывает, т.е. $s_{2k+1} - s_{2k-1} = a_{2k+1} + a_{2k} < 0$, т.к. последовательность $\{a_k\}$ убывает. Подпоследовательность четных частичных сумм монотонно возрастает, т.е. $s_{2k+2} = s_{2l} + a_{2l+1} + a_{2l+2} = s_{2l} + |a_{2l+1}| - |a_{2l+2}| > s_{2l}$, $s_{2k+1} > s_{2l}, \forall k,l$.

$\{s_{2k+1}\}$ – монотонно убывает и ограничена снизу, то $\exists \bar{s} = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1}$.

$\{s_{2l}\}$ – монотонно возрастает и ограничена сверху, то $\exists \underline{s} = \lim\limits_{l\to\infty} s_{2l}$.

$\bar{s} = \underline{s} = s$, иначе $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{2k}| = \lim\limits_{k\to\infty}|s_{2k} - s_{2k-1}| = |\underline{s} - \bar{s}| \neq 0$ – противоречие. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 . Для остатка ряда Лейбница $\sum a_n$ справедлива оценка $|r_n| \le |a_{n+1}|$.

Д о к - в о . Согласно теореме 2 $|r_0| = |s| \le |a_1|$,аналогично $|r_n| \le |a_{n+1}|$, т.к. он представляет собой такой же ряд Лейбница. Теорема 3 доказана.

§ 5. ПРИЗНАКИ АБЕЛЯ И ДИРИХЛЕ

Т е о р е м а . Пусть $A_k = \sum\limits_{m=N+1}^{k} a_m$. Тогда при $M > N$ место формулы:

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k (b_k - b_{k+1}); \qquad (1)$$

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_{M+1} + \sum_{k=N+1}^{M} A_k (b_k - b_{k+1}); \qquad (2)$$

Д о к - в о . Заметим, что правые части формул равны между собой, так как, вычитая правую часть формулы (2) из правой части формулы (1), получаем

$A_M b_M - A_M b_{M+1} - A_M (b_M - b_{M+1}) = 0$;

Следовательно, достаточно доказать только формулу (1). Преобразуя ее правую часть, имеем:

$$A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_k - \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=N+1}^{M} A_k b_k - \sum_{l=N+2}^{M} A_l b_l =$$

$$= A_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} \left(A_k - A_{k-1}\right) b_k = a_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} a_k b_k = \sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 . Справедливы следующие утверждения.

(А) (признак Абеля). Если последовательность b_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum a_n$ сходятся, то ряд $\sum a_n b_n$ также сходится.

(Д) (признак Дирихле). Если последовательность b_n монотонна и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, а последовательность s_n частичных сумм ряда $\sum a_n$ ограничена, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Д о к - в о . Ограничимся рассмотрением случая, когда $b_n \geq 0$ и b_n убывает.

Применим формулу (1) преобразования Абеля к отрезку этого ряда с учетом того, что $b_k - b_{k+1} \geq 0$, $A_k = s_k - s_n$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|A_{n+p} b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right)\right| \leq \left|A_{n+p}\right| b_{n+p} + \max_{n<k<n+p} \left|A_k\right| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(b_k - b_{k+1}\right) \leq \max_{n<k<n+p} \left|A_k\right| b_{n+1}$$

Рассмотрим теперь случай (А). Поскольку b_n ограничена, при некотором $c > 0$ для всех n имеем $\left|b_{n+1}\right| < c$. Далее, так как ряд $\sum a_n$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > n_0(\varepsilon)$ и $k > n$ имеем

$$\left|A_k\right| = \left|\sum_{m=n+1}^{k} a_m\right| = \left|s_k - s_n\right| \leq \left|s_k\right| + \left|s_n\right| < \varepsilon, \qquad \text{тогда} \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leq \varepsilon \cdot c, \qquad \text{т.е.} \qquad \sum a_n b_n$$

удовлетворяет условию Коши, следовательно сходится.

В случае (Д) ограничены частные суммы s_k ряда $\sum a_n$ и поэтому $\exists c : \left|s_k\right| < c, \forall k$. Кроме того, $b_n \to 0$. Следовательно $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), p \geq 1$ имеем оценку $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon \cdot c$, т.е. ряд $\sum a_n b_n$ сходится по критерию Коши. Теорема 2 доказана.

§ 6. ПЕРЕСТАНОВКИ ЧЛЕНОВ РЯДА

Опр.1. Функциональной последовательностью $\{u_n(x)\}$ называется последовательность функций, определенных на непрерывном множестве $X \subset \overline{K}$.

Будем говорить, что функциональная последовательность сходится на множестве X, если она сходится $\forall x \in X$.

Опр.2. Пусть последовательность функций $\{r_n(x)\}$ сходится к нулю $\forall x \in M < \varepsilon$, тогда говорят, что $\{r_n(x)\}$ сходится равномерно к нулю на множестве M $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |r_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in M$.

Опр.3. Если функция $A(x) = A_n(x) + r_n(x)$, где последовательность $\{r_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на множестве M, то $A_n(x)$ называется равномерно сходящейся к функции $A(x)$, на множестве M, при $n \to \infty$.

Т е о р е м а 1. Пусть для любого n, последовательность $a_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in R$ и ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится к функции $A(x)$ на множестве I, где $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ – фиксированное число. Тогда $A(x)$ непрерывна в точке x_0.

Д о к - в о . По определению равномерной сходимости имеем $A(x) = A_n(x) + r_n(x)$, $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю на множестве I. $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ – частичная сумма непрерывных функций, $r_n(x)$ – остаток ряда, т.е. $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$.

Рассмотрим $\Delta A(x) = A(x) - A(x_0) = \Delta A_n(x) + r_n(x) - r_n(x_0)$; $|\Delta A(x)| \le |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|$.

$r_n(x)$ равномерно сходится к нулю на множестве I, следовательно $\forall\varepsilon_1 > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon_1): \forall n > n_0, \forall x \in I: |r_n(x)| < \varepsilon_1$, $|r_n(x_0)| < \varepsilon_1$.

$A_n(x)$ – непрерывна в точке x_0, как конечная сумма непрерывных функций.

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0: |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |A_n(x) - A_n(x_0)| < \varepsilon_1$.

Пусть задана $\varepsilon > 0: \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3}$. $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |\Delta A(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon \Rightarrow$ $A(x)$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Опр.4. Последовательность функций $A_n(x)$ называется равномерно ограниченной на множестве M, если $\exists c \in R: \forall n \in N, |A_n(x)| < c, \forall x \in M$.

Утв.1. Равномерно сходящаяся на множестве M последовательность $A_n(x)$, состоящая из ограниченных на множестве M функций, является равномерно ограниченной на множестве M.

Утв.2. Если функция $A(x)$ ограниченна на множестве M и последовательность $A_n(x)$ сходится равномерно к функции $A(x)$, то $\exists n_0 \in N: B_n(x) = A_{n_0+n}(x)$ равномерно ограниченная на M.

Утв.3. Пусть последовательность $a_n(x)$ равномерно сходится к функции $a(x)$, на множестве M, при $n \to \infty$, а последовательность $b_n(x)$ равномерно сходится к функции $b(x)$, на множестве M, при $n \to \infty$,тогда

1) $a_n(x) + b_n(x)$ равномерно сходится к $a(x) + b(x)$, на множестве M, при $n \to \infty$.

2) Если $a_n(x)$, $b_n(x)$ ограничены на M,то $a_n(x) \cdot b_n(x)$ равномерно сходится к $a(x) \cdot b(x)$, на множестве M, при $n \to \infty$.

3) $a_n(x)/b_n(x)$ равномерно сходится к $a(x)/b(x)$, на множестве M, если $|b(x)| > c_1 > 0$, $|a(x)| < c_2, \forall x \in M$.

Утв.4. Если последовательность $d_n(x)$ является равномерно ограниченной и последовательность $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю, на множестве M, при $n \to \infty$, то $d_n(x)r_n(x)$ равномерно сходится к нулю, на множестве M, при $n \to \infty$.

Т е о р е м а 2 (теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). Каково бы ни было вещественное число A, найдется сходящаяся перестановка $\sum b_n$ условно сходящегося ряда $\sum a_n$ такая, что $\sum b_n = A$.

Д о к - в о . $a_n \neq 0$ при всех n. Сначала в ряде $\sum a_n$ выделяем все положительные слагаемые p_k и отрицательные слагаемые $-q_l$ нумеруя их индексами k и l в порядке следования в ряде $\sum a_n$. Затем составляем перестановку $\sum b_n$ ряда $\sum a_n$: в качестве b_1 берем p_1, если $A \geq 0$, и $-q_1$, если A < 0. Подчеркнем, что все p_k и q_l положительны.

$A > 0$, составляем следующую последовательность ряда:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k1} = P_1 : P_1 - p_{k1} \leq A < P_1$$

$$-q_1 - q - + \ldots - q_{l1} = -Q_1 : P_1 - Q_1 < A \leq P_1 - Q_1 + q_{l1}$$

$$p_{k1+1} + \ldots + p_{k2} = P_2 : P_1 - Q_1 + P_2 - p_{k2} < A < P_1 - Q_1 + P_2$$

....

$$\sum b_n = P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \ldots + P_{m+1} - Q_{m+1} \qquad (1)$$

$$P_{m+1} = p_{k_m+1} + \ldots + p_{k_{m+1}}$$

$$Q_{m+1} = q_{l_m+1} + \ldots + q_{l_{m+1}}.$$

При этом частичные суммы $A + q_{l_m} \leq \delta_n \leq A + p_{k_m}$ (2) для $\sum a_n$, если $l_{m-1} + k_m \leq n \leq l_m + k_{m+1}$

Заметим, что оба ряда $\sum p_k$ и $\sum q_l$ расходятся, в противном случае либо сходится ряд, состоящий из $\sum |a_n|$, либо расходится ряд $\sum a_n$, что противоречит условию теоремы, тогда возможность построения процесса (1). $\sum b_n$ является перестановкой ряда $\sum a_n$,т.к. нетрудно показать, что каждый член ряда $\sum a_n$ является членом ряда $\sum b_n$, и они не повторяются. Кроме этого ввиду сходимости ряда $\sum a_n$ имеем $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $p_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $q_l \underset{l\to\infty}{\to} 0$, тогда из (2) следует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. Теорема доказана.

§ 7. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

Под арифметическими операциями над рядами понимаются почленное сложение, умножение членов ряда на одно и то же число, перестановки членов ряда, расставление и раскрытие скобок, умножение рядов.

Утв.1. Если в сходящемся ряде $\sum a_n$ некоторые группы слагаемых заключить в скобки, то его сходимость не нарушится и сумма не изменится.

Д о к - в о . Любая формальная расстановка скобок в бесконечной сумме $\sum a_n$ приводит к новой бесконечной сумме вида $(a_1 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots = b_1 + b_2 + \ldots$,

где при s=0,1,… имеем $b_s = a_{k_{s-1}+1} + \ldots + a_{k_s}$, и k_0=0.

Очевидно, что последовательность $\{B_s\}$ частичных сумм ряда $\sum b_n$ является подпоследовательностью $\{A_s\}$ частичных сумм ряда $\sum a_n$. И т.к. $\{A_s\}$ сходится, то $A_s \underset{s\to\infty}{\to} A$,тогда $B_s \underset{s\to\infty}{\to} A$, что и требовалось доказать.

Зам. Раскрытие скобок в сходящемся ряде необязательно приводит к сходящемуся ряду.

Утв.2. Пусть ряд $\sum b_n = B$, где $b_n = (a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k})$, причем *к* фиксировано, и пусть каждая из *к* последовательностей является бесконечно малой, т.е. $a_{n_s} \underset{n\to\infty}{\to} A \ \ \forall s = 1,\ldots,k$. Тогда в ряде $\sum b_n$ можно раскрыть скобки. Т.е.

$$\sum b_n = b_1 + b_2 + \ldots = (a_{11} + \ldots + a_{1k}) + (a_{21} + \ldots + a_{2k}) + \ldots = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{1k} + a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2k} + \ldots =$$
$$= d_1 + d_2 + \ldots$$

$$d_{(n-1)k+s} = a_{ns}$$

Т.о. ряд $\sum d_n$ сходится к той же сумме B.

Д о к - в о . Заметим, что для частичных сумм D_n и B_m рядов $\sum d_n$,<1 и $\sum b_m$ при *n=кm* имеем $D_{km} = B_m \underset{m\to\infty}{\to} B$. Рассмотрим $\alpha_n = D_n - D_{km}$; $km < n \le k(m+1)$

$|\alpha_n| \le |\alpha_{m+1}| + \ldots + |\alpha_n| \le |\alpha_{m+1,1}| + \ldots + |\alpha_{m+1,k}| + \ldots + |\alpha_{n,1}| + \ldots + |\alpha_{n,k}| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$, как конечная сумма слагаемых каждое из которых стремится к нулю, тогда $D_n = D_{km} + \alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} B$

Утверждение доказано.

Зам. Недостающие до *к* количество слагаемых в скобках можно дописать нулями.

Опр.1. Занумеруем каким-либо образом счетное множество пар (m,n) натуральных чисел, т.е. установим взаимнооднозначное соответствие $k \leftrightarrow (m,n)$, т.о. $m = m(k)$, $n = n(k)$. Такую нумерацию будем называть линейной нумерацией пар. Если $\sum a_m$ и $\sum b_n$ — два числовых ряда и $h_k = a_{m(k)} b_{n(k)}$, то ряд $\sum h_k$ будем называть их произведением, отвечающим данной линейной нумерации пар индексов (m,n) или данной перестановке попарных произведений $a_m b_n$.

Опр.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$, где $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ называется формальным произведением двух рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$

Т е о р е м а 1 . . Если оба ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, причем $\sum a_n = A$, а $\sum b_n = B$, то при любой перестановке попарных произведений их членов ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ абсолютно сходится к сумме $A \cdot B$.

Д о к - в о . Зафиксируем какую-либо перестановку попарных произведений $k \leftrightarrow (m(k), n(k))$. Докажем сначала, что ряд $\sum h_k$ сходится абсолютно. Пусть H'_k — последовательность частичных сумм ряда $\sum |h_k|$ и пусть r — какой-либо номер. Тогда имеем $H'_r = \sum\limits_{k=1}^{r} |a_{m(k)} b_{n(k)}|$.

Положим $m_0 = \max_{k \le r} m(k)$, $n_0 = \max_{k \le r} n(k)$. В этом случае, очевидно,

$$H'_k = \sum_{k=1}^{r} \left|a_{m(k)}\right| \cdot \left|b_{n(k)}\right| \le \sum_{k=1}^{m_0} |a_k| \sum_{k=1}^{n_0} |b_k| \le A'B', \text{ где } A' = \sum |a_n|,\ B' = \sum |b_n|.$$

Т.о., частичные суммы ряда $\sum h_k$ ограничены в совокупности, а это значит, что ряд $\sum h_k$ абсолютно сходится к некоторой своей сумме *H*, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k| = H'_k < \infty$, тогда при любой его перестановки сходимость не нарушается. Переставим эти члены так, чтобы при любом $k = n^2$ частичная сумма H_k имела вид $H_k = (a_1 + ... + a_k)(b_1 + ... + b_n)$. Тогда при $n \to \infty$ будем иметь $H_{n^2} \to A \cdot B$, т.к. $\{H_{n^2}\} \subset \{H_k\}$, последовательность H_k его частичных сумм сходится, то эти последовательности могут сходиться к одному и тому же пределу, т.е. $H_k \to A \cdot B \Rightarrow A \cdot B = H$. Теорема доказана

Т е о р е м а 2 . Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится к сумме *A* и ряд $\sum b_n$ условно сходится к сумме *B*. Тогда формальное произведение $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ этих рядов сходится к сумме $A \cdot B$.

§ 8. ДВОЙНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ РЯДЫ

Опр.1. Числовая функция $a(m,n) = a_{m,n} = a_{mn}$ двух натуральных аргументов *m* и *n* называется двойной последовательностью.

Опр.2. Двойным рядом $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ называется формальная бесконечная сумма $s = a_{11} + a_{12} + ... + a_{21} + a_{22} + ... + a_{31} + a_{32} + ...$

Опр.3. Конечная двойная сумма $A_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$ называется частичной суммой двойного ряда или прямоугольной частичной суммой.

Опр.4. Число l называется пределом двойной последовательности $\{B_{mn}\}$ или двойным пределом, если для всякого $\varepsilon>0$ найдутся числа $m_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ такие, что для всех $m > m_0$ и $n > n_0$ выполнены неравенства $\left|B_{n,m} - l\right| < \varepsilon$.

Понятие предела двойной последовательности полностью согласуется с общим определением предела функции по базе B. В данном случае база B представляет собой совокупность окончаний b_{m_0,n_0}, каждое из которых образовано множеством пар (m,n) натуральных чисел m и n: $m > m_0, n > n_0$. Предел $A = \lim\limits_{B} A_{mn} = \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_{mn}$.

Для двойных пределов выполнены все свойства предела по базе множеств.

Утв.1. (необходимый признак сходимости двойного ряда). Если ряд $\sum a_{mn}$ сходится, то $a_{mn} \underset{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}}{\to} 0$.

Д о к - в о . Имеем $a_{mn} = \left(A_{mn} - A_{m,n-1}\right) - \left(A_{m-1,n} - A_{m-1,n-1}\right)$. Так как по условию $A_{mn} \to A$, то $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{m,n} = A - A - A + A = 0$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 1 (критерий Коши). Для того чтобы двойной ряд $\sum a_{mn}$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовали числа $m_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ такие, что при всех $m_1, m_2 > m_0(\varepsilon)$ и $n_1, n_2 > n_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|A_{m_1,n_1} - A_{m_2,n_2}\right| < \varepsilon$.

Д о к - в о . Вытекает из общей формулировки критерия Коши для существования предела функции по базе множеств.

Т е о р е м а 2. Для сходимости двойного ряда $\sum p_{mn}$ с условием $p_{m,n} \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы $P_{m,n}$ были бы ограничены в совокупности, т.е. $\exists c > 0 : P_{m,n} < c, \forall m, n \in N$.

Д о к - в о . Достаточность. Заметим из того, что $m_1 < m_2$, $n_1 < n_2$, то $P_{m_1,n_1} \leq P_{m_2,n_2}$. Далее из ограниченности частичных сумм $P_{m,n}$ следует, что существует число M такое, что $M=\sup\limits_{m,n} P_{m,n}$. Тогда при любом ε>0 найдутся $m_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ такие, что $M-\varepsilon \le P_{m_0,n_0} \le M$, откуда $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} P_{m,n}=M$.

Необходимость. Ограниченность частичных сумм следует из свойства функции, имеющей предел по базе. Теорема 2 доказана.

Опр.5. Двойной ряд $\sum\limits_m \sum\limits_n a_{m,n}$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_m \sum\limits_n |a_{m,n}|$.

Т е о р е м а 3. Двойной абсолютно сходящийся ряд сходится.

Д о к - в о . Положим $p_{m,n}=\dfrac{|a_{m,n}|+a_{m,n}}{2}$, $q_{m,n}=\dfrac{|a_{m,n}|-a_{m,n}}{2}$. Тогда имеем $|a_{m,n}|=p_{m,n}+q_{m,n}$ и $a_{m,n}=\dfrac{p_{m,n}-q_{m,n}}{2}$, $p_{m,n}\ge 0$, $q_{m,n}\ge 0$.

Поскольку ряд $\sum\limits_m \sum\limits_n |a_{m,n}|$ сходится, найдется число $c>0$, такое что $A'_{m,n}=\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n}|a_{k,l}|<c$ при всех m и n. Но для частичных сумм рядов $\sum\limits_m \sum\limits_n p_{m,n}$ и $\sum\limits_m \sum\limits_n q_{m,n}$ справедливы неравенства $P_{m,n}\le A'_{m,n}$, $Q_{m,n}\le A'_{m,n}$, поэтому ряды $\sum\limits_m \sum\limits_n p_{m,n}$ и $\sum\limits_m \sum\limits_n q_{m,n}$ сходятся абсолютно. Следовательно, ряд $\sum\limits_m \sum\limits_n a_{m,n}$ сходится, как разность абсолютно сходящихся рядов. Теорема 3 доказана.

Опр.6. Пусть $\{a_{m,n}\}$ — двойная последовательность. Зафиксируем параметр m и рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}=b_m$. Тогда формальная бесконечная сумма

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right)$ называется повторным рядом.

Очевидно, с одной и той же двойной последовательностью можно связать еще один двойной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right)$.

Опр.7. Если при любом m ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходится к сумме b_m и ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ тоже сходится к некоторому числу A, то повторный ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right)=A$ называют сходящимся к сумме A.

Опр.8. Пусть $(m(k),n(k))$ — некоторая линейная нумерация совокупности всех пар (m,n). Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$, где $d_k = a_{m(k),n(k)}$, называется линейной перестановкой двойного ряда $\sum_m \sum_n a_{m,n}$, отвечающей данной нумерации его членов.

Т е о р е м а 4. Пусть $a_{m,n} \geq 0$, ряд $\sum d_k$ — некоторая его линейная перестановка. Тогда если сходится хотя бы один из трех рядов, т.е. $\sum_m \sum_n a_{m,n}$, $\sum_m \left(\sum_n a_{m,n}\right)$, $\sum d_k$, то два других тоже сходятся к той же сумме.

Д о к - в о . Обозначим через A, B и D сумму каждого из рассматриваемых рядов. Достаточно доказать, что $\exists A \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists B : B \leq A \overset{(2)}{\Rightarrow} \exists D : D \leq B \overset{(3)}{\Rightarrow} \exists A : A \leq 0$.

1) Существование числа A означает сходимость частичных сумм $A_{m,n}$ ряда $\sum_m \sum_n a_{m,n}$ к его сумме A при $n \to \infty$, $m \to \infty$. $A = \sup_{m,n} A_{m,n}$, откуда $A_{m,n} \leq A, \forall m,n$.

Отсюда следует, что $b_m(n) = \sum_{l=1}^{n} a_{m,l} \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = A_{m,n} \leq A \;\Rightarrow\; \forall m, \exists b_m = \sup_n b_m(n)$. Так как $\sum_{k=1}^{m} b_k(n) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = \;= A_{m,n} \leq A \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} A \geq \sum_{k=1}^{m} b_k = B_m$. Последовательность B_m неубывающая $\Rightarrow \exists B = \lim_{m\to\infty} B_m \leq A$

2) Пусть B существует. Тогда для любой частичной суммы $D_k = \sum_{l=1}^{k} d_k$ найдется пара чисел (m_0, n_0): $m(r) \leq m_0$, $n(r) \leq n_0, \forall r \leq k$. Тогда все слагаемые d_r одновременно будут входить и в суммы A_{m_0,n_0}:

$A_{m_0,n_0}=\sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{n_0}a_{k,l}\le\sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}=\sum_{k=1}^{m_0}b_k=B_{m_0}\le B$. Другими словами, все частичные суммы d_k ограничены сверху числом B и поэтому при некотором D имеем $D_k\underset{k\to\infty}{\to}D\le B$.

3) Пусть существует D. Тогда для любого $A_{m,n}$ можно найти номер $k_0: D_{k_0}=\sum_{k=1}^{k_0}d_k$ содержит все слагаемые $a_{k,l}$, входящие в сумму $A_{m,n}$ Но тогда при всех (m,n) имеем $A_{m,n}\le D_{k_0}\le D$. Следовательно, существует $\sup\limits_{m,n}A_{m,n}=A\le D$.

Теорема 4 доказана.

Зам. Утверждение теоремы 4 останется в силе, если условие неотрицательности $a_{m,n}\ge 0$ опустить, а сходимость рядов рассматривать как абсолютную.

Т е о р е м а 5. Любая перестановка членов двойного абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости и не изменяет его суммы.

Д о к - в о. $\sum\limits_m\sum\limits_n b_{m,n}$ — перестановка двойного абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_m\sum\limits_n a_{m,n}=A$. Рассмотрим соответствующие рядам $\sum\limits_m\sum\limits_n a_{m,n}$, $\sum\limits_m\sum\limits_n b_{m,n}$ однократные ряды $\sum_{k=1}^{\infty}d_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}d'_k$. Тогда ряд $\sum d'_k=A$, а ряд $\sum d_k$ является его перестановкой. Следовательно, ряд $\sum\limits_m\sum\limits_n b_{m,n}$ сходится. Теорема 5 доказана.

Т е о р е м а 6. В повторном абсолютно сходящемся ряде вида $\sum\limits_m\left(\sum\limits_n a_{m,n}\right)$ можно менять порядок суммирования. При этом ряд остается абсолютно сходящимся и его сумма не изменяется.

Д о к - в о . В силу замечания двойной ряд $\sum_m \sum_n a_{m,n}$ абсолютно сходится, следовательно абсолютно сходится и ряд $\sum_m \left(\sum_n a_{m,n} \right)$, причем суммы всех трех рядов совпадают. Теорема 6 доказана.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Оп.1. Функциональной последовательностью называется занумерованное множество функций $\{f_n(x)\}$, имеющих одну и ту же область определения $D \subset R$. При этом множество D называется областью определения функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.

Опр.2. Пусть $\{a_n(x)\}$ — некоторая функциональная последовательность, определенная на множестве D. Формальная бесконечная сумма вида $a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, называется функциональным рядом, определенным на D.

Функция $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ называется n частичной суммой функционального ряда $a_n(x)$

Опр.3. Если при фиксированном $x_0 \in D$ сходится числовой ряд $\sum a_n(x)$, то говорят, что функциональный ряд $\sum a_n(x)$ сходится в точке $x = x_0$.

Множество $D_0 \subset D$,состоящее из точек x_0, в которых $\sum a_n(x)$ сходится, называется областью сходимости этого ряда (функциональной последовательностью его частичных сумм).

Опр.4. Пусть D_0 — область сходимости функциональной последовательности $\{A_n(x)\}$ и пусть $A(x)$ есть предельное значение этой последовательности при фиксированном значении $x \in D_0$. Тогда множество пар $(x, A(x))$ задает некоторую функцию $y = A(x)$, определенную на всем множестве D_0. Эта функция называется предельной функцией функциональной последовательности $\{A_n(x)\}$. Если при этом $\{A_n(x)\}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n(x)$, то функция $A(x)$ называется суммой этого ряда. Остаток ряда $r_n(x)$ представляет собой некоторую функцию от x, $r_n(x) = A(x) - A_n(x)$, причем $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ при любом $\forall x \in D_0$.

§2 КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Т е о р е м а 1 (критерий Коши). Для того чтобы функциональная последовательность $\{A_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $m > n_0$ и $n > n_0$ и всех $x \in M$ имело бы место неравенство $|A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon$.

Д о к - в о. Необходимость. В этом случае $A_n(x)$ равномерно сходится к $A(x)$ на множестве M. Таким образом, для любого $\forall\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_0$ и для всех $x \in M$ имеем $|A_n(x) - A(x)| < \varepsilon/2$. Тогда при $m > n_0$ $|A_m(x) - A(x)| < \varepsilon/2$. Отсюда имеем $|A_n(x) - A_m(x)| \le |A(x) - A_m(x)| + |A_n(x) - A(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$

Достаточность. При каждом фиксированном $x \in M$ функциональная последовательность $A_n(x)$ является числовой последовательностью и для нее выполняется критерий Коши. Это значит, что она имеет предел $A(x)$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$, по условию найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такой, что при всех m и $n >_1$ имеем $|A_n(x) - A_m(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Снова произвольно зафиксируем $x \in M$ и устремим m к бесконечности. Получим неравенство $|A_n(x) - A(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$

Тогда, полагая $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_1(\eta/2)$, при всех $n > n_0$ и всех $x \in M$ будем иметь $|A_n(x) - A(x)| < \varepsilon$, т.е. $A_n(x)$ равномерно сходится к $A(x)$ на множестве M. Теорема 1 доказана.

С л е д . Для равномерной сходимости функционального ряда на множестве M необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для каждого $n > n_0$, и для каждого $p \in N$ и для всех $x \in M$ выполнялось бы неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon .$$

Д о к - в о. Следует из предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 3 . Утверждение о том, что ряд $\sum a_n(x)$ или последовательность $\{A_n(x)\}$ не являются равномерно сходящимися на множестве M, означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что найдутся две последовательности $\{n_m\}$ и $\{p_m\} \in N$, причем $n_{m+1} > n_m$, а также последовательность $\{x_m\} \in M$, для которых имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=n_m+1}^{n_m+p_m} a_k(x_m)\right| \geq \varepsilon .$$

§ 3 ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Т е о р е м а 1. Для того чтобы $b_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на множестве M при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовала числовая последовательность β_n с условием $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $|b_n(x)| \leq \beta_n$ для каждого $n \in N$ и для всех $x \in M$.

Д о к - в о . Достаточность. Пусть такая последовательность β_n существует. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $n > n_0$ справедлива оценка $\beta_n < \varepsilon$. Тогда при тех же n и всех $x \in M$ имеем $|b_n(x)| \leq \beta_n < \varepsilon$, т.е. $b_n(x)$ равномерно сходится к нулю на множестве M при $n \to \infty$.

Необходимость. Пусть $b_n(x)$ равномерно сходится к нулю на множестве M при $n \to \infty$. Положим $\beta_n = \sup\limits_{x\in M} |b_n(x)|$. Поскольку $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $n > n_0$ справедливо неравенство $|b_n(x)| < \varepsilon$, при тех же n имеем $\beta_n = \sup_{x \in M} |b_n(x)| \le \varepsilon$. Это значит, что $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Теорема 1 доказана.

Опр. Сходящийся числовой ряд $\sum p_n(x)$ $(p_n \ge 0)$ называется мажорантой функционального ряда $\sum a_n(x)$ на множестве M, если для каждого $n \in N$ и всех $x \in M$ справедлива оценка $|a_n(x)| \le p_n$.

Т е о р е м а 2 (признак Вейерштрасса). Пусть функциональный ряд $\sum a_n(x)$ на множестве M имеет мажоранту $\sum p_n(x)$. Тогда он равномерно сходится на этом множестве.

Д о к - в о . Достаточно установить, что остаток ряда $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю на M. Но заметим, что при любом фиксированном $x \in M$ числовой ряд $\sum a_n(x)$ сходится, поскольку имеет мажоранту $\sum p_n(x) = P$. Кроме того, при каждом фиксированном x имеем $|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} p_n = \rho_n$, где ρ_n — остаток числового ряда $\sum p_n(x)$ и $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Но по теореме 1 это означает, что $r_n(x)$ имеет бесконечно малую мажоранту ρ_n. Следовательно, $r_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на множестве M при $n \to \infty$. т.е. ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 (признаки Абеля и Дирихле).

(А) (признак Абеля). Пусть:

1) $\sum a_n(x)$ равномерно сходилась к $A(x)$ на множестве M;

2) последовательность $b_n(x)$ равномерно ограничена на M;

3) при всех фиксированных $x \in M$ числовая последовательность $b_n(x)$ монотонна.

Тогда ряд $\sum h_n(x)$, $h_n(x) = a_n(x) b_n(x)$, равномерно сходится на. М.

(Д) (признак Дирихле). Пусть:

1) частичные суммы $A_n(x)$ равномерно ограничены на М;

2) $b_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на множестве M при $n \to \infty$;

3) при всех фиксированных $x \in M$ числовая последовательность $b_n(x)$ монотонна.

Тогда ряд $\sum h_n(x)$, $h_n(x) = a_n(x) b_n(x)$, равномерно сходится на M.

Д о к - в о . Сначала будем считать, что последовательность $b_n(x)$ убывает и $b_n(x)$ для каждого $n \in N$. Обозначим $H'_k = \sum_{m=n+1}^{k} h_m(x)$, $A'_k = \sum_{m=n+1}^{k} a_m(x)$.

Применим преобразование Абеля к частичной сумме ряда. $\sum h_m(x)$

$$H'_p(x) = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| = \left|A'_{n+p}(x) b_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A'_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\right| \le$$

$$\le \left|A'_{n+p}(x)\right| b_{n+p}(x) + \sup_{n<k\le n+p} \left|A'_k\right| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) = b_{n+1}(x) \sup_{n<k\le n+p} \left|A'_k(x)\right|$$

Случай (А). В силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ и согласно критерию Коши $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $k > n_0$ справедливо неравенство $\sup_{x\in M} \left|A'_k(x)\right| < \varepsilon$.

Кроме того, в силу равномерной ограниченности $b_n(x)$ при некотором $c > 0$ для каждого $n \in N$ и для всех $x \in M$ имеем $b_n(x) \le c$. Следовательно, при $n \ge n_0$ справедлива оценка $\left|H'_p(x)\right| \le c\varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает выполнение условия критерия Коши для равномерной сходимости ряда $\sum h_n(x)$.

Случай (Д). При этом в силу равномерной ограниченности сумм $A_k(x)$, а вместе с ними и $A'_k(x) = A_k(x) - A_n(x)$ найдется число $c > 0$ такое, что $\left|A'_k(x)\right| < c$ при всех $k \in N$ и всех $x \in M$. По критерию Коши при достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$ в силу п. 2 имеем $b_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на множестве M при $n \to \infty$. Тогда получим $\left|b_{n+1}(x)\right| < \varepsilon$, откуда, получим $\left|H'_p(x)\right| \le c\varepsilon$. Тем самым теорема доказано.

§ 4 ТЕОРЕМА ДИНИ

Т е о р е м а 1 (признак Дини). Пусть последовательность неотрицательных функций $p_n(x)$, непрерывных на отрезке $I=[a,b]$, сходится поточечно к нулю на этом отрезке, причем $p_n(x)\geq p_{n+1}(x)$ при всех $x\in I$ и при всех $n\in N$. Тогда эта сходимость равномерная на отрезке I, поточечная сходимость является равномерной.

Д о к - в о . Ввиду поточечной сходимости последовательности $p_n(x)$ к нулю для всякого $\forall\varepsilon>0$ и для каждой точки $x\in I$ можно указать номер $n_0=n_0(\varepsilon,x)$ такой, что $p_n(x)<\varepsilon/2$. Но так как $p_n(x)$ непрерывна, то у точки x найдется некоторая δ-окрестность, где $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $p_n(y)>\varepsilon$, $\forall y\in O(\delta,x)$. Совокупность этих окрестностей полностью покрывает отрезок I, и в силу того, что он является компактом, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $O(\delta_{n_s},x_{n_1}),\ldots,O(\delta_{n_s},x_{n_s})$. Причем в каждом $O(\delta_{n_k},x_{n_k})$ имеем $0\leq p_{n_0}(y)<\varepsilon$. Положим $n_0=\max_k n_k$, то $0\leq p_{n_0}(y)\leq p_{n_k}(y)<\varepsilon$ $\forall y\in O(\delta_{n_k},x_{n_k})$, тогда $\forall y\in I$ имеем $0\leq p_{n_0}(y)\leq p_{n_k}(y)<\varepsilon$. Отсюда $\forall n>n_0(\varepsilon)$ и $\forall y\in I$ имеем $|p_n(y)|<\varepsilon$, следовательно, $p_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на отрезке I при $n\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Зам. Если в теореме 1 в качестве $p_n(x)$ рассматривать последовательность остатков $r_n(x)$ функционального ряда $\sum a_n(x)$ условием $a_n(x)\geq 0$, то вместе с доказанной ранее теоремой о сохранении непрерывности суммы ряда при его равномерной сходимости мы получим следующий критерий.

Т е о р е м а 2 . Для того чтобы сумма ряда, составленного из непрерывных и неотрицательных функций на отрезке $I=[a,b]$, была также непрерывна на $I=[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы ряд сходился равномерно на этом отрезке.

§ 5 ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДА

Заметим, что теорема о непрерывности сумм равномерно сходящегося ряда позволяет менять порядок выполнения двух последних переходов вида $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Действительно по теореме, если $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$, $a_n(x)\geq 0$ – непрерывен на M, то $A_n(x)$ – непрерывна на M. Следовательно $A(x)=\lim_{n\to\infty} A_n(x)$ – непрерывна на M тогда и только тогда, когда $A_n(x)$ равномерно сходилась к $A(x)$ на множестве M при $n\to\infty$. Тогда $\forall x_0 \in M$ имеем $A(x_0)=\lim_{x\to x_0} A(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} A_n(x)$.

$A(x_0)=\lim_{n\to\infty} A_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} A_n(x)$, приравнивая конечные выражения получаем свойство перестановки пределов.

Теорема 1 (о почленном интегрировании). Если $a_k(x)\in R[\alpha,\beta]$ интегрируема по Риману и сумма $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ равномерно сходилась к $A(x)$ на $[\alpha,\beta]$ при $n\to\infty$, то $A(x)\in R[\alpha,\beta]$.

$\int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\alpha}^{\beta} a_k(x)dx\right)$ – имеет место свойство почленного интегрирования ряда

Док-во. Согласно критерию Лебега интегрируемости функции по Риману мера множества T_n точек разрыва каждой из функций $a_n(x)$ равна нулю. Но тогда объединение T всех таких множеств, $T=\bigcup T_n$, также имеет лебегову меру нуль. Все остальные точки промежутка $I=[\alpha,\beta]$ будут общими точками непрерывности одновременно для всех функций $a_n(x)$. Поэтому в силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ сумма $A(x)$ этого ряда будет ограничена и в этих точках непрерывна. Другими словами, тогда лебегова мера точек разрыва ограниченной функции $A(x)$ тоже равна нулю и согласно критерию Лебега $A(x)$ интегрируема по Риману на $[\alpha,\beta]$. Тогда при всех $n\in N$ имеем $\int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} A_n(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} r_n(x)dx$.

Но так как $r_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на множестве I при $n \to \infty$, то $\sup_I |r_n(x)| = \rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Отсюда получим

$$\left(\int_\alpha^\beta A(x)dx - \int_\alpha^\beta A_n(x)dx \right) \le \int_\alpha^\beta |r_n(x)|dx \le \int_\alpha^\beta \rho_n dx = \rho_n(\beta - \alpha) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$ т.е. $\left(B - \sum_{k=1}^{n} b_k \right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и

$B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. Ряд $\sum a_n(x)$ можно почленно дифференцировать, если:

1) он сходится в некоторой точке $x_0 \in I = [\alpha, \beta]$;

2) производные всех его слагаемых $a_n(x)$ существуют и непрерывны на I;

3) $\sum_{k=1}^{n} a'_k(x)$ равномерно сходилась к $A'(x)$ на множестве I при $n \to \infty$;

$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) = A_n(x)$ равномерно сходилась к $A(x)$ на множестве I при $n \to \infty$.

Т.е. $(A(x))' = \left(\sum a_n(x)\right)' = \sum a'_n(x) = A'(x)$

Д о к - в о . Применить теорему о почленном интегрировании ряда $\sum a'_n(x)$ на отрезке $[x_0, t] \subset [\alpha, \beta]$

$$A(t) - A(x_0) = B(t) = \int_{x_0}^{t} A'(x)dx = \int_{x_0}^{t} \sum a'_n(x)dx = \sum \int_{x_0}^{t} a'_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t) - a_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t).$$

Это равенство означает, что $A'(t) = B'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t)$. Покажем, что ряд $\sum a_n(x)$ сходится равномерно на I. Имеем

$$\beta_n(t) = \int_{x_0}^{t} r'_n(x) = \int_{x_0}^{t} \sum_{k=n+1}^{\infty} a'_n(x)dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(t) - a_k(x_0)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n(t); \ \beta_n(t) = B(t) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t).$$

Но $r_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на множестве I при $n \to \infty$, поэтому существует последовательность p_n с условием $p_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $|r'_n(x)| \le p_n$ при всех $n > n_0$ и всех $x \in I$. Следовательно,

$$|\beta_n(t)| \le \int_{x_0}^{t} |r'_n(x)|dx \le \int_{x_0}^{t} p_n dx = p_n(t - x_0) \le p_n(\alpha - \beta).$$

Это значит, что $\beta_n(x)$ равномерно сходилась к нулю на I при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum b_n(t)$ равномерно сходилась I, а вместе с ним и ряд $\sum a_n(t) = \sum b_n(t) + \sum a_n(x_0)$ тоже равномерно сходится I при $n \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. Пусть:

1) ряд $\sum a_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [\alpha, \beta]$;

2) ряд $\sum a_n'(x)$ Равномерно сходится на I.

Тогда, ряд $\sum a_n(x)$ тоже равномерно сходится на I, причем его сумма $A(x)$ имеет производную $A'(x) = \sum a_n'(x)$.

Зам. Здесь нельзя воспользоваться формулой Ньютона - Лейбница, поскольку функции $a_n'(x)$ могут уже не интегрироваться по Риману.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем, что ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на I. Рассмотрим $\sum h_n(x) = \sum (a_n(x) - a_n(x_0))$

Применяя к отрезку ряда $\sum h_n(x)$ формулу конечных приращений Лагранжа, при некотором $t \in (x_0, x)$ будем иметь

$$T = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} h_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k(x) - a_k(x_0))\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (x - x_0) a_n'(t)\right| \le$$

$$\le |x - x_0| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k'(t)\right| < \varepsilon |x - x_0|$$

Условие критерия Коши для ряда $\sum h_n(x)$ выполнено и он равномерно сходится вместе с рядом $\sum a_n(x)$.

Теперь показать, что его сумму $A(x)$ можно дифференцировать, причем производная суммы равна сумме производных. Пусть $x_1 \in I = [\alpha, \beta]$.

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{A(x) - A(x_1)}{x - x_1} = \frac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} + \frac{r_n(x)}{\Delta x} = D_n + R_n$$

$$|R_n| = \left|\frac{r_n(x) - r_n(x_1)}{x - x_1}\right| = \lim_{p \to \infty} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1}\right| \le \sup_p \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1}\right| \le \sup_{\substack{t \in I \\ p \in N}} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k'(t)\right| = T_1 .$$

В силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ величина $T_1 < \varepsilon$ при достаточно большом n, т.е. $|R_n| < \varepsilon$. Полагая $D(x) = \sum a_n'(x)$ и $d_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k'(x) = D(x) - A_n(x)$ при тех же $n \in N$ и всех $x \in I$, очевидно, имеем оценку $|d_n(x)| \le T_1 < \varepsilon$

Далее, функция $A_n(x)$ дифференцируема при любом x, поэтому

$D_n = \dfrac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} = A_n'(x_1) + \gamma_n(x)$, $\gamma_n(x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$.

Зафиксируем теперь какое-либо $n > n_0(\varepsilon)$ и выберем число $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\gamma_n(x) < \varepsilon$. Тогда для всех таких x имеем

$$\left|\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} - D(x_1)\right| = |D_n + R_n - D(x_1)| = |A_n'(x_1) + \gamma_n(x) + R_n - D(x_1)| = |\gamma_n(x) - d_n(x_1) + R_n| < 3\varepsilon,$$

а это значит, что $\dfrac{\Delta A(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\to} D(x_1)$или $A'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$. Теорема 3 доказана полностью.

§ 6 СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Опр.1. Степенным рядом называется ряд вида $\sum a_n (x - x_0)^n$, $a_n \in R$, x_0 – фиксированное число, x – переменная функционального ряда.

Опр.2. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum a_n (x - x_0)^n$, если этот ряд сходится при всех x с условием $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$.

Т е о р е м а 1 (теорема Коши - Адамара). Пусть задан степенной ряд $\sum f_n(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$. Рассмотрим числовую последовательность $b_n = |a_n|^{1/n}$. Тогда:

1) если b_n является неограниченной последовательностью, то этот ряд расходится при всех $x \ne x_0$

2) если b_n ограничена и $l = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \ne 0$, то $R = \dfrac{1}{l}$;

3) если $l = 0$, то данный ряд сходится при всех $x \in R$.

Д о к - в о . Для краткости записи будем считать, что $x_0 = 0$. Для общего члена числового ряда имеем равенство $|f_n(x)| = |a_n x^n| = b_n^n |x|^n = (b_n|x|)^n$.

1) Если $\{b_n\}$ – неограничена, то ряд $\sum a_n (x - x_0)^n$ расходится по необходимому признаку.

2) Если $\exists l \neq 0$: $|x| < \frac{1}{l}$ и любом $n > n_0$, применяя признак сходимости Коши в предельной форме к ряду $\sum |f_n(x)|$ имеем $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|^{1/n} = x \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n < l \cdot \frac{1}{l} = 1$.

Если $|x| > \frac{1}{l}$ по критерию Коши имеем, что ряд $\sum a_n (x - x_0)^n$ расходится.

3) Если $\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 0$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|^{1/n} = |x| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 0 < 1, \forall x \in R$, т.е. ряд сходится. Теорема 1 доказана.

Зам. Если $|x| = R$, то степенной ряд может и сходиться и расходиться.

Т е о р е м а 2 . Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$ и r — произвольное число с условием $0 < r < R$. Тогда яа отрезке $[-r, r]$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

Д о к - в о . Рассмотрим $r_1 = \frac{(R + r)}{2} < R$, тогда $\sum a_n r_1^n$ – сходится, т.е. $\exists c : |a_n| r_1^n < c, \forall n \in N$. В силу того, что $r < r_1$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = \frac{c}{1 - r / r_1}$$

Но тогда сходящийся ряд $\sum |a_n| r^n < \infty$ будет мажорантой для $\sum a_n x^n$ на отрезке $[-r, r]$. Следовательно, на этом отрезке ряд сходится абсолютно и равномерно.

При тех же условиях сумма $A(x)$ ряда $\sum a_n x^n$ является непрерывной функцией на отрезке $[-r, r]$, поскольку он сходится там равномерно и его члены непрерывны. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. Если $R>0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$, то $\forall r: 0<r<R$ этот ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать на интервале сходимости.

Д о к - в о. Формальное почленное дифференцирование степенного ряда $\sum a_n x^n$ дает ряд $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, а интегрирование его приводит к ряду $x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n+1}$ Для коэффициентов рядов имеет место равенства $|a_n|^{1/n} = |b_n|^{1/n}\cdot n^{-1/n} = |c_n|^{1/n}(n+1)^{1/n}$, так как $(n+1)^{-1/n}\underset{n\to\infty}{\to} 1$, то по этой теореме радиусы сходимости всех трех рядов равны и ряды сходятся равномерно на любом отрезке вида $[-r,r], r\le R$. Но тогда их можно почленно дифференцировать и интегрировать на этом интервале сходимости. Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (теорема Абеля). Пусть ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке $x=c>0$. Тогда его сумма $A(x)=\sum a_n x^n$ непрерывна на отрезке $[0,c]$. Если же число $c<0$, то функция $A(x)$ непрерывна на отрезке [c,0].

Док-в о. Рассмотрим случай c>0. Ряд $\sum a_n c^n$, сходящийся по условию, является мажорантой для ряда $\sum a_n x^n$ на $[0,c]$; тогда ряд $\sum a_n x^n$ равномерно сходится на $[0,c]$. Следовательно $A(x)$ – непрерывна на $[0,c]$.

Если $c<0$. Сделаем замену $y=-x$. Проводя аналогичные рассуждения для ряда $\sum b_n y^n$, где $b_n=(-1)^n a_n$, получаем, что ряд $\sum b_n y^n$ сходится. Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть степенной ряд $\sum a_n (x-x_0)^n A(x)$ имеет положительный радиус сходимости R. Тогда $a_n=\frac{A^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Д о к - в о. По теореме 3 при $x=x_0$ имеем

$A(x_0)=a_0$

$A'(x_0)=a_1$

$A''(x_0)=2a_2$

…………

$A^{(n)}(x_0) = n!a_n$. Теорема 5 доказана.

След. Степенной ряд $\sum a_n(x-x_0)^n$ с ненулевым радиусом сходимости является разложением в точке $x = x_0$ в ряд Тейлора своей суммы $A(x)$.

Теорема 6. Пусть $R_0 > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n(x-x_0)^n = A(x)$ Рассмотрим другое разложение функции $A(x)$ в ряд Тейлора в точке $x_1 : |x_1 - x_0| = r < R_0$; тогда, если $b_0, b_1, \ldots$ — его коэффициенты, а R_1 — радиус сходимости, то $R_1 \geq R_0 - r$ и $A(x) = \sum b_k (x - x_1)^k$, если $|x - x_1| < R_1$

Док-во. $x_0 = 0$ и положим $x - x_1 = y$. Тогда $x - x_0 = x = y + x_1$, $|x_1| = |x_1 - x_0| = r$. Если $|y| < R_0 - r$, то $|y| + |x_1| < R_0 - r + r = R_0$ Поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|y| + |x_1|)^n$ сходится абсолютно. Но тогда повторный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} c_n^k y^k x_1^{n-k}$ тоже абсолютно сходится и его члены можно переставить. В силу этого имеем

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} c_n^k y^k x_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n^k x_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k \text{, где}$$

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n c_n^k x_1^{n-k} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n x_1^{n-k} \right).$$

Т.о. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$ абсолютно сходится $\forall y : |y| < R_0 - r$, если $|x_1 - x_0| = r < R_0$. Теорема 6 доказана.

Опр.3. Функция $A(x)$ называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки она может быть представлена степенным рядом, т.е. ее рядом Тейлора, т.о. сумма ряда $A(x)$ является аналитической внутри области сходимости этого ряда. Возможно, что при разложении суммы $A(x)$ степенного ряда $\sum a_n(x-x_0)^n$ в какой-либо точке $x_1 \neq x_0$ из его области сходимости новый степенной ряд $\sum b_n(x-x_1)^n$ будет иметь свой интервал сходимости, выходящий за пределы прежнего интервала.

Опр.4. Метод распространения области определения аналитической функции путем ее разложения в степенной ряд в точке, не совпадающей с центром первоначальной области определения, называется принципом аналитического продолжения функции.

§ 7 БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Опр.1. Рассмотрим числовую последовательность положительных чисел $\{b_n\}, b_n > 0$. Формальное бесконечное произведение всех ее членов $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n \cdot ...$ называется бесконечным числовым произведением, или бесконечным произведением $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$

Опр.2. Конечное произведение $\prod_n = b_1 \cdots b_n$ называется n-м частичным произведением.

Опр.3. Если последовательность $\prod_n \underset{n\to\infty}{\to} \prod \neq 0$, то бесконечное произведение называется сходящимся. Если $\prod = 0$, то это бесконечное произведение называется расходящимся к нулю, а если $\prod \to +\infty$, то оно называется расходящимся к бесконечности. Если предела нет вообще, то оно называется просто расходящимся.

Утв.1 (необходимый признак сходимости бесконечного произведения). Если $\prod b_n$ сходится, то $b_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Д о к - в о . Если $\prod_n \underset{n\to\infty}{\to} \prod \neq 0$, то $b_n = \dfrac{\prod_n}{\prod_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{\prod}{\prod} = 1$. Утверждение доказано.

Утв.2. Сходимость бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ эквивалентна сходимости ряда $\sum \ln b_n$, т.е. произведение $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum \ln b_n$, причем $\ln \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \sum \ln b_n$.

Д о к - в о . Имеем $\ln \prod_n = \sum_{k=1}^{n} \ln b_k$. Функция $y = \ln x$ устанавливает непрерывное взаимно однозначное соответствие, то возможен переход к пределу, т.е.

$\ln\prod_n = \sum_{k=1}^{n}\ln b_k$, то $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\ln\prod_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln b_k$, тогда $\ln\lim\limits_{n\to\infty}\prod_n = \ln\prod = \sum_{k=1}^{\infty}\ln b_k$.

Утверждение доказано.

Зам. Отбрасывание или добавление любого конечного числа ненулевых сомножителей не влияет на сходимость бесконечного произведения.

Опр.4. Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится ряд $\sum\ln b_n$.

Сходящееся бесконечное произведение не являющееся абсолютно сходящимся, называется условно сходящимся.

Т е о р е м а 1. Абсолютно сходящееся произведение всегда сходится в обычном смысле.

Д о к - в о . Вытекает из последнего утверждения и теоремы о сходимости абсолютно сходящегося ряда.

Т е о р е м а 2 (критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения). Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда, сходится ряд $\sum a_n$.

Д о к - в о . Так как $1+a_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$, то $a_n \to 0$. Однако $\frac{\ln(1+x)}{x}\underset{x\to 0}{\to}1$, поэтому при $n\to\infty$ имеем $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}\to 1$, $\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}\to 1$.

Следовательно, при достаточно большом $n > n_0$ выполнены неравенства $\frac{1}{2} < \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} < \frac{3}{2}$. Следовательно, ряды $\Sigma|a_n|$ и $\Sigma|\ln(1+a_n)|$ сходятся или расходятся одновременно по признаку сравнения. Теорема 2 доказана.

Утв.3. Если при достаточно большом $n > n_0$ все числа a_n имеют один и тот же знак, то сходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ эквивалентна сходимости ряда Σa_n.

Д о к - в о . Из сходимости ряда и сходимости произведения $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $\ln(1+a_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, отсюда следует, что при достаточно большом $n > n_0$ величина $\ln(1+a_n)$ сохраняет знак вместе с a_n. Это означает, что сходимость рядов $\sum a_n$, $\sum \ln(1+a_n)$ и произведения $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ эквивалентна их абсолютной сходимости. Утверждение доказано.

Утв.4 (формула Эйлера). Имеет место следующая формула:

$$\Gamma(s) = s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^s(1+s/n)^{-1}$$

Д о к - в о . Учитывая, что бесконечное произведение в определении гамма-функции сходится абсолютно в любой точке своей области определения. Поэтому из определения гамма-функции имеем

$$\Gamma(s) = s^{-1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}(1+1/n)^s\prod_{n=1}^{m}(1+s/n)^{-1}$$

$$\Gamma(s) = s^{-1}\lim_{m\to\infty} e^{-s\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right)}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}(1+s/n)^{-1}\cdot e^{s/n} = s^{-1}\prod_{n=1}^{m}(1+s/n)^{-1}\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}(1+1/n)^s =$$

$$= s^{-1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left((1+1/n)^s(1+s/n)^{-1}\right)(1+1/m)^{-s} = s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^s(1+s/n)^{-1}$$

что и требовалось доказать.

Утв.5 (функциональное уравнение для гамма-функции). Справедлива следующая формула: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$.

Д о к - в о . По формуле Эйлера имеем, что $\Gamma(1) = 1$, а также

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \frac{s}{s+1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^{s+1}}{(1+1/n)^s}\cdot\frac{(1+(s+1)/n)^{-1}}{(1+s/n)^{-1}} = \frac{s}{s+1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+s}{n+s+1} = \frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}(m+1)\frac{1+s}{m+s+1} = s$$

Отсюда следует, что $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Утверждение доказано.

С л е д . Для натуральных чисел n имеем $\Gamma(n+1) = n!$. $\forall x \in R, x \neq -1,-2,\ldots$ имеет место интегральное представление для $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$

Утв.6. При $s>1$, $\varsigma(s)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$

Д о к - в о . Имеем $\Pi_k=\prod_{m=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_m^s}\right)^{-1}=\prod_{m=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_m^s}+\frac{1}{p_m^{2s}}+...\right)$

Раскрывая скобки, согласно неравенству $p_k>k$, справедливому при всех $k\in N$. получим $\Pi_k>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^s}$. С другой стороны очевидно, что $\Pi_k=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a_m^s}$, где a_m — некоторая подпоследовательность натуральных чисел, которая не содержит повторений в силу однозначности разложения натурального числа на простые сомножители. Отсюда имеем, неравенства $\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}>\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a_m^s}>\Pi_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^s}$.

Переходя здесь к пределу при $k\to\infty$, получаем требуемый результат. Утверждение доказано.

С л е д . При $s=1$ справедлива оценка $\Pi_k=\prod_{m=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{p_m^2}+...\right)>1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}$,

поэтому произведение $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ расходится к $+\infty$, а вместе с ним расходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. СОБСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пусть функция $f(x,y)$ задана на прямоугольнике $\Pi=I_1\times I_2$, где $I_1=[a,b]$, $I_2=[c,d]$, $a\le x\le b$, $c\le y\le d$.

$\forall y_0\in I_2$ функция $g(x)=f(x,y_0)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Опр.1. Интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx=\varphi(y)$ называется интегралом, зависящим от параметра y. Отрезок $I_2=[c,d]$ в этом случае будем называть множеством значений параметра y.

Т е о р е м а 1. Если $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi=I_1\times I_2$, то функция $\varphi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на отрезке $I_2=[c,d]$.

Д о к - в о . Поскольку прямоугольник $\Pi=I_1\times I_2$ является компактом, функция $f(x,y)$, непрерывная на нем, является равномерно непрерывной на $\Pi=I_1\times I_2$. Следовательно, при любом $\varepsilon>0$ найдется число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при любых точках (x_1,y_1) и $(x_2,y_2)\in\Pi$ справедливо неравенство $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$.

Зафиксируем произвольно некоторую точку $y_0\in I_2$. Тогда для любого y из ее проколотой δ-окрестности на оси Oy и любого $x\in I_1=[a,b]$ $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$ имеем

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|=\left|\int\limits_a^b f(x,y)dx-\int\limits_a^b f(x,y_0)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x,y)-f(x,y_0)|dx=\int\limits_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a),$$

отсюда следует, что $\varphi(y)\underset{y\to y_0}{\to}\varphi(y_0)$, что и означает непрерывность функции $\varphi(y)$ в точке y_0 на I_2. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть функции $\varphi_1(y),\varphi_2(y)$ непрерывны на $I_2=[c,d]$ и удовлетворяют неравенствам $a\le\varphi_1(y)\le\varphi_2(y)\le b$. Тогда функция $h(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)dx$ тоже непрерывна на $I_2=[c,d]$.

Зам. функцию $h(y)$ тоже можно рассматривать как параметрический интеграл

$$h(y)=\int\limits_a^b f_1(x,y)dx,\quad f_1(x,y)=\begin{cases}f(x,y),если\_\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)\\0,если\_x\notin(\varphi_1(y),\varphi_2(y))\end{cases}$$

Д о к - в о . Рассмотрим произвольную точку y_0 отрезка $I_2 = [c,d]$, тогда

$$\Delta h(y_0) = h(y) - h(y_0) = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx - \int\limits_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x,y_0)dx = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \left(f(x,y) - f(x,y_0)\right)dx + \left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y_0)dx - \int\limits_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x,y_0)dx\right)$$

$= r_1(y) + r_2(y).$

Полагая $|y - y_0| < \delta_0(\varepsilon)$. Имеем

$$|r_1(y)| = \left|\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \left(f(x,y) - f(x,y_0)\right)dx\right| \le \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} |f(x,y) - f(x,y_0)|dx < \varepsilon|\varphi_2(y) - \varphi_1(y)| \le \varepsilon(b-a)$$

Далее если $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)|$, то

$$|r_2(y)| = \left|\int\limits_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x,y_0)dx + \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y_0)dx\right| \le M\left|\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y_0)} dx\right| + M\left|\int\limits_{\varphi_2(y_0)}^{\varphi_2(y)} dx\right| = M|\Delta\varphi_1(y_0)| + M|\Delta\varphi_2(y_0)|$$

Поскольку функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны на $I_2 = [c,d]$, при достаточно малом $|\Delta y_0| = |y - y_0| < \delta_1(\varepsilon)$ выполнены неравенства $|\Delta\varphi_1(y_0)| < \varepsilon$ и $|\Delta\varphi_2(y_0)| < \varepsilon$. Положим $\delta_0(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$. Тогда при всех y с условием $|y - y_0| < \delta_0(\varepsilon)$ будем иметь

$$|\Delta h(y_0)| \le |r_1(y)| + |r_2(y)| < \varepsilon(b-a) + 2\varepsilon M = \varepsilon(b - a + 2M).$$

Но так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что функция $h(y)$ непрерывна в точке $y = y_0 \in I_2$, а также и на всем отрезке $I_2 = [c,d]$. Теорема 2 доказана.

Утв.1. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi = I_1 \times I_2$, где $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$ и если функция $g(x) = g_y(x) = f(x,y)$, то при любом $y_0 \in I_2$ имеем $g_y(x)$ равномерно сходится к $g_0(x) = f(x,y_0)$ на $I_1 = [a,b]$ при $y \to y_0$.

Утв.2. Пусть для некоторого $y_0 \in [c,d]$ при $y \to y_0$ имеет место равномерная сходимость $f(x,y)$ к $f(x,y_0)$ на $I_1 = [a,b]$. Кроме того, в некоторой окрестности точки y_0 существует параметрический интеграл вида $\int_a^b f(x,y)dx$. Тогда при $y \to y_0$ существует предел $\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Т е о р е м а 1 (правило Лейбница). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi = I_1 \times I_2$, где $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$. Пусть частная производная $f'_y(x,y)$ существует и непрерывна на $\Pi = I_1 \times I_2$. Тогда функция $g(y)$, где $g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, является дифференцируемой на $I_2 = [c,d]$, причем $g'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$.

Д о к - в о . Зафиксируем произвольно точку $y \in I_2$. При любом $h \neq 0$ с условием $y + h \in I_2$ можем записать равенство $\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx$

Подынтегральная функция в правой части этого равенства непрерывна по x, и поэтому она интегрируема по Риману. Применяя к ней формулу конечных приращений Лагранжа, получим $\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y+\theta\cdot h)dx$, $0 < \theta < 1$

Ввиду непрерывности $f'_y(x,y)$ на $\Pi = I_1 \times I_2$ и на основании утверждения 1 имеем, что $f'_y(x, y+\theta\cdot h)$ равномерно сходится к $f'_y(x,y)$ на $I_1 = [a,b]$ при $h \to 0$.

Наконец, используя утверждение 2, приходим к равенству

$\lim_{h\to 0}\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (обобщенное правило Лейбница). В условиях теоремы 1 будем считать, что $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ дифференцируемы на $I_2 = [c,d]$ и

$a \le \alpha(y)$, $\beta(y) \le b$. Тогда имеет место формула $g'(y) = \left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right)'_y = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$.

Д о к - в о . Пусть $h \neq 0$ и точки $y, y+h \in I_2$. Рассмотрим выражение $d(h)$.

$$d(h) = \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int\limits_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} f(x,y+h)dx - \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right) =$$
$$= \frac{1}{h}\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y+h) - f(x,y)dx + \int\limits_{\beta(y)}^{\beta(y+h)} f(x,y+h)dx + \int\limits_{\alpha(y+h)}^{\alpha(y)} f(x,y+h)dx \right).$$

Используя стандартные обозначения $\Delta\alpha = \alpha(y+h) - \alpha(y)$, $\Delta\beta = \beta(y+h) - \beta(y)$, $\Delta f = f(x,y+h) - f(x,y)$, его можно записать в виде $d(h) = \frac{1}{h}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y+h) - f(x,y)dx \right) + \frac{1}{h}\left(\int\limits_{\alpha+\Delta\alpha}^{\alpha} f(x,y+h)dx \right) + \frac{1}{h}\left(\int\limits_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+h)dx \right) = A_1 + A_2 + A_3$

По предположению теоремы 1, имеем $A_1 \underset{h \to 0}{\to} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f'_y(x,y)dx$

Применяя теорему о среднем для интегралов A_2 и A_3 получим

$$A_2 = -\frac{\Delta\alpha}{h} f(\alpha + \theta_1\Delta\alpha, y+h),\ A_3 = \frac{\Delta\beta}{h} f(\beta + \theta_2\Delta\beta, y+h).$$

Отсюда при $h \to 0$ имеем $A_2 \to -\alpha'(y) f(\alpha(y),y)$, $A_3 \to \beta'(y) f(\beta(y),y)$.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 . Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = I_1 \times I_2$, где $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$, то оба повторных интеграла $H = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ и $G = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$ существуют и равны между собой.

Д о к - в о . Рассмотрим вспомогательную функцию $g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$, $t \in [a,b]$, $y \in [c,d]$

Заметим, что

$$|\Delta g| = |g(t+\Delta t, y+\Delta y) - g(t,y)| = \left|\int_a^{t+\Delta t} f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^t f(x,y)dx\right| \le \left|\int_a^t (f(x, y+\Delta y) - f(x,y))dx\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t+\Delta t} f(x, y+\Delta y)dx\right| \le (b-a)\max_{x\in I_1}|\Delta_y f(x,y)| + c|\Delta t|,$$

где $c = \max_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|$.

Поскольку функция $f(x,y)$ непрерывна, $\max_{x\in I_1}\Delta_y f(x,y)\to 0$, при $\Delta y \to 0$. Следовательно, $\Delta g \to 0$ при $(\Delta y, \Delta t)\to(0,0)$, т.е. $g(x,t)$ непрерывна на Π.

Далее, $g_t'(t,y) = f(t,y)$, поэтому по теореме 1 для функции $G(t) = \int_c^d g(t,y)dy = \int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dt$ имеем

$$G(t) = \frac{d}{dt}\int_c^d g(t,y)dy = \int_c^d g_t'(x,y)dy = \int_c^d f(x,y)dy = h(t).$$

С другой стороны, функция $h(t) = \int_c^d f(t,y)dy$ тоже непрерывна поэтому по формуле Ньютона – Лейбница $h(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t h(x)dx = H'(t)$, где $H(t) = \int_a^t dx = \int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy$.

Следовательно, $h(t) = H'(t) = G'(t)$. Кроме того, очевидно, что $G(0) = H(0) = 0$, поэтому при всех $t\in I_2$ имеет место равенство $G(t) = H(t)$. В частности, при $t = b$ имеем $G = G(b) = H(b) = H$. Теорема 3 доказана.

§ 3. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, заданную на множестве $I\times Y$, где I — промежуток вида $[a,+\infty)$, а Y — некоторое множество вещественных чисел. Допустим, что при любом фиксированном $y\in Y$ функция $f(x,y)$

интегрируема по Риману на любом конечном отрезке вида $[a,b]$, $\forall b \in I$. Тогда $g(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$.

Опр.1. Функция $g(y)$ называется несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра $y \in Y$

Опр.2. Интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ называется равномерно сходящимся по параметру y на множестве Y, если $\int\limits_a^{t} f(x,y)dx = F(t,y)$ равномерно сходится к $g(y)$ на множестве Y при $t \to \infty$. Или для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 = t_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $t > t_0(\varepsilon)$ и всех $y \in Y$ имеем $\left|\int\limits_a^{t} f(x,y)dx - g(y)\right| < \varepsilon$, где $g(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ на множестве Y состоит в том, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $T = T(\varepsilon)$ такое, что при всех $t_2 > t_1 > T$ и любом $y \in Y$ выполнялось бы неравенство $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.

Док-во. Необходимость. Пусть $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ равномерно сходится на Y, тогда $\varepsilon > 0$ существует $t_0 = t_0(\varepsilon)$ и $\forall t > t_0$, $\forall y \in Y$ имеем $\left|\int\limits_a^{t_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$. Тогда $\forall t_2 > t_1 > t_0$ и $\forall y \in Y$ имеем $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \le \left|\int\limits_a^{t_2} f(x,y)dx - g(y)\right| + \left|\int\limits_a^{t_1} f(x,y)dx - g(y)\right| < 2\varepsilon$.

Достаточность. $\forall \varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon/2)$ такое, что для любого $t_2 > t_1 > T$ и $y \in Y$ $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx < \varepsilon/2$. Тогда $\left|\int\limits_a^{t_2} f(x,y)dx - \int\limits_a^{t_1} f(x,y)dx\right| < \varepsilon/2$. Для любого

y имеет место поточечная сходимость $\lim\limits_{t_i\to\infty}\int\limits_a^{t_i} f(x,y)dx = g(y)$. Следовательно $t_2 \to \infty$ имеем $\left|g(y)-\int\limits_a^{t_1} f(x,y)dx\right| \le \varepsilon 2 < \varepsilon$ для любого $y \in Y$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 . Равномерная сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ на множестве Y не имеет места, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $T \in R$ найдутся числа $t_2 > t_1 > T$ и $y \in Y$ такие, что $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \ge \varepsilon$.

Опр.3. Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ сходится и при всех $x > a$ и $y \in Y$ имеем $|f(x,y)| \le g(x)$, то функция $g(x)$ называется мажорантой для $f(x,y)$ на $\prod = I \times Y$.

Т е о р е м а 3 (признак Вейерштрасса). Интеграл $J = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на *Y*, если функция $f(x,y)$. Имеет мажоранту $g(x)$ на $\prod = X \times Y$, где $X = [a,+\infty]$.

Д о к - в о . Воспользуемся критерием Коши.

Поскольку интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ сходится, при любом $\varepsilon > 0$ найдется число $T = T(\varepsilon)$ такое, что при всех $t_2 > t_1 > T$ выполнено неравенство $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon$.

Тогда при всех $y \in Y$ имеем $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x,y)|dx \le \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon$. Отсюда согласно критерию Коши заключаем, что интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4 (признаки Абеля и Дирихле для равномерной сходимости параметрических несобственных интегралов первого рода). Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $\Pi = X\times Y$, где $X=[a,+\infty)$, $Y=[c,d]$ и $f(x,y)=\alpha(x,y)\beta(x,y)$. Пусть $\beta(x,y)$ монотонна, по x при любом фиксированном $y\in Y$

(А) (признак Абеля). Пусть, кроме того:

1) интеграл $\int\limits_a^\infty \alpha(x,y)dx$ сходится равномерно по y на Y;

2) функция $\beta(x,y)$ ограничена на $\Pi = X\times Y$, т.е. $|\beta(x,y)|<c$ при некотором вещественном числе c>0 и всех $(x,y)\in\Pi$.

Тогда интеграл $J=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

(Д) (признак Дирихле). Пусть вместо условий (А) имеем:

1) при некотором c > 0 и всех $t>a$, $y\in Y$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_a^t \alpha(x,y)dx\right|<c$;

2) функция $\beta(x,y)$ равномерно на Y сходится к нулю при $x\to 0$. Тогда интеграл J сходится равномерно на Y.

Д о к - в о . Воспользуемся критерием Коши. Применяя вторую теорему о среднем, имеем $\int\limits_{t_1}^{t_2}\alpha(x,y)\beta(x,y)dx=\beta(t_1,y)\int\limits_{t_1}^{t_3}\alpha(x,y)dx+\beta(t_2,y)\int\limits_{t_3}^{t_2}\alpha(x,y)dx$, где $t_3\in[t_1,t_2]$.

Случай (А). В силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty \alpha(x,y)dx$ при любом $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших $t_2>t_1>t_0(\varepsilon)$ имеем $\left|\int\limits_{t_1}^{t_3}\alpha(x,y)dx\right|<\varepsilon$ и $\left|\int\limits_{t_3}^{t_2}\alpha(x,y)dx\right|<\varepsilon$, откуда

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\alpha(x,y)\beta(x,y)dx\right|\le|\beta(t_1,y)|\left|\int\limits_{t_1}^{t_3}\alpha(x,y)dx\right|+|\beta(t_2,y)|\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\alpha(x,y)dx\right|\le 2c\varepsilon,$$

По критерию Коши интеграл J равномерно сходится на Y.

Случай (Д). $\beta(x, y)$ стремится к нулю равномерно по y при $x \to 0$, поэтому при всяком $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $t_2 > t_1 > t_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|\beta(x, y)| < \varepsilon$, откуда имеем $\left|\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x, y)\beta(x, y)dx\right| < \varepsilon\left|\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x, y)dx\right| < 2c\varepsilon$.

По критерию Коши интеграл J равномерно сходится на Y.

§ 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ задана на множестве $P = X \times Y$, где $X = [a, +\infty)$, $Y = [b, c]$, Пусть выполнены следующие условия:

1) при некотором $y_0 \in Y$ и при любом $t \in X$ на промежутке $E = E_t = [a, t]$ имеет место равномерная сходимость $f(x, y)$ к $g(x)$ на E_t при $y \to y_0$.

2) несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда:

а) функция $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке E_t;

б) интеграл $J = \int_a^\infty g(x)dx$ сходится;

в) существует предел $I = \lim\limits_{y \to y_0} h(y)$;

г) имеет место равенство

$$I = \lim_{y \to y_0} h(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \int_a^\infty g(x)dx = J.$$

Док-во. Рассмотрим произвольную монотонную числовую последовательность $y_n \in Y$ с условием $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y_0$. Тогда в силу условия 1) $g_n(x) = f(x, y_n)$ равномерно сходится к $g(x)$ на отрезке E_t при $n \to \infty$.

Функция $g(x)$ интегрируема по Риману на E_t, причем $\int\limits_a^t f(x,y_n)dx = \int\limits_a^t g_n(x)dx = Q_{t,n} \to Q_t = \int\limits_a^t g(x)dx$.

В силу условия 2) $Q_{t,n}$ равномерно сходится к Q_n на N при $t \to +\infty$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 = t(\varepsilon) \geq a$ такое, что при всех $t > t_0$ и при всех натуральных n справедливо неравенство $|Q_{t,n} - Q_n| < \varepsilon$. Следовательно, существуют $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{t\to+\infty} Q_{t,n} = \lim\limits_{t\to+\infty}\lim\limits_{n\to\infty} Q_{t,n}$. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to+\infty} Q_{t,n} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^\infty f(x,y_n)dx = \lim_{n\to\infty} h(y_n) = I$$

$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{n\to\infty} Q_{t,n} = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^\infty g(x)dx = J \text{, откуда } I = J.$$

В силу произвольности выбора последовательности y_n отсюда вытекает утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $\Pi = X \times Y$, где $X = [a,+\infty)$, $Y = [b,c]$, и пусть интеграл $h(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ равномерно сходится на Y при $t \to \infty$. Тогда функция $h(y)$ непрерывна на Y.

Д о к - в о. Непрерывность $h(y)$ в каждой фиксированной точке $y_0 \in Y$ означает, что $h(y) \underset{y\to y_0}{\to} h(y_0)$. Воспользуемся теоремой 1. Очевидно, ее условие 2) выполнено. Из непрерывности $f(x,y)$ на $\Pi = X \times Y$ следует ее равномерная непрерывность на $\Pi = [a,t] \times [c,d]$ при любом $t \geq a$. В свою очередь, отсюда имеем, что $f(x,y)$ равномерно сходится к $f(x,y_0)$ на отрезке $[a,t]$ при $y \to y_0$, т.е. условие 1) теоремы 1 выполнено, а это означает, что $h(y) \underset{y\to y_0}{\to} \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx = h(x_0)$. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 (условие интегрируемости несобственных интегралов по параметру). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi = X \times Y$, где $X = [a,+\infty)$,

$Y = [c, d]$ и пусть интеграл $g(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ существует и равномерно сходится на Y. Тогда функция $g(y)$ будет интегрируема на Y, а функция $h(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$ будет интегрируема на $X = [a, +\infty)$, причем $\int\limits_c^d g(y)dy = \int\limits_a^\infty h(x)dx$, т.е. равны повторные интегралы $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x, y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$.

Д о к - в о . Рассмотрим произвольную монотонную последовательность $t_n \in X$ с условием $t_n \to +\infty$. Тогда функциональная последовательность $g_n(y) = \int\limits_a^{t_n} f(x, y)dx$ равномерно сходится к функции $g(y)$ на множестве Y. Каждая из функций $g_n(y)$ непрерывна на Y, потому при фиксированном n по теореме об интегрировании собственных интегралов по параметру имеем

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^{t_n} f(x, y)dx = \int\limits_c^d g_n(y)dy = \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_c^d f(x, y)dy. \qquad (1)$$

По теореме 1 возможен переход к пределу

$$A = \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^d g_n(y)dy = \int\limits_c^d \lim_{n\to\infty} g_n(y)dy = \int\limits_c^d g(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x, y)dx.$$

Переходя в равенстве (1) к пределу, получим, что предел его правой части существует и равен $A = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$.

Но поскольку последовательность t_n — произвольная, последний предел равен интегралу $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x, y)dy = A$. Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (правило Лейбница). Пусть:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна на $\Pi = X \times Y$, где $X = [a, +\infty)$, $Y = [c, d]$;

2) частная производная $f'_y(x, y)$ существует и непрерывна на $\Pi = X \times Y$;

3) интеграл $g(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится при всех $y\in Y$;

4) интеграл $\int\limits_a^{\infty} f_y'(x,y)dx$ равномерно сходится на Y.

Тогда функция $g(y)$ дифференцируема на Y и имеет место равенство $g'(y)=\int\limits_a^{\infty} f_y'(x,y)dx$.

Д о к - в о . В силу непрерывности функции $f(x,y)$ при всех $n\geq a$ существует непрерывная на Y функция $g_n(y)=\int\limits_a^{n} f(x,y)dx$.

Применяя правило Лейбница для собственных интегралов, получим $g_n'(y)=\int\limits_a^{n} f_y'(x,y)dx$.

Для функциональной последовательности имеют место $g_n(y)\underset{n\to\infty}{\to} g(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ и $g_n'(y)$ равномерно сходится к $\int\limits_a^{\infty} f_y'(x,y)dx$.

Следовательно, по правилу дифференцирования функциональной последовательности имеем $\left(\lim\limits_{n\to\infty} g_n(y)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} g_n'(y)$, т.е. $g'(y)=\int\limits_a^{\infty} f_y'(x,y)dx$. Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть $f(x,y)$ задана и непрерывна на $\Pi = X\times Y$, где $X=[a,+\infty)$, $Y=[b,+\infty]$ и $f(x,y)\geq 0$ на $\Pi = X\times Y$. Пусть при всех $y\in Y$ интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится к функции $h(y)$, непрерывной на Y, и при всех $x\in X$ интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится к функции $h(x)$, непрерывной на X.

Тогда если сходится интеграл $J_1=\int\limits_b^{\infty} g(y)dy$, то сходится и интеграл $J_2=\int\limits_a^{\infty} h(x)dx$, и наоборот, причем $J_1=J_2$, т.е. $\int\limits_b^{\infty} dy\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx=\int\limits_a^{\infty} dx\int\limits_b^{\infty} f(x,y)dy$.

Д о к - в о . Будем считать, что существует J_1. Рассмотрим произвольную монотонную числовую последовательность $t_m \geq a$, $t_m \to +\infty$ и натуральные числа $n \geq b$.

$$J_{m,n} = \int_a^{t_m} dx \int_b^n f(x,y)dy, \; g_m(y) = \int_a^{t_m} f(x,y)dx \text{ и } h_n(x) = \int_b^n f(x,y)dy.$$

По теореме об интегрируемости собственного параметрического интеграла имеем

$$J_{m,n} = \int_b^n dy \int_a^{t_m} f(x,y)dx = \int_b^n g_m(y)dy.$$

Так как $f(x,y) \geq 0$, то $0 \leq g_m(y) \leq g(y)$. Поэтому справедливо неравенство

$$J_{m,n} \leq \int_b^n g(y)dy \leq \int_b^\infty g(y)dy = J_1.$$

С другой стороны, $J_{m,n} = \int_a^{t_m} dx \int_b^n f(x,y)dy = \int_a^{t_m} h_n(x)dx$.

При этом $h_n(x) \geq 0$ и при каждом фиксированном x эта последовательность является неубывающей; кроме того, она составлена из непрерывных функций и ее предел, т.е. функция $h(x)$, также непрерывен. Следовательно, по теореме Дини $h_n(x)$ равномерно сходится к $h(x)$ на отрезке $[a,t_m]$ при $n \to \infty$.

Тогда $J(m) = \lim\limits_{n\to\infty} J_{m,n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{t_m} h_n(x)dx = \int_a^{t_n} \left(\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)\right)dx = \int_a^{t_m} h(x)dx$.

Поэтому, $J(m) \leq J_1$, т.к. $h(x) \geq 0$, то последовательность $J(m)$ монотонно возрастает и ограничена. Следовательно, по теореме Вейерштрасса $\exists l = \lim\limits_{m\to\infty} J(m) \leq J_1$. Т.к. последовательности t_m произвольная монотонная последовательность, то

$$l = \lim_{t\to\infty} \int_a^t h(x)dx = \int_a^\infty h(x)dx = J_2.$$

Таким образом, существует $J_2 = l \le J_1$. Меняя в проведенных выше рассуждениях величины J_1 и J_2 местами, одновременно получим неравенство $J_1 \le J_2$. Следовательно, $J_1 = J_2$. Теорема 5 доказана.

Т е о р е м а 6. Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 5, кроме условия $f(x,y) \ge 0$; но функция $F(x,y) \ge |f(x,y)|$ удовлетворяет всем ее условиям.

Тогда, утверждение теоремы 5 имеет место не только для функции $F(x,y)$, но и для функции $f(x,y)$, т.е. $\int\limits_b^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^\infty f(x,y)dy$.

Д о к - в о . Заметим, что функции $\varphi_1(x,y) = \dfrac{F(x,y) + f(x,y)}{2}$ и $\varphi_2(x,y) = \dfrac{F(x,y) - f(x,y)}{2}$ удовлетворяют условиям теоремы 5, но тогда $\varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y) = f(x,y)$ тоже ей удовлетворяет. Теорема 6 доказана.

Зам. Перестановочность интегралов, вообще говоря, не будет иметь место, если подынтегральная функция имеет разрыв.

§ 5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим множество $\Pi = X \times Y$, где $X = (a,b]$, $Y \subset R$. Пусть функция $f(x,y)$ задана на $\Pi = X \times Y$ и не ограничена по X хотя бы при одном фиксированном $y \in Y$ Далее, пусть при любых $y \in Y$ и $\delta > 0$, $\delta \in (0, b-a)$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a+\delta, b]$ как функция от x.

Опр.1. Формальное выражение вида $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ называется несобственным параметрическим интегралом второго рода с одной особой точкой $x = a$.

Опр.2. Если при любом фиксированном значении $y \in Y$ этот интеграл сходится, то множество Y называется областью сходимости интеграла и его значения $g(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ порождают функцию, определенную на множестве Y.

Подобные определения имеют место и в случае, когда особая точка находится на правом конце отрезка или внутри него.

Опр.3. Несобственный интеграл второго рода $g(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ называется равномерно сходящимся по y на множестве Y, если для функции $g(\delta,y)=\int\limits_{a+\delta}^b f(x,y)dx$ выполнено условие, что $g(\delta,y)$ равномерно сходится к $g(0,y)=g(y)$ на Y.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi=X\times Y$, где $X=(a,b]$, $Y=[c,d]$. Пусть a — особая точка несобственного параметрического интеграла $g(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если интеграл $\int\limits_{a+\delta}^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то функция $g(y)$ непрерывна при всех $y\in Y$.

2. $\int\limits_c^d g(y)dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$.

3. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится, частная производная $f'_y(x,y)$ существует и непрерывна на $\Pi=X\times Y$, а интеграл $\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то существует $g'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

Д о к - в о . Не отличается от доказательства соответствующей теоремы для несобственных интегралов первого рода.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Интеграл Дирихле имеет вид $D(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx$

Точка $x=0$ не является особой, так как подынтегральная функция ограничена. Очевидно, что $D(0)=0$. Если $\alpha>0$, то интеграл сходится по признаку Дирихле, поскольку $\left|\int\limits_0^t \sin\alpha x dx\right|=\left|\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha}\right|<\frac{2}{\alpha}$.

После замены $\alpha x=t$ имеем $D(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\alpha x}d(\alpha x)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt=D(1)=D$.

Если же $\alpha<0$, то $\delta=-|\alpha|$, $\sin\alpha x=-\sin|\alpha|x$, откуда $D(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx=-\int\limits_0^\infty \frac{\sin|\alpha|x}{x}dx=-D$.

Таким образом, имеем $D(\alpha)=\begin{cases} D & при \quad \alpha>0, \\ 0 & при \quad \alpha=0, \\ -D & при \quad \alpha<0. \end{cases}$

Т е о р е м а 1. Справедливо равенство $D=\pi/2$.

Д о к - в о . Рассмотрим параметрический интеграл $g(y)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-yx}\sin x}{x}dx$, где $y\in Y=[0,N]$, $N\in R$

Подынтегральная функция $f(x,y)=\frac{e^{-yx}\sin x}{x}$ будет непрерывна всюду на $\Pi=X\times Y$, где $X=[0,+\infty)$, $Y=[0,N]$, если $f(0,y)=1$.

Убедимся, что интеграл $g(y)$ сходится равномерно на Y. Для этого воспользуемся признаком Абеля. Положим $\alpha(x,y)=\frac{\sin x}{x}$, $\beta(x,y)=e^{-xy}$. Тогда функция $\beta(x,y)$ монотонна и $0<\beta(x,y)\le 1$, а интеграл $\int\limits_0^\infty \alpha(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, т.к. $\alpha(x,y)$ не зависит от y.

Рассмотрим произвольную точку $y_0 \in Y$ $(y_0 \neq 0)$ и окружим ее некоторым отрезком $Y_\delta = [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \in Y$. На этом отрезке интеграл $\int\limits_0^\infty f'_y(x,y)dx = -\int\limits_0^\infty e^{-yx} \sin x dx$ сходится равномерно. Это следует из признака Вейерштрасса, т.к. $\left|e^{-xy} \sin x\right| < e^{-x(y-\delta)}$, а интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x(y-\delta)} dx$ сходится. Кроме того, подынтегральная функция $e^{-xy} \sin x$; непрерывна на $\Pi_\delta = X \times Y_\delta$. Поэтому по правилу Лейбница для несобственных интегралов имеем

$g'(y) = -\int\limits_0^\infty e^{-yx} \sin x dx$. Интегрируя по частям $g'(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$.

Т.о. показано, что функция $g(y)$ непрерывна на Y, а ее производная $g'(y)$ существует при всех $y \neq 0$. по формуле Ньютона - Лейбница при всех $y \in [0, N]$ имеем

$$g(y) = g(N) - \int\limits_N^y \frac{dt}{1+t^2} = g(N) + \operatorname{arctg}(N) - \operatorname{arctg}(y).$$

Пользуясь непрерывностью функции $g(y)$ в точке $y = 0$, мы получим

$$g(0) = \lim_{y \to 0+} g(y) = \lim_{y \to 0+} \left(g(N) + \operatorname{arctg}(N) - \operatorname{arctg}(y)\right) = g(N) + \operatorname{arctg}(\mathrm{N}).$$

Теперь, при $N \to +\infty$, приходим к соотношениям $N \to \pi/2$,

$$|g(N)| \leq \int\limits_0^\infty e^{-N \cdot x} \frac{|\sin x|}{x} dx \leq \int\limits_0^\infty e^{-N \cdot x} dx = \frac{1}{N} \to 0.$$

Отсюда следует, что $D = g(0) = \lim\limits_{y \to 0+} \left(g(N) + \operatorname{arctg}(\mathrm{N})\right) = \pi/2$. Теорема 1 доказана.

Следствие. При всех $\alpha \in R$ имеет место равенство $D(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}\alpha$.

§ 7. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Т е о р е м а 1 (формула Эйлера - Гаусса). При $s \neq 0,-1,-2,...$ имеет место равенство $\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} P_m(s)$, где $P_m(s) = \dfrac{(m-1)!\,m^s}{s(s+1)...(s+m-1)}$.

Д о к - в о . Применяя формулу Эйлера, получим

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}(1+1)^s\left(1+\frac{1}{2}\right)^s...\left(1+\frac{1}{m}\right)^s \cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{s}{1}\right)^{-1}...\left(1+\frac{s}{m}\right)^{-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}\frac{(m+1)^s\,m!}{(s+1)...(s+m)} = \lim_{m\to\infty}P_m(s)$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. (формула Гаусса). При $s>0$ имеет место формула

$$P_{m+1}(s) = \left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt.$$

Д о к - в о . С помощью замены переменной и интегрирования по частям получаем

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt = (m+1)^s\int_0^1(1-x)^m x^{s-1}dx = (m+1)^s\,\frac{m}{s}\int_0^1(1-x)^{m-1}x^s dx = ... =$$

$$= (m+1)^s\,\frac{m!}{s(s+1)...(s+m-1)}\int_0^1 x^{s+m-1}dx = (m+1)^s\,\frac{m!}{s(s+1)...(s+m)} = P_{m+1}(s).$$

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 (интегральное представление для гамма-функции Эйлера). При $s>0$ справедливо равенство $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$.

Д о к - в о . Прежде всего заметим, что при $s \geq 1$ рассматриваемый параметрический интеграл является несобственным интегралом первого рода, а при $0<s<1$ он имеет особую точку $x=0$. Но в обоих случаях он сходится, поскольку в окрестности нуля подынтегральное выражение мажорируется функцией x^{s-1},а на бесконечности — функцией $e^{-x/2}$.

Рассмотрим разность

$$R_m(s) = \int_0^m x^{s-1}e^{-x}dx - P_{m+1}(s)\left(1+\frac{1}{m}\right)^s = \int_0^m x^{s-1}\left(e^{-x}-\left(1-\frac{x}{m}\right)^m\right)dx$$

Учитывая, что $1+y \le e^{y}$, имеем неравенства $1+\frac{x}{n} \le e^{x/n}$, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \le e^{x}$ и $1-\frac{x}{n} \le e^{-x/n}$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} \le e^{-x}$, справедливы при всех вещественных x и натуральных n.

Из неравенства Бернулли при $0<y\le 1$ следует, что $(1-y)^{m} > 1-my$, т.е. $1-(1-y)^{m} < my$.

Отсюда при $0 \le x \le m$ и $y=\frac{x^{2}}{m^{2}}$ получаем оценки

$$0 \le e^{-x}-\left(1-\frac{x}{m}\right)^{m} = e^{-x}\left(1-e^{x}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{m}\right) \le e^{-x}\left(1-\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{m}\right) \le e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^{2}}{m^{2}}\right)^{m}\right)=$$

$$=e^{-x}\left(1-(1-y)^{m}\right) < e^{-x}my = \frac{e^{-x}x^{2}}{m}.$$

Но тогда величина $R_m(s)$: $0 \le R_m(s) < \int_0^m \frac{x^{s+1}e^{-x}}{m} < \frac{1}{m}\int_0^\infty x^{s+1}e^{-x}dx$.

Здесь $s+1>1$, и поэтому последний интеграл сходится, откуда $R_m(s) \underset{m\to\infty}{\to} 0$ при $\forall s>0$. Отсюда имеем

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^m x^{s-1}e^{-x}dx = \lim_{m\to\infty}\left(R_m(s)+P_{m+1}(s)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{s}\right)=\Gamma(s)$$

Теорема 3 доказана.

Зам. С помощью интегрирования по частям из теоремы s выводится формула Коши, справедливая при $-(m+1)<s<-m$, где $m \in N$:

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\left(e^{-x}-\varphi_m(x)\right)dx, \text{ где } \varphi_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-x)^{n}}{n!}$$

Условия, наложенные на s, обеспечивают сходимость несобственного интеграла, имеющего две особые точки: $x=0$ и $x=+\infty$.

Действительно, в окрестности особой точки $x=0$ подынтегральная функция эквивалентна величине $x^{s+m}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}$, а в окрестности точки $x=+\infty$

является величиной порядка $O\left(x^{s+m-1}\right)$. Отсюда по признаку сравнения следует сходимость интеграла.

Л е м м а (Эйлера). При всех вещественных нецелых s имеет место формула $\sin\pi s = \pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)$.

Т е о р е м а 4 (формула дополнения Эйлера). При всех нецелых s справедливо равенство $\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$. В частности, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Д о к - в о . Из формулы Эйлера и леммы имеем

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=-s\Gamma(-s)\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1}=\frac{1}{s}\frac{\pi s}{\sin\pi s}=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 (формула удвоения Лежандра). Справедливо равенство

$$\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

Д о к - в о . Составим произведение $F_m(s)=\dfrac{2^{2s-1}P_m(s)P_m\left(s+\frac{1}{2}\right)}{P_{2m}(2s)P_m\left(\frac{1}{2}\right)}$

Выпишем явное выражение для $F_m(s)$. Имеем

$$F_m(s)=\frac{2^{2s-1}(m-1)!\,m^s(m-1)!\,m^{s+1/2}\ldots(2s+2m-1)\cdot\frac{1}{2}\ldots\left(m-\frac{1}{2}\right)}{(2m-1)!\,(2m)^{2s-1}(m-1)!\,m^{1/2}s\ldots(s+m-1)\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(s+m-\frac{1}{2}\right)}=\frac{(m-1)!\,2^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!}=1$$

Выполняя предельный переход $\dfrac{2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)\Gamma(1/2)}=1$. Теорема 5 доказана.

Опр.1. 1) Интегралом Эйлера первого рода или бета-функцией Эйлера называется функция $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

2) Интегралом Эйлера второго рода называется функция $\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$.

Т е о р е м а 6. При $\alpha>1$, $\beta>1$ справедлива формула $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Д о к - в о . Выполним замену переменной вида $x=\dfrac{y}{1+y}$. Тогда имеем

$$dx=\frac{dy}{(1+y)^2},\ x^{\alpha-1}=\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1}},\ (1-x)^{\beta-1}=\frac{1}{(1+y)^{\beta-1}}$$

$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int\limits_0^\infty\dfrac{y^{\alpha-1}dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}$. Отсюда следует, что $H=\mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=\int\limits_0^\infty\dfrac{y^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+\beta)dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}$.

Если $y>0$, то $\Gamma(\alpha+\beta)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx=(1+y)^{\alpha+\beta}\int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta}e^{-x(y+1)}dx$

Поэтому $H=\int\limits_0^\infty\dfrac{y^{\alpha-1}(1+y)^{\alpha+\beta}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\left(\int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x(y+)1}dy\right)dy=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty(xy)^{\alpha-1}x^{\beta}e^{-x(y+1)}dx\right)dy$.

В последнем интеграле получим $H=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty(xy)^{\alpha-1}e^{-xy}dy\right)x^{\beta-1}e^{-x}dx=\Gamma(\alpha)\int\limits_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x}=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$

Тогда $\mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$. Теорема 6 доказана.

Зам. Поскольку гамма-функция $\Gamma(s)$ определена при всех $s\neq 0,-1,-2,\ldots$, то формула теоремы 6 позволяет распространить определение функции $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ на все множество вещественных значений (α,β), за исключением точек (α,β), в которых либо величина α, либо β равна $0,-1,-2,\ldots$.

§8. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Т е о р е м а 1 (формула суммирования Эйлера)

Пусть $f(x)\in C^1[a,b]$ – непрерывна и дифференцируема. Если $\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\}$, то $\forall x\in[a,b]$ имеет место формула $\sum\limits_{a<n\le x} f(n)-\rho(x)f(x)=\int\limits_a^x f(u)du-\int\limits_a^x \rho(u)f'(u)du-\rho(a)f(a)$.

Т е о р е м а 2 (формула Стирлинга). При $s\ge 2$ имеет место равенство $\ln\Gamma(s)=\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right)-\left(s+\frac{1}{2}\right)-\ln s+c_0+R$, где $c_0=\ln\sqrt{2\pi}$, а для величины остатка R выполняются неравенства $0>R\ge-\frac{1}{(8s+4)}$.

Д о к - в о . Воспользуемся равенством $\Gamma(s)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(s)$. Далее имеем

$$\ln P_n(s)=s\ln n-\ln s+\sum_{k=1}^{n-1}(\ln k-\ln(k+s)).$$

Применяя формулу суммирования Эйлера, получим $\ln P_n(s)=A-B$, где

$$A=\int\limits_{0.5}^{n-0.5}(\ln x-\ln(x+s))dx+s\ln n-\ln s,\quad B=\int\limits_{0.5}^{n-0.5}\rho(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+s}\right)dx.$$

Сначала рассмотрим величину А. Имеем

$$\int\limits_{0.5}^{n-0.5}\ln xdx-\int\limits_{0.5}^{n-0.5}\ln(x+s)dx=\int\limits_{0.5}^{n-0.5}\ln xdx-\int\limits_{s+0.5}^{n+s-0.5}\ln xdx=\int\limits_{0.5}^{s+0.5}\ln xdx-\int\limits_{n-0.5}^{n+s-0.5}\ln xdx=A_1-A_2$$

Интегрируя, находим $A_1=(x\ln x-x)\Big|_{0.5}^{s+0.5}=\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right)-s+\frac{\ln 2}{2}$

Будем считать, что $n>2s$. Тогда, применяя формулу $\ln(1+x/n)=O(x/n)$, получим

$$s\ln n-A_2=\int\limits_{n-0.5}^{n+s-0.5}(\ln n-\ln x)dx=-\int\limits_{-0.5}^{s-0.5}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)dx=\int\limits_{-0.5}^{s-0.5}O\left(\frac{x}{n}\right)dx=O\left(\frac{s^2}{n}\right).$$

Таким образом, приходим к соотношению $A=\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right)-s-\ln s+c_1+O\left(\frac{s^2}{n}\right)$, где $c_1=\text{const}$.

Рассмотрим теперь величину B. Заметим, что неравенство $-\frac{1}{8}\le\int\limits_{0.5}^{t}\rho(x)dx\le 0$ справедливо при всех $t\ge 0.5$. Поэтому по признаку

Дирихле интеграл $\int\limits_{0.5}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}dx$ сходится. Следовательно, $B_1 = \int\limits_{0.5}^{n+0.5} \frac{\rho(x)}{x}dx = c_2 + o(1)$.

Для оценки величины $B_2 = \int\limits_{0.5}^{n+0.5} \frac{\rho(x)}{x+s}dx$ применим вторую теорему о среднем. Тогда получим $B_2 = \frac{1}{s+0,5}\int\limits_{0.5}^{t} \rho(x)dx$, откуда имеем $-\frac{1}{8s+4} \le B_2 \le 0$. Но по определению имеем $B = B_1 - B_2$.

$$\ln P_n(s) = A - B = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 + B_2 + O\left(\frac{s^2}{n}\right),\ c_0 = \text{const}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$

$$\ln\Gamma(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 - \frac{\theta}{8ы+4},\ \theta = \theta(s):\ 0 \le \theta \le 1$$

Для вычисления c_0 применим формулу Лежандра. Тогда при $s \to \infty$ будем иметь

$$(2s-1)\ln 2 + \ln\Gamma(s) + \ln\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \ln\Gamma(2s) + \ln\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - ln\,s + c_0 + (s+1)ln(s+1) - (s+1) - ln\left(s+\frac{1}{2}\right) + c_0 +$$
$$+O\left(\frac{1}{s}\right) + (2s-1)ln\,2 = \left(2s+\frac{1}{2}\right)ln\left(2s+\frac{1}{2}\right) - \left(2s+\frac{1}{2}\right) - ln(2s) + c_0 + ln\sqrt{\pi} - O\left(\frac{1}{s}\right)$$

Воспользуемся соотношением $\ln(s+a) = \ln s + \frac{a}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$. При $s \to \infty$, получаем $c_0 = \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right)$. . Теорема 2 доказана.

Зам. Если положить $s = n+1$ справедлива асимптотическая формула $n! = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{O(1/n)}$.

Лекции

4 семестр

Критерий Римана интегрируемости функции на прямоугольнике.

Специальный критерий интегрируемости функции на прямоугольнике

Измеримость по Жордану цилиндрической криволинейной фигуры

Свойства меры $\boldsymbol{\mu(F)}$.

Понятие двойного интеграла Римана по ограниченной области, измеримой по Жордану.

Основные свойства двойного интеграла.

Переход от двойного интеграла к повторному

Интегрируемость непрерывной функции на измеримом множестве.

Многократные интегралы

Свойства гладкого отображения на выпуклом множестве.

Объем области в криволинейных координатах.

Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Замена в кратном интеграле

Несобственные кратные интегралы.

Площадь поверхности.

Площадь m-мерной поверхности в евклидовом пространстве R^n.

Криволинейные интегралы.

Свойства криволинейных интегралов

Криволинейные интегралы второго рода по замкнутому контуру.

Формула Грина

Поверхностные интегралы

Согласование ориентации поверхности и ее границы

По существу мы дали определение поверхностных интегралов только в случае, когда область D_o является квадратом. Для интегралов первого рода это определение тривиально распространяется на случай поверхностей, составленных из отдельных частей, каждая из которых есть гладкий образ некоторого квадрата, и соприкасающихся между собой по общим участкам границ. Тогда поверхностный интеграл первого рода понимается как сумма интегралов по составляющим ее частям. Стандартными рассуждениями мы переходим от специального случая к определению поверхностного интеграла для произвольного измеримого по Жордану компакта D_o. Более того, таким образом мы можем рассмотреть интеграл первого рода по поверхностям, которые являются границей пространственных тел, например, по поверхности куба или шара в трехмерном пространстве. Во всех этих случаях будем считать, что понятие интеграла по таким поверхностям уже определено и верна теорема о его сведении к двойному интегралу.

Опр1: Поверхность D называется кусочно-гладкой, если она связная и является объединением конечного числа гладких поверхностей, каждая из которых есть образ выпуклого плоского множества, имеющего кусочно-гладкую границу. При этом общие точки у любых двух поверхностей (если они есть) обязательно принадлежат образам границ, указанных выше плоских множеств.

Опр2. Интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности равен сумме интегралов по ее гладким частям.

Опр3. Границей $L = \partial D$ гладкой поверхности D называется образ границы $\Delta = \partial D_0$ множества D_o, которое отображается в D при ее параметризации $\boldsymbol{r}$. При этом считаем, что Δ есть кусочно-гладкая замкнутая кривая без кратных точек, а множество D_o — выпукло.

Опр 4. Будем говорить, что параметризация к поверхности D отвечает ориентации ее границы L (или "согласована" с ориентацией ее границы), если при этой параметризации $\boldsymbol{r}$ ориентация кривой L порождается положительной ориентацией ее прообраза Δ (границы множества D_o — прообраза поверхности D).

Опр 5. Будем говорить, что кусочно-гладкая поверхность D является двусторонней поверхностью с выделенной стороной, если параметризации ее разных кусков выбраны так, что общие участки границ этих кусков при указанных параметризациях ориентированы в противоположных направлениях.

Опр 6. Поверхностным интегралом второго рода от функции $h(\mathbf{r})$ по выделенной стороне двусторонней кусочно-гладкой поверхности D называется сумма соответствующих поверхностным интегралов по всем, составляющим поверхность D, гладким кускам.

Ясно, что последнее определение распространяет понятие поверхностного интеграла второго рода на случай поверхностей, являющихся образами при гладком отображении квадрируемых (то есть измеримых по Жордану) плоских фигур. Вместе с тем в этом случае оказывается верной теорема о выражении поверхностного интеграла второго рода через двойной интеграл Римана.

5.МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

1- ый семестр

Контрольная работа. Пределы.

Вариант 1

$1.\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$; $2.\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; $3.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; $4.\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-Cos5x}{x^2}$;

$5.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$; $6.\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$;

$7.\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$; $8.\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$; 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$; 10. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-arctg\,x)$;

Вариант 2

$1.\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; $2.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$; $3.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$;

$4.\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; $5.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$; 6. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{Cosx}{\pi-2x}$;

$7.\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-Sinx}{x^3}$; $8.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x}$; $9.\lim\limits_{\alpha\to 0}(2-Cos\alpha)^{Cosec^2\alpha}$; 10. $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{\frac{1}{Sin\,x}}$.

2- ой семестр

Контрольная работа «Неопределенный интеграл»

Вариант 1

Найти интегралы:

$1.\int xe^{x^2}dx$; $2.\int x\arcsin x\,dx$; $3.\int\frac{dx}{x(3-\ln x)}$; 4. $\int\frac{1}{6}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; 5. $\int Cos^2x\,Sin^2x\,dx$;

$6.\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$; $7.\int tg^2 2x\,dx$; $8.\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; $9.\int\frac{dx}{5+3Cosx}$; $10.\int\frac{x^3+2x}{x^2+4}dx$.

Вариант 2

Найти интегралы:

1. $\int x\,3^{-2x^2}dx$; 2. $\int \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$; 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; 4. $\int x^2 Cos5x\,dx$; 5. $\int \sqrt{2+7x}\,dx$;

6. $\int \frac{x^4+5x}{x^2+1}dx$; 7. $\int Sin^4x\,Cos^2x\,dx$; 8. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$; 9. $\int \frac{dx}{5+3Cos2x}$;

10. $\int \frac{5-8x}{x^3+2x^2+5x}dx$.

3- ий семестр

Контрольная работа. Функция нескольких переменных.

Вариант 1

1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2y^3 - xy^2 = z+3/8$ в точке $M_0(2;\ 1/2;\ -3/8)$.

2. Найти производную функции $f = x^3 - x^2y + y^3 - 1$ в точке $A(2,1)$ по направлению, образующему угол $\pi/6$ с осью Ox.

3. Вводя новую переменную $t = x^2/4$, преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение $xy'' - y' + xy = 0$ с новой функцией $y = y(t)$.

4. Приняв $u = y\,Sin\,x$ и $v = y$ за новые независимые переменные,

преобразовать уравнение $$tg^2x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\,tg\,x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + tg^3x\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Вариант 2

1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в $x^8 + y^{13} + 5z = 7$ в точке $M_0(1,1,1)$.

2. Найти производную функции $f = x - x^2y + y^4$ в точке $A(1,1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{AB}$, где $B(4,-2)$.

3. Вводя новую переменную $t = \ln x$, преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ с новой функцией $y = y(t)$.

4. Приняв $u = x$ и $v = y - Cos\,x$ за новые независимые переменные, преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2Sin\,x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (2 - Cos^2x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Индивидуальное задание «Ряды» (РГР)

Общее задание

1. Найти сумму ряда.
2. Исследовать на сходимость ряд.
3. Вычислить сумму ряда с точностью α.
4. Доказать справедливость равенства. (Ответом служит число ρ, получаемое при применении признака Даламбера или признака Коши.)
5. Найти область сходимости функционального ряда.
6. Доказать, исходя из определения, равномерную сходимость функционального ряда на отрезке $[0,1]$. При каких n абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит $0,1$ $\forall x \in [0,1]$?
7. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке.
8. Найти сумму ряда.
9. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.
10. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

Вариант 1

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{9n^2+12n-5}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{Sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$;

   д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^2(3n+1)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$; $\alpha=0,01$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}x^{2n}Sin(x+\pi n)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2n^2\sqrt{x-2}\,e^{-n^2/(x-1)^3}$;

   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{7n-11}$. 7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\,Cos\,nx}{\sqrt[3]{n^3+1}}$; $[0,2]$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})\,x^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(4n^2+9n+5)\,x^{n+1}$.

9. $f(x)=9/(20-x-x^2)$. 10. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$.

Вариант 2

1. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,Sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^2(2n+1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; $\alpha=0,01$. 4. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}\,x^{4n}\,Sin(2x-\pi n)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n(x+1/n)}{\sqrt{x-e}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\,5^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-6}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,2^n}$; $[-3/2,\ 3/2]$.

8. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+7n+4)\,x^n$.

9. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$. 10. $\int_0^{0,1} Sin(100x^2)\,dx$.

4- ый семестр

Контрольная работа «Векторный анализ»

Вариант 1

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода, взятый вдоль ориентированной кривой L:

$\int_L \frac{ydx+xdy}{1+x^2y^2}$, где L есть отрезок AB, $A=(0,0)$, $B=(1,1)$.

2. Проверив, что подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, вычислить интеграл:

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)} 2x(y^2-2)dx + 2y(x^2+1)dy .$$

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали: $\boldsymbol{F}=(x^3+yz)\boldsymbol{i}+(y^3+xz)\boldsymbol{j}+(z^3+xy)\boldsymbol{k}$, S - верхняя полусфера: $x^2+y^2+z^2=16,\ z \ge 0$.

Вариант 2

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода, взятый вдоль ориентированной кривой L:

$$\int_L (-x^2ydx + xy^2dy), \qquad L=\{(x,y): x^2+y^2=r^2\},$$

где окружность проходится в положительном направлении.

2. Проверив, что подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, вычислить интеграл:

$$\int_{(-1,5)}^{(2,2)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$ вдоль путей, не пересекающих оси абсцисс.

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали: (ВОС-1-№ 183, с.706)

$\boldsymbol{F}=(xy+x^2)\boldsymbol{i}+(2y-2xy)\boldsymbol{j}+(z - yz)\boldsymbol{k}$, $S=\{(x,y,z): x^2+y^2=z^2,\ 0\le z \le H\}$.

Контрольная работа «Кратные интегралы»

Вариант 1

1. Вычислить $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.
2. Переходя к полярным координатам, вычислить $\iint_D (1-\frac{y^2}{x^2})dxdy$, если область D – круг $x^2+y^2\le \pi^2$.
3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x^2+y^2=8,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=4$.
4. Вычислить $\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, если область D ограничена поверхностями: $x^2+y^2=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=a$.

Вариант 2

1. Вычислить $\iint_D y\ln x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

4. Пусть $f(x), g(x) \in C[a;b]$, $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. Докажите, что найдется точка $x_0 \in (a;b)$, в которой $f(x_0) = g(x_0)$.

5. Провести полное исследование функции и построить график: $y = \dfrac{2x^2 - 5}{x - 2}$.

Вариант 2

2. Переходя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}$, если область D ограничена полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ и осью Ox.
3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x=2y^2$, $x+2y+z=4$, $y=0$, $z=0$.
4. Вычислить $\iiint\limits_D (x^2 + y + z^2)^3\, dxdydz$, если область D ограничена поверхностями: $x^2+z^2=1$, $y=0$, $y=1$.

Контрольные работы для проверки остаточных знаний
1 семестр

Вариант 1

1. Дайте определение равномерной непрерывности функции на множестве.
2. Найдите предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - Sin\, x}{x^3}$.
3. Найдите производную функции: $y = arcSin \dfrac{Sin\, x}{\sqrt{1 + Sin^2 x}}$.
4. Пусть $f(x) \in D[0;1]$ и $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Докажите, что найдется точка $c \in (0;1)$, в которой $f'(c) = 0$.

1. Дайте определение предела числовой последовательности.
2. Найдите предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{Sin^2 5x}$.
3. Найдите производную функции: $y = 2x \cdot tg 2x + \ln Cos 2x - 2x^2$.
5. Провести полное исследование функции и построить график: $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

2 семестр
Вариант 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^2+1, \qquad x+y=3.$$

2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4(t - Sin\, t), \\ y = 4(1 - Cos\, t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями:

$$x\cdot y = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$$

4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* кривой, заданной уравнением:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=5^{2/3}.$$

Вариант 2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 2x+1, \qquad x - y - 1 = 0.$$

2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2Cos\,t - Cos2t, \\ y = 2Sin\,t - Sin2t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi .$$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями:

$$x^2 - y^2 = 4, \quad y = \pm 2.$$

4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* дуги кривой, заданной уравнением:

$$8y^2 = x^2 - x^4.$$

Тест для проверки остаточных знаний

по курсу математического анализа

1. Найти функцию вида $f(x)=a+bc^x$, если $f(0)=15$, $f(2)=30$, $f(4)=90$. (№200)

В ответе записать значение $f(-1)$.

Ответ: 1) 10; 2) 11; 3) 12; 4) 12,5.

2. Найти $inf\{f(x)\}$ и $sup\{f(x)\}$ функции $f(x)=1/(1+x^2)$ на $(-\infty, \infty)$. (№389)

Ответ записать в форме ($inf\{f(x)\}$, $sup\{f(x)\}$).

Ответ: 1) $(0, \infty)$; 2) $(1/2, 1)$; 3) $(0, 1)$; 4) $(1, \infty)$.

3. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$.(№594б)

Ответ: 1) 0; 2) ∞; 3) 2; 4) 1.

4. Перечислить номера свойств функции $f(x)=\sqrt{x}$ на $[0; \infty)$:

а) ограничена (1) или нет (2); б) монотонна (3) или нет (4); в) равномерно непрерывна (5) или нет (6); г) дифференцируема (7) или нет (8). (ВВС)
Ответ записать в круглых скобках.
Ответ: 1) (2, 3, 5, 8); 2) (2, 4, 6, 8); 3) (1, 3, 5, 7); 4) (2, 3, 6, 7).

5. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{если } x\le 2; \\ ax+b, \text{если } x>2. \end{cases}$ Как следует подобрать коэффициенты *a* и *b*, чтобы функция *f(x)* была непрерывной и дифференцируемой в точке $x=2$? (№1010)
Ответ записать в форме (*a, b*).
Ответ: 1) (2, 0); 2) (4, -2); 3) (4, -4); 4) (2, 2).

6. Найти дифференциал $d(ln(1-x^2))$ при $x=3$. (№1090ж)
Ответ: 1) $-0,125dx$; 2) $0,75dx$; 3) $1,5dx$; 4) dx.

7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-Sinx}$. (№1320)
Ответ: 1) 0; 2) 2; 3) -2; 4) 1.

8. Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-5x}}$ и записать ответ при $x=0,2$ и $C=0$. (№1658)
Ответ: 1) -0,4; 2) –0,2; 3) 2; 4) 1.

9. Найти интеграл $\int Sin5xCosxdx$ и записать ответ при $x=\pi/2$ и $C=0$. (№2013)
Ответ: 1) –0,5; 2) 1; 3) 1/6; 4) –1/24.

10. Найти $\int\limits_0^{ln\,2}\sqrt{e^x-1}\,dx$. (№2248)
Ответ: 1) -2; 2) 1; 3) 2; 4) $2-\pi/2$.

11. Найти длину дуги кривой $y=lnCosx$ $(0\le x\le \pi/6)$. (№2437)
Ответ: 1) $0,5ln3$; 2) $ln3$; 3) $0,25ln3$; 4) $0,125ln3$.

12. Указать номера сходящихся рядов:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n^2}\ (1);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3+1}\ (2);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3}\ (3).$$
Ответ записать в круглых скобках.
Ответ: 1) (1,2); 2) (2,3); 3) (1,3); 4) (1,2,3).

13. Найти интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n(n^2+1)}\quad .$$

Ответ: 1) (-2; 2); 2) [-2; 2); 3) (-4; 2); 4) [-4; 0).

14. Записать коэффициент при x^4 в разложении в ряд Тейлора по степеням x функции $f(x)=Sin^2x$.

Ответ: 1) –1/6; 2) –1/3; 3) 1/3; 4) 1/6.

15. Найти коэффициент a_2 в разложении в ряд Фурье функции $f(x)=2Sinx\text{-}Cos2x$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

Ответ: 1) –1; 2) –1/2; 3) 1/3; 4) 1/6.

16. Найти дифференциал функции $f(x,y)=y^2Sinx$ в точке (-π/3; 1).

Ответ: 1) $-0{,}5dx+\sqrt{3}dy$; 2) $0{,}5dx+\sqrt{3}dy$; 3) $0{,}5dx-\sqrt{3}dy$; 4) $dx-\sqrt{3}dy$.

17. Найти производную функции $z=x^2\text{-}y^2$ в точке $M\ (1,1)$ в направлении l, составляющем угол $\alpha=60^0$ с положительным направлением оси Ox. (№3341)

Ответ: 1) $1-0{,}5\sqrt{3}$; 2) $1-2\sqrt{3}$; 3) $1-\sqrt{3}$; 4) $2-\sqrt{3}$.

18. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2+z^2=169$ в точке $M(1,2,5)$. (№3539)

Ответ: 1) $2x+4y\text{-}z\text{-}5=0$; 2) $x+2y+5z\text{-}30=0$; 3) $x+4y\text{-}2z\text{-}3=0$; 4) $2x\text{-}2y\text{-}z\text{-}5=0$.

19. Установить, является ли точка $M_0(1,\ 1)$ точкой локального экстремума (конкретно, точкой максимума или минимума) или просто стационарной точкой (без экстремума) для функции $z=x^3+y^3\text{-}3xy$. (№3626)

Ответ: 1) точка максимума; 2) точка минимума; 3) стационарная точка (без экстремума); 4) не является.

20. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy^2dxdy$ по области D, ограниченной линиями: $y=x,\ y=x^2,\ x=1$. (№3907)

Ответ: 1) 1/40; 2) 1/20; 3) 1/12; 4) 1/6.

21. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xdxdydz$, где область V – треугольная пирамида с вершинами: $O(0,\ 0,\ 0),\ A(1,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 1,\ 0),\ C(0,\ 0,\ 1)$.

Ответ: 1) 1/24; 2) 1/12; 3) 1/3; 4) 1/6.

22. Вычислить криволинейный интеграл $\int_C x^2dx + y^2dy$ вдоль кривой *C*, заданной уравнениями: *x=3Sint, y=3Cost* $(0 \le t \le \pi)$.

Ответ: 1) -9; 2) -18; 3) -12; 4) 9.

Из фонда Федерального агенства по образованию для проверки остаточных знаний студентов специальности 010501 - прикладная математика и информатика по математическому анализу

1. Указать направление наибольшего убывания функции $\mathbf{f(x,y)} = \left|\mathbf{ln}(1{,}5 - \left|\mathbf{x}^4 - \mathbf{y}\right|)\right|$ в точке с координатами $\mathbf{x} = 1,\ \ \mathbf{y} = 2$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\mathbf{x} = 2,\ \ \mathbf{y} = 3$, которая ортогональна в этой точке к линии уровня функции $\mathbf{f(x,y)} = \left|\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2\right|$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\mathbf{x} = -1,\ \ \mathbf{y} = 2,$ которая касается в этой точке линии уровня функции $\mathbf{f(x,y)} = |\mathbf{xy}|$.
4. Указать направление наибольшего роста функции $\mathbf{f(x,y)} = \left|\mathbf{ln}(1 - |\mathbf{sin}\,\pi\mathbf{xy}|)\right|$ в точке с координатами $\mathbf{x} = 1,\ \ \mathbf{y} = -\frac{1}{3}$.
5. Доказать, что кривые $\mathbf{y}^2 = 4(1 + \mathbf{x})$ и $\mathbf{y}^2 = 4(1 - \mathbf{x})$ пересекаются под прямым углом.
6. Написать уравнение касательной к циклоиде
7. $\mathbf{x} = 2(\mathbf{t} - \mathbf{sin\,t}),\ \ \mathbf{y} = 2(1 - \mathbf{cos\,t})$ в точке $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, соответствующей
$$\mathbf{t} = \frac{\pi}{3}.$$
8. В каких точках пространства градиент функции перпендикулярен оси **Oz:**
$$\mathbf{u} = \mathbf{x}^2(\mathbf{x} + 3\mathbf{z}) + \mathbf{y}^2(\mathbf{y} + 3\mathbf{z}) + \mathbf{z}^2(\mathbf{z} - 3);$$
9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении циклоиды $\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{sin\,t}),\ \ \mathbf{y} = \mathbf{a}(1 - \mathbf{cos\,t})$, около оси $\mathbf{Ox}$, при $0 \le \mathbf{x} \le 2\pi\mathbf{a}$.
10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{z}^2 = 1,\ \ \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = 1.$$
11. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)} - n).$$

12. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(a+\frac{1}{n})^2 + (a+\frac{2}{n})^2 + \ldots + (a+\frac{n-1}{n})^2 \right].$$

13. Последовательность a_n задается формулами: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

14. Последовательность x_n, составленная по закону $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$, где x_0 произвольное положительное число, сходится. Определить величину её предела.

15. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} n^2 (a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2);\quad a > 0.$$

16. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2})^n;\quad a > 0,\quad b > 0.$$

17. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2 + 2n} + n - 2\sqrt{n^2 + n}).$$

18. Найти предел

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}};\quad a > 0.$$

19.29. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}).$$

20. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty} \ln(1 + 2^x)\ln(1 + \frac{3}{x}).$$

21. Показать, что функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

22. Найти производную функции $y = \left|\sin^3 x\right|$.

23. Найти производную функции $y = [x]\sin^2 \pi x$.

24. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечётная.

25. Найти производную y'_x, если $r = ae^{mu}$ (логарифмическая спираль), где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\phi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ - полярные координаты.

26. Найти экстремумы функции
$$y = |x|e^{-|x-1|}.$$

27. Найти интеграл
$$\int x\,|x|\,dx.$$

28. Вычислить интеграл
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

29. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = a\phi$ при $0 \le \phi \le 2\pi$.

30. Доказать, что длина дуги эллипса $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$ равна длине дуги одной волны синусоиды $y = c\sin\dfrac{x}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

31. Найти сумму ряда
$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$$

32. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, вырезанной плоскостями $x + z = 0,\ \ x - z = 0\ \ (x > 0,\ \ y > 0)$.

33. Вычислить криволинейный интеграл
$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy).$$

34. Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x - [x]$.

Экзаменационные билеты для студентов специальности 010101 – математика, 010501 - прикладная математика и информатика

1 семестр

Билет 1

1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними и пределом функции.
2. Обобщение теоремы Гейне-Кантора.

Билет 2

1. [illegible] повторного,

[illegible] суммирования в повторном абсолютно сходящемся ряде.

2. [illegible] параметрических интегралов. Правило Лейбница.

3. Найти точки условных экстремумов функции $f=xyz$ при условии $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$.

3. Найти точки условных экстремумов функции $f=xyz$ при условии $xy+yz+xz=a^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$.

3. Доказать, что равенство $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)=\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)=A$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$.

4. Провести полное исследование функции и построить ее график:
$$y=\frac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}.$$

Билет 2

1. Единственность предела функции. Основные свойства предела функции.
2. Несчетность множества точек отрезка $[0;1]$.
3. Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq 0$, а $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)$ не существует.
4. Провести полное исследование функции и построить ее график:
$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}.$$

3 семестр

4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$.

4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^n(n+1)^{3/2}}$.

4 семестр

Билет 1

1.Тригонометрические многочлены и ряды. Тригонометрический ряд Фурье. Регулярные и строго регулярные функции.

2. Свойства гладкого отображения на выпуклом множестве. Криволинейные координаты. Дифференциал гладкого отображения.

3. Пользуясь определением двойного интеграла, доказать, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} x^m y^n dx\, dy = 0 ,$$

если m и n – натуральные числа и, по крайней мере, одно из них нечетно.

4. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{F}$ вдоль ориентированного контура L: $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}-2z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$; $L=\{(x,y,z):\ 2x^2-y^2+z^2=a^2,\ x=y\}$ – положительно ориентированная кривая на правой стороне плоскости.

Билет 2

1. Ортонормированная система функций в линейном пространстве строго регулярных функций. Неравенство Бесселя.

2. Многократные интегралы.

3. Пусть $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$, где P,Q,R – линейные функции от x,y,z и пусть Γ– замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в некоторой плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint\limits_{\Gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади фигуры, ограниченной контуром Γ.

4. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали: $\boldsymbol{F}=(x^3+yz)\boldsymbol{i}+(y^3+xz)\boldsymbol{j}+(z^3+xy)\boldsymbol{k}$; S – верхняя полусфера: $x^2+y^2+z^2=16,\ z\ge 0$.

Экзаменационные билеты для студентов специальности 010701 – физика

1 семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Комплексные числа. Действия с комплексными числами.
2. Непрерывность обратной функции.
3. Найти dy для $y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$
4. Доказать равномерную непрерывность функции $y = \sin 2x$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Арифметические свойства предела функции.
2. Второе и третье достаточное условие экстремума.
3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = \arcsin(t-1) \end{cases}$
4. Исследовать на непрерывность, установить характер точек разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & x \geq 0 \end{cases}$$

2 семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Частные производные и частные дифференциалы, геометрический смысл.
2. Повторные интегралы. Приведение двойного интеграла к повторному.
3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить приближенно:

$$\sqrt{1{,}02^2 + 1{,}97^3}$$

4. Применяя формулу Грина-Остроградского, вычислить криволинейный интеграл:

$$\oint_C xy^2dy - x^2ydx, \text{ где С-окружность } x^2 + y^2 = a^2$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Равномерная непрерывность непрерывных отображений.
2. Основные свойства двойного интеграла .
3. Найти: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ при x=1, y=-2, z=1, если

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$

4. Переходя к полярным координатам, найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2$$

3 семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1

1. Сложение рядов, умножение ряда на число.

2. Преобразование Фурье.

3. Вычислить с точностью до 10^{-3} интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x^2)dx$.

4. Найти область сходимости ряда $\frac{x}{1\times 3} + \frac{x^2}{2\times 3^2} + \frac{x^3}{3\times 3^3} + ... + \frac{x^n}{n\times 3^n} + ...$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №2

1. Остаток сходящегося ряда. Сходимость ряда и остатка.

2. Интеграл Фурье.

3. Разложить в ряд функцию $y = \sqrt[3]{1+x}$ по степеням x.

4. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x^2$ на $[-\pi, \pi]$, сделать периодическое продолжение.

Примечание. Здесь приведены по два варианта билетов. Остальные билеты составлены на основе вопросов, приведенных в рабочих программах.

6. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекторы: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В., ст. преп. Ляпунова М.Г., ст. преп., к.т.н. Рыженко А.В.

Практические занятия: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В., ст. преп. Ляпунова М.Г., ст. преп., к.т.н. Рыженко А.В., ст. преп. Салмашова Е.М., преп. Кушнирук Н.Н.

ОГЛАВЛЕНИЕ