Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

________Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

И

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Учебно – методический

комплекс дисциплины

для специальностей

010101 – математика

и

010501 – прикладная математика

Составитель: **Н.В. Кван**

Благовещенск

2007

ББК
К

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Кван Н.В.

Математическая логика и теория алгоритмов. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010101 «Математика» и 010500 «Прикладная математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 206 с.

Учебно – методический комплекс дисциплины "Математическая логика и теория алгоритмов" содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список.

1. ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010101 – «Математика»

Квалификация – Математик

ОПД.Ф.06 Математическая логика

Логические исчисления, модели: исчисление высказываний; аксиомы; правило вывода; производные правила вывода; тождественная истинность выводимых формул; непротиворечивость исчисления высказываний; теорема о полноте исчисления высказываний; предикаты; логические операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл; кванторы; геометрический смысл квантора существования; модели; формулы; свободные и связанные переменные; истинность формул в модели, на множестве; общезначимые формулы; эквивалентные формулы логики предикатов; правила преобразований формул в эквивалентные; нормальная форма; исчисление предикатов; аксиомы; правила вывода; производные правила вывода; торжественная истинность выводимых формул; непротиворечивость исчисления предикатов; формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов. Теорема о полноте для случая одноместных предикатов.

Вычислимые функции: машины Тьюринга; вычислимые функции; тезис Черча; примеры вычислимых функций; рекурсивные, рекурсивно перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика; теорема Поста; примеры алгоритмически неразрешимых проблем; неразрешимость проблем самоприменимости, применимости; теорема Поста-Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства. Теорема о неразрешимости проблемы распознавания тождественно истинных формул исчисления предикатов; операции суперпозиции и примитивной рекурсии; примитивно-рекурсивные функции;

операция минимизации; частично-рекурсивные функции; вычислимость частично-рекурсивных функций; частичная рекурсивность вычислимых функций; формула Клини. (80)

2. РАБОЧИЕ ПРОГРАММЫ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине "Математическая логика"

для специальности 010101–"Математика"

Курс 4

Семестр 8

Лекции 30 час

Практические (семинарские) занятия 30 час.

Зачет 8 семестр

Самостоятельная работа 20 час.

Всего 80 часов

Составитель Н.В. Кван, ст. преподаватель.

Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 010101–"Математика"

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине "Математическая логика и теория алгоритмов"

для специальности 010501–"Прикладная математика и информатика"

ЕН.В 1 «Математическая логика» дисциплина по выбору

Курс 4

Семестр 8

Лекции 32 час.

Экзамен 8 семестр

Практические (семинарские) занятия 32 час.

Самостоятельная работа 46 час.

Всего 110 часов

Составитель Н.В. Кван, ст. преподаватель.

Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

2006 г.

2.1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЁ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

2. 1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Цель курса – ознакомить студентов с основными понятиями и их свойствами современной математической логики и ее ролью в развитии всех математических дисциплин, в круг вопросов которой входят логика высказываний, исчисление высказываний, исчисление предикатов, формальная арифметика, теория алгоритмов.

2.1.2 Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины.

Преподавание курса связано с другими курсами Государственного образовательного стандарта: алгебра, теории чисел, основания геометрии, философия математики, информатика.

2.2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.2.1. Наименование тем, их содержание и объем в часах лекционных занятий

Лекции – 30 часов для специальности 010101 – математика

и

32 часа для специальности 010501 – прикладная математика

1. Алгебра логики – 4 часа.

Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы алгебры логики. Равносильные формулы алгебры логики. Равносильные преобразования формул. Закон двойственности. Проблема разрешения. СДНФ, СКНФ. Приложения алгебры логики.

2. Булевы функции – 4 часа.

Булевы функции. Табличный способ задания булевых функций. Существенные и фиктивные переменные. Эквивалентность формул. Разложение функций по переменным. Элементарные функции и их свойства. СДНФ и СКНФ. Полные системы функций. Полином Жегалкина, представление функций полиномами. Замыкание. Замкнутые классы. Линейные функции. Самодвойственные функции. Принцип двойственности. Монотонные функции. Теорема о неполноте систем функций алгебры логики. Применение булевых функций для синтеза релейно-контактных схем. Схемы их функциональных элементов.

3. Исчисление высказываний – 6 часов.

Понятие формулы исчисления высказываний. Определение доказуемой формулы. Производные правила вывода. Понятие выводимости формул. Понятие вывода. Правила выводимости. Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний.

4. Логика предикатов – 6 часов.

Понятие предиката. Логические операции над предикатами. Кванторные операции. Понятие формулы логики предикатов. Равносильные формулы логики предикатов. Предваренная нормальная формула. Общезначимость и выполнимость формул. Алгоритмы распознавания общезначимости формул в частных случаях. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений.

5. Математические теории – 4 часа.

Язык первого рода. Термы и формулы. Логические и специальные аксиомы. Примеры математических теорий. Доказательства в теории. Теорема дедукции. Интерпретация языка теории. Изоморфизм интерпретации. Категоричность теории. Проблемы непротиворечивости, полноты, разрешимости теории. Теория натуральных чисел, Теорема Геделя о полиноме.

6. Основы теории алгоритмов – 6 часов (8 часов для специальности 010501).

Понятие алгоритма и его характерные черты. Разрешимые и перечислимые множества. Уточнение понятия алгоритма. Вычислимые функции. Частично рекурсивные и общерекурсивные функции. Машина Тьюринга. Нормальные алгоритмы Маркова. Неразрешимые алгоритмические проблемы.

2.2.2 Практические занятия, их содержание и объем в часах - 30 часов

№	Тема практического занятия	часы	Самостоятельная работа студентов	часы
1	Формулы алгебры высказываний	2	Индивидуальное задание №1;	2
2	СДНФ, СКНФ, их приложения	2	Решение домашних заданий	2
3	Логические задачи	2		2

4	Булевы функции	2	Индивидуальное задание №2; Самостоятельное изучение темы «Классы замкнутости булевых функций»; Решение домашних заданий	2 4 2
5	Классы замкнутости, полнота систем функций	2		
6	Контрольная работа №1	2		
7	Доказуемые формулы ИВ	2	Решение домашних заданий	2
8	Выводимость из гипотез	2		
9	Производные правила вывода	2		
10	Формулы логики предикатов	2	Индивидуальное задание №3; Решение домашних заданий	2 2
11	Применение языка логики предикатов для записи математических предложений	2		
12	Контрольная работа №2	2		
13	Частично рекурсивные и общерекурсивные функции	2	Решение домашних заданий	2
14	Машина Тьюринга	2		
15	Конструирование машины Тьюринга	2		
16	Конструирование машины Тьюринга	2		

2.2.3 Вопросы к зачету для специальности 010101 - математика

1. Закон двойственности АВ.
2. Проблема разрешения АВ.
3. СДНФ, СКНФ.

4. Теорема дедукции ИВ.
5. Правила вывода исчисления высказываний.
6. Непротиворечивость исчисления высказываний.
7. Полнота исчисления высказываний.
8. Независимость аксиом исчисления высказываний.
9. Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов.
10. Математические теории первого порядка.
11. Примеры математических теорий.
12. Теория натуральных чисел.
13. Теорема Геделя о неполноте.
14. Понятие алгоритма и его характерные черты.

2.2.4 Требования при оценке знаний на зачете

Студент получает зачет по изучаемой дисциплине в случае, если он свободно владеет основными теоретическими понятиями и определениями, а также умеет правильно решать предложенные задачи.

2.2.5 Вопросы к экзамену для специальности 010501 – прикладная математика

1. Равносильные преобразования формул.
2. Закон двойственности.
3. Проблема разрешения.
4. СДНФ, СКНФ.
5. Табличный способ задания булевых функций. Существенные и фиктивные переменные. Эквивалентность формул. Разложение функций по переменным.
6. Полные системы функций. Полином Жегалкина, представление функций полиномами.
7. Замыкание. Замкнутые классы.
8. Линейные функции.
9. Самодвойственные функции.
10. Принцип двойственности.

11. Монотонные функции.
12. Теорема о неполноте систем функций алгебры логики.
13. Понятие формулы исчисления высказываний. Определение доказуемой формулы. Производные правила вывода.
14. Понятие выводимости формул. Понятие вывода. Правила выводимости.
15. Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний.
16. Понятие предиката. Логические операции над предикатами. Кванторные операции.
17. Понятие формулы логики предикатов. Равносильные формулы логики предикатов.
18. Предваренная нормальная формула.
19. Общезначимость и выполнимость формул. Алгоритмы распознавания общезначимости формул в частных случаях.
20. Язык первого рода. Термы и формулы. Логические и специальные аксиомы.
21. Примеры математических теорий.
22. Доказательства в теории.
23. Теорема дедукции.
24. Интерпретация языка теории.
25. Изоморфизм интерпретации. Категоричность теории.
26. Проблемы непротиворечивости, полноты, разрешимости теории. Теория натуральных чисел.
27. Теорема Геделя о полиноме.
28. Понятие алгоритма и его характерные черты.
29. Разрешимые и перечислимые множества. Уточнение понятия алгоритма.
30. Вычислимые функции.
31. Частично рекурсивные и общерекурсивные функции.

32.Машина Тьюринга.

33.Нормальные алгоритмы Маркова.

34.Неразрешимые алгоритмические проблемы.

2.2.6 Требования при оценке знаний на экзамене

Учитывается: правильность и осознанность изложения содержания ответа на вопросы; полнота раскрытия понятий и закономерностей, точность употребления и трактовки общенаучных и специальных терминов; степень сформированности интеллектуальных и научных способностей экзаменуемого; самостоятельность ответа; речевая грамотность и логически последовательность ответа; умение решать предложенные задачи.

Критерии оценок:

отлично - полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы и рекомендованной литературы: четко и правильно даны определения и раскрыто содержание концептуальных понятий, закономерностей, корректно использованы научные термины; ответ самостоятельный, без наводящих дополнительных вопросов.

хорошо - раскрыто основное содержание вопросов; в сновном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный:

определения понятий неполные, допущены нарушения в последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях, исправляемые по дополнительным вопросам экзаменатора.

удовлетворительно — усвоено основное содержание учебного материала, но изложено фрагментарно не всегда последовательно; определение понятий недостаточно четкое;

не использованы в качестве доказательства выводы ю наблюдений и опытов или л опушены ошибки при их изложении; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определении понятий; - неудовлетворительно – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программного материала, не даны ответы на вспомогательные вопросы экзаменатора, допущены грубые ошибки в определении основных понятий.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ – 20 часов для специальности 010101 – математика и 46 часов для специальности 010501 – прикладная математика

3.1 Темы для самостоятельного изучения

3.1.1. «Классы замкнутости булевых функций». (4 часа)

Источник – Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М., 2000.

Контрольные вопросы

1) Доказать лемму о несамодвойственной функции;
2) Доказать лемму о немонотонной функции;
3) Доказать лемму о нелинейной функции;
4) Доказать, что пересечение любых двух замкнутых классов замкнуто, а объединение двух замкнутых классов не всегда замкнуто.

3.1.2 «Рекурсивные функции» (8 часов, для спец. 010501)

Источник – Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2004

Контрольные вопросы

1) Происхождение рекурсивных функций;
2) Основные понятия теории рекурсивных функций и тезис Черча;
3) Примитивно рекурсивные функции;
4) Примитивная рекурсивность предикатов;
5) Вычислимость по Тьюрингу примитивно рекурсивных функций;
6) Функции Аккермана;
7) Общерекурсивные и частично рекурсивные функции.

3.1.3 «Нормальные алгоритмы Маркова» (6 часов, для спец. 010501)

Контрольные вопросы

Источник – Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2004

1) Марковские подстановки;

2) Нормально вычислимые функции и принцип нормализации Маркова;

3) Совпадение класса всех нормально вычислимых функций с классом всех функций, вычислимых по Тьюрингу.

3.1.4 «Неразрешимые алгоритмические проблемы» (6 часов, для спец. 010501)

Контрольные вопросы

Источник – Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2004

3.2 Индивидуальные домашние задания

3.2.1 Индивидуальное домашнее занятие №1 по теме «Алгебра высказываний» (2 часа)

Контроль за выполнением ИДЗ №1 – защита решений на консультации, ответы на дополнительные вопросы по теме ИДЗ.

3.2.2 Индивидуальное домашнее занятие №2 по теме «Булевы функции» (2 часа)

Контроль за выполнением ИДЗ №2 – защита решений на консультации, ответы на дополнительные вопросы по теме ИДЗ.

3.2.3 Индивидуальное домашнее занятие №3 по теме «Логика предикатов» (2 часа)

Контроль за выполнением ИДЗ №3 – защита решений на консультации, ответы на дополнительные вопросы по теме ИДЗ.

3.3 Самостоятельное решение упражнений по темам практических занятий (10 часов для спец. 010101 и 16 часов для спец. 010501)

Упражнения для самостоятельного решения задаются после каждого практического занятия. Контроль осуществляется на каждом практическом занятии.

4. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ, УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

4.1. Традиционная логика

1. Аристотель. Сочинения: В 4 т. - М., 1976-1981.
2. Ахманов А. С. Логическое учение Аристотеля. - М., 1960.
3. Бойко А. П. Занимательная логика (задачи и упражнения). - М., 1994.
4. Бойко А.П. Краткий курс логики. - М., 1995.
5. Бочаров В. А. Аристотель и традиционная силлогистика. - М., 1984.
6. Гетманова А.Д. Логика. - М., 1986.
7. Гетманова А.Д., Никифоров А. А., Панов М.И. Логика (10-11 классы). - М., 1995.
8. Гетманова А.Д. Занимательная логика для школьников (Ч. 1: Для 4 - 7 классов). - М., 1998.
9. Горский Д. П. Логика. - М, 1963.
10. Горский Д.П., ИвинА.А., Никифоров А. А. Краткий словарь по логике. - М., 1991.
11. Зегет В. Элементарная логика: Пер. с нем. - М., 1985.
12. Ивин А.А. Строгий мир логики. - М., 1988.
13. Ивин А.А. Искусство правильно мыслить. - М., 1990.
14. Ивлев Ю.В. Курс лекций по логике. - М., 1988.
15. Игошин В. И. Логика с элементами математической логики. - Саратов, 2004.
16. Кириллов В. И., Старченко А. А. Логика. - М., 1987.
17. Логика / Под. ред. Г.АЛевина. - Минск, 1974.
18. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики: Пер. с англ. - М., 1959.
19. Мельников В. Н. Логические задачи. - Киев; Одесса, 1989.

20. Переверзев В. Н. Логистика: Справочная книга по логике. - М., 1995.
21. Розен В. В. Дедуктивные умозаключения. - Саратов, 1990.
22. Смирнов В.А. Погружение силлогистики в исчисление предикатов // Логическая семантика и модальная логика. - М, 1967.
23. Стяжкин Н.И. Логика с элементами математической логики. - М., 1974.
24. Субботин А.Л. Теория силлогистики в современной формальной логике. - М., 1965.
25. Субботин А. Л. Традиционная и современная формальная логика. - М, 1969.
26. Упражнения по логике / Под ред. В. И. Кириллова. - М., 1990.

4. 2. Логика и наука. Логика и математика. Основы математики

1. ВейльГ. Математика и логика: Пер. с англ. // Математика. Теоретическая физика.- М., 1984.
2. Гетманова А. Д. О соотношении математики и логики // Логические исследования. – М., 1959.
3. Гильдерман Ю. И. Вооружившись интегралом… - Новосибирск, 1980.
4. Гончаров С. С, Ершов Ю.Л., Самохвалов К. Ф. Введение в логику и методологию науки. - М., 1994.
5. Зиновьев А. А. Основы логической теории научных знаний. - М-, 1967.
6. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга: Пер. с англ. - М, 1973.
7. Кац. М., Улам С. Математика и логика (ретроспектива и перспектива): Пер. с англ. - М., 1971.
8. Колмогоров А. И. Клогическим основам теории информации итеории вероятностей // Проблемы передачи информации. - М., 1969. Т. 5. Вып. 3. - с. 3-7.
9. Копнин П. В. Логические основы науки. - Киев, 1968.
10. Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза: Пер. с англ. - М-, 1969.
11. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств: Пер. с англ. – М., 1970.

12. Кусраев А. Г. Булевы алгебры и булевозначные модели // Соросовский образовательный журнал. - 1997. - № 9. - с. 116-122.
13. Ледли Р., ЛастедЛ. Медицинская диагностика и методы выбора решений: Пер. с англ. //Математические проблемы в биологии. - М., 1966.
14. Логическая структура научного знания / Сб. статей под ред. П.В.Таванец. - М., 1965.
15. Иеискашова Е. В. Идеи нестандартного анализа в истории науки и в преподавании // Математика в школе. - 1999. - № 3. – с. 76- 79.
16. Применения логики в науке и технике/Сб. статей под ред. П.В.Таванец. — М., I960.
17. Рассева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики: Пер. с англ. - М., 1972.
18. Рвачёв В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. - Киев, 1967.
19. Сикорский Р. Булевы алгебры: Пер. с англ. - М., 1969.
20. Смирное В. А. Логические методы анализа научного знания. - М., 1987.
21. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук: Пер. с англ. - М., 1948.
22. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? - М., 1987.
23. Формальная логика и методология науки / Сб. статей под ред. П.В.Таванец. – М., 1964.
24. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств: Пер. с англ. - М., 1966.

4. 3. Учебники и пособия по математической логике, рекомендуемые студентам вузов

1. БеранЛ. Упорядоченные множества: Пер. с чеш. - М., 1981.
2. Варпаховский Ф.Л. Элементы теории алгоритмов. - М, 1979.
3. Ефремов Г. О. Алгебра логики и контактные схемы. - М., 1969.
4. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Саратов, 1991.
5. Игошин В. И., Петрова Е.С. Множества и графы. - Саратов, 1981.

6. Иножарский В. К. Математическая логика и алгоритмы. - Орел, 1970.
7. Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств: Пер. с англ. - М., 1965.
8. Калужнин Л. А. Что такое математическая логика? - М., 1964.
9. Криницкий Н.А. Алгоритмы вокруг нас. — М., 1984.
10. Лихтарников Л. М., Сукачёва Т. Г. Математическая логика: Курс лекций. Задачник-практикум и решения. - СПб., 1999.
П. Математическая логика/Под ред. А. А. Столяра. - Минск, 1991.
12. Матросов В.Л. Теория алгоритмов. - М., 1989.
13. Мендельсон Э. Введение в математическую логику: Пер. с англ.- М., 1976.
14. Михайлов А. В., Рыжова И. И., Швецкий М.В. Лекции по основам математической логики. Формальные системы нулевого порядка. - СПб., 1998.
15. Мощенский В.А. Лекции по математической логике. - Минск, 1973.
16. Нагель Э., Ньюмен Д. Теорема Гёделя: Пер. с англ. - М., 1970.
17. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. - Ижевск, 1997.
18. Никольская И. Л, Математическая логика. - М., 1981.
19. Новиков П. С. Элементы математической логики. - М., 1973.
20. Пензов Ю. Е. Элементы математической логики и теории множеств. - Саратов, 1968.
21. Современные основы школьного курса математики / Н.Я.Виленкин, К.И.Дуничеб, Л.А.Калужнин, А.А.Столяр. - М., 1980.
22. Столп Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории: Пер. с англ. - М., 1968.
23. Столяр А.А. Элементарное введение в математическую логику. - М, 1965.
24. Трахтенброт В.А. Алгоритмы и вычислительные автоматы. - М., 1974.
25. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Б. Вводный курс математической логики. - М., 1991.

26. Фрейденталь Х. Язык логики: Пер. с англ. - М., 1969.
27. Эдельман С. Л. Математическая логика. - М., 1975.
28. Энгелер Э. Метаматематика элементарной математики: Пер. с нем. - М., 1987.

4. 4. Фундаментальные пособия по математической логике и смежным вопросам алгебры

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра: Пер. с нем. - М., 1976.
2. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики: Пер. с нем. - М., 1947.
3. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики: Пер. с англ. - М., 1979.
4. Гладкий А. В. Математическая логика. – М., 1998.
5. Гудстейн Р.Л. Математическая логика: Пер. с англ. - М., 1961.
6. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. - М., 1979.
7. Ершов Ю.Л., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. Элементарные теории // Успехи математических наук. 1965. - Т. 20. - № 4. -С. 37- 108.
8. КарриХ. Основания математической логики: Пер. с англ. - М., 1969.
9. Кейслер Г., Чэн Ч. Теория моделей: Пер. с англ. - М., 1977.
10. Клаус Г. Введение в формальную логику: Пер. с нем. - М., I960. П. Клини С. Введение в метаматематику: Пер. с англ. - М., 1957.
12. Клини С. Математическая логика: Пер. с англ. - М., 1973.
13. Колмогоров А.Н., Драеалин А. Г. Введение в математическую логику. - М., 1982,
14. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. Дополнительные главы. - М., 1984.
15. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. -М., 1975.
16. Линдон Р. Заметки по логике: Пер. с англ. - М., 1968.
17. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. - М., 1979-
18. Марков А.А. Элементы математической логики. - М., 1984.
19. Маслов С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применение. - М., 1986.

20. Салий В. И. Решетки с единственными дополнениями. - М., 1984.
21. Слупецкий Е., Борковский Л. Элементы математической логики и теории множеств: Пер. с пол. - М., 1965.
22. Смальян Р. Теория формальных систем: Пер. с англ. - М., 1981.
23. Справочная книга по математической логике: В 4 ч.: Пер. с англ.; Под ред. Дж. Барвайса. - М., 1982- 1983.
24. ЧёрчА. Введение в математическую логику: Пер. с англ. - М., 1960
25. Шёнфилд Дж. Математическая логика: Пер. с англ. - М., 1975.
26. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П. , Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. - М., 1966.

4. 5. Теория алгоритмов

1. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика: Пер. с англ. - М., 1994.
2. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. - М., 1977.
3. КатленЬ И, Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций: Пер. с англ. - М., 1983.
4. Криницкий И. А. Алгоритмы вокруг нас. - М, 1977.
5. Макаренков Ю.А., Столяр А.А. Что такое алгоритм? - Минск, 1989.
6. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М., 1965.
7. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. - М., 1980.
8. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгоритмов. -М., 1984,
9. Машина Тьюринга// Квант. 1992. № 7.
10. Машины Тьюринга и вычислимые функции: Пер. с нем. / Г.-Д.Эб-бинхауз, Ф.-К.Ман, К.Якобс и др. - М., 1972.
11. Минский М. Вычисления и автоматы: Пер. с англ. - М., 1971.
12. Нагель Э., Ньюмен Дж. Р. Теорема Гёделя: Пер. с англ. - М., 1970.
13. Петер Р. Рекурсивные функции: Пер. с нем. - М., 1954.
14. Роджерс X. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость: Пер. с англ. - М., 1972.

15. Семенов А. Л., Успенский В. А. Математическая логика в вычислительных науках и вычислительной практике//Вестник АН СССР. - 1986. - № 7.- С. 93-103.
16. Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и вычислительные автоматы. - М., 1974.
17. Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. - М., 1960.
18. Успенский В.А. Машина Поста. - М., 1979- 1988.
19. Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте. - М., 1982.
20. Успенский В. А., Семенов А. Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. - М., 1987.

4. 6. Сборники задач

1. БайифЖ.-К. Логические задачи: Пер. с фр.- М., 1983.
2. Гаврилов Г. П.,у Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. - М., 1977.
3. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. - М., 1972.
4. ГохманА.В., Спивак М.А., Розен В. В. Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. - Саратов, 1969.
5. Драбкина М. Е. Логические упражнения по элементарной математике. - Минск, 1965.
6. Игошин В. И. Задачник-практикум по математической логике. - М., 1986.
7. Игошин В. И. Тетрадь по математической логике с печатной основой. - Саратов, 1996 - 1999.
8. Лавров И. А., Максимова Л.Л- Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М., 1975.
9. Михайлов А. В., Рыжова И.М., Швецкий М.В. Упражнения по основам математической логики. Формальные системы нулевого порядка. - СПб., 1998.
10. Рыжова И. И., Швецкий М.В. Упражнения по основам формальной символической логики. - СПб., 1998.

5. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

5.1 Введение

Логика и интуиция. Мыслительная деятельность человека представляет собой сложный и многогранный процесс, происходящий как на сознательном, так и на бессознательном (подсознательном) уровнях. Это высшая ступень человеческого познания, способность к адекватному отражению предметов и явлений действительности, т.е. к нахождению истины.

Логика и интуиция — два противоположных и неразрывно связанных между собой свойства человеческого мышления. Логическое (дедуктивное) мышление отличается тем, что оно от истинных посылок всегда приводит к истинному заключению, не опираясь при этом на опыт, интуицию и другие внешние факторы. Интуиция (от лат. *intuitio* — «пристальное всматривание») представляет собой способность постижения истины путем прямого ее усмотрения без обоснования с помощью логически строгого доказательства. Таким образом, интуиция является своего рода антиподом, противовесом логики **и** строгости. Логическая часть мыслительного процесса протекает на уровне сознания, интуитивная — на подсознательном уровне.

Развитие науки и особенно математики немыслимо без интуиции. Различают два вида интуиции в научном познании: интуицию-суждение и интуицию-догадку. *Интуиция-суждение* характеризуется тем, что в этом случае прямое усмотрение истины, объективной связи вещей осуществляется не просто без логически строгого доказательства, но такого доказательства для данной истины не существует и не может существовать в принципе. Интуиция-суждение осуществляется как единый (единовременный) синтетический целостный акт обобщающего характера. Примером применения интуиции - суждения является установление истинности или ложности положений, помещаемых в основание той или иной математической теории, которая затем будет развиваться строгими формально-логическими методами.

Интуиция-догадка, называемая также *психоэвристической интуицией,* характеризуется тем, что происходит прямое внелогическое усмотрение такой истины, такого факта, который впоследствии, по прошествии определенного времени, будет обоснован и доказан строго логическим путем. Такое суждение в значительной мере протекает бессознательно или подсознательно в короткие промежутки времени и проявляется как «озарение», «прозрение». Факт, усмотренный в результате психоэвристической интуиции-догадки, в рамках определенной формально-логической системы может быть логически сведен к некоторым исходным основным положениям, принятым за аксиомы или постулаты. При этом последующее строго логическое доказательство интуитивно усмотренного факта происходит через такой промежуток времени, который абсолютно несопоставим по продолжительности с актом «озарения». Для этого могут понадобиться часы, дни и даже годы.

Вопрос о противопоставлении логического и интуитивного (интеллектуального и чувственного) давно отнесен историей развития процесса познания к проблеме взаимодействия этих двух ипостасей человеческого сознания в ходе данного процесса. Для познания мира — и физического, и духовного — необходимы два совершенно разных метода: с одной стороны, логический, строго показательный, а с другой — интуитивный, основанный на непосредственном синтетическом суждении, не опирающемся на доказательство. Гипертрофия (преувеличение) роли как строгой логики, так и интуиции — это крайности. «Обе эти крайности, — справедливо считает Я.Стюарт, — бьют мимо цели: вся сила математики — в разумном сочетании интуиции и строгости. Контролируемый дух и вдохновенная логика!»

Завершим мысль словами выдающегося математика XX в. А. Пуанкаре: «Таким образом, логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства».

Логика традиционная и математическая логика. Термин «логика» - наука о способах доказательств и опровержений. Понятие «традиционная или формальная логика» характеризует берущую свое начало от Аристотеля науку, изучающую формы и законы мышления, а также методы, с помощью которых люди в действительности делают выводы, устанавливают связь логических форм с языком. Появление логических форм и категорий, формирование законов мышления - это результат общественной практики. Именно длительная практическая деятельность человека в процессе познания окружающей действительности, миллиарды раз приводя его сознание к повторению одних и тех же логических фигур, откристаллизовала эти фигуры в законы логики. Таким образом, логика представляет собой определенный способ отражения действительности. Логика изучает то общее, что связывает мысли в их движении к познанию истины. Она есть наука о законах и формах правильного мышления. Она изучает формы рассуждений, отвлекаясь от их конкретного содержания; устанавливает, что из чего следует; ищет ответ на вопрос о направлении рассуждений. Специфика логики состоит в том, что изучение и познание объективного мира природы и субъективного мира переживаний и чувств возможно вести эффективными средствами абстрактного мышления человека.

Математическая логика, называемая также *символической* или *теоретической логикой,* выросла из логики традиционной, но составила значительное ее расширение. С одной стороны, эта наука применила математические методы для изучения общих структур (форм) правильного мышления и тем самым оформилась как раздел математики, с другой — математическая логика сделала предметом своего изучения процесс доказательства математических теорем и сами математические теории. Математическая логика явилась, таким образом, инструментом для исследований в области оснований математики. Данный раздел математической логики получил название «теория доказательств» или «метаматематика». Ни одна из этих двух логик не может в полной мере включать другую как частный случай, но они тесно взаимосвязаны между собой. Математическая логика, являясь более общей и более абстрактной, чем традиционная формальная логика, в то же время является и более конкретной, так как она имеет более широкое применение, дает возможность решать множество конкретных практических задач, не разрешимых средствами традиционной формальной логики. Аппарат исчислений и формальных систем в математической логике гораздо более совершенен, нежели аппарат традиционной логики. Поэтому он может применяться к решению таких сложных задач, которые недоступны для классической логики. Математическая логика способствует более глубокому пониманию логики традиционной, ее сохранению и поднятию на более высокую ступень. Благодаря математической логике логика традиционная достигла определенного уровня совершенства, так как появилась новая возможность использования математики не только по форме, но и по существу.

Немного истории. Основоположником логики как науки является древнегреческий философ и ученый Аристотель (384— 322 гг. до н. э.). Он впервые разработал теорию дедукции, т.е. теорию логического вывода. Именно он обратил внимание на то, что в рассуждениях мы из одних утверждений выводим другие, исходя не из конкретного содержания утверждений, а из определенной взаимосвязи между их формами и структурами.

Древнегреческий математик Евклид (330 — 275 гг. до н.э.) впервые предпринял попытку упорядочить накопившиеся к тому времени обширные сведения по геометрии, взглянув на эту науку с общелогических позиций. Он положил начало осознанию геометрии как аксиоматической теории, а всей математики — как совокупности аксиоматических теорий, впервые на практике реализовав восходящие к Платону и Аристотелю идеи аксиоматической организации всякого научного знания.

На протяжении многих веков различными философами и целыми философскими школами дополнялась, усовершенствовалась и изменялась логика Аристотеля. Это был первый этап развития формальной логики. Второй этап связан с применением в логике математических методов, начало которому положил немецкий философ и математик Г.Лейбниц (1646—1716). Ни пытался построить универсальный язык, с помощью которого можно было бы решать споры между людьми, а затем и вовсе все "Идеи заменить вычислениями».

Важный период становления математической логики начинайся с появления работ английского математика и логика Д. Буля (1815—1864) «Математический анализ логики» (1847) и "Исследование законов мышления» (1854). Он применил к логике методы современной ему алгебры — язык символов и формул, составление и решение уравнений. Им была создана алгебра логики. В этот период она оформилась как алгебра высказываний и была значительно развита в работах А. де Моргана (1806—1871), У.Джевонса (1835—1882), американского логика Ч.Пирса 11JU9—1914), немецкого алгебраиста и логика Э. Шредера (1841—1902), русского математика, астронома и логика П. С. Порецкого (1846 - 1907) . Алгебра логики поставила и решила в самом общем виде те задачи, которые рассматривались в аристотелевской логике. Формальная логика в результате использования в ней развитого символического языка окончательно сформировалась как логика символическая.

Значительным толчком к новому периоду развития математической логики послужило создание в первой половине XIX в. И.Лобачевским (1792-18561) и венгерским математиком Я. Бояи (1802— 1860) неевклидовой геометрии. Кроме того, создание анализа бесконечно малых привело к необходимости обоснования понятия числа. Довершали картину парадоксы (антиномии), обнаруженные в конце XIX в. в теории множеств: они отчетливо показали, что трудности обоснования математики являются трудностями логического и методологического характера. Таким образом, перед математической логикой встали задачи, которые перед логикой Аристотеля не возникали: она должна была исследовать основания математической науки, исследовать математику как совокупность аксиоматических теорий, исследовать аксиоматический метод построения математических теорий. В ходе развития математической логики сформировались три направления обоснования математики, создатели которых по-разному пытались преодолеть возникшие в математике трудности. В каждом из них были получены фундаментальные результаты, оказавшие влияние на развитие не только математической логики, но и всей математики.

Основоположником одного из направлений — *логицизма* — явился немецкий математик и логик Г. Фреге (1848 —1925). Он стремился всю математику обосновать через логику, применил аппарат математической логики для обоснования арифметики, построив первую формальную логическую систему, включавшую значительную часть арифметики. Кроме того, им и независимо от него Ч. Пирсом были введены в язык логики предикаты, предметные переменные и кванторы, что дало возможность применить этот язык к вопросам обоснования математики. Задачу аксиоматического построения арифметики, геометрии и математического анализа ставил перед собой итальянский математик Дж. Пеано (1858—1932). Сведение чистой математики к логике продолжили в своем трехтомном труде «Основания математики» (1910 — 1913) английские математики Б.Рассел (1872—1970) и А.Уайтхед (1861 —1947). Данное направление не увенчалось полным успехом (в частности, оказалось невозможным вывести из чисто логических аксиом существование бесконечного множества), однако был создан богатый логический аппарат, без которого математическая логика не смогла бы оформиться как полноценная математическая дисциплина.

Немецкий математик Д. Гильберт (1862— 1943) предложил свой путь преодоления трудностей в основаниях математики, базирующийся на применении аксиоматического метода, с помощью которого все математические утверждения записываются в виде логических формул, некоторые из которых выделяются в качестве аксиом, а остальные логически из них выводятся. Это направление получило название *формализм.* Открытие в 1930 —1931 гг. австрийским математиком К.Гёделем (1906—1978) неполноты формализованной арифметики показало ограниченность гильбертовской программы обоснования математики. Тем не менее работы Гильберта и его последователей привели к глубокой разработке аксиоматического метода и окончательному осознанию его фундаментальной роли в математике.

Представители направления, возникшего в начале XX в. благодаря трудам голландского математика Л.Брауэра (1881 — 1966) и получившего название *интуиционизм,* предложили отказаться от рассмотрения бесконечных множеств как завершенных совокупностей, также от закона исключенного третьего. Ими признавались только такие математические доказательства, которые конструктивно строили тот или иной объект, и оспаривались чистые доказательства существования. Они построили специфическую математику, имеющую интересные особенности, еще раз подчеркнули различие между конструктивным и неконструктивным в математике.

XX в. — время бурного развития математической логики, формирование многих ее новых разделов: построены различные аксиоматические теории множеств; на базе математической логики сформирована теория алгоритмов, с помощью которой были выработаны несколько формализаций понятия алгоритма. Теория алгоритмов получила такое развитие, что ее методы стали проникать в друга разделы математической логики и в смежные математические дисциплины. В другие разделы математики стала проникать и сама математическая логика.

Примером может быть теория моделей, возникшая на стыке современной алгебры и логики. Следует отметить и стандартный подход к математическому анализу. Были созданы многочисленные новые неклассические логические системы. Немалый вклад в развитие математической логики внесли и советские математики Н. А. Васильев, И. И. Жегалкин, А. Н. Колмогоров, II С Новиков, А. А.Марков, А. И. Мальцев, С. А.Яновская. Кроме того, XX в. — это период начала глубокого проникновения идей и методов математической логики в технику, прежде всего в процесс конструирования и создания ЭВМ, в программирование, кибернетику, вычислительную математику, структурную лингвистику.

Математическая логика — логика или математика? Вопрос о взаимоотношении логики и математики в математической логике издавна интересовал философов, близких к математике, и математиков, близких к философии. Является ли математическая логика в традиционном (философском) понимании логикой, т.е. изучает ли она формы мышления и методы, с помощью которых люди обычно делают выводы, или же она является чисто математической дисциплиной со своим абстрактным аппаратом, не имеющим ничего общего с реальным процессом мышления?

Доказанная в 1931 г. австрийским математиком и логиком К. Гетте (1906— 1978) теорема о неполноте формальной арифметики с большой силой показала, что математическая логика — это прежде всего логика и что к человеческому мышлению эта наука имеет самое непосредственное отношение. Пришло понимание того, что совершенно безнадежно рассчитывать на возможность создания полной и непротиворечивой системы аксиом для арифметики или какой-либо теории, содержащей арифметику. (Полнота системы аксиом означает, что, исходя из нее, можно вывести все истинные предложения данной науки.) Из этого следует, что аксиоматический подход к арифметике натуральных чисел не в состоянии охватить всю область истинных арифметических утверждений. Отсюда также вытекает, что то, что обычно интуитивно понимается под процессом математического доказательства, не сводится к использованию аксиоматического метода и законов традиционной и математической логики. Этот самоограничительный закон логики удалось установить только с помощью математической логики, что является убедительнейшим доказательством непосредственного отношения математической логики к мышлению и законам, по которым оно работает.

Известный российский логик П. С. Порецкий точно подметил, что математическая логика по предмету своему есть логика, а по методу — математика.

Математическая логика в обучении математике. Логика и математика в процессе обучения математике взаимодействуют неизбежно. Важно, чтобы это дидактическое взаимодействие не было стихийным, а сознательно организовывалось и направлялось педагогом. В нем можно выделить два аспекта. Во-первых, при обучении математике логика выступает как инструмент педагогики математики, т.е. как инструмент изучения математики. Для педагогики математики логика — это особый инструмент, причем это не метод, не средство и не форма обучения, а именно инструмент. Во-вторых, логика (как своеобразная часть математики) предстает как предмет педагогики математики, т.е. как объект, изучаемый в рамках математики и с помощью математики. Но и в этом своем качестве логика выступает как педагогика математики, ибо изучение логики с помощью математического материала в конечном итоге способствует более осознанному и глубокому изучению самой математики.

Чтобы сделать логику действенным инструментом процесса обучения математике, необходимо соблюдать ряд принципов — тех общих положений, связанных с логикой, которые имеют фундаментальное значение для методики обучения математике. Эти принципы отражают основные направления проникновения логики в методику, и их нарушение или несоблюдение их в процессе обучения математике приведет в итоги к искаженному видению обучаемым как общей картины математики, так и отдельных ее деталей.

1. *Принцип обучения строению (структуре) математических утверждений.* Здесь в первую очередь необходимо научиться видеть логическую структуру математического утверждения, будь то определение или теорема, отчетливо видеть, где и как логические связки участвуют в формулировке. При этом, если это определение понятия, то важно установить, какого оно типа — через ближайший род и видовое отличие, индуктивное, рекуррентное, генетическое или аксиоматическое. Если это теорема, то необходимо четко уяснить, что в ней дано и что требуется доказать, каковы структура условий и структура заключения. Важно также понимание сути необходимых и достаточных Условий, прямой и обратной теорем и их различных видов. Кроме того, необходимо научиться определять, какие утверждения равносильны каким, т.е. научиться преобразовывать структуру математического утверждения равносильным образом. Чем больше усвоено логических равносильностей, тем выше логическая культура учителя.

2.Принцип обучения понятию доказательства математической теоремы. В этом случае важно уяснить, что доказательство теоремы — это последовательность (цепочка) Утверждений, каждое из которых есть либо условие теоремы, либо аксиома, либо получено из двух предыдущих утверждений последовательности по правилу вывода: из утверждений А и $A \rightarrow B$ Следует утверждение В. Построив такую цепочку, мы доказывав, что из А выводится В, в результате чего делаем вывод, что справедлива теорема $A \rightarrow B$. Обоснованием этому переходу служит логическая теорема

по дедукции. Всякий раз при доказательстве теоремы нужно стремиться к тому, чтобы цепочка последовательных утверждений вырисовывалась в сознании учащегося как можно более отчетливо.

3.Принцип обучения методам доказательства математических теорем.

В первую очередь необходимо, научиться методам построения цепочки утверждений $A = A_1, A_2, ..., A_n = B$ для доказательства теоремы $A \rightarrow B$. Синтетический (или прямой) метод — построение цепочки в прямом направлении, т.е. от A к B. Аналитический метод (или метод восходящего анализа) — построение цепочки в обратном направлении, т.е. от B к A. Далее необходимо уяснить, что для доказательства теоремы $A \rightarrow B$ достаточно доказать теорему $\neg B \rightarrow \neg A$ или $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$ или $(A \wedge \neg B) \rightarrow B$ (варианты метода доказательства от противного), вместо теоремы A достаточно доказать теорему $(\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)) \rightarrow A$ (метод приведения к абсурду), а вместо теоремы $A \rightarrow C$ — две теоремы $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$ (метод цепного заключения) и г. д.

4.*Принцип обучения строению математических теорий.* Имеется в виду уяснение сути аксиоматического метода при построении математической теории и при ее преподавании, а также уяснение сути первоначальных (неопределяемых) понятий теории, аксиом и теорем, вплоть до метатеории (свойств этой теории) - непротиворечивости, полноты, категоричности, независимости системы аксиом. Важно также знание аксиоматических теорий, лежащих в основе школьных математических курсов: аксиоматических построений геометрии на основе систем аксиом Евклида, Гильберта, Вейля и т.д.; аксиоматической теории числовых систем как основания школьного курса алгебры и начал анализа.

Математическая логика помогает обосновать и облегчает применение указанных логических принципов. Они должны органично войти в сознание всякого преподающего и изучающего математику, так как при несоблюдении данных принципов при обучении математике изучаемый предмет рискует утратить те качества и черты, которые, собственно, и выделяют его из системы прочих наук.

Математическая логика и современные ЭВМ. Широчайшее распространение компьютеров, проникших буквально во все сферы жизни, связано с насущной проблемой развития и поддержания массовой компьютерной культуры, начиная с самого раннего возраста. Важно, чтобы росло понимание возможностей компьютера и умение взаимодействия с ним, чтобы молодые люди развивали свои способности и умение мыслить алгоритмически, т.е. отчетливо и однозначно могли определять последовательность своих действий при решении той или иной задачи. Развитие мышления в области математических наук всегда было в наибольшей степени алгоритмичным по сравнению с прочими науками, тем не менее всеобщая компьютеризация еще более отчетливо выявила эту сторону математического мышления. Математическая логика, в частности ее раздел, посвященный теории алгоритмов, являются важнейшими составляющими теоретических основ алгоритмического мышления. Не менее тесная связь методов математической логики и современных компьютеров прослеживается по следующим двум направлениям. Эти методы используются как при физическом конструировании и создании компьютеров (алгебра высказываний и булевы функции — математический аппарат для конструирования переключательных и функциональных схем, составляющих элементную базу компьютеров), так и при создании математического обеспечения к ним. В основе многочисленных языков программирования лежат теория алгоритмов, теория формальных систем, логика предикатов. Например, название языка ПРОЛОГ означает сокращение от слов «Программирование Логическое». Кроме того, синтез лорики и компьютеров привел к возникновению баз данных и экспертных систем, что явилось важнейшим этапом на пути к созданию искусственного интеллекта — машинной модели человеческого разума.

5.2 АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Высказывание — первый важнейший объект изучения математической логики. Алгебра высказываний изучает способы построения высказываний из уже имеющихся высказываний, закономерности таких способов сочетания высказываний. Алгебра высказываний является фундаментом математической логики.

§ 1. Высказывания и операции над ними

Понятие высказывания. Предметом исследования алгебры высказываний являются высказывания. Но из многочисленных свойств высказывания алгебру высказываний интересует лишь одно: истинно оно или ложно. Именно это и является определяющим свойством высказывания. Высказыванием называется такое предложение, которое либо истинно, либо ложно. Высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

Совокупность некоторых простейших высказываний, называется элементарной или исходной. Причем в этой совокупности имеются как истинные высказывания, так и ложные. Высказывания обозначаются начальными заглавными буквами латинского алфавита *A, B, C, D, ...* или теми же буквами с индексами внизу.

Примеры высказываний:

A_1 : «Москва — столица России»;

A_2 : «Саратов находится на берегу Невы»;

A_3 : «Все люди смертны»;

A_4 : «Сократ — человек»;

A_5 : «7 < 4»;

A_6 : «Волга впадает в Каспийское море»;

Обозначив истинное высказывание символом 1, а ложное — О, введем функцию λ, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$, по следующему правилу: $\neg$

Функция λ называется *функцией истинности,* а значение $\lambda(P)$ — *логическим значением* или *значением истинности* высказывания Р. Для приведенных высказываний имеем логические значения $\lambda(A_1)=1, \lambda(A_2)=0, \lambda(A_3)=1, \lambda(A_4)=1, \lambda(A_5)=0, \lambda(A_6)=1$

Отрицание высказывания. *Определение 1.1*[1] *Отрицанием* высказывания Р называется новое высказывание, обозначаемое .$\neg$P (читается: «не Р» или «не верно, что Р»), которое истинно, если высказывание Р ложно, и ложно, если высказывание Р истинно. Другими словами, логическое значение высказывания. Р связано с логическим значением высказывания Р, как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции отрицания:*

$\lambda(P)$	$\lambda(\neg P)$
0	1
1	0

Здесь может возникнуть вопрос, почему приписывание истинности или ложности высказыванию *Р* осуществляется именно на основании приведенной таблицы. Конечно, можно ответить, что об определениях не спорят. Но ведь мы желаем построить математическую теорию (алгебру высказываний), которая в какой-то мере отражала бы реально существующий в природе человеческого мышления процесс построения составных высказываний из элементарных и имела бы реальный смысл. Затем мы должны будем развить нашу математическую теорию, а полученные выводы применить в практике мышления и при этом не войти в противоречие с общеизвестными законами мышления. Определение отрицания с помощью приведенной таблицы (как, впрочем, и других логических связок с помощью соответствующих таблиц, о чем речь пойдет далее) появилось как результат длительного опыта, и оно полностью оправдало себя на практике.

Пример 1.2. Применим операцию отрицания к высказыванию A_6 *:* «Волга впадает в Каспийское море». Данное отрицание можно читать так: «Неверно, что A_6» т.е. «Неверно, что Волга впадает в Каспийское море». Или же частицу «не» переносят на такое место (чаще всего ставят перед сказуемым), чтобы получилось правильно составленное предложение:

«Волга не впадает в Каспийское море». Таблица из определения 1.1 дает для данного высказывании следующее логическое значение: $\lambda(\neg A_6) = \neg\lambda(A_6) = \neg 1 = 0$, т.е. высказывание A_6 ложно. Ложность высказывания A_6 обусловлена только истинностью исходного высказывания A_6 и определением 1.1, но никак не соображениями смысла (содержания) высказывания A_6. Другое дело, что само определение 1.1 потому и имеет такую формулировку, что оно правильно (или, как говорят, адекватно) отражает факты, известные нам из практики.

Конъюнкция двух высказываний. *Определение 1.3. Конъюнкцией* двух высказываний Р и *Q* называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ или *P&.Q* , которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания Р и *Q,* и ложно во всех остальных случаях. Другими словами, логическое значение высказывания Р и *Q* связано с логическими значениями высказываний Р и *Q,* как указано в, следующей таблице называемой *таблицей истинности опершиий конъюнкции:*

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \vee Q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Практика полностью подтвердила, что именно такое распределение значений истинности наиболее соответствует тому смыслу, который придается в процессе мыслительной деятельности связующему союзу «и».

Пример 1.4. Применим операцию конъюнкции к высказываниям A_2 *и* A_3. Получим высказывание $A_2 \wedge A_3$*:* «Саратов находится на берегу Невы, и все люди смертны». Конечно, мы не воспринимаем это высказывание как истинное из-за первой, ложной, его части. К выводу о ложности полученного высказывания также придем, исходя из логических значений исходных высказываний A_2 и A_3 и определения 1.3 конъюнкции на основании приведенной там таблицы. В самом деле $\lambda(A_2 \wedge A_3) = \lambda(A_2)\lambda(A_3) = 0 \wedge 1 = 0$.

Дизъюнкция двух высказываний. *Определение 1.5. Дизъюнкцией* двух высказываний *P и Q* называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$ (читается *«P* или Q»), которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний *P* или *Q* истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания *P* и *Q* ложны. Другими словами, $P \vee Q$ — такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний *P* и *Q* так, как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции дизъюнкции:*

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \vee Q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример 1.6. Применим операцию дизъюнкцию к высказываниям A_3 и A_5. Получим составное высказывание $A_3 \vee A_5$*:* «Все люди смертны, или 7< 4». Несмотря на первоначально кажущуюся странность этого высказывания, нет сомнений в его истинности. К аналогичному заключению приводит также формальное вычисление логического значения данного высказывания по таблице из определения 1.5, исходя из логических значений высказываний A_3 и A_5: $\lambda(A_3 \vee A_5) = \lambda(A_3) \vee \lambda(A_5) = 1 \vee 0 = 1$. В то же время высказывание «Саратов находится на берегу Невы, или А. С. Пушкин — великий русский математик», являющееся дизъюнкцией высказываний A_2 и A_7, безусловно, ложно, что полностью согласуется с формальным вычислением его логического значения по таблице из определения 1.5: $\lambda(A_2 \vee A_7) = \lambda(A_2) \vee (A_7) = 0 \vee 0 = 0$.

Импликация двух высказываний. *Определение 1.7. Импликацией двух* высказываний *P и Q* называется новое высказывание, обозначаемое $P \to Q$

(читается: «если *P,* то *Q»,* или «из *P* следует *Q*», или *«P* влечет *Q»,* или *«P* достаточно для *Q»,* или *«Q* необходимо для *P»),* которое ложно в единственном случае, когда высказывание *P* истинно, а *Q* — ложно, а во всех остальных случаях — истинно. Другими словами, логическое значение высказывания $P \to Q$ связано с логическими значениями высказываний *P и Q,* как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции импликации:*

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \to Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В высказывании $P \to Q$ высказывание *P* называется посылкой или антецедентом, а высказывание *Q* — следствием или консеквентом.

При определении импликации с еще большей силой встает вопрос, почему именно такое распределение принято в ее таблице истинности. Последние две строки в ней достаточно хорошо согласуются с нашим пониманием выражения *«если..., то...».* Их обоснованием могут служить следующие соображения. Импликация призвана отразить процесс рассуждения, умозаключения. Общая характеристика этого процесса следующая. Если мы исходим из истинной посылки и правильно (верно) рассуждаем, то мы приходим к истинному заключению (следствию, выводу). Другими словами, если мы исходили из истинной посылки и пришли к ложному выводу, значит, мы неверно рассуждали. В импликации $P \to Q$ имеется посылка *P,* следствие *Q* и процесс рассуждения $\to$. Процесс рассуждения как раз и моделируется результатом операции $P \to Q$. Приведенное соображение служит обоснованием результата $1 \to 0 = 0$, а также результата $1 \to 1 = 1$.

Определенные сомнения возникают при оценке адекватности первых двух строк в таблице, определяющей импликацию. В первой строке при ложной посылке и ложном следствии импликация признается истинной. Следующие два примера добавляют аргументы в пользу такого определения логического значения импликации в этом случае. Рассмотрим такое высказывание: «Если число делится на 5, то и его квадрат делится на 5». Его истинность не вызывает сомнения. В частности, мы могли бы сказать: «Если 10 делится на 5, то 10^2 делится на 5» или «Если 11 делится на 5, то и 11^2 делится на 5». В первом из этих высказываний и посылка, и следствие истинны, во втором — и посылка, и следствие ложны. Тем не менее, оба этих высказывания истинны. Для большей убедительности второе высказывание можно сформулировать в сослагательной форме: «Если бы 11 делилось на 5, то и 11^2 делилось бы на 5». Есть утверждения такого типа и в житейской речи, которые признаются вполне нормальными. Например, «Если ты можешь переплыть Черное море, то я — турецкий султан».

В пользу второй строки таблицы, когда импликация остается истинной при ложной посылке и истинном следствии, говорит такой пример. Высказывание «Если первое слагаемое делится на 5 и второе слагаемое делится на 5, то и сумма делится на 5», несомненно, истинно. Но, в частности, мы могли бы сказать: «Если 10 делится на 5 и 20 делится на 5, то 30 делится на 5» или «Если 12 делится на 5 и 13 делится на 5, то 25 делится на 5». В первом из этих высказываний и посылка истинна (как конъюнкция двух истинных выражений), и следствие истинно. Во втором же высказывании посылка ложна (как конъюнкция двух ложных высказываний), а следствие истинно. Тем не менее, как мы уже отметили, оба этих высказывания признаются истинными.

Пример 1.8. Высказывание $A_6 \to A_5$: «Если Волга впадает в Каспийское море, то 7 < 4» ложно, так как $\lambda(A_6 \to A_5) = \lambda(A_6) \to \lambda(A_5) = 1 \to 0 = 0$. Высказывание «Если Саратов находится на берегу Невы, то А. С. Пушкин — великий русский математик», являющееся импликацией высказываний $A_2 \to A_7$ истинно, так как $\lambda(A_2 \to A_7) = \lambda(A_2) \to \lambda(A_7) = 0 \to 0 = 1$.

Эквивалентность двух высказываний. *Определение 1.9. Эквивалентностью* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \leftrightarrow Q$ (читается: «P эквивалентно Q», или «P необходимо и достаточно для *Q»,* или «P тогда и только тогда, когда *Q»,* или «P, если и только если Q»), которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания P и Q либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях — ложно. Другими словами, логическое значение высказывания P $\leftrightarrow Q$ связано с логическими значениями высказываний P и Q, как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции эквивалентности:*

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \leftrightarrow Q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример 1.10. Высказывание «7 < 4 тогда и только тогда, когда снег белый», являющееся эквивалентностью высказываний A_5 и A_8. ложно, так $\lambda(A_5 \leftrightarrow A_8) = \lambda(A_5) \leftrightarrow \lambda(A_8) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$. Напротив, высказывание «Саратов находится на берегу Невы, если только если А. С. Пушкин — великий русский математик» истинно, так как оно является эквивалентностью двух ложных высказываний.

Союзы языка и логические операции (язык и логика). Итак, каждая из введенных логических операций является неким математическим образом, моделью соответствующего логического союза нашего языка. Эти понятия призваны отразить на языке нулей и единиц соответствующие союзы нашего мышления, которыми человечество пользуется в течение тысячелетий. Вне всякого сомнения, язык нулей и единиц значительно беднее человеческого языка, и это отражение достаточно грубо и несовершенно. Тем не менее, какие-то основные черты (существенные аспекты процессов мышления) понятия логических операций все же отражают. Так, отрицание, конъюнкция и эквивалентное достаточно точно передают суть логических союзов «не», *«и»* *«тогда и только тогда, когда»* соответственно. Хуже обстоит дело с дизъюнкцией, призванной отразить языковый союз *«или».* Следует отметить, что кроме рассматриваемой так называемой *дизъюнкции в не исключающем смысле* (она истинна тогда и толь тогда когда, по меньшей мере, один ее член истинен) некоторые авторы рассматривают дизъюнкцию в исключающем смысле (и. строгую дизъюнкцию): она истинна тогда и только тогда, когда истинен точно один ее член.

Наименее адекватным соответствующему союзу языка является понятие импликации, которое призвано отразить логический союз *«если..., то...».* Это и понятно: на этом союзе основан один из сложнейших умственных процессов — процесс построения выводов, умозаключений. Импликация остается все же самой «коварной» из всех логических операций, и ее определение при всех приведенных доводах оставляет в нас чувство незавершенности. И это неспроста. Наиболее наглядно эта неадекватность определения языку проявится в ходе развития алгебры высказываний, когда мы, например, придем к тому, что тавтологией окажется следующая форму: $(P \to Q) \vee (P \to Q)$. Это означает, что какие бы ни были высказывания P и Q, по меньшей мере одно из высказываний P $\to Q$ и $Q \to$ P непременно будет истинным. Этот факт уже не согласуется с общепринятой практикой, и он еще раз подтверждает, что понятие импликации лишь весьма условно и приблизительно переводит на язык нулей и единиц тот смысл, который имеется в виду при построении фразы типа *«если..., то...».*

Из приведенного следует вывод о том, что тонкое и многообразное человеческое мышление не так легко поддается научно осмыслению и изучению и что алгебра высказываний — всего лишь одно из приближений, всего лишь шаг на пути к познанию человеческого мышления.

По поводу происхождения терминов отметим, что «конъюнкция» происходит от лат. *conjunctio* — соединение, дизъюнкция — от лат. *dusjunctio* —

разъединение, импликация от лат. *implicatio* — сплетение и *implico* — тесно связываю.

Общий взгляд на логические операции. Еще раз отметим, что только логические значения или значения истинности, а не их содержание интересуют нас в развиваемой теории. Поэтому каждое из введенных определений (1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9) операций над высказываниями можно рассматривать как определение некоторого действия над символами 0 и 1, т.е. как определение некоторой операции на двухэлементном множестве {0, 1}. Например, отрицание задает следующие правила действия с этими символами: .0 = 1, 1 = 0, конъюнкция — следующие: $0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$, импликация — следующие: $0 \to 0 = 1$, $0 \to 1 = 1$, $1 \to 0 = 0$, $1 \to 1 = 1$ и т.д.

Учитывая два правила действия с символами 0 и 1, определяемые отрицанием, можно записать равенство для вычисления логического значения высказывания P:

$$\lambda(\neg P) = \neg\lambda(P) \qquad (1.1)$$

Указанные четыре правила действия с символами 0 и 1, определяемые конъюнкцией, позволяют записать равенство для вычисления логического значения высказывания P $\wedge$ *Q:*

$$\lambda(P \wedge Q) = \lambda(P) \wedge \lambda(Q) \qquad (1.2)$$

Аналогично, правила действия с символами 0 и 1, сформулированные в определениях 1.5, 1.7, 1.9, дают возможность записать равенства для вычисления логических значений высказываний PvQ, P $\to$ Q и P$\leftrightarrow$ Q соответственно:

$$\lambda(P \vee Q) = \lambda(P) \vee \lambda(Q) \qquad (1.3)$$

$$\lambda(P \to Q) - \lambda(P) \to \lambda(Q) \qquad (1.4)$$

$$\lambda(P \leftrightarrow Q) = \lambda(P) \leftrightarrow \lambda(Q) \qquad (1.5)$$

Равенства (1.2) ... (1.5) можно записать в виде одного соотношения $\lambda(P * Q) = \lambda(P) * \lambda(Q)$, где значок «*» обозначает один из символов логических операций.

§ 2. Формулы алгебры высказываний

Конструирование сложных высказываний. С помощью логических операций, рассмотренных в § 1, из простейших высказываний можно строить высказывания более сложные. Например, из высказываний A_2, A_3, A_7 можно построить такое высказывание: «Если Саратов находится на берегу Невы и все люди смертны, то А. С. Пушкин — великий русский математик». Построенное высказывание символически записывается так: $(A_2 \wedge A_3) \to A_7$,. Конечно, оно звучит несколько странно, поскольку соединяет в себе столь разнородные понятия, которые обычно существуют раздельно друг от друга. Но нас, еще раз подчеркиваем, интересует не содержание этого высказывания, а его логическое значение. Оно может быть определено, исходя из логических значений исходных высказываний A_2, A_3, A_7 и той схемы, по которой из исходных высказываний построено сложное высказывание. Так как $\lambda(A_2) = 0; \lambda(A_3) = 1; \lambda(A_7) = 0$ то, используя соотношения (1.4), (1.2) и определения 1.7, 1.3, находим:

$$\lambda[(A_2 \wedge A_3) \to A_7] = \lambda(A_2 \wedge A_3) \to \lambda(A_7) = (\lambda(A_2) \wedge \lambda(A_3)) \to \lambda(A_7) = (0 \wedge 1) \to 0 = 0 \to 0 = 1$$

. Итак, высказывание $(A_2 \wedge A_3) \to A_7$, истинно. Для конструирования данного сложного высказывания из простейших высказываний A_2, A_3 и A_7 нужно применить операцию конъюнкции к первым двум высказываниям, а затем к полученному высказыванию и к третьему исходному высказыванию применить операцию импликации. Это словесное описание схемы конструирования данного сложного высказывания можно заменить описанием символическим: $(X \wedge Y) \to Z$, где X, Y, Z — некоторые символы (переменные), вместо которых можно подставить любые конкретные высказывания. Такая схема конструирования составного высказывания может быть применена к различным конкретным высказываниям, а не только к высказываниям A_2, A_3, A_7.

Символическая запись $(X \wedge Y) \to Z$ является своего рода формулой.

Понятие формулы алгебры высказываний. В формулу $(X \wedge Y) \to Z$ вместо переменных X, Y, Z можно подставлять конкретные высказывания, после чего вся формула будет превращаться в некоторое составное высказывание. Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, т.е. переменные, пробегающие множество высказываний, называют пропозициональными переменными, или высказывательными переменными. Будем обозначать пропозициональные переменные заглавными буквами латинского алфавита P, Q, R, S, X, Y, Z или такими же буквами с индексами P_1 P_2, ..., Q_1, Q_2,… , X_1, X_2, ..., Y_1 Y_2, ... Дадим точное определение формулы алгебры высказываний.

Определение 2.1

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная есть формула алгебры высказываний.
2. Если F_1 и F_2 — формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg F_1, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \to F_2), (F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами алгебры высказываний.
3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме получающихся согласно п. 1 и 2, нет.

Определения такого типа называются индуктивными. В них имеются прямые пункты (в данном случае п. 1 и п. 2), где задаются объекты, которые в дальнейшем именуются определяемым термином, и косвенный, в котором говорится, что такие объекты исчерпываются объектами, заданными в прямых пунктах. Среди прямых пунктов имеются базисные пункты, где указываются некоторые конкретные объекты, именуемые в дальнейшем определяемым термином, и индуктивные пункты, где даются правила получения определяемых объектов, в частности из объектов, перечисленных в базисных пунктах.

В данной главе формулы алгебры высказываний будем называть просто формулами. Есть и другие названия для понятия формулы: правильно построенная формула или правильно построенное выражение

Для каждой формулы должна существовать конечная последовательность всех ее подформул, т. е. такая конечная последовательность, которая начинается с входящих в данную формулу пропозициональных переменных, заканчивается самой этой формулой, и каждый член этой последовательности, не являющийся пропозициональной переменной, есть либо отрицание уже имеющегося члена этой последовательности, либо получается из двух уже имеющихся членов этой последовательности их соединением с помощью одного из знаков $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ и заключением полученного выражения в скобки. Такую последовательность всех подформул данной формулы называют порождающей последовательностью для данной формулы. Наличие такой последовательности у логического выражения служит критерием того, что выражение является формулой. Это свойство отличает формулы.

Примеры:

На основании п. 1 определения 2.1 формулами будут пропозициональные переменные: P, Q, R, X, Z; P_1 P_2, ..., Q_1 Q_2, ..., X_1 X_2, ...

На основании п. 2 того же определения из этих формул построим следующие- $\neg P, Q, \neg X, \neg Y, \neg Z, (R \vee P), (X \wedge Y), (X \rightarrow Z), (Q \leftrightarrow R), (X \vee Y)$.

Приведем примеры выражений, не являющихся формулами:

Рассмотрим выражение (XY). Это было бы формулой, если бы между формулами *X и Y*стоял один из знаков логических связок. Но такого знака нет. Значит, выражение *(XY)* не формула. Таким образом, индуктивный характер определения 2.1 дает возможность эффективно решать для каждого выражения, является оно формулой алгебры высказываний или нет.

Требование внешних скобок у формулы не является излишним формализмом. Тем не менее, внешние скобки придают формуле громоздкость и, если данная формула не входит составной частью в более сложную формулу, не несут никакой информации и смысловой нагрузки. Поэтому внешние скобки в окончательно записанной формуле договариваются опускать. Например, формулу $((X \wedge Y) \rightarrow Z)$ будем записывать в виде $(X \wedge Y) \to Z$. Но если данная формула должна будет войти составной частью в более сложную формулу, то сначала заключаем ее во внешние скобки и только потом отправляем в процедуру построения новой формулы.

Логическое значение составного высказывания.

Если в формулу алгебры высказываний $F(X_1, X_2, ...X_n)$ вместо пропозициональных переменных X_1 $X_2, \ldots$ X_n, подставить конкретные высказывания A_1, A_2, ..., A_n соответственно, то получится некоторое новое составное высказывание $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Оно называется конкретизацией формулы $F(X_1, X_2, ...X_n)$ на выборе высказываний A_1, A_2, ..., A_n. Рассмотрим как определить логическое значение $\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n))$ полученного составного высказывания, если известны логические значения $\lambda(A_1)$, $\lambda(A_2)$, ..., $\lambda(A_n)$ исходных высказываний A_1, A_2, ..., A_n.

Так, каждое ложное высказывание можно рассматривать как элемент 0, а каждое истинное — как элемент 1 двухэлементного множества {0, 1},, и писать вместо $\lambda(P) = 0$ или $\lambda(P) = 1$ лишь только $P = 0$ или $P = 1$ соответственно. Далее, если формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ при подстановке вместо ее пропозициональных переменных X_1 $X_2, \ldots$ X_n высказываний A_1, $A_2, \ldots, A_n$ с логическими значениями $\lambda(A_1) = \alpha_1, \lambda(A_2) = \alpha_2, ...\lambda(A_n) = \alpha_n$ превращается в высказывание $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ с логическим значением $\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = \alpha$, то будем говорить, что формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ принимает значение α, если ее переменные X_1 $X_2, \ldots$ X_n принимают значения $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in \{0,1\}$ соответственно, и писать $X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2, ...X_n = \alpha_n$ и $F(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) = \alpha$, где $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in \{0,1\}$. Для нахождения значения $F(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ нужно подставить в формулу $F(X_1, X_2, ...X_n)$ значения $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$, соответственно и в полученном выражении последовательно проделать все действия с нулями и единицами, предписываемые правилами таблиц из определений 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9. В результате получим 0 или 1. Полученное значение будем обозначать $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\alpha_n)$ и называть значением данной формулы $F(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ на данном наборе нулей и единиц $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\alpha_n$.

Например, вычислим значение формулы $F(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n) \equiv (X_1 \to \neg X_2) \wedge (X_1 \leftrightarrow (X_2 \vee \neg X_3))$ на наборе 0,1,1: $F(0,1,1) = (0 \to \neg 1) \wedge (1 \leftrightarrow (0 \vee \neg 1)) = (0 \to 0) \wedge (1 \leftrightarrow (0 \vee 0)) = 1 \wedge (1 \leftrightarrow 0) = 1 \wedge 0 = 0$

Теорема 2.2. Логическое значение составного высказывания $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ равно значению формулы $F(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ на наборе $\lambda(A_1) = \alpha_1, \lambda(A_2) = \alpha_2, \ldots\ldots \lambda(A_n) = \alpha_n$ логических значений составляющих высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т.е.

$\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = F(\lambda(A_1) = \alpha_1, \lambda(A_2) = \alpha_2, \ldots\ldots \lambda(A_n) = \alpha_n)$.

Доказательство.

Докажем утверждение методом полной математической индукции. Если формула $F(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ содержит 0 символов логических операций, то она представляет собой просто пропозициональную переменную, скажем, X_1 т.е. $F(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n) \equiv \mathrm{X}_1$.Тогда доказываемое соотношение сводится к тривиальному равенству: $\lambda(A_1) = \lambda(A_1)$.

Если формула $F(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ содержит лишь один символ логической операции, то она является одной, из следующих формул: $\neg X_1, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \to X_2, X_1 \leftrightarrow X_2)$. В этих случаях доказываемое равенство есть одно из равенств (1.1) —(1.5).

Предположим , что утверждающееся в теореме равенство верно для всех формул алгебры высказываний, содержащих не более к символов логических операций. Докажем, что оно верно для формулы $F(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$, содержащей к + 1 символов логических операций. На основании определения 2.1 формула F имеет один из следующих видов: $\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \to F_2, F_1 \leftrightarrow F_2)$ где F_1, F_2 — некоторые формулы, каждая из которых содержит уже не более к символов логических операций. Нужно провести доказательство для всех пяти случаев. Но в силу принципиальной идентичности этих доказательств проделаем его, например, для случая $F \equiv F_1 \wedge F_2$. Вычисляем: $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = \lambda(F_1(A_1, A_2, ..., A_n)) \wedge F_2(A_1, A_2, ..., A_n) = \lambda(F_1(A_1, A_2, ..., A_n)) \wedge \lambda(F_2(A_1, A_2, ..., A_n)) =$ $F_1(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ...\lambda(A_n)) \wedge F_2(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ...\lambda(A_n)) .= F_1(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ...\lambda(A_n))$ В проделанных вычислениях второе равенство основано на определении 1.3 логической операции конъюнкции. Третье равенство основано на предположении индукции о том, что для формул F_1 и F_2 соотношение теоремы выполняется. Наконец четвертое равенство записано на основании того, что $F \equiv F_1 \wedge F_2$.

Аналогичным образом соотношение теоремы доказывается и во всех остальных случаях конструирования формулы .F из формул

F_1 и F_2.

Следовательно, утверждение теоремы верно для любой формулы F алгебры высказываний.

Итак, здесь необходимо понять, что логическое значение составного высказывания по существу является значением некоторого (логического) выражения при некотором наборе конкретных значений всех входящих в него (пропозициональных) переменных. При этом пропозициональные переменные могут принимать значения 0 или 1, само выражение принимает значение О или 1, и вычисляется это значение (в силу теоремы 2.2) посредством применения к значениям 0 и 1 предписываемых данным выражением логических действий. Логические действия над величинами 0 и 1 выполняются по правилам, определяемым таблицами истинности этих действий (операций) — отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности. Таким образом, мы фактически начинаем иметь дело с некой новой (логической) алгеброй, или алгеброй логики, которая как бы «параллельна» привычной школьной алгебре. Сравним компоненты этих двух алгебр с помощью следующей таблицы:

Компонента	Школьная	Алгебра логики

	алгебра	
Базисное множество	R — множество вещественных чисел	{0, 1} — двухэлементное множество
Операции над элементами базисного множества	+,-,*,:	$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
Переменные	Вещественные a, Ь, с, ..., x, y, z, ...	Пропозициональные, Q, R, ..., X, Y, Z, ...
Формулы (правильно построенные выражения)	ax+by+cz, ax^2 – bx + с и т.д.	$\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \rightarrow F_{22})$

Составление таблиц истинности для формул. На основании теоремы 2.2 можно для данной формулы F алгебры высказываний и найти логические значения всех тех высказываний, в которые формула превращается при подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных различных конкретных высказываний. При этом говорят о логическом значении самой формулы и о логических значениях ее пропозициональных переменных. При нахождении логических значений формулы, соответствующих всевозможным наборам значений ее пропозициональных переменных, удобной формой записи является табличная форма. Рассмотрим примеры.

Пример 2.3. Составим таблицу истинности для формулы $(X \rightarrow Y) \vee (Y \rightarrow X)$.

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(X \to Y)$	$\lambda(Y \to X)$	$\lambda((X \to Y) \vee (Y \to X))$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Первые два столбца и последний столбец составленной таблицы задают соответствия между логическими значениями исходных высказываний и логическим значением составного высказывания, получаемого по данной формуле. Эти три столбца и образуют таблицу истинности данной формулы.

Классификация формул алгебры высказываний. Формулы алгебры высказываний подразделяются на следующие типы: выполнимые, тавтологии, опровержимые и тождественно ложные.

Формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2,......X_n)$ называется выполнимой, если некоторая ее конкретизация является истинным высказыванием, т.е. существуют такие конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$, которые, будучи подставленными в эту формулу вместо переменных X_1 X_2,..., X_n соответственно, превращают ее в истинное высказывание. Таким образом, $F(X_1, X_2,......X_n)$ выполнима, если существуют такие конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$, что $\lambda (F(A_1, A_2, ..., A_n))= 1$.

Формула $F(X_1, X_2,......X_n)$ называется тавтологией, или тождественно истинной, если она превращается в истинное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$,т.е. если $\lambda (F(A_1, A_2, ..., A_n))= 1$.для любых высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ Формула из примера 2.3 является тавтологией. Для обозначения тавтологии используется знак =, который ставится перед формулой, являющейся тавтологией. Таким образом, запись $=F(X_1, X_2,......X_n)$ означает, что формула $F(X_1, X_2,......X_n)$ является тавтологией.

Формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ называется опровержимой, если существуют такие конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$,которые превращают данную формулу в ложное высказывание $F(A_1, A_2, ..., A_n)$, т.е. $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$. Другими словами, опровержимые формулы — это формулы, не являющиеся тавтологиями. Формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ называется тождественно ложной, или противоречием, если $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$ для любых конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$. Другими словами, тождественно ложные формулы — это такие формулы, которые не являются выполнимыми.

Мышление и математическая логика. Начало процессу математизации логики положено математизацией языка. Фактически построена своеобразная знаковая система (символический язык логики высказываний), с помощью которой можно попытаться отразить человеческую мысль и проследить оформление мыслительного процесса. Этот язык основывается на алфавите, состоящем из следующих символов:

1) пропозициональных букв: P, Q, R,... ;
2) символов логических операций: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
3) технических знаков: (,).

Словами построенного языка являются формулы логики высказываний. Предложения обычного (русского) языка могут быть «переведены» на символический язык логики высказываний, где они представляются формулами логики высказываний. Следует иметь в виду, что при таком переводе сохраняются логическое содержание, логическая структура предложения, но конечно же теряются его языковая красота и психологические оттенки. Формула представляет; собой формальную последовательность знаков, составленную по строгим правилам, нарушение которых недопустимо. Такой перевод высказывания естественного языка на символический язык называется его формализацией. В частности, перевод высказывания на символический язык логики высказываний есть его формализация в рамках символической логики высказываний. Получаемая формула показывает способ соединения простых высказываний в составное при помощи логических союзов. Она представляет как бы в «чистом виде» логическую структуру составное го высказывания.

Формула логики высказываний сама по себе не имеет никакого содержания. В частности, она не является ни истинной, ни ложной Она превращается в высказывание, истинное или ложное, при всякой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменны любых конкретных высказываний. Такой процесс подстановки называется интерпретацией данной формулы алгебры высказываний

Таким образом, имеются два взаимно-обратных процесса : формализация и интерпретация. Если имеется формула F и высказывание A есть результат ее интерпретации, то сама формула F будет формализацией высказывания A. Обратно, ее имеется высказывание A и формула F есть его формализация, то высказывание A будет одной из интерпретаций формулы F. Итак формализация — это переход от высказывания естественного языка к формуле логики высказываний, а интерпретация — переход формулы логики высказываний к высказыванию естественного языка. Таблица истинности или таблица значений формулы логики высказываний — это таблица, которая указывает логическое значение формулы при любой ее интерпретации.

§ 3. Тавтологии алгебры высказываний

О значении тавтологий. Тавтологии представляют собой схемы построения истинных высказываний, независимо от содержания и истинности составляющих высказываний. Так, если для установления того, истинны или нет высказывания «Саратов основан и 1590 году», «Солнце вращается вокруг Земли», необходимо обладать специальными знаниями или заглянуть в специальную литературу, то для выяснения значения истинности высказываний « Треугольник ABC прямоугольный, или треугольник ABC не прямоугольный», «Неверно, что информация о наследственных признаках хранится в генах, и эта информация в генах не хранится» уже не нужно обладать знаниями ни в математике, ни в генетике. Вывод об истинности последних высказываний делаем, исходя не из их содержания, а из их формы, структуры. Структура первого из последних высказываний выражается формулой $X \vee, \neg X$, а второго формулой $\neg(X \vee, \neg X)$. Легко убедиться в том, что обе эти Формулы суть тавтологии. Данные формулы дают две схемы построения всегда истинных высказываний.

Основное значение тавтологий состоит в том, что некоторые из них предоставляют правильные способы построения умозаключении, т.о. такие способы, которые от истинных посылок всегда приводят к истинным выводам.

Термин «тавтология» имеет греческое происхождение и означает повторение одного и того же определения, суждения иными, близкими по смыслу словами. В тавтологиях, относящихся к математической логике, заключительной логической связкой является эквивалентность $\leftrightarrow$. Например, тавтология $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ выражает одинаковость форм (формул) в ее левой и правой частях, т.е. имеется в виду семантическая одинаковость, выражаемая разными словами — формами (формулами). Каждый из этих законов несет объективную информацию об определенной части окружающего нас мира.

Основные тавтологии. Приведем некоторые основные тавтологии, выражающие свойства логических операций, а также тавтологии, на которых основаны некоторые схемы математических доказательств.

Теорема 3.1. Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

а) закон исключенного третьего $P \vee \neg P$;

б) закон отрицания противоречия $\neg(P \wedge \neg P)$;

в) закон двойного отрицания $\neg\neg(P \leftrightarrow P)$;

г) закон тождества $P \rightarrow P$;

д) закон контрапозиции $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

ё) закон силлогизма (правило цепного заключения): $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

ж) закон противоположности $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$;

з) правило добавления антецедента («истина из чего угодно»)

$P \to (Q \to R)$;

и) правило «из ложного что угодно» $\neg P \to (P \to Q)$;

к) правило «модус поненс» (modus ponens) $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$

л) правило «модус толленс» (modus tollens) $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$

м) правило перестановки посылок

$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$

н) правило объединения (и разъединения) посылок $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)$

о) правило разбора случаев $((P \to R) \wedge (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \to R)$

п) правило приведения к абсурду $((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P, (\neg P \to (Q \wedge \neg Q)) \to P$

Теорема 3.2 (свойства конъюнкции и дизъюнкции). Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

а) законы идемпотентности $(P \wedge P) \leftrightarrow P, (P \vee P) \leftrightarrow P$;

б) законы упрощения $(P \wedge Q) \to P, P \to (P \vee Q)$

в) законы коммутативности

$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P), (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$;

г) законы ассоциативности

$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R, (P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$;

д) законы дистрибутивности

$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)),$
$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

е) законы поглощения

$(P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow P,$
$(P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$

ж) законы де Моргана

$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q),$
$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

3.4.

Теорема 3.3 (свойства импликации и эквивалентности) Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

а) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

б) $(P \to (Q \to (P \wedge Q))$

в) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to P))$

$г)(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P));$
$д)(\neg Q \wedge (P \to Q)) \to \neg P;$
$е)(\neg P \wedge (P \vee Q)) \to Q;$
$ж)(P \to Q) \to ((P \vee R) \to (Q \vee R));$
$з)(P \to Q) \to ((P \wedge R) \to (Q \vee R));$
$и)(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R));$
$к)(P \to Q) \vee (Q \to P);$
$л)(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q);$
$м)((P \to Q) \wedge (R \to Q)) \leftrightarrow ((P \vee R) \to Q);$
$н)((P \to Q) \wedge (P \to R)) \leftrightarrow (P \to (Q \wedge R));$
$о)P \leftrightarrow P$
$п)(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$
$р)((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \to (P \leftrightarrow R).$

Теорема 3.4 (выражение одних логических операций через другие) Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

$а)(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q);$
$б)(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q);$
$в)(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q);$
$г)(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(P \to \neg Q);$
$д)(P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q);$
$е)(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \to Q);$
$ж)(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q)) \wedge (Q \to P));$

Основные правила получения тавтологий.

Теорема 3.5 (правило заключения). Если формулы F и F $\to$ H являются тавтологиями, то формула H также тавтология.

Доказательство. Пусть = $F(X_1, X_2,......X_n)$ и = $F(X_1, X_2,......X_n) \rightarrow$ $\mathrm{H}(X_1, X_2,......X_n)$.

Предположим, что формула $\mathrm{H}(X_1, X_2,......X_n)$ не является тавтологией. Это означает, что существуют такие конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$, что $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n))= 0$. Поскольку $F(X_1, X_2,......X_n)$ — тавтология, то для $A_1, A_2, ..., A_n$ имеем $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n))= 1$.

Вычисляем, пользуясь соотношением: $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) \rightarrow \mathrm{H}(X_1, X_2,......X_n) = \lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) \rightarrow \lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n))=1 \rightarrow 0=0$, что противоречит тождественной истинности формулы F $\rightarrow$ H. Следовательно, предположение неверно. Тогда =H, что и требовалось доказать.

Правило заключения называется также правилом отделения или правилом « модус поненс» (modus ponens).

Второе правило получения тавтологий носит название правила подстановки. Пусть в формуле F содержится пропозициональная переменная X (а возможно, и другие пропозициональные переменные), и H— любая формула. Если и формулу F вместо символа

X везде где он входит в F, вставить формулу H, то получим новую формулу. Она обозначается $S_X^H F$ и называется формулой, полученной из F в результате подстановки в нее формулы H вместо пропозициональной переменной X. Если формула F содержит две пропозициональные переменные X и Y (а возможно, и еще несколько), то можно определить одновременную подстановку двух формул H и G в формулу F вместо пропозициональных переменных X и У соответственно как одновременную замену символа X всюду, где он входит в F, формулой H и символа У всюду, где он входит в F, формулой G. Получающуюся формулу обозначают $S_{X\,Y}^{H\,G} F$.

Аналогично определяется одновременная подстановка в формулу Fw большего числа формул (трех, четырех и т.д.).

Теорема 3.6 (правило подстановки). Если формула F, содержащая пропозициональную переменную X, является тавтологией, то подстановка в формулу F вместо переменной X любой формулы H снова приводит к тавтологии. Другими словами, из =F следует $=S_X^H F$.

Доказательство. Так как = F(X,Y,...), то формула F(X,Y,...) превращается в истинное высказывание при подстановке вместо всех пропозициональных переменных X, Y, ... любых конкретных, высказываний. Истинность получаемого высказывания не зависит от структуры подставляемых вместо X, Y,... высказываний. В частности, вместо X может быть подставлено высказывание, которое само является конкретизацией формулы $H(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ на некотором наборе конкретных высказываний. Но это и означает, что тавтологией будет формула $F(H(Z_1, Z_2, ..., Z_n),Y,...)$, т.е. $= S_X^H F$, что требовалось доказать.

Замечание 3.7. Отметим, что правило подстановки позволяет рассматривать каждую из тавтологий, приведенных в теоремах 3.1 — 3.4 не как отдельно взятую тавтологию, а как схему образования тавтологий. Значит, каждая из пропозициональных переменных данных формулах может рассматриваться не как переменная, как произвольная формула алгебры высказываний.

Два рассмотренных правила образования тавтологий — «модус поненс» и правило подстановки — будем называть основными.

§ 4. Логическая равносильность формул

Понятие равносильности формул.

Определение 4.1. Формулы $F(X_1, X_2, ...X_n)$ и $H(X_1, X_2, ...X_n)$ алгебры высказываний называются равносильными (эквивалентными), если при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных логические значения получающихся из формул F и H высказываний совпадают. Для указания равносильности формул используют обозначение $P \cong H$. Определение равносильности формул можно записать символически:

$$F \cong H \Leftrightarrow \lambda(F(A_1, A_2, ...A_n)) = \lambda(H(A_1, A_2, ...A_n)) \qquad (4.1)$$

для любых конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$.

Рассмотрим равносильность двух формул F(X, Y, Z) и G(X, Y, Z):

X	Y	Z	F(X,Y,Z)	G(X, Y, Z)
0	0	0	α_0	β_0
0	0	1	α_1	β_1
0	1	0	α_2	β_2
0	1	1	α_3	β_3
1	0	0	α_4	β_4
1	0	1	α_5	β_5
1	1	0	α_6	β_6
1	1	1	α_7	β_7

Признак равносильности формул. Сущность признака состоит выявлении тесной связи между понятием равносильности формул и понятием тавтологии.

Теорема 4.2 (признак равносильности формул). Две формулы F и H алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула F $\leftrightarrow$H является тавтологией:

$F \cong \Leftrightarrow = F \leftrightarrow H$ (4.2J

Доказательство. Если $F \cong \mathrm{H}$, то по определению 4.1 $\lambda(F(A_1, A_2, ...A_n)) = \lambda(\mathrm{H}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ...\mathrm{A}_n))$ для любых высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ Тогда (по определению 1.9 операции эквивалентности) $\lambda(F(A_1, A_2, ...A_n)) = \lambda(\mathrm{H}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ...\mathrm{A}_n))$=1, откуда на основании соотношения (1.5) заключаем, что $\lambda(F(A_1, A_2, ...A_n)) \leftrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2......\mathrm{A}_n)$= 1

Теорема доказана.

Следствие 4.3. Отношение равносильности между формулами алгебры высказываний:

а) рефлексивно: $F \cong F$;

б) симметрично: если $F_1 \cong F_2 u F_2 \cong F_1$;

в) транзитивно: если $F_1 \cong F_2 u F_2 \cong F_3 mo F_1 \cong F_3$, т. с. отношение равносильности является отношением эквивалентности.

Теорема 4.4. Справедливы следующие равносильности:

$а)\neg\neg P \cong P;$

$б)P \to Q \cong \neg P \wedge \neg Q;$

$в)P \leftrightarrow Q \cong \neg P \leftrightarrow \neg Q;$

$г)P \to (Q \to R) \cong (P \wedge Q) \to R;$

$д)(P \to Q) \wedge (Q \to R) \cong (P \wedge Q) \to R;$

$е)P \wedge P \cong P;$

$ж)P \vee P \cong P;$

$з)(P \vee Q) \cong (Q \vee P);$

$и)P \wedge Q \cong Q \wedge P$

$к)P \wedge (Q \wedge R) \cong (P \wedge Q) \wedge R;$

$л)P \vee (Q \vee R) \cong (P \vee Q) \vee R$

$м)P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$н)P \vee (Q \wedge R) \cong (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$о)P \wedge (P \vee Q) \cong P$

$п)P \vee (P \wedge Q) \cong P;$

$р)\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$

$с)\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$

$т)P \leftrightarrow Q \cong Q \leftrightarrow P$

$у)P \to Q \cong \neg P \vee Q$

$ф)P \to Q \cong \neg P \wedge \neg Q$

$х)P \wedge Q \cong \neg(P \to \neg Q)$

$ц)P \vee Q \cong \neg P \to Q$

$ч)P \leftrightarrow Q \cong (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

$ш)P \vee \neg P \cong 1, P \wedge \neg P \cong 0$

$щ)P \vee 1 \cong 1, P \wedge 1 \cong P$

$ы)P \vee 0 \cong P, P \wedge 0 \cong 0$

Равносильные преобразования формул. Переход от одной формулы к равносильной ей формуле называется равносильным преобразованием исходной формулы. Равносильные преобразования формул применяются прежде всего для упрощения формул.

Замечание. Отметим, что если некоторая формула является тавтологией, то и всякая равносильная ей формула также является тавтологией:

$= F и \cong H \Rightarrow = H$

§ 5. Нормальные формы для формул алгебры высказываний

Понятие нормальных форм. Конъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, ...X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний. Здесь «или» употребляется в неисключающем смысле, т.е. в конъюнктивный одночлен может входить одновременно и переменная, и ее отрицание. Примеры конъюнктивных одночленов $X_1 \wedge X_1, X_1 \wedge \neg.X_2 \wedge X_3$

Дизъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, ...X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний (и здесь союз «или» употребляется в неисключающем смысле). Приведем примеры дизъюнктивных одночленов: $X_1 \vee X_1, \neg X_1 \vee .X_2 \vee X_3$ Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов, т.е. выражение вида $D_1 \vee D_2 .... \vee D_{p,} где D_i, i = 1,2.....p$, являются конъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Аналогично конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов $K_1 \wedge K_2 .... \wedge K_{q,} где K_i, i = 1,2.....q$ являются дизъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Будем также называть дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой указанные выражения при p = 1 (q = 1).

Нормальную форму, представляющую формулу F(т.е. равносильную F), будем называть просто нормальной формой этой формулы.

Нетрудно понять, что всякая формула обладает как дизъюнктивной, так и конъюнктивной нормальными формами. В самом деле, всякую формулу можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Используя законы де Моргана и свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции, можем преобразовать равносильным образом полученное выражение к дизъюнкции конъюнктивных одночленов (к дизъюнктивной нормальной форме). Если же к исходному выражению применить свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции о его можно свести к конъюнкции дизъюнктивных одночленов (к конъюнктивной нормальной форме).

Совершенные нормальные формы. Среди множества дизъюнктивных (равно как и конъюнктивных) нормальных форм, которыми обладает данная формула алгебры высказываний, существует уникальная форма: она единственна для данной формулы. Это так называемая совершенная дизъюнктивная нормальная форма (среди конъюнктивных форм — совершенная конъюнктивная нормальная форма).

Определение 5.1. Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, X_2, ...X_n$ называется совершенным, если и него от каждой пары $X_i, \neg X_i (i = 1,2....n)$ входит только один представитель . Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) от переменных $X_1, X_2, ...X_n$ называется совершенной от этих переменных, если в нее входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные соответственно) от $X_1, X_2, ...X_n$

Приведем пример совершенной конъюнктивной нормальной формы: $(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3)$

Аналогично для совершенных дизъюнктивных нормальных форм

Представление формул алгебры высказываний совершенными дизъюнктивными нормальными (СДН) формами. Введем обозначение, которое будет удобно в дальнейшем:

$$X^{\alpha} = \begin{cases} X, если \alpha = 1 \\ \neg X, если \alpha = 0 \end{cases}$$

Легко проверить, что 0° = 1, 0^1 = 0, 1° = 0, 1^1 = 1, т.е. $X^{\alpha} = 1$ тогда и только тогда, когда $X^{\alpha} = 0 и X = \alpha$ тогда и только тогда, когда $X \neq \alpha$.

Введем еще одно обозначение. Вместо дизъюнкции $X_1 \vee X_2 .... \vee X_n$ будем писать $\vee_{i=1}^{n} X_i$.

Лемма 5.2. Для всякой формулы алгебры высказываний F $X_1, X_2, ...X_n$ справедливо разложение

$F((X_1, X_2, ...X_n) \cong \vee \left(F\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right) \wedge X_1^{\alpha_1} \wedge .... \wedge X_n^{\alpha_n}\right)$

Теорема 5.3 (о представлении формул алгебры высказываний совершенными дизъюнктивными нормальными формулами). Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Доказательство. Существование. Всякая формула F $X_1, X_2, ...X_n$ обладает указанным в предыдущей лемме разложением.

Поскольку формула F($X_1, X_2, ...X_n$)не тождественно ложна, то ссуществуют такие наборы $\left(\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right)\right)$нулей и единиц, что $F\left(\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right)\right)$= 1. Наборы $\left(\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right)\right)$, обращающие формулу F в нуль, будут обращать в нуль также и конъюнктивные одночлены, входящие в дизъюнкцию и соответствующие данным индексным наборам. Поэтому все такие одночлены исключим из дизъюнкции. Итак, в дизъюнкции остаются конъюнктивные одночлены, соответствующие лишь индексным наборам $\left(\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right)\right)$нулей и единиц, для которых $F\left(\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right)\right)$= 1. Тогда разложение для формулы F принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&F(X_1 ....X_n) \cong \vee((F(\alpha_1 .....\alpha_n) \wedge X_1^{\alpha_1} \wedge .... \wedge X_n^{\alpha_n})) \cong \\
&(\alpha_1 ....\alpha_n) \\
&F(\alpha_1 ....\alpha_n) = 1 \\
&\cong \vee(X_1^{\alpha_1} \wedge .... \wedge X_n^{\alpha_n}), \\
&F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1
\end{aligned}
$$

где дизъюнкция («суммирование») ведется по всем индексным наборам $\left(\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right)\right)$ нулей и единиц, для которых $F\left(\left(\alpha_1 ....\alpha_n\right)\right)$=1

Выражение, стоящее в правой части полученной равносильности, есть не что иное, как совершенная дизъюнктивная нормальная форма от переменных $X_1, X_2, ...X_n$ потому что каждый конъюнктивный одночлен $X_1^{\alpha_1} \wedge .... \wedge X_n^{\alpha_n}$, входящий в дизъюнкцию, совершенен (каждая переменная $X_1, X_2, ...X_n$ входит в него точно один раз: либо сама, либо со знаком отрицания в зависимости от значения ее показателя степени).

Единственность. Предположим, что некоторая формула F($X_1, X_2,......X_n$)имеет два представления совершенными дизъюнктивными нормальными формами:

$F(X_1, X_2,......X_n) \cong K_1 \vee .... \vee K_q;$
$F(X_1, X_2,......X_n) \cong K_1^* \vee .... \vee K_r^*$
$гдеK_i, 1 \le i \le q и и{}_j^*, 1 \le j \le r$

есть совершенные конъюнктивные одночлены от переменных $X_1, X_2,......X_n$. Причем, не нарушая общности, считаем, что ни один из одночленов K_1 K_2, ..., K_q не повторяется в этом наборе, потому что повторяющиеся одночлены можно исключить ввиду идемпотентности дизъюнкции . Аналогична ситуация в форме $K_1^* \vee .... \vee K_r^*$. Тогда имеет место $K_1 \vee .... \vee K \;\; \cong K_1^* \vee .... \vee K_r^*$. 11усть, например, совершенный конъюнктивный одночлен K_1 имеет вид $K_1 \cong (X_1^{\alpha_1} \wedge .... \wedge X_n^{\alpha_n})$ Придадим переменным $X_1, X_2,......X_n$ значения $\alpha_1, \alpha_2,......\alpha_n$ соответственно. Тогда совершенный конъюнктивный одночлен K_1 примет значение 1, и, следовательно, вся совершенная дизъюнктивная нормальная форма, стоящая в левой части равносильности, станет равна единице. Тогда и правая часть данной равносильности обратится в единицу, и для набора $\alpha_1, \alpha_2,......\alpha_n$ значений переменных одна из совершенных элементарных конъюнкций К*, например K_j^* также станет

равной единице. Если K_j^* имеет вид $K_j^* \equiv (X_1^{\beta_1} \wedge .... \wedge X_n^{\beta_n})$

то доказанное означает, что $\alpha_1^{\beta_1} \wedge .... \wedge \alpha_n^{\beta_n} = 1$. Последнее равенство возможно в том и только в том случае, когда $\alpha_1^{\beta_1} = 1, ..., \alpha_n^{\beta_n} = 1$, что может быть лишь тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \alpha_1, ..., \beta_n = \alpha_n$ Следовательно, $K_j^* \equiv (X_1^{\alpha_1} \wedge .... \wedge X_n^{\alpha_n}), т.е. K_j^* = K_1$. Таким образом, совершенная элементарная конъюнкция K_1 встречается среди совершенных элементарных конъюнкций $K_1^*, ..., K_r^*$. Тем же самым способом устанавливается, что любая из совершенных элементарных конъюнкций K_1, K_2, ..., K_q встречается среди $K_1^*, ..., K_r^*$, и обратно, любая из совершенных элементарных конъюнкций

$K_1^*,........,K_r^*$ встречается среди K_1, K_2, ..., K_q. Ввиду того что одночлены в данных наборах не повторяются, то q = г и обе части равносильности $K_1 \vee .... \vee K_q \cong K_1^* \vee .... \vee K_r^*$ отличаются самое большее порядком членов дизъюнкции.

Представление формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными (СКН) формами. Понятия и теоремы этого пункта носят двойственный характер по отношению к соответствующим понятиям и теоремам предыдущего пункта. Вводится следующее обозначение:

$$^{\beta}X = \begin{cases} X, если\beta = 0 \\ \neg X, если\beta = 1 \end{cases}$$

Легко проверяется, что °0 = 0, [1] 0= 1, 1° = 0, [1] 1= 0, т.е. $^{\beta}X = 1$тогда и только тогда, когда $X \neq \beta; и ^{\beta}X = 0$тогда и только тогда, когда X= β.

Вместо конъюнкции $X_1 \wedge X_2 \wedge .... \wedge X_n$ будем писать $\wedge_{i=1}^{n} X_i$.

Лемма 5.4. Для всякой формулы F($X_1, X_2,......X_n$) алгебры высказываний справедливо разложение

$$F(X_1, X_2,......X_n) \cong \wedge\left(F(\beta_1........\beta_n) \vee {}^{\beta}X_1 \vee ....\vee {}^{\beta}X_n\right)$$

Теорема 5.5 (о представлении формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными формами). Каждая формула алгебры высказываний от n переменных, не являющаяся тавтологией, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) совершенную конъюнктивную нормальную форму.

Доказательство этой теоремы можно восстановить, руководствуясь доказательством теоремы 5.3.

Два способа приведения формулы алгебры высказываний к совершенной нормальной форме. Эти два способа проистекают из двух способов задания формулы алгебры высказываний: с помощью таблицы ее значений или с помощью аналитической формы записи.

Если формула задана таблицей своих значений, то из доказательств теорем 5.3 и 5.5 о представлении формул совершенными нормальными формами необходимо вынести формулу (в некоем обычном понимании смысла этого термина) разложения формулы алгебры высказываний в совершенную нормальную форму. Для случая СДН-формы эта формула имеет следующий вид:

$$F(X_1,......,X_n) \cong \vee(X_1^{\alpha_1} \wedge .... \wedge X_n^{\alpha_n}), где X^{\alpha} = \begin{cases} X, если \alpha = 1 \\ \neg X, если \alpha = 0 \end{cases}$$

Для случая СКН-формы эта форму-па имеет вид

$$F(X_1,......,X_n) \cong \wedge({}^{\beta}X_1 \vee ....\vee {}^{\beta}X_n), где {}^{\beta}X = \begin{cases} X, если \beta = 0 \\ \neg X, если \beta = 1 \end{cases}$$

и, в свою очередь, описывает следующее правило (алгоритм) отыскания совершенной конъюнктивной нормальной формы для данной формулы: нужно выбрать все те наборы значений ее переменных, на которых формула принимает значение 0. Для каждого такого набора выписать совершенный дизъюнктивный одночлен, принимающий значение 0 на этом наборе и только на нем. Полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединить знаками конъюнкции.

§ 6. Логическое следование формул

Раздел алгебры высказываний, изучающий закономерности логического следования, логического умозаключения, является ее сердцевиной. Именно в этом разделе на данном уровне развития математической логики решается основная задача логики, состоящая в нахождении общих способов установления связей логических значений одних высказываний с логическими значениями других высказываний на основании исследования формальной структуры высказываний. Одно из важнейших предназначений логики состоит в им, чтобы устанавливать, что из чего следует, т.е. устанавливать структуры высказываний, связанных отношением логического следования. Знание этих закономерностей необходимо прежде всего самой математической науке. С помощью таких знаний происходит доказательство математических теорем и, следовательно, развитие математики. Это знание важно и для других наук, для систематизации научного знании вообще; да и в повседневной жизни оно служит инструментом рассуждений, обоснований и доказательств.

Понятие логического следствия. Когда говорят, что из одного или нескольких предложений A_1 A_2,..., A_m следует предложение B, то подразумевают следующее: всякий раз, когда окажутся истинными все предложения A_1 A_2,..., A_m, истинным будет и предложение B. Вот примеры таких следований: «Если летом я устроюсь на временную работу (утверждение A), то у меня будут заработанные деньги (утверждение B)», «Если у меня будут заработанные деньги, то я куплю видеомагнитофон (утверждение C)», «Если днем я не приготовлю уроки на завтра (утверждение A1), и если вечером я пойду в кино (утверждение A_2), то завтра я буду не готов к занятиям (утверждение D)». Установление справедливости приведенных суждений не относится к компетенции математической логики, а осуществляется на основе анализа их содержания и смысла.

Задача математической логики (в частности, алгебры высказываний) в вопросах логического следования состоит в том, чтобы указать такие формы высказываний A_1 A_2,..., A_m, B, когда последнее высказывание непременно было бы следствием m первых, независимо от конкретного содержания всех этих высказываний. Формы высказываний выражаются, как нам известно, формулами алгебры высказываний. Итак, теория логического следования (в рамках алгебры высказываний) должна изучать закономерности образования формул F_1 F_2,..., F_m, H, по которым первые т из них связаны с последней отношением логического следования.

Определение 6.1. Формула H($X_1, X_2, ...X_n$) называется логическим следствием формул F($X_1, X_2, ...X_n$), ..., F $_m$ ($X_1, X_2, ...X_n$), если формула H($X_1, X_2, ...X_n$) превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных $X_1, X_2, ... X_n$ конкретных высказываний, при которой в истинное высказывание превращаются все формулы F($X_1, X_2, ... X_n$), ..., F m ($X_1, X_2, ... X_n$).То, что формула H является логическим следствием формул F_1,..., F_m, H. Формулы F_1 ..,, F_m называются посылками для логического следствия H. Таким образом, F_1 ..., F_m = H, если для любых высказываний A_1 A_2,..., A_n из $\lambda(F_1(A_1, ..., A_n)) = 1, ..., \lambda(F_m(A_1, ..., A_n)) = 1$ следует $\lambda(H_1(A_1, ..., A_n)) = 1$. Наконец можно и так сказать о логическом следствии. Составим таблицы истинности для формул F_1 ..., F_m, H. Предположим, что если в какой-то строке таблицы все формулы F_1 ..., F_m принимают значение 1, то в этой строке непременно и формула H принимает значение 1. Это и будет означать, что H является логическим следствием формул F_1 ..., F_m.

Из сформулированного определения вытекает четкий алгоритм проверки формул на логическое следование Рассмотрим его действие для случая, например, трех формул-посылок, зависящих от трех переменных: $F_1(X,Y,Z), F_2(X,Y,Z), F_3(X,Y,Z) = H(X,Y,Z)$. Все эти формулы должны быть заданы таблицей своих значений:

X	У	Z	F_1 (X,Y,Z)	F_2(X, Y,Z)	F_3(X,Y,Z)	H(X,Y,Z)
0	0	0	α_0	β_0	γ_0	ξ_0
0	0	1	α_1	β_1	γ_1	ξ_1
0	1	0	α_2	β_2	γ_2	ξ_2
0	1	1	α_3	β_3	γ_3	ξ_3
1	0	0	α_4	β_4	γ_4	ξ_4
1	0	1	α_5	β_5	γ_5	ξ_5
1	1	0	α_6	β_6	γ_6	ξ_6
1	1	1	α_7	β_7	γ_7	ξ_7

Алгоритм действует следующим образом. Он просматривает последовательно по строкам таблицы значении формул F_1 F_2 F_3,H. Если хотя бы один элемент нулевой строки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ равен 0 то без просмотра значения формулы H в этой строке происходит переход к просмотру следующей строки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Если все элементы $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ нулевой строки равны 1, то просматривается значение ξ_0 формулы H в этой строке. При ξ_0=0 выдается результат: формула H не является логическим следствием формул F_1 F_2 F_3. При ξ_0= 1 происходит переход к просмотру следующей строки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. И так далее.

Признаки логического следствия. То, что некоторая формула является логическим следствием каких-то формул, можно выразить так же, сказав, что подходящая формула является тавтологией. В этом существо признаков, о которых пойдет речь в настоящем пункте, чем еще раз подчеркивается важное значение тавтологий.

Теорема 6.3 (признак логического следствия). Формула H будет логическим следствием формулы F тогда и только тогда, когда формула $F \to H$ является тавтологией: $F = H \Leftrightarrow = F \to H$

Теорема 6.4. Для любых формул F_1 , F_2, ..., F_m, H(m> 2) следующие утверждения равносильны:

$$а) F_1,....F_m = H$$
$$б) F_1 \wedge ...... \wedge F_m = H$$
$$в) = (F_1 \wedge ..... \wedge F_m) \to H$$

Доказательство. Утверждения б) и в) равносильны на основании предыдущей теоремы. Докажем равносильность утверждений а) и б).

а) => б)

Пусть A_1 ,..., A_m — такие конкретные высказывания, что

$$\lambda(F_1(A_1....A_n) \wedge .... \wedge F_m(A_1,......, A_h)) = 1 \quad (6\text{-}1)$$

Тогда

$$\lambda(F_1(A_1....A_n) \wedge .... \wedge \lambda(F_m(A_1,......, A_h)) = 1 . \quad (6.2)$$

Отсюда по определению

$$\lambda(F_1(A_1....A_n)) = 1,........, \lambda(F_m(A_1,......, A_h)) = 1 . \quad (6.3)$$

Но поскольку по условию F_1 F_2, ..., F_m =Н, то отсюда следует, что $\lambda(H(A_1....A_n)) = 1$. Следовательно, $F_1 \wedge ...... \wedge F_m = H$.

б) => а).

Предположим, что справедливы все соотношения (6.3) для некоторых A_1 ..., A_n Тогда имеет место соотношение (6.2), из которого на основании равенства (1.2) приходим к соотношению (6.1). Из последнего, на основании условия F\ F_1 F_2, ..., F_m =Н заключаем: $\lambda(H(A_1....A_n)) = 1$. Но это и означает, что F_1 F_2, ..., F_m =Н

Два свойства логического следования. Свойства, формулируемые в теореме 6.5, используются для доказательства того, что какая-то формула является логическим следствием некоторых формул.

Теорема 6.5. Отношение логического следования между формулами алгебры высказываний обладает следующими свойствами:

$a)F_1,....,F_m = F_i, для i = 1,2....,m$

$б)если F_1,.......,F_m = G_j для j = 1,2,.....p\_и\_G_1,.....,G_p = H, то\_F_1,......,F_m = H$

Доказательство, а) Фактически это свойство состоит в следующем: $F_i = F_i$. Оно непосредственно вытекает из определения 6.1 логического следования и означает, что отношение логического следования рефлексивно.

б) В частном случае при m = p = 1 данное свойство утверждает: если $F = G\_и\_G = H, то\_F = H$ Другими словами, отношение логического следования транзитивно. Докажем исходное утверждение. Строим таблицу истинности для всех формул, указанных в утверждении б), перечислив все пропозициональные переменные $X_1, X_2,......X_n$ входящие хотя бы в одну из этих формул. Рассмотрим какую-нибудь строку этой таблицы, в которой каждая формула F_1 F_2,..., F_m получает истинностное значение, равное 1. Тогда на основании условий каждая из формул G_1 G_2, ..., G_p также принимает истинностное значение, равное 1. Следовательно, и Н имеет значение 1. Таким образом, для всякого набора истинностных значений переменных

$X_1, X_2, ...X_n$ для которого каждая формула F_1 F_2, ..., F_m принимает значение 1, формула H также принимает значение 1. Это означает, что F_1 F_2, ..., F_m = H.

Следование и равносильность формул. Если говорить о следовании из одной формулы другой, то получаем бинарное отношение на совокупности всех формул алгебры высказываний. Две формулы F u H (в указанном порядке) находятся в данном отношении, если F = H.

Две формулы F и H (в указанном порядке) находятся в этом отношении, если F = H. Там же (следствие 4.3) установлено, что отношение равносильности формул есть отношение эквивалентности. Установим взаимосвязь между отношением равносильности и отношением следования.

Теорема 6.6. Две формулы алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой: $F \cong H \Leftrightarrow F = H\_u\_H = F$

Замечание 6.7. Если некоторая формула является тавтологией, то и всякое ее логическое следствие также является тавтологией. Символически это можно записать так: $= F\_u\_F = H \Rightarrow H = H$

Правила логических умозаключений. Теперь можем рассмотреть примеры структур правильного мышления, т.е. ответить на вопрос, что из чего следует.

Правило 6.8 (modus ponens): $\dfrac{F, F \to G}{G}$

Это правило означает, что от утверждения об истинности посылки F с помощью другой посылки F$\to$ G переходят к утверждению об истинности следствия G. Данное правило называют также правилом заключения или отделения.

Правило 6.9 {modus tollens): $\dfrac{F \to G, \neg G}{\neg F}$

Оно называется правилом modus tollens; от отрицания истинности посылки G с помощью посылки F $\to$ G переходят к отрицанию истинности F.

Укажем еще некоторые правила вывода, применяемые в рассуждениях. Путь их получения состоит в том, что сначала заменяем в соответствующей тавтологии каждую пропозициональную переменную произвольной формулой алгебры высказываний, в результате чего на основании теоремы 3.6 снова получаем тавтологию, а затем от нее по теореме 6.3 переходим к соответствующему правилу вывода (умозаключения), которое и записываем в принятой форме. Так, тавтология теоремы 3.3, б дает следующее правило вывода:

Правило 6.10 (введения конъюнкции): $\dfrac{F, G}{G \wedge F}$

Правило 6.11 (удаления конъюнкции): $\dfrac{F \wedge G}{F}, \dfrac{F \wedge G}{G}$.

Правило 6.12 (введения дизъюнкции): $\dfrac{F}{F \wedge G}, \dfrac{G}{F \wedge G}$

Правило 6.13 (контрапозиции): $\dfrac{F \to G}{\neg G \to \neg F}$

Правило 6.14 (цепного заключения): $\dfrac{F \to G, G \to H}{F \to H}$

Правило 6.15 (перестановки посылок): $\dfrac{F \to (G \to H)}{G \to (F \to H)}$

Правила 6.16 (объединения и разъединения посылок): $\dfrac{F \to (G \to H)}{(G \wedge F) \to H}$

Правило 6.17 (расширенной контрапозиции): $\dfrac{(F \wedge G) \to H}{(F \wedge \neg H) \to \neg G}$

Нахождение следствий из данных посылок.

Теорема 6.19. Формула H($X_1, X_2, ...X_n$)не являющаяся тавтологией, тогда и только тогда будет логическим следствием формул F$_1$ ($X_1, X_2, ...X_n$), ..., F$_m$($X_1, X_2, ...X_n$), не все из которых являются тавтологиями, когда все совершенные дизъюнктивные одночлены из разложения формулы. Не совершенную конъюнктивную нормальную форму входят в совершенную конъюнктивную нормальную форму формулы

F$_i$ ($X_1, X_2, ...X_n$) $\wedge$ ……... $\wedge$ F$_m$($X_1, X_2, ...X_n$)

Эта теорема определяет следующее правило (алгоритм) для нахождения всех (неравносильных) формул, являющихся логическими следствиями из посылок F_1 ,..., F_m:

1) составить конъюнкцию $F_1 \wedge ..... \wedge F_m$;

2) найти СКН-форму формулы $F_1 \wedge ...... \wedge F_m$;

3) выписать все совершенные дизъюнктивные одночлены найденной СКН-формы, а также всевозможные конъюнкции этих одночленов. Полученное множество формул и является искомым .

Нахождение посылок для данного следствия. Задача нахождения всех формул, из которых данная формула логически следует, является обратной по отношению к той, которая была рассмотрена и предыдущем пункте. Ее решение основывается на следующей теореме.

Теорема 6.20. Чтобы найти все формулы, логическим следствием каждой из которых будет данная формула G($X_1, X_2, ...X_n$), нужно действовать по следующему алгоритму. Найти СКН-форму для формулы G($X_1, X_2, ...X_n$); выявить все совершенные дизъюнктивные одночлены, которые в ней отсутствуют; составить всевозможные конъюнкции формулы G($X_1, X_2, ...X_n$) с недостающими дизъюнктивными одночленами. Получившаяся совокупность формул (вместе с формулой G) будет искомой (с точностью до равносильности формул).

Доказательство. Ясно, что из каждой формулы этой совокупности будет логически следовать формула G, так как $G \wedge H = G$ (конъюнкция сильнее каждого из сомножителей). Обратно, покажем, что каждая формула F, из которой логически следует данная формула G, имеет указанный вид, т.е. представляет собой конъюнкцию формулы G и некоторых совершенных дизъюнктивных одночленов, отсутствующих в СКН-форме для G. В самом деле, пусть F = G и $G \cong D_1 \wedge D_2 \wedge .... \wedge D_k$ — СКН-форма для формулы G($X_1, X_2, ...X_n$) и $F \cong \Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge .... \wedge \Delta_s$ — СКН-форма для формулы F($X_1, X_2, ...X_n$).

По определению логического следования, F=G означает, что если формула F($X_1, X_2, ...X_n$) на некотором набор $A_1, A_2, ..., A_n$ значений пропозициональных переменных приняла значение 1, то и формула G($X_1, X_2, ...X_n$) на этом наборе примет значение 1. Другими словами, если формула G($X_1, X_2, ...X_n$) на некоторой наборе $A_1, A_2, ..., A_n$ значений пропозициональных переменных принимает значение 0, то и формула F($X_1, X_2, ...X_n$) на этом набор принимает значение 0. Но все наборы значений переменных, которых G принимает значение 0, находятся во взаимно-однозначном соответствии с совершенными дизъюнктивными одночленами $D_1, D_2, ...D_к$, образующими СКН-форму для формулы G, т.е. если G($A_1, A_2, ..., A_n$) = 0, то $D_i(A_1, A_2, ..., A_n)$ = 0 для некоторого 1≤i≤к Следовательно, F($A_1, A_2, ..., A_n$) = 0 и значит на этом же наборе принимает значение 0 некоторый совершенный дизъюнктивный одночлен Δ_i, входящий в ее СКН-форму. Но тогда этот одночлен совпадает с одночленом D_i. Таким образом, каждый совершенный дизъюнктивный одночлен D_i из СКН-формы для G входив в СКН-форму для формулы F, т.е. СКН-форма для F имеет вид F= $\cong D_1 \wedge D_2 \wedge .... \wedge D_k \wedge \Delta_{к+1} \wedge ..... \wedge \Delta_s$.

§ 7. Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике

Прямая и обратная теоремы. Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой X $\rightarrow$ Y. Утверждение называется условием теоремы, а утверждение Y — ее заключением.

Например: «Если в четырехугольнике все стороны равны между собой (A_1), то его диагонали перпендикулярны (B_1)». Символическая запись этой теоремы: $A_1 \rightarrow B_1$.

Второй пример: «Если в четырехугольнике все стороны равны (A_1), то его диагонали делятся точкой пересечения пополам ($B_1^{'}$)». Символически: $A_1 \rightarrow B_1^{'}$

Далее, если некоторая теорема имеет форму $X \to Y$, утверждение $X \to Y$ называется обратным для данной теоремы. Это утверждение может быть справедливым, и тогда оно называется теоремой, обратной для теоремы $X \to Y$, которая, в свою очередь, называется прямой теоремой. Если же утверждение $X \to Y$ не выполняйся, то говорят, что обратная теорема для теоремы $X \to Y$ неверна. Так, для теоремы $A_1 \to B_1$обратная теорема неверна, а для теоремы $A_2 \to B_2$ справедлива обратная теорема $B_2 \to A_2$. Таким образом, при доказательстве теоремы нужно четко выделить, каково ее условие и что доказывается. Доказательство прямой теоремы не дает оснований для вывода о том, что и обратная теорема также верна. Обратная теорема требует специальной проверки. Это обусловлено тем, что формулы $X \to Y$ и $Y \to X$, выражающие структуры прямой и обратной теорем, не равносильны. Их не равносильность можно усмотреть также из таблиц истинности данных формул.

Структура теоремы $A_1 \to B_1$достаточно проста. Рассмотрим теорему более сложной структуры: «В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны». Чтобы четко выделить условие данной теоремы и заключение, сформулируем ее следующим образом: «Если два треугольника равны (А), то из попарного равенства двух углов этих треугольников (В) следует равенство их противолежащих сторон (С)». Символически теорема записывается гак: $A \to (B \to C)$, т.е. она имеет строение, описываемое формулой $P \to (Q \to R)$. На основании равносильности, получающейся из тавтологии теоремы 3.1, м (правило перестановки посылок), данная формула равносильна формуле $Q \to (P \to R)$, а на основании равносильности теоремы 4.4, г она равносильна формуле $(P \wedge Q) \to R$. Следовательно, теорема $A \to (B \to C)$ может быть сформулирована в виде $B \to (A \to C)$: «Если два угла двух треугольников попарно равны (В), то из равенства этих треугольников (А) следует равенство сторон, противолежащих этим углам (С)». Третий вид данной теоремы $(A \wedge B) \to C$: «Если треугольники равны (А) и в них два угла попарно равны (В), то и противолежащие стороны равны (С)». Таким образом, условие этой теоремы состоит из двух утверждений A и B или представляет собой их конъюнкцию $A \wedge B$, а заключением является утверждение C.

Если теперь зададимся целью сформулировать теорему, обратную рассмотренной теореме $A \to (B \to C)$, то столкнемся с некоторыми трудностями, преодолеть которые помогает алгебра высказываний. Обратная теорема — такая, в которой условие и заключение прямой теоремы поменялись местами. В рассматриваемой прямой теореме два условия и одно заключение. Это приводит к тому, что получается не одна обратная теорема, а несколько. Так, обращение первых трех форм данной теоремы приводит к следующим обратным утверждениям:

1) $(B \to C) \to A$: «Если из попарного равенства двух углов треугольников следует равенство их противолежащих сторон, то такие треугольники равны»;

2) $(A \to C) \to B$: «Если отрезки обладают тем свойством, что, будучи сторонами в равных треугольниках, они лежат против равных углов, то эти отрезки равны»;

3) $C \to (A \wedge B)$: «Если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника, то треугольники равны и углы, противолежащие этим сторонам, также равны».

Наконец, можем сформулировать еще два обратных утверждения, получающихся из суждений $A \to (B \to C)$ и $B \to (A \to C)$ перестановкой двух последних высказываний. Иначе говоря, эти обратные утверждения получаются перестановкой местами одного из двух условий прямой теоремы и ее заключения:

4) $A \to (C \to B)$: «Если треугольники равны, то из попарного равенства двух их сторон следует равенство противолежащих углов»;

5) $B \to (C \to A)$: «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то из равенства противолежащих этим углам сторон вытекает равенство самих треугольников».

Необходимые и достаточные условия. С понятиями прямой и обратной теорем тесно связан вопрос о необходимых и достаточных условиях. Если некоторая математическая теорема имеет структуру, выражаемую формулой $X \to Y$, то высказывание Y называется необходимым условием для высказывания X (другими словами, если X истинно, то Y с необходимостью должно быть также истинным), а высказывание X называется достаточным условием для высказывания Y (другими словами, для того чтобы Y было истинным, достаточно, чтобы истинным было высказывание X). Посмотрим с этой точки зрения на первую теорему $A_1 \to B_1$. Необходимым условием равенства в четырехугольнике всех сторон является перпендикулярность его диагоналей. Иначе говоря, достаточным условием для перпендикулярности диагоналей четырехугольника является равенство всех его четырех сторон.

Одно и то же утверждение может .иметь несколько необходимых условий. Так, необходимыми условиями равенства всех сторон четырехугольника являются, кроме указанного, деление диагоналей точкой их пересечения пополам ($B_1^{'}$), деление диагоналей соответствующих углов пополам ($B_1^{''}$) и т.д. Аналогично, одно и то же утверждение может иметь несколько достаточных условий. Так, для перпендикулярности диагоналей четырехугольника достаточно также, чтобы в нем было две пары равных смежных сторон.

После того как доказана теорема $X \to Y$, возникает вопрос, будет ли найденное необходимое условие достаточным или достаточное — необходимым. Иначе говоря, будет ли верно утверждение $Y \to X$, называемое обратным по отношению к теореме $X \to Y$. Известно, что условие перпендикулярности диагоналей четырехугольника (B_1), необходимое для равенства всех его сторон (А,), не будет (остаточным для такого равенства. .

Если справедливы утверждения $X \to Y$ и $Y \to X$, т. е. справедливо $X \leftrightarrow Y$, то считают, что X — необходимое и достаточное условие для Y, и, наоборот, что Y— необходимое и достаточное условие для X, или же что Y является критерием (для) X. Математическая наука изобилует утверждениями вида $X \leftrightarrow Y$, представляющими собой необходимые и достаточные условия, и их приходится отыскивать в самых разных ее областях.

Пример 7.1. Пусть требуется найти необходимое и достаточное условие того, что выпуклый четырехугольник является квадратом (A). Находим ряд необходимых условий для этого утверждения:

B_1: «Диагонали четырехугольника перпендикулярны»;

B_2: «Диагонали четырехугольника равны»;

B_3: «Диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам».

Ясно, что каждое из утверждений $A \to B_1$, $A \to B_2$, $A \to B_3$ верно. Анализируем обратные утверждения. Очевидно, неверны следующие из них:

Утверждение	Контрпример
$B_1 \to A$	Ромб, не являющийся квадратом
$B_2 \to A$	Прямоугольник, не являющийся квадратом
$B_3 \to A$	Параллелограмм

Неверны также и следующие утверждения:

Утверждение	Контрпример
$(B_1 \wedge B_2) \to A$	Укажите самостоятельно
$(B_1 \wedge B_3) \to A$	Ромб, не являющийся квадратом
$(B_2 \wedge B_3) \to A$	Прямоугольник, не являющийся квадратом

И только соединение (конъюнкция) всех трех необходимых для A условий B_1 B_2, B_3 дает условие, достаточное для A. Это $B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$: «Диагонали четырехугольника перпендикулярны, равны и делятся пополам точкой их пересечения». Таким образом, истинно утверждение $(B_1 \wedge B_2 \wedge B_3.) \to A$ Кроме того, из истинности утверждений $A \to B_1$ $A \to B_2$ $A \to B_3$ вытекает истинность утверждения $A \to (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3)$. Итак, необходимым и достаточным условием для A является условие $B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$.

Противоположная и обратная противоположной теоремы. Закон контрапозиции. Для теоремы, сформулированной в виде импликации $X \to Y$, кроме обратного утверждения $Y \to X$ можно сформулировать противоположное утверждение. Им называется утверждение вида $\neg X \to \neg Y$. Утверждение, противоположное данной теореме, может быть также теоремой, т. е. быть истинным высказыванием, но может таковым и не быть. Это следует из того, что формулы $Y \to X$ и $-\neg X \to \neg Y$ не являются равносильными, в чем нетрудно убедиться, составив таблицы истинности данных формул . В этом можно убедиться и на примерах. Возьмем теорему $A_1 \to B_1$ из предыдущего пункта: «Если в четырехугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны». Составляем противоположное утверждение $\neg A_1 \to \neg B_1$,: «Если в четырехугольнике все стороны не равны, то его диагонали не перпендикулярны». Последнее утверждение неверно, т.е. теоремой не является. Рассмотрим еще одну теорему: «Если сумма цифр натурального числа делится на три, то и само число делится на три». Противоположное утверждение для этой теоремы также справедливо, т.е. является теоремой, противоположной данной: «Если сумма цифр натурального числа не делится на три, то и само число не делится ни три». Итак, в том случае, когда утверждение $X \to Y$ истинно, утверждение $\neg X \to \neg Y$ может быть как истинным, так и ложным. Это означает, что утверждение, противоположное доказанной теореме, в свою очередь нуждается в доказательстве или опровержении.

При составлении противоположных утверждений к теоремам, условия и заключения которых представляют собой конъюнкции пни дизъюнкции нескольких высказываний, нужно пользоваться «пеонами де Моргана.

Рассмотрим еще один вид теорем, связываемых с прямыми теоремами вида $X \to Y$, и установить взаимоотношения между этими видами. Имеется в виду теорема, обратная противоположной: $\neg Y \to \neg X$. Мы не случайно назвали теоремой утверждение, обратное противоположному. Оно действительно будет истинным тогда и только тогда, когда истинно исходное утверждению, что вытекает из равносильности $X \to Y \cong \neg Y \to \neg X$ (, называемой законом контрапозиции. Таким образом, на основании закона контрапозиции предложение, обратное какой-либо противоположной теореме, само является теоремой, и имеется место доказательства данной теоремы можно доказывать теорему, обратную противоположной ей.

Методы доказательства математических теорем.

Метод доказательства от противного, несомненно, один из самых распространенных в математике методов доказательства теорем. Суть его состоит в следуещем. Для того чтобы доказать утверждение (теорему) $X\rightarrow Y$, т.е. «если *X,* то Y», предполагается, что верно утверждение *X.* Отсюда «Нужно логическими рассуждениями прийти к утверждению *Y.* Вместо эгого делается предположение, противное (т.е. противоположное) тому, которое требуется доказать, т.е. предполагается $\neg Y$.Далее, рассуждая на основании этого предположения, мы приходим к нелепому выводу $\neg X$. «Нелепость» (абсурдность) вывода состоит и том, что он противоречит исходному данному утверждению. Получение такого вывода заставляет нас отвергнуть сделанное предположение и принять то, которое требовалось доказать, — *Y.* Что же происходит в этих рассуждениях с точки зрения (математической) логики? А происходит то, что доказательство данной теоремы $X\rightarrow Y$ фактически заменяется (подменяется) доказательством теоремы $\neg X\rightarrow\neg Y$, противоположной обратной (или обратной противоположной) для данной теоремы. Почему это возможно сделать? А потому, что в этом состоит логический закон контрапозиции $X\rightarrow Y \cong \neg Y\rightarrow\neg X$, устанавливающий равносильность этих утверждений. Таким образом, описанный метод доказательства от противного основывается на логическом законе контрапозиции.

Метод приведения к абсурду (нелепости, противоречию) (по-латински *reductio ad absurdum)* имеет две модификации, которые являются существенно различными как по форме, так и по существу, т. е. по своей логической (дедуктивной) силе. Это — метод приведения *противоположного* утверждения к абсурду и метод приведения *данного* утверждения к абсурду.

Метод приведения противоположного утверждения к абсурду состоит в следующем. Пусть требуется доказать утверждение *X.* Рассматривается (допускается) противоположное ему утверждение (т.е. утверждение, являющееся его отрицанием) $\neg X$ и из него выводятся два противоречащих друг другу утверждения (т.е. некоторое утверждение и его отрицание) Y и $\neg Y$: $\neg X \rightarrow Y$ и $\neg X \rightarrow \neg Y$. Из этого делается вывод о том, что справедливо исходное утверждение *X.* Оправданием этому методу может служить следующая тавтология: $(\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow ((\neg X \rightarrow Y) \rightarrow X)$.

Метод приведения данного утверждения к абсурду состоит в следующем. Пусть требуется опровергнуть утверждение *X,* т. е. доказать отрицательное утверждение $\neg X$. В этом случае два противоречащих друг другу утверждения Y и $\neg Y$ выводятся не из утверждения $\neg X$, а из самого данного утверждения X:$X \rightarrow Y$ *и* $X \rightarrow \neg Y$. Из этого делается вывод о том, что справедливо утверждение $\neg X$, т.е. данное утверждение *X* опровергнуто. Оправданием этому методу служит следующая формула, также являющаяся тавтологией: $(X \rightarrow \neg Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow \neg X)$.

Существуют и другие методы математических доказательств, состоятельность которых подтверждается математической логикой.

Дедуктивные и индуктивные умозаключения.

На этом этапе весьма целесообразно рассмотреть вопрос о том, что представляют собой рассуждения, умозаключения, каковы их структура, виды и критерии правильности, какие умозаключения изучает логика и, в частности, математическая логика.

Умозаключение есть логическая (мыслительная) операция (процедура), состоящая в получении нового суждения (высказывания, угнерждения) из одного или нескольких ранее известных суждений. Ранее известные суждения, входящие в состав умозаключения, называются его *посылками,* а новое суждение называется его *следствием* (или *заключением).* С содержательной точки зрения умозаключение есть переход от уже имеющегося (наличного) знания к новому знанию. С формальной точки зрения умозаключение есть переход от посылок к следствию. В логике умозаключение принято представлять в виде фигуры, в которой посылки записаны одна иод другой и отделены горизонтальной чертой, под которой записано следствие.

Умозаключения делятся на дедуктивные и индуктивные. Схожим является мнение о том, что дедуктивные умозаключения, это «умозаключения от общего к частному», а индуктивные – «от частного к общему».

Дедуктивное умозаключение, прежде всего, основано на анализе формальной (логической) структуры посылок и следствия, *индуктивное умозаключение* основано на анализе их содержания.

Рассмотрим и проанализируем следующие примеры.

Пример 7.3

«Если четырехугольник является квадратом, то его диагонали равны»; «Четырехугольник A B C D – квадрат»

«Диагонали четырехугольника *ABCD* равны».

Пример 7.4

«Если число делится на 6, то оно четное»;

«Число 18 делится на 6».

«Число 18 четное».

Пример 7.5

«Дуб — лиственное дерево»;

«Береза — лиственное дерево»;

«Липа — лиственное дерево».

«Все деревья — лиственные.

Пример 7.6

«Обь замерзает зимой»;

«Енисей замерзает зимой»;

«Лена замерзает зимой».

«Все сибирские реки замерзают зимой».

В примерах 7.3 и 7.4 сделаем соответствующие выводы исходя из анализа формальной структуры посылок и следствия, фактически не обращая внимания на их содержание. Более того, с точки зрения логики эти умозаключения представляются одинаковыми, несмотря на то что не имеют между собой ничего общего по содержанию. Это типичные примеры дедуктивных умозаключений. В то же время, переходя от посылок к следствиям в умозаключениях примеров 7.5 и 7.6, мы не можем отвлечься от их содержания. И хотя эти умозаключения также имеют одинаковую структуру, анализ их содержания приводит нас к построению неверного умозаключения.

В случае, когда среди посылок умозаключения имеются ложные, говорят о наличии в умозаключении *фактической ошибки;* если же неправильным является само дедуктивное умозаключение, то говорят о *логической ошибке.*

В заключение обратим внимание на то, что в отличие от высказываний (суждений), которые делятся на истинные и ложные, умозаключения делятся на правильные и неправильные. Это терминологическое различие не является случайным. Дело в том, что каждое высказывание утверждает наличие или отсутствие у предметов или явлений тех или иных свойств или отношений между ними. Поэтому каждое высказывание имеет в качестве своего «прообраза» некоторые связи и отношения между предметами и явлениями реального мира и допускает, хотя бы в принципе, проверку на истинность. Именно это обстоятельство подчеркивают, говоря, что данное высказывание является истинным или ложным. В то же время в реальном мире не происходит никаких реальных процессов и явлений, которые можно было бы считать «прообразами» логической операции перехода от одних высказываний к другим. Эта логическая операция является чисто умственной, она происходит лишь в нашем сознании и даже в принципе не допускает «проверки на истинность». Выделение правильных умозаключений является одним из видов познавательной деятельности, который связан с другими видами познания и основан в конечном итоге на громадном практическом опыте человечества.

Правильные и неправильные дедуктивные умозаключения.

В § 6 разработана теория, позволяющая давать ответ на вопрос, является ли та или иная формула логическим следствием данной совокупности формул или нет, а также находить все логические следствия из данных формул. Применим ее к рассуждениям, представляющим собой последовательности высказываний (суждений), для того чтобы определить, правильно рассуждение или нет, т.е. правильное или неправильное умозаключение сделано с помощью данного рассуждения из данных посылок.

Пример 7.9. Рассмотрим следующее рассуждение: «Если четырехугольник *ABCD* — параллелограмм, то его противоположные углы равны. Четырехугольник *ABCD* — параллелограмм; Следовательно, его противоположные углы равны». Чтобы ответить на вопрос, верно ли это рассуждение, нужно выяснить, будет ли формула алгебры высказываний, отражающая структуру заключения данного рассуждения, логическим следствием формул алгебры высказываний, отражающих структуры его посылок. Структура посылок выражается формулами X, $X \to Y$, а структура заключения — формулой Y. (Легко убедиться в этом, если вместо пропорциональной переменной X подставить в формулы высказывание «Четырехугольник *ABCD* — параллелограмм», а вместо Y — высказывание:«Противоположные углы четырехугольника *ABCD* равны».) Известно , что формула Y является логическим следствием формул X, $X \to Y$. Поэтому приведенное расуждение является правильным, и сделанное заключение действительно следует из посылок.

Рассуждения такой формы нередки в математике. Приведем еще одно подобное рассуждение: «Если 10 делится на 3, то 100 делится на 3. 10

делится на 3. Следовательно, 100 делится на 3». Проведенное рассуждение правильно, но его заключение ложно. Это обстоятельство не должно нас смущать: ведь правильное рассуждение приводит к истинному утверждению при условии, что все посылки рассуждения были истинными. В данном случае из двух посылок одна не является истинной.

Обратим особое внимание на два типа наиболее часто встречающихся неправильных рассуждений. Первое рассуждение выглядит так. Мы исходим из некоторого предположения и, правильно рассуждая, приходим к правильному выводу. Отсюда делаем вывод, что сделанное предположение верно. С точки зрения математической логики схема этого рассуждения такова: из истинностиутверждений $X \to Y$ и Y делается вывод об истинности утверждения *X*. Чтобы ответить на вопрос о правильности такой схемы рассуждений, рассмотрим два примера рассуждений, основанных на; этой схеме.

Пример 7.11. «Если число натуральное, то оно рациональное $(A \to B)$. Число 17 рациональное *(В)*. Следовательно, число 17 натуральное (А)».

Пример 7.12. «Если число натуральное, то оно рациональное $(A \to B)$. Число 3/4 рациональное *(В)*. Следовательно, число 3/4 натуральное (А)».

В каждом из этих рассуждений обе посылки являются истинными утверждениями. Но в первом случае мы приходим к истинному заключению (число 17 — натуральное), а во втором — к ложному (число 3/4 не натуральное). Это означает, что неверной является сама схема построения умозаключения, примененная в этих примерах. Неверность, неправомочность схемы означает, что между посылками и заключением нет отношения логического следования. Здесь еще раз уместно подчеркнуть, что правильность умозаключения определяется формой умозаключения, а не истинностью входящих в него утверждений. Иначе говоря, анализируя правильность рассуждения, нужно помнить о том, что его правильность не совпадает с истинностью полученного заключения. Схема умозаключения — это и есть то, что изучает логика, а истинность утверждений, входящих в рассуждение, — это прерогатива той науки (или практики), откуда взяты эти утверждения. Развивая эту мысль, можно заметить, что и термин «следует» употреблять в разных смыслах. Важно понимать существенное различие между следованиями: «из $F \to G$ следует $\neg G \to \neg F$» и «из $a < 3$ следует $a < 5$». Первое — утверждение логики, т. е. логическое следование, второе — как свойство отношения порядка < в каком-то числовом множестве, есть некое математическое следование (т.е. следование в рамках некоторой математической теории).

Итак, неправильность рассмотренной схемы рассуждений приводит к тому, что относительно исходного предположения X нельзя сделать вывод о его истинности: оно может быть как истинным, так и неистинным, причем его истинность или ложность никак не связаны с проведенным рассуждением. Этот же вывод подтверждает математическая логика: логическое следование $X \to Y,\ Y \models X$ несправедливо, потому что формула $((X \to Y) \wedge Y) \to X$ не является тавтологией.

Принцип полной дизъюнкции.

Этот принцип носит также название «теоремы об обратимости системы импликаций», или «закона замкнутой системы утверждений», или «закона Гаубера». Обратим ниимание на то, что этот принцип представляет собой обобщение ситуации, связанной с отношениями между истинностными значениями прямой, обратной, противоположной и обратной противоположной теорем. В самом деле, для утверждений $A \to B$ (прямая теорема), $\neg A \to \neg B$ (противоположная теорема), $B \to A$ (обратная теорема), $\neg B \to \neg A$ (теорема, обратная противоположной) справедливо следующее: если первые два из них ($A \to B$ и $\neg A \to \neg B$) верны, то верны оба вторых утверждения ($B \to A$ и $\neg B \to \neg A$). Если исходных утверждений будет не два, а больше, то этот случай и рассматривается в теореме об обратимости системы импликаций. Она позволяет делать вывод о справедливости обратных теорем, если посылки и следствия прямых теорем удовлетворяют некоторым условиям.

Теорема 7.18 (об обратимости системы импликаций, или принцип полной дизъюнкции). Пусть справедливы все следующие прямые теоремы (m > 2): $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$, ..., $A_m \to B_m$. Причем из посылок A_1, $A_ъ$ ..., A_m по меньшей мере одна выполняется (т.е. истинна), а следствия B_1 B_2, ..., B_m попарно исключают друг друга (т. е. никакие два различных следствия не могут быть истинны одновременно, а значит истинны все следующие утверждения $\neg(B_i \wedge B_j)$, для $1<i,j<m$. Тогда справедливы и все обратные импликации: $B_1, \to A_1$ $B_2 \to A_2$, ..., $B_m \to A_m$.

Доказательство. Покажем сначала истинность первой обратной импликации: $B_1 \to A_1$. Если высказывание B_1 ложно, то импликация $B_1 \to A_1$ истинна в силу определения 1.7 импликации. Предположим теперь, что высказывание B_1 истинно. Покажем, что тогда все высказывания A_2 , A_3, ..., A_m, ложны. Допустим противное: например, пусть A_2 истинно. Тогда из истинности высказываний A_2 и $A_2 \to B_2$ заключаем, что исходя из определения импликации высказывание B_2 истинно. Таким образом, два различных следствия B_1 и B_2 прямых теорем истинны, но это противоречит условию. Следовательно, высказывание A_2 не может быть истинным. Аналогично, не могут быть истинными высказывания A_1, ..., A_m.

Итак, все высказывания A_2 A_3, ..., A_m ложны. Но по условию по меньшей мере одна из посылок A_1, A_2,..., A_m истинна. Следовательно, истинной должна быть посылка A_1. Таким образом, высказывания A_1 *и* B_1 истинны. Тогда (по определению 1.7 импликации) истинна импликация $B_1 \to A_1$.

Совершенно аналогично устанавливается истинность и остальных обратных импликаций $B_2 \to A_2$, ..., $B_m \to A_m$.

Увидим теперь, что ситуация с прямой, обратной, противоположной и обратной противоположной теоремами есть частный случай принципа дизъюнкции. В самом деле, эта ситуация полностью укладывается в условия данной теоремы: у двух данных утверждений $A \to B$ и $\neg A \to \neg B$ из посылок A и $\neg A$ по меньшей мере одна (в данном случае точно одна) истинна, а следствия B *и* $\neg B$ исключают друг друга (т. е. не могут быть истинными одновременно). Тогда справедливы и обратные импликации $B \to A$ и $\neg B \to \neg$A

Суть принципа полной дизъюнкции состоит в том, что он на основе законов логики гарантирует истинность обратных утверждений для специального набора прямых утверждений той или иной теории и позволяет тем самым эти обратные утверждения в этой теории не доказывать, после того как доказаны прямые утверждения. Это — теорема логики может быть применена в самых разных областях математики, она принимает как бы универсальный, всеобщий; характер.

Принцип полной дизъюнкции представляет собой фактически утверждение о логическом следовании одного утверждения из каких-то других, т. е. это есть еще одно правило логического умозаключения в дополнение к тем, которые рассмотрены в § 6. Сформулируем, например, в виде такого правила данный принцип в случае, когда $n = 2$: $\dfrac{P_1 \to Q_1, P_2 \to Q_2, P_1 \vee P_2, \neg(Q_1 \wedge Q_2)}{(Q_1 \to P_1) \wedge (Q_2 \to P_2)}$

Принцип полной дизъюнкции имеет весьма широкое применение во всех дисциплинах школьного курса математики.

Одно обобщение принципа полной дизъюнкции. *Теорема 7.20.* Пусть справедливы все следующие прямые теоремы (m > 2): $(A_1 \wedge C) \to B_1$, $(A_2 \wedge C) \to B_2$, ..., $(A_m \wedge C) \to B_m$, причем из посылок A_1,......, A_m по меньшей мере одна выполняется (истинна), а следствия B_1 B_2, ..., B_m попарно исключают друг друга (т. е. никакие два различных следствия не могут быть истинны одновременно). Тогда справедливы и все следующие обратные импликации: $(B_1 \wedge C) \to A_1$, $(B_2 \wedge C) \to A_2$, ..., $(B_m \wedge C) \to A_m$.

Доказательство. Покажем сначала истинность первой обратной импликации: $(B_1 \wedge C) \to A_1$.

Если высказывание B_1 ложно, то посылка $B_1 \wedge C$ ложна и, значит, импликация $(B_1 \wedge C) \to A_1$ истинна. Предположим теперь, что высказывание B_1 истинно. Тогда, если при этом высказыние C ложно, то снова посылка ($B_1 \wedge C$ ложна, следовательно, импликация $(B_1 \wedge C) \to A_1$ истинна.

Предположим теперь, что и высказывание C истинно. Покажем, что тогда все высказывания A_1, A_2,..., A_m ложны. Допустим противное: например, пусть A_2 истино. Тогда из истинности высказываний A_2, C а значит, и
истинности их конъюнкции $(A_2 \wedge C)$ и $(A_2 \wedge C) \to B_2$, очевидно, вытекает истинность высказывания B_2. Таким образом, два различных следствия B_1 и B_2 прямых теорем истинны. Это противоречит условию. Следовательно, высказывание A_2 не может быть-истинным. Аналогично не могут быть истинными высказывания: $A_3,...,A_m$. Итак, все высказывания $A_2, A_3,..., A_m$ ложны. Но по условию, по меньшей мере одна из посылок $A_1, A_2,..., A_m$ истинна. Следовательно, истинной должна быть посылка A_1. Итак, высказывания B_2, C и A_1 истинны. Тогда истинна конъюнкция $B_1 \wedge C$ и истинна импликация $(B_1 \wedge C) \to A_1$, являющаяся обратной по отношению к первой данной импликации $(A_2 \wedge C) \to B_2$.

Совершенно аналогично устанавливается истинность и остальных обратных импликаций $(B_2 \wedge C) \to A_2$, …, $(B_m \wedge C) \to A_m$

Пример. Примером применения данной теоремы могут служить следующие утверждения а), б*),* в), выражающие свойство монотонности операции умножения в кольце целых чисел или в поле рациональных чисел :

$а) x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz;$

$б) x > y, z < 0 \Rightarrow xz < yz;$

$в) x = y, z > 0 \Rightarrow xz = yz.$

Глава II. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

В настоящей главе познакомимся с еще одним видом функций — булевыми функциями. Они возникли при математической постановке задач логики. Их называют также функциями алгебры логики.

§ 1. Множества, отношения, функции

Понятие множества. Понятие множества — одно из основных математических понятий. Оно первично, исходно, т.е. не может быть сведено к другим понятиям. Под *множеством* понимается совокупность объектов (предметов), которая рассматривается, мыслится как одно целое, как нечто единое. Объекты, составляющие множество, называются его *элементами.* Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита: *A, B,* C,..., а элементы множеств — малыми латинскими буквами: *a, b, c, ...,* $a_1, a_2, \ldots,$Если некоторый объект *a* является элементом множества *A,* т.е. объект *a* принадлежит множеству *A,* то пишут $a \in A$. Если же элемент *a* не принадлежит множеству *A,* то пишут $a \notin A$.

Множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, обозначается $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Символ $\{x : S(x)\}$ применяется для обозначения множества всех таких объектов *x*, которые удовлетворяют некоторомусвойству *S(x).* Если объекты берутся из некоторого множества *A,* то множество всех таких объектов, удовлетворяющих свойству *S(x),* обозначается $\{x \in A : S(x)\}$.

Включение и равенство множеств. Множество *A* называется *подмножеством* множества *B,* или говорят, что *A включается* в *B,* если каждый элемент множества *A* принадлежит множеству *B*. Запись: $A \subseteq B$. Множества *A* и *B* называются *равными,* если *A* состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат *B,* т. е. если $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$. Запись: $A = B$. Множество *A* называется *собственным подмножеством* множества *B,* если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Обозначение: $A \subset B$, $\subset$*-знак включения.*

Множество называется *пустым,* если оно не содержит ни одного элемента. Существует единственное пустое множество, оно обозначается символом $\varnothing$. Значит, $\varnothing \subseteq A$ для любого множества *A*.

Операции над множествами. *Объединением множеств A* и *B* называется множество, обозначаемое $A \bigcup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A* и *B* . Запись:
$A \bigcup B = \{x : x \in A \text{или} x \in B\}$

Пересечением множеств A и *B* называется множество, обозначаемое $A \bigcap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству *A,* так и множеству *B*. Запись:
$A \bigcap B = \{x : x \in A \, и \, x \in B\}$.

Разностью множеств A и В называется множество, обозначаемое $A \setminus B$, элементами которого являются все те элементы множества *A,* которые не принадлежат множеству *B*, и только они. Запись: $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$.

Если $A \subseteq U$ (где *U* — некоторое универсальное множество, которое содержит в качестве подмножеств все рассматриваемые множества), то *дополнением множества A* в множестве *U* называется множество, обозначаемое $\overline{A}$, состоящее из всех тех элементов множества *U*, которые не принадлежат множеству *A*. Итак, $\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \in U, x \notin A\} = \{x \in U : x \notin A\}$

Перечислим некоторые наиболее важные *свойства* операций над множествами и отношения включения множеств:

1) $A \bigcup A = A$ (идемпотентность объединения);

2) $A \bigcap A = A$ (идемпотентность пересечения);

3) $A \bigcup B = B \bigcup A$ (коммутативность объединения);

4) $A \bigcap B = B \bigcap A$ (коммутативность пересечения);

5) $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$ (ассоциативность объединения);

6) $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$ (ассоциативность пересечения);

7) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

8) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно пересечения);

9) $A\bigcup(B\bigcap A)=A$ (первый закон поглащения);

10) $A\bigcap(B\bigcup A)=A$ (второй закон поглащения);

11) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$ (первый закон де Моргана);

12) $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$ (второй закон де Моргана);

13) $A\bigcup U=U, A\bigcap U=A$;

14) $A\bigcup\varnothing=A, A\bigcap\varnothing=\varnothing$;

15) $A\bigcup\overline{A}=U, A\bigcap\overline{A}=\varnothing$;

16) $\overline{\varnothing}=U, \overline{U}=\varnothing$;

17) $\overline{\overline{A}}=A$ (закон инволюции);

18) $A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$;

19) $A\subseteq A\bigcup B, B\subseteq A\bigcup B$;

20) $A\bigcap B\subseteq A, A\bigcap B\subseteq B$;

21) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcap B=A$;

22) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcup B=B$;

23) $A\subseteq B\Leftrightarrow\overline{A}\bigcup B=U$

24) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcap\overline{B}=\varnothing$.

Бинарные отношения и функции. Пусть даны два (не обязательно различных) множества *A* и *B*. Пусть $a\in A$ и $b\in B$. *Упорядоченной парой,* составленной из элементов *a* и *b,* называется пара (a,b), в которой указано, какой элемент является первым, а какой — вторым. Таким образом, упорядоченная пара (b,a) отличнг от упорядоченной пары (a,b), если $a\neq b$. Упорядоченные пары (a,b) и *(c, d)* называются *равными,* если и только если *a* = *c* и *b* = *d.*

Прямым (или *декартовым) произведением* двух множеств *A* и *B* называется множество *A* × *B* всевозможных упорядоченных пар (a,b), таких, что $a\in A$ и $b\in B$: $A\times B=\{(a,b):\ \mathrm{a}\in\mathrm{A}\ \text{ и }\mathrm{b}\in\mathrm{B}\}$. *Бинарным отношением* между элементами множеств *А и В* называется любое множество упорядоченных пар *(a,b)*таких, что $a \in A$ и $b \in B$, т. е. любое подмножество прямого произведения $A \times B$ Если *р*— бинарное отношение и записано (х, *у)* $\in p$, то говорят, что х и *у* связаны отношением *р*, или *х* находится с *у* в отношении *р* , или для *х* и *у* выполняется отношение *р*. Вместо записи (*х*, *у)* $\in p$ используют также запись *х р у.*

Бинарное отношение $f \subseteq A$ х *В* называется *функцией, заданной на множестве А иВ принимающей значения в множестве В* (или *отображением множества А в В),* если: а) для любого $x \in A$ найдется $y \in B$, такой, что *(x, y)*$\in f$; б) для любых $x \in A, y_1, y_2 \in B$ из того, что $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$ следует, что $y_1 = y_2$. Другими словами, f - функция, если для любого $x \in A$ существует единственный $y \in B$, такой, что *(x, y)*$\in f$. Этот единственный элемент *у* называется *значением функции* f *. для аргумента х* и обозначается $f(x)$.Если *(х, у)*$\in f$ то используется запись *у =f(x).* Множество *А* называется *областьщ определения функции f , В — областью ее изменения.* То, что *f* есть функция (отображение) из *А* в *В,* записывают в виде: $f : A \to B$. Функция $f : A \to B$ называется *инъективной* (или *взаимнооднозначной),* если для любых $x_1, x_2 \in A$ из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ непременно вытекает равенство аргументов $x_1 = x_2$. Функция $f : A \to B$ -называется *сюръективной* (или *отображением А на В),* если для любого $y \in B$ найдется хотя бы один $x \in A$, такой, что *у =f(x).* Функция $f : A \to B$ называется *биективной* (или *биекцией),* если она одновременно инъективна и сюръективна.

Понятие *п*-арного отношения. Обобщением понятия упорядоченной пары элементов является понятие *кортежа (упорядоченного набора)* объектов. Кортеж *п* объектов $a_1, a_2, ..., a_n$ обозначается $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Два кортежа $(a_1, ..., a_n)$ и $(b_1, ..., b_n)$ называют *равными* и пишут $(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_n)$, если и только если $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$. *Прямым произведением п* множеств $A_1, ..., A_n$ называется множество $A_1 \times ... \times A_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n\}$.

Если $A_1 = ... = A_n = A$, то прямое произведение $A \times ... \times A$ называют *n- прямой степенью множества A* и обозначают A^n.
Таким образом, *n-арным отношением* между элементами множества $A_1, ..., A_n$ называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times ... \times A_n$.

§ 2. Булевы функции от одного идвух аргументов

Булевы функции от одного аргумента. *Определение. Булевой функцией от одного аргумента* называется функция *f* заданная множестве из двух элементов и принимающая значения в том двухэлементном множестве.
Элементы двухэлементного множества обозначим 0 и 1. Таким образом, $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$. Перечислим все булевы функции от одного аргумента:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0 1	0 0	0 1	1 0	1 1

Всего имеется четыре различных булевых функции одного аргумента:
$f_0(x) = 0$ — функция, тождественно равная 0 (тождественный нуль);
$f_1(x) = x$ — тождественная функция;
$f_2(x) = x'$ — функция, называемая отрицанием;
$f_3(x) = 1$ — функция, тождественно равная 1 (тождественная единица).

Булевы функции от двух аргументов. *Определение. Нулевой функцией от двух аргументов* называется функция *g,* заданная множестве $\{0,1\} \times \{0,1\}$ и принимающая значения и двухэлементном множестве $\{0,1\}$. Другими словами, булева функция от двух аргументов сопоставляет любой упорядоченной паре, составленной из элементов 0 и 1 (а таких упорядоченных пар будет четыре), (либо 0, либо 1).
Перечислим все возможные булевы функции от двух аргументов в форме следующей таблицы:

		0	$\bullet$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

где $g_0(x,y)=0$ - *тождественный ноль*; $g_1(x,y)$ - *конъюнкция* (обозначается xy), конъюнкция принимает значение 1 , тогда и только тогда, когда оба её аргумента принимают значение равное единице, отрицание конъюнкции называются *штрихом Шеффера* и обозначается $x|y$, т. о. $g_{14}(x,y)=(x\cdot y)'=x\mid y$,эта функция принимает значение 0 в том случае, когда функция $g_1(x,y)=1$; $g_7(x,y)$ - *дизъюнкция* (обозначается $x\vee y$); $g_8(x,y)$ носит название *стрелка Пирса,* обозначается $x\downarrow y$ и $g_8(x,y)=(x\vee y)'=x\downarrow y$; $g_{13}(x,y)$ - *импликация*, обозначается $x\to y$, где x-посылка импликации, y-её следствие; $g_2(x,y)=(x\to y)'$ - отрицание импликации; $g_{11}(x,y)$ - *антиимпликация* или *обратная импликация*, $g_{11}(x,y)=y\to x$, его отрицанием *является* $g_4(x,y)=(y\to x)'$; $g_9(x,y)=x\leftrightarrow y$ - эквивалентность, принимает значение 1 тогда и только тогда, когда оба её аргумента принимают одинаковые значения, $g_6(x,y)$ является отрицанием $g_9(x,y)$, называется *сложением по модулю два,* или *суммой Жегалкина и обозначается* $x+y$*;* $g_3(x,y)=x$, $g_{12}(x,y)=x'$; $g_5(x,y)=y$, $g_{10}(x,y)=y'$

Две булевы функции *f(x, y)* и *g(x, y)* называются *равными,* если каждому набору значений аргументов x, y обе функции сопоставляют один и тот же элемент из множества {0, 1}, *f(a, b) = g{a, b)* для любых *a, b* $\in$*{0, 1}*. Например, $x\vee y=y\vee x$

Свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. *Теорема. Для булевых функций выполняются следующие равенства:*

а) $x\vee x=x, x\cdot x=x$ *(идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции);*

б) $x \vee y = y \vee x, x \cdot y = y \cdot x$ *(коммутативность дизъюнкции и конъюнкции);*

в) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции)*

г) $x \vee 1 = 1, x \cdot 1 = x$*;*

д) $x \vee 0 = x, x \cdot 0 = 0$;

е) $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z), x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$ *(атрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции и дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);*

ж) $x \vee (y \cdot x) = x, x \cdot (y \vee x) = x$ *(законы поглащения);*

и) $(x \vee y)' = x' \cdot y', (x \cdot y)' = x' \vee y'$ *(законы де Моргана);*

к) $x \vee x' = 1, x \cdot x' = 0$*;*

л) $x'' = x$.

Выражение одних булевых функций через другие. *Теорема. Справедливы следующие равенства, выражающие одни булевы функции через другие:*

а) $x \cdot y = (x' \vee y')'$*;*

б) $x \vee y = (x' \cdot y')'$*;*

в) $x \vee y = (x \to y) \to y$*;*

г) $x \vee y = x' \to y$*;*

д) $x \to y = x' \vee y$*;*

е) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \cdot (y \to x)$*;*

ж) $x' = x \mid x$*;*

з) $x \mid y = (x \cdot y)'$*;*

и) $x \vee y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$*;*

к) $x' = x \downarrow x$*;*

л) $x \downarrow y = (x \vee y)'$*;*

м) $x \cdot y = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для *а)* и *б)* доказательства равенств легко следуют из законов де Моргана, если на обе части каждого из них «навесить» знак отрицания, а затем к левым частям полученных равенств применить равенство из *теоремы о свойствах конъюнкции , дизъюнкции и отрицания.*

Для *в)* и *г)* равенства можно проверить с помощью общего метода таблиц, а можно воспользоваться равенством *д),,* преобразуя, например, правую часть первого равенства.

Тогда $(x \to y) \to y = (x' \vee y) \to y = (x' \vee y)' \vee y = (x'' \vee y') \vee y = (x \vee y) \cdot 1 = x \vee y$.

д), е), ж), к) з) Равенства легко проверяется с помощью таблиц.

*з), л)*Равенства уже отмечались при определении фунций штрих Шеффера и стрелка Пирса.

и) Можно составить таблицы, а можно рассуждать следующим образом: $x' \mid y' = (x' \cdot y')' = x \vee y$. В первом равенстве использокано предыдущее соотношение *з)*.

м) Докажите равенство подобно тому как было доказано венство *и),* используя при этом соотношение л).

□

§ 3. Булевы функции от *n* аргументов

Понятие булевой функции. *Определение. Булевой функцией от n аргументов* называется функция f, заданная на множестве *{0, 1}*^{n} и принимающая значения в двухэлементном множестве *{0, 1}*. Другими словами, булева функция от *n* аргументов сопоставляет каждому упорядоченному набору длины *n*, составленному из элементов 0 и 1, либо 0, либо 1.

Две булевы функции от л аргументов $f(x_1, x_2, ..x_n)$ и $g(x_1, x_2, ..x_n)$ называются *равными,* если любым одинакокмм наборам значений аргументов $x_1, x_2, ..x_n$ обе эти функции сопоставляют одинаковые элементы из множества *{0, 1},* т.е. $f(a_1, a_2, ..a_n) = g(a_1, a_2, ..a_n)$ для любых элементов $a_1, a_2, ..a_n \in \{0,1\}$.

Определение. Суперпозицией булевых функций $g_1(y_1^1, y_1^2, ..., y_1^{m_1}), ..., g_n(y_n^1, y_n^2, ..., y_n^{m_n})$ в булеву функцию $f(x_1, x_2, ..x_n)$ называется новая булева функция $F(y_1^1, ..., y_1^{m_1}, ..., y_n^{m_n})$ зависит от $m_1 + m_2 + ... + m_n$ аргументов.

Зафиксировав один из аргументов булевой функции $f(x_1, x_2, ..x_n)$ от *n* аргументов, получим функцию от *n-1* аргументов.

Число булевых функций. *Теорема* (о представлении булевых функций через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание). *Всякая булева функция*

$f(x_1, x_2, ..x_n)$ *может быть представлена в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания; причем знак отрицания стоит только непосредственно около переменной и не стоит ни перед одной из внутренних скобок.*

Доказательство будем вести методом математической индукции по числу *n* аргументов функции *f*.

Предположим, что теорема верна для всех функций от *k* аргументов. Докажем ее для функций от *k*+ *1* аргумента. Пусть $f(x_1,...,x_k,..x_{k+1})$ — произвольная булева функция от *k*+ *1* аргумента. Разложение данной функции по последней переменной $f(x_1,...,x_k,..x_{k+1}) = (x_{k+1} \cdot f(x_1,...,x_k,...,1)) \vee (x'_{k+1} \cdot f(x_1,...,x_k,...,0))$ Каждая из функций $f(x_1,...,x_k,...,1)$ и $f(x_1,...,x_k,...,0)$ есть булева функция от *k* аргументов. Но согласно предположению индукции, все такие функции выражаются через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, причем знак отрицания стоит только непосредственно около переменных и не стоит ни перед одной из внутренних скобок. Принимая это во внимание, видим, что правая часть последнего равенства представляет собой суперпозицию лишь трех функций — конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Причем отрицание стоит около переменной x_{k+1} Это и доказывает окончательно теорему.

Булевы функции и формулы алгебры высказываний. Установим сначала соответствие между формулами алгебры высказываний и булевыми функциями. Это делается следующим образом. Во-первых, определяется взаимно-однозначное соответствие между пропозициональными переменными и булевыми переменными, при котором прописная буква, обозначающая пропозициональную переменную, соответствует той же самой строчной букве, обозначающей булеву переменную:

$P, Q, R, X, Y, Z, X_1, X_2, ..., Y_1, Y_2, ...$
$p, q, r, x, y, z, x_1, x_2, ..., y_1, y_1, ...$

Во-вторых, устанавливается соответствие между знаками ло- ических связок и одноименных булевых функций:

Логические связки	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Булевы функции	'	$\cdot$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Наконец скобкам ставятся в соответствие тс же скобки. Тогда каждой формуле алгебры высказываний соответствует единственная булева функция, а каждой булевой функции соответствует формула алгебры высказываний.

Если булева функция задана с помощью формулы, то для того чтобы найти соответствующую этой функции формулу алгебры высказываний, нужно в выражении для булевой функции заменить строчные буквы такими же прописными буквами, а каждый символ булевой функции заменить соответственно им символом одноименной логической операции .Здесь возникает неоднозначность такого обратного соответствии, поскольку булева функция может иметь множество различных формульных выражений.

Нормальные формы булевых функций. Всякая булева функция может быть представлена некоторой формулой алгебры высказываний. Нетрудно понять, что всякая формула алгебры высказываний, *равносильная* формуле, представляющей некоторую булеву функцию *f,* будет представлять функцию равную *f.* В частности, одной из таких представляющих формул будет совершенная дизъюнктивная нормальная форма (если данная булева функция не равна тождественно 0, т.е. представляющая формула не тождественно ложна) или совершенная конъюнктивная нормальная форма (если данная булева функция не равна тождественно 1, т.е. представляющая формула не является тавтологией). Отыскав совершенную нормальную форму для формулы алгебры высказываний, представляющей данную булеву функцш можно перейти от этой формы к формульному выражению для данной булевой функции. Его будем называть *совершенной дизъюнктивное(или конъюнктивной) нормальной формой* данной булевой функции, сокращенно *СДН-формой* или соответственно *СКН-формой.* Каждая из них для данной булевой функции, если она существует, единственна.

§4. Системы булевых функций

Полные системы булевых функций. *Определение.* Система булевых функций называется полной, если всякая булева функция является суперпозицией функций из этой системы.

Теорема. Следующие системы булевых функций являются полными: $1)\{\vee,\cdot,'\};2)\{+,\cdot,'\};3)\{\vee,'\};4)\{\cdot,'\};5)\{\to,'\};6)\{|\};7)\{\downarrow\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу полноты системы {v, ⋅,'} каждая булева функция является суперпозицией дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Если можно выразить дизъюнкцию через функции +, ⋅, и ' , то тем самым докажем, что всякую функцию можно выразить через эти функции, т.е. докажем полноту системы функций {+ , ⋅ , '}. Это можно сделать так: $x \vee y = x + y + x \cdot y$. Аналогично, для проверки полноты системы (v, '} нужно выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание.

Полнота системы {∨, '} вытекает из полноты системы {v, ⋅, '}, а полнота системы {→,'} — из полноты системы{v, '}.

Наконец система { | } полна, потому что каждая функция есть суперпозиция функций ∨ и ', а обе эти функции могут быть выражены через функцию штрих Шеффера. Аналогично, система { ↓} полна, так как полна система {⋅, '}. Теорема доказана. □

Специальные классы булевых функций. Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *сохраняет* 0, если $f(0,0,...,0) = 0$. Обозначим P_0 — класс всех булевых функций, сохраняющих 0,

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ сохраняет 1, если $f(1,1,...,1) = 1$ Обозначим P_1 — класс всех булевых функций,сохраняющих 1.

Булева функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *двойственной* функцией для булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$,если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f'(x_1', x_2', ..., x_n')$ для любых $x_1, x_2, ..., x_n$

Функция f называется *самодвойственной,* если $f^* = f$.Класс всех самодвойственных булевых функций обозначим *S.*

Введем на множестве {0, 1} отношение порядка, полагая, что $0 \le 0, 0 \le 1, 1 \le 1$. Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *монотонной,* если для любых $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \{0,1\}$ из $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, ..., \alpha_n \le \beta_n$ немедленно следует, что $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \le f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ Класс всех монотонных функций обозначим *M.*

Наконец, булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *линейной,* если ее можно представить в виде следующего выражения(называемого полиномом Жегалкина степени не выше первой*)* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ постоянные, равные либо 0, либо 1. Символом *L* обозначим класс всех линейных булевых функций.

Класс булевых функций называется *собственным,* если он пуст и не совпадает с классом всех булевых функций. Класс булевых функций называется *замкнутым* или *классом Поста,* если вместе со всякими своими функциями содержит любую их суперпозицию.

Теорема. Классы P_0, P_1 ,S, M, L являются собственны замкнутыми классами булевых функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим сначала, что все эти классы являются собственными. Укажем функции, которые принадлежат и не принадлежат каждому из рассматриваемых классов. Как классу P_o, так и классу P_1, принадлежит, например, конъюнкция и не принадлежит отрицание. Далее, конъюнкция не является самодвойственной функцией, а отрицание есть функция самодвойственная. Наконец, к классу монотонных функций принадлежит конъюнкция и не принадлежит импликация, а к классу *L* линейных функций принадлежит сложение по модулю два (сумма Жегалкина) и не принадлежит конъюнкция.

Покажем теперь замкнутость этих классов. Пусть $f_1, f_2, f_3 \in P_0$, т. е. $f(0,0) = f_2(0,0) = f_3(0,0) = 0$ и $g(x_1, x_2) = f_1(f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$. Тогда

$g(0,0)=f_1(f_2(0,0),f_3(0,0))=f_1(0,0)=0$, т. е. $g\in P_0$. Аналогично проверяется замкнутость класса P_1.

Пусть теперь $f_1,f_2,f_3\in S$, т. е. $f_1'(u,v)=f_1(u',v'), f_2'(x_1',x_2')=f_2(x_1,x_2), f_3'(x_1',x_2')=f_3(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)=f_1(f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2))$. Тогда $g^*(x_1,x_2)=g'(x_1',x_2')=f_1'(f_2(x_1',x_2'),f_3(x_1',x_2'))=f_1(f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2))=g(x_1,x_2)$, т. е. $g^*=g$ и значит $\in S$.

Пусть далее $f_1,f_2,f_3\in M$ и $\alpha_1\le\beta_1,\alpha_2\le\beta_2$ и $g(x_1,x_2)=f_1(f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2))$. Тогда $f_2(\alpha_1,\alpha_2)\le f_2(\beta_1,\beta_2)$, $f_3(\alpha_1,\alpha_2)\le f_3(\beta_1,\beta_2)$ и $g(\alpha_1,\alpha_2)=f_1(f_2(\alpha_1,\alpha_2),f_3(\alpha_1,\alpha_2))\le f_1(f_2(\beta_1,\beta_2),f_3(\beta_1,\beta_2))=g(\beta_1,\beta_2)$, следовательно, $g\in M$.

Наконец, пусть $f_1,f_2,f_3\in M$, т.е., например $f_1(x_1,x_2)=a_0+a_1x_1+a_2x_2, f_2(x_1,x_2)=b_0+b_1x_1+b_2x_2, f_3(x_1,x_2)=c_0+c_1x_1+c_2x_2,$.

Тогда $\begin{aligned}&g(x_1,x_2)=f_1(f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2))=a_0+a_1f_2(x_1,x_2)+\\&+a_2f_1(x_1,x_2)=a_0+a_1(b_0+b_1x_1+b_2x_2)+a_2(c_0+c_1x_1+c_2x_2)=d_0+d_1x_1+d_2x_2\end{aligned}$, т. е. $g\in L$

Теорема доказана.

Теорема Поста о полноте системы булевых функций. Эта теорема доказана американским математиком Э. Постом в 1921 г.

Теорема . (о полноте системы булевых функций). Система булевых функций $\{f_0,f_1,...,f_s,...\}$ является полной тогда и только тогда, когда в этой системе имеется функция, не принадлежащая классу *P_0,* имеется функции, не принадлежащая классу P_1, имеется функция, не принадлежащая классу *S*, имеется функция, не принадлежащая классу *M*, имеется функции, не принадлежащая классу *L*.

§ 5. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам

Идея применения. Под *релейно-контактной схемой* понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Ономожет быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: *замыкающив* и *размыкающие.* Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов — как замыкающих, так и размыкающих. Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находится соответствующий контакт.

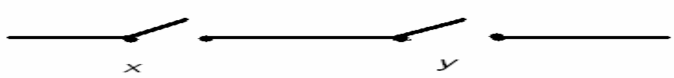
Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нем замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся к данному реле, размыкаются. Поскольку замыкающие контакты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также *нормально разомкнутыми.* Аналогично, размыкающие контакты называются также *нормально замкнутыми.* При обесточивании обмоток реле (т.е. когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие, замыкаются.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменили x_1, или x_2,..., или x_n которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле *x,* обозначаются тем же символом *x,* а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицанием x'. Это означает, что при срабатывании реле JC все его замыкающие контакты *x* проводят ток и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты *x* не проводят электрический ток и им сопоставляется значение 0. При отключенном реле *x* создается противоположная ситуация: все его замыкающие контакты *x* разомкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (переменная *x* принимает) значение 0, а все его размыкающие контакты x' замкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется значение 1.

Всей релейно-контактной схеме тогда ставится в $x_1, x_2, ..., x_n$, сопоставленным тем реле, которые участвуют в схеме. Если при данном наборе состояний реле $x_1, x_2, ..., x_n$ (некоторые из этих реле находятся в рабочем состоянии под током, остальные отключены, т.е. «обесточены») вся релейно-контактная схема проводит электрический ток, то переменной y ставится в соответствие (другими словами, переменная y принимает) значение 1. Если же при этом наборе состояний реле $x_1, x_2, ..., x_n$ схема не проводит электрический ток, то считаем, что переменная y принимает значение 0

Булева функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *функцией проводимости* данной релейно-контактной схемы.

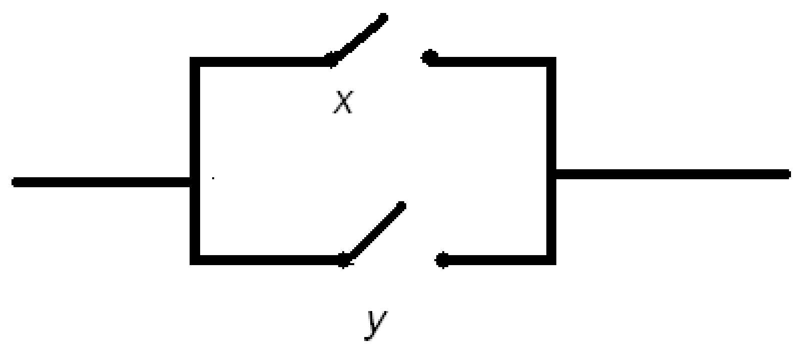
Таким образом, теория булевых функций предоставляет математические модели реальных физических релейно-контактиых схем. Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдем их функции проводимости. Первая схема состоит из двух последовательно соединенных контактов x и y, т.е. контактом, связанных с двумя независимыми реле x и y, каждое из которых срабатывает независимо от другого:



Данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты. Это конъюнкция $x \cdot y$. Таким образом, *функцией проводимости* релейно-контактной схемы, состоящей из двух последовательно соединенных контактов x и y, является конъюнкция.

Говорят, что *последовательное соединение двух контактов* реализует конъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Вторая релейно-контактная схема состоит из двух параллельно соединенных контактов *x* и *y:*

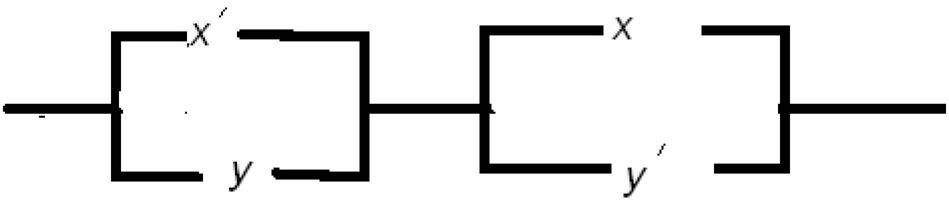


Ясно, что эта схема проводит электрический ток в том только в том случае, когда по меньшей мере один из контактов замкнут, т.е. лишь в случае, когда бы одна из булевых переменных (*x* или *y*) принимает значение 1. Булева функция отхотя от двух аргументов *x* и *y,* удовлетворяющая этому условию, также хорошо нам известна. Это, дизъюнкция $x \vee y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух раллельно соединенных контактов *x* и *y,* является дизъюнкция $x \vee y$ Говорят, что *параллельное соединение двух контактов* реализует дизт юнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Итак, с помощью релейно-контактных схем можно реализовывать булевы функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Реализуем, например, в виде релейно-контактных схем булевы функции — импликацию и эквивалентность. Для этого выразим их через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Релей но-контактная схема, реализующая функцию $x \leftrightarrow y$, будет состоять из двух послед довательно соединенных ветвей, первая из которых реализует леву функцию $x' \vee y$, а вторая — булеву функцию $y' \vee x$. В свою очередь, первая из ветвей будет состоять из двух параллельны участков, один из которых содержит контакт x', а второй —

контакт *y*. Аналогично, вторая ветвь также будет состоять из двух параллельных участков, один из которых содержит контакт *x,* а другой — контакт y'. Изображаем полученную релейно-контактную схему



Две основные задачи теории релейно-контактных схем. Составление релейно-контактных схем с заданными условиями работы называется *задачей синтеза* релейно-контактных схем и является первой важной задачей, состоящей в том, что требуется построить схему, которая проводила бы электрический ток лишь при вполне определенных задаваемых условиях.

Естественно было бы выбирать для каждой булевой функции простую или одну из самых простых реализующих её релейно-контактных схем. Поэтому упрощение релейно-контактных схем называется *задачей анализа* таких схем и является важной задачей теории релейно-контактных схем. Две релейно-контактные схемы, составленные из одних и тех же реле, называются *равносильными,* если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток. Другими словами, две схемы, составленные из одних и тех же реле, равносильны, если они обладают одинаковыми функциями проводимости, зависящими от одних и тех же переменных. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов. Задача упрощения релейно-контактной схемы состоит в нахождении более простой равносильной ей схемы.

§ 6. Релейно-коитактные схемы в ЭВМ

Двоичный полусумматор. Числа в ЭВМ хранятся в двоичной системе в ячейках памяти поразрядно. С технической точки зрения в двоичной системе оказалось удобно не только хранить число, но и выполнять над ними различные действия. Так, сложение двоичных чисел осуществляется на основе следующих правил: 0+ 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1+ 0 = 1, 1 + 1 = 10. Сложение по этим правилам делается по каждому разряду двух ячеек, в которых хранятся слагаемые. Если же происходит переполнение данного разряда, то происходит перенос единицы в следующий разряд. Таким образом, процесс сложения в одном разряде может быть охарактеризован двум булевыми функциями: $S(x, y)$ и $P(x, y)$, зависящими от складываемых чисел x и y. Первая функция $S(x, y)$ представляет собой значение суммы, записываемое в тот же разряд соответствующей ячейки, в котором происходит сложение. Вторая функция — функция переноса $P(x, y)$ — дает значение числа, переносимого следующий, более старший разряд при переполнении разряда, , котором происходит сложение. Таблица истинности этих функций следующая:

x	y	$S(x, y)$	$P(x, y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Используя СДН-формы, выписываем для них выражения, gо которым легко построить соответствующие релейно-контактные, схемы: $S(x, y) = x'y \vee xy'$ $P(x, y) = xy$.

Одноразрядный двоичный сумматор. При сложении двух чисел описанные в предыдущем пункте действия совершаются лишь в первом разряде ячеек, хранящих слагаемые. Во всех же остальных разрядах, начиная со второго, в процессе сложения участвуют уже не два слагаемых $x_к$ и $y_к$, но еще и число, переносимое из предыдущего разряда и равное значению функции переноса $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ в этом разряде. Таким образом, функция сумма S_k в k-м разряде *(к* ≥ 2) зависит от трех аргументов, т.е. $S_k = S_k(x_k, y_k, P_{k-1})$ От этих же аргументов зависит и функция переноса из *к*-го разряд $P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$ а. Составим таблицу значений этих функций:

$x_к$	$y_к$	P_{k-1}	$S_k(x_k, y_k, P_{k-1})$	$P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Используя СДН-формы, найдем для них выражения, которые погом упростим, преобразуя тождественным образом:

Шифратор и дешифратор. Человек привык оперировать с чис-илми в десятичной системе счисления. Для ЭВМ более удобна двоичная система. Поэтому важную роль в ЭВМ играют устройства, посспечивающие взаимопонимание человека и машины, т.е. устройства, переводящие информацию с языка человека на язык машины и обратно. Такими устройствами являются, например, шифраторы, осуществляющие перевод чисел из десятичной системы в двоичную, и дешифраторы, осуществляющие обратный перевод. Покажем, как конструируется шифратор Имеется следующее соответствие между десятичной и двоичной записями

Десятичная запись	Двоичная запись	Десятичная запись	Двоичная запись
0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4.	0100	9	1001

Каждую колонку из нулей и единиц в правом столбце таблице можно мыслить себе как колонку значений одной из булевых функций: f_1, f_2, f_4, f_8. В самом $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ Причем зависимость следующая:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	f_8	f_4	f_2	f_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1

Каждая из функций f_1, f_2, f_4, f_8 зависит от десяти аргументов Поэтому таблица их значений должна содержать 2^{10} строк. Отсутствие остальных строк в приведенной таблице означает, что на указанных десяти наборах значений аргументов $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ функции должны принимать указанные значения, а остальных наборах их значения могут быть какими угодно. Это в свою очередь, означает, что в качестве каждой из функций f_1, f_2, f_4, f_8 можно взять довольно много (но все же конечное число функций).

Используя СДН-форму, найдем, например, выражение для f_8:

$$f_8(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = x_0' x_1' x_2' x_3' x_4' x_5' x_6' x_7' x_8' x_9' \vee x_0' x_1' x_2' x_3' x_4' x_5' x_6' x_7' x_8' x_9 =$$
$$= x_0' x_1' x_2' x_3' x_4' x_5' x_6' x_7' (x_8 x_9' \vee x_8' x_9).$$

§ 7. О некоторых других приложениях теории булевых функций

Диагностика (распознавание) заболеваний. Как известно, различные заболевания сопровождаются теми или иными симптомами. Эта связь устанавливается экспериментально на основе многолетних медицинских исследований тысяч больных. С помощью математики эти связи можно определенным образом систематизировать, используя аппарат булевых функций.

Распознавание образов. Нетрудно видеть, что в самых общих чертах ситуация, рассмотренная в предыдущем пункте, может быть охарактеризована следующим образом. Имеется некоторое множество скрытых причин (болезней) и множество наблюдаемь следствий (симптомов). Кроме того, имеются высказывания, связывающие причины и следствия. Требуется, опираясь на эти высказывания оказывания, по предъявляемому набору следствий определить возможные причины их породившие. Во второй поломи не XX в сформировалась область прикладной математики, занимающаяся изучением подобных проблем. Она получила названиие *теории распознавания образов.*

5.3 ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Всякое исчисление включает в себя описание символов этого исчисления (алфавита), формул и определение выводимых формул.

Алфавит исчисления высказываний состоит из символов трех категорий:

1. Символы первой категории: $x,\ y,\ z,\ldots$ Эти символы будем называть переменными высказываниями.
2. Символы второй категории: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Они называются логическими связками.
3. Третья категория символов составляет пару символов ( ), называемые скобками.

Определение формулы исчисления высказывания

1. Всякая переменная $x,\ y,\ z,\ldots$ является формулой.
2. Если A и B – формулы, то слова (A$\wedge$B), (A$\vee$B), (A$\rightarrow$B), $\neg A$ - также формулы.
3. Никакая другая строчка символов не является формулой.

АКСИОМЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

I_1 $x \rightarrow (y \rightarrow x)$

I_2 $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$

II_1 $x \wedge y \rightarrow x$

II_2 $x \wedge y \rightarrow y$

II_3 $(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \wedge y))$

III_1 $x \rightarrow x \vee y$

III_2 $y \rightarrow x \vee y$

III_3 $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)$

IV_1 $(x \rightarrow y) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{x})$

IV_2 $x \rightarrow \overline{\overline{x}}$

IV$_3$ $\overline{\overline{x}} \to x$

Правило подстановки $\dfrac{\vdash A}{\vdash \int\limits_x^B (A)}$.

Правило заключения $\dfrac{\vdash B, \vdash B \to C}{\vdash C}$.

Определение доказуемой формулы

1. Всякая аксиома является доказуемой формулой.
2. Формула, полученная из доказуемой формулы путем применения подстановки вместо переменной *x* произвольной формулы *B* есть доказуемая формула.
3. Формула *B*, полученная из доказуемых формул *A* и $A \to B$ путем применения правила заключения, есть доказуемая формула.
4. Никакая другая формула исчисления высказывания не считается доказуемой.

Производные правила вывода

$\dfrac{\vdash A}{\vdash \int\limits_{x,\dots,y}^{B,\dots,C} (A)}$ - правило одновременной подстановки;

$\dfrac{\vdash A_1, \vdash A_2, \dots, \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)))}{\vdash L}$ - правило сложного заключения;

$\dfrac{\vdash A \to B, \vdash B \to C}{\vdash A \to C}$ - правило силлогизма;

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}$$ - правило контрпозиции;

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B}, \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B}$$ - правило снятия двойного отрицания.

Понятие выводимости формулы из совокупности формул

Рассмотрим конечную совокупность формул $H = \{A_1, ..., A_n\}$.

Определение формулы, выводимой из *H*.

1. Всякая формула $A_i \in H$ является формулой, выводимой из *H*.
2. Всякая доказуемая формула выводима из *H*.
3. Если формулы *C* и $C \to B$ выводимы из совокупности *H,* то формула *B* тоже выводима из *H*.

Выводом из совокупности формул *H* называется всякая конечная последовательность формул $B_1, ..., B_k$, всякий член которой удовлетворяет одному из следующих трех условий:

1. он является одной из формул совокупности *H;*
2. он является доказуемой формулой;
3. он получается по правилу заключения из любых двух предшествующих членов последовательности $B_1, ..., B_k$.

Правила выводимости

1. $\frac{H \vdash A}{H, W \vdash A}$

2. $\frac{H, C \vdash A, H \vdash C}{H \vdash A}$

3. $\dfrac{H, C \mid\!- A, W \mid\!- C}{H, W \mid\!- A}$

4. $\dfrac{H \mid\!- C \to A}{H, C \mid\!- A}$

5. Теорема дедукции $\dfrac{H, C \mid\!- A}{H \mid\!- C \to A}$

6. Обобщенная теорема дедукции $\dfrac{\{C_1, ..., C_к\} \mid\!- A}{\mid\!- C_1 \to (C_2 \to ...(C_k \to A)...)}$

7. Правило введения конъюнкции $\dfrac{H \mid\!- A, H \mid\!- B}{H \mid\!- A \wedge B}$

8. Правило введения дизъюнкции $\dfrac{H, A \mid\!- C, H, B \mid\!- C}{H, A \vee B \mid\!- C}$

9. Правило перестановки посылок $\dfrac{\mid\!- A \to (B \to C)}{\mid\!- B \to (A \to C)}$

10. Правило соединения посылок $\dfrac{\mid\!- A \to (B \to C)}{\mid\!- A \wedge B \to C}$

11. Правило разъединения посылок $\dfrac{\mid\!- A \wedge B \to C}{\mid\!- A \to (B \to C)}$

5.4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

§1. Интуитивное представление об алгоритмах

Алгоритмы вокруг нас. Понятие алгоритма стихийно формировалось с древнейших времен. Современный человек понимает под *алгоритмом* четкую систему инструкций о выполнении в определенном порядке некоторых действий для решения всех задач кого-то данного класса.

Многочисленные и разнообразные алгоритмы окружают буквально во всех сферах жизни и деятельности. Многие наши действия доведены до бессознательного автоматизма, мы порой не осознаем, что они регламентированы определенным алгоритмом — четкой системой инструкций.

Неформальное понятие алгоритма. Каждый алгоритм предполагает наличие некоторых *начальных* или *исходных, данных,* а в результате применения приводит к получению определенного искомого *результата*. При вычислении ранга матрицы начальными данными служит прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ рациональных чисел, результат — натуральное число, являющееся рангом данной матрицы.

Далее, применение каждого алгоритма осуществляется путем выполнения дискретной цепочки (последовательности) неких элементарных действий. Эти действия называют шагами, а процесс их выполнения называют *алгоритмическим процессом.* Таким образом, отмечается свойство *дискретности алгоритма.*

Существенной чертой алгоритма является его *массовый характер,* т. е. возможность применять его к обширному классу начальных данных, возможность достаточно широко эти начальные данные варьировать. Другими словами, каждый алгоритм призван решить ту или иную *массовую проблему,* т.е. решать класс однотипных задач. Например, задача нахождения наибольшего общего делителя чисел 4 и 6 есть единичная проблема (можно решить и без применения алгоритма Евклида), но задача нахождения наибольшего общего делителя произвольных натуральных чисел m , n — уже проблема массовая. Суть алгоритма Евклида состоит том, что он приводит к желаемому результату вне зависимости выбора конкретной пары натуральных чисел, в то время как при решении указанной единичной проблемы можно предложить такой способ, который окажется неприменимым для другой пары натуральных чисел.

Непременным условием, которому удовлетворяет алгоритм является его *детерминированность,* или *определенность.* Это означает, что предписания алгоритма с равным успехом могут быть выполнены любым другим человеком и в любое другое время, причем результат получится тот же самый. Другими словами, предписания алгоритма настолько точны и отчетливы, что не допустимо никаких двусмысленных толкований и никакого произвола со стороны исполнителя.

Говоря о начальных данных для алгоритма, имеют в виду так называемые *допустимые начальные данные,* т.е. такие начальные данные, которые .

Под *алгоритмом* понимается четкая система инструкций, определяющая дискретный детерминированный процесс, ведущий от варьируемых начальных данных (входов) к искомому результату (выходу), если таковой существует, через конечное число тактов работы алгоритма; если же искомого результата не существует, то вычислительный процесс либо никогда не оканчиваем либо попадает в тупик.

Необходимость уточнения понятия алгоритма. Понятие алгоритма формировалось с древнейших времен, но до конца первой трети XX в. математики довольствовались интуитивным представлением об этом объекте. Термин «алгоритм» употреблялся в математике , лишь в связи с теми или иными конкретными алгоритмами.

Первые работы по уточнению понятия алгоритма и его изучению, т. е. по теории алгоритмов, были выполнены в 1936—1937 гг. математиками А.Тьюрингом, Э.Постом, Ж.Эрбраном, А. А. Марковым, А.Чёрчем. Было выработано несколько определений понятия алгоритма, но впоследствии выяснилось, что все они равносильны между собой, т.е. определяют одно и то же.

§ 2. Машины Тьюринга

Определение машины Тьюринга. Машина Тьюринга есть математическая (воображаемая) машина, а не машина физическая. Она есть такой же математический объект, как функция, производная, интеграл, группа и т.д. И так же как и другие математические понятия, понятие машины Тьюринга отражает объективную реальность, моделирует некие реальные процессы. Именно Тьюринг предпринял попытку смоделировать действия математика (или другого человека), осуществляющего некую умственную созидательную деятельность. Такой человек, находясь в определенном умонастроении («состоянии»), просматривает некоторый текст. Затем он вносит в этот текст какие-то изменения, проникается новым «умонастроением» и переходит к просмотру последующих записей.

Машина Тьюринга действует примерно так же. Её удобно представлять в виде автоматически работающею устройства. В каждый дискретный момент нремени устройство, находись в некотором состоянии, обозревает содержимое одной ячейки протягиваемой через устройство ленты и делает шаг, заключающийся в том, что устройство переходит в новое состояние, изменяет содержимое обозреваемой ячейки и переходит к обозрению следующей ячейки — справа или слева. Причем шаг осуществлястся на основании предписанной команды. Совокупность всех команд представляет собой программу машины Тьюринга.

Опишем теперь машину Тьюринга Θ более тщательно. Машина Θ располагает конечным числом знаков (символов, букв), образующих так называемый *внешний алфавит* $A=\{a_0,a_1,...,a_n\}$.В каждую ячейку обозреваемой ленты в каждый дискретный момент времени может быть записан только один символ из алфавита *A*. Ради единообразия удобно считать, что среди букв внешнего алфавита *A* имеется «пустая буква», и именно она записана в пустую ячейку ленты. Условимся, что «пустой буквой» или символом пустой ячейки является буква a_0. Лента предполагается неограниченной в обе стороны, но в каждый момент времени на ней записано конечное число непустых букв.

Далее, в каждый момент времени машина Θ способна находиться в одном *состоянии* из конечного числа внутренних состояний, совокупность которых $Q=\{q_0,q_1,...,q_m\}$. Среди состояний выделяются два — *начальное* q_1 и *заключительное* (или *состояние остановки)* q_0. Находясь в состоянии q_1 машина начинает работать. Попав в состояние q_0, машина останавливается.

Работа машины Θ определяется *программой.* Программа состоит из команд. Каждая команда *T(i,j)* $(i=1,2,...,m; j=0,1,...,n)$ представляет собой выражение одного из следующих видов:

$$q_i a_j \to q_k a_l C; q_i a_j \to q_k a_l П; q_i a_j \to q_k a_l Л$$

где $0 \le k \le m; 0 \le \lambda \le n.$. В выражениях первого вида символ *С* будем часто опускать.

Как же работает машина Тьюринга? Находясь в какой-либо момент времени в незаключительном состоянии (т.е. в состоянии отличном от q_0), машина совершает шаг, который полностью определяется ее текущим состоянием q_i и символом a_j, воспринимаемым ею в данный момент на ленте. При этом содержание шага регламентировано соответствующей командой *T(i,j):* $q_i a_j \to q_k a_l X$, где $X \in$ {С, П, Л}. Шаг заключается в том, что: 1) содержимое обозреваемой на ленте ячейки стирается и на его место записывается символ a_l 2) машина переводит в новое состояние q_k; 3) машина переходит к обозрению следующей правой ячейки от той, которая обозревалась только что, при Х=П, или к обозрению следующей левой ячейки, если Х=Л или же продолжает обозревать ту же ичейку ленты, если Х=С.

И следующий момент времени (если $q_k \ne q_0$) машина делает шаг, регламентированный командой $T(k,l): q_k, a_l \to q_r a_s X$ и т.д.

Поскольку работа машины, по условию, полностью определяется состоянием q_i, в данный момент и содержимым a_j обозреваемой в этот момент ячейки, то для каждых q_i и a_j $(i=1,2,...,m; j=0,1,...,n)$ программа машины должна содержим, одну и только одну команду, начинающуюся символами q_i, a_j. Поэтому программа машины Тьюринга с внешним алфавитом $A=\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ и алфавитом внутренних состояний $Q=\{a_o, a_1, ..., a_m\}$ содержит $m(n+1)$ команд.

Словом в алфавите A или в алфавите Q, или в алфавите $A \cup Q$ называется любая последовательность букв соответствующего алфавита. Под *к-й конфигурацией* будем понимать изображение ленты машины с информацией, сложившейся на нем к началу k-го, с указанием того, какая ячейка обозревается в этот шаг и в каком состоянии находится машина. Имеют смысл лишь конечные конфигурации, т.е. такие, в которых все ячейки ленты, за исключением, быть может, конечного числа, пусты. Конфигурация называется *заключительной,* если состояние, в котором при этом находится машина, заключительное.

Если выбрать какую-либо незаключительную конфигурацию машины Тьюринга в качестве исходной, то работа машины будет состоять в том, чтобы последовательно (шаг за шагом) преобразовывать исходную конфигурацию в соответствии с программой машины до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигурация. После этого работа машины Тьюринга считается закончившейся, а результатом работы считистся достигнутая заключительная конфигурация.

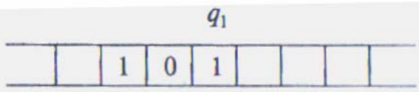
Будем говорить, что непустое слово α в алфавите $A \setminus \{a_0\} = \{a_1, ..., a_n\}$ воспринимается машиной в *стандартном положении,* если оно записано в последовательных ячейках ленты, все другие ячейки ленты, и машина обозревает крайнюю справа ячейку из тех, в которых записано слово α. Стандартное положение называется *заключительным,* если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1. Наконец, будем говорить, что *слово а перерабатывается машиной в слово* β, если от слова α, воспринимаемого в начальном стандартном положении, машина после выполнения конечного числа команд приходит к слову β, воспринимаемому в положении остановки.

Применение машин Тьюринга к словам. Проиллюстрируем примерах все введенные понятия, связанные с машинами Тьюринга.

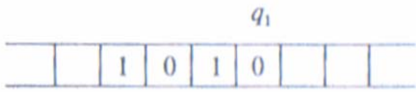
Пример . Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (здесь 0 — символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний Q - $\{q_0, q_1, q_2)$ и со следующей функциональной программой:

$q_1 0 \to q_2 0\Pi; q_2 0 \to q_0 1; q_1 1 \to q_1 1\Pi; q_1 1 \to q_2 1\Pi$

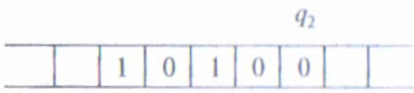
Посмотрим, в какое слово переработает эта машина слово исходя из стандартного начального положения. Будем последовательно выписывать конфигурации машины при переработке этого слова. Имеем стандартное начальное положение:

(1) 

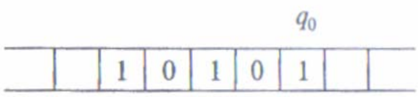
На первом шаге действует команда: $q_1 1 \to q_1 1\Pi$ в результате в машине создается следующая конфигурация:

(2) 

На втором шаге действует команда: $q_1 0 \to q_2 0\Pi$ и на машине создается конфигурация:

(3) 

Наконец, третий шаг обусловлен командой: $q_2 0 \to q_0 1$ в результатате него создается конфигурация:

(4) 

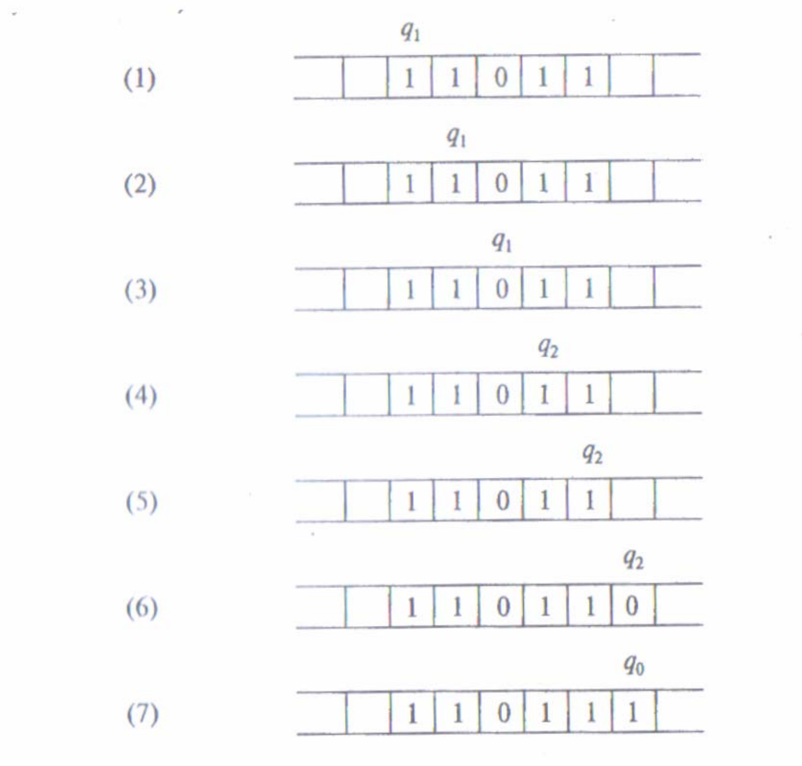
Эта конфигурация является заключительной, потому что машина оказалась в состоянии остановки q_0.

Таким образом, исходное слово 101 переработано машине слово 10101.

Полученную последовательность конфигураций можно записать более коротким способом. Конфигурация (1) записывается в виде следующего слова в алфавите $A \cup Q : 10q_1 1$ (содержимое обозреваемой ячейки записано справа от состояния, в котором ходится в данный момент машина). Далее, конфигурация (2) записывается так: $101q_1 0$, конфигурация (3) —$1010q_2 0$ и, наконец, (4) —$1010q_0 1$. Вся последовательность записывается так:

$10q_1 1 \Rightarrow 101q_1 0 \Rightarrow 1010q_2 0 \Rightarrow 1010q_0 0$

Приведем последовательность конфигураций при переработке машиной слова 11011, исходя из начального положения, при котором в состоянии q_1 обозревается крайняя левая ячейка, в которой содержится символ этого слова



Таким образом, слово 11011переработано машиной в слово 110111.

Конструирование машин Тьюринга. *Создание (синтез)* машины Тьюринга (т.е. написание соответствующих программ) являтся задачей значительно более сложной, нежели процесс применения данной машины к данным словам.

Пример. Попытаемся построить такую машину Тьюринга, которая из n записанных подряд единиц оставляла бы на ленте 2 единицы, также записанные подряд, если $n \geq 2$, и работала бы вечно, если n = 0 или n = 1.

В качестве внешнего алфавита возьмем двухэлементное множество

$A = \{0, 1\}$. Количество необходимых внутренних состояний будет определено в процессе составления программы. Считаем, что машина начинает работать из стандартного начального положения, т. е. когда и состоянии q_1 обозревается крайняя правая единица из n записанных на ленте. Начнем с того, что сотрем первую единицу, если она имеется, перейдем к обозрению следующей левой ячейки и сотрем там единицу, если она в этой ячейке записана. На каждом таком переходе машина должна переходить в новое внутреннее состояние, ибо в противном случае будут стерты вообще все единицы, записанные подряд. Вот команды, осуществляющие описанные действия:

$q_1 1 \to q_2 0Л; q_2 1 \to q_3 0Л.$

Машина находится и в состоянии q_3, и обозревает третью справа ячейку из тех, в которых записано данное слово. Не меняя содержимого обозреваемой ячейки, машина должна остановиться, т.е. перейти в заключительное состояние q_0, независимо от содержимого ячейки :

$q_3 0 \to q_0 0; q_3 1 \to q_0 1.$

Теперь остается рассмотреть ситунции, когда на ленте записана всего одна единица или не записапо ни одной Если на ленте записана одна единица, то после первого шага машина будет находиться и состоянии q_2 и будет обозревать вторую справа ячейку, в которой записан 0. По условию, в таком случае Мишина должна работать вечно. Это можно обеспечить, например, такой командой

$q_2 0 \to q_2 0П.$

выполняя которую шаг за шагом, машина будет двигаться по ленте неограниченно вправо. Наконец, если на ленте не записано ни одной единицы, то машина, по условию, также должна работать, вечно. В этом случае в начальном состоянии q_1 обозревается ячейка с содержимым 0, и вечная работа машины обеспечивается следующей командой:

$q_1 0 \to q_1 0П.$

Вычислимые по Тьюрингу функции. *Определение.* Функция называется *вычислимой по Тьюрингу,* если существует машина Тьюринга, вычисляющая ее, т.е. такая машина Тьюринга, которая вычисляет ее значения для тех наборов значений аргументов, которых функция определена, и работающая вечно, если функция для данного набора значений аргументов не определена.

Остается договориться о некоторых условностях для того, чтобы это определение стало до конца точным. Во-первых, напомним, что речь идет о функция, заданных на множестве натуральных чисел и принимающих также натуральные значения. Во- вторых, нужно условиться, как записывать на ленте машины Тьюринга значения $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументов функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, из какого положения начинать переработку исходного слова и, конец, в каком положении получать значение функции. Это можно делать, например, следующим образом. Значения $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументов будем располагать на ленте в виде следующего слова:

$$0\,\underbrace{1 \dots 1}_{x_1}\,0\,\underbrace{1 \dots 1}_{x_2}\,0 \dots 0\,\underbrace{1 \dots 1}_{x_n}\,0.$$

Здесь полезно ввести следующие обозначения. Для натурального x обозначаем:

$$1^x = \underbrace{1 \dots 1}_{x},\ 0^x = \underbrace{0 \dots 0}_{x}.$$

Дополнительно полагаем $0^0 = 1^0 = \Lambda$ — пустое слово. Так что слова, $1^0 = \Lambda$, $1^1 = 1$.,$1^2 = 11$., $1^3 = 111$. будем смотреть как «изображения» натуральных чисел 0, 1, 2, 3, ... соответственно.

Предыдущее слово можно представить следующим образом: $01^{x_1}01^{x_2}0...01^{x_n}0$. Далее, начинать переработку данного слова будем из стандартного начального положения. Если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена на данном наборе значений аргументов, то и в результате на ленте должно быть записано подряд $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ единиц ; в противном случае машина должна работать бесконечно. При выполнении всех перечисленных условий будем говорить, что *машина Тьюринга вычисляет данную функцию.*

Правильная вычислимость функций на машине Тьюринга. В предыдущем пункте мы рассмотрели вопрос о том, что значит и каким образом «данная машина Тьюринга вычисляет функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Для этого нужно, чтобы каждое из чисел x_1 ,..., x_n было записано на ленту машины непрерывным массивом из соответствующего числа единиц, а сами массивы были разделены символом 0. Если функция $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ определена на данном наборе значений аргументов, то в результате на ленте должно быть записано подряд $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ единиц. При этом мы не очень строго относились к тому, в каком начальном положении машина начинает работать, в каком завершает работу и как эта работа протекает.

В дальнейшем нам понадобится более сильное понятие вычислимости функции на машине Тьюринга — понятие правильной вычислимости.

Определение . Будем говорить, что машина Тьюринга *правильно вычисляет* функцию $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, если начальное слово $q_1 01^{x_1} 01^{x_2} 0...01^{x_n} 0$ она переводит в слово $q_0 01^{f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)} 0...0$ и при этом в процессе работы не пристраивает к начальному слову новых ячеек на ленте ни слева, ни справа. Если же функция $f(x)$ определена на данном наборе значений аргументов, то, начав работать из указанного положения, она никогда в процессе работы не будет надстраивать ленту слева.

Пример . Приведем программы машин Тьюринга, правильно вычисляющих функции *S(x)=x* + 1 и *O(x)* = 0. Функция *S(x)* =*x*+ 1 осуществляет перевод: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 01^{x+1}$. Ее программа $q_1 0 \to q_2 П, q_2 1 \to q_2 1П, q_2 0 \to q_3 1, q_3 1 \to q_3 1Л, q_3 0 \to q_0 0$. Функция *O(x)* = 0 осуществляет перевод: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 00^{x+1}$.Ее программа: $q_1 0 \to q_2 0П, q_2 1 \to q_2 1П, q_2 0 \to q_3 0Л, q_3 1 \to q_4 0, q_4 0 \to q_3 0Л, q_3 0 \to q_0 0$.Соответствующу ю машину Тьюринга обозначили О.

Композиция машин Тьюринга. *Определение.* Пусть заданы машины Тьюринга Θ_1, и Θ_2, имеющие общий внешний алфавит $\{a_0, a_1, ..., a_m\}$ и алфавиты внутренних состояний $\{q_0, q_1, ..., q_n\}$ и $\{q_0, q_1', ..., q_t'\}$ соответственно. *Композицией* (или *произведением)* машины Θ_1 на машину Θ_2 называется новая машина Θ с тем же внешним алфавитом $\{a_0, a_1, ..., a_m\}$,внутренним алфавитом $\{q_0, q_1, ..., q_n, q_{n+1}, ..., q_{n+t}\}$ и программой, получающейся следующим образом. Во всех командах из Θ_1 содержащих символ остановки q_0 заменяем последний на q_{n+1}.Все остальные символы в командах из Θ_1 остаются неизменными. В командах из Θ_2 символ q_0 оставляем неизменным, а все остальные состояния $q_i'\,(i = 1, ..., t)$ изменяем соответственно на q_{n+i}. Совокупность всех так полученных команд образует программу машины-композиции Θ.

Введенное понятие является удобным инструментом для конструирования машин Тьюринга. Покажем это на примере.

Пример. Сконструируем машины Тьюринга, правильно вычисляющие функции-проекторы $I_m^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m\,(1 \le m \le n)$.

Рассмотрим сначала конкретный случай *n = 3*, *m = 2,* т.е. функцию $I_2^3(x_1, x_2, x_3) = x_2$. Мы должны переработать слово $q_1 01^{x_1} 01^{x_2} 01^{x_3} 0$ и слово $q_0 01^{x_2} 0$. Будем применять к начальной конфигурации последовательно сконструированные ранее машины Тьюринга $Б^+, B, Б^-, O$:

	$q_1 01^{x_1} 01^{x_2} 01^{x_3} 0$;
$Б^+$	$01^{x_1} q 01^{x_2} 01^{x_3} 0$;
B	$01^{x_2} q 01^{x_1} 01^{x_3} 0$;
$Б^+$	$01^{x_2} 01^{x_1} q 01^{x_3} 0$;
O	$01^{x_2} 01^{x_1} q 00^{x_3} 0$;
$Б^-$	$01^{x_2} q 01^{x_1} 00^{x_3} 0$;
O	$01^{x_2} q 00^{x_1} 00^{x_3} 0$;
$Б^-$	$q 01^{x_2} 00^{x_1} 00^{x_3} 0$.

Таким образом, функция $I_2^3(x_1, x_2, x_3) = x_2$ вычисляется следующей композицией машин: $Б^+ВБ^+ОБ^-ОБ^- = Б^+ВБ^+\left(ОБ^-\right)^2$.

Проверьте самостоятельно, что функция $I_2^2(x_1, x_2) = x_2$ вычисляется композицией $Б^+ВОБ^-$.

Теперь мы можем представить себе алгоритм построения композиции машин $Б^+, В, Б^-, О$ для вычисления любой функции вида $I_m^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$. С помощью правого сдвига $Б^+$, применив его $m-1$ раз, нужно сначала достичь массива 01^{x_m}:

$$\left(Б^+\right)^{m-1}: \quad 01^{x_1}0...q01^{x_m}...01^{x_n}0.$$

Затем, двигаясь влево, транспонировать (с помощью $В$) массив 01^{x_m} с каждым соседним слева массивом, пока массив 01^{x_m} не выйдет на первое место:

$$\left(В \cdot Б^-\right)^{m-1}: \; q01^{x_m}01^{x_1}0...01^{x_{m-1}}01^{x_{m+1}}0...01^{x_n}0$$

Теперь нужно дойти до крайнего правого массива с помощью $(n-1)$ – кратного применения правого сдвига Б$^+$:

$$\left(Б^+\right)^{n-1}: \quad 01^{x_m}01^{x_1}0...01^{x_{m-1}}01^{x_{m+1}}0...q01^{x_n}0.$$

Наконец, нужно стирать последовательно справа налево массивы единиц, кроме первого:

$$\left(ОБ^-\right)^{n-1}: \quad q01^{x_m}00^{x_1}0...00^{x_{m-1}}00^{x_{m+1}}0...00^{x_n}0$$

Итак, данную функцию (правильно) вычисляет следующая машина Тьюринга: $\left(Б^+\right)^{m-1}\left(В \cdot Б^-\right)^{m-1}\left(Б^+\right)^{n-1}\left(О \cdot Б^-\right)^{n-1}$.

При *n = 3*, *m = 2* эта машина имеет вид:

$$Б^+ВБ^-\left(Б^+\right)^2\left(ОБ^-\right)^2 = Б^+ВБ^+\left(ОБ^-\right)^2,$$

т. е. совпадает с построенной выше машиной. При *n = 2, m =* 2 эта машина имеет вид: $Б^+(ВБ^-)Б^+\left(ОБ^-\right) = Б^+ВБ^+(ОБ^-)^2$, т.е. также совпадает с соответствующей рассмотренной выше машиной Тьюринга.

Тезис Тьюринга (основная гипотеза теории алгоритмов). Напомним, одно из свойств алгоритма заключается в том, что он представляет собой единый способ, позволяющий для каждой задачи из некоего бесконечного множества задач за конечное число шагов найти ее решение.

На понятие алгоритма можно взглянуть и с несколько иной точкой зрения. Каждую задачу из бесконечного множества задач можно выразить (закодировать) некоторым словом некоторого алфавита, а решение задачи — каким-то другим словом того же алфавита.В результате получим функцию, заданную на некотором подмножестве множества всех слов выбранного алфавита и принимающую значения в множестве всех слов того же алфавита. Решить какую-либо задачу — значит найти значение этой функции на слове, кодирующем данную задачу. А иметь алгоритм для решения всех задь данного класса - значит иметь единый способ, позволяющий конечное число шагов «вычислять» значения построенной функции для любых значений аргумента из её области определения. Таким образом, алгоритмическая проблема по существу проблема вычисления значений функции, заданной в некотором алфавите.

Остается уточнить, что значит уметь вычислять значения функции. Это значит вычислять значения функции с помощью подходящей машины Тьюринга. Для каких же функций возможно тьюрингово вычисление? Многочисленные исследования учёных, показали, что такой класс функций чрезвычайно широк. Каждая функция, для вычисления значений которой существует какой-нибудь алгоритм, оказывалась вычислимой посредством некоторой машины Тьюринга. Это дало повод Тьюрингу высказать следующую гипотезу, называемую основной гипотезой теории алгоритмов, или *тезисом Тьюринга:*

ДЛЯ нахождения значений функции, заданной в некотором алфавите, тогда и только тогда существует какой-нибудь алгоритм когда функция является вычислимой по Тьюрингу, т.е. когда она может вычисляться на подходящей машине Тьюринга.

Это означает, что строго математическое понятие вычислимой функции является по существу идеальной моделью взятого из опыта понятия алгоритма. Данный тезиз есть не что иное, как аксиома, постулат, выдвигаемый нами о взаимосвязях нашего опыта с той математической теорией, каторую мыпод этот опыт хотим подвести. Конечно же данный тезис в принципе не может быть доказан методами математики, потому что он не имеет внутриматематического характера. Он выдвинут исходя из опыта, и именно опыт подтверждает его состоятельность. Точно так же, например, не могут быть доказаны и математические законы механики; они открыты Ньютоном и многократно подтверждены опытом.

Впрочем, не исключается принципиальная возможность того что, тезис Тьюринга будет опровергнут. Для этого должна быть указана функция, которая вычислима с помощью какого-нибудь алгоритма, но невычислима ни на какой машине Тьюринга. Но такая возможность представляется маловероятной: всякий алгоритм, который будет открыт может быть реализован на машине Тьюринга.

§3. Рекурсивные функции

Основные понятия теории рекурсивных функций и тезис Чёрча Приступим к построению класса рекурсивных функций в соответствии с изложенными принципами. Напомним, что рассматриваются функции, заданные на множестве натуральных чисел принимающие натуральные значения. Функции предполагается брать частичные, т.е. определенные, вообще говоря, не для всех значений аргументов. В качестве исходных простейших функций выберем следующие:

$S(x) = x + 1$ *(функция следования);*

$O(x) = 0$ *(нуль-функция);*

$I_m^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$, *(функции-проекторы,* $1 \le m \le n$*).*

Определение (оператор суперпозиции). Будем говорить, *n*-местная функция φ получена из m-местной функции f и *n*-местных функций $g_1, ..., g_m$

с помощью *оператора суперпозиции,* если для всех $x_1,...,x_n$ справедливо равенство:

$$\varphi(x_1,...,x_n) = f\left(g_1(x_1,...,x_n),...,g_m(x_1,...,x_n)\right)$$

Понятие суперпозиции функций и сложной функции хорошо известно, но нас сейчас этот оператор интересует с точки зрения его взаимоотношений с процессом вычислимости функций с помощью машин Тьюринга.

Теорема. Если функции $f(x_1,...,x_m), g_1(x_1,...,x_n),...,g_m(x_1,...,x_n)$ *правильно вычислимы по Тьюрингу, то правильно вычислима сложная функции (суперпозиция функций):*

$$\varphi(x_1,...,x_n) = f\left(g_1(x_1,...,x_n),...,g_m(x_1,...,x_n)\right)$$

Определение. Говорят, что $(n+1)$-местная функция φ получена из n-местной функции f и $(n+2)$-местной функции g с помощью *оператора примитивной рекурсии,* если для любых $x_1,...,x_n,y$ справедлинм равенства:

$$\varphi(x_1,...,x_n,0) = f(x_1,...,x_n);$$

$$\varphi(x_1,...,x_n,y+1) = g\left(x_1,...,x_n,y,\varphi(x_1,...,x_n,y)\right).$$

Пира этих равенств называется *схемой примитивной рекурсии.*

Здесь важно отмстить то, что, независимо от числа аргументов в φ, рекурсия ведется только по одной переменной y; остальных переменных $x_1,...,x_n$ на момент применения схемы примитивной рекурсии зафиксированы и играют роль параметров. Кроме того, схема примитивной рекурсии выражает каждое значение определяемой функции φ не только через данные функции f и *g,* через так называемые предыдущие значения определяемой функции φ: прежде чем получить значение $\varphi(x_1,...,x_n,k)$*,* придется проделать *к+1* вычисление по указанной схеме — для $y = 0,1,...,k$.

Определение. Функция называется *примитивно рекурсивной* если она может быть получена из простейших функций *O, S,* I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Определение. (оператор минимизации). Будем говорить, что n-местная функция φ получается из (n+1)-местных функций f_1 и f_2 с помощью *оператора минимизации,* или оператора наименьшего числа, если для любых $x_1,...,x_n,y$ равенство $\varphi(x_1,...,x_n)=y$ выполнено тогда и только тогда, когда значения $f_i(x_1,...,x_n,0),...,f_i(x_1,...,x_n,y-1)(i=1,2)$ определены и попарно неравны: $f_1(x_1,...,x_n,0)\neq f_2(x_1,...,x_n,0),...,f_1(x_1,...,x_n,y-1)\neq f_2(x_1,...,x_n,y-1)$
а $f_1(x_1,...,x_n,y)=f_2(x_1,...,x_n,y)$.

Коротко говоря, величина $\varphi(x_1,...,x_n)$ равна наименьшему значению аргумента *y,* при котором выполняется последнее равенство. Используется следующее обозначение:

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\mu y\left[f_1(x_1,...,x_n,y)=f_2(x_1,...,x_n,y)\right]$$

В частном случае может быть $f_2=0$. Тогда

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\mu y\left[f_1(x_1,...,x_n,y)=0\right]$$

Оператор минимизации называется также μ*-оператором.*

Этот оператор предназначен для порождения следующего важного класса рекурсивных функций.

Определение. Функция называется *частично рекурсивной* если она может быть получена из простейших функций *O, S,* I_m^n с помощью конечного числа применений суперпозиции, примитивной рекурсии и μ-оператора. Если функция всюду определена и частично рекурсивна, то она называется *общерекурсивной.*

Понятие частично рекурсивной функции оказалось исчерпывающей формализацией понятия вычислимимой функции. При построении аксиоматической теории высказываний исходные формулы (аксиомы) и правила вывода выбирались так, чтобы полученные в теории формулы исчерпали бы все тавтологии алгебры высказываний. К чему же стремимся мы в теории рекурсивных функций, почему именно так выбрали простейшие функции и операторы для получения новых функций? Рекурсивными функциями мы стремимся исчерпать все мыслимые функции, поддающиеся вычислению с помощью какой-нибудь определённой процедуры механического характера. Подобно тезису Тьюринга, в теории рекурсивных функций выдвигается соответствующая естественно-научная гипотеза, носящая название *тезиса Чёрча:*

Числовая функция тогда и только тогда алгоритмически вычислима, когда она частично рекурсивна.

И эта гипотеза не может быть доказана строго математически, она подтверждается практикой, опытом, ибо призвана увязать практику и теорию.

Примитивно рекурсивные функции. Итак, функция примитивно рекурсивна, если она может быть получена из простейших функций *O, S,* I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Пример. Покажем, как, исходя из простейших функций с помощью оператора примитивной рекурсии, получить следующую функцию, называемую усеченной разностью:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, если x \geq y \\ 0, если x < y \end{cases}$$

Во-первых, отметим, что функция $x \dot{-} 1$, получающаяся из функции $x \dot{-} y$ фиксированием второго аргумента, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$0 \dot{-} 1 = 0 = O(x)$$

$$(x+1) \dot{-} 1 = x = I_1^2(x, y),$$

т.е. получена из простейших функций *O(x)* и $I_1^2(x, y)$, с помощью оператора примитивной рекурсии. Во-вторых, нетрудно понять исходя из определения усеченной разности, что эта функция удовлетворяет также равенствам:

$$x \dot{-} 0 = x = I_1^2(x, y),$$

$$x \dot{-} (y+1) = \left(x \dot{-} y \right) \dot{-} 1 = h\left(x, y, x \dot{-} y \right)$$

для любых x и y. Тождества показывают, что двухместная функция $x \dot{-} y$ получена с помощью оператора примитивной рекурсии и простейшей функции $I_1^2(x,y)$ и функции $h(x,y,z) = z \dot{-} 1$.

Теорема. Функция, полученная суперпозицией примитивных рекурсивных функций, сама примитивно рекурсивна.

Доказательство. В самом деле, компоненты этой функции получены из простейших функций O, *S*, I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии. Чтобы получить рассматриваемую функцию, нужно добавить еще одну суперпозицию. В итоге эта функция также получается из простейших функций в результате конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии, т.е. является примитивно рекурсивной.

Примитивная рекурсивность предикатов. Предикат $P(x_1,...,x_n)$, заданный над множествами $M_1,...,M_n$, есть функция, заданная на указанных множествах и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$. В теории алгоритмов принято различать предикат *P* и функцию, связанную с ним, а саму функцию называют характеристической функцией предиката *P* и обозначают χ_p. Таким образом,

$$\chi_p(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 0, \textit{если высказывание } P(x_1,...,x_n) - \textit{истино}, \\ 1, \textit{если высказывание } P(x_1,...,x_n) - \textit{ложно}. \end{cases}$$

Если $M_1 = ... = M_n = N$, *то* χ_p — функция, входящая в круг наших рассмотрений, и имеет смысл поставить вопрос о ее примитивной рекурси вности.

Определение. Предикат *P* называется *примитивно рекурсивным,* если его характеристическая функция χ_p примитивно рекурсивна.

Отметим еще одно важное свойство, связанное с примитивной рекурсивностью функций. Мы используем его в последующих рассмотрениях. Одним из часто встречающихся, особенно в теории алгоритмов, способов задания функций является их задание с помощью так называемого *оператора условного перехода.* Этот оператор по функциям $f_1(x_1,...,x_n), f_2(x_1,...,x_n)$ и предикату $P(x_1,...,x_n)$ строит функцию φ:

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n), \textit{если } P(x_1,...,x_n) - \textit{истино}, \\ f_1(x_1,...,x_n), \textit{если } P(x_1,...,x_n) - \textit{ложно}. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что с помощью характеристических функций предиката P и его отрицания $\neg P$ функцию φ можно выразить следующим образом:

$$\varphi(x_1,...,x_n)=f_1(x_1,...,x_n)\cdot\chi_p(x_1,...,x_n,)+f_2(x_1,...,x_n,)\cdot\chi_{\neg p}(x_1,...,x_n)$$

Из этого выражения вытекает следующее утверждение.

Теорема. Если функции f_1, f_2 *и предикат P примитивно рекурсивны, то и функция* φ*, построенная* f_1, f_2*,P с помощью оператора условного перехода, примитивно рекурсивна. Этот факт выражают также говоря, что оператор условного перехода примитивно рекурсивен.*

Вычислимость по Тьюрингу примитивно рекурсивных функций.

Теорема. Функция φ*, возникающая примитивной рекурсией из правильно вычислимых на мишине Тьюринга функций* f *и* g*,сама правильно вычислима на машине Тьюринга.*

Доказательство. Для краткости записей будем считать, что функция φ связана с функциями f и g следующим образом: $\varphi(x,0)=f(x), \varphi(x,i+1)=g(x,\varphi(x,i))$. Обозначим F и G – машины Тьюринга, правильно вычисляющие функции f и g соответственно.Пусть *x,y* — произвольные натуральные числа. Требуется сконструировать машину Тьюринга, вычисляющию значение $\varphi(x,y)$.Как мы уже отмечали, для вычисления $\varphi(x,y)$ предстоит вычислить $y+1$ значений $\varphi(x,0),\varphi(x,1),...,\varphi(x,y-1),\varphi(x,y)$.

Начальная конфигурация такова: $q_1 01^x 01^y 0$. Применим к ней следующую последовательность машин Тьюринга: $Б^+ ВГВБ^+ F$. В результате получим последовательность конфигураций:

$$q_1 01^x 01^y 0 \overset{Б^+}{\Rightarrow} 01^x q 01^y 0 \overset{В}{\Rightarrow} 01^y q 01^x 0 \overset{Г}{\Rightarrow} 01^y q 01^x 01^x 0 \overset{В}{\Rightarrow} 01^x q 01^y 01^x 0 \overset{Б^+}{\Rightarrow} 01^x 01^y q 01^x 0 \overset{F}{\Rightarrow} 01^x 01^y q_\alpha 01^{\varphi(x,0)} 0$$

На последнем шаге, применив машину, вычисляющую функцию $f(x)$, к конфигурации $q01^x$, мы получим значение $f(x)$, которое, согласно схеме примитивной рекурсии для φ, есть $\varphi(x,0)$.

Теперь мы можем приступить к вычислению $\varphi(x,1)$ используя второе соотношение схемы примитивной рекурсии: $\varphi(x,1) = g(x, \varphi(x,0))$. Для этого применим сначала к последней конфигурации команды: $q_\alpha 0 \to q_{\alpha+1} 0Л, q_{\alpha+1} \to q_{\alpha+2} 0.$. В результате получим конфигурацию: $01^x 01^{y-1} q_{\alpha+2} 001^{\varphi(x,0)} 0$. Теперь нужно подготовить ленту машины к применению машины G, вычисляющей значение $g(x, \varphi(x,0))$, т.е. необходимо получить на ленте конфигурацию $q01^x 01^{\varphi(x,0)}$. Для этого применим к конфигуриции $01^x 01^{y-1} q_{\alpha+2} 001^{\varphi(x,0)} 0$ последовательность машин $АБ^- ВБ^+ ВГВБ^- ВБ^+ Б^+ ВБ^-$.
Получучим последовательность конфигураций:

$$01^x 01^{y-1} q_{\alpha+2} 001^{\varphi(x,0)} 0 \overset{А}{\Rightarrow} 01^x 01^{y-1} q 01^{\varphi(x,0)} 00 \overset{Б^-}{\Rightarrow} 01^x q 01^{y-1} 01^{\varphi(x,0)} \overset{В}{\Rightarrow} 01^{y-1} q 01^x 01^{\varphi(x,0)} \overset{Б^+}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Б^+}{\Rightarrow} 01^{y-1} 01^x q 01^{\varphi(x,0)} \overset{В}{\Rightarrow} 01^{y-1} 01^{\varphi(x,0)} q 01^x \overset{Г}{\Rightarrow} 01^{y-1} 01^{\varphi(x,0)} q 01^x 01^x \overset{В}{\Rightarrow} 01^{y-1} 01^x q 01^{\varphi(x,0)} 01^x \overset{Б^-}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Б^-}{\Rightarrow} 01^{y-1} q 01^x 01^{\varphi(x,0)} 01^x \overset{В}{\Rightarrow} 01^x q 01^{y-1} 01^{\varphi(x,0)} 01^x \overset{Б^+}{\Rightarrow} 01^x 01^{y-1} q 01^{\varphi(x,0)} 01^x \overset{Б^+}{\Rightarrow} 01^x 01^{y-1} 01^{\varphi(x,0)} q 01^x \overset{В}{\Rightarrow}$$
$$\overset{В}{\Rightarrow} 01^x 01^{y-1} 01^x q 01^{\varphi(x,0)} \overset{Б^-}{\Rightarrow} 01^x 01^{y-1} q 01^x 01^{\varphi(x,0)}.$$

Теперь мы можем применить машину G и вычислить значение $\varphi(x,1) = g(x, \varphi(x,0)) : 01^x 01^{y-1} q_\beta 01^{\varphi(x,0)}$.

Применим к этой конфигурации команду: $q_\beta 0 \to q_\alpha 0$, зациклиающую программу. Получим конфигурацию: $01^x 01^{y-1} q_\alpha 01^{\varphi(x,1)}$.

Начинается следующий цикл, осуществляемый командами идущими после первого появления состояния q_α. Этот цикл преобразует конфигурацию вида $01^x01^{y-i}q_\alpha 01^{\varphi(x,i)}$ в конфигурацию $01^x01^{y-(i+1)}q_\beta 01^{\varphi(x,i+1)}$ при условии, что $y > i$. Команда $q_\beta 0 \to q_\alpha 0$ зацикливает программу, и в результате работы цикла параметр y будет понижаться до тех пор, пока не получится конфигурация $01^x 0 q_\alpha 01^{\varphi(x,y)}$ которая в силу команды $q_\alpha 0 \to q_{\alpha+1} 0 Л$ перейдёт в конфигурацию $01^x q_{\alpha+1} 001^{\varphi(x,y)}$

Дополнительные команды $q_{\alpha+1} 0 \to q_{\beta+1} 0, A; B, O, B, Б^-, Б^+$ создают на ленте требуемую конфигурацию $q_0 01^{\varphi(x,y)}$, доказывающую, что функция $\varphi(x,y)$ правильно вычислена на машине Тьюринга.

Следствие. Всякая примитивно рекурсивная функция вычислима по Тьюрингу.

§4Функции Аккермана.

Теорема. Существуют функции, не являющиеся примитивно рекурсивными.

Доказательство. В самом деле, нетрудно понять, что множество всех примитивно рекурсивных функций счетно. Это объяснятся тем, что каждая примитивно рекурсивная функция имеет конечное описание, т.е. задается конечным словом в некотором (фиксированном для всех функций) алфавите. Множество всех конечных слов счетно. Поэтому и примитивно рекурсивных функций имеется не более, чем счетное множество. В то же время множество всех функций даже от одного аргумента из N в N имеет мощность континуума. Тем более, континуально множество функций из N в N любого конечного числа аргументов. Таким образом, непременно существуют функции, не являющиеся примитивно рекурсивными.

Пример. Искомая функция конструируется с помощью последовательности вычислимых функций, в которой каждая функция растет существенно быстрее предыщущей.

Начнем с построения такой последовательности. Мы знаем, что произведение растет быстрее суммы, а степень - быстрее произведения.

Начнем построение последовательности именно с этих функций, введя для них единообразные обозначения:

$P_0(a,y)=a+y;\ P_1(a,y)=a\cdot y;\ P_2(a,y)=a^y.$

Эти функции связаны между собой следующими рекурсивными соотношениями:

$P_1(a,y+1)=a+ay=P_0(a,P_1(a,y)),P_1(a,1)=a;$

$P_1(a,y+1)=a\cdot a^y=P_1(a,P_2(a,y)),P_2(a,1)=a;$

Продолжим эту последовательность, положив по определению для *n=2,3,…*:

$$\left.\begin{array}{l} P_{n+1}(a,0)=1 \\ P_{n+1}(a,1)=a \\ P_{n+1}(a,y+1)=P_n(a,P_{n+1}(a,y)). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Эта схема имеет вид примитивной рекурсии, и, следовательно, все функции $P_n(a,y)$ примитивно рекурсивны. Растут они крайне быстро. Иаиримор, $P_4(a,1)=a,\ P_3(a,2)=P_2(a,a)=a^a,\ldots$ Значение $P_3(a,k+1)$ получается в результате возведения числа *а* в степень $a\ k$ раз.

Зафиксируем теперь значение *а= 2.* Получим последовательность функций от одного аргумента: $P_0(2,y),\ P_1(2,y),\ldots,$ ... Введем две новые функции: $B(x,y)=P_2(2,y)$. Первая из них называется *функцией Аккермана,* а вторая — *диагональной функцией Аккермана,*

Для функции *В(х, у)* на основании введенных выше обозначений и соотношений (1) вытекают следующие равенства:

$$\left.\begin{array}{l} B(0,y)=2+y \\ B(x+1,0)=sg(x) \\ B(x+1,y+1)=B(x,B(x+1,y)). \end{array}\right\} \qquad (2)$$

которые позволяют вычислять значение функции *В{х, у),* а следовательно, и значения функции *А(х).* При этом в процессе вычисления значения функции *В(х, у)* в некоторой точке используются вычисленные ранее ее значения в неких предыдущих точках. Этим схема (2) похожа на схему примитивной рекурсии. Но примитивная рекурсия ведется по одному аргументу, а в схеме (2) рекурсия ведется сразу по двум аргументам (такая рекурсия нал вается двойной, двухкратной, или рекурсией второй ступени). При этом существенно усложняется характер упорядочения точек, следовательно, и понятие предшествующей точки. Это упорядочение не предопределено заранее, как в схеме примитивной рекурсии, где число *n* всегда предшествует числу *n + 1*, а выясняет в ходе вычислений и для каждой схемы (2), вообще говоря, различно. Например, $B(3,3) = B(2, B(3,2))$, а так как $B(3,2) = P_3(2,2) = P_2(2, P_3(2,1)) = P_2(2,2) = 2^2 = 4$, то вычислению точке *(3, 3)* по схеме (2) должно предшествовать вычисление точке *(2, 4):* $B(3,3) = B(2,4) = P_2(2,4) = 2^4 = 16$.

Функция *B(x, y),* а вместе с ней и функция *A(x)* вычислимы (по схеме (2)), а значит, в силу гипотезы Тьюринга, вычислимы посредством подходящей машины Тьюринга. Возникает вопрос, можно ли их вычисление свести к вычислению по схеме примитивной рекурсии, т.е. будут ли эти функции примитивно рекурсивными. Именно такова ситуация с функцией Аккермана . Идея доказательства того, что функция *A(x)* не является примитивно рекурсивной, состоит в доказательстве того, что функщ *A(x)* растет быстрее, чем любая примитивно рекурсивная функция или, поэтому не может быть примитивно рекурсивной. Более того, для пюбой примитивно рекурсивной функции *f(x)* от одного аргумента найдется такое *n,* что для любого $x \geq n$ будет *A(x)> f(x).*

Оператор минимизации. В более общем виде его можно определить как оператор, применяемый к произвольному *(n+1)* местному предикату $P(x_1,..,x_n,y)$ и дающий в результате *n* -местную функцию $\varphi(x_1,..,x_n)$. Значение $\varphi(x_1,..,x_n)$ этой функции на наборе аргументов $a_1,...,a_n$ равно наименьшему из таких чисел *y,* что высказывание $P(a_1,..,a_n,y)$ истинно. Оно обозначается $\mu y P(a_1,..,a_n,y)$. Если же наименьшего среди таких чисел не существует, то значение фупк ими $\varphi(x_1,..,x_n)$ на этом наборе $a_1,...,a_n$ не определено. Таким образом, $\varphi(x_1,..,x_n)=\mu y P(a_1,..,a_n,y)$ Оператор минимизации называется также *оператором наименьшего числа,* или μ*-оператором.*

Предикат $P(x_1,..,x_n,y)$, к которому применяется оператор минимизации, может быть сконструирован из двух числовых функций следующим образом: «$f_1(x_1,..,x_n,y)=f_2(x_1,..,x_n,y)$ »или из одной: «$f(x_1,..,x_n,y)=0$». что оператор минимизации можно рассматривать как оператор, данный на множестве числовых функций и принимающий значения в нем же.

В этом своем качестве оператор минимизации является удобным средством для построения обратных функций. Действительно, функция $f^{-1}(x)=\mu y\left[f(y)=x\right]$ является обратной для функции $f(x)$.

Рассмотрим примеры действия оператора минимизации получения обратных функций.

Пример. Рассмотрим следующую функцию, получающуюся с помощью оператора минимизации:

$$d(x,y)=\mu z[y+z=x]=\mu z[s(I_2^3(x,y,z),I_3^3(x,y,z))=I_1^3(x,y,z))]$$

Вычислим, например, *d(7, 2).* Для этого нужно положить *y= 2* и придавая переменной *z* последовательно значения 0, 1,2, ..., каждый раз вычислять сумму *y* + *z*. Как только она станет равной 7, соответствующее значение *z* принять за значение *d(7,2).* Вычисляем:

$z=0, 2+0=2\neq 7;$
$z=1, 2+1=3\neq 7;$
$z=2, 2+2=4\neq 7;$
$z=3, 2+3=5\neq 7;$
$z=4, 2+4=6\neq 7;$
$z=5, 2+5=7.$

Таким образом, *d(7,* 2) = 5.

Попытаемся вычислить по этому правилу *d(3, 4):*

$z = 0,4 + 0 = 4 > 3;$
$z = 1,4 + 1 = 5 > 3;$
$z = 2,4 + 2 = 6 > 3;$
....

Видим, что данный процесс будет продолжаться бесконечно. Следовательно, *d(3, 4)* не определено.

Обще рекурсивные и частично рекурсивные функции. Функция называется *частично рекурсивной*, если она может быть построена из простейших функций O, S, I_m^n с помощью конечного числа применений супершпиции, примитивной рекурсии и μ- оператора. Если функция всюду частично рекурсивна, то она называется *общерекурсивной.* Примером общерекурсивной, но не примитивно рекурсивной может служить и функция Аккермана *A(x)*.

Продолжим теперь продвижение к поставленной цели –к описанию всех функций, вычислимых на машинах Тьюринга. Следующий шаг — доказательство того, что все частично рекурсивные функции вычислимы по Тьюрингу.

Вычислимость по Тьюрингу частично рекурсивных функций. *Теорема. Если функция f(x, y) правильно вычислима на машине Тьюринга, то и функция* $\varphi(x) = \mu y\left[f(x, y) = 0\right]$, *получающаяся с помощью оператора минимизации из функции* $f(x, y)$ *вычислима на машине Тьюринга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим F — машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $f(x, y)$. Используя её,сконструируем такую машину Тьюринга, которая для заданного значения x вычисляет последовательно значения $f(x,0), f(x,1), f(x,2)$, до тех пор, пока $f(x,i) = 0$. После этого машина должна выдать на ленту число *i,* представляющее собой значение $\varphi(x) = i$. Если же дня всех i будем иметь место $f(x,i) > 0$, то машина должна работать вечно, и это будет означать, что функция φ не определена в точке x. Начальная конфигурация на конструируемой машине такова: $q_1 0 1^x 0$. Будем мыслить ее следующим образом: $q_1 01^x 01^0$ и начнем с применении к ней машины «копирование» K_2. Получим конфигурацию: $q_1 01^x 01^0 q 01^x 01^0$. Теперь вычислим значение $f(x,0)$,применив машину $F: 01^x 01^0 q_\alpha 01^{f(x,0)}$.

Далее подбираем команды, которые при условии $f(x,i)>0$ преобразовывают конфигурацию $01^x 01^i q_\alpha 01^{f(x,i)}$ в конфигурации $01^x 01^{i+1} q_\alpha 01^{f(x,i+1)}$:

$q_\alpha 0 \to q_{\alpha+1} 0 \Pi$:	$01^x 01^0 q_{\alpha+1} 1^{f(x,0)}$;
$q_{\alpha+1} 1 \to q_{\alpha+2} 0$:	$01^x 01^0 q_{\alpha+2} 01^{f(x,0)-1}$;
$q_{\alpha+2} 0 \to q_{\alpha+3} 0 Л$:	$01^x 01^0 q_{\alpha+3} 001^{f(x,0)-1}$;
$q_{\alpha+3} 0 \to q_{\alpha+4} 1$:	$01^x 01^0 q_{\alpha+4} 101^{f(x,0)-1}$;
$q_{\alpha+4} 1 \to q_{\alpha+5} 1 \Pi$:	$01^x 01^1 q_{\alpha+5} 01^{f(x,0)-1}$;
0:	$01^x 01^1 q 0$;
$Б^- Б^-$:	$q 01^x 01^1$;
K_2:	$01^x 01^1 q 01^x 01^1$;
F:	$01^x 01^1 q_\beta 01^{f(x,1)}$;
$q_\beta 0 \to q_\alpha$:	$01^x 01^1 q_\alpha 01^{f(x,1)}$.

Последняя команда зацикливает программу, и машина от конфигурации $01^x 01^1 q_\alpha 01^{f(x,1)}$ переходит к конфигурации $01^x 01^2 q_\alpha 01^{f(x,2)}$, а затем к конфигурации $01^x 01^3 q_\alpha 01^{f(x,3)}$ и т.д. Допустим, что по истечении некоторого времени машина достигла конфигураций $01^x 01^i q_\alpha 01^{f(x,i)}$, при которой $f(x,i)=0$. Число i накопленно в «счетчике» 01^i. Поэтому поступаем следующим образом. Следующие команды выдают на ленту необходимую конфигурацию $q_0 01^i$, т.е. $q_0 01^{\varphi(x)}$:

$q_{\alpha+1} 0 \to q_\gamma 0$:	$01^x 01^i 0 q_\gamma 0$;
$Б^- Б^-$:	$01^x 01^i$;
$ВОБ^-$:	$q_\delta 01^i$;
$q_\delta 0 \to q_0 0$:	$q_0 01^{\varphi(x)}$.

Теорема доказана.

Следствие. Всякая частично рекурсивная функция вычислима по Тьюрингу.

Теорема. Если функция вычислима по Тьюрингу, то она частично рекурсивна.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Разделим доказательство на этапы.

Первый этап. Арифметизация машин Тьюринга начинается с того, что мы вводим в машину своего рода арифметическую систему координат. Эта система координат предназначеа для конфигурации машины. Как известно, в каждый момент времени конфигурация на ленте машины Тьюринга имеет вид $\alpha q_i a_j \beta$, где α - слово в алфавите $A=\{a_1,a_2,...,a_{m-1}\}$, записанное ни ленте левее обозреваемой в данный момент ячейки q_i; — состояние, и котором находится в данный момент машина; a_j — содержимое обозреваемой в данный момент ячейки; β — слово в алфавите *A*, записанное на ленте правее обозреваемой ячейки. Указанной конфигурации однозначно сопоставляется упорядоченная четверки $(\tilde{\alpha},\tilde{q}_i,\tilde{a}_j,\tilde{\beta})$ чисел, определяемых следующим образом $\tilde{q}_i = i; \tilde{a}_j = j$; $\tilde{\alpha}$ - число, изображаемое цифрами, полученными кодированием символов слова α по следующему правилу:эти символы интерпретируются как *m*- ичные цифры, т. е. цифры *m*- ичной системы счисления, т. е . цифры *m*- ичной системы счисления, т. е. a_i кодируется цифрой *i*; β аналогично получается из β, но при эном читается справа налево, т.е. крайняя слева ячейка β содержит самый младший разряд, а крайняя справа — самый старший.

Завершим кодирование элементов машины Тьюринга. Символу a_0 пустой ячейки сопоставим число 0, сдвигу вправо П сопоставим 1, сдвигу влево Л – 2, отсутствию сдвига С сопоставив буквой z закодируем заключительное состояние q_0. В итоге алфавит *A* закодируется числовым множеством $\overset{\square}{A}$, а алфавит Q - числовым множеством $\overset{\square}{Q}$.

Тогда, например, если мы имеем машину Тьюринга с внешним алфавитом $A=\{a_0,a_1\}$ и на ее ленте имеется конфигурация $a_1a_0a_1a_1a_0q_3a_1a_1a_0a_1a_1$, то при нашей кодировке, ей соответствует следующая упорядоченная четверка натуральных чисел: (22, 3, 1, 13). Поясним, как она получилась. В нашей конфигурации $\alpha = a_1a_0a_1a_1a_0,\ q_i = q_3,\ a_j = a_1,\ \beta = a_1a_0a_1a_1$. Поэтому $\alpha =$ 10110 — двоичное число, которое следующим образом переводится в десятичное: $[10110]_2$ = $1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 22$. Далее, $q_3 = 3, a_1 = 1$ и, наконец, 0 = $[1101]_3$ = 13.

Второй этап. При таком кодировании система команд машина Тьюринга с алфавитом *A* и множеством состояний *Q* превращается в тройку числовых функций:

$\varphi_a:\ Q\times A \to A$ (*функция печатаемого символа*);

$\varphi_q:\ Q\times A \to Q$ (*функция следующего состояния*);

$\varphi_d:\ Q\times A \to \{0,1,2\}$ (*функция сдвига*).

Например, если среди команд машины Тьюринга имеется команда $q_i a_j \to q_i' a_j' X,\ \textit{то}\ \varphi_a\left(q_i, a_j\right) = a_j',\quad \varphi_q\left(q_i, a_j\right) = q_j',\quad \varphi_d\left(q_i, a_j\right) = d_j',$

где $\xi = 0,1,2,\ \textit{если}\ \ X = C, П, Л$ Л соответственно.

Отметим что все эти функции $\varphi_a, \varphi_q, \varphi_d$ заданы на конечном множестве $Q\times A$ и потому примитивно рекурсивны.

Третий этап. Выполнив одну команду, машина Тьюринга преобразует имеющуюся на ленте конфигурацию $K = \alpha q_i a_j \beta$ в новую конфигурацию $K' = \alpha' q_i' a_j' \beta'$. При арифметизации это означает, что упорядоченной четверке чисел$\left(\alpha, q_i, a_j, \beta\right)$, соответствующей конфигурации K, однозначно сопоставляется упорядоченная четвёрка чисел $\left(\alpha', q_i', a_j', \beta'\right)$, соответствующая конфигурации *K'*.

Так будет происходить почти со всеми конфигурациями, связанными с алфавитами *A, Q*. В итоге на множестве таких конфигураций будет задана (вообще говоря, не всюду определенная, т.е. частичная) нечисловая функция $\psi_\theta(K)=K'$ обусловленная данной машиной Тьюринга θ. Назовем ее *функцией следующего шага.*

При введенной арифметизации этой функции соответствует четвёрка числовых функций следующего шага. Иначе говоря, $\vec{\alpha}',\vec{q}_i',\vec{a}_j',\vec{\beta}'$ - это числовые функции, каждая из которых зависит от четырёх числовых переменных $\vec{\alpha},\vec{q},\vec{a},\vec{\beta}$. Попытаемся понять, как эти функции связаны с функциями системы команд $\varphi_a,\varphi_q,\varphi_d$. Во-первых, ясно, что $\vec{q}_i'=\varphi_q$ и функция $\vec{q}'$ фактически не зависит от α,β, а зависит лишь от $\vec{q},\vec{a}$ т.е. $\vec{q}'\left(\vec{\alpha},\vec{q}_i,\vec{a}_j,\vec{\beta}\right)=\varphi_q\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)$.

Рассмотрим теперь функцию $\vec{\alpha}'\left(\vec{\alpha},\vec{q}_i,\vec{a}_j,\vec{\beta}\right)$. Если при рассматриваемом такте работы машины ёе головка осталась на месте, т.е. обозреваемая ячейка не изменилась, т.е. $\varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=0$, то ясно, что $\vec{\beta}=\vec{\alpha}$. Если головка сдвинулась вправо, т.е. $\varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=1$, то это означает, что степень каждого разряда числа $\vec{\alpha}$ повысилась на единицу: нулевой разряд стал первым, первый - вторым и т.д., т.е. число $\vec{\alpha}$ увеличилось в m раз: $m\vec{\alpha}$. Кроме того, в образовавшийся младший разряд помешается та m – ичная цифра, которая соответствует при кодировании только что вписанному на ленту элементу из *A*. Эта цифра равна $\varphi_a\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)$. В итоге получим, что при сдвиге вправо: $\vec{\alpha}'\left(\vec{\alpha},\vec{q}_i,\vec{a}_j,\vec{\beta}\right)=m\vec{\alpha}+\varphi_a\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)$. Наконец, при сдвиге на данном шаге головки влево, т.е. при $\varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=0$, степень каждого разряда числа $\vec{\alpha}$ понизилась на единицу: первый разряд стал нулевым, второй - первым и т.д., т.е. число $\vec{\alpha}$

уменьшилось в m раз: $\vec{\alpha}/m$. Но поскольку самый младший разряд оказался фактически как бы «отрубленным» то в итоге получилось не частное $\vec{\alpha}/m$, а его целая часть: $[\vec{\alpha}/m]$.

Итак, для функции $\vec{\alpha}'$ мы получаем следующее описание с помощью оператора условного перехода:

$$\vec{\alpha}'\left(\vec{\alpha},\vec{q}_i,\vec{a}_j,\vec{\beta}\right)=\begin{cases}\vec{\alpha},\ \textit{если}\ \ \varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=0\ \ (\textit{нет сдвига}),\\ m\vec{\alpha}+\varphi_a\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right),\ \textit{если}\ \ \varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=1\ \ (\textit{сдвиг вправо}),\\ \vec{\alpha}/m,\ \textit{если}\ \ \varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=2\ \ (\textit{сдвиг влево}).\end{cases}$$

Совершенно аналогичная, но в определенном смысле двойственная картина наблюдается и для функции $\vec{\beta}'$: при сдвиге вправо (влево) она ведет себя так же, как функции $\vec{\alpha}'$ при сдвиге влево (вправо). Так что для нее получаем следующее описание с помощью оператора условного перехода:

$$\vec{\beta}'\left(\vec{\alpha},\vec{q}_i,\vec{a}_j,\vec{\beta}\right)=\begin{cases}\vec{\beta},\ \textit{если}\ \ \varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=0\ \ (\textit{нет сдвига}),\\ m\vec{\beta}+\varphi_a\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right),\ \textit{если}\ \ \varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=2\ \ (\textit{сдвиг влево}),\\ \vec{\beta}/m,\ \textit{если}\ \ \varphi_d\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)=1\ \ (\textit{сдвиг вправо}).\end{cases}$$

Наконец, рассмотрим функцию $\vec{\alpha}'\left(\vec{\alpha},\vec{q}_i,\vec{a}_j,\vec{\beta}\right)$. Если сдвига не происходит, то ясно, что $\vec{\alpha}'=\varphi_a\left(\vec{q}_i,\vec{a}_j\right)$. Если происходит сдвиг вправо, то машина приходит к обозрению левого разряда – числа $\vec{\beta}$: именно он был отброшен при взятии для $\vec{\beta}'$ целой части частного $\vec{\beta}/m$. Он как раз и представляет собой остаток от деления числа $\vec{\beta}$ на *m,* т.е. в этом случае

$\vec{\alpha}' = r\left(m, \vec{\beta}\right)$. Если же происходит сдвиг влево, то двойственно получаем: $\vec{\alpha}' = r\left(m, \vec{\alpha}\right)$. Итак, функция $\vec{\alpha}'$ получает следующее описание:

$$\vec{\alpha}'\left(\vec{\alpha}, \vec{q}_i, \vec{a}_j, \vec{\beta}\right) = \begin{cases} \varphi_a\left(\vec{q}_i, \vec{a}_j\right), \ \textit{если} \ \varphi_d\left(\vec{q}_i, \vec{a}_j\right) = 0 \ (\textit{нет сдвига}), \\ r\left(m, \vec{\beta}\right), \ \textit{если} \ \varphi_d\left(\vec{q}_i, \vec{a}_j\right) = 1 \ (\textit{сдвиг вправо}), \\ r\left(m, \vec{\alpha}\right), \ \textit{если} \ \varphi_d\left(\vec{q}_i, \vec{a}_j\right) = 2 \ (\textit{сдвиг влево}). \end{cases}$$

В полученных выражениях для функций $\vec{\alpha}', \vec{q}', \vec{a}', \vec{\beta}'$ задействованы только примитивно рекурсивные функции, и указанные функции получены из этих примитивно рекурсивных функций с помощью оператора условного перехода который сохраняет свойство примитивной рекурсивности, т.е. из примитивно рекурсивных функций создает снова примитивно рекурсивную функцию. Следовательно, все функции $\vec{\alpha}', \vec{q}', \vec{a}', \vec{\beta}'$ примпгиино рекурсивны.

Итак, мы доказали, что на каждом шаге любая машина Тьюринга осуществляет примитивно рекурсивное вычисление.

Четвёртый этап. Рассмотрим теперь с точки зрения введенной арифметизации работу машины Тьюринга в целом.

Пусть задана начальная конфигурация $K(0)=(\vec{\alpha}_0, \vec{q}_0, \vec{a}_0, \vec{\beta}_0)$. Тогда конфигурация $K(t)$, возникающая на такте t работы машины, зависит от величины t и компонент $\vec{\alpha}_0, \vec{q}_0, \vec{a}_0, \vec{\beta}_0$ начальной конфигурации, т.е. она является векторной функцией $K(t) = \left(K_\alpha(t), K_q(t), K_a(t), K_\beta(t)\right)$ компоненты которой, в свою очередь, являются функциями, зависящими от переменных $t, \vec{\alpha}_0, \vec{q}_0, \vec{a}_0, \vec{\beta}_0$. Эти функции определяются следующим образом:

$K_\alpha(0, \vec{\alpha}_0, \vec{q}_0, \vec{a}_0, \vec{\beta}_0) = \vec{\alpha}_0$;

$$K_\alpha(t+1,\alpha_0,q_0,a_0,\beta_0)=\alpha'\begin{pmatrix} K_\alpha\left(t,\alpha_0,q_0,a_0,\beta_0\right),K_q\left(t,\alpha_0,q_0,a_0,\beta_0\right),K_a\left(t,\alpha_0,q_0,a_0,\beta_0\right), \\ K_\beta\left(t,\alpha_0,q_0,a_0,\beta_0\right) \end{pmatrix};$$

$$K_q(0)=q_0;\; K_q(t+1)=q'\big(K_\alpha(t),K_q(t),K_a(t),K_\beta(t)\big);$$

$$K_a(0)=a_0;\; K_a(t+1)=a'\big(K_\alpha(t),K_q(t),K_a(t),K_\beta(t)\big);$$

$$K_\beta(0)=\beta_0;\; K_q(t+1)=\beta'\big(K_\alpha(t),K_q(t),K_a(t),K_\beta(t)\big);$$

Эти соотношения представляют собой схемы примитивной рекурсии, определяющие функции $K_\alpha, K_q, K_a, K_\beta$ с помощью функций α', q', a', β'. При этом рекурсия ведется по переменной *t*. Примитивная рскурсивность функций α', q', a', β' установлена на предыдущем шаге доказательства. Тогда отсюда очевидно следует, что и функции $K_\alpha, K_q, K_a, K_\beta$ также примитивно рекурсинны.

Пятый этап. Наконец, на заключительном шаге доказательства покажем, что результат работы машины Тьюринга (т.е. вычисляемая машиной функция) носит рекурсивный характер. (Обратите внимание: не примитивно рекурсивный, а рекурсивный, т.е. здесь придется использовать оператор минимизации μ).

Здесь мы докажем утверждение, обратное тому, которое было доказано в предыдущем пункте: *всякая функция, правильно вычислимая на машине Тьюринга, частично рекурсивна.* Пусть φ —- функция, правильно вычисляемая машиной Тьюринга. Такая машина, начав с конфигурации $q_1 a_0 \beta_0$, останавливается в конфигурации вида $q_z a_z \beta_z$, т.е. для такой машины $K_\alpha(0)=0, K_q(0)=1,$, исходное слово на ленте кодируется числом $m\beta_0+\alpha_0$, заключительное слово — числом $m\beta_z+\alpha_z$, т.е. вычисляется значение функции $\varphi\left(m\beta_0+\alpha_0\right)=m\beta_z+\alpha_z$. Заключительное слово — это слово, написанное на ленте: в тот момент t_z, когда машина впервые перешла в заключительное состояние q_z т. е. в момент $t_z = \mu t\left[K_q(t) = z\right]$. Поэтому $\tilde{\beta}_z = K_\beta(t_z), \tilde{\alpha}_z = K_\alpha(t_z)$ и

$$\varphi\left(m\tilde{\beta}_0 + \tilde{\alpha}_0\right) = m\tilde{\beta}_z + \tilde{\alpha}_z = mK_\beta\left(t_z, 0, 1, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0\right) + K_a\left(t_z, 0, 1, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0\right).$$

Учитывая, что $\tilde{\beta}_0 = [x/m], \tilde{\alpha}_0 = r(m,x)$, выражение для результирующего значения $\varphi(x)$ можно со всеми подробностями записать так:

$$\varphi(x) = mK_\beta\left(\mu t\left[K_q\left(t, 0, 1, r(m,x), [x/m]\right) = z\right], 0, 1, r(m,x), [x/m]\right) +$$
$$+ K_a\left(\mu t\left[K_q\left(t, 0, 1, r(m,x), [x/m]\right) = z\right], 0, 1, r(m,x), [x/m]\right)$$

где *m,z* — константы, зависящие от конкретной машины. Отсюда непосредственно видно, что функция $\varphi(x)$, представляющая собой результат работы машины Тьюринга, построена из примитивно рекурсивных функций с помощью оператора минимизации μ и, следовательно, является частично рекурсивной.

Этим и завершается доказательство того, что всякая вычислимаямая по Тьюрингу функция частично рекурсивна.

Теорема. Функция вычислима по Тьюрингу тогда и только тогда, когда она частично рекурсивна.

§ 6. Нормальные алгоритмы Маркова

Марковские подстановки. *Алфавитом* (как и прежде) называется любое непустое множество. Его элементы называются *буквами,* а любые последовательности букв — *словами* в данном алфавите. Для удобства рассуждений допускаются пустые слова. *Пустое слово* будем обозначать Λ. Если *A* и *B* — два алфавита, причем $A \subseteq B$, то алфавит *B* называется *расширением* алфавита *A*.

Слова будем обозначать латинскими буквами: *P*, *Q, R* (или этими же буквами с индексами). Одно слово может быть составной частью другого слова. Тогда первое называется *подсловом* вторoг или вхождением во второе.

Определение. Марковской подстановкой называется операция над словами, задаваемая с помощью упорядоченной пары слов *(P Q),* состоящая в следующем. В заданном слове *R* находят первое вхождение слова *P* (если таковое имеется) и, не изменяя остальных частей слова *R,* заменяют в нем это вхождение словом *Q.* Полученное слово называется *результатом* применения марковской подстановки *(P, Q)* к слову *R.* Если же первого вхождения в слово *R* нет (и, следовательно, вообще нет ни одного вхождения *P* в *R),* то считается, что марковская подстановка *(P, Q)* неприменима к слову *R.*

Частными случаями марковских подстановок являются подста)! новки с пустыми словами: (Λ, Q), (P, Λ), (Λ, Λ).

Для обозначения марковской подстановки *(P, Q)* и запись $P \to Q$. Она называется *формулой подстановки (P, Q).* Некоторые подстановки *(P, Q)* будем называть заключительными . Для обозначения таких подстановок будем использовать запись $P \to Q$, называя её *формулой заключительной подстановки.* Слово *P* называется *левой частью,* а *Q— правой частью* в формуле подстановки.

Нормальные алгоритмы и их применение к словам. Упорядоченный конечный список формул подстановок

$$\begin{cases} P_1 \to (.)Q_1, \\ P_2 \to (.)Q_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_r \to (.)Q_r, \end{cases}$$

В алфавите *A* называется *схемой* (или *записью)* нормального алгоритма в *A.* Данная схема определяет алгоритм преобразования слов, называемый нормальным алгоритмом Маркова.

Определение. Нормальным алгоритмом (Маркова) в алфавите A называется следующее правило построении последовательности V_i слов в алфавите *A,* исходя из данного слоил *V* в этом алфавите. В качестве начального слова V_0 последовательности берется слово *V.* Пусть для некоторого $i \geq 0$ слово V_i построено и процесс построения рассматриваемой последовательности еще не завершился. Если при этом в схеме нормального алгоритма *нет* формул, левые части которых входили бы в V_i то V_{i+1}, полагают равным V_i , и процесс построения поеледовательности считается завершившимся. Если же в схеме имеются формулы с левыми частями, входящими в V_i, то в качестве V_{i+1} берется результат марковской подстановки правой части первой из таких формул вместо первого вхождения ее левой части в слово V_i ;процесс построения последовательности считается *завершившимся,* если на данном шаге была применена формула заключительной подстановки, и *продолжающимся* — в противном случае. Если процесс построения упомянутой последовательности обрывается, то говорят, что рассматриваемый *нормальный алгоритм применим к слову V*. Последний член *W* последовательности называется *результатом применения нормального алгоритма к слову V*. Говорят, что *нормальный алгоритм перерабатывает V в W*.

Последовательность V_i будем записывать следующим образом

$V_0 \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_{m-1} \Rightarrow V_m,$

где $V_0 = V \quad и \quad V_m = W$.

Мы определили понятие нормального алгоритма в алфавите. Если же алгоритм задан в некотором расширении алфавита *A,* говорят, что он есть *нормальный алгоритм над A.*

Рассмотрим примеры нормальных алгоритмов.

Пример . Пусть $A = \{a,b\}$ — алфавит. Рассмотрим следующую схему нормального алгоритма в *A:*

$$\begin{cases} a \to .\Lambda, \\ b \to b. \end{cases}$$

Нетрудно понять, как работает определяемый этой схемой нормальный алгоритм. Всякое слово *V* алфавите *A,* содержащее хотябы одно вхождение буквы *a,* он перерабатывает в слово, получающееся из *V* вычеркиванием в нем самого левого (первого) вхождения буквы *a.* Пустое слово он перерабатывает в пустое.

Нормально вычислимые функции и принцип нормализации Маркова. Как и машины Тьюринга, нормальные алгоритмы не производят собственно вычислений: они лишь производят прсобразования слов, заменяя в них одни буквы другими по предписанным им правилам. В свою очередь, мы предписываем им такие правила, результаты применения которых мы можем интерпретировать как вычисления.

Пример. В алфавите A = {1} схема $\Lambda \to .1$ определяет нормальный алгоритм, который к каждому слову в алфавите *A = {1}* приписывает слева 1. Следовательно, алгоритм реализует функцию *f(x) = x*+ 1.

Определение. Функция *f*, заданная на некотором множестве слов алфавита *A,* называется *нормально вычислимой* , если найдется такое расширение *B* данного алфавита и такой нормальный алгоритм в *B,* что каждое слово *V* (в алфавите *A*) из области определения функции *f* этот алгоритм перерабатывает в слово *f (V)*

Совпадение класса всех нормально вычислимых функции с классом всех функций, вычислимых по Тьюрингу. Это совпадение будет означать, что понятие нормально вычислимой функции равносильно понятию функции, вычислимой по Тьюрингу, а вместе с ним и частично рекурсивной функции.

Теорема. Всякая функция, вычислимая по Тьюрингу, будет также и нормально вычислимой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть машина Тьюринга с внешним н I $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ и алфавитом внутренних состояний $Q=\{q_1,q_2,...,q_n\}$ вычисляет некоторую функцию *f*, заданную и принимающую значения в множестве слов алфавита *A*. Попытаемся представить программу этой машины Тьюринга в виде схемы некоторого нормального алгоритма. Для этого нужно каждую команду машины Тьюринга $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j X$ представить в виде совокупности марковских подстановок. Конфигурации, возникающие в машине Тьюринга в процессе ее работы, представляют собой слова в алфавите $A \cup Q$. Эти слова имеют вид: $a_{i_1}...a_{i_k} q_\alpha a_{i_{k+1}}...a_i$. Нам понадобится различать начало слова и его конец (или его левый и правый концы). Для этого к алфавиту $A \bigcup Q$ добавим еще два символа: $A \bigcup Q \bigcup \{u,v\}$. Эти символы будем ставить соответственно в начало и конец каждого машинного слова *w*:. *uwv*.

Пусть на данном шаге работы машины Тьюринга к машимному слову *w* предстоит применить команду $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j X$. Это означает, что машинное слово *w* (а вместе с ним и слово *uwv)* содержит подслово $q_\alpha a_i$.Посмотрим, какой совокупностью Марковских подстановок можно заменить данную команду в каждом из следующих трех случаев:

а) *X*=*С*, т.е. команда имеет вид: $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j$. Ясно, что в этом случае следующее слово получается из слова *uwv* с помощью подстановки $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j$ которую мы и будем считать соответствующей команде $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j$;

б) *X*= *Л*, т.е. команда имеет вид: $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j Л$. Нетрудно понять, что в этом случае для получения из слова *uwv* следующего слова надо к слову *uwv* применить эту подстановку совокупности

$a_0 q_\alpha a_i \to q_\beta a_0 a_j;$

$a_1 q_\alpha a_i \to q_\beta a_1 a_j;$

....

$a_m q_\alpha a_i \to q_\beta a_m a_j;$

$u q_\alpha a_i \to u q_\beta a_0 a_j$

которая применима к слову *uwv.* В частности, последняя подстановка применима только тогда, когда q_α — самая левая буква в слове *w*, т.е. когда мало пристраивать ячейку слева;

в) *X*=*П*, т. е. команда имеет вид: $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j П$.В этом случае аналогично, чтобы получить из слова *uwv* следующее слово, нужно к слову *uwv* применить ту из подстановок совокупности

$q_\alpha a_i a_0 \to a_j q_\beta a_0;$

$q_\alpha a_i a_1 \to a_j q_\beta a_1;$

....

$q_\alpha a_i a_m \to a_j q_\beta a_m;$

$q_\alpha a_i v \to a_j q_\beta a_0 v,$

которая применима к слову *uwv*.

Поскольку слово $q_\alpha a_i$ входит в слово w только один раз, то слову *uwv* применима только одна из подстановок, перечисленных и пунктах *б, в.* Поэтому порядки следования подстановок, в этих пунктах безразличны, важны лишь их совокупности.

Заменим каждую команду из программы машины Тьюринга указанным способом совокупностью марковских подстановок, получим схему некоторого нормального алгоритма. Теперь ясно, что применить, к слову w данную машину Тьюринга — это равно, что применить к слову *uwv* построенный нормальный алгоритм. Другими словами, действие машины Тьюринга равнозначно действию подходящего нормального алгоритма. Это и означает, что всякая функция, вычислимая по Тьюрингу, нормально вычислима.

Верно и обратное утверждение.

Теорема. Всякая нормально вычислимая функция вычислима по Тьюрингу.

Таким образом, класс нормально вычислимых функций совпадает с классом функций, вычислимых по Тьюрингу.

Эквивалентность различных теорий алгоритмов. *Теорема. Следующие классы функций (заданных на натуральных числах и принимающих натуральные значения) совпадают:*

а) класс всех функций, вычислимых по Тьюрингу;

б) класс всех частично рекурсивных функций;

в) класс всех нормально вычислимых функций.

§7. Разрешимость и перечислимость множеств

При интерпретировании этой общей теории, например, в теории рекурсивных функций понятие алгоритм превращается в рекурсивное описание функции, понятие вычислимая функция и понятие частично-рекурсивная (или общерекурсивная) фуикция.

Будем рассматривать функции *f* от одного или нескольких аргументов, заданные на множестве *N= {O, 1, 2, 3, 4, ..., n , ...}* всех натуральных чисел или на некоторых его подмножествах и принимающие значения в множестве *N.* Таким образом, рассматриваются функции *f* являющиеся отображениями декартовой *n* -й степени N^n в множество *N.* Область определения *Df* функции *f* есть подмножество множества $N^n = N \times .... \times N$, *Df*= $\{(x_1,...,x_n) : f(x_1,...,x_n)$ — определено*}*. Область изменения *f* есть подмножество множества *N:* *If*= $\{y \in N : (\exists x_1,...,x_n),(f(x_1,...,x_n) = y)\}$.

Определение. Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется *вычислимой,* если существует алгоритм, позволяющий вычислять ее значение для тех наборов аргументов, для которых она определена, и работающий вечно, если функция для данного набора значений аргументов не определена.

Пусть $M \subseteq N^n = N \times ... \times N$.

Определение 35.2. Множество *M* называется *разрешимым,* если существует алгоритм A_M, который по любому объекту *a* дает ответ принадлежит *a* множеству *M* или нет. Алгоритм A_M называется разрешающим алгоритмом для *M.*

Известно понятие *характеристической функции* множества *M* . *Ею* называется функция χ_M заданная на множестве *M,* принимающая значения в двухэлементном множестве *{0, 1}* и определяемая следующим образом:

$$\chi_M(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 0, \ \text{если} \ (x_1,...,x_n) \notin M; \\ 1, \ \text{если} \ (x_1,...,x_n) \in M. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что множество *M* разрешимо тогда и только тогда, когда его характеристическая функция χ_M вычислима.

Примером разрешимого множества может служить множество всех тавтологий логики высказываний. Разрешающий алгоритм состоит в прямом вычислении значений данной формулы на всевозможных наборах значений ее пропозициональных переменных.

Пусть теперь $M \subseteq N$.

Определение. Множество $M \subseteq N$ называется перечислимым, если M либо пусто, либо есть область значений некоторой вычислимой функции или, другими словами, если существует алгоритм для последовательного порождения (перечисления) всех его элементов.

Другими словами, M перечислимо, если существует такая вычислимая функция $\psi_M(x)$, что $a \in M \Leftrightarrow (\exists x)(\psi_M(x))$. Функция ψ_M называется *перечисляющей* множество M (или для множества M) соответственно алгоритм, вычисляющий ψ_M называется *перечисляющим* или порождающим для M.

Теорема. Если множества M и L перечислимы, то перечислимы множества $M \cup L$ и $M \cap L$.

Доказательство. Если имеются алгоритмы для порождения элементов множеств M и L, то алгоритм для порождения множества $M \cup L$ получается из исходных путем их одновременного применения. Следовательно, множество $M \cup L$ перечислимо.

Пусть теперь алгоритм Ω_M последовательно порождает элементы / $m_1, m_2, m_3, \ldots$— множества M, а алгоритм Ω_L последовательно порождает элементы $l_1, l_2, l_3, \ldots$ множества L. Тогда алгоритм для перечисления элементов множества $M \cap L$ заключается и следующем.

Поочередпо с помощью алгоритмои Ω_M и Ω_L, порождаются элементы $m_1, l_1, m_2, l_2, m_3, l_3, \ldots$ и т.д. Каждый вновь порожденныйэлемент m_i, сравнивается со всеми ранее порожденными элементами l_i. Если m_i совпадает с одним из них, то он включается множество $M \cap L$. В противном случае надо переходить к порождению элемента l_i и сравнивать его со всеми ранее порожденные элементами m_j, и т.д. Описанная процедура позволяет эффективно перечислить все элементы множества $M \cap L$, что и требовалось доказать. □

Теорема. Пусть $M \subseteq N$. Множество M разрешимо тогда только тогда, когда оно само и его дополнение $\bar{M}$ перечислимы.

Теорема. Существует перечислимое, но неразрешимое множество натуральных чисел.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании предыдущей теоремы достаточно привести пример такого множества U натуральных чисел, которое само было бы персчислимо, а его дополнение $\bar{U}$ перечислимым не было.

Ясно, что перечислимых множеств натуральных чисел (как и алгоритмов) имеется лишь счетное количество. Следовательно, *все* перечислимые множества можно расположить в последовательность (перенумеровать): $M_0, M_1, M_2, \ldots,$ ... Более того, можно считать, что эта нумерация эффективна, т.е. по номеру множества можно восстановить само это множество.

Рассмотрим теперь алгоритм Ω, который последовательно порождает все элементы следующего множества *U.* На шаге с номером *C(m, n)* этот алгоритм вычисляет *m-й* элемент множества M_n, и если элемент совпадает с, *n*, то он относит его в множестве *U.* Таким образом,

$n \in U \Leftrightarrow n \in M_n.$

Итак, *U* порождается алгоритмом Ω, т.е. *U* перечислимо. Поскольку дополнение $\bar{U}$ множества *U* состоит из всех таких *n,* что $n \notin M$, то $\bar{U}$ отличается от любого перечислимого множества хотя бы одним элементом. Поэтому $\bar{U}$ не является перечислимым. *U* - неразрешимо, что и завершает доказательств.

Доказанная теорема фактически иключает в себя в неявном виде теорему Гёделя о неполноте формальной арифметики.

§ 8. Неразрешимые алгоритмические проблемы

Алгоритмическая проблема — это проблема, в которой требуется найти единый метод (алгоритм) для решения бесконечной серии однотипных единичных задач. Такие проблемы называют также *массовыми проблемами.* Они возникали и решались в различны областях математики на протяжении всей ее истории.

Нумерация алгоритмов. Понятие нумерации алгоритмов — важное средство для их исследования, в частности для доказательств несуществования единого алгоритма для решения той или иной массовой проблемы. Посмотрим сначала на это понятие в рамках нашей общей теории алгоритмов.

Поскольку любой алгоритм можно задать конечным описанием (словом) (например, в конечном алфавите знаков, используемых при наборе математических книг), а множество всех конечых слов в фиксированном конечном алфавите счетно, то множество всех алгоритмов счетно. Это означает наличие взаимно-однозначного соответствия между множеством N натуральных чисел и множеством всех алгоритмов, рассматриваемым как подмножество множества Al^* всех слов в алфавите Al, выбранном для описания алгоритмов $(\varphi : N \to Al^*)$. Такая функция называется *нумерацией алгоритмов.* Если $\varphi(n) = A$, то число я называется *номером алгоритма А.* Из взаимной однозначности отображения φ следует существование обратной функции φ^{-1}, восстанавливающей по описанию алгоритма A_n его номер в этой нумерации $\varphi^{-1}(A_n) = n$. Очевидно, что различных нумераций много. Нумерация всех алгоритмов является одновременно и нумерацией всех вычислимых функций в следующем смысле: номер функции f — это номер некоторого алгоритма, вычисляющего f. Ясно, что в любой нумерации всякая функция будет иметь бесконечное множество различных номеров.

Существование нумераций позволяет работать с алгоритмами как с числами. Это особенно удобно при исследовании алгоритмов над алгоритмами. Отсутствие именно таких алгоритмов часто приводит к алгоритмически неразрешимым проблемам.

Нумерация машин Тьюринга. Опишем теперь более конкретный процесс нумерации всех машин Тьюринга, который используем при построении примера невычислимой по Тьюрингу функции. Будем считать, что для обозначения внутренних состояний машин Тьюринга используются буквы бесконечной последовательности: $q_0, q_1, q_2, ..., q_r, ...,$ а обозначения букв внешних алфавитов используются буквы последовательности: $a_0, a_1, a_2, ..., a_s, ...$

Выразим (или, как говорят, закодируем) все символы этих бесконечных последовательностей словами конечного стандартного алфавита $\{a_0, 1, q, C, П, Л\}$ по следующим правилам:

$q_i (i = 0,1,...)$ обозначим (закодируем) словом из $i+1$ букв q

$a_j (j = 1,2,...)$ обозначим (закодируем) словом из j единиц:

В стандартном алфавите программу машины Тьюринга можно записать в виде слова, руководствуясь следующим правилом. Сначала все команды программы переводятся на язык стандартного алфавита, для чего в записях этих команд $q_i a_j \to q_l a_m X$, где $X \in \{C, П, Л\}$, опускается символ "$\to$", а буквы q_i, a_j, q_l, a_m заменяются соответствующими словами стандартного алфавита. Затем полученные слова-команды записываются подряд в любом порядке в виде единого слова.

Нетрудно указать алгоритм, позволяющий узнавать, является ли слово в стандартном алфавите программой некоторой машины Тьюринга. Такой алгоритм может, например, состоять в следующем. Нужно анализировать все подслова данного слова, заключенные между всевозможными парами букв из {С, П, Л}. Эти подслова должны иметь следующую структуру: сначала записаны несколько букв *q,* затем a_0 или несколько букв 1, затем снова несколько букв *q* и, наконец, снова a_0 или несколько единиц.

Таким образом, каждая машина Тьюринга вполне определяется некоторым конечным словом в конечном стандартном алфавите. Поскольку множество всех конечных слов в конечном алфавите счетно, то и всех мыслимых машин Тьюринга имеется не более чем счетное множество.

Перенумеруем теперь все машины Тьюринга, для чего все слова стандартного алфавита, представляющие собой программы всевозможных машин Тьюринга, расположим в виде фиксированной счетно-бесконечной последовательности, которую составим по такому правилу: сначала выписываются в какой-нибудь фиксированной последовательности все однобуквенные слова: $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\xi$, представляющие программы машин Тьюринга, затем выписываются все двухбуквенные слова: $\alpha_{\xi+1}, ..., \alpha_\eta$, представляющие программы машин Тьюринга, затем выписываются трехбуквенные слова и т.д. Получится последовательность программ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ всех мыслимых машин Тьюринга. Число *к* будем называть *номером машины Тьюринга,* если программа этой машины записывается словом α_k.

Существование невычислимых по Тьюрингу функций.

Теорема. Существует функция, не вычислимая по Тьюрингу, т. е. не вычилимая ни на одной машине Тьюринга.

Доказательство. Функции, о которых идет речь, представляют собой функции, заданные и принимающие значения в множестве слов в алфавите $A_1 = \{1\}$. Ясно, что множество слов в алфавите $A_1 = \{1\}$ счетно. Следовательно, рассматривается множество всех функций, заданных на счетном множестве и принимающих значения в счетном же множестве. Как известно, это множество имеет мощность континуума. С другой стороны, поскольку множество всевозможных машин Тьюринга, как мы установили в предыдущем пункте, перенумеровав их, счетно, это и множество функций, вычислимых по Тьюрингу, также счетно. Континуальная мощность строго больше счетной. Следовательно, существуют функции, не вычислимые по Тьюрингу.

6. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

ОСНОВНЫЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ ДЛЯ ОПЕРАЦИЙ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ – закон двойного отрицания;
2. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ –коммутативный закон конъюнкции;
3. $A \vee B \equiv B \vee A$ – коммутативный закон дизъюнкции;
4. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ – ассоциативный закон конъюнкции;
5. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ – ассоциативный закон дизъюнкции;
6. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции;
7. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции;
8. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ – первый закон поглощения де Моргана;
9. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$– второй закон поглощения де Моргана;
10. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ – первый закон де Моргана;
11. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ – второй закон де Моргана;
12. $A \vee A \equiv A$ – идемпотентность дизъюнкции;
13. $A \wedge A \equiv A$ – идемпотентность конъюнкции;
14. $A \vee \overline{A} \equiv 1$;
15. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$;
16. $A \vee 0 \equiv A$;
17. $A \wedge 1 \equiv A$;
18. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$;
19. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

6.1 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \vee (y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z).$$

2 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \to B) \wedge (C \to D) \to (A \wedge C \to B \wedge D).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \to y) \wedge (y \to z) \to (x \to z).$$

3 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \wedge x \wedge \neg y) \vee x \vee (y \wedge \overline{x \wedge \bar{x}}).$$

4 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \to (B \to C) \leftrightarrow B \to (A \to C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge \overline{x \wedge \bar{x} \to y \wedge \bar{y}} \to z) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

5 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \vee \overline{y} \to (z \to y \vee \overline{y} \vee x)) \wedge (x \vee \overline{x \to (x \to x)}) \to y.$$

6 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

7 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x) \vee (y \wedge z).$$

8 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z).$$

9 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C.$$

2. Упростите формулу:

$$(y \wedge (x \vee z \to x \vee z)) \vee (x \wedge y \wedge \neg x) \vee y \vee (x \wedge \overline{y \wedge \overline{y}}).$$

10 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C.$$

2. Упростите формулу:

$$(y \wedge \overline{y \wedge \overline{y} \to z \wedge \overline{z}} \to x) \vee x \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge x).$$

6.2 ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ»

(практическое занятие № 2)

Вариант 1

1. Упростить: $(A \to B) \wedge (A \vee B \wedge C) \wedge (A \to C) \wedge \neg C$
2. Установить тип формулы: $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$
3. Найти СКНФ: $\neg A \to B \wedge C$

Вариант 2

1. Упростить: $(A \to B) \to \neg B$
2. Установить тип формулы: $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$
3. Найти СКНФ: $\neg((A \vee B) \to \neg B \wedge \neg C)$

Вариант 3

1. Упростить: $\neg(A \to B) \vee \neg(C \to B) \vee B$
2. Установить тип формулы: $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$
3. Найти СДНФ: $\neg\left(A \to \neg(B \vee C)\right)$

Вариант 4

1. Упростить: $(A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$
2. Установить тип формулы: $(A \to B) \to (A \to B \vee C)$
3. Найти СКНФ: $A \to \neg B \wedge C$

6.3 САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЯ»

(Практическое занятие №3)

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. $(X \leftrightarrow Y) \wedge Z \to X$ 2. Упростить: 1) $(X \leftrightarrow Y) \wedge X$ 2) $\neg(X \wedge Y \vee Z) \to \neg(X \wedge Z)$ 3. Привести к СДНФ: 1) $(\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$ 2) $X \wedge Y \vee Y \wedge Z$	1. $(A \to \neg B) \wedge (A \wedge B) \vee \neg A \wedge \neg B$ 2. Упростить: 1) $\neg X \wedge Y \to \neg Y \wedge X$ 2) $X \vee Y \to (\neg X \to Z)$ 3. Привести к СДНФ: 1) $(\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$ 2) $X \wedge Y \vee Y \wedge Z$	1. $\neg A \vee B \leftrightarrow A \wedge \neg C$ 2. Упростить: 1) $\neg(X \to Y) \vee (\neg X \to \neg Y)$ 2) $(X \leftrightarrow Y) \vee X$ 3. Привести к СДНФ: 1) $X \vee Y \wedge Z$ 2) $(X \wedge \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Z)$

6.4 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) Благовещенск – областной центр Амурской области;

б) студент АмГУ;

в) $\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 11$;

г) число 15 делится на 3 и на 5;

д) $a>0$;

ж) число 0,000001 достаточно мало;

з) в мае теплая погода;

и) число x – простое.

2. Среди следующих высказываний указать истинные:

а) если x_1 и x_2 – действительные корни уравнения $4x^2+236x-11=0$, то $x_1+x_2=59$;

б) если в четырехугольнике диагонали равны, то этот четырехугольник – ромб;

в) существует действительное число x, такое что $x^4+26x^2+3=0$.

г) если a>b, то b<a;

д) $\sin x$ не больше 1;

е) никакой ромб не может быть вписан в окружность.

3. Сформулировать отрицания следующих высказываний:

а) студент Иванов учится в АмГУ;

б) число 15 не делится на 5;

в) 21< 4;

г) $5 \geq 3$;

д) все простые числа нечетны;

е) не существует четных простых чисел;

ж) функция f нечетна;

з) существуют иррациональнее числа.

4. Пусть через A обозначено высказывание : «Этот четырехугольник – параллелограмм», а через B – высказывание: «Этот четырехугольник – ромб». Сформулируйте следующие высказывания:

а) $\neg A \wedge \neg B$; *г*) $(A \vee B) \leftrightarrow A$;

б) $\neg(A \vee B)$; *д*) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg B$;

в) $\neg A \to \neg B$; *е*) $(A \wedge \neg B) \to \neg\neg A$.

5. Пусть P – высказывание «сегодня ясно», Q – «сегодня идет дождь», R – «сегодня идет снег», S – «сегодня пасмурно». Сформулируйте следующие высказывания:

а) $P \to \neg(Q \vee R)$; *г*) $(S \to Q) \vee P$;

б) $S \leftrightarrow \neg P$; *д*) $S \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$;

в) $S \wedge (R \vee Q)$; *е*) $(S \leftrightarrow Q) \wedge \neg R$.

6. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

а) $(A \wedge B) \to C \leftrightarrow A \to (B \to C)$;

б) $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$;

в) $(A \to B) \wedge (C \to D) \to (A \vee C \to B \vee D)$.

7. Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из них являются выполнимыми, какие – опровержимыми, какие тавтологиями и какие – противоречиями:

а) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$;

б) $(p \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((\neg q \to p) \vee q)$;

в) $p \wedge (q \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

8. Определите истинность высказываний:

а) $\neg p \wedge q \leftrightarrow p \vee q$, если $\lambda(p \to q) = 0$;

б) $p \to (\neg r \to \neg q)$, если $\lambda(p \to (q \to r)) = 1$;

в) $p \to \neg t$, если $\lambda(p \to q) = 1, \lambda(\neg s \to \neg q) = 1, \lambda(t \to \neg s) = 1$;

г) $p \to \neg s$, если $\lambda(p \to q) = 1, \lambda(\neg s \to \neg q) = 0$;

д) $p \to v$, если $\lambda(p \vee q \to r \vee s) = 1, \lambda(s \vee r \to v) = 1$.

9. Данные составные высказывания расчлените на простые и запишите символически, введя буквенные обозначения для простых их составляющих:
а) если 162 делится на 3 и делится на 2, то оно делится на 6;
б) дробь равняется нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю;
в) если 5 простое число, то оно не делится на другие простые числа;
г) если 5 < 7, и 7 < 9, то 5 < 9.

10. Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к возможно более простой форме:

а) $\overline{A \to \overline{(R \vee P)} \vee A \to (\overline{R} \wedge Q)} \vee \overline{\overline{A} \to \overline{(R \vee P)} \vee \overline{A} \to (\overline{R} \wedge Q)}$;

б) $(\overline{P} \wedge \overline{Q}) \to \overline{(\overline{P} \wedge R)}$;

в) $\overline{(\overline{R} \wedge (P \wedge \overline{Q}))}$;

г) $\overline{(C \to \overline{P}) \wedge (C \to \overline{Q}) \wedge (C \to \overline{R})}$.

11. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только операции $\neg$ и $\wedge$:

а) $\overline{((A \vee B) \vee \overline{A}) \wedge (A \vee B) \vee A}$;

б) $\overline{(\overline{A} \vee \overline{B}) \vee C}$;

в) $\overline{(\overline{A} \vee \overline{B})} \vee \overline{C}$;

г) $\overline{\overline{(A \vee \overline{B})} \vee \overline{C}}$.

12. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только операции $\neg$ и $\vee$:

а) $\overline{(\overline{A} \wedge \overline{B})} \to \overline{C}$;

б) $(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \to \overline{(A \to A)}$;

в) $\overline{B \wedge \overline{A}}$;

г) $(A \to A) \wedge (B \to A)$.

13. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозициональным переменным и не стояло бы перед скобками:

а) $\overline{(\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C})}$;

б) $\overline{A \wedge \overline{C}}$;

в) $\overline{(A \wedge \overline{B}) \wedge C}$;

г) $\overline{(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee C}$.

14. Найдите отрицание каждой из следующих формул:

а) $((A \vee \overline{B}) \wedge C) \to ((\overline{B} \to C) \vee A)$;

б) $(A \to B) \to C$;

в) $(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \to D$;

г) $\overline{\overline{(D \vee A)} \vee C} \to D$.

15. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

а) $\overline{\overline{(A \to B)} \vee (C \to \overline{A})}$;

б) $(\overline{A} \to C) \wedge (\overline{A} \to B)$;

в) $\overline{\overline{(C \to A)} \vee \overline{(C \to B)}}$;

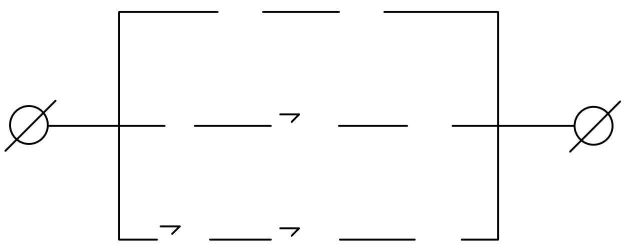
г) $((\overline{A} \to C) \to A) \wedge ((\overline{C} \to A) \to \overline{A})$.

6.5 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

ПО ТЕМЕ «АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ»

Вариант 1

1. Упростить: $(A \to B) \wedge (A \vee B \wedge C) \wedge (A \to C) \vee \neg C$.
2. Установить тип формулы: $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$.
3. Найти СКНФ: $\neg A \to B \wedge C$.
4. Упростить РКС и построить ее:



5. Истинность двух высказываний: «А и В либо вместе пошли в отпуск, либо оба от него отказались» и «если А не пошел в отпуск, то В пошел» означает, что а отпуске находятся:

   1) А; 2) В; 3) А, В; 4) никто не пошел в отпуск.
6. Задача: Идет чемпионат школы по гимнастике: болельщики горячо Q R обсуждают ход борьбы и высказывают предположения:

   Сережа: «Первой будет Наташа, а Майя - второй»

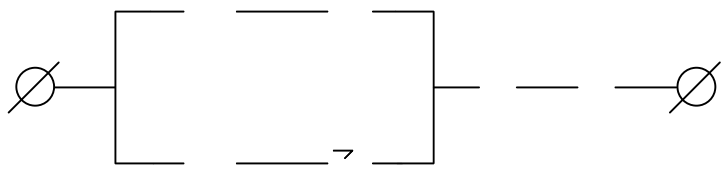
   Вова: «Нет, Лида займет II место, а Рита будет четвертой» P Q

   Толя: «Второй будет Наташа, а Рита - третьей»

   Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из мальчиков ошибся только один раз. Какие места заняли Наташа, Майя, Лида и Рита? P Q
7. Или Анна и Антон одного возраста, или Анна старше Антона. Если Анна и Антон одного возраста, то Наташа и Антон не одного возраста. Если Анна старше Антона, то Антон старше Николая. Следует ли отсюда, что Наташа и Антон не одного возраста или Антон старше Николая?

Вариант 2

1. Упростить: $(A \to B) \to \neg B$.
2. Установить тип формулы: $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$.
3. Найти СКНФ: $\neg(A \vee B \to \neg B \wedge \neg C)$.
4. Структурная формула для переключателей схемы



   имеет вид:

   1) A+B; 2) A·B; 3) A; 4) $\overline{A \cdot B}$; 5) $(\overline{A} + B) \wedge A$.
5. Истинность двух высказываний: «если A и B пошли в кафе, то C не пошел» и «A и B вместе пошли в кафе, если в кафе пошел C» означает, что в кафе не пошел: A B

   1) C; 2) A; 3) B; 4)A и C; 5) A, B, C.
6. Задача: Четыре ученицы – Анита, Бтигитта, Криста и Дана – закончили между собой соревнования. На вопрос, кто какое место занял, ответили: B A

   «Анита победила, Бригитта заняла II место»

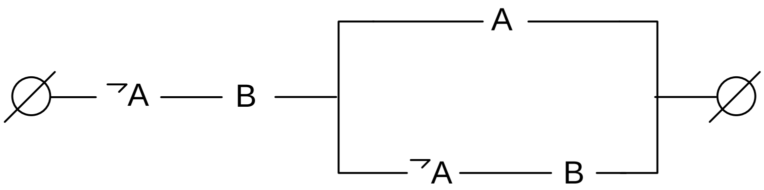
   «Анита заняла II место, а Криста - III»

   «Дана заняла II место, а Криста - IV»

   Как выяснилось позднее, в каждом из высказываний одно утверждение правильное, а другое ложное. Какое место заняла каждая из девочек?
7. Если я пойду завтра на I-е занятие, то должен буду рано встать, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии пятью часами сна. Следует ли отсюда, что я должен пропустить завтра I занятие, или не ходить вечером на танцы?

Вариант 3

1. Упростить: $\neg(A \to B) \vee \neg(C \to B) \vee B$.
2. Установить тип формулы: $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$.
3. Найти СКНФ: $\neg\big(A \to \neg(B \vee C)\big)$.
4. Структурная формула для переключателей схемы



   имеет вид:

   1) $A \wedge B$; 2) $A \wedge \neg B$; 3) $A + \neg B$; 4) $\neg A + B$; 5) $\neg\big(A \to \neg B\big)$

5. Ложность двух высказываний: «В и С одновременно пошли в отпуск» и «С в отпуск не пошел» означает, что в отпуск пошли:

   1) В, С; 2) В; 3) С.

6. Задача: Четыре команды – «Артек», «Вымпел», «Сокол» и «Метеор» - в спортивных соревнованиях заняли четыре первых места, причем ни одно не было разделено между командами. О занятых командами местах получены три высказывания:

   «Второе место занял «Сокол», а «Метеор» - III»

   «Победителем вышел «Сокол», «Вымпел» был вторым»

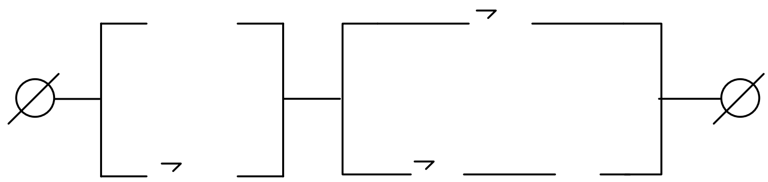
   «Второе место занял «Артек», а Метеор был последним»

   Как распределились места, если в каждом из высказываний одно утверждение верно, а другое ложно?

7. Если Антон ляжет сегодня поздно, то утром он будет в нерабочем состоянии. Если он ляжет поздно, то ему буде казаться, что он много времени теряет бесполезно. Следовательно, или Антон будет завтра в нерабочем состоянии, или ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно. Справедливо ли такое заключение?

Вариант 4

1. Упростить: $(A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$.
2. Установить тип формулы: $(A \to B) \to (A \to B \vee C)$.
3. Найти СКНФ: $A \to \neg B \wedge C$.
4. Структурная формула для переключателей схемы



   имеет вид:

   1) $A \vee B$; 2) $A \wedge B$; 3) $\neg B$; 4) $\neg A + B$; 5) $\neg B \wedge (B \to A)$

5. Истинность двух высказываний: «неверно, что если сотрудники A и C пойдут в отпуск, то сотрудник B тоже» и «если сотрудник A не пойдет в отпуск, то C пойдет и B не пойдет» означает уход в отпуск сотрудников:

   1) A, B, C; 2) B; 3) A, B; 4) B, C; 5) A, C.

6. Задача: Перед началом забега зрители обсуждали скаковые возможности трех лучших лошадей с кличками «Абрек», «Ветер», «Стрелок».

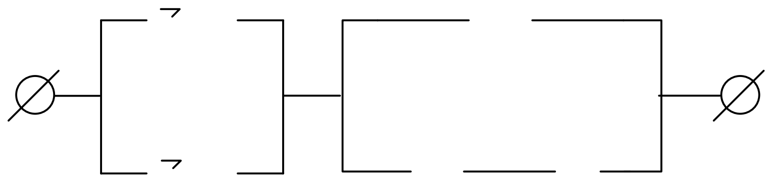
   - Победит или «Абрек» или «Стрелок», - сказал один.
   - Если «Абрек» будет вторым, то победу принесет «Ветер», - сказал второй.
   - Вторым придет или «Ветер» или «Абрек», - сказал третий.
   - А я вам скажу, - вмешался четвертый, - что если «Абрек» придет третьим, то «Стрелок» не победит.

   После забега выяснилось, что три лошади - «Абрек», «Ветер» и «Стрелок» заняли 3 первых места, и что все четыре предсказания были правильными. Как закончился забег?

7. Если цех II не будет участвовать в выпуске нового образца продукции, то не будет участвовать и цех I. Если же цех II будет участвовать в выпуске нового образца, то в этой работе непременно должны быть задействованы цеха I и III. Необходимо ли участие цеха III, если в выпуске нового образца будет участвовать цех I?

Вариант 5

1. Упростить: $\neg((A \to B) \wedge (B \to \neg A))$.
2. Установить тип формулы: $\neg(\neg A \vee B) \to ((A \vee B) \to A)$.
3. Найти СКНФ: $\neg A \wedge B \vee \neg A \wedge C$.
4. Структурная формула для переключателей схемы



   имеет вид:

   1) $A + B$; 2)B; 3)A; 4) $A \wedge \neg B$; 5) $\neg(\neg A + B)$

5. Истинность двух высказываний: «если А пошел в кино, то В тоже» и «если А не пошел в кино или В пошел, то В не пошел в кино, а С - пошел» означает, что в кино были:

A

   1) А, В, С; 2) А, В; 3) В; 4) С; 5) А, С.

6. Задача: На вопрос о цене конфет продавец ответила:

   1. «С ликером» - 15 руб., «Ирис» - 17 р.
   2. «Рачки» - 19 руб., «С ликером» - 17 руб.

B

   3. «Театральные» - 17 руб., «Рачки» - 18 руб.

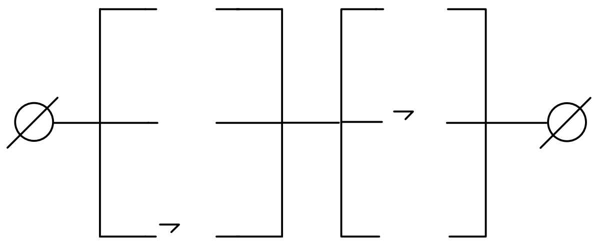
   Каждый раз она правильно называла цену лишь одного сорта конфет. Сколько стоят конфеты?

Если Сергей выиграет теннисный турнир, то он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в последующих турнирах. Но если он проиграет этот турнир, то потеряет поддержку своих болельщиков. Он плохой борец в последующих турнирах, если потеряет поддержку своих болельщиков. Если он плохой борец в последующих турнирах, то ему следует прекратить занятия теннисом. Сергей или выиграет этот турнир или проиграет его. Следовательно, ему нужно прекратить занятия теннисом. Справедливо ли это рассуждение с точки зрения логики?

Вариант 6

1. Упростить: $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee ((A \to B) \wedge A)$.

2. Установить тип формулы: $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$.
3. Найти СКНФ: $A \wedge B \vee \neg C$.
4. Структурная формула для переключателей схемы



имеет вид:

1) $A \wedge B \leftrightarrow C$; 2) $A + A \wedge B + (B \leftrightarrow C)$; 3) $A \wedge \neg B \leftrightarrow C$;
4) $A + (B \leftrightarrow C)$; 5) $A \leftrightarrow \neg B \wedge C$

5. Истинность двух высказываний: «неверно, что если школьники В и С пойдут в кино, то школьник А» и «если школьник А пойдет в кино, то С и В пойдут» означает посещение кинотеатра школьниками:

1) А, В, С; 2) А, В; 3) В; 4) В,С; 5) А, С.

6. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему первый или второй урок; историк или I, или III; учитель литературы – или II, или III. Как составить расписание уроков, чтобы учесть все пожелания?
7. Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следует ли тогда, что если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я не получу работу?

6.7 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ» №2

1. Составьте таблицы истинности формул.

2. Проверьте двумя способами, будут ли эквивалентны формулы (составлением таблиц истинности и приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью элементарных преобразований).
3. Постройте ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ формулы с помощью эквивалентных преобразований. Постройте полином Жегалкина.
4. Найти сокращенную, все тупиковые и минимальные ДНФ, КНФ булевой функции помощью карт Карно. Каким классам Поста принадлежат эти функции?
5. Является ли полной система функций?

Вариант 1

1. а) $(x \vee y) \leftrightarrow (y \downarrow \overline{x})$, б) $(x \mid \overline{y}) \to (z \oplus \overline{xy})$.

2. $x \to (y \oplus z)$ и $(x \to y) \oplus (x \to z)$.

3. $(x \vee \overline{y}) \to (\overline{z} \oplus \overline{x})$.

4. а) $f(0,1,0) = f(1,0,0) = f(1,0,1) = 0$, б) (1101110100110011).

5. $\{x \vee y, \overline{x} \oplus y\}$.

Вариант 2

1. а) $(x \leftrightarrow \overline{y}) \vee (y \downarrow x)$, б) $((x \to \overline{y}) \mid \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

2. $x \mid (y \to z)$ и $(x \mid y) \to (x \mid z)$.

3. $\overline{(x \vee \overline{y}) \to (z \oplus \overline{x})}$.

4. а) $f(0,1,1) = f(1,0,0) = f(1,1,0) = 0$, б) (1111110010111011).

5. $\{x \to y, \overline{x} \wedge \overline{y}\}$.

Вариант 3

1. а) $(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow (y \downarrow x)$, б) $((x \mid \overline{y}) \to \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

2. $x \wedge (y \oplus z)$ и $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

3. $(\overline{x} \vee \overline{y}) \to \overline{(z \oplus x)}$.

4. а) $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(1,0,1) = f(1,1,1) = 1$, б) (1110010100110101).

5. $\{x \leftrightarrow y, \overline{x} \mid \overline{y}\}$.

Вариант 4

1. а) $(x \leftrightarrow \overline{y}) \vee (y \downarrow x)$, б) $((x \to \overline{y}) | \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

2. $x \to (y \downarrow z)$ и $(x \to y) \downarrow (x \to z)$.

3. $(x \vee \overline{y}) \to \overline{(z \leftrightarrow \overline{x})}$.

4. а) $f(0,0,1) = f(1,1,1) = f(1,1,0) = 0$, б) (1101001111010011).

5. $\{x \oplus y, \overline{x} \vee y\}$.

Вариант 5

1. а) $(x \vee \overline{y}) \to (y \oplus x)$, б) $((x \leftrightarrow \overline{y}) | \overline{z}) \downarrow \overline{xy}$.

2. $x \wedge (y \to z)$ и $(x \wedge y) \to (x \wedge z)$.

3. $\overline{(x \vee \overline{y}) \to (z \leftrightarrow \overline{x})}$.

4. а) $f(0,0,0) = f(1,1,1) = f(1,1,0) = 0$, б) (1100101111111011).

5. $\{\overline{x} \to y, x \wedge \overline{y}\}$.

Вариант 6

1. а) $(x \oplus \overline{y}) \leftrightarrow (y | x)$, б) $((x \downarrow y) \leftrightarrow \overline{z}) \vee \overline{xy}$.

2. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$ и $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$.

3. $\overline{(x | \overline{y}) \oplus (z \to \overline{x})}$.

4. а) $f(0,0,1) = f(0,1,1) = f(1,1,0) = f(1,1,1) = 1$, б) (1100101110111011).

5. $\{\overline{x} \leftrightarrow y, x | \overline{y}\}$.

Вариант 7

1. а) $(x \vee \overline{y}) \downarrow (y \to x)$, б) $((x | \overline{y}) \leftrightarrow \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

2. $x \wedge (y | z)$ и $(x \wedge y) | (x \wedge z)$.

3. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y | x)}$.

4. а) $f(0,0,0) = f(1,0,1) = f(1,1,1) = 0$, б) (0011001111011101).

5. $\{x \oplus \overline{y}, \overline{x} \vee y\}$.

Вариант 8

1. а) $(x \oplus \overline{y}) \to (y \downarrow x)$, б) $((x | \overline{y}) \vee \overline{z}) \leftrightarrow \overline{xy}$.

2. $x \vee (y | z)$ и $(x \vee y) | (x \vee z)$.

3. $(\bar z \to x) \leftrightarrow (\bar x | y)$.

4. а) $f(1,0,0) = f(1,1,0) = f(0,1,1) = f(0,1,0) = 1$, б) (0101001101011110).

5. $\{x \leftrightarrow \bar y, \bar x | y\}$.

Вариант 9

1. а) $(\bar x \leftrightarrow (y \to (\bar y \downarrow x))$, б) $((\bar x | y) \vee \bar z) \oplus \overline{xy}$.

2. $x \vee (y|z)$ и $(x \vee y) \to (x \vee z)$.

3. $(\bar z \to x) \oplus (x | \bar y)$.

4. а) $f(1,0,1) = f(0,1,0) = f(1,1,1) = 0$, б) (1011101111001111).

5. $\{x \to \bar y, \bar x \wedge y\}$.

Вариант 10

1. а) $(x \downarrow (\bar y \to (y|x))$, б) $x \oplus (\bar y \vee \bar z \leftrightarrow \overline{xy})$.

2. $x \vee (y \leftrightarrow z)$ и $(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$.

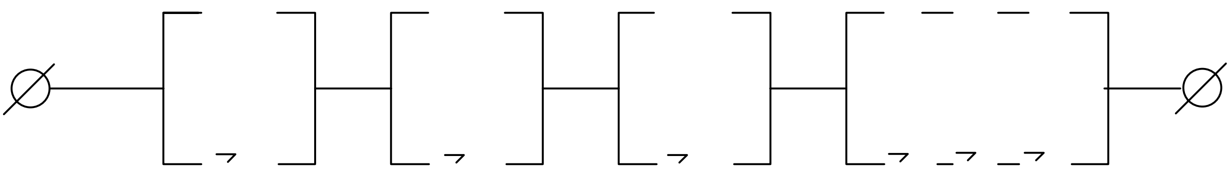
3. $(z \to x) \oplus (x | \bar y)$.

4. а) $f(0,1,1) = f(1,0,0) = f(0,1,1) = f(1,0,1) = 0$, б) (0011110100111100).

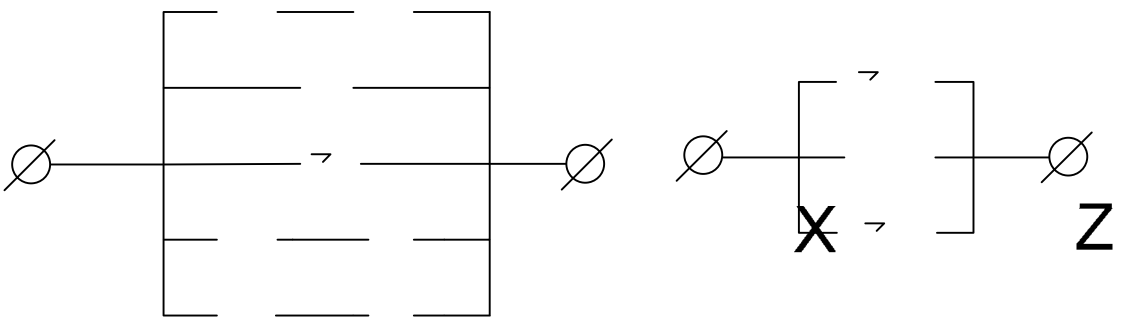
5. $\{\bar x \oplus \bar y, x \vee \bar y\}$.

6.8 ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ»

1. Представить формулой алгебры высказываний булеву функцию: 11110001
2. Построить РКС: $P \wedge \left(Q \wedge \left(P \vee \neg Q\right) \wedge \neg P \vee Q \wedge R\right) \vee \neg Q \wedge \left(Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge \neg R\right) \vee Q \wedge R \wedge \left(P \wedge \neg R \vee \neg P\right)$
3. Упростить и построить РКС:



4. Проверить равносильность данных РКС:



5. Составить схему цепи с тремя независимыми контактами, которая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты не более чем 2 контакта

6.9 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ»

Вариант 1

1. Выяснить, эквивалентны ли формулы
$f_1(x,y,z)=(x\to y)\oplus((y\to\bar z)\to x\cdot y)$ и $f_2(x,y,z)=\overline{y\wedge z\to x}$.
2. Построить формулу, двойственную данной функции
$(x\downarrow y)\oplus((x|y)\downarrow(\bar x\leftrightarrow y\cdot z))$.
3. Представить в СДНФ функцию: а) $(x\to y)\oplus(x|yz)$; б) (1100100010010011).
4. Построить полином Жегалкина для функции $x\to(y\to z)$.
5. Сведением к заведомо полной системе в P_2 показать полноту системы функций $\{xy\oplus z,(x\leftrightarrow y)\oplus z\}$.

Вариант 2

1. Выяснить, эквивалентны ли формулы
$f_1(x,y,z)=(x\vee\bar y)\downarrow(\bar x\to(y\to\bar z))$ и $f_2(x,y,z)=\overline{y\to(x\vee z)}$.
2. Построить формулу, двойственную данной функции
$(\bar x\vee\bar y\vee(y\bar z\oplus 1))\downarrow z$.
3. Представить в СКНФ функцию: а) $(x\to y)\oplus(x|yz)$; б) (1100100010010011).
4. Построить полином Жегалкина для функции (10001110).
5. Сведением к заведомо полной системе в P_2 показать полноту системы функций $\{x\to y,\overline{x\oplus y\oplus z}\}$.

6.10 ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ

«КЛАССЫ ЗАМКНУТОСТИ»

1. Выяснить, является ли функция самодвойственной:

а) $xy \vee yz \vee zx$; б) $(x \vee \bar{y} \vee z)t \vee xyz$; в) (1001101110111001).

2. Выяснить, является ли функция линейной:

а) $(x \vee yz) \oplus xyz$; б) (0110100101101001).

3. Выяснить, принадлежит ли функция множеству $T_1 \backslash T_0$:

а) $x \to (y \to (z \to x))$; б) (00011011).

4. Выяснить, является ли функция монотонной:

а) (0010001101111111); б) $(x \oplus y) \wedge (x \leftrightarrow y)$.

6.11 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «КЛАССЫ ЗАМКНУТОСТИ»

1. Выяснить, полна ли система функций:

а) $\{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$; б) $\{\bar{x}, x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \vee z), x \oplus y \oplus z\}$;

в) $\{(11), (0111), (00110111)\}$.

2. Выяснить, полна ли система функций $(M \backslash T_0) \cup (S \backslash L)$.

Используя теоретико-множественные операции, выразить через известные замкнутые классы замыкания множества A: а) $A = \{P_2 \backslash (T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M)\}$;

б) $A = M \backslash (T_0 \cap L)$.

6.12 ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ»

1. Проверить двумя способами, будут ли эквивалентны следующие формулы: $x \vee (y \oplus z)$ и $(x \vee y) \oplus (x \vee z)$.

а) составлением таблиц истинности:

x	y	z	$y \oplus z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \oplus z)$	$(x \vee y) \oplus (x \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1

0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0

Данные формулы не эквиваленты.

б) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований:

$x \vee \overline{(y \leftrightarrow z)} = x \vee \overline{((y \to z) \wedge (z \to y))} = x \vee \overline{((\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{z} \vee y))} = x \vee \overline{((\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{z} \vee y))} =$

$= x \vee \overline{(\overline{y} \vee z)} \vee \overline{(\overline{z} \vee y)} = x \vee (\overline{\overline{y}} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{\overline{z}} \wedge \overline{y}) = x \vee (y \wedge \overline{z}) \vee (z \wedge \overline{y})$ - ДНФ.

$x \vee (y \wedge \overline{z}) \vee (z \wedge \overline{y}) = (x \wedge (y \vee \overline{y}) \wedge (z \vee \overline{z})) \vee ((x \vee \overline{x}) \wedge y \wedge \overline{z}) \vee ((x \vee \overline{x}) \wedge \overline{y} \wedge z) =$

$= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) =$

$= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$ - СДНФ.

$(x \vee y) \oplus (x \vee z) = \overline{((x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z))} = \overline{((\overline{(x \vee y)} \vee (x \vee z)) \wedge (\overline{(x \vee z)} \vee (x \vee y)))} =$

$= \overline{(\overline{(x \vee y)} \vee (x \vee z))} \vee \overline{(\overline{(x \vee z)} \vee (x \vee y))} = ((x \vee y) \wedge \overline{(x \vee z)}) \vee ((x \vee z) \wedge \overline{(x \vee y)}) =$

$= ((x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{z}) \vee ((x \vee z) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (((\overline{x} \wedge x) \vee (\overline{x} \wedge y)) \wedge z) \vee (((\overline{x} \wedge x) \vee (\overline{x} \wedge z)) \wedge \overline{y}) =$

$= (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$ - СДНФ.

Из полученных формул видно что исходные формулы не эквивалентны.

2. С помощью эквивалентных преобразований приведите формулы к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. Построить полином Жегалкина: $\overline{(x \mid y) \oplus (\overline{z} \to y)}$.

$\overline{(x \mid y) \oplus (\overline{z} \to y)} = \overline{\overline{((x \mid y) \leftrightarrow (\overline{z} \to y))}} = (x \mid y) \leftrightarrow (\overline{z} \to y) =$

$((x \mid y) \to (\overline{z} \to y)) \wedge (\overline{z} \to y) \to (x \mid y)) =$

$= (\overline{(x \mid y)} \vee (\overline{z} \to y)) \wedge (\overline{(\overline{z} \to y)} \vee (x \mid y)) = ((x \wedge y) \vee (z \vee y)) \wedge (\overline{(z \vee y)} \vee \overline{(x \wedge y)}) =$

$=((x \wedge y) \vee (z \vee y)) \wedge ((\bar{z} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) = (((z \vee x) \wedge (z \vee y)) \vee y) \wedge (((\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee \bar{y}) =$

$=((y \vee (z \vee x)) \wedge (y \vee (z \vee y))) \wedge ((\bar{y} \vee (\bar{x} \vee \bar{z})) \wedge (\bar{y} \vee (\bar{x} \vee \bar{y}))) =$

$=(x \vee y \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ - КНФ.

$(x \vee y \vee z) \wedge (y \vee z \vee (x \wedge \bar{x})) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee (z \wedge \bar{z})) =$

$=(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) =$

$=(x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ - СКНФ.

$\overline{(x \mid y) \oplus (\bar{z} \to y)} = ((x \wedge y) \vee (z \vee y)) \wedge ((\bar{z} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) =$

$=(((x \wedge y) \vee (z \vee y)) \wedge (\bar{z} \wedge \bar{y})) \vee (((x \wedge y) \vee (z \vee y)) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) =$

$=((\bar{z} \wedge \bar{y}) \wedge (x \wedge y)) \vee ((\bar{z} \wedge \bar{y}) \wedge (z \vee y)) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \wedge y)) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (z \vee y)) =$

$=$

$(\bar{z} \wedge x \wedge y \wedge \bar{y}) \vee (\bar{z} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{z} \wedge \bar{y} \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{y}) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y)$
$=$

$=(z \wedge \bar{x}) \vee (z \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x})$ - ДНФ.

$(z \wedge \bar{x}) \vee (z \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x}) = (z \wedge \bar{x}) \vee 1 \vee (z \wedge \bar{y}) \vee 1 \vee (y \wedge \bar{x}) \vee 1 =$

$=(\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) =$

$=(\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$ - СДНФ.

f(x,y,z)= $\overline{\overline{(z \wedge \bar{x}) \vee (z \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x})}} = \overline{\overline{(z \wedge \bar{x})} \wedge \overline{(z \wedge \bar{y})} \wedge \overline{(y \wedge \bar{x})}} =$

$=(z(x \oplus 1) \oplus 1)(z(y \oplus 1) \oplus 1)(y(x \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1 = (xz \oplus z \oplus 1)(yz \oplus z \oplus 1)(xy \oplus y \oplus 1) \oplus 1 =$

$=(xyz \oplus xz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus z \oplus yz \oplus z \oplus 1)(xy \oplus y \oplus 1) \oplus 1 = (xyz \oplus z \oplus 1)(xy \oplus y \oplus 1) \oplus 1 =$

$= xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus yz \oplus z \oplus xy \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = yz \oplus z \oplus xy \oplus y$ - Полином Жегалкина.

3. Найти сокращенную, все тупиковые и минимальные ДНФ булевой функции *f(x, y, z) = f(0,0,1)=f(0,1,1)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=1* двумя способами:

а) методом Квайна:

$f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) = 1$

$\bar{x}z(\bar{y} \vee y) \vee \bar{y}z(\bar{x} \vee x) \vee x\bar{y}(\bar{z} \vee z) = \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}$ - сокращенная ДНФ.

Матрица Квайна:

	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{y}z$	*			*
$x\bar{y}$			*	*
$\bar{x}z$	*	*		

Выписываем тупиковые ДНФ:

$\bar{x}z \vee x\bar{y}$; $\bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}z$.

Выбираем из тупиковых минимальную: $\bar{x}z \vee x\bar{y}$.

б) с помощью карт Карно:

			1
1	1		1

$x\bar{y}\bar{z}; x\bar{y}z \Rightarrow x\bar{y}$; $\bar{x}\bar{y}z; \bar{x}yz \Rightarrow \bar{x}z$; $\bar{x}\bar{y}z; x\bar{y}z \Rightarrow \bar{y}z$;

Выписываем тупиковые ДНФ:

$\bar{x}z \vee x\bar{y}$; $\bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}z$.

Выбираем из тупиковых минимальную ДНФ: $\bar{x}z \vee x\bar{y}$ (импликанты, которые покрывают все единицы и имеют наименьшее число вхождений переменных).

Каким классам Поста принадлежит эта функция?

$P_0(0, 0, 0) = 0$; $f \in P_0$. *Класс булевых функций сохраняющих нуль.*

$P_1(1, 1, 1) = 0$; $f \notin P_1$. *Класс булевых функций сохраняющих единицы.*

$f(0, 0, 1) > f(1, 1, 1)$; $f \notin M$. *Класс монотонных функций.*

$f(0, 1, 1) \neq \overline{f(1,0,0)}$; $f \notin S$. *Класс самодвойственных функций.*

$$f=\bar{x}z\vee x\bar{y}=\overline{\overline{\bar{x}z\vee x\bar{y}}}=\overline{\overline{\bar{x}z}\wedge\overline{x\bar{y}}}=((x\oplus 1)z\oplus 1)(x(y\oplus 1)\oplus 1)\oplus 1=(xz\oplus z\oplus 1)(xy\oplus x\oplus 1)=$$

$=xyz\oplus xz\oplus xz\oplus xyz\oplus xz\oplus z\oplus xy\oplus x\oplus 1\oplus 1=xz\oplus xy\oplus z\oplus x$ - полином Жегалкина.

x	y	z	$\bar{x}z\vee x\bar{y}$	$xz\oplus xy\oplus z\oplus x$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

Функция линейная: *$f\in L$. Класс линейных функций.*

4. С помощью карт Карно найдите сокращенную, все тупиковые и минимальные ДНФ, КНФ булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданные вектором своих значений: *(0111 1101 0010 1010).*

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0

Карта Карно:

	1	1	
1	1		

1	1		
1		1	1

0-куб – нет импликант.

1-куб: 1) $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$; 2) $x_1x_2\bar{x}_4$; 3) $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$; 4) $x_1x_3\bar{x}_4$; 5) $\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$;

6) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

2-куб: $\bar{x}_1x_4$.

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$
$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$				*				*	
$x_1x_2\bar{x}_4$								*	*
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$				*	*				
$x_1x_3\bar{x}_4$							*		*
$\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$		*					*		
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$		*	*						
$\bar{x}_1x_4$	*		*		*	*			

Выписываем тупиковые ДНФ:

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4$ - минимальная ДНФ

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4$ - минимальная ДНФ

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4$

$\bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1 x_3\bar{x}_4$ - минимальная ДНФ

5. Является ли полной система функций? Образует ли она базис?

$\Im = \{x \downarrow \bar{y}, \bar{x} \leftrightarrow \bar{y}\}$;

$f_1(x,y) = x \downarrow \bar{y} = \overline{x \vee \bar{y}} = \bar{x} \wedge y$;

$f_2(x,y) = \bar{x} \leftrightarrow \bar{y} = (\bar{x} \to \bar{y}) \wedge (\bar{y} \to \bar{x}) = (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x})$;

Проверяем принадлежат ли функции к классу сохраняющих нуль:

$f_1(1,1) = 0 \qquad f_1(x,y) \in P_0$

$f_2(0,0) = 1 \qquad f_2(x,y) \notin P_0$

Проверяем принадлежат ли функции к классу сохраняющих единицу:

$f_1(1,1) = 0 \qquad f_2(x,y) \notin P_1$

$f_2(1,1) = 1 \qquad f_2(x,y) \in P_1$

Проверяем принадлежат ли функции к классу самодвойственных:

$f_1(1,0) = f_1\overline{(0,1)} \qquad f_1(0,0) \neq f_1\overline{(1,1)} \qquad f_1 \notin S$

$f_2(1,0) \neq f_2\overline{(0,1)} \qquad f_2(0,0) \neq f_2\overline{(1,1)} \qquad f_2 \notin S$

Проверяем принадлежат ли функции к классу монотонных:

$f_1(0,0) \leq f_1(0,1) \quad f_1 \in M$

$f_2(0,0) > f_2(0,1) \Rightarrow f_2 \notin M$

Проверяем являются ли данные функции линейными:

$f_1(x,y) = (x \oplus 1) \wedge y = xy \oplus y$

$f_2(x,y) = \overline{\overline{(x \vee \bar{y})}} \wedge \overline{\overline{(y \vee \bar{x})}} = \overline{(\bar{x} \wedge y)} \wedge \overline{(\bar{y} \wedge x)} = (xy \oplus y \oplus 1)(xy \oplus x \oplus 1) =$

$= xy \oplus xy \oplus xy \oplus y \oplus xy \oplus y \oplus xy \oplus x \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1$

x	y	$\bar{x} \wedge y$	$x \wedge y \oplus y$	$(x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x})$	$xy \oplus x \oplus 1$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1

	Классы				
	P_0	P_1	S	M	L
$x \downarrow \bar{y}$	Да	Нет	Нет	Да	Да
$\bar{x} \leftrightarrow y$	Нет	Да	Нет	Нет	Нет

Система функций $\Im$ образует полную систему, так как для каждого из классов Поста в системе есть функции не принадлежащая этому классу. Система функций $\Im$ является базисом, так как она полна и при удалении одной из функций система становится неполной.

6.13 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ»

Вариант 1

1. $\vdash \bar{A} \vee \bar{B} \rightarrow \overline{A \wedge B}$;

2. Доказать правило введения конъюнкции $\dfrac{H \vdash A, H \vdash B}{H \vdash A \wedge B}$;

3. $H = \{A \rightarrow B\} \vdash A \wedge C \rightarrow B \wedge C$.

Вариант 2

1. $\vdash (A \rightarrow B) \wedge \bar{B} \rightarrow \bar{A}$;

2. Доказать правило введения дизъюнкции $\dfrac{H, A \vdash C, H, B \vdash C}{H, A \vee B \vdash C}$;

3. $H = \{A \rightarrow B\} \vdash A \vee C \rightarrow B \vee C$.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Основные равносильности, содержащие кванторы

$$1) \neg(\exists x)(P(x)) \cong (\forall x)(\neg P(x));$$

2) $\neg(\forall x)(P(x)) \cong (\exists x)(\neg P(x))$;

3) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \cong (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))$;

4) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \cong (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))$;

5) $H \wedge (\exists x)(P(x)) \cong (\exists x)(H \wedge P(x))$;

6) $H \wedge (\forall x)(P(x)) \cong (\forall x)(H \wedge P(x))$;

7) $H \vee (\exists x)(P(x)) \cong (\exists x)(H \vee P(x))$;

8) $H \vee (\forall x)(P(x)) \cong (\forall x)(H \vee P(x))$;

9) $H \to (\exists x)(P(x)) \cong (\exists x)(H \to P(x))$;

10) $H \to (\forall x)(P(x)) \cong (\forall x)(H \to P(x))$;

11) $(\exists x)(P(x)) \to H \cong (\forall x)(P(x) \to H)$;

12) $(\forall x)(P(x)) \to H \cong (\exists x)(P(x) \to H)$.

6.14 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ №4

1 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$[(\exists x)(P(x)) \to Q] \leftrightarrow (\forall x)(P(x) \to Q).$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: чтобы функция была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она была непрерывной в этой точке.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: a – четное целое число … для того, чтобы $3a$ было четным числом.

2 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\forall x)[P(x) \vee Q] \leftrightarrow [(\forall x)(P(x)) \vee Q].$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: равенство треугольников есть достаточное условие их равновеликости.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: a и bделятся на c … для того, чтобы $a+b$ делилось на c (a, b, c - целые числа).

3 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \wedge Q] \leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \wedge Q].$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: совпадение центров вписанной и описанной около треугольника окружностей … для того чтобы, треугольник был правильным.

4 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$\neg(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)).$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ...»: из того, что четырехугольник – ромб, следует, что каждая из его диагоналей служит осью симметрии.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: $x>1$ … для того, чтобы x^2-1>0.

5 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$\neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x)).$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: чтобы четырехугольник был прямоугольником …, чтобы его диагонали были равны.

6 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$[(\forall x)(P(x)) \vee (\forall x)(Q(x))] \rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)].$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ...»: комплексные числа равны, только если равны соответственно их действительные и мнимые части.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: чтобы четырехугольник был параллелограммом …, чтобы все его стороны были равны.

7 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow [(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))]$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: две прямые на плоскости тогда параллельны, когда они перпендикулярны одной и той же прямой.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: $\alpha = \beta$ … для того, чтобы $\sin\alpha = \sin\beta$.

8 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))].$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ...»: на 5 делятся те числа, которые оканчиваются цифрой 0 или цифрой 5.

3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы

получилось истинное высказывание: для того чтобы четырехугольник был прямоугольником …, чтобы все его углы были равны.

9 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow [(\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))].$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ... »: для делимости многочлена на двучлен *x-a* достаточно, чтобы число *a* было корнем этого многочлена.
3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом …, чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам.

10 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)(\exists y)(Q(x, y)) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(Q(x, y)).$$

2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то … »: необходимым свойством прямоугольника является равенство его диагоналей.
3. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: $\sin\alpha = \sin\beta$ … для того, чтобы $\alpha = \beta$.

6.15 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

1. Среди следующих предложений выделите предикаты, для каждого из которых укажите одну из возможных областей определения и в соответствии с ней область истинности:

а) Луна есть спутник Плутона;

б) Планеты x и y принадлежат Солнечной системе;

в) $3+\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[6]{7}\geq 120$;

г) $x^2+5x+6=0$;

д) x^2-5x-6;

е) натуральное число n не меньше 1;

ж) треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$;

з) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

и) $\ln x<\sin x$;

к) $\sqrt{x^2-1}=-3$.

2. На множестве P={1,2,3, …, 23,24,25} заданы предикаты:

A(x): «x не делиться на 7»;

B(x): «x – нечетное число»;

C(x): «x – простое число»;

D(x): «x кратно 3»

Найти их множества истинности.

3. Найти множества истинности следующих предикатов:

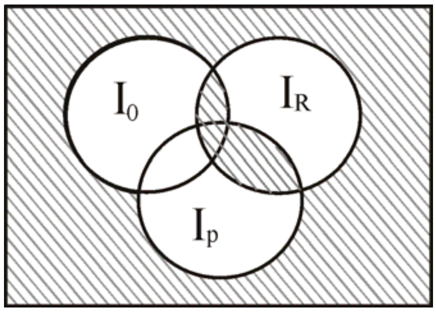
а) $C(x) \wedge B(x)$; *б*) $A(x) \wedge \neg D(x)$; *в*) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$; *г*) $B(x) \vee D(x)$; *д*) $C(x) \vee \neg A(x)$; *е*) $A(x) \to B(x)$; *ж*) $(A(x) \wedge C(x)) \to \neg D(x)$.

4. Изобразите на кругах Эйлера – Венна области истинности для следующих предикатов:

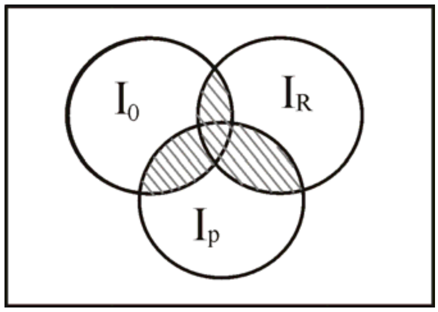
а) $A(x) \to B(x)$; *б*) $\neg A(x) \leftrightarrow \neg B(x)$; *в*) $(A(x) \to B(x)) \vee C(x) \wedge \neg B(x)$.

5. Запишите предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами O(x), P(x), R(x), области истинности которых заштрихованы на следующих рисунках:

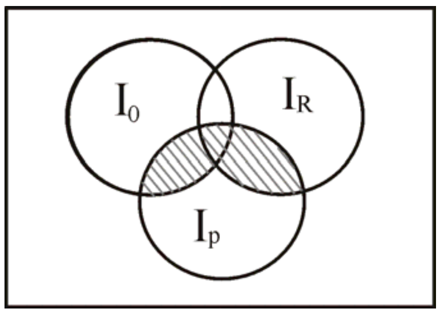
а)



б)



в)



6. Найдите отрицания следующих предикатов:

а) $(\forall x)(A(x) \to \forall y B(y))$;

б) $(\forall x)(A(x) \vee \exists y B(y))$;

в) $(\exists x)(A(x) \leftrightarrow B(x))$;

г) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(A(x, y, z) \to B(x, y, z))$.

7. Запишите на языке логики предикатов следующие высказывания:

а) некоторые комплексные числа являются действительными;

б) ни одно простое число не является точным квадратом;

в) некоторые четные числа не делятся на 8;

г) всякое число, кратное 8, делится на 4.

8. Пусть $P(x)$ означает «x – простое число», $E(x)$ означает «x – четное число», $O(x)$ – «x – нечетное число», $D(x, y)$ – «x делит y» или «y делится на x». Переведите на русский язык следующие символические записи на языке алгебры предикатов, учитывая, что переменные x и y пробегают множество натуральных чисел:

а) $P(7)$;

б) $E(2) \wedge P(2)$;

в) $(\forall x)\ (D(2, x) \to E(x))$;

г) $(\exists x)\ (E(x) \wedge D(x,6))$;

д) $(\forall x)\ (\neg E(x) \to \neg D(2, x))$;

е) $(\forall x)\ [E(x) \to (\forall y)(D(x, y) \to E(y))]$;

ж) $(\forall x)\ [P(x) \to (\exists y)(E(y) \wedge D(x, y))]$;

з) $(\forall x)\ [O(x) \to (\forall y)(P(y) \to \neg D(x, y))]$;

и) $(\exists x)\ (E(x) \wedge P(x))\ \wedge\ \neg(\exists x)\ (O(x) \wedge P(x))\ \wedge\ (\exists y)\ (x \neq y \wedge E(y) \wedge P(y))$.

9. Докажите тождественную истинность предикатов:

а) $(\exists x)(\exists y)(A(x, y) \to \exists y \exists x A(x, y))$;

б) $(\exists x)(A(x, x)) \to (\exists x)(\exists y)(A(x, y))$;

в) $(\forall x)(A(x)) \to (\exists x)(A(x))$.

10. Определите значения истинности следующих высказываний (предикаты в скобках заданы на множестве действительных чисел):

а) $(\forall x)((\sin x \leq 1) \wedge (x^2 + 2x + 2) \geq 0)$;

б) $(\exists x)((3x^2 > x^3) \wedge (2^x < 10))$;

в) $(\forall x)((|x| \leq 1) \vee (x^2 > 1))$;

г) $(\exists x)((x < 0) \wedge (x^2 > 1))$.

6.16 САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА «ЗАПИСЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ»

Вариант 1

1. Сформулировать теорему в импликативной форме:

Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

2. Сформулировать теорему в импликативной форме и с использованием терминов "необходимое условие", "достаточное условие":

Диагонали прямоугольника равны.

3. Выделить необходимое и достаточное условия и сформулировать их на языке "если..., то...":

Треугольник - прямоугольный тогда и только тогда, когда квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон.

4. Двумя способами сформулировать отрицания следующих высказываний:

Существует квадратное уравнение, не имеющее действительных корней.

Вариант 2

1. Сформулировать теорему в импликативной форме:

Равные треугольники подобны.

2. Сформулировать теорему в импликативной форме и с использованием терминов "необходимое условие", "достаточное условие":

Диагонали равнобокой трапеции равны.

3. Выделить необходимое и достаточное условия и сформулировать их на языке "если..., то...":

Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны.

4. Двумя способами сформулировать отрицания следующих высказываний:

Каждые два треугольника подобны друг другу.

6.17 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ»

Задача 1. Даны предикаты $P(x)$: «x – четное число» и $Q(x)$: «x – кратно 5», определенные на множестве N. Найдите области истинности предикатов:

1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$; 3) $\neg P(x)$; 4) $P(x) \rightarrow Q(x)$.

Задача 2. Изобразите на кругах Эйлера – Венна область истинности для предиката $\neg A(x) \vee \neg B(x)$.

Задача 3. Введя подходящие предикаты на соответствующих областях, переведите следующие высказывания на язык алгебры предикатов:

а) некоторые числа не являются действительными;

б) всякое натуральное число, делящееся на 12, делится на 2, 4 и 6;

в) существуют по меньшей мере 2 различных числа, такие что $P(x)$.

Задача 4. Докажите, что формула

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$$

тождественно-истинная.

6.18 ВАРИАНТЫ ЗАЧЕТНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Найти СДНФ $(x \oplus y) \wedge (z \rightarrow \bar{t} \wedge \overline{p})$;

2. Выяснить полноту системы функций $\{xy \vee \overline{x}\overline{y}, x \oplus 1\}$;

3. $\dfrac{\vdash A \rightarrow B, \vdash \overline{A} \rightarrow B}{\vdash B}$;

4. $H = \{A \rightarrow B\} \vdash A \wedge C \rightarrow B \wedge C$;

5.Записать на языке логики предикатов определение предела числовой последовательности.

6. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
*	$q_0\ a_0$	q_3 *Л		q_4 *П

Определить в какое слово переработается слово *111*11* , исходя из стандартного начального состояния.

Вариант 2

1. Найти СКНФ $(x \rightarrow (y \rightarrow z \wedge p)$;

2. Выяснить полноту системы функций $\{xy, xy \vee z, x \oplus y, x \rightarrow y, \overline{x}\}$;

3. $\dfrac{\vdash \overline{A} \rightarrow A}{\vdash A}$;

4. $H = \{A \rightarrow B\} \vdash (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$;

5.Записать на языке логики предикатов определение предела функции в точке.

6. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
$*$	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово *11*11* , исходя из стандартного начального состояния.

Вариант 3

1. Найти СДНФ $(x \rightarrow y) \oplus (x \downarrow y \wedge z)$;

2. Выяснить полноту системы функций $\{xy \vee \overline{x}\overline{z}, (01111110)\}$;

3. $\dfrac{\vdash A \rightarrow B, \vdash A \rightarrow \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$;

4. $H = \{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$;

5.Записать на языке логики предикатов определение возрастающей функции.

6. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4

a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
$*$	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово $111{*}111$, исходя из стандартного начального состояния.

Вариант 4

1. Найти СКНФ $x \downarrow y$;

2. Выяснить полноту системы функций $\{xy \oplus zt \oplus 1, (10110110)\}$;

3. $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$;

4. $H = \{A \to B\} \vdash A \vee C \to B \vee C$;

5.Записать на языке логики предикатов определение ограниченной функции.

6. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
$*$	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово $1111{*}11$, исходя из стандартного начального состояния.

6.19 БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ

Экзаменационный билет

№1

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Логические операции и их свойства.
2. Теорема Геделя о неполноте.
3. Решите задачи:

   a. Докажите правило введения дизъюнкции $\dfrac{H, A \vdash C, H, B \vdash C}{H, A \vee B \vdash C}$;

   b. Сведением к заведомо полной системе в P_2 показать полноту системы функций $\{xy \oplus z, (x \leftrightarrow y) \oplus z\}$.

   3. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
*	$q_0\ a_0$	q_3 *Л		q_4 *П

Определить в какое слово переработается слово *111*111* , исходя из стандартного начального состояния.

Экзаменационный билет

№2

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1.Равносильность формул.
2. Математические теории первого порядка.
3. Решите задачи:

1. Докажите правило перестановки посылок $\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash B \to (A \to C)}$;

2. Выяснить, эквивалентны ли формулы

$f_1(x, y, z) = (x \to y) \oplus ((y \to \bar{z}) \to x \cdot y)$ и $f_2(x, y, z) = \overline{y \wedge z \to x}$;

3. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
*	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово *11*1111* , исходя из стандартного начального состояния.

Экзаменационный билет
№3

Утвержден 12 декабря 2006 — ФМиИ

на заседании каф. МАиМ — Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. — 4 курс

1. Закон двойственности.
2. Теория натуральных чисел.
3. Решите задачи:

1. Докажите правило соединения посылок $\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash A \wedge B \to C}$;

2. Построить формулу, двойственную данной функции

$(x \downarrow y) \oplus ((x | y) \downarrow (\bar{x} \leftrightarrow y \cdot z))$.

3. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
*	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово $1111^{*}11$, исходя из стандартного начального состояния.

Экзаменационный билет
№4

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Проблема разрешения алгебры высказываний.
2. Машины Тьюринга.
3. Решите задачи:

1. Докажите правило разъединения посылок $\dfrac{\vdash A \wedge B \to C}{\vdash A \to (B \to C)}$;

2. Представить в СДНФ функцию $(x \to y) \oplus (x|yz)$;

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \wedge Q] \leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \wedge Q].$$

Экзаменационный билет
№5

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. СДНФ, СКНФ.
2. Неразрешимые алгоритмические проблемы.
3. Решите задачи:

1. $\vdash A \to A \wedge A$;

2. Представить в СДНФ функцию (1100100010010011);

3. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик

просил поставить ему первый или второй урок; историк или I, или III; учитель литературы – или II, или III. Как составить расписание уроков, чтобы учесть все пожелания?

Экзаменационный билет
№6

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Понятие формулы исчисления высказываний.
2. Нормальные алгоритмы Маркова.
3. Решите задачи:

1. Построить полином Жегалкина для функции $x \to (y \to z)$;
2. Задача: Четыре команды – «Артек», «Вымпел», «Сокол» и «Метеор» - в спортивных соревнованиях заняли четыре первых места, причем ни одно не было разделено между командами. О занятых командами местах получены три высказывания:

   «Второе место занял «Сокол», а «Метеор» - III»

   «Победителем вышел «Сокол», «Вымпел» был вторым»

   «Второе место занял «Артек», а Метеор был последним»

   Как распределились места, если в каждом из высказываний одно утверждение верно, а другое ложно?
3. $H = \{A \to B\} \vdash A \wedge C \to B \wedge C$.

Экзаменационный билет

№7

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Определение выводимых формул.

2. Вычислимые функции. Частично рекурсивные и общерекурсивные функции.
3. Решите задачи:

   1. Упростите формулу:

$(y \wedge \overline{y \wedge \bar{y} \to z \wedge \bar{z}} \to x) \vee x \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge x)$;

   2. $H = \{A \to B\} \vdash A \vee C \to B \vee C$;

   3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\forall x)[P(x) \vee Q] \leftrightarrow [(\forall x)(P(x)) \vee Q].$$

Экзаменационный билет
№8

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Теорема дедукции.
2. Понятие алгоритма и его характерные черты.
3. Решите задачи:

   1. Докажите тождественную истинность предикатов:

$(\forall x)(A(x)) \to (\exists x)(A(x))$;

   3. Если цех II не будет участвовать в выпуске нового образца продукции, то не будет участвовать и цех I. Если же цех II будет участвовать в выпуске нового образца, то в этой работе непременно должны быть задействованы цеха I и III. Необходимо ли участие цеха III, если в выпуске нового образца будет участвовать цех I?

   4. Выяснить, является ли функция самодвойственной

$(x \vee \bar{y} \vee z)t \vee xyz$.

Экзаменационный билет
№9

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Непротиворечивость исчисления высказываний.
2. Доказательство в теории.
3. Решить задачи:

1. Докажите тождественную истинность предикатов:

$(\exists x)(A(x,x)) \to (\exists x)(\exists y)(A(x,y))$;

2. $\vdash A \to A$;

3. Выяснить, является ли функция линейной $(x \vee yz) \oplus xyz$;

Экзаменационный билет
№10

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Полнота исчисления высказываний.
2. Математические теории первого порядка.
3. Решить задачи:

1. Докажите тождественную истинность предиката:

$(\exists x)(\exists y)(A(x,y) \to \exists y \exists x A(x,y))$;

2. $\vdash A \to A \wedge A$;

3. Выяснить, является ли функция монотонной $(x \oplus y) \wedge (x \leftrightarrow y)$.

Экзаменационный билет
№11

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Независимость аксиом исчисления высказываний.
2. Понятие алгоритма и его характерные черты.

3. Решить задачи:

1. Найти СКНФ $x \downarrow y$;

2.Записать на языке логики предикатов определение ограниченной функции.

3. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0 П$	$q_3\ a_0 П$	$q_3\ a_0 Л$	$q_1\ a_0 Л$
1	$q_2\ a_0 Л$	$q_2\ 1 Л$	$q_4\ a_0 П$	$q_4\ 1 П$
$*$	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово *1111*11* , исходя из стандартного начального состояния.

Экзаменационный билет

№12

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1.Предикаты и кванторы.

2.Теория натуральных чисел.

3. Решить задачи:

1. Найти СКНФ $(x \to y) \oplus (x \downarrow y \wedge z)$;

2. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0 П$	$q_3\ a_0 П$	$q_3\ a_0 Л$	$q_1\ a_0 Л$
1	$q_2\ a_0 Л$	$q_2\ 1 Л$	$q_4\ a_0 П$	$q_4\ 1 П$
$*$	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово *11*11* , исходя из стандартного начального состояния.

3. $H = \{A \to (B \to C)\} \vdash B \to (A \to C)$.

Экзаменационный билет

№13

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Логические операции над предикатами.
2. Конструирование машин Тьюринга.
3. Решить задачи:

1. Найти СДНФ $(x \to y) \oplus (x \downarrow y \wedge z)$;

2. Выяснить полноту системы функций $\{xy \vee \overline{x}\overline{z}, (01111110)\}$;

3. $H = \{A \to (B \to C)\} \vdash B \to (A \to C)$.

Экзаменационный билет

№14

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. 4 курс

1. Формулы логики предикатов.
2. Частично рекурсивные и общерекурсивные функции.
3. Решить задачи:

1. Найти СДНФ $(x \to (y \to z \wedge p)$;

2. Выяснить полноту системы функций $\{xy, xy \vee z, x \oplus y, x \to y, \overline{x}\}$;

3. Машина Тьюринга определяется функциональной схемой

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1\ a_0П$	$q_3\ a_0П$	$q_3\ a_0Л$	$q_1\ a_0Л$
1	$q_2\ a_0Л$	$q_2\ 1Л$	$q_4\ a_0П$	$q_4\ 1П$
*	$q_0\ a_0$	$q_3\ {*}Л$		$q_4\ {*}П$

Определить в какое слово переработается слово *11*11* , исходя из стандартного начального состояния.

Экзаменационный билет

№15

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ

на заседании каф. МАиМ | Математическая логика и теория алгоритмов

Зав. кафедрой _____Труфанова Т.В. | 4 курс

1. Общезначимость и выполнимость формул.

2. Нормальные алгоритмы Маркова.

3. Решить задачи:

1. Найти СКНФ $(x \to (y \to z \wedge p)$;

2. Выяснить полноту системы функций $\{xy, xy \vee z, x \oplus y, x \to y, \overline{x}\}$;

3. $\dfrac{\vdash \overline{A} \to A}{\vdash A}$.

7. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор – старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна (стаж работы в вузе 14 лет);

ведущий практические занятия – старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна.

ОГЛАВЛЕНИЕ