ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой ОМиИ

____________Г.В.Литовка

«___» __________2007г.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
по дисциплине *«Математика»* часть III

для специальностей:

260704 – Технология текстильных изделий

260901– Технология швейных изделий

260902 – Конструирование швейных изделий

280101 – Безопасность жизнедеятельности

330301 – Геология природопользования

Составители: И.Н. Шевченко
О.С. Попова

Благовещенск, 2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики информатики

Авторы-составители: Шевченко И.Н. Попова О.С.

Учебно-методический комплекс «Математика» часть III для специальностей:260704 – Технология текстильных изделий, 260901– Технология швейных изделий, 260902 – Конструирование швейных изделий, 280101 – Безопасность жизнедеятельности. 330301 – Геология природопользования. Благовещенск:АмГУ, 2007.– 109 с.

Введение

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» предназначен для студентов первого курса специальностей 260901, 260902, 260704, 280101, 130301.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Учебно-методический комплекс дисциплины (УМКД) разработан в помощь студентам первого и второго курсов обучения. Он создан в связи с необходимостью культивирования в стенах учебного заведения полноценной среды интеллектуального, творческого общества, атмосферы нравственного самосовершенствования как преподавателей, так и студентов, необходимостью развития их самостоятельности активности, повышения математической культуры, привлечения широкого круга вопросов, касающихся работы учебного заведения, в том числе и учебного процесса, формирования и воспитания у молодежи чувства ответственности за свое будущее.

УМКД включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному образовательному стандарту, учебную программу, тематический план занятий, вопросы к экзамену и зачету, образцы контрольных работ, рекомендуемую литературу.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Цели и задачи учебной дисциплины «Математика» и ее место в учебном процессе.

1.1. Цели преподавания учебной дисциплины «Математика»

•формирование личности студента, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению;

•обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске решений.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

•на примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии других наук;

•научить студентов приемам исследования и решения, математически формализованных задач;

• выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

1.3. Перечень учебных дисциплин с указанием разделов, усвоение которых необходимо для изучения осознания учебных тем, вопросов курса «Математика».

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного, операционного исчисления, основы теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики;
- математические модели простейших систем и процессов в естествознании;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- исследование математических моделей решения прикладных задач.

1.4.После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

•основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, дискретной математики и теории множеств, функционального анализа, векторной алгебры, линейной алгебры, основы теории вероятностей; теории функции комплексного переменного, операционное исчисление;

- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы статистического оценивания и проверки гипотез.

Содержание учебной дисциплины «Математика».

Согласно государственному стандарту математических и естественных дисциплин студент должен изучить:

для специальности: 260901, 260902

- аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; Дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика: теория вероятностей, случайные процессы, статическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных; вариационное исчисление и оптимальное управление; уравнения математической физики.

для специальностей: 260704, 280101

- алгебра (основные алгебраические структуры, векторные пространства и линейные отображения, булевы алгебры);
- геометрия (аналитическая геометрия, многомерная евклидова геометрия, дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, элементы топологий); дискретная математика (логические исчисления. Графы, теория алгоритмов, языки грамматики, автоматы, комбинаторика);
- математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисления);
- элементы теории функций и функционального анализа, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения;
- вероятность и статистика (элементарная теория вероятностей, математические основы теории вероятностей, модели случайных процессов, проверка гипотез, принцип максимального правдоподобия, статистические методы обработки экспериментальных данных);
- математические методы в текстильной технологии.

для специальности 330301

- Аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля, гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика – теория вероятностей, случайные процессы статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические метолы обработки экспериментальных данных.

2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

	3 СЕМЕСТР **Лекции– 36час., практические занятия – 36час.**	Лек	Прак	С/Р

1.	**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.**	26	26	30
	- предмет теории вероятностей; случайные события; классификация событий; алгебра событий; формулы комбинаторики; различные подходы к введению понятий вероятностей события.			
	- теорема сложения несовместимых событий; условия вероятностей; умножение вероятностей; теорема сложения совместимых событий; вероятность появления хотя бы одного из событий.	2		
	- формула полной вероятности; теорема полной вероятности; теорема гипотез; - повторные испытания; формула Бернулли; формула Пуассона; - локальная и интегральная теоремы Лапласа.	4		
	- случайные величины, функция и плотность распределения.	2		
	- числовые характеристики случайных величин; математические ожидания; свойства математического ожидания; – дисперсия случайной величины и ее свойства.	2		
	- основные распределения случайной величины; биноминальное распределение; распределение Пуассона.	2		
	равномерное распределение; нормальное распределение; показательное распределение и их свойства.	2		
	– законы больших чисел: неравенство Чебышева; теоремы Чебышева и Бернулли;	2		
	– системы случайных величин; векторные случайные величины; функции и плотность распределения двумерной случайной величины; корреляционный момент связи и случайных величин; коэффициент корреляции;	4		
	– элементы теории массового обслуживания; случайный процесс и его характеристики; понятие о случайном процессе со счетным множеством состояний; поток событий; простейший поток и его свойства; нестационарный пуассоновский поток; Поток Пальма; время обслуживания; Марковский процесс; система Марковского обслуживания с отказами; установившийся режим обслуживания; формулы Эрланга.	4		
2.	**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ** – основные задачи статистики и математической статистики; выборки; статистическая обработка результатов наблюдений; – точечные оценки вероятности, математического ожидания, дисперсии и их свойства; –понятия доверительных оценок; построение доверительных	10	10	10

	интервалов для параметров нормального распределения; – постановка задачи проверки гипотез; критерии оценки и его мощность; критическая область и область принятия гипотезы; проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения; проверка гипотез о виде распределения; критерий Пирсона; – корреляционный и регрессионный анализ; функциональные и корреляционные зависимости случайных величин; линейная и нелинейная регрессии; составление уравнений прямых регрессий методом наименьших квадратов; – статистическая оценка коэффициента корреляции и ее свойства; построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии; проверка статистической зависимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдений.			
	Итого	36	36	40

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

	3 СЕМЕСТР – 36 часов	Час.	Вид контр
	Теория вероятностей – 26 ч.		
1.	Основные понятия теории вероятностей. Основные теоремы теории вероятностей. Формула полной вероятности.	6	
2.	Повторение испытания. Формула Бернулли и Пуассона.	2	КР
3.	Предельные теоремы.	2	ТР
4.	Случайные величины и законы их распределения.	2	
5.	Числовые характеристики случайных величин.	2	
6.	Биноминальный закон распределения и распределение Пуассона.	2	
7.	Равномерное, показательное распределения.	2	КР
8.	Нормальное распределение.	4	ТР
9.	Элементы теории массового обслуживания.	4	
	Основы математической статистики – 10ч.		
10.	Вариационные ряды и их характеристики	4	
11.	Выборочный метод и статистическое оценивание	2	
12.	Проверка статистических гипотез	2	
13.	Корреляционный анализ и регрессионный анализ.	2	

4. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ недели подготовка к	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Σ
Лекциям		1		1		1		1		1		1		1		1		8
Практическим занятиям	0,5	0,5	0,5	0,5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	15
РГР							6					6						12
Контр работа.								2					3					5
																		40

5. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Элементы комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания.
2. Основные понятия теории вероятностей.
3. Теорема сложения вероятностей.
4. Теорема умножения вероятностей.
5. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
6. Формула полной вероятности.
7. Вероятность гипотез, формулы Байеса.
8. Формулы Бернулли, теоремы Лапласа.
9. Виды случайных величин. Задание дискретной случайной величины.
10. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
11. Дисперсия дискретной случайной величины.
12. Моменты распределения. Асимметрия. Эксцесс.
13. Законы больших чисел.
14. Функция распределения вероятностей случайной величины.
15. Плотность распределения непрерывной случайной величины.
16. Биноминальное распределение.
17. Распределении Пуассона.
18. Нормальное распределение.
19. Равномерное распределение.
20. Показательное распределение.
21. Задачи математической статистики.
22. Статистическое распределение выборки.
23. Эмпирическая функция распределения.
24. Полигон и гистограмма.
25. Выборочная и генеральная средние.
26. Выборочная и генеральная дисперсии.
27. Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии.
28. Оценка генеральной дисперсии.
29. Точность оценки. Доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал.

30. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ .
31. Корреляция количественных признаков.
32. Корреляционная таблица.
33. Ковариация и коэффициент корреляции.
34. Понятие регрессии. Способ наименьших квадратов.
35. Уравнение регрессии и его связь с коэффициентом корреляции.
36. Понятие статистической гипотезы.
37. Сравнение дисперсий.
38. Сравнение относительной частоты с гипотетической вероятностью события.
39. Гипотеза о равенстве двух генеральных средних.
40. Гипотеза о виде распределения.

6. Общие рекомендации по изучению математических дисциплин

0Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее

внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

1Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно решить задачу несколькими возможными способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

1Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем,

отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

1Расчетно – графические работы

1. При изучении дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд расчетно – графические работы, главная цель которых — оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное исправление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до изучения теоретического материала, соответствующего данному заданию, и решения достаточного количества задач по этому материалу. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Расчетные работы должны выполняться самостоятельно. Выполненная не самостоятельно работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Расчетно-графические работы выполняются аккуратно на одной стороне листа стандартного формата А4 либо рукописным способом, либо компьютерным (для компьютерного оформления работы рекомендуется использование пакета Microsoft Word). В любом случае необходимо приложение необходимых распечаток результатов работы компьютерных программ, которые требовалось использовать при выполнении заданий.

Графики строятся либо при помощи компьютера (рекомендуется использование пакета Microsoft Excel), либо от руки (черными или цветными карандашами средней твердости на обычной или миллиметровой бумаге). Листы с текстом заданий и графики должны быть сшиты.

4. В работу должны быть включены все требуемые задания строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.

6. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.

7. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

8.Работа сдается преподавателю до защиты для проверки. При указании рецензента на требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений. На защите студент должен показать умение ставить и исследовать конкретные финансовые задачи, которые он решал при выполнении контрольных заданий.

9.Прорецензированные контрольные задания вместе со всеми исправлениями и добавлениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированного контрольного задания студент не допускается к сдаче экзамена.

1Лекции и практические занятия

Студенты очной и заочной формы обучения изучают дисциплину «Математика» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (2 ч. лекций и 2 ч. практических занятий в неделю для студентов очной формы обучения и по одному часу — для студентов, обучающихся по заочной форме). После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Если для студентов очной лекции и практические занятия являются основной формой обучения и на них подробно рассматривается большая часть теоретического материала и разбирается большое количество задач, то студент-заочник эти виды работ должен выполнять самостоятельно.

Вместе с тем, для заочников организуются установочные лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель — обратить внимание на цели и задачи дисциплины, ее место в профессиональной деятельности специалиста, заинтересовать студента изучением дисциплины, обратить внимание на схему построения курса или некоторых его наиболее важных разделов. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Экзамен

На экзамене выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Экзамен проводится в устно-письменной форме, каждый студент получает в билете три теоретических вопроса (их список приведен в разделе 5) и 6 задач. Подготовку к ответу на билет следует начинать с решения задачи, так успешное решение задачи является наиболее важным при сдаче экзамена; без ее решения работа студента признается неудовлетворительной. Затем следует подробно ответить на теоретические вопросы билета. На подготовку теоретических вопроса студенту дается не более 1 ч. На решения задач 1,5ч.

После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на повседневную серьезную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию – остается в голове всего крепче.

7. Формы контроля знаний студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает опрос студентов на практических занятиях, проверку домашних заданий, контрольные работы, выполнения и защита РГР, проведение коллоквиумов, зачеты и экзамены. Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с проверки домашнего задания, опроса по теоретическому материалу (10-15 мин.). На лекциях и практических занятиях рекомендуется проведение мини контрольных работ. Данная программа предусматривает в течении семестра проведение двух плановых контрольных работ и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнение РГР осуществляется в 2 этапа: проверка письменных отчетов и защита заданий в письменной или устной форме. Индивидуальные задания студентами выполняется по большинству тем курса. Выполнение каждого задания требует не менее 10 часов самостоятельной работы студентов.

Методика формирования результирующей оценки знаний по математики

Результатирующая оценка учитывает:

1) работу студента в течение всего периода изучения дисциплины;
2) получается на основе обобщения отдельных видов работы: работа в течении всего семестра; экзаменационная оценка за ответ по теории; экзаменационная оценка за выполнение практических заданий.
3) все оценки выставляются по пятибалльной системе;
4) для оценки относительной важности отдельных видов контроля вводиться их весовые коэффициенты:

    0,4 – для работы в течении семестра;
    0,4 – для экзаменационной оценки за теорию;
    0,2 – для экзаменационной оценки по практике.

Критерии оценок

- ОТЛИЧНО – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы; четко и правильно даны определения; корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания; ответ самостоятельный и исчерпывающий, без наводящих вопросов.
- ХОРОШО – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения и понятия, ответ самостоятельный, но допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или выводы, которые исправляться по дополнительным вопросам экзаменатора.
- УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – усвоено основное содержание учебного материала, но изложение не всегда последовательна; определение понятий нечеткое; допущены ошибки при изложении, в использовании научных терминов, определений.
- НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программы, допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

8. Методические рекомендации профессорско-преподавательскому составу

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов (СРС) – это активны формы индивидуальной и коллективной деятельности, направленные на закрепление материала формирование умений и навыков быстро решать поставленные задачи. СРС предполагает не пассивное «поглощение» готовой информации, а ее поиск и творческое усвоение. Самостоятельная работа призвана подготовить студента к самостоятельной деятельности в будущем.

Строго говоря, все, что не является лекцией, можно отнести к практическим формам обучения. Главная функция практических занятий – организация и проведение отработки (интериоризация) учебного материала и формирование у студентов умений и навыков по применению знаний на практике, самостоятельного их приобретения и углубления.

Занятия такого типа, как правило, состоят из двух частей. Сперва проводится подготовка студентов к самостоятельной работе, затем они самостоятельно решают поставленные задачи. Эта форма занятий обеспечивает индивидуализацию обучения и способствует активизации познавательной деятельности студентов. Занятия должны быть организованны таким образом, чтобы все без исключения студенты были заняты решением посильной для них познавательной задачи. Значит, преподаватель должен хорошо знать (с позиции диагностики) индивидуальные особенности студентов. Желательно так организовать занятия, чтобы они содействовали предъявлению достаточно высоких требований к наиболее подготовленным студентам, обеспечивали их максимальное интеллектуальное развитие и в то же время создавали условия для успешного приобретения знаний и умений менее подготовленными студентами.

Аудиторные практически занятия

Преподаватель спрашивает основной теоретический материал, относящийся к данной теме либо опросом каждого студента, либо организацией математического диктанта, либо опросом доказательства теорем, вывода формул. После чего педагог предлагает студентам проделать ряд упражнений для усвоения и закрепления рассматриваемого вопроса.

Студенты работают под наблюдением преподавателя, который проверяет результаты деятельности и указывает ошибки.

Все виды работы на практическом занятии оцениваются по пятибалльной системе.

Консультация – форма учебного занятия, в процессе которого студент получает ответы от преподавателя на конкретные вопросы или пояснения по соответствующим теоретическим положениям или аспектам их практического применения.

Консультация может быть индивидуальной или групповой, в зависимости от учебной ситуации: индивидуальное занятие, выполняемое студентам, может потребовать индивидуальной консультации, теоретические вопросы по учебному предмету – соответственно групповой консультации.

9. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1. Предмет теории вероятностей. Случайные события. Алгебра событий. Относительная частота и вероятность случайного события. Полная группа событий. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности.

Основные понятия.

Определение. **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие A может произойти совместно с событием B, в другом – нет.

<u>Определение.</u> События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

<u>Определение.</u> **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта.

<u>Определение.</u> **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

<u>Определение.</u> События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

<u>Определение.</u> **Вероятностью** события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}.$$

Определение. Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна: $W(A) = \frac{2}{5}$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыт Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие **геометрической вероятности**, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной *L* выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок *l* равна отношению *l/L.*

Операции над событиями.

Определение. События А и В называются **равными**, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Определение. **Объединением** или **суммой** событий A_k называется событие А, которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k.

Определение. **Пересечением** или **произведением** событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении **всех** событий ∩ A_k.

Определение. **Разностью** событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

Определение. **Дополнительным** к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А **не происходит.**

Определение. **Элементарными исходами** опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

Лекция 2. Теорема сложения вероятностей. Противоположные события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Вероятность появления хотя бы одного события.

<u>Теорема</u>(сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

<u>Следствие 1:</u> *Если события* $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

<u>Определение.</u> Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

<u>Теорема.</u> *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

<u>Следствие 2:</u> *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

<u>Определение.</u> Событие А называется **независимым** от события В,если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

<u>Определение.</u> Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

<u>Теорема.</u> (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению* *вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид: $P(AB) = P(A)P(B)$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1q_2...q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

<u>Пример.</u> Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие А, вторым – событие В, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$. $P(A) = 0{,}7$; $P(\overline{A}) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}8$; $P(\overline{B}) = 0{,}2$.

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна $P(A)P(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна $P(\overline{A})P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна

$$P = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны:

$$P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56; \quad P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна:

$$P = 1 - 0{,}56 - 0{,}06 = 0{,}38.$$

$$P = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}384$$

Лекция 3. Формула полной вероятности и формула Байеса. Схема и формула Бернулли. Приближение Пуассона для схемы Бернулли. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий.

Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Формула Бейеса. (формула гипотез) Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$ – **формула Бейеса**.

Лекция 4. Повторные испытания. Формула Бернулли. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события А**.

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью *P(A)=p*. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате *n* испытаний событие А наступило ровно *m* раз.

Пусть в результате *n* независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью *P(A) = p*, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события А в испытании с номером *i*. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате *n* опытов событие А наступает ровно *m* раз, то остальные *n-m* раз это событие не наступает. Событие А может появиться *m* раз в *n* испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из *n* элементов по *m*. Это количество сочетаний находится по формуле: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m(1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли:** $P_{m,n} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Функция Лапласа.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

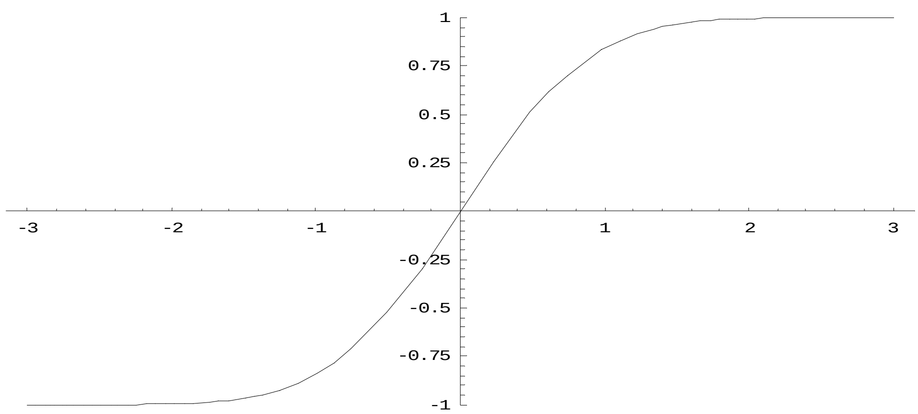
Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t;\quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha;\quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$

Тогда $P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]$

Т.к. интеграл $\int e^{-t^2}dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$, которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x приводятся в специальных таблицах.

Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(0) = 0$; 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; 3) $\Phi(\infty) = 1$.

Лекция 5.Случайные величины. Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Случайные величины.

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

<u>Определение.</u> Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

<u>Определение.</u> Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

<u>Определение.</u> Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

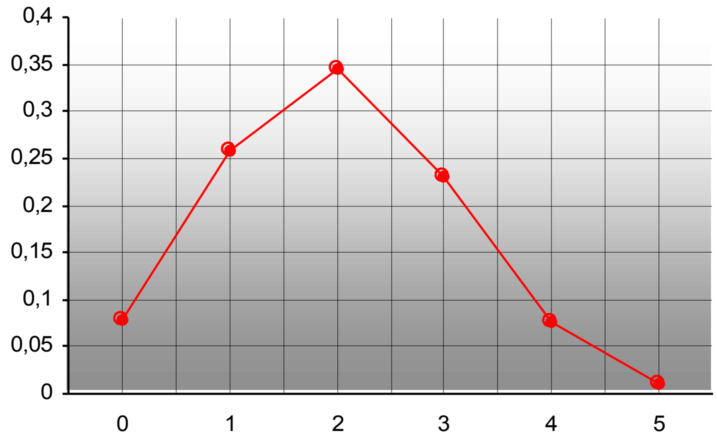
Закон распределения дискретной случайной величины.

<u>Определение.</u> Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.** При этом сумма все ординат



многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

<u>Биноминальное распределение.</u>

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину Х.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биноминальным**.

<u>Пример.</u> В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных. $P_4(0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$

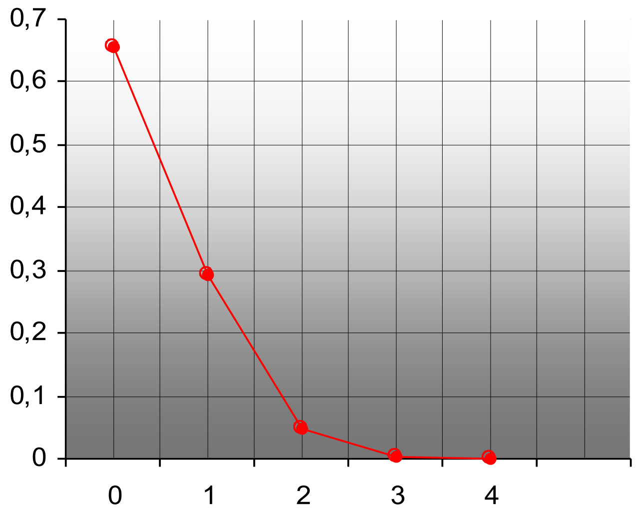
2) Одна нестандартная. $P_4(1) = \frac{4!}{1!\cdot 3!} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$

3) Две нестандартные детали. $P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$

4) Три нестандартные детали. $P_4(3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036$

5) Четыре нестандартных детали. $P_4(4) = \frac{4!}{4!\cdot 0!} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$

Построим многоугольник распределения.



Распределение Пуассона.

(Симеон Дени Пуассон (1781 – 1840) – французский математик)

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события А имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события А в каждом испытании мало ($p\le 0{,}1$), то для нахождения вероятности появления события А k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение: $np = \lambda$

Практически это допущение означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

По формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Найдем предел этой вероятности при $n\to\infty$.

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

Получаем формулу **распределения Пуассона:** $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Если известны числа λ и k, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

Лекция 6.Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Их свойства.

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной. $M(C) = C$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания. $M(Cx) = CM(x)$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится n независимых испытаний, вероятность появления события А в которых равна p.

Теорема. *Математическое ожидание M(X) числа появления события А в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X)=np$$

Однако, математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

Определение. **Дисперсией (рассеиванием)** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. $D(X)=M[X-M(X)]^2$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

Вычисление дисперсии.

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю. $D(C) = 0$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат. $D(CX) = C^2 D(X)$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин. $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

Теорема. *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в каждом испытании.* $D(X) = npq$

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Теорема. *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.*

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}$$

Пример. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1=0,3;$ $p_2=0,4;$ $p_3=0,5;$ $p_4=0,6.$ Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1 - p_i$.

1) Не отказал ни один прибор.

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}084.$$

2) Отказал один из приборов.

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0{,}302.$$

3) Отказали два прибора.

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}38.$$

4) Отказали три прибора.

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}198.$$

5) Отказали все приборы. $p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}036.$

Получаем закон распределения:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0{,}302 + 2 \cdot 0{,}38 + 3 \cdot 0{,}198 + 4 \cdot 0{,}036 = 1{,}8.$$

$$M(X^2) = 0{,}302 + 4 \cdot 0{,}38 + 9 \cdot 0{,}198 + 16 \cdot 0{,}036 = 4{,}18.$$

Дисперсия: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4{,}18 - 3{,}24 = 0{,}94.$

Лекция 7.Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Равномерное распределение вероятностей.

Функция распределения.

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако, такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Пусть *x* – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее *x*, т.е. X < *x*, обозначим через F(x).

<u>Определение.</u> Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*. $F(x) = P(X < x)$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**. Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид: $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента *x*.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

<u>Свойства функции распределения..</u>

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция. $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (*a, b*), равна приращению функции распределения на этом интервале. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Плотность распределения.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

__**Определение.**__ **Плотностью распределения** вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x). $f(x) = F'(x)$.

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки *x* при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

__**Определение.**__ Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси OX, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

<u>Свойства плотности распределения.</u>

1) Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x) \geq 0$$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от -∞ до ∞ равен единице. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Лекция 8. Основные числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Их свойства.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *f(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a,b*].

<u>Определение.</u> Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

<u>Определение.</u> Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

<u>Определение.</u> Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

<u>Определение.</u> Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум. $f(M_0) = \max$.

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется **двухмодальным** или **многомодальным**.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется **антимодальным**.

<u>Определение.</u> Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

<u>Определение.</u> Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k.

$$\alpha_k = M[X^k].$$

Для дискретной случайной величины: $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

<u>Определение.</u> Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k$.

$\mu_k = M[(X - m_x)^k]$

Для дискретной случайной величины: $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx$.

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

Определение. Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется **коэффициентом асимметрии**. $a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$

Определение. Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая **эксцессом**. $C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$

Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты:

Абсолютный начальный момент: $\beta_k = M[|X|^k]$.

Абсолютный центральный момент: $\nu_k = M[|X - m_x|^k]$.

Абсолютный центральный момент первого порядка называется **средним арифметическим отклонением**.

При решении практических задач зачастую точно найти закон распределения случайной величины довольно сложно. Однако, все происходящие процессы, связанные со случайными величинами, можно разделить на несколько типов, каждому из которых можно поставить в соответствие какой – либо закон распределения.

Выше были рассмотрены некоторые типы распределений дискретной случайной величины такие как биноминальное распределение и распределение Пуассона.

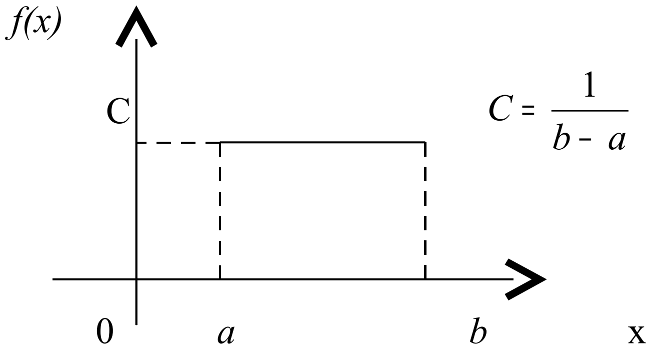
Лекция 9.Равномерное распределение вероятностей. Показательное распределение. Функция надежности. Показательный закон надежности.

Равномерное распределение.

Определение. Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке [*a, b*], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

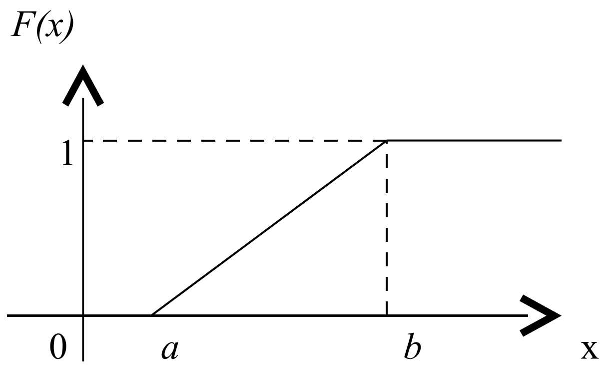
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Постоянная величина С может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.



Найдем функцию распределения *F(x)* на отрезке [*a,b*].

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b \\ 1, & при \quad x > b \end{cases}$$



Для того, чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Показательное распределение.

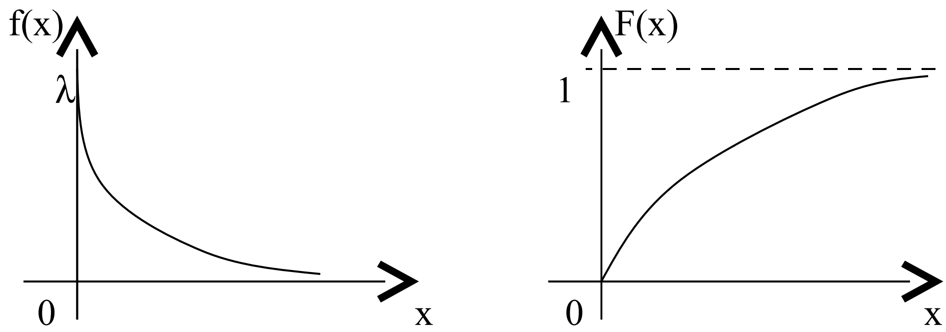
__**Определение.**__ **Показательным (экспоненциальным)** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \geq 0 \end{cases}$ где λ - положительное число.

Найдем закон распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:



Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x; & e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{matrix} \right\} = \lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx \right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно: $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \dfrac{1}{\lambda}.$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал. $P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Показательное распределение широко используется в теории надежности.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0=0$, а через какое– то время t происходит отказ устройства.

Обозначим T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T<t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t.

Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна $R(t) = P(T>t) = 1 – F(t)$.

<u>**Определение.**</u> **Функцией надежности** $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t.

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределению.

Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать.

Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

Функция надежности для какого- либо устройства при показательном законе распределения равна: $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$.

Данное соотношение называют **показательным законом надежности**.

Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t.

Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов λ и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом.

Лекция 10.Нормальный закон распределения вероятностей. Нормальная кривая. Правило трех сигм.

Нормальный закон распределения.

Определение. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности $f(x) = \dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$;

Нормальный закон распределения также называется **законом Гаусса**.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Найдем функцию распределения *F(x)*.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx$$

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) Функция определена на всей числовой оси.

2) При всех *x* функция распределения принимает только положительные значения.

3) Ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента *x*, значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции.

$$y' = -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \qquad x = m;$$

Т.к. при $y' > 0$ при $x < m$ и $y' < 0$ при $x > m$, то в точке $x = m$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность
$(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

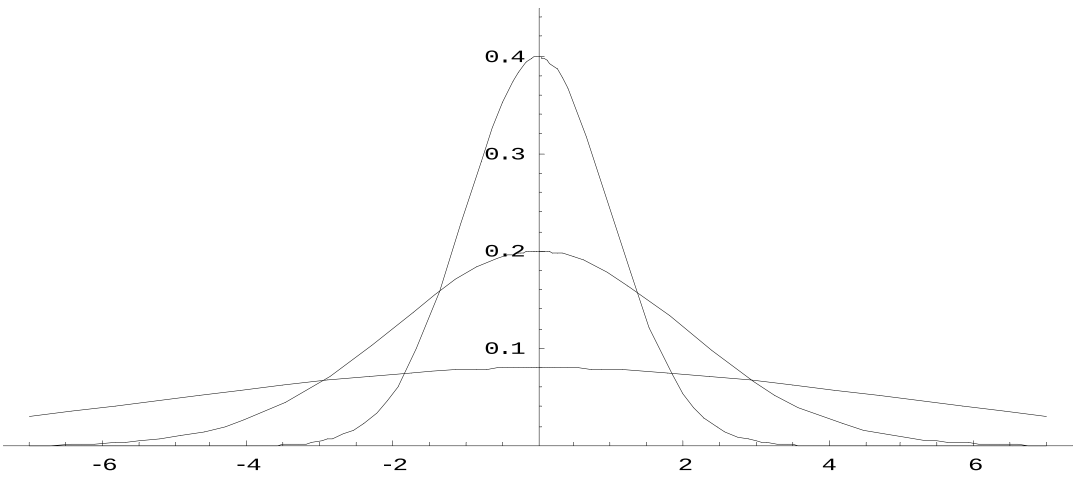
6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

При $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения.



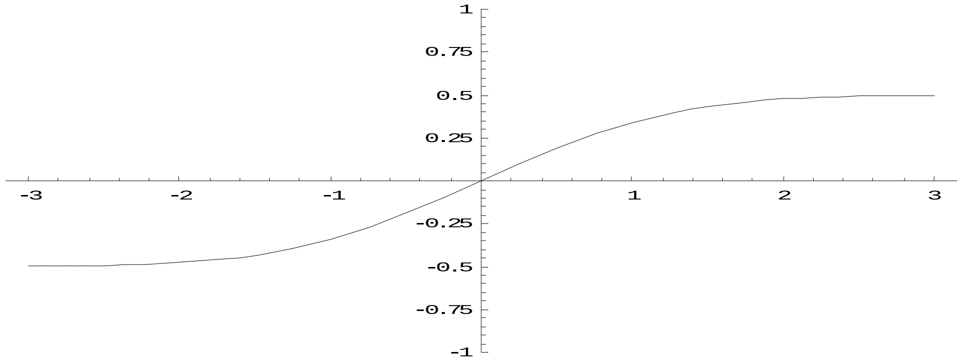
Построены графики при m =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения σ = 1, σ = 2 и σ = 7. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается..

Если $a > 0$, то график сместится в положительном направлении, если $a < 0$ – в отрицательном.

При a=0 и σ=1 кривая называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением: $\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt;$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**. Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ

$$P(|X - m| < \Delta) = \overline{\Phi}\left[\frac{m + \Delta - m}{\sigma}\right] - \overline{\Phi}\left[\frac{m - \Delta - m}{\sigma}\right] = \overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \overline{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять Δ = 3σ, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа: $P(|X - m| < 3\sigma) = 2\overline{\Phi}(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидание на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

Не практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Центральная предельная теорема Ляпунова.

Теорема. *Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из* *которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

Лекция 11. Система случайных величин. Плотность распределения системы двух случайных величин. Условные законы распределения. Зависимые и независимые случайные величины. Линейная корреляция.

Система случайных величин.

Рассмотренные выше случайные величины были одномерными, т.е. определялись одним числом, однако, существуют также случайные величины, которые определяются двумя, тремя и т.д. числами. Такие случайные величины называются двумерными, трехмерными и т.д.

В зависимости от типа, входящих в систему случайных величин, системы могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, если в систему входят различные типы случайных величин.

Более подробно рассмотрим системы двух случайных величин.

Определение. **Законом распределения** системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений системы случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях.

Определение. **Функцией распределения** системы двух случайных величин называется функция двух аргументов *F(x, y)*, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X<x$, $Y<y$.

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y)$$

Отметим следующие свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

$$\lim_{y \to \infty} F(x, y) = F_1(x);$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x, y) = F_2(y);$$

2) Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице. $F(\infty, \infty) = 1;$

3) При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю.

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$

4) Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу.

5) Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Плотность распределения системы двух случайных величин.

<u>Определение.</u> Плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле: $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y) dx dy$

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$F_1(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy; \quad F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy;$$

Условные законы распределения.

Как было показано выше, зная совместный закон распределения можно легко найти законы распределения каждой случайной величины, входящей в систему.

Однако, на практике чаще стоит обратная задача – по известным законам распределения случайных величин найти их совместный закон распределения.

В общем случае эта задача является неразрешимой, т.к. закон распределения случайной величины ничего не говорит о связи этой величины с другими случайными величинами.

Кроме того, если случайные величины зависимы между собой, то закон распределения не может быть выражен через законы распределения составляющих, т.к. должен устанавливать связь между составляющими.

Все это приводит к необходимости рассмотрения условных законов распределения.

Определение. Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется **условным законом распределения**.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется по формулам:

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx};\qquad f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

Условное математическое ожидание.

Определение. **Условным математическим ожиданием** дискретной случайной величины Y при X = x (x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности. $M(Y/X=x)=\sum\limits_{i=1}^{m} y_i p(y_i/x)$

Для непрерывных случайных величин: $M(Y/X=x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy$,

где *f(y/x)* – условная плотность случайной величины Y при X=x.

Условное математическое ожидание *M(Y/x)=f(x)* является функцией от *x* и называется **функцией регрессии X на Y.**

$$p(x_1)=0{,}15+0{,}30=0{,}45$$

$$p(y_1/x_1)=p(x_1,y_1)/p(x_1)=0{,}15/0{,}45=1/3;$$

$$p(y_2/x_1)=p(x_1,y_2)/p(x_1)=0{,}30/0{,}45=2/3;$$

$$M(Y/X=x_1)=\sum_{j=1}^{2} y_j p(y_j/x_1)=y_1 p(y_1/x_1)+y_2 p(y_2/x_1)=3/3+12/3=5.$$

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты системы случайных величин.

Зависимые и независимые случайные величины.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.*

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для плотности распределения:

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.* $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$

Определение. Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин: $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$

Для непрерывных случайных величин: $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dxdy$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.

Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

__Определение.__ **Коэффициентом корреляции** r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин. $r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

__Свойство:__ Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий. $|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$

__Свойство:__ Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы. $|r_{xy}| \le 1$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Наряду с коэффициентом корреляции степень зависимости случайных величин можно охарактеризовать и другой величиной, которая называется

коэффициентом ковариации. Коэффициент ковариации определяется формулой: $k(X,Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$

Линейная регрессия.

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины.

Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная. $Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$

Для определения этой функции остается только найти постоянные величины α и β.

Определение. Функция *g(X)* называется **наилучшим приближением** случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция *g(x)* называется **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Теорема. *Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле:* $g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$ в этой формуле $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y) -$ коэффициент корреляции величин *X* и *Y*.

Величина $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется **коэффициентом регрессии** *Y* на *X*.

Прямая, уравнение которой $y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$, называется **прямой среднеквадратической регрессии** *Y* на *X*.

Лекция 12. Законы больших чисел. Неравенство Чебышева.
Теоремы Чебышева и Бернулли.

Теорема. (Неравенство Чебышева) *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем* $1 - D(X)/\varepsilon^2$, $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2$.

Теорема Чебышева.

Теорема. *Если X_1, X_2, …, X_n- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышаю постоянного числа C), то, как бы мало не было положительное число ε, вероятность неравенства* $\left[\dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \dfrac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right] < \varepsilon$ *– будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико,* т.е. можно записать:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. В этом случае теорема Чебышева несколько упрощается: $\lim\limits_{n \to \infty} P\left(\left|\dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1$

Дробь, входящая в записанное выше выражение есть не что иное как среднее арифметическое возможных значений случайной величины.

Теорема утверждает, что хотя каждое отдельное значение случайной величины может достаточно сильно отличаться от своего математического ожидания, но среднее арифметическое этих значений будет неограниченно приближаться к среднему арифметическому математических ожиданий.

Отклоняясь от математического ожидания как в положительную так и в отрицательную сторону, от своего математического ожидания, в среднем арифметическом отклонения взаимно сокращаются.

Таким образом, величина среднего арифметического значений случайной величины уже теряет характер случайности.

Теорема Бернулли.

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равно *p*.

Возможно определить примерно относительную частоту появления события А.

Теорема. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события А постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний p достаточно велико.*

$$\lim_{n \to \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$$

Здесь *m* – число появлений события А. Из всего сказанного выше не следует, что с увеличением число испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности *p*, т.е. $\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = p$. В теореме имеется в виду только вероятность приближения относительной частоты к вероятности появления события А в каждом испытании.

В случае, если вероятности появления события А в каждом опыте различны, то справедлива следующая теорема, известная как **теорема Пуассона.**

Теорема. *Если производится n независимых опытов и вероятность появления события А в каждом опыте равна* p_i, *то при увеличении n частота события А сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей* p_i.

Предельные теоремы.

Как уже говорилось, при достаточно большом количестве испытаний, поставленных в одинаковых условиях, характеристики случайных событий и случайных величин становятся почти неслучайными. Это позволяет использовать результаты наблюдений случайных событий для предсказания исхода того или иного опыта.

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом количестве испытаний.

В рассмотренном выше законе больших чисел нечего не говорилось о законе распределения случайных величин.

Поставим задачу нахождения предельного закона распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ когда число слагаемых n неограниченно возрастает. Эту задачу решает Центральная предельная теорема Ляпунова, которая была сформулирована выше.

В зависимости от условий распределения случайных величин X_i, образующих сумму, возможны различные формулировки центральной предельной теоремы.

Допустим, что случайные величины X_i взаимно независимы и одинаково распределены.

Расчет вероятности попадания значения случайной величины в заданный интервал $P(\alpha < Y < \beta) = \sum_{\alpha < k < \beta} C_n^k p^k q^{n-k}$ при больших значениях n крайне затруднителен. Гораздо проще воспользоваться формулой:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right)\right]$$

Теорема Муавра – Лапласа очень широко применяется при решении практических задач.

$$P(570 \le X \le 630) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{630-600}{\sqrt{1152}}\right) - \Phi\left(\frac{570-600}{\sqrt{1152}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(0{,}88) - \Phi(-0{,}88)\right) =$$
$$= \Phi(0{,}88) = 2\overline{\Phi}(1{,}25) = 2 \cdot 0{,}3944 = 0{,}7888$$

Лекция 13 . Теория массового обслуживания. Случайные процессы. Поток событий. Цепи Маркова

Система массового обслуживания состоит из некоторого числа обслуживающих единиц или **каналов**, работа которых состоит в выполнении поступающих по этим каналам **заявок**.

Примеры систем массового обслуживания весьма распространены на практике. Это различные телефонные станции, ремонтные мастерские и проч. Вид и количество поступающих на эти системы заявок различны и, вообще говоря, случайны.

Теория массового обслуживания описывает закономерности функционирования таких систем.

Определение. процесс функционирования системы массового обслуживания называется **случайным процессом.**

Чтобы оптимизировать процесс функционирования системы массового обслуживания его надо изучить и описать математически.

Теория массового обслуживания является очень быстро развивающимся разделом теории вероятностей, т.к. ее применение на практике чрезвычайно широко.

Случайный процесс, протекающий в системе массового обслуживания состоит в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое. Меняется число заявок, число занятых каналов, число заявок в очереди и проч.

Определение. Если переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, а количество состояний системы (конечное или бесконечное) можно пронумеровать, то такая система называется **системой дискретного типа.**

Если количество возможных состояний счетно, то сумма вероятностей нахождения системы в одном из состояний равна 1.

$$\sum_k p_k(t) = 1$$

Совокупность вероятностей $p_k(t)$ для каждого момента времени характеризует данное **сечение** случайного процесса.

Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов: **с дискретным** или **непрерывным временем**.

Если переходы системы из одного состояния в другое могут происходить только в строго определенные моменты времени, то случайный процесс будет процессом с дискретным временем, а если переход возможен в любой момент времени, то процесс будет процессом с непрерывным временем.

Поскольку в реальности заявки на систему массового обслуживания могут поступать в любой момент времени, то большинство реальных систем массового обслуживания будут системами с процессом с непрерывным временем.

Для того, чтобы описать случайный процесс в системе с непрерывным временем необходимо прежде всего проанализировать причины, вызывающие изменение состояния системы. Эти причины определяются потоком заявок, поступающих на систему.

Поток событий.

Определение. **Потоком событий** называется последовательность событий, происходящих один за другим в какие- то моменты времени.

Характер событий, образующих поток может быть различным, а если события отличаются друг от друга только моментом времени, в который они происходят, то такой поток событий называется **однородным**.

<u>Определение.</u> Поток событий называется **регулярным**, если события следует одно за другим через строго определенные промежутки времени.

<u>Определение.</u> Поток событий называется **стационарным**, если вероятность попадания того ли иного числа событий на участок времени τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси расположен этот участок.

Стационарность потока событий означает, что плотность потока постоянна, отсутствуют промежутки времени, в течение которых событий больше чем обычно. Классический пример – “час пик” на транспорте.

<u>Определение.</u> Поток событий называется **потоком без последействий**, если для любых неперекрещивающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, опадающих на другие.

Отсутствие последействий означает, что заявки в систему поступают независимо друг от друга. Поток выходных событий систем массового обслуживания обычно имеет последействие, даже если входной поток его не имеет. Пример – вход пассажиров на станцию метро – поток без последействия, т.к. причины прихода отдельного пассажира не связаны с причинами прихода всех остальных, а выход пассажиров со станции – поток с последействием, т.к. он обусловлен прибытием поезда.

Последействие, свойственное выходному потоку следует учитывать, если этот поток в свою очередь является входным для какой- либо другой системы.

<u>Определение.</u> Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий достаточно мало по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Условие ординарности означает, что заявки на систему приходят по одному, а не парами, тройками и т.д. Однако, если заявки поступают **только** парами, **только** тройками и т.д., то такой поток легко свести к ординарному.

<u>Определение.</u> Если поток событий стационарен, ординарен и без последействий, то такой поток называется **простейшим (пуассоновским)** потоком.

Это название связано с тем, что в этом случае число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, распределено по распределению Пуассона .

В соответствии с этим законом распределения математическое ожидание числа точек, попавших попадающих на участок времени τ, имеет вид: $a = \lambda\tau$ λ - плотность потока – среднее число событий в единицу времени.

Вероятность того, что за время τ произойдет ровно m событий, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau}$$

Вероятность того, что в течение данного времени не произойдет ни одного события, равна: $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$

Пусть Т – промежуток времени между двумя произвольными соседними событиями в простейшем потоке. Найдем функцию распределения

$$F(t) = P(T < t)$$

В соответствии с законом распределения Пуассона, получаем:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \qquad f(t) = \lambda e^{-\lambda t};$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны: $m_t = \frac{1}{\lambda}; \quad D_t = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_t = \frac{1}{\lambda};$

Таким образом, для величины Т получили показательный закон распределения.

<u>Пример.</u> В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заявок в час. Считая поток заказов простейшим, определить вероятность того, что: а) за 1 минуту не поступит ни одного заказа, б) за 10 минут поступит не более трех заказов.

Сначала найдем плотность (интенсивность) потока, выразив ее в количестве заявок в минуту. Очевидно, эта величина равна $\lambda = \frac{12}{60} = 0{,}2$.

Далее находим вероятность того, что за время $\tau = 1$ мин не поступит ни одной заявки по формуле: $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$

Вероятность того, что за 10 минут поступит не более трех заказов будет складываться из вероятностей того, что не поступит ни одного заказа, поступит один, два или ровно три заказа.

$$P(m \le 3) = \sum_{m=0}^{3} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} = e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4}{2}e^{-2} + \frac{8}{6}e^{-2} = \frac{19}{3}e^{-2} = 0{,}8571$$

<u>Пример.</u> В ресторан прибывает в среднем 20 посетителей в час. Считая поток посетителей простейшим, и зная, что ресторан открывается в 11.00, определите:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторан придет 20 посетителей при условии, что в 11.07 их было 18

б) вероятность того, что между 11.28 и 11.30 в ресторане окажется новый посетитель, если известно, что предшествующий посетитель прибыл в 11.25.

Для ответ на первый вопрос фактически надо найти вероятность того, что в промежуток от 11.07 до 11.12 (τ = 5 минут) придет ровно 2 посетителя. При этом мы знаем интенсивность потока посетителей - λ = 20/60 = 1/3 посетителей в минуту. Конечно, данная величина носит условный характер, т.к. посетители не могут приходить по частям.

Искомая вероятность равна: $P_2(5) = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot 5\right)^2}{2!} e^{-\frac{1}{3}\cdot 5} \approx 0{,}2623$

<u>Цепи Маркова.</u>

<u>**Определение.**</u> Процесс, протекающий в физической системе, называется **марковским**, если в любой момент времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в

текущий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

<u>Определение.</u> **Цепью Маркова** называется последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий A_i из полной группы. При этом условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s –ом испытании наступит событие A_j при условии, что в (s – 1) – ом испытании наступило событие A_i, не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются **состояниями системы**, а испытания – **изменениями состояний системы**.

По характеру изменений состояний цепи Маркова можно разделить на две группы.

<u>Определение.</u> **Цепью Маркова с дискретным временем** называется цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени. **Цепью Маркова с непрерывным временем** называется цепь, изменение состояний которой возможно в любые случайные моменты времени.

<u>Определение.</u> **Однородной** называется цепь Маркова, если условная вероятность p_{ij} перехода системы из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания. Вероятность p_{ij} называется **переходной вероятностью**.

Допустим, число состояний конечно и равно k.

Тогда матрица, составленная из условных вероятностей перехода будет иметь вид: $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$ – **матрица перехода системы**.

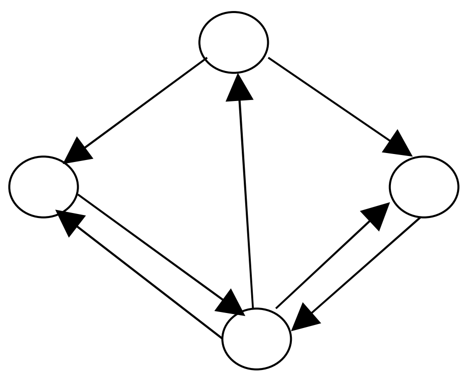
Т.к. в каждой строке содержаться вероятности событий, которые образуют полную группу, то, очевидно, что сумма элементов каждой строки матрицы равна единице.

На основе матрицы перехода системы можно построить так называемый **граф состояний системы**, его еще называют **размеченный граф состояний**. Это удобно для наглядного представления цепи. Порядок построения граф рассмотрим на примере.

Пример. По заданной матрице перехода построить граф состояний.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Т.к. матрица четвертого порядка, то, соответственно, система имеет 4 возможных состояния.



На графе не отмечаются вероятности перехода системы из одного состояния в то же самое. При рассмотрении конкретных систем удобно сначала построить граф состояний, затем определить вероятность переходов системы из одного состояния в то же самое (исходя из требования равенства единице суммы элементов строк матрицы), а потом составить матрицу переходов системы.

Пусть $P_{ij}(n)$ – вероятность того, что в результате n испытаний система перейдет из состояния i в состояние j, r – некоторое промежуточное состояние между состояниями i и j. Вероятности перехода из одного состояния в другое $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Тогда вероятность $P_{ij}(n)$ может быть найдена по формуле, называемой **равенством Маркова**: $P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m)$

Здесь m – число шагов (испытаний), за которое система перешла из состояния i в состояние r.

В принципе, равенство Маркова есть ни что иное как несколько видоизмененная формула полной вероятности.

Зная переходные вероятности (т.е. зная матрицу перехода P_1), можно найти вероятности перехода из состояния в состояние за два шага $P_{ij}(2)$, т.е. матрицу P_2, зная ее – найти матрицу P_3, и т.д.

Непосредственное применений полученной выше формулы не очень удобно, поэтому, можно воспользоваться приемами матричного исчисления (ведь эта формула по сути – не что иное как формула перемножения двух матриц). Тогда в общем виде можно записать: $P_n = P_1^n$

Вообще то этот факт обычно формулируется в виде теоремы, однако, ее доказательство достаточно простое, поэтому приводить его не буду.

<u>Пример.</u> Задана матрица переходов P_1. Найти матрицу P_3.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}244 & 0{,}756 \\ 0{,}252 & 0{,}748 \end{pmatrix}$$

<u>**Определение.**</u> Матрицы, суммы элементов всех строк которых равны единице, называются **стохастическими**. Если при некотором n все элементы матрицы P^n не равны нулю, то такая матрица переходов называется **регулярной**.

Другими словами, регулярные матрицы переходов задают цепь Маркова, в которой каждое состояние может быть достигнуто через n шагов из любого состояния. Такие цепи Маркова также называются **регулярными**.

<u>Теорема.</u> (теорема о предельных вероятностях) *Пусть дана регулярная цепь Маркова с n состояниями и P – ее матрица вероятностей перехода. Тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = P^{(\infty)}$ *и матрица* $P^{(\infty)}$ *имеет вид:*

$$P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$ т.е. матрица состоит из одинаковых строк.

Теперь о величинах u_i. Числа $u_1, u_2, \dots, u_n$ называются **предельными вероятностями.** Эти вероятности не зависят от исходного состояния системы и являются компонентами собственного вектора матрицы P^T (транспонированной к матрице P).

Этот вектор полностью определяется из условий: $P^T \cdot \vec{u} = \vec{u}$; $\quad \sum u_i = 1$;

<u>Пример.</u> Найдем предельные вероятности для рассмотренного выше примера.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}; \quad P^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} u_1 = 0{,}1u_1 + 0{,}3u_2 \\ u_2 = 0{,}9u_1 + 0{,}7u_2 \end{matrix}$$

$$0{,}9u_1 = 0{,}3u_2; \qquad u_2 = 3u_1;$$

С учетом того, что $u_1 + u_2 = 1$, получаем: $u_1 + 3u_1 = 1; \quad u_1 = 0{,}25; \quad u_2 = 0{,}75;$

Получаем: $P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

Лекция 14. Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд, статистический ряд. Группированная выборка. Группированный статистический ряд. Полигон частот. Выборочная функция распределения и гистограмма.

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической статистики являются:

- определение способов сбора и группировки этих статистических данных;
- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности *N* и объем выборки *n* – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Замечание. Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была **репрезентативной** (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Первичная обработка результатов.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$, где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины x_1, x_2,…, $x_к$ называют **вариантами**, а n_1, n_2,…, $n_к$ – **частотами**. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим **относительные частоты** $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют **вариационным** рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – **статистическим рядом**:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Пример.

При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1,1,4,0,1,2,1,2,2,0,5,3,3,1,0,2,2,3,4,1.Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

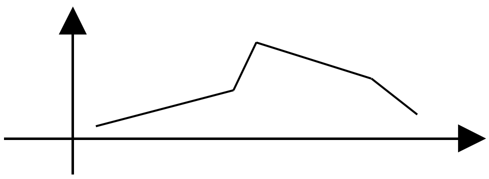
x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать **группированную выборку**. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h, а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Составленная по этим результатам таблица называется **группированным статистическим рядом**:

Номера интервалов	1	2	…	k
Границы интервалов	$(a, a + h)$	$(a + h, a+2h)$	…	$(b - h, b)$
Сумма частот вариант, попавших в интервал	n_1	n_2	…	n_k

Полигон частот. Выборочная функция распределения и гистограмма. Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – **полигон частот**: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим **полигон относительных частот.**



Определение. **Выборочной (эмпирической) функцией распределения** называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X<x$. Таким образом,

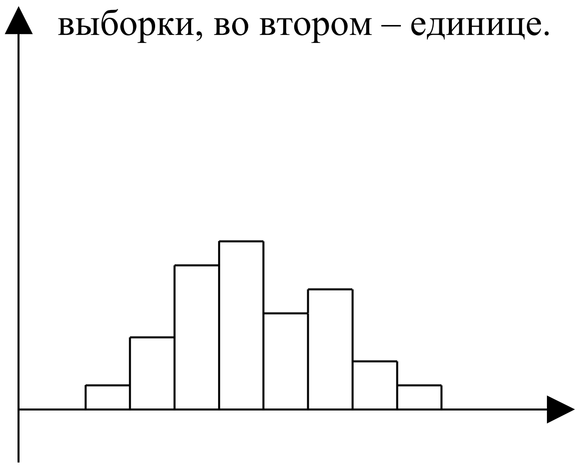
$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Замечание. В отличие от эмпирической функции распределения, найденной опытным путем, функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ – его относительную частоту. При достаточно больших n, как следует из теоремы Бернулли, $F^*(x)$ стремится по вероятности к $F(x)$.

Из определения эмпирической функции распределения видно, что ее свойства совпадают со свойствами $F(x)$, а именно:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$.
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3) Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

Для непрерывного признака графической иллюстрацией служит **гистограмма**, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высотами – отрезки длиной $n_i\ /h$ (гистограмма частот) или $w_i\ /h$ (гистограмма относительных частот). В первом случае площадь гистограммы равна объему выборки, во втором – единице.



Лекция 16. Числовые характеристики статистического распределения: выборочное среднее, оценки дисперсии, оценки моды и медианы, оценки начальных и центральных моментов.

Определение. **Выборочным средним** называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_ix_i}{n},$$ где x_i – варианты, n_i - частоты.

Определение. **Выборочной дисперсией** называется

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_B)^2}{n}$$, **выборочным средним квадратическим отклонением** – $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Так же, как в теории случайных величин, можно доказать, что справедлива следующая формула для вычисления выборочной дисперсии: $D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

<u>Пример.</u> Найдем числовые характеристики выборки, заданной статистическим рядом:

x_i	2	5	7	8
n_i	3	8	7	2

$$\bar{x}_B = \frac{2\cdot 3 + 5\cdot 8 + 7\cdot 7 + 8\cdot 2}{20} = 5{,}55; \quad D_B = \frac{4\cdot 3 + 25\cdot 8 + 49\cdot 7 + 64\cdot 2}{20} - 5{,}55^2 = 3{,}3475;$$

$$\sigma_B = \sqrt{3{,}3475} = 1{,}83.$$

Другими характеристиками вариационного ряда являются:

- **мода M_0** – варианта, имеющая наибольшую частоту (в предыдущем примере $M_0 = 5$).

- **медиана m_e** - варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно ($n = 2k + 1$), то $m_e = x_{k+1}$, а при четном $n = 2k$ $m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. В частности, в примере 1 $m_e = \frac{5+7}{2} = 6$.

Оценки начальных и центральных моментов (так называемые эмпирические моменты) определяются аналогично соответствующим теоретическим моментам:

- **начальным эмпирическим моментом порядка k** называется $M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}$.

В частности, $M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}_B$, то есть начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочному среднему.

- **центральным эмпирическим моментом порядка k** называется

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^k}{n}.$$

В частности, $m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = D_B$, то есть центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии.

Лекция 15. Основные свойства статистических характеристик параметров распределения: несмещенность, состоятельность, эффективность. Несмещенность и состоятельность выборочного среднего как оценки математического ожидания. Пример несмещенной оценки дисперсии. Асимптотически несмещенные оценки.

Получив статистические оценки параметров распределения (выборочное среднее, выборочную дисперсию и т.д.), нужно убедиться, что они в достаточной степени служат приближением соответствующих характеристик генеральной совокупности. Определим требования, которые должны при этом выполняться.

Пусть Θ* - статистическая оценка неизвестного параметра Θ теоретического распределения. Извлечем из генеральной совокупности несколько выборок одного и того же объема *n* и вычислим для каждой из них оценку параметра Θ: $\Theta_1^*, \Theta_2^*, ..., \Theta_k^*$. Тогда оценку Θ* можно рассматривать как случайную величину, принимающую возможные значения $\Theta_1^*, \Theta_2^*, ..., \Theta_k^*$. Если математическое ожидание Θ* не равно оцениваемому параметру, мы будем получать при вычислении оценок систематические ошибки одного знака (с избытком, если $M(\Theta^*) > \Theta$, и с недостатком, если $M(\Theta^*) < \Theta$). Следовательно, необходимым условием отсутствия систематических ошибок является требование $M(\Theta^*) = \Theta$.

Определение. Статистическая оценка Θ* называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки: $M(\Theta^*) = \Theta$.

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Определение. Статистическая оценка называется **эффективной**, если она при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию.

Определение. **Состоятельной** называется статистическая оценка, которая при $n\to\infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру (если эта оценка несмещенная, то она будет состоятельной, если при $n\to\infty$ ее дисперсия стремится к 0).

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности. Доказать, что $M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_Г$, где $D_Г$ – истинное значение дисперсии генеральной совокупности. Можно предложить другую оценку дисперсии – **исправленную дисперсию s^2**, вычисляемую по формуле

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}.$$

Такая оценка будет являться несмещенной. Ей соответствует **исправленное среднее квадратическое отклонение** $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}$.

Определение. Оценка некоторого признака называется **асимптотически несмещенной**, если для выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = X$, где X – истинное значение исследуемой величины.

Способы построения оценок.

1. Метод наибольшего правдоподобия.
2. Метод моментов.
3. Метод наименьших квадратов.
4. Байесовский подход к получению оценок.

Лекция 16. Интервальное оценивание неизвестных параметров. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность), доверительный интервал. Построение доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения при известной и при неизвестной дисперсии. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

Определение. **Надежностью (доверительной вероятностью)** оценки Θ* параметра Θ называется вероятность γ того, что выполняется неравенство | Θ* - Θ | < δ. Если заменить это неравенство двойным неравенством – δ < Θ* - Θ < δ, то получим: p (Θ* - δ < Θ < Θ* + δ) = γ.

Таким образом, γ есть вероятность того, что Θ попадает в интервал (Θ* - δ, Θ* + δ).

Определение. **Доверительным** называется интервал, в который попадает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Построение доверительных интервалов.

Применим формулу для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал:

$p\,(|X-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Тогда , с учетом того, что $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $p\,(|\bar{X}-a|<\delta) =$

$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t)$, где $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Отсюда $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, и предыдущее равенство

можно переписать так: $p\left(\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma$.

Итак, значение математического ожидания *a* с вероятностью (надежностью)

γ попадает в интервал $\left(\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где значение *t* определяется из

таблиц для функции Лапласа так, чтобы выполнялось равенство 2Φ(*t*) = γ.

2. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.

Если известно, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону с неизвестным средним квадратическим отклонением, то для поиска доверительного интервала для ее математического ожидания построим новую случайную величину $T = \dfrac{\bar{x}_B - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$, где $\bar{x}_B$ - выборочное среднее, s – исправленная дисперсия, n – объем выборки. Эта случайная величина, возможные значения которой будем обозначать t, имеет распределение Стьюдента с $k = n – 1$ степенями свободы.

Поскольку плотность распределения Стьюдента $s(t,n) = B_n\left(1 + \dfrac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$, где

$B_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi\,(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$, явным образом не зависит от a и σ, можно задать вероятность ее попадания в некоторый интервал ($-\,t_\gamma$, t_γ), учитывая четность плотности распределения, следующим образом: $p\left(\left|\dfrac{\bar{x}_B - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} s(t,n)dt = \gamma$.

Отсюда получаем: $p\left(\bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$.

Лекция 17. Статистическая проверка статистических гипотез. Общие принципы проверки гипотез. Понятия статистической гипотезы (простой и сложной), нулевой и конкурирующей гипотезы, ошибок первого и второго *рода, уровня значимости, статистического критерия, критической области, области принятия гипотезы.*

Определение. **Статистической гипотезой** называют гипотезу о виде неизвестного распределения генеральной совокупности или о параметрах известных распределений.

Определение. **Нулевой (основной)** называют выдвинутую гипотезу H_0. **Конкурирующей (альтернативной)** называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Пример. Пусть H_0 заключается в том, что математическое ожидание генеральной совокупности $a = 3$. Тогда возможные варианты H_1: а) $a \neq 3$; б) $a > 3$; в) $a < 3$.

Определение. **Простой** называют гипотезу, содержащую только одно предположение, **сложной** – гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Пример. Для показательного распределения гипотеза H_0: $\lambda = 2$ – простая, H_0: $\lambda > 2$ – сложная, состоящая из бесконечного числа простых (вида $\lambda = c$, где c – любое число, большее 2).

В результате проверки правильности выдвинутой нулевой гипотезы (такая проверка называется **статистической**, так как производится с применением методов математической статистики) возможны ошибки двух видов: **ошибка первого рода**, состоящая в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза, и **ошибка второго рода**, заключающаяся в том, что будет принята неверная гипотеза.

Замечание. Какая из ошибок является на практике более опасной, зависит от конкретной задачи. Например, если проверяется правильность выбора метода лечения больного, то ошибка первого рода означает отказ от правильной методики, что может замедлить лечение, а ошибка второго рода (применение неправильной методики) чревата ухудшением состояния больного и является более опасной.

Вероятность ошибки первого рода называется **уровнем значимости α.**

Основной прием проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины, имеющей известный закон распределения.

Статистическим критерием называется случайная величина K с известным законом распределения, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Критической областью называют область значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, **областью принятия гипотезы** – область значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Итак, процесс проверки гипотезы состоит из следующих этапов:

1) выбирается статистический критерий K;
2) вычисляется его наблюдаемое значение $K_{набл}$ по имеющейся выборке;
3) поскольку закон распределения K известен, определяется (по известному уровню значимости α) **критическое значение** $k_{кр}$, разделяющее критическую область и область принятия гипотезы (например, если $p(K > k_{кр}) = \alpha$, то справа от $k_{кр}$ распо-лагается критическая область, а слева – область принятия гипотезы);
4) если вычисленное значение $K_{набл}$ попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается, если в критическую область – нулевая гипотеза отвергается.

Различают разные виды критических областей:

- **правостороннюю** критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$);
- **левостороннюю** критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$);
- **двустороннюю** критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$ $(k_2 > k_1)$.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что верна конкурирующая гипотеза.

Если обозначить вероятность ошибки второго рода (принятия неправильной нулевой гипотезы) β, то мощность критерия равна 1 – β. Следовательно, чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода. Поэтому после выбора уровня значимости следует строить критическую область так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Лекция 18. Критерий Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины. Проверка гипотез о нормальном, показательном и равномерном распределениях по критерию Пирсона.

Критерий Пирсона.

Достоинством критерия Пирсона является его универсальность: с его помощью можно проверять гипотезы о различных законах распределения.

1. Проверка гипотезы о нормальном распределении.

Пусть получена выборка достаточно большого объема n с большим количеством различных значений вариант. Доя удобства ее обработки разделим интервал от наименьшего до наибольшего из значений вариант на s равных частей и будем считать, что значения вари

ант, попавших в каждый интервал, приближенно равны числу, задающему середину интервала. Подсчитав число вариант, попавших в каждый интервал, составим так называемую сгруппированную выборку:

варианты……….$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_s$

частоты…………$n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_s$,

где x_i – значения середин интервалов, а n_i – число вариант, попавших в i-й интервал (эмпирические частоты).

По полученным данным можно вычислить выборочное среднее $\bar{x}_B$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B. Проверим предположение, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с параметрами $M(X) = \bar{x}_B$, $D(X) = \sigma_B^2$. Тогда можно найти количество чисел из выборки объема n, которое должно оказаться в каждом интервале при этом предположении (то есть теоретические частоты). Для этого по таблице значений функции Лапласа найдем вероятность попадания в i-й интервал: $p_i = \Phi\left(\frac{b_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right)$, где a_i и b_i - границы i-го интервала. Умножив полученные вероятности на объем выборки п, найдем теоретические частоты: $n_i = n \cdot p_i$. Наша цель – сравнить эмпирические и теоретические частоты, которые, конечно, отличаются друг от друга, и выяснить, являются ли эти различия несущественными, не опровергающими гипотезу о нормальном распределении исследуемой случайной величины, или они настолько велики, что противоречат этой гипотезе. Для этого используется критерий в виде случайной величины $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$.

Смысл ее очевиден: суммируются части, которые квадраты отклонений эмпирических частот от теоретических составляют от соответствующих теоретических частот. Можно доказать, что вне зависимости от реального закона распределения генеральной совокупности закон распределения случайной величины (20.1) при $n \to \infty$ стремится к закону распределения χ^2 (см. лекцию 12) с числом степеней свободы $k = s - 1 - r$, где r – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки. Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами, поэтому $k = s - 3$. Для выбранного критерия строится правосторонняя критическая область, определяемая условием $p(\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)) = \alpha$, где α – уровень значимости. Следовательно, критическая область задается неравенством $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)$, а область принятия гипотезы - $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, k)$.

Итак, для проверки нулевой гипотезы H_0: генеральная совокупность распределена нормально – нужно вычислить по выборке наблюдаемое значение критерия: $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$, а по таблице критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$, используя известные значения α и $k = s - 3$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{kp}$ - нулевую гипотезу принимают, при $\chi^2_{набл} > \chi^2_{kp}$ ее отвергают.

10. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

ТЕСТ

1. Сумма событий А и В изображена на рисунке.
2. Разность событий А и В изображена на рисунке.
3. Произведение событий А и В изображена на рисунке.
4. Событие $\overline{A}$, противоположное событию А, изображено на рисунке
5. Вероятность случайного события изменяется в интервале:

   а) [0; 1] б) [-1; 0] в) [-1; +1].
6. Классическое определение вероятности применимо, когда исходы испытания:

   а) равновозможны; в) единственно возможны;

   б) не совместны; г) практически невозможным
7. Если р(А)≈1, то события А называется:

   а) достоверным; в) практически достоверным;

   б) невозможным; г) практически невозможным;

8 .Если р(А) ≈ 0, то событие А называется:

   а) достоверным; в) практически невозможным;

   б) невозможным;

   г) практически достоверным;

9. Если события А и В равны, А={3; 5; 8}, В={4; 5; 7}, то событие А + В равно:

   а) {3; 4; 5; 7; 8}, б) {3; 8}, в) {5}.
10. Если события А и В равны, А={3; 5; 8}, В={4; 5; 7}, то событие А-В равно:

а) {3; 4; 5; 7; 8}, б) {3; 8}, в) {5}.

11. Если события А и В равны, А={3; 5; 8}, В={4; 5; 7}, то событие А* В равно:

а) {3; 4; 5; 7; 8}, б) {3; 8}, в) {5}.

12. Если р(А) = 07, то р($\overline{A}$) равно:

а) 0; б)1; в) –0,7; г) 0,3.

13. Вероятность события, противоположного событию А, равна:

а) 0; б)-р(А); в) 1-р(А); г) 1.

14. Согласно принципа практической уверенности практически достоверное событие:

а) обязательно произойдет;

б) обязательно не произойдет;

в) может произойти или не произойдет.

15. Согласно принципа практической уверенности практически невозможное событие:

а) обязательно произойдет;

б) обязательно не произойдет;

в) может произойти или не произойдет.

16. Для совместных событий А и В имеет место утверждение:

а) р(А·В) = р(А)·р(В/А);

б) р(А·В) = р(А)·р(В);

в) р(А+В) = р(А)+р(В);

г) р(А+В) = р(А)+р(В)-р(А В).

17. Для несовместных событий А и В имеет место утверждение:

а) р(А·В) = р(А)·р(В/А);

б) р(А·В) = р(А)·р(В);

в) р(А+В) = р(А)+р(В);

г) р(А+В) = р(А)+р(В)-р(А В).

18. Для зависимых событий А и В имеет место утверждение:

а) р(А·В) = р(А)·р(В/А);

б) р(А·В) = р(А)·р(В);

в) р(А+В) = р(А)+р(В);

г) р(А+В) = р(А)+р(В)-р(А В).

19. Для независимых событий A и B имеет место утверждение:

а) $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B/A)$; б) $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$;

в) $p(A+B) = p(A)+p(B)$; г) $p(A+B) = p(A)+p(B)-p(A\ B)$.

20. Если событие A,B,C образуют полную группу несовместных событий и $p(A)=0,3$, $p(B)=0,6$, то вероятность события C равна:

а) 0,9; б)0,18; в) 0,1; г) 0,2.

21. Если $p(A) = 0,24$, $p(A \cdot B)=0,06$, то $p(B/A)$ равна:

а) 0,26; б)0,14; в) 0,3; г) –0,14.

22. Если событие A не зависит от B, то :

а) $p(A)=p(A/B)$; б)$p(B)=P(A/B)$; в) $p(A/B)=P(B/A)$.

23. Событие, состоящие из всех элементарных событий, принадлежащих по крайней мере одному из двух событий есть:

а) сумма этих событий; в) разность этих событий.

б) произведение этих событий;

24. Событие, состоящие из всех элементарных событий, принадлежащих каждому из двух событий есть:

а) сумма этих событий; в) разность этих событий.

б) произведение этих событий;

25. Частный случай схемы независимых испытаний, в котором каждое испытание может закончиться только одним из двух исходов, называют:

а) полиномиальной схемой;

б) конечной вероятностной схемой;

в) схемой Бернулли.

26. Формула интерпретируемая как формула, позволяющая по априорным вероятностям и по результатом опыта найти апостериорные вероятности есть:

а) формула Пуассона; б) формула Байеса; в) формула Лапласа.

27. События $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу событий, если в результате испытания:

а) произойдут хотя бы два из них;

б) одно из них обязательно произойдет;

в) все события $A_1, A_2, \ldots A_n$ обязательно произойдут.

28. Число, характеризующие возможность появления события, называется:

а) алгеброй событий; б) элементарным исходом;

в) вероятностью события.

29. Символом C_n^m обозначается:

а) число перестановок из n элементов по n;

б) число сочетаний из n элементов по m;

г) число размещений из n элементов по m.

30. Символом A_n^m обозначается:

а) число перестановок из n элементов по n;

б) число сочетаний из n элементов по m;

г) число размещений из n элементов по m.

31. Символом $P_n(n = m)$ обозначается:

а) число перестановок из n элементов по n;

б) число сочетаний из n элементов по m;

г) число размещений из n элементов по m.

32. Размещения из n элементов по m отличаются друг от друга:

а) порядком элементов; б) хотя бы одним элементом;

в) либо порядком, либо самими элементами.

33. Сочетания из n элементов по m отличается друг от друга:

а) порядком элементов; б) хотя бы одним элементом;

в) либо порядком, либо самими элементами.

34. Теорема сложения несовместных (совместных) событий утверждает, что:

а) p(A+B) = p(A) + p(B); б) p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A·B);

в) p(A+B) = p(A) + p(B) + p(A·B)

35. Формула Пуассона $P_{m,n} \approx \frac{\lambda}{m!}e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, применяется, если:

а) n-достаточно велико, а p- достаточно мало;

б) n- достаточно мало а p- достаточно велико;

в) n и p- достаточно велики; г) n и p- достаточно малы.

36. Точное значение вероятности $P_{m,n}$ находится:

а) по формуле Бернулли; б) по формуле Пуассона;

в) по формуле Лапласа; г) по формуле Бейеса;

д) по формуле полной вероятности.

37. Если A $\subset$ B, то:

а) p(A) = p(B); б) p(A)≥ p(B); в) p(A)≤ p(B).

38. Формула $P_{m,n} = C_n^m\ p^m\ q^{n-m}$, где q = 1-p, есть формула:

а) Бернулли; б) Пуассона; в) Бейеса.

39. Вероятность $P_{m,n}$ при больших значениях n и p находятся по:

а) формуле Бернулли; б) формуле Пуассона;

в) локальной теореме Лапласа.

40. Число, около которого группируются частости события по мере увеличения числа испытаний, есть:

а) вероятность события; б) наивероятнейшее число;

в) принцип практической уверенности.

41. Наивероятнейшее число – это:

а) число, около которого группируются частности данного события по мере увеличения числа испытаний;

б) число, характеризующее возможность появления события;

в) число, для которого вероятность появления события в испытаниях, наибольшая; г) все ответы неправильны.

42. Число, характеризующее возможность появления события, – это:

а) наивероятнейшее число; б) противоположное событие;

в) вероятность события; г) теория вероятности;

д) принцип практической уверенности.

43.События независимые, если:

а) безусловная вероятность равна условной вероятности;

б) безусловная вероятность не равна условной вероятности;

в) безусловная вероятность больше условной вероятности;

г) безусловная вероятность меньше условной вероятности;

44. Произведение двух событий, если они зависимые:

а)$p(A \cdot B)=p(A) \cdot p(B)$; б) $p(A \cdot B)=p(A) \cdot p(B/A)$;

в) $p(A \cdot B)=p(B) \cdot p(A/B)$; г) правильные ответы а и б;

д) правильные ответы б и в; е) правильные ответы а, б, в.

45.Множество взаимосвязанных исходов, таких, что в результате эксперимента появляется один и только один из эти исходов, называется:

а) пространством элементарных исходов;

б) алгеброй событий; в) вероятностью появления события.

46. Формула вида $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$ называется:

а) формулой Лапласа; б) формулой Байеса; в) полной вероятностью события А.

47. Принцип, состоящий в том, что если событие практически достоверное, то считаем, что оно обязательно произойдет, называется принципом:

а) практической возможности; б) практической уверенности;

в) практической достоверности.

48. Если вероятность появления одного из событий не зависит от того произойдет или не произойдет другое событие, то эти два события называются:

а) зависимыми; б) совместными; в) несовместными.

49. Если вероятность появления события не равна единицы, то близка к ней, то событие называется:

а) практически достоверными; б) практически невозможными;

в) достоверными.

50. Формула поной вероятности имеет вид:

а) $P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum P(H_i) \cdot P(A / H_i)}$; б) $P(A) = \sum P(H_i) \cdot P(A / H_i)$;

в) $P(A) = m / n$.

51. Формула Бернулли имеет вид:

а) $P_{m,n} = C_n^m \; p^m q^{n-m}$; б) $P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$; где λ = пр;

в) $P_{m,n} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$; где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\overline{n}}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

52. Закон редких явлений – это:

а) Закон Пуассона; б) локальная теорема Лапласа;

в) интегральная теорема Лапласа.

53. Если вероятность наступления события А постоянна, а n- независимых испытаний достаточно велико, то $P_{m,n}$ находятся с помощью:

а) локальной теорем Лапласа; б) теорем Пуассона;

в) интегральной теорем Лапласа.

54. Вероятность отклонения относительной частоты события от вероятности в независимых испытании находится из соотношения:

а) пр-q $\leq m_0 \leq np + p$; б) пр-n$\varepsilon < m < np + n\varepsilon$;

в) $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \mathrm{E}\right) = 2\phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

55. По формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, находится:

а) число размещений из n элементов по m; б) число сочетаний из n элементов по m; в) число перестановок из n элементов.

56. По формуле $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, находится:

а) число размещений из n элементов по m; б) число сочетаний из n элементов по m; в) число перестановок из n элементов.

57. Если U- пространство элементарных исходов, то имеет равенство:

а) $\overline{A} = U - A$; б) $A = U - \overline{A}$; в) $U = A + \overline{A}$; г) все равенства верны.

58. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет ***не более пяти очков***, равна…

1) $\dfrac{1}{6}$ 2) $\dfrac{2}{3}$ 3) $\dfrac{5}{6}$ 4) 1

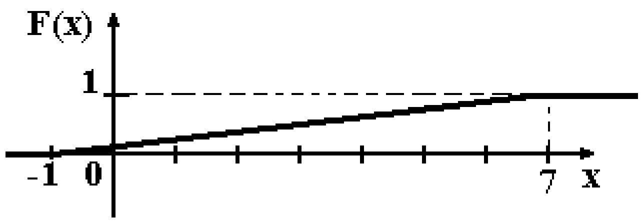
59. Дискретная случайная величина ***X*** задана законом распределения вероятностей:

X	- 1	0	3
p	0,1	0,3	0,6

Тогда математическое ожидание случайной величины ***Y=3X*** равно…

1) 5,7 2) 6 3) 5,1 4) 4,7

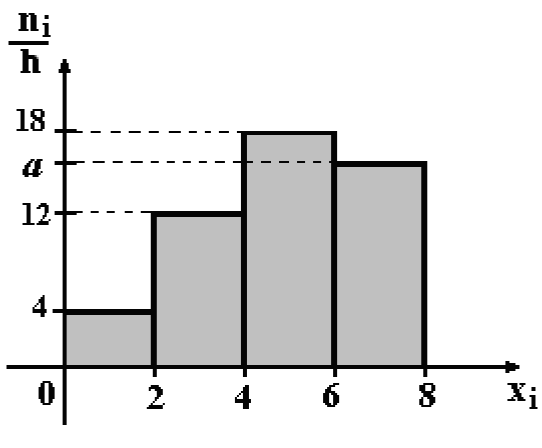
60. График функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины ***X*** имеет вид:



Тогда математическое ожидание ***X*** равно…

1) 7 2) 8 3) 4 4) 3

61. По выборке объема n=100 построена гистограмма частот:



Тогда значение ***a*** равно…

1) 16 2) 66 3) 15 4) 17

62. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 11, 14, 14. Тогда несмещенная оценка дисперсии измерений равна…

1) 13   2) 2   3) 6   4) 3

63. При построении уравнения парной регрессии $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ были получены следующие результаты: $r_B = 0{,}5$, $\sigma_x = 2{,}5$, $\sigma_y = 1{,}2$.
Тогда коэффициент регрессии β равен…

Вопросы для самопроверки.

Случайные события.

1. Дайте определения достоверного, невозможного и случайного событий и приведите примеры этих событий.

2. Приведите примеры элементарных и сложных событий.

3. Сформулируйте классическое определение вероятности и условия его применения. Укажите интервал возможных значений вероятности.

4. В чем состоит отличие геометрического определения вероятности от классического определения?

5. Что называется относительной частотой появления события А?

6. Дайте определение несовместных и совместных событий, полной группы событий.

7. Какие события называются противоположными?

8. Что называется суммой событий?

9. В чем состоит отличие определения вероятности суммы событий для совместных и несовместных событий?

10. Что называется произведением событий?

11. Дайте определения независимых и зависимых событий, безусловной и условной вероятностей.

12. Приведите формулы для вычисления вероятности произведения независимых и зависимых событий, поясните отличие этих формул.

13. Как определить вероятность появления хотя бы одного события?

14. Сформулируйте формулу полной вероятности, поясните смысл входящих в нее величин.

15. Сформулируйте формулу Бейеса и поясните, в чем ее особенность.

Контрольные задачи

1. Чему равна вероятность того, что при бросании двух игральных косточек сумма выпавших очков равна 8 и их произведение равно 15?

Отв.: 1/18.

2. Из шести жетонов с буквами **и, к, л, м, н, о** случайным образом по одному, не возвращая обратно, извлекают пять букв, и выкладывают их в ряд. С какой вероятностью в результате этого опыта образуется слово "**лимон**"?

Отв.: 1/720.

3. В группе из 10 студентов 4 отличника. Из группы случайным образом отбираются 5 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажутся 3 отличника? *Отв.: 5/21.*

4. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.9. для второго стрелка - 0,75 и для третьего 0,85. Найти вероятность того, что при стрельбе залпом в мишень попадут: а) все три стрелка; б) только два стрелка; в) не более одного стрелка.

Отв.: а) 0,57375; б) 0,35625; в) 0,07.

5. В группе спортсменов 25 футболистов, 10 хоккеистов и 15 бегунов. Вероятности выполнения квалификационного норматива соответственно равны для футболиста 0,9, для хоккеиста 0.8 и для бегуна 0.6. Какова вероятность того, что выбранный случайным образом спортсмен выполнит квалификационный норматив? *Отв.: 0,79.*

6. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед. *Отв.: ≈ 0,47.*

Вопросы для самопроверки.

Случайные величины

1. Приведите примеры дискретных случайных величин.
2. Что называется законом распределения дискретной случайной величины и как его можно задавать?
3. Укажите условия применения формулы Бернулли.
4. Назовите общие и отличительные черты биномиального и пуассоновского распределений дискретных случайных величин.
5. Дайте определения математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения дискретных случайных величин и приведите формулы для их вычисления. Поясните сущность числовых характеристик случайных величин.
6. В чем отличие непрерывных случайных величин от дискретных случайных величин? Приведите примеры непрерывных случайных величин.
7. Как задается закон распределения непрерывной случайной величины?
8. В чем заключается сущность интегральной и дифференциальной функций распределения непрерывных случайных величин, и как они связаны между собой?
9. Приведите формулы для нахождения числовых характеристик непрерывных случайных величин.
10. Дайте характеристику равномерного закона распределения непрерывных случайных величин.
11. Приведите формулы для нахождения числовых характеристик равномерно распределенных непрерывных случайных величин.
12. Дайте характеристику нормального закона распределения непрерывных случайных величин.
13. Назовите параметры нормального закона распределения и поясните их смысл.

14. В чем состоит отличие нормированного нормального распределения от нормального распределения? Приведите формулы для дифференциальной и интегральной функций распределения нормального и нормированного нормального законов распределения.
15. Что называется функцией Лапласа? Укажите ее свойства и приведите примеры ее использования.
16. Сформулируйте правило трех сигм.
17. Дайте характеристику экспоненциального (показательного) закона распределения непрерывных случайных величин. Что является параметром показательного распределения?
18. Приведите формулы для нахождения числовых характеристик непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону.

Контрольные задачи.

1. Случайная величина X задана на всей числовой оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + (\operatorname{arctg} x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (0, 1). *Отв.: 0,25.*

2. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения и числовые характеристики случайной величины X.

Отв.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 2x & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{2}{3}; \quad D(X) = \frac{1}{18}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

3. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения f(x)=sin x в интервале (0, π /2); вне этого интервала f(x)=0. Найти интегральную функцию распределения и математическое ожидание случайной величины X, а также вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, принадлежащее интервалу (π /3,π /2).

Отв.:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 1 - \cos x & \text{при } 0 < x \le \pi/2, \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

M(X) = 1; P (π /3 < x < π /2) = 0,5.

4. Найти дифференциальную, интегральную функции распределения, математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (20, 30).

Отв.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 20, \\ 0{,}1 & \text{при } 20 < x \le 30, \\ 0 & \text{при } x > 30. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 20, \\ \dfrac{x-20}{10} & \text{при } 20 < x \le 30, \\ 1 & \text{при } x > 30. \end{cases} \qquad M(X) = 25.$$

5. Докажите, что для вычисления дисперсии случайной величины, равномерно распределенной в интервале (a, b), может быть использована формула $D(x) = (b - a)^2/12$.

6. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (100, 106). *Отв.*: 3: $\sqrt{3}$.

7. Найти дифференциальную функцию распределения и числовые характеристики случайной величины X, распределенной по нормальному закону с параметрами a = – 10 и σ =3.

Отв.: $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+10)^2}{18}}$ *M(X) = – 10; D(X) = 9;* σ (X) *=3.*

8. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, принадлежащее интервалу (25, 40).

Отв.: 0,5328.

9. Производятся измерения диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением σ =10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм. *Отв.: 0,8664.*

10. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a = 10 и средним квадратическим отклонением σ = 5. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.

Отв.: (–5; 25).

11. Написать дифференциальную и интегральную функции распределения для непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром λ = 0,1.

Отв.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 0{,}1e^{-0{,}1x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}1x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

12. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X, распределена по показательному закону, $f(x)=0{,}01\cdot e^{-0{,}01x}$ при $x \geq 0$ и f(x) = 0 при x<0. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (1, 3). *Отв.:* $\approx$ *0,02.*

Вопросы для самопроверки.

Основы математической статистики
Выборочный метод

1. Назовите основные задачи математической статистики.
2. Дайте определения понятий: генеральная и выборочная совокупности; объем генеральной и выборочной совокупности.

3. Как обеспечивается репрезентативность выборки? Назовите основные методы отбора объектов в выборочную совокупность.
4. Укажите основные виды представления результатов выборочных наблюдений.
5. Как найти эмпирическую функцию распределения?
6. В чем отличие полигона и гистограммы распределения?
7. Приведите формулы для вычисления числовых характеристик выборки и укажите особенности их применения.
8. Назовите основные свойства точечных оценок.
9. Сравнительный анализ преимуществ и недостатков точечных и интервальных оценок.
10. Приведите формулу нахождения доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины по результатам выборочных наблюдений при известном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности.
11. Приведите примеры использования метода сумм и метода произведений для определения числовых характеристик выборки.

Контрольные задачи.

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	–1	0	3	7	10
n_i	4	7	11	2	1

Найти: а) распределение относительных частот, б) эмпирическую функцию распределения. Построить: в) полигон частот и г) полигон относительных частот.

Отв.:

а)

x_i	*–1*	*0*	*3*	*7*	*10*
w_i	*0,16*	*0,28*	*0,44*	*0,08*	*0,04*

б) $$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le -1 \\ 0{,}16 & при\ -1 < x \le 0 \\ 0{,}44 & при\ 0 < x \le 3 \\ 0{,}88 & при\ 3 < x \le 7 \\ 0{,}96 & при\ 7 < x \le 10 \\ 1{,}00 & при\ x > 10 \end{cases}$$

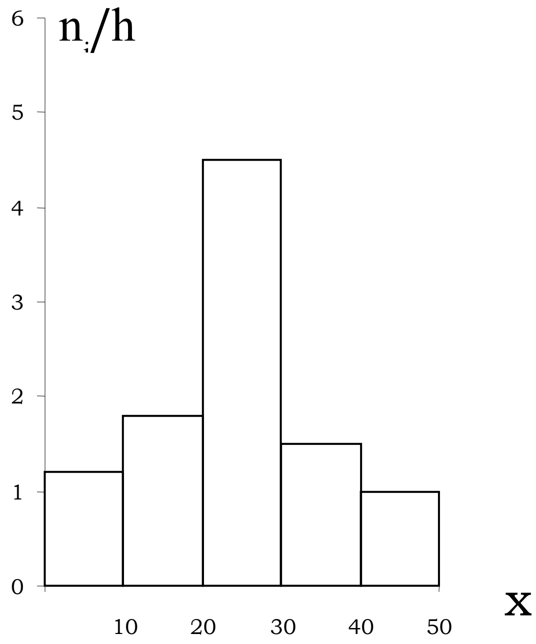
2. Результаты выборочных наблюдений над непрерывной случайной величиной X приведены ниже в виде интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот:

$x_i - x_{i+1}$	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
n_i	12	18	45	15	10

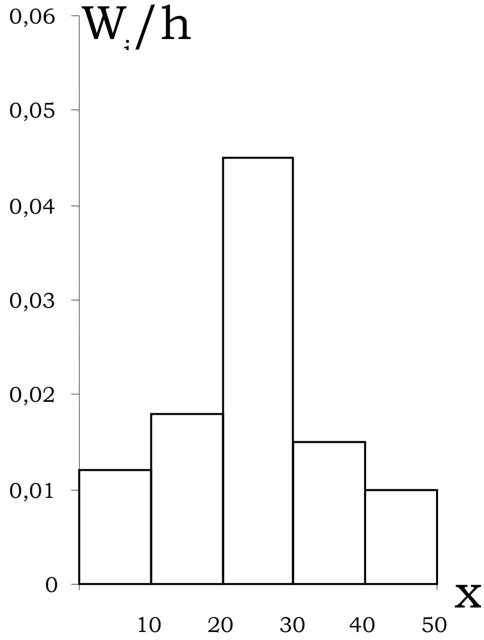
Построить: а) гистограмму частот и б) гистограмму относительных частот случайной величины X.

Отв.:

а)



б)



3. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение случайной величины X, если распределение выборки имеет следующий вид:

x_i	–5	1	3	6	15
n_i	8	14	12	9	7

Отв.: $\bar{x}_в = 3,38;\ D_в \approx 33;\ \sigma_в \approx 5,74.$

4. Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии, если по результатам выборочных наблюдений получено следующее распределение

x_i - x_{i+1}	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40
n_i	5	10	20	8	7

Отв.: $\bar{x}_в = 20,32;\quad S^2(X) \approx 86,10.$

5. Найти интервальную оценку с доверительной вероятностью 0,95 для неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны: генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 4$; выборочная средняя $\bar{x}_в = 30$; объем выборки n = 25.

Отв.: $28,432 < a < 31,568.$

6. С помощью метода произведений найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение случайной величины X, если распределение выборки имеет следующий вид:

x_i - x_{i+1}	–10 – 0	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
n_i	7	12	19	24	17	11	10

Отв.: $x_в = 25,5$; $D_в = 280,75$; $\sigma_в \approx 16,76$.

Вопросы для самопроверки.

Статистическая проверка статистических гипотез

1. Дайте определения статистической гипотезы, нулевой и альтернативной гипотез.
2. Почему проверка статистических гипотез называется статистической?
3. Назовите виды статистических гипотез и приведите примеры таких гипотез.
4. Какие исходы возможны при проверке статистических гипотез? Дайте определения ошибкам первого и второго родов.
5. Что называется статистическим критерием?
6. Сформулируйте понятия области принятия гипотезы и критической области. От чего зависит выбор типа критической области (левосторонней, правосторонней, двухсторонней), и как это связано с видом альтернативной гипотезы?
7. В чем заключается порядок статистической проверки статистических гипотез?
8. Что называется уровнем значимости при проверке статистических гипотез, и с какой вероятностью принимается решение?
9. Какой критерий применяется при проверке гипотезы о равенстве генеральных дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей? Как вычисляется наблюдаемое значение этого критерия?
10. Приведите формулу для определения наблюдаемого значения критерия при сравнении средних двух нормальных генеральных совокупностей при известных генеральных дисперсиях и в случае больших независимых выборок.
11. Как проверить гипотезу о равенстве дисперсий нескольких нормально распределенных генеральных совокупностей в случае по выборкам одинакового объема? Что следует использовать в качестве оценки генеральной дисперсии, если выдвинутая гипотеза будет подтверждена?

12. В чем состоит сущность критерия Пирсона при проверке гипотезы о виде закона распределения генеральной совокупности? Приведите формулу для определения наблюдаемого значения критерия Пирсона.
13. В чем состоит отличие проверки гипотезы о виде закона распределения в случае различных законов распределения? Поясните это на примерах.

Контрольные задачи

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1=9$ и $n_2=16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $S^2(X)=34{,}02$ и $S^2(Y)=12{,}25$. Проверить нулевую гипотезу H_0: D(X) = D(Y) о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: D(X)>D(Y) и уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

Отв.: Так как $F_{набл} = 2{,}8$ меньше $F_{кр}(0{,}01;\ 8;\ 15) = 4$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 14$ и $n_2 = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $S^2(X) =0{,}84$ и $S^2(Y) = 2{,}52$. Проверить нулевую гипотезу H_0: D(X) = D(Y) о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: D(X) $\neq$ D(Y) и уровне значимости $\alpha = 0{,}1$. *Отв.: Так как $F_{набл} =3$ больше $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 13) = 2{,}72$, то нулевую гипотезу отвергаем.*

3. Четыре фасовочных автомата настроены на отвешивание одного и того же веса. На каждом автомате отвесили по 10 проб, а затем эти же пробы взвесили на точных весах и нашли по полученным отклонениям исправленные выборочные дисперсии: 0,012; 0,021; 0,025; 0,032. Можно ли при уровне значимости α =0,05 считать, что автоматы обеспечивают одинаковую точность взвешивания (т.е. проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий), и, в случае подтверждения данной гипотезы, найти оценку генеральной дисперсии.

Отв.: а) так как $G_{набл} = 0{,}3556$ меньше $G_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 4) = 0{,}5017$, то можно считать, что автоматы обеспечивают одинаковую точность взвешивания; б) $S^2(X) = 0{,}0225$.

4. По четырем независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 17$, $n_2 = 20$, $n_3 = 15$, $n_4 = 16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно равные 2,5; 3,6; 4,1; 5,8. Требуется: а) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий; б) оценить генеральную дисперсию.

Отв.: а) $k = 64$; $\sum k_i * S_i^2 = 252,8$; $\sum k_i * \lg S_i^2 = 36,9663$; $V = 2,8$; $B_{набл} < 2,8$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 3) = 7,8$; $B_{набл} < \chi^2_{кр}(0,05;\ 3)$. *Следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу об однородности дисперсий;* б) $S^2(X) = 4,00$.

5. По выборке объемом n = 30 найден средний вес $\bar{x}_в = 130$ деталей, изготовленных на первом станке; по выборке объемом m = 40 найден средний вес $\bar{y}_в = 125$ деталей, изготовленных на втором станке. Известны генеральные дисперсии D(X) = 60 $г^2$, D(Y) = 80 $г^2$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу H_0: M(X) = M(Y) о равенстве генеральных средних данных совокупностей при альтернативной гипотезе H_1: M(X) $\neq$ M(Y). Предполагается, что случайные величины X и Y распределены нормально и выборки независимы.

Отв.: Так как $Z_{набл} = 2,5$ *больше* $Z_{кр} = 1,96$, *то нулевую гипотезу отвергаем (т.е. средний вес деталей различается значимо).*

6, По выборке объемом n = 50 найден средний размер $\bar{x}_в = 20,1$ мм диаметра валиков, изготовленных автоматом №1; по выборке объемом m = 50 найден средний размер $\bar{y}_в = 19.8$ мм диаметра валиков, изготовленных автоматом №2. Генеральные дисперсии известны: D(X) = 1,750 $мм^2$ и D(Y) = 1,375 $мм^2$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу H_0: M(X) = M(Y) о равенстве средних размеров валиков, изготовленных на данных автоматах, при альтернативной гипотезе H_1: M(X) > M(Y). Предполагается, что случайные величины X и Y распределены нормально и выборки независимы.

Отв.: Так как $Z_{набл} = 1,2$ *меньше* $Z_{кр} = 1,645$, *то нет оснований отвергать нулевую гипотезу.*

11. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Вариант 1.

1. Вычислите A_7^3, C_6^5, P_4.
2. Дано: $P(A\cap B) = 0{,}4$; $P_B(A) = \dfrac{2}{3}$; $P_A(B) = \dfrac{3}{4}$. Найдите $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$ и выясните, зависимы ли события *A, B.*
3. Покупатель может приобрести акции двух компаний – *А* и *В*. Надежность первой оценивается экспертами на уровне 90% , второй – 80%. Чему равна вероятность того, что: а) обе компании в течение года не станут банкротами; б) наступит хотя бы одно банкротство?
3. На склад поступило 30 холодильников. Известно, что пять холодильников с дефектами, но неизвестно − какие. Найти вероятность того, что три взятых наугад холодильника будут с дефектами.
4. Вероятность для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, получить контракт в стране *А* равна 0,4; получить в стране *В* равна 0,3. Вероятность того, что контракты будут заключены и в стране *А,* и в стране *В,* равна 0,12. Чему равна вероятность того, что компания получить контракт хотя бы в одной стране?

Вариант 2

1. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели для каждого стрелка равна соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что:

   а) только один стрелок поразит цель;

   б) только два стрелка поразят цель;

   в) все три стрелка поразят цель;

   г) хотя бы один стрелок поразит цель.
2. Стрельба производится по пяти мишеням типа А, трем – типа В, двум – типа

С. Вероятность поражения мишени при одном выстреле типа А равна 0,4, типа В – 0,1, типа С – 0,15. Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если известно, в мишень какого типа он сделан.

3. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения 500 бактерий останется не менее 3 бактерий.
4. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9876 можно было ожидать отклонение относительной частоты появления события от его вероятности не более чем на 0,04?
5. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента, в момент включения прибора равна 0,2.

Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов;

б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов;

в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы 4 элемента.

6. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины:

   а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий; в) от 480 до 520.
7. Из статистики деятельности биржи известно, что в среднем цены на 75% котирующихся на бирже акций в течение месяца повысятся или останутся неизменными, а цены на 25% акций упадут. Некто имеет 6 акций, котирующихся на данной бирже. Найти вероятность того, что: а) более половины имеющихся у него акций не упадут в цене; б) по крайней мере, одна акция упадет в цене.

Задания для индивидуальной работы

Вариант 1

1. В команде 6 отличных стрелков и 4 хороших. Из команды наугад вызывают трех человек. Какова вероятность того, что все они – отличные стрелки?
2. Два велосипедиста имеют одинаковую вероятность приехать к указанному месту в любой момент в течение тридцати минут. Определить вероятность того, что время ожидания одним другого будет не более 5 мин?
3. Рабочий обслуживает одновременно 4 станка, причем, на первом вероятность нарушения нормальной работы в течение часа после проверки составляет 0,1, на втором – 0,15, на третьем – 0,2, на четвертом –0,25. Какова вероятность бесперебойной работы всех четырех станков на протяжении одного часа?
4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первым стрелком – P_1=0,8, вторым – P_2 =0,7. Какова вероятность того, что: а) оба попадут в цель; б) хотя бы один попадет; в) попадет равно один?
5. Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается бракованных изделий не более одного из пятидесяти.
6. Имеются две урны. В первой урне 3 белых и 4 черных шара, во второй – 6 белых и 3 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, пять шаров, после чего из второй урны вынимают шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?
7. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.
8. Установлено, что в среднем 0,5% шариков, изготовленных для подшипников, оказываются бракованными. Определить вероятность того, что среди

поступивших на контроль 10 000 шариков бракованными окажутся 40 штук.

9. Всхожесть хранящегося на складе зерна равна 80%. Отбираются первые попавшиеся 100 зерен. Требуется определить вероятность того, что среди них число всхожих от 68 до 90 штук.

10. При условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что доля всхожих зерен будет отличаться от 0,8 по абсолютной величине не более, чем на 0,1.

11. В ящике 2 белых и 4 чёрных шара. Один за другим вынимаются все имеющиеся в нём шары. Найти вероятность того, что последний шар будет чёрным.

12. В партии товара, состоящей из 30 мужских пальто, находится 20 изделий местного производства. Товаровед наудачу выбирает 3 изделия. Какова вероятность того, что все 3 изделия окажутся: а) местного производства; б) не местного производства.

13. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - государственные органы, 30% - другие банки, остальные - физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0,01, 0,05 и 0,2. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсимильном сообщении имя клиента было неразборчиво. Какова вероятность, что данный кредит не возвращает какой-то банк?

14. Какова вероятность выпадения хотя бы двух шестёрок при трёх бросаниях игральной кости?

15. Сколько существует способов составления в случайном порядке списка из 7 кандидатов для выбора на руководящую должность? Какова вероятность того, что кандидаты будут расставлены в списке по возрасту (от меньшего к большему)?

16. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к весеннему сезону, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность

того, что зеленый цвет будет в моде весной, модельер оценивает в 0,3, что черный – в 0,2, а вероятность того, что будет моден красный цвет – в 0,15. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, оцените вероятность того, что цветовое решение коллекции будет удачным хотя бы по одному из выбранных цветов.

17. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в регионе не будет ухудшаться. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продать участок составит 0,5. Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью, равной 0,7, экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев.

Вариант 2

1. Задан ряд распределения случайной величины *X*.

Найти: а) M(X), D(X), σ(x); в) построить график *F(x)*.

x_i	23	25	28	29
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

2. Задана *F(x)* – функция распределения случайной величины *X*.

Найти: а) f(x); б) M(X), D(X), σ(x); в) построить график *F(x)*.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0, \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 & при\ 0 < x \le 2, \\ 1 & при\ x > 2\ . \end{cases}$$

3. Задана *f(x)* – плотность вероятности случайной величины *X*.

Найти: а) M(X), D(X), σ(x); б) F(x); в) построить графики *F(x)* и *f(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0, \\ \dfrac{1}{4} \ \ при \ \ 0 < x \le 4, \\ 0 \ \ при \ \ x > 4. \end{cases}$$

4. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте, найти числовые характеристики.
5. Случайная величина *X*, сосредоточенная на интервале [*1,3*], задана квадратичной функцией $F(x) = ax^2 + bx + c$, имеющий максимум при 3. Найти параметры *a*, *b*, *c*, плотность вероятностей *f(x)* и вычислить вероятность попадания случайной величины *X* в интервал [*1*; *2*]. Построить графики функций *f(x)* и *F(x)*.
6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X* соответственно равны $M(X)=8$; $D(X)=2,4$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) $3x+2$; б) $5x$; в) $2x-5$.
7. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали равна *20*, среднее квадратическое отклонение 3. Найти: а) вероятность, что диаметр наудачу взятой детали будет больше 17 и меньше 26; б) вероятность, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более, чем на 1,5.
8. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса *R*. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения расстояния точки до центра круга.
9. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 2%.
10. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 7 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 мин.

11. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x_i	0,1	0,4	0,6
p_i	0,2	0,3	0,5

Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что

$$|X - M(X)| < \sqrt{0,4}.$$

12. На поле площадью в 1000 га берется на выборку по 1 м^2 с каждого га и подсчитывается урожайность. Оценить вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от средней урожайности по всей площади не более чем на 0,3 ц, если дисперсия на каждом га не превышает 4.
13. Вероятность наличия зазубрин на металлических брусках, заготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 4 %.
14. Квантиль уровня 0,25 нормально распределённой случайной величины X равен 30, а квантиль уровня 0,5 равен 80. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.
15. В страховом обществе на год застраховано 2000 автолюбителей. В случае аварии страховое общество выплачивает автолюбителю 500 рублей. Какую минимальную стоимость страхового взноса следует установить, чтобы вероятность того, что страховое общество к концу года окажется в убытке была не дольше 0,0014 если вероятность автолюбителю попасть в аварию равна 0,005.
16. Пусть T (час) – время, необходимое для ремонта грузового автомобиля, удовлетворяет экспоненциальному распределению с параметром 0,1 . Какова вероятность того, что время ремонта одного автомобиля не превышает 6 часов, и сколько часов в среднем затрачивается на ремонт одного автомобиля.
17. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 760 т и стандартным отклонением 62 т. Найдите вероятность того, что в определённый день будут добыты, по

крайней мере 800 т угля. Определите долю рабочих дней, в которых будет добыто от 720 до 830 т угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 750 т.

18. Компания А покупает у компании В детали к контрольным приборам. Каждая деталь имеет точно установленное значение размера. Деталь, размер которой отличается от установленного размера более чем на 0,25 мм считается дефектной. Компания А требует от компании В, чтобы доля брака не превышала 1% деталей. Если компания В выполняет требование компании А, то каким должно быть допустимое максимальное стандартное отклонение размеров деталей? Учесть, что размер деталей есть случайная величина, распределённая по нормальному закону.

19. Рассмотрим несколько операций (Q_1, Q_2, Q_3) со случайным доходом.

Вычислите для всех операций ожидаемый доход $\overline{Q}$, СКО r. Нанесите эти характеристики на единый рисунок, получив графическое изображение операций. С помощью взвешивающей формулы E($\overline{Q}$, r) = 5Q – r найдите лучшую и худшую операции.

19.

Q_1	10	5	12	20
	0,1	0,2	0,5	0,2
Q_2	8	5	10	20
	0,3	0,2	0,1	0,4
Q_3	6	8	10	20
	0,3	0,1	0,2	0,4

12. Литература

Основная литература

1. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – Высшая школа. 2001.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

Дополнительная литература

3. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г.
4. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учеб. Пособие: Рек. УМО вузов/А. И. Кибзун и др. – М.: Физматлит, 2002г.
5. Методические разработки кафедры. «Общей математики и информатики»:

1) Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Теория вероятностей: Практикум;

2) Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике.

13. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-преподавательского состава

	для специальностей 260704, 260902, 260901,							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Ефимова О.В., ассистент	АмГУ, физик	-	3	3	2	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1,3 ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	3	3	3	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1ст.

	для специальности 280101, 130301							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Терентьева Е.А., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	6	5	Вечерняя школа	Внеш. совм 0,5ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	5	5	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Костенко С.В., ст.преподаватель	МГПИ, учитель математики	-	15	15	15	АмГУ	Штатный 1 ст.

СОДЕРЖАНИЕ