ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
____________Г.В.Литовка
«___» __________2007г.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС по дисциплине *«Математика»* часть II

для специальностей:

260704 – Технология текстильных изделий

260901– Технология швейных изделий

260902 – Конструирование швейных изделий

280101 – Безопасность жизнедеятельности

330301 – Геология природопользования

Составители: И.Н. Шевченко
О.С. Попова

Благовещенск, 2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики информатики

Авторы-составители: Шевченко И.Н. Попова О.С.

Учебно-методический комплекс «Математика» часть II для специальностей:260704 – Технология текстильных изделий, 260901– Технология швейных изделий, 260902 – Конструирование швейных изделий, 280101 – Безопасность жизнедеятельности. 330301 – Геология природопользования. Благовещенск:АмГУ, 2007.– 133с.

Введение

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» предназначен для студентов первого курса специальностей 260901, 260902, 260704, 280101, 130301.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Учебно-методический комплекс дисциплины (УМКД) разработан в помощь студентам первого и второго курсов обучения. Он создан в связи с необходимостью культивирования в стенах учебного заведения полноценной среды интеллектуального, творческого общества, атмосферы нравственного самосовершенствования как преподавателей, так и студентов, необходимостью развития их самостоятельности активности, повышения математической культуры, привлечения широкого круга вопросов, касающихся работы учебного заведения, в том числе и учебного процесса, формирования и воспитания у молодежи чувства ответственности за свое будущее.

УМКД включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному образовательному стандарту, учебную программу, тематический план занятий, вопросы к экзамену и зачету, образцы контрольных работ, рекомендуемую литературу.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Цели и задачи учебной дисциплины «Математика» и ее место в учебном процессе.

1.1. Цели преподавания учебной дисциплины «Математика»

•формирование личности студента, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению;

•обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске решений.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

•на примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии других наук;

•научить студентов приемам исследования и решения, математически формализованных задач;

• выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

1.3. Перечень учебных дисциплин с указанием разделов, усвоение которых необходимо для изучения осознания учебных тем, вопросов курса «Математика».

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного, операционного исчисления, основы теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики;
- математические модели простейших систем и процессов в естествознании;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- исследование математических моделей решения прикладных задач.

1.4.После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

•основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, дискретной математики и теории множеств, функционального анализа, векторной алгебры, линейной алгебры, основы теории вероятностей; теории функции комплексного переменного, операционное исчисление;

- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы статистического оценивания и проверки гипотез.

Содержание учебной дисциплины «Математика».

Согласно государственному стандарту математических и естественных дисциплин студент должен изучить:

для специальности: 260901, 260902

- аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; Дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика: теория вероятностей, случайные процессы, статическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных; вариационное исчисление и оптимальное управление; уравнения математической физики.

для специальностей: 260704, 280101

- алгебра (основные алгебраические структуры, векторные пространства и линейные отображения, булевы алгебры);
- геометрия (аналитическая геометрия, многомерная евклидова геометрия, дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, элементы топологий); дискретная математика (логические исчисления. Графы, теория алгоритмов, языки грамматики, автоматы, комбинаторика);
- математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисления);
- элементы теории функций и функционального анализа, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения;
- вероятность и статистика (элементарная теория вероятностей, математические основы теории вероятностей, модели случайных процессов, проверка гипотез, принцип максимального правдоподобия, статистические методы обработки экспериментальных данных);
- математические методы в текстильной технологии.

для специальности 330301

- Аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля, гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика – теория вероятностей, случайные процессы статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические метолы обработки экспериментальных данных.

2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

	2 СЕМЕСТР	Лек.	Прак	С/Р
1.	**ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.** Определение, способы задания, область определения, предел, непрерывность, частные производные, полный дифференциал. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков, дифференцирование неявных функций, экстремум функции нескольких переменных. Скалярное поле, производная по направлению, градиент.	4	10	20
2.	**ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** Операционное исчисление и его применение к решению дифференциальных уравнений и систем. – задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные классы уравнений интегрируемых в квадратах. – дифференциальные уравнения высших порядков, однородные и неоднородные. Общее решение. – Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, уравнения с правой частью специального вида. – нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. – метод исключения для решения нормальной системы. Простейшие численные методы. – элементы теории устойчивости основные теоремы операционного исчисления. Преобразования Лапласа, решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом.	16	20	30
3.	**КРАТНЫЕ КРИВОЛЕНИЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ** – задачи, приводящие к понятию интеграла по фигуре, определение интеграла, свойства.	8	11	20

	– вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Двойной интеграл в полярных координатах. – вычисление тройного интеграла в декартовых, цилиндрических, сферических координатах. Приложение двойных и тройных интегралов. – криволинейные интегралы по дуге и по координатам. Свойства. Вычисление. – поверхностные интегралы по площади поверхности и координатам. Свойства. Вычисление.			
4.	**ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ** – числовые ряды. Сумма ряда, сходимость ряда, действия с рядами. – методы исследования сходимости рядов – функциональные ряды; область сходимости, степенные ряды. – разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена. – тригонометрические ряды Фурье.	6	10	16
	Итого	34	51	86

3. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

	2 СЕМЕСТР – 54 час.		
	Функции нескольких переменных – 10ч.		
1	Область определения, предел, непрерывность функций нескольких переменных.	2	
2	Частные производные и полный дифференциал первого и высших порядков.	2	
3	Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.	2	
4	Экстремумы. Метод наименьших квадратов. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.	4	КР
	Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений, операционной исчисление, его применение – 20 часов		
5	Решение дифференциальных уравнений первого порядка.	4	
6	Решение дифференциальных уравнений высших порядков	2	
7	Решение однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений.	6	
8	Решение систем линейных дифференциальных уравнений	2	

9	Оригиналы, изображения. Первообразная Лапласа. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом.	4	
10	Контрольная работа	2	КР
	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы – 11ч.		
11	Двойной интеграл, замена переменных в двойной интеграле. Вычисление объема и площади поверхности. Физическое приложение двойного интеграла.	4	
12	Тройной интеграл. Приложения тройного интеграла.	2	
13	Криволинейные интегралы по дуге и по координатам	2	
14	Поверхностные интегралы	3	КР
	Числовые и функциональные ряды – 10ч.		
15	Числовой ряд, сходимость числового ряда. Признаки сходимости.	2	
16	Функциональные ряды.	2	
17	Степенные ряды и их приложение	2	
18	Ряды Фурье и их приложения.	2	
19	Контрольная работа	2	КР

4. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ недели подготовка к	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Σ
Лекциям		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
Практическим занятиям	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	32
РГР							12					12						24
Контр работа.			2					4				4			2			14
																		86

5. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Функции нескольких переменных. Определение. Способы задания. Геометрический изображение.
2. Предел, непрерывность функций нескольких переменных.
3. Частные производные.
4. Полное приращение. Полный дифференциал.
5. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
6. Дифференцирование сложных и неявных функций.
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
8. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.
9. Производная по направлению, градиент скалярного поля.
10. Экстремумы функций нескольких переменных.
11. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
12. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка.
13. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.
14. Уравнения с раздельными и разделяющимися переменными.
15. Однородные дифференциальные уравнения.
16. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
17. Дифференциальные уравнения высших порядков:

    - уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$
    - уравнения, не содержащие явно искомой функции.
    - уравнения, не содержащие явно независимой переменной.
18. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
19. Неоднородные уравнения с правой частью специального вида.
20. Системы дифференциальных уравнений.
21. Основные теоремы операционного исчисления. Преобразования Лапласа.
22. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом.
23. Понятие фигуры, меры диаметра.
24. Задача о массе материального стержня, плоской пластины, пространственного тела.
25. Вычисление двойного интеграла, изменение порядка интегрирования.
26. Вычисление площадей и объемов с помощью двойного интеграла.

27. Двойной интеграл в полярных координатах.
28. Вычисление площади поверхности.
29. Плотность распределения вещества и двойной интеграл.
30. Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла.
31. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
32. Тройной интеграл в сферических координатах.
33. Криволинейный интеграл и его свойства и вычисление.
34. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
35. Поверхностный интеграл 1- го рода и его вычисление.
36. Поверхностный интеграл 2-го рода и его вычисление.
37. Формула Грина зависимости между двойным и криволинейным интегралом.
38. Теорема Стокса.
39. Теорема Остроградского.
40. Скалярное поле. Поверхности уровня. Градиент скалярного поля.
41. Векторное поле. Векторные линии.
42. Поток векторного поля через ориентированную поверхность.
43. Вычисление потока векторного поля методом проектирования на одну координатную плоскость.
44. Вычисление потока векторного поля методом проектирования на три координатные плоскости.
45. Числовой ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Действия с рядами.
46. Признаки сходимости числовых рядов.
47. Знакопеременные ряды.
48. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.
49. Функциональный ряд. Область сходимости функционального ряда.
50. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.
51. Свойства степенного ряда.
52. Ряд Тейлора.
53. Разложение функций в ряд Тейлора.
54. Условие сходимости ряда Тейлора к порождающей функции.
55. Применение рядов приближенных вычислениям значений функций.
56. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.

57. Ряд Фурье. Вывод формул коэффициентов.
58. Условие разложения функций в ряд Фурье.
59. Разложение в ряд Фурье периодических функций.
60. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Темы для самостоятельного изучения

1. Приближенное вычисление определенных интегралов.
2. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
3. Элементы теории устойчивости.
4. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
5. Механические приложения кратных интегралов.
6. Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов первого типа.
7. Разложение функции в степенной ряд и применение рядов.
8. Разложение функций заданных на произвольном интервале в ряд Фурье.

6. Общие рекомендации по изучению математических дисциплин

0Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

1Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно решить задачу несколькими возможными способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

1Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.
2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.
3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

1Расчетно – графические работы

1. При изучении дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд расчетно – графические работы, главная цель которых — оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное исправление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.
2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до изучения теоретического материала, соответствующего данному заданию, и решения достаточного количества задач по этому материалу. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.
3. Расчетные работы должны выполняться самостоятельно. Выполненная не самостоятельно работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Расчетно-графические работы выполняются аккуратно на одной стороне листа стандартного формата А4 либо рукописным способом, либо компьютерным (для компьютерного оформления работы рекомендуется использование пакета Microsoft Word). В любом случае необходимо приложение необходимых распечаток результатов работы компьютерных программ, которые требовалось использовать при выполнении заданий. Графики строятся либо при помощи компьютера (рекомендуется использование пакета Microsoft Excel), либо от руки (черными или цветными карандашами средней твердости на обычной или миллиметровой бумаге). Листы с текстом заданий и графики должны быть сшиты.

4. В работу должны быть включены все требуемые задания строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.

6. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.

7. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

8.Работа сдается преподавателю до защиты для проверки. При указании рецензента на требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений. На защите студент должен показать умение ставить и исследовать конкретные финансовые задачи, которые он решал при выполнении контрольных заданий.

9.Прорецензированные контрольные задания вместе со всеми исправлениями и добавлениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированного контрольного задания студент не допускается к сдаче экзамена.

1Лекции и практические занятия

Студенты очной и заочной формы обучения изучают дисциплину «Математика» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (2 ч. лекций и 2 ч. практических занятий в неделю для студентов очной формы обучения и по одному часу — для студентов, обучающихся по заочной форме). После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Если для студентов очной лекции и практические занятия являются основной формой обучения и на них подробно рассматривается большая часть теоретического материала и разбирается большое количество задач, то студент-заочник эти виды работ должен выполнять самостоятельно.

Вместе с тем, для заочников организуются установочные лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель — обратить внимание на цели и задачи дисциплины, ее место в профессиональной деятельности специалиста, заинтересовать студента изучением дисциплины, обратить внимание на схему построения курса или некоторых его наиболее важных разделов. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Экзамен

На экзамене выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Экзамен проводится в устно-письменной форме, каждый студент получает в билете три теоретических вопроса (их список приведен в разделе 5) и 6 задач. Подготовку к ответу на билет следует начинать с решения задачи, так успешное решение задачи является наиболее важным при сдаче экзамена; без ее решения работа студента признается неудовлетворительной. Затем следует подробно ответить на теоретические вопросы билета. На подготовку теоретических вопроса студенту дается не более 1 ч. На решения задач 1,5ч.

После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на повседневную серьезную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию – остается в голове всего крепче.

7. Формы контроля знаний студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает опрос студентов на практических занятиях, проверку домашних заданий, контрольные работы, выполнения и защита РГР, проведение коллоквиумов, зачеты и экзамены. Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с проверки домашнего задания, опроса по теоретическому материалу (10-15 мин.). На лекциях и практических занятиях рекомендуется проведение мини контрольных работ. Данная программа предусматривает в течении семестра проведение двух плановых контрольных работ и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнение РГР осуществляется в 2 этапа: проверка письменных отчетов и защита заданий в письменной или устной форме. Индивидуальные задания студентами выполняется по большинству тем курса. Выполнение каждого задания требует не менее 10 часов самостоятельной работы студентов.

Методика формирования результирующей оценки знаний по математики

Результатирующая оценка учитывает:

1) работу студента в течение всего периода изучения дисциплины;
2) получается на основе обобщения отдельных видов работы: работа в течении всего семестра; экзаменационная оценка за ответ по теории; экзаменационная оценка за выполнение практических заданий.
3) все оценки выставляются по пятибалльной системе;
4) для оценки относительной важности отдельных видов контроля вводиться их весовые коэффициенты:

   0,4 – для работы в течении семестра;

   0,4 – для экзаменационной оценки за теорию;

   0,2 – для экзаменационной оценки по практике.

Дробные значения оценки округляться до целых единиц.

Критерии оценок

- ОТЛИЧНО – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы; четко и правильно даны определения; корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания; ответ самостоятельный и исчерпывающий, без наводящих вопросов.
- ХОРОШО – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения и понятия, ответ самостоятельный, но допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или выводы, которые исправляться по дополнительным вопросам экзаменатора.
- УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – усвоено основное содержание учебного материала, но изложение не всегда последовательна; определение

понятий нечеткое; допущены ошибки при изложении, в использовании научных терминов, определений.

- НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программы, допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

8. Методические рекомендации профессорско-преподавательскому составу

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов (СРС) – это активны формы индивидуальной и коллективной деятельности, направленные на закрепление материала формирование умений и навыков быстро решать поставленные задачи. СРС предполагает не пассивное «поглощение» готовой информации, а ее поиск и творческое усвоение. Самостоятельная работа призвана подготовить студента к самостоятельной деятельности в будущем.

Строго говоря, все, что не является лекцией, можно отнести к практическим формам обучения. Главная функция практических занятий – организация и проведение отработки (интериоризация) учебного материала и формирование у студентов умений и навыков по применению знаний на практике, самостоятельного их приобретения и углубления.

Занятия такого типа, как правило, состоят из двух частей. Сперва проводится подготовка студентов к самостоятельной работе, затем они самостоятельно решают поставленные задачи. Эта форма занятий обеспечивает индивидуализацию обучения и способствует активизации познавательной деятельности студентов. Занятия должны быть организованны таким образом, чтобы все без исключения студенты были заняты решением посильной для них познавательной задачи. Значит, преподаватель должен хорошо знать (с позиции диагностики) индивидуальные особенности студентов. Желательно так организовать занятия, чтобы они содействовали предъявлению достаточно высоких требований к наиболее подготовленным студентам, обеспечивали их максимальное интеллектуальное развитие и в то же время создавали условия для успешного приобретения знаний и умений менее подготовленными студентами.

Аудиторные практически занятия

Преподаватель спрашивает основной теоретический материал, относящийся к данной теме либо опросом каждого студента, либо организацией математического диктанта, либо опросом доказательства теорем, вывода формул. После чего педагог предлагает студентам проделать ряд упражнений для усвоения и закрепления рассматриваемого вопроса. Студенты работают под наблюдением преподавателя, который проверяет результаты деятельности и указывает ошибки.

Все виды работы на практическом занятии оцениваются по пятибалльной системе.

Консультация – форма учебного занятия, в процессе которого студент получает ответы от преподавателя на конкретные вопросы или пояснения по соответствующим теоретическим положениям или аспектам их практического применения.

Консультация может быть индивидуальной или групповой, в зависимости от учебной ситуации: индивидуальное занятие, выполняемое студентам, может потребовать индивидуальной консультации, теоретические вопросы по учебному предмету – соответственно групповой консультации.

9. ЗАДАНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

Функции нескольких переменных

Вариант 1

1. Найти частные производные I порядка:

1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$; 2) $z = \sin(x + y)$; 3) $z = arctg\dfrac{y}{x}$; 4) $z = \ln(x + y^2)$;

5) $z = xye^{xy}$; 6) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Найти полный дифференциал: $U = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

3. Найти частные производные II порядка:

1) $z = \dfrac{x^2}{1 + 2y}$; 2) $z = \ln(x + e^{xy})$; 3) $z = arctgxy$.

4. Дана функция $U(M)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}$, M_0 (1 ; 2 ; 1) , $\vec{\ell}=\{-3;4;1\}$.

Найти: 1) $U(M_0)$; 2) $\frac{\partial U}{\partial \vec{\ell}}\Big|_{M_0}$; 3) $\left|\vec{gradU}\Big|_{M_0}\right|$;

Вариант 2

1. Найти частные производные I порядка:

1) $z=\frac{xy}{x-y}$; 2) $z=x^2y^3-x^3y^2$; 3) $z=e^{xy}$; 4) $z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$;

5) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 6) $z=arctg\frac{y}{1+x^2}$.

2.Найти полный дифференциал: $U=e^{xyz}$

3.Найти частные производные II порядка: 1) $z=xe^y$; 2) $z=x^{2y}$;

3) $z=e^x(\sin y+x\cos y)$.

4. Дана функция $U(M)=2x^2+y^2+z^2, M_0(1;-1;1), \vec{\ell}\{2;0;1\}$.

Найти: 1) $U(M_0)$, 2) $\frac{\partial U}{\partial \vec{\ell}}\Big|_{M_0}$; 3); $\left|\vec{gradU}\Big|_{M_0}\right|$

Вариант 3

1. Дана функция $u=xy^2 - z^3$. Найти:

а) координаты вектора *grad u* в точке М(1,2,1);

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора $a\{2,3,6\}$.

2. Доказать, что функция $z=sin\ (z+ay)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

3. Функция z = z(x,y) задана неявно уравнением

$xz^2 - x^2y + y^2z + 2x - y = 0$. Вычислить: а) $\frac{\partial z}{\partial x}$ (0,1); б) $\frac{\partial z}{\partial y}$ (0,1).

4. Показать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$ удовлетворяет условию

$$Z''_{xx} + Z''_{yy} = 0$$

Дифференциальные уравнения

Вариант 1

Решить дифференциальные уравнения:

1) $\ln\cos y dx + xtgy dy = 0$ **;**

2) $xy'\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y\sin\left(\frac{y}{x}\right)$;

3) $xy' - y = x^2\cos x$;

4) $(x - 5)y'' + y' = 0$;

5) $y''' = \sqrt[3]{x^2} - 6x$;

6) $y'^{\vee} - 2y''' + 2y'' = 0$;

7) $y'' + 25y = x + 2$.

Вариант 2

Решить дифференциальные уравнения:

1) $e^{1+x^2} tgy dx - \frac{e^{2x}}{x-1}dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{2}$;

2) $xy'\ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$;

3) $y'\cos x + y = 1 - \sin x$;

4) $y'' - \frac{y'}{x} = 0$;

5) $y''' = 2\sin 3x + \frac{1}{2}x^2$;

6) $y'^{\vee} - 36y'' = 0$; ;

7) $y'' - 4y' + 4y = \cos 5x + \sin 5x$;

Вариант 3

Решить дифференциальные уравнения:

1) $\frac{y}{y'} = \ln y, y(2) = 1$;

2) $xyy' = y^2 + 2x^3$;

3) $(1 + x^2)y' + y = arctgx$;

4) $y'' - 6y = 0$;

5) $y''' = \ln x - \cos\frac{x}{4}$;

6) $y''' - 25y' = 0$;

7) $y'' - 2y' + 10y = e^x$.

Вариант 4

Решить дифференциальные уравнения:

1) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0;$

2) $y'=\frac{y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x}\right);$

3) $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x;$

4) $y''\left(e^{2x}+2\right)+y'=0;$

5) $y'''=tgx+x^3-5;$

6) $y^{V}+5y''+4y=0;$

7) $y''-6y'+8y=2x^2+3x+1;$

Вариант 5

Решить дифференциальные уравнения:

1) $xyy'=1-x^2;$

2) $xy'-y=\frac{x}{arctg\left(\frac{y}{x}\right)};$

3) $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x;$

4) $xy''+y'=x^2;$

5) $y'''=e^{\frac{x}{2}}-2^{2x};$

6) $y^{V}+81y'''=0;$

7) $y''+3y'-10y=xe^{-3x}.$

Вариант 6

Решить дифференциальные уравнения:

1) $(x+1)y'+xy=0;$

2) $xy'=2\left(y-\sqrt{xy}\right);$

3) $y'\sin x-y\cos x=1;$

4) $3xy''=y';$

5) $y'''=\sqrt{x}-3x^3;$

6) $3y'''+2y''+2y'=0;$

7) $y''+y=\cos 2x.$

Кратные интегралы

Вариант 1

1. Вычислить $\iint\limits_D xydxdy,$ где $D: x+y=1, x=0, y=0$.

2. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{4}f(x,y)\,dy$.

3. Вычислить в полярной системе координат $\iint\limits_{Д} xydxdy,$ где $D: x^2 + y^2 = 2y$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x = 3, \quad y = 2, \quad x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.
5. Вычислить $\int\limits_{L} xy^2dx + 3x\,dy,$ вдоль линии $y = x^2, 0 < x < 1$.

Вариант 2

1. Вычислить $\iint\limits_{D} (4x + y)dxdy,$, где $x + y = -2, x = 0, y = 0$.
2. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{4-y} f(x, y)\,dx$.
3. Вычислить в полярной системе координат $\iint\limits_{D} xydxdy,$ где $D: x^2 + y^2 = 2$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x = 2, \quad y = 3, \quad x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.
5. Вычислить $\int\limits_{L} y(x - y)dx + x\,dy,$ вдоль линии $y = 2x,\ 0 < x < 3$.

Вариант 3

1. Вычислить $\iint\limits_{D} (x + y)dxdy,$, где $D: x - y = 1,\ x = 0, y = 0$.
2. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x, y)\,dx$.
3. Вычислить в полярной системе координат $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy,$ где $D: x^2 + y^2 = 4y$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x = 2, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y + z, \ z = 0.$.

5. Вычислить $\int\limits_L (x-2y)dx+(x+y)\,dy,$ вдоль линии $y^2=x, -4\le x\le 4.$

Варианты типового расчета

«Дифференциальные уравнения»

1. Найти частное решение уравнения. $(1+x)yy' = 2x$ при $y(0) = 1$

2. Найти общее решение уравнений: а) $y'x = y\ln\frac{y}{x}$; б) $y' + y = \frac{\ell^{-x}}{1-x}$;

   в) $y'' + y'tgx = \cos^3 x$.

3. Найти частное решение уравнения $2yy'' - (y')^2 = 0$ при $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

4. Найти общее решение уравнений.

$а) y''' = 6x + \cos 3x;$ $б) y'' + 4y' + 5y' = 0.$

5. Найти частное решение уравнения.

$y'' + y' + y = \sin x$ при $y(0) = 0, y'(0) = 0.$

6. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных. $y'' + 4y' + 4y = \frac{xe^{-2x}}{x^2+4}.$

7. Найти общее решение системы. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y. \end{cases}$

8. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. В комнате, где температура 20°С, тело остыло за 20 минут от 100°С до 10°С. Через сколько минут оно остынет до 30°С.

9. Найти кривую, проходящую через точку А (3;3), если подкасательная в любой точке её равна абсциссе удвоенной точки касания.

«Операционное исчисление»

1. Найти изображение функций.

$а)\ 2 - t^2 - 4t^5;$

$б)\ 11e^{-\frac{t}{6}} - 2e^{5t};$

$в)\ 4\sin 2t - \frac{1}{5}\cos\frac{t}{2;}$

$г)\ e^{-6t}\sin\frac{t}{5} - 3e^{3t}\cos 7t;$

$д)\ t^4 e^{-4t} - \frac{1}{5}t^2 e^{\frac{t}{2}};$

$е)\ e^{\frac{t}{2}} sh5t - 3e^{4t} ch4t.$

2. Найти оригиналы функций.

$а)\ \frac{7}{p-8} + \frac{5p}{p^2+2},$

$б)\ \frac{6}{(p+2)^3} - \frac{2}{(p-3)^4},$

$в)\ \frac{3p}{p^2-2} + \frac{5}{p^2+100},$

$г)\ \frac{3p+1}{p^2+2p-3} + \frac{4}{p^2+10p+29},$

$д)\ \frac{1}{(p^2+1)(p^2-1)},$

$е)\ \frac{4}{p^2(p-1)(p+2)}.$

3. Найти частные решение однородных дифференциальных уравнений.

$а) y'' + 3y' - 4y = 0$ при $y(0) = 0, y'(0) = 1,$

$б) y'' - 2y' = e^{2t}$ при $y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4. Решить системы.

$а) \begin{cases} x' - 2x + 6y = 0, \\ y' + 3y + x = 0. \end{cases}$ при $x(0) = 2, y(0) = -1.$

$б) \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 4x + 2y + t. \end{cases}$ при $x(0) = 1, y(0) = 0.$

10. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1. Функции нескольких переменных. Определение, способы задания, область определения, предел, непрерывность, частные производные, полный дифференциал.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

<u>Определение:</u> Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

<u>Определение:</u> Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

<u>Определение:</u> **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

<u>Определение:</u> **Окрестностью точки** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$.

<u>Определение:</u> Число A называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие $MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

<u>Определение:</u> Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство. Если функция $f(x, y, \ldots)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство $f(x_0, y_0, \ldots) \geq f(x, y, \ldots)$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \leq f(x, y, \ldots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – **наименьшее значение** функции $f(x, y, \ldots)$ в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство. Если функция $f(x, y, \ldots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка $N_0(x_0, y_0, \ldots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \ldots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство. Функция $f(x, y, \ldots)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число K, что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, \ldots)| < K$.

Свойство. Если функция $f(x, y, \ldots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число $\Delta > 0$, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$.

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

<u>**Определение.**</u> Выражение $\Delta z = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$

называется **полным приращением** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

<u>**Определение:**</u> **Полным дифференциалом** функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,\ldots,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

<u>Пример</u>. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

<u>Пример.</u> Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

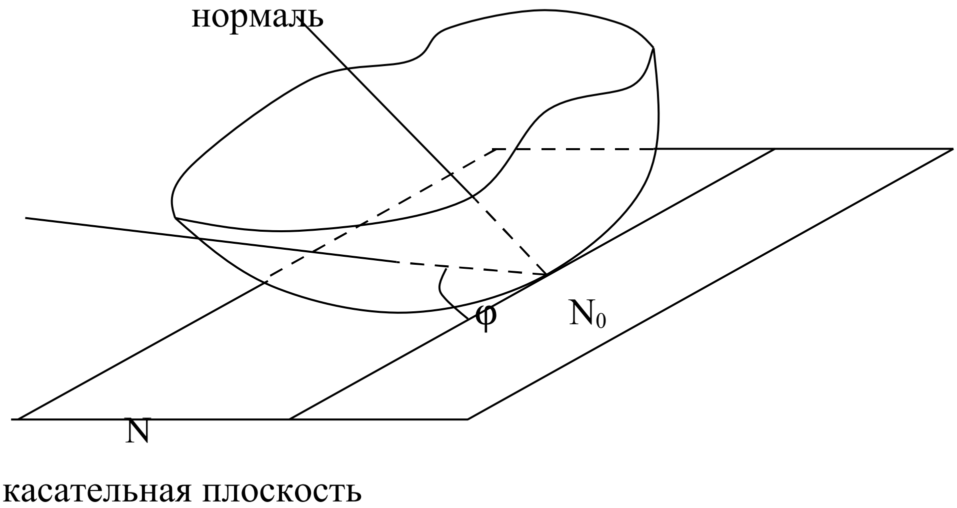
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy.$$

Геометрический смысл полного дифференциала.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Определение. **Нормалью** к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_{0,}(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости: $z - 1 = -(x-1) + 2(y-1); \qquad x - 2y + z = 0;$

Уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1};$

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение $\Delta z \approx dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Из заданного выражения определим Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = -0,01, Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \dfrac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$;

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1,2,1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

Лекция 2. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных, условный экстремум. Скалярное поле, производная по направлению, градиент.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

<u>Определение.</u> Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

<u>Теорема.</u> Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)$$

$$d^2 z = d\left[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy\right] = f''_{x^2}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)(dy)^2$$

$$d^3 z = f'''_{x^3}(x, y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2 y}(x, y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}(x, y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x, y)(dy)^3$$

…………………

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$f(x_0, y_0) < f(x, y)$ то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение: $D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.
2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение φ(x, y) = 0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)). $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

В точках экстремума: $$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

Кроме того: $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ называется **функцией Лагранжа.**

Пример. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases}y + 2\lambda = 0\\ x + 3\lambda = 0\\ 2x + 3y - 5 = 0\end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

Производная по направлению.

Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Пусть функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$, где величины ε_1, ε_2, ε_3 – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_2\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

<u>**Определение:**</u> Предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции u(x, y, z) по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

<u>Пример.</u> Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B (3, 0).

<u>Решение.</u> Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(3\text{-}1;\ 0\text{-}2) = (2;\ -2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}\ .$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке А : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Связь градиента с производной по направлению.

Теорема: *Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов*

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\vec{S}$ *равняется проекции вектора grad u на вектор* $\vec{S}$.

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *grad u*.

$$grad u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s.

Т.е. $grad\, u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *grad u* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|grad\, u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

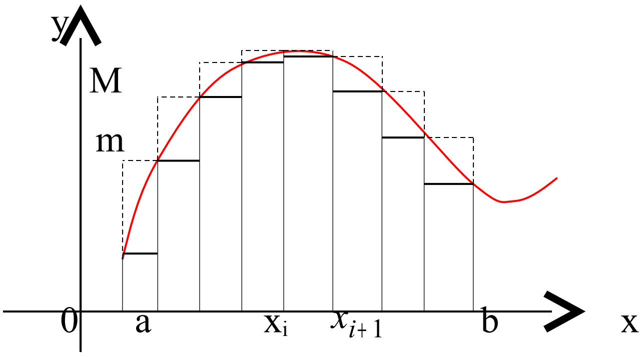
Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *grad u* на вектор $\vec{S}$.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Лекция 3. Задачи приводящие к понятию определенного интеграла, определение интеграла, свойства, приближенное вычисление интеграла. Формула Ньютона-Лейбница методы интегрирования.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы: $\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad \underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим *max*Δx_i – наибольший отрезок разбиения, а *min*Δx_i – наименьший. Если *max*$\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

__Определение:__ Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что *max*$\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$ a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

__Определение:__ Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

__Теорема:__ Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

<u>Свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$ 2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$;

3) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

4) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

5) **<u>Теорема о среднем.</u>** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 9) $\int_a^a f(x)dx = 0$.

<u>Вычисление определенного интеграла.</u>

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Ф(x). Найдем производную функции Ф(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

<u>Теорема:</u> Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

<u>Теорема:</u> (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда, если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \begin{Bmatrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{Bmatrix} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется «близкой» к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках $x_0, x_1, \dots, x_m$, то в качестве функции "близкой" к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках. $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \dots,\ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x$

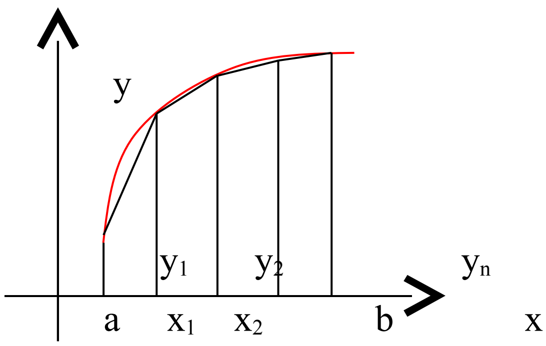
$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \dots + y_n\Delta x$$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Формула трапеций.



Эта формула является более точной по сравнению с формулой прямоугольников. Подинтегральная функция в этом случае заменяется на вписанную ломаную.

Геометрически площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей вписанных трапеций. Очевидно, что чем больше взять точек n разбиения интервала, тем с большей точностью будет вычислен интеграл.

Площади вписанных трапеций вычисляются по формулам:

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x;\quad \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x;\quad \ldots\quad ,\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

После приведения подобных слагаемых получаем **формулу трапеций**:

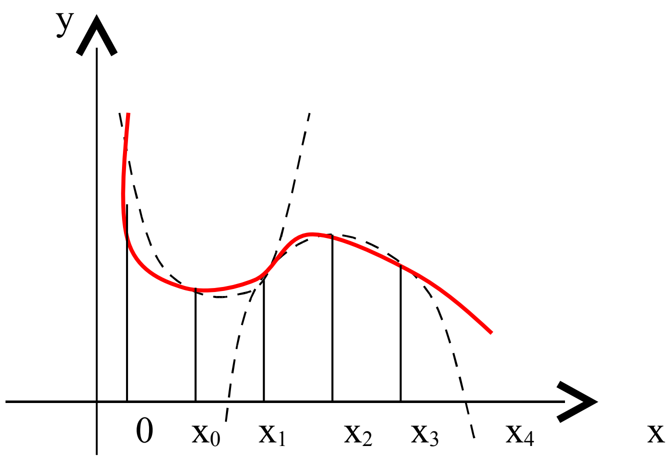
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$$

Формула парабол (формула Симпсона или квадратурная формула).

(Томас Симпсон (1710-1761)- английский математик)

Разделим отрезок интегрирования [a, b] на четное число отрезков (2m). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x) заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси Оу и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.



Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \qquad (1) \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned}$$

Обозначим $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right]\Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

Если принять $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, то $S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$ (2)

Тогда уравнения значений функции (1) имеют вид:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

С учетом этого: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Отсюда уравнение (2) примет вид: $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

Складывая эти выражения, получаем **формулу Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})\right]$$

Чем больше взять число m, тем более точное значение интеграла будет получено.

Пример. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

По формуле Симпсона получим:

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) +$$
$$+ y(3) + y(5) + y(7)]].$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	2.828	3.873	4	4.123	4.899	6.557	8.944	11.874	15.232	18.947	22.978

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2.828+22.978+2[4+4.899+8.944+15.232]+4[3.873+4.123+$$

$$+6.557+11.874+18.947]]=91.151$$

Точное значение этого интеграла – 91.173.

Как видно, даже при сравнительно большом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная.

Для сравнения применим к этой же задаче формулу трапеций.

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)=\frac{8+2}{10}\left(\frac{2.828+22.978}{2}+3.873+4+\right.$$

$$\left.+4.123+4.899+6.557+8.944+11.874+15.232+18.947\right)=91.352$$

Формула трапеций дала менее точный результат по сравнению с формулой Симпсона.

Лекция 4. Несобственные интегралы. Геометрические приложения определенного интеграла.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

Определение: Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции f(x) на интервале [a, ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^\infty f(x)dx$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида: $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Пример.

$$\int_{0}^{\infty} \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \cos x dx = \lim_{b\to\infty} \sin x\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty} \sin b$$ - не существует.

Несобственный интеграл расходится.

Пример.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_{b}^{-1} = \lim_{b\to-\infty}\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1$$ - интеграл сходится

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ тоже сходится и $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx \ge \int_{a}^{\infty} f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_{a}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

Интеграл от разрывной функции.

Если в точке x = c функция либо неопределенна, либо разрывна, то

$$\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_{a}^{c} f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ не существует, то $\int_{a}^{c} f(x)dx$ - расходится.

Если в точке x = a функция терпит разрыв, то $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b \to a+0} \int\limits_b^c f(x)dx$.

Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

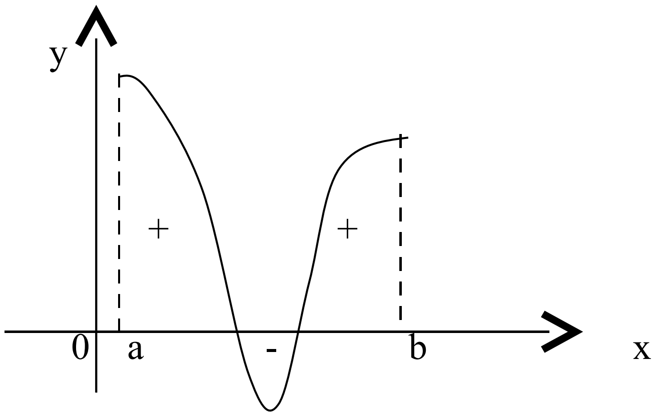
$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

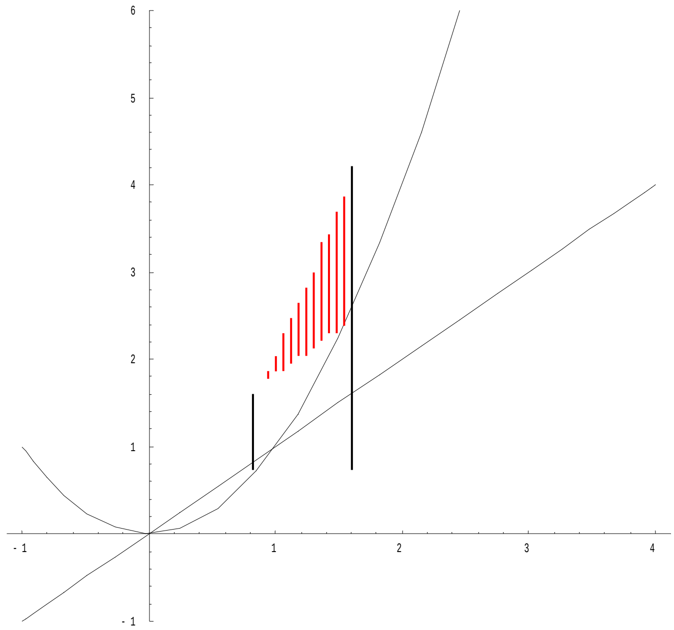


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left| \int\limits_a^b f(x)dx \right|$.

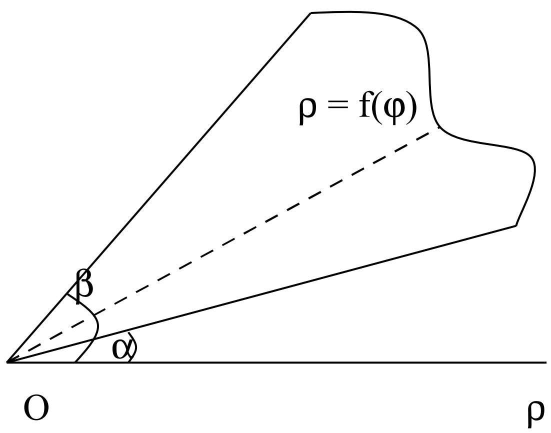
Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = x, $y = x^2$, x = 2.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле: $S = \int\limits_1^2 x^2 dx - \int\limits_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$(ед^2)

<u>Нахождение площади криволинейного сектора.</u>

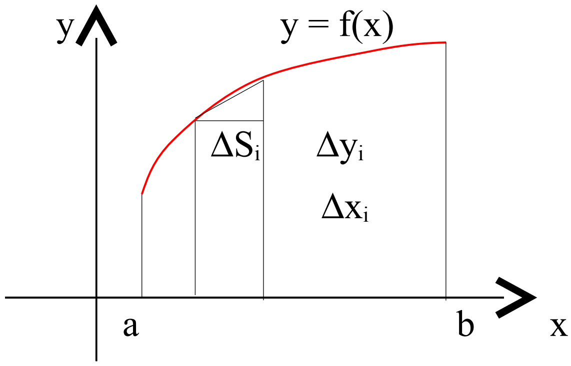


Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид ρ = f(φ), где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi \ .$$

<u>Вычисление длины дуги кривой.</u>



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать, что $S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, т.е.

$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Если уравнение кривой задано параметрическими уравнениями, то с учетом правил вычисления производной параметрических заданных функции, получаем $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$, где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$, ρ = f(φ).

<u>Пример:</u> Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную у. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ Тогда

$$\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = r \cdot \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}$$

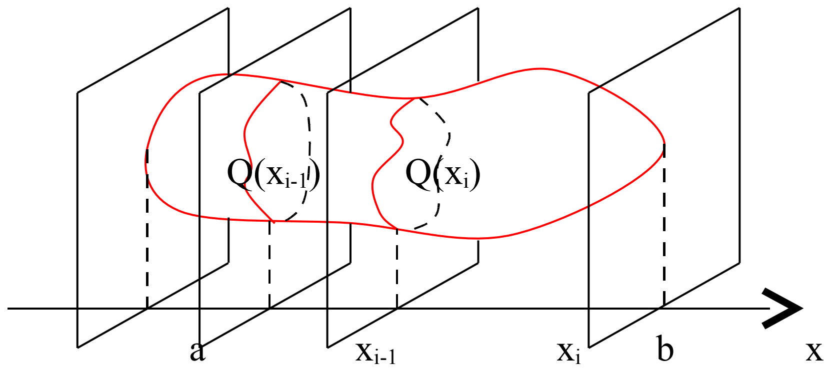
Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция $\rho = f(\varphi) = r$, $\rho' = \dfrac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}d\varphi = r\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$$

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на "слои" поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

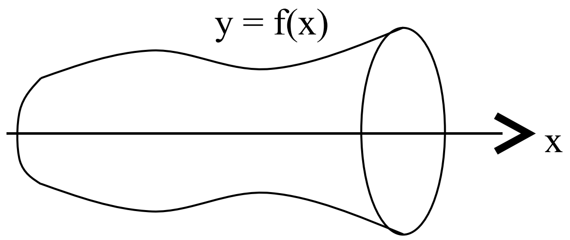
Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел: $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int\limits_a^b Q(x)dx$. Таким образом, объем тела может быть найден по формуле: $V = \int\limits_a^b Q(x)dx$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

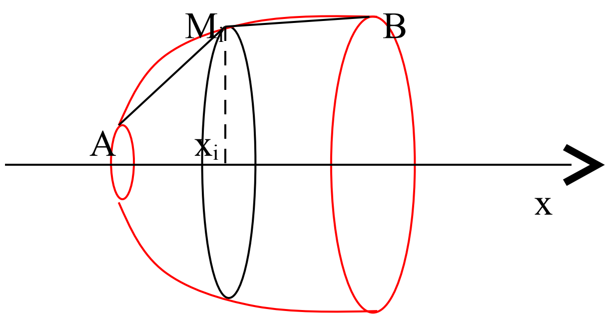
Объем тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле: $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

Площадь поверхности тела вращения.



Определение: Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

$S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

Лекция 5. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными.

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле: $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V,* которая также является производной по времени *t* от перемещения *S.* т.е. $V = \frac{dS}{dt}$; $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$;

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

<u>Определение.</u> Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x,C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C=C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = φ(x, C_0)$.

<u>Определение.</u> Решение вида $y = φ(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

<u>Определение.</u> Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = φ(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

<u>Теорема Коши.</u> (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$*, то какова бы не была точка* (x_0, y_0) *в области D, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$*, определенное в некотором интервале,* *содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.*

<u>**Определение.**</u> **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0; \; xdy = -ydx; \; \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};$$

Теперь интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$; $\ln y = -\ln x + C_0$; $\ln y + \ln x = C_0$; $\ln xy = C_0$;

$xy = e^{C_0} = C$; $y = \frac{C}{x}$ - это общее решение дифференциального уравнения.

При, заданных начальных условиях: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, имеем $2 = \frac{C}{1}$; $C = 2$.

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши). $y = \frac{2}{x}$

<u>**Определение.**</u> **Интегральной кривой** называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

<u>**Определение.**</u> **Особым решением** дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши (см. Теорема Коши.) не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида: $F(x, y, y') = 0$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида *y' = f(x).*

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде $y' = \alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \dfrac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0$; $\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$; $y\cos y \cdot \dfrac{dy}{dx} = -2x$; $y\cos y dy = -2xdx$; $\int y\cos y dy = -2\int xdx$

$$\int y\cos y dy = \left\{\begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix}\right\} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C, \ y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$\dfrac{dy}{y^2+1} = dx$; $\quad \int \dfrac{dy}{y^2+1} = \int dx$; $arctgy = \dfrac{x^2}{2} + C$; $\quad y = tg\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$;

Лекция 6. Дифференциальные уравнения первого порядка. Однородные уравнения. Линейные уравнения.

Однородные уравнения.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов х и у, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество: $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \dfrac{1}{x}$.

Получаем: $f(x,y) = f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \dfrac{y}{x}$, т.е. $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = \varphi(u)$;

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u);\quad u'x + u = \varphi(u);\quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{\varphi(u) - u} = \int\frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u = \frac{y}{x};\quad y = ux;\quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\dfrac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1);\quad u'x + u = u\ln u + u;\quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x}$;

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$; $\ln u = Cx$; $u = e^{Cx}$;

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

<u>Уравнения, приводящиеся к однородным.</u>

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой $x = u + \alpha$; $y = v + \beta$; где α и β - решения системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.

Получаем $(x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3}$;

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases}$;

Применяем подстановку $x = u - 1/5$; $y = v + 7/5$; в исходное уравнение:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$

$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0;$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u}=t; \quad v=ut; \quad v'=t'u+t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем: $t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{du}u=\frac{2+t}{2t-1}-t=\frac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$

$$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2}; \; -\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln|u|+\ln C_1;$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right|=-2\ln|C_1u|; \quad \ln\left|1+t-t^2\right|=\ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2=\frac{C_2}{u^2};$$

Переходя к первоначальной функции у и переменной х, получим выражение $x^2-x+xy+3y-y^2=C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax+by=t.$$

Линейные уравнения.

<u>**Определение.**</u> Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде: $y'+P(x)y=Q(x),$ при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b. Линейные решаются подстановкой $y=u\cdot v,\ y'=u'v+v'u$. Подставляя y и y' в дифференциальное уравнение получим систему $\begin{cases} v'+p(x)v=0 \\ u'v=Q(x) \end{cases}.$

Решение которой позволяет найти $y = u \cdot v$.

<u>Уравнение Бернулли.</u>

<u>**Определение.**</u> **Уравнением Бернулли** называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n. $\dfrac{y'}{y^n} + P\dfrac{1}{y^{n-1}} = Q;$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\dfrac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\dfrac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q; \quad z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int Pdx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx}dx + C\right), \quad Q_1 = -(n-1)Q; \quad P_1 = -(n-1)P.$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Разделим уравнение на xy^2: $\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \ln x.$

Полагаем $z = \dfrac{1}{y}; \quad z' = -\dfrac{y'}{y^2}. \quad -z' + \dfrac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \dfrac{1}{x}z = -\ln x$.

Полагаем $P = -\dfrac{1}{x}, \quad Q = -\ln x.$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}}dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x}dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем: $\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$.

<u>**Определение.**</u> Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется **полем направлений.**

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

<u>**Определение.**</u> Линии равного наклона в поле направлений называются **изоклинами**.

Лекция 7. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные определения. Однородные и неоднородные. Общее решение.

<u>Дифференциальные уравнения высших порядков.</u>

<u>**Определение.**</u> **Дифференциальным уравнением порядка *n*** называется уравнение вида: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

<u>**Определение.**</u> Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$*, то какова бы не была точка (* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$*, определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0*, удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

……………………………………………………………

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ при $x_0 = 0;\ y_0 = 1,\ y_0' = -1;\quad y_0'' = 0.$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;\ y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия: $1 = \frac{1}{8} + C_3;\quad -1 = \frac{1}{4} + C_2;\quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$

$$C_1 = -\frac{1}{2};\quad C_2 = -\frac{5}{4};\quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной: $y^{(k)} = z;\quad y^{(k+1)} = z';\quad ...\quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi\ (x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем: $y^{(k)} = \psi\ (x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ: $y = \varphi\ (x, C_1, C_2, ..., C_n).$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y'';\quad z' = y''';$

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем: $y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2;$

$$y = \int\left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right)dx = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения: $y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной *x* кроме значения *x =0*.

<u>Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.</u>

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \quad \text{и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем: $F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ – совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Замена переменной: $p = y'; \qquad y'' = \frac{dp}{dy}p;$

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2-4yp=0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy}-p-4y\right)=0;$$

1) $y\frac{dp}{dy}-p-4y=0; \qquad \frac{dp}{dy}=4+\frac{p}{y};$

Пусть $u=\frac{p}{y}.$ $u+\frac{du}{dy}y=4+u; \qquad du=4\frac{dy}{y};$

$\int du=4\int\frac{dy}{y}; \qquad u=4\ln|y|+4\ln C_1; \qquad u=4\ln|C_1y|;$ $p=4y\ln|C_1y|;$

С учетом того, что $p=\frac{dy}{dx}$, получаем: $\frac{dy}{dx}=4y\ln|C_1y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1y|}=\int dx;$

$$x=\frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1y|)}{\ln|C_1y|}=\frac{1}{4}\ln|\ln|C_1y||+C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln|\ln|C_1y||=4x+C;$

2) $p=0; \qquad y'=0; \qquad y=C;$

Таким образом, получили два общих решения.

Лекция 8. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, уравнения с правой частью специального вида.

Определение. **Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка** называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=f(x);$$

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим *L(y)*.

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=L(y);$$

Определение. Если $f(x)=0$, то уравнение $L(y)=0$ называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x)\neq 0$, то уравнение $L(y)=f(x)$ называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y)=f(x)$ называется **линейным**

дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

<u>**Определение.**</u> Выражение $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется **линейным дифференциальным оператором**.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами: 1) $L(Cy) = CL(y)$; 2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

<u>Структура общего решения.</u>

<u>Определение.</u> Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения *n* –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система *n* линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

<u>Определение.</u> Если из функций y_i составить определитель *n* – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

<u>Теорема.</u> *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

<u>Теорема.</u> *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.*

<u>Теорема.</u> *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.*

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, где C_i –постоянные коэффициенты.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

<u>Теорема.</u> *Если задано уравнение вида* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *и известно одно ненулевое решение y = y_1, то общее решение может быть найдено по формуле*:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1.$$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const.$

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx}F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0,$ то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени *n*, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет *n* корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов *k* характеристическое уравнение может иметь либо *n* различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений: $e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{kx}$.

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример. Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0$;

$(k-1)(k^2+k+1) = 0; \quad k_1 = 1; \quad k^2+k+1 = 0; D = 1-4 = -3; \quad k_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad k_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

Общее решение имеет вид: $y = C_1e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$ *в некоторой области есть сумма* ***любого*** *его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

Лекция 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ - многочлен степени m.

Тогда частное решение ищется в виде: $y = x^r e^{\alpha x}Q(x)$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y''' - 4y' = x$.

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' - 4y' = 0$.

$k^3 - 4k = 0; \quad k(k^2 - 4) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = -2; \; y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x};$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

$$P(x) = x; \quad \alpha = 0.$$

Частное решение ищем в виде: $y = x^r e^{\alpha x}Q(x)$, где $r = 1; \quad \alpha = 0; \quad Q(x) = Ax + B.$

Т.е. $y = Ax^2 + Bx.$

Теперь определим неизвестные коэффициенты *A* и *B*.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A; \quad y''' = 0;$$

$$0 - 8Ax - 4B = x; \quad -8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8}; \quad B = 0;$$

Итого, частное решение: $y = -\dfrac{x^2}{8}.$

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения: $y = -\frac{x^2}{8} + C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$.

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m- большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений $L(y) = f_1(x)$ и $L(y) = f_2(x)$

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm i$;

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x}Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0$, $r = 0, Q(x) = Ax + B$; Т.е. $y_1 = Ax + B$;

$$y_1' = A; \quad y_1'' = 0; \quad Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x$;

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x)=0;\quad P_2(x)=-1;\quad \alpha=0;\quad \beta=2;\quad r=0;$

Таким образом, $y_2=C\cos 2x+D\sin 2x;$

$$y_2'=-2C\sin 2x+2D\cos 2x;$$

$$y_2''=-4C2\cos x-4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x-4D\sin 2x+C\cos 2x+D\sin 2x=-\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x-3D\sin 2x=-\sin 2x$$

$$A=0;\quad B=\frac{1}{3};$$

$$\text{Итого: } y_2=\frac{1}{3}\sin 2x;$$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y=y_1+y_2=\frac{1}{3}\sin 2x+x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y=\frac{1}{3}\sin 2x+x+C_1\cos x+C_2\sin x;$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

Пример. Решить уравнение $y''-2y'+y=3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения: $k^2-2k+1-0;\qquad k_1=k_2=1;$

Общее решение однородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y=x^re^{\alpha x}Q(x);\ \alpha=1;\quad r=2;\quad Q(x)=C;\ y=Cx^2e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y'=2Cxe^x+Cx^2e^x;\qquad y''=2Ce^x+2Cxe^x+2Cxe^x+Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x+4Cxe^x+Cx^2e^x-4Cxe^x-2Cx^2e^x+Cx^2e^x=3e^x.\ 2C=3;\qquad C=\frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y=\frac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}x^2e^x$.

Лекция 10. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где x- независимая переменная, $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема. (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, ..., y_n$, *то для любой точки* $(x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ *этой области существует единственное решение* $y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$ *системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки* x_0 *и удовлетворяющее начальным условиям* $x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Определение. **Общим решением** системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, ... $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

<u>**Определение.**</u> Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u, \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u, \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u. \end{cases} \qquad (2)$$

Решения системы (2) обладают следующими свойствами:

1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu , где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (2):

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$

$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$

$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (2):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$

$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$

$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений: $\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

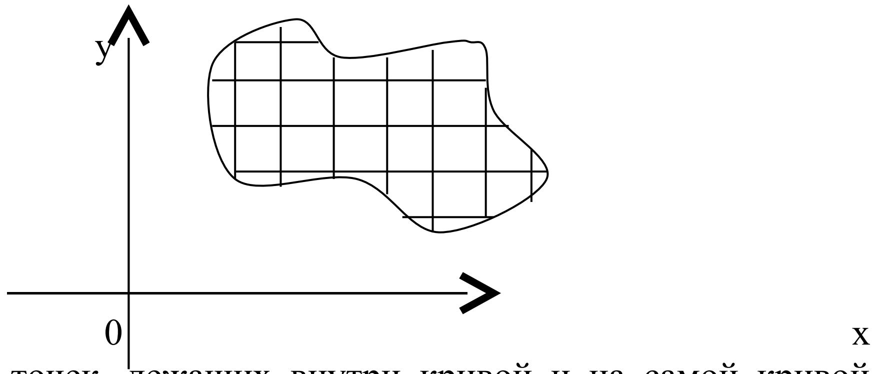
Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Лекция 11. Кратные интегралы.

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производится неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов. Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения двойных интегралов.

Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и

составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$; где f – функция непрерывная и

однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

<u>Определение:</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ

интегральные суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел

называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum_{\Delta}\sum f(x,y)\Delta y\Delta x$$

<u>Условия существования двойного интеграла.</u>

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ *существует.*

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ *существует.*

<u>Свойства двойного интеграла.</u>

1) $\iint_{\Delta}\left[f_1(x,y) + f_2(x,y) - f_3(x,y)\right]dydx = \iint_{\Delta} f_1(x,y)dydx + \iint_{\Delta} f_2(x,y)dydx - \iint_{\Delta} f_3(x,y)dydx$

2) $\iint_{\Delta} kf(x,y)dydx = k\iint_{\Delta} f(x,y)dydx$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то $\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = \iint_{\Delta_1} f(x,y)dydx + \iint_{\Delta_2} f(x,y)dydx$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx = f(x_0,y_0)\cdot S$$

5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx \ge 0$.

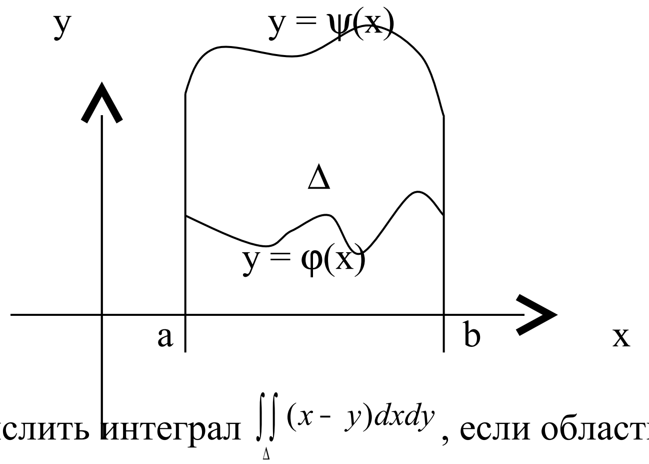
6) Если $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то $\iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)dydx \le \iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)dydx$.

7) $\left|\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx\right| \le \iint\limits_{\Delta} |f(x,y)|dydx$.

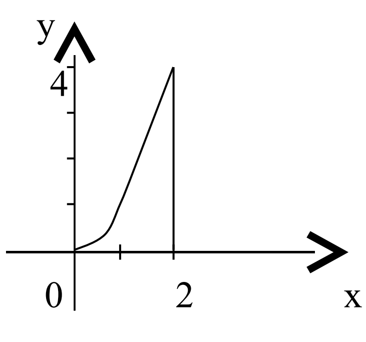
Вычисление двойного интеграла.

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и*

φ ≤ ψ, тогда $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$



Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x - y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, $y = x^2$, x = 2.



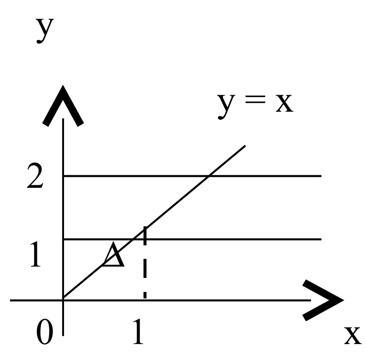
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x-y)dy = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 =$$

$4 - 3{,}2 = 0{,}8$

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2 + y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



$$\iint\limits_{\Delta}(x^2 + y^2)dxdy = \int_1^2 dy \int_0^x (x^2 + y^2)dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_0^y dy = \int_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y)dx = \int_0^2 (x^3 - yx^2 + yx)\Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

Замена переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx$, где переменная x изменяется в пределах от a до b, а переменная y – от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

Положим $x = f(u, v)$; $y = \varphi(u, v)$

Тогда $dx = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$; $dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv$; $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy$

т.к. при первом интегрировании переменная x принимается за постоянную, то dx = 0.

$$\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0, \text{ т.е. } du = -\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\cdot dv$$

подставляя это выражение в записанное выше соотношение для dy, получаем:

$$dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}}\cdot dv$$

Выражение $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = |i|$ называется **определителем Якоби** или **Якобианом** функций f(u, v) и φ(u, v).

(Якоби Карл Густав Якоб – (1804-1851) – немецкий математик)

Тогда $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F(f(x,y),\varphi(x,y))\cdot\frac{|i|}{\partial f/du}dv$

Т.к. при первом интегрировании приведенное выше выражение для dx принимает вид $dx = \frac{\partial f}{\partial u}du$ (при первом интегрировании полагаем v = const, dv = 0), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{V_1}^{V_2} dv \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u,v),\varphi(u,v)) \cdot |i| \cdot du$$

Двойной интеграл в полярных координатах.

Воспользуемся формулой замены переменных:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))|i|dudv$$

При этом известно, что $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

В этом случае Якобиан имеет вид: $|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin\theta = \rho$

Тогда $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tau} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$

Здесь τ - новая область значений, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = arctg\dfrac{y}{x}$;

Лекция 12. Тройной интеграл.

При рассмотрении тройного интеграла не будем подробно останавливаться на всех тех теоретических выкладках, которые были детально разобраны применительно к двойному интегралу, т.к. существенных различий между ними нет.

Единственное отличие заключается в том, что при нахождении тройного интеграла интегрирование ведется не по двум, а по трем переменным, а областью интегрирования является не часть плоскости, а некоторая область в трехмерном пространстве.

$$\iiint\limits_{r} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0 \\ \Delta z\to 0}} \sum\sum_{v}\sum f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Суммирование производится по области v, которая ограничена некоторой поверхностью φ(x, y, z) = 0.

$$\iiint_r f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dzdydx$$

Здесь x_1 и x_2 – постоянные величины, y_1 и y_2 – могут быть некоторыми функциями от x или постоянными величинами, z_1 и z_2 – могут быть функциями от x и y или постоянными величинами.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{xy} x^2 yzdzdydx$

$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{xy} x^2 yzdzdydx = \int_0^1\int_0^{x^2} x^2 y\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}\right)dydx = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{x^2} x^2 yx^2y^2dydx = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{x^2} x^4y^3dydx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^4x^8}{4}dx = \frac{1}{8}\int_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{13}x^{13}\Big|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

Замена переменных в тройном интеграле.

Операция замены переменных в тройном интеграле аналогична соответствующей операции для двойного интеграла.

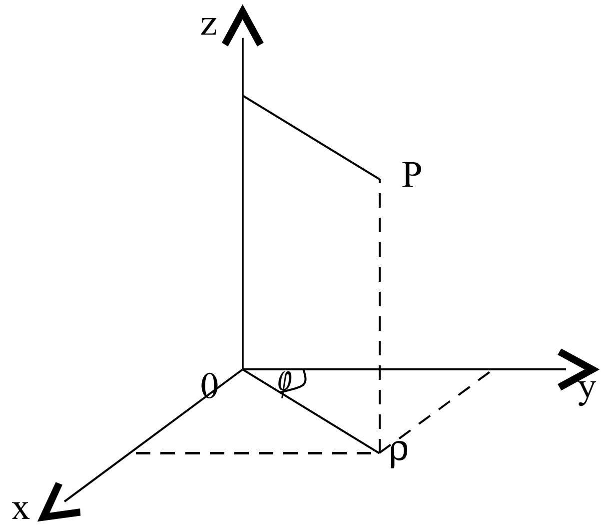
Можно записать:

$$\iiint_r F(x,y,z)dxdydz = \iiint_\tau F(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w))\cdot|i|\cdot dudvdw$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Наиболее часто к замене переменной в тройном интеграле прибегают с целью перейти от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической или сферической системе.

Цилиндрическая система координат.

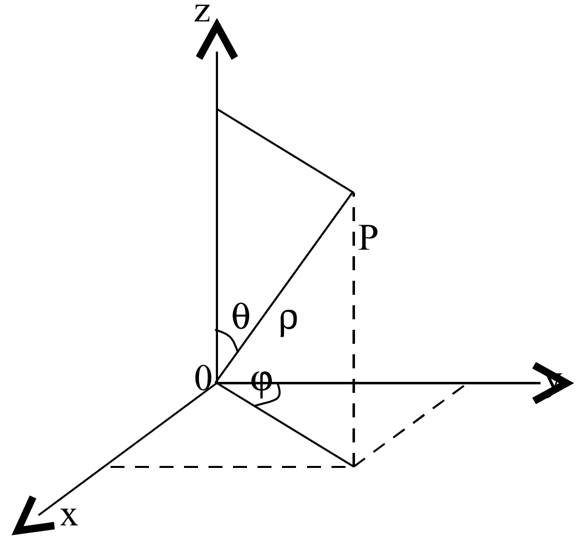


Связь координат произвольной точки P пространства в цилиндрической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется

по формулам: $\begin{cases} x = \rho\ \cos\theta \\ y = \rho\ \sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = arctg\dfrac{y}{x}; \qquad z = z.$

$$\iiint_r F(x, y, z)dxdydz = \iiint_\tau F(\rho\ \cos\theta\ , \rho\ \sin\theta\ , z)\rho\, d\theta\, d\rho\, dz$$

Сферическая система координат.



Связь координат произвольной точки P пространства в сферической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется

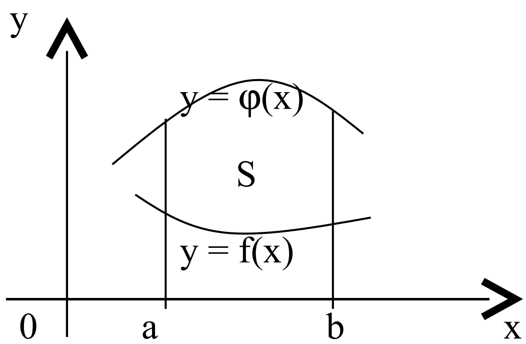
по формулам: $\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = arctg\frac{y}{x}; \qquad \varphi = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

Окончательно получаем: $\iiint\limits_{r} F(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} f(\rho, \varphi, \theta)\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

<u>Геометрические и физические приложения кратных интегралов.</u>

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.

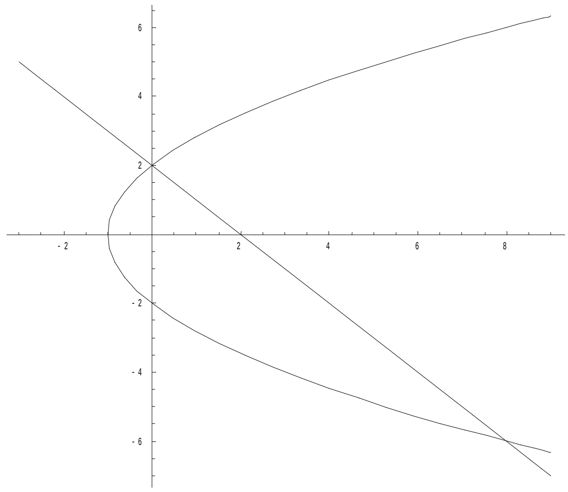


Площадь S, показанная на рисунке может быть вычислена с помощью

двойного интеграла по формуле: $S = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{f(x)}^{\varphi(x)} dydx$.

<u>Пример.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Построим график заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от $x = \frac{y^2 - 4}{4}$ до $x = 2 - y$, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

$$S = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dxdy = \int_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2 - 4}{4} \right) dy = \int_{-6}^{2} \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4} \right) dy = \frac{1}{4} \int_{-6}^{2} \left(-y^2 - 4y + 12 \right) dy =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y \right) \Big|_{-6}^{2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36 \cdot 6}{3} - \frac{4 \cdot 36}{2} - 12 \cdot 6 \right) \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(88 - \frac{8}{3} \right) =$$

$$= 21\frac{1}{3}.$$

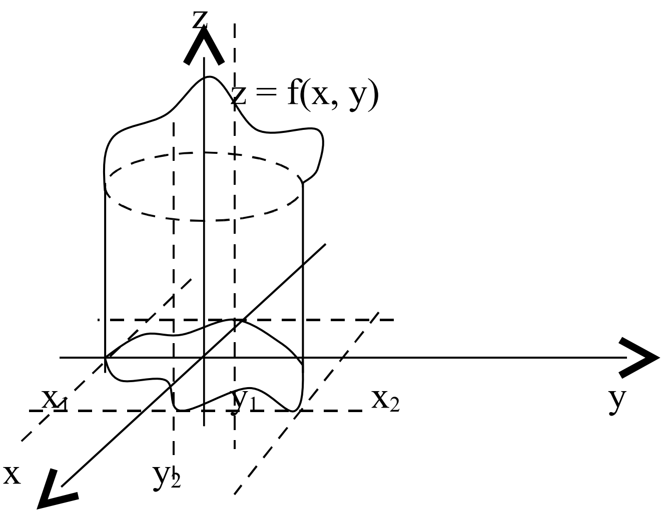
2) Вычисление площадей в полярных координатах.

$$S = \iint_{\tau} \rho d\rho d\theta = \iint_{\Delta} dydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)} \rho d\rho d\theta$$

3) Вычисление объемов тел.

Пусть тело ограничено снизу плоскостью xy, а сверху– поверхностью z = f(x,y), с боков – цилиндрической поверхностью.

Такое тело называется **цилиндроид.**



$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sum_{\Delta} z \Delta y \Delta x = \iint_{\Delta} z dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z dy dx .$$

<u>Пример.</u> Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ и плоскостью XOY.

Пределы интегрирования: по оси OX: $y_1 = -\sqrt{1 - x^2}$; $y_2 = \sqrt{1 - x^2}$;

по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}} (3 - x - y) dy dx = 3\pi$;

4) Вычисление площади кривой поверхности.

Если поверхность задана уравнением: f(x, y, z) = 0, то площадь ее поверхности находится по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dy dx$$

Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением z = φ(x, y), то площадь этой поверхности вычисляется по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx .$$

5)Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.

Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой f(x,y) = 0. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

- относительно оси Ox: $I_x = \iint\limits_{\Delta} y^2 dydx$

- относительно оси Oy: $I_y = \iint\limits_{\Delta} x^2 dydx$

- относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_{\Delta} (x^2 + y^2) dydx$ - этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции.**

6) Вычисление центра тяжести плоской фигуры.

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wxdydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx}; \qquad y_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wydydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx};$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = wdydx$ –масса элемента площади).

7) Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла.

Если поверхность тела описывается уравнением f(x, y, z) = 0, то объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} dzdydx$$

при этом z_1 и z_2 – функции от x и y или постоянные, y_1 и y_2 – функции от x или постоянные, x_1 и x_2 – постоянные.

8) Координаты центра тяжести тела.

$$x_C = \frac{\iiint\limits_{r} wxdv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \quad y_C = \frac{\iiint\limits_{r} wydv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \quad z_C = \frac{\iiint\limits_{r} wzdv}{\iiint\limits_{r} wdv};$$

9) Моменты инерции тела относительно осей координат.

$$I_x = \iiint_r (y^2 + z^2) w dv; \quad I_y = \iiint_r (x^2 + z^2) w dv; \quad I_z = \iiint_r (x^2 + y^2) w dv;$$

10) Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей.

$$I_{xy} = \iiint_r z^2 w dv; \quad I_{xz} = \iiint_r y^2 w dv; \quad I_{yz} = \iiint_r x^2 w dv;$$

11) Момент инерции тела относительно начала координат.

$$I_0 = \iiint_r (x^2 + y^2 + z^2) w dv;$$

В приведенных выше формулах п.п. 8 – 11 r – область вычисления интеграла по объему, w – плотность тела в точке (x, y, z), dv – элемент объема

- в декартовых координатах: dv = dxdydz;
- в цилиндрических координатах: dv = ρdzdφdθ;
- в сферических координатах: dv = ρ^2sinφdρdφdθ.

12) Вычисление массы неоднородного тела.

$$M = \iiint_r w dv;$$

Теперь плотность w – величина переменная.

Лекция 13.Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам

<u>Определение.</u> Кривая $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}$ $(a \le t \le b)$ называется **непрерывной кусочно – гладкой**, если функции φ, ψ и γ непрерывны на отрезке [a,b] и отрезок [a,b] можно разбить на конечное число частичных отрезков так, что на каждом из них функции φ, ψ и γ имеют непрерывные производные, не равные нулю одновременно.

Если определено не только разбиение кривой на частичные отрезки точками, но порядок этих точек, то кривая называется **ориентированной** кривой.

Ориентированная кривая называется **замкнутой**, если значения уравнения кривой в начальной и конечной точках совпадают.

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$$

Рассмотрим в пространстве XYZ кривую AB, в каждой точке которой определена произвольная функция $f(x, y, z)$.

Разобьем кривую на конечное число отрезков и рассмотрим произведение значения функции в каждой точке разбиения на длину соответствующего отрезка.

$$f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Сложив все полученные таким образом произведения, получим так называемую **интегральную** сумму функции *f(x, y, z)*.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой на частичные отрезки существует предел интегральных сумм, то этот предел называется **криволинейным интегралом от функции *f(x, y, z)* по длине дуги AB** или **криволинейным интегралом первого рода**.

$$\int_{AB} f(x, y, z)ds$$

Значение криволинейного интеграла по длине дуги не зависит от направления кривой AB.

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги надо определить его связь с обыкновенным определенным интегралом.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t), z = z(t), $\alpha \le t \le \beta$, где функции x, y, z – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, а точке B соответствует $t = \beta$. Функция f(x, y, z) – непрерывна на всей кривой AB.

Длина кривой AB равна: $S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$

Криволинейный интеграл по длине дуги AB будет находиться по формуле: $\int_{AB} f(x, y, z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги AB) надо, используя параметрическое уравнение кривой выразить подынтегральную функцию через параметр t, заменить ds дифференциалом дуги в зависимости от параметра t и проинтегрировать полученное выражение по t.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)ds$ по одному витку винтовой линии $x=\cos t;\quad y=\sin t;\quad z=t;\quad 0\le t\le 2\pi$.

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)ds=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+t^2)dt=$$
$$=2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right).$$

Если интегрирование производится по длине плоской кривой, заданной

уравнением $y=\varphi(x),\quad a\le x\le b,$ то получаем: $\int\limits_{AB}f(x,y)ds=\int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$

Криволинейные интегралы второго рода.

Пусть AB – непрерывная кривая в пространстве XYZ (или на плоскости XOY), а точка P(x, y, z) – произвольная функция, определенная на этой кривой. Разобьем кривую точками $M(x_i,y_i,z_i)$ на конечное число частичных дуг. И рассмотрим сумму произведений значений функции в каждой точке на длину соответствующей частичной дуги.

$$\sum_{i=1}^{n}P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i\ ;\quad M(\alpha,\beta,\gamma)\in\Delta x_i$$

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой AB интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется **криволинейным интегралом по переменной *x* от функции *P(x, y, z)* по кривой AB в направлении от A к B.**

$$\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i$$

Криволинейный интеграл второго рода, т.е. интеграл по координатам отличается от криволинейного интеграла первого рода, т.е. по длине дуги тем, что значение функции при составлении интегральной суммы умножается не на длину частичной дуги, а на ее проекцию на соответствующую ось. (В рассмотренном выше случае – на ось OX).

Вообще говоря, криволинейные интегралы могут считаться также и по переменным y и z.

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha,\beta,\gamma)\Delta y_i$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha,\beta,\gamma)\Delta z_i$$

Сумму криволинейных интегралов также называют криволинейным интегралом второго рода.

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) $\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx$

2) $\int_{AB} kP(x,y,z)dx = k\int_{AB} P(x,y,z)dx;$

3) $\int_{AB} (P_1(x,y,z) + P_2(x,y,z))dx = \int_{AB} P_1(x,y,z)dx + \int_{AB} P_2(x,y,z)dz$

4) $\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{AC} P(x,y,z)dx + \int_{CA} P(x,y,z)dx$

5) Криволинейный интеграл по замкнутой кривой L не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

$$\oint_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Направление обхода контура L задается дополнительно. Если L – замкнутая кривая без точек самопересечения, то направление обхода контура против часовой стрелки называется положительным.

Аналогичные соотношения справедливы при интегрировании по переменным *y* и *z*.

Теорема. *Если кривая AB – кусочно-гладкая, а функции P(x,y, z),Q(x,y,z) и R(x, y, z) – непрерывны на кривой AB, то криволинейные интегралы* $\int_{AB} P(x,y,z)dx;\quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy;\quad \int_{AB} R(x,y,z)dz;$

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$ *существуют.*

Вычисление криволинейных интегралов второго рода производится путем преобразования их к определенным интегралам по формулам:

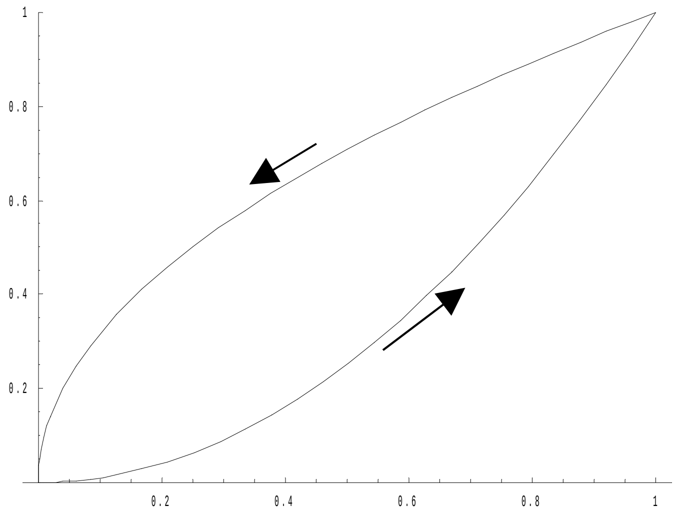
$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt\,; \quad \int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt\,;$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt\,; \quad \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt$$

В случае, если AB – плоская кривая, заданная уравнением *y = f(x),* то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left[P(x,f(x) + Q(x,f(x))f'(x)\right]dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} x^2ydx + x^3dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x;\ x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.



Представим замкнутый контур L как сумму двух дуг $L_1 = x^2$ и $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint\limits_{L} x^2ydx + x^3dy = \int\limits_{L_1} x^2ydx + \int\limits_{L_1} x^3dy + \int\limits_{L_2} x^2ydx + \int\limits_{L_2} x^3dy = \int\limits_{0}^{1} x^4dx + \int\limits_{0}^{1} x^3 \cdot 2xdx + \int\limits_{1}^{0} x^2\sqrt{x}dx +$$

$$+ \int\limits_{1}^{0} \frac{x^3}{2\sqrt{x}}dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

<u>Формула Остроградского – Грина.</u>

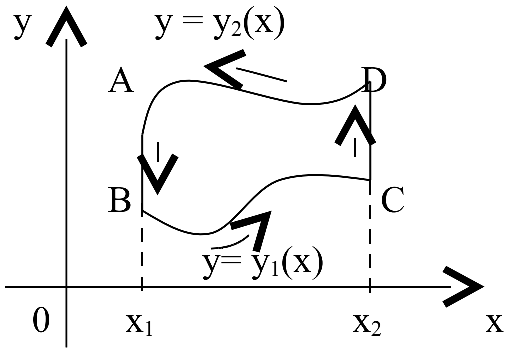
(Остроградский Михаил Васильевич (1861-1862) – русский математик, академик Петерб. А.Н.)

(Джордж Грин (1793 – 1841) – английский математик)

Иногда эту формулу называют формулой Грина, однако, Дж. Грин предложил в 1828 году только частный случай формулы.

Формула Остроградского – Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Будем считать, что рассматриваемая область **односвязная**, т.е. в ней нет исключенных участков.



Если замкнутый контур имеет вид, показанный на рисунке, то криволинейный интеграл по контуру L можно записать в виде:

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

$$\int_{AB} = \int_{CD} = 0$$

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1(x))dx + \int_{x_2}^{x_1} P(x,y_2(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_2(x))dx$$

$$\oint_L P(x,y)dx = -\int_{x_1}^{x_2} (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)))dx$$

$$P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)) = P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$\oint_L P(x,y)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}dydx = -\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}dydx$$

Если участки AB и CD контура принять за произвольные кривые, то, проведя аналогичные преобразования, получим формулу для контура произвольной формы:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx$$

Эта формула называется **формулой Остроградского – Грина**.

Формула Остроградского – Грина справедлива и в случае многосвязной области, т.е. области, внутри которой есть исключенные участки. В этом случае правая часть формулы будет представлять собой сумму интегралов по внешнему контуру области и интегралов по контурам всех исключенных участков, причем каждый из этих контуров интегрируется в таком направлении, чтобы область Δ все время оставалась по левую сторону линии обхода.

Пример. Решим пример, рассмотренный выше, воспользовавшись формулой Остроградского – Грина.

$$\oint\limits_L x^2 ydx + x^3 dy = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right) dydx = \iint\limits_\Delta 2x^2 dydx = \int\limits_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4) dx =$$

$$= 2\left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{35}.$$

Формула Остроградского – Грина позволяет значительно упростить вычисление криволинейного интеграла.

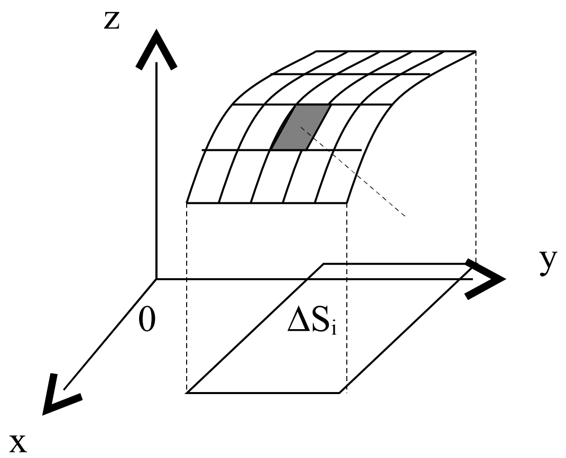
Криволинейный интеграл не зависит от формы пути, если он вдоль всех путей, соединяющих начальную и конечную точку, имеет одну и ту же величину.

Условием независимости криволинейного интеграла от формы пути равносильно равенству нулю этого интеграла по любому замкнутому контуру, содержащему начальную и конечную точки.

Это условие будет выполняться, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции, т.е. выполняется условие тотальности.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Лекция 14. Поверхностные интегралы по площади поверхности и по координатам.



Поверхностный интеграл является таким же обобщением двойного интеграла, каким криволинейный интеграл является по отношению к определенному интегралу.

Рассмотрим поверхность в пространстве, которая произвольно разбита на n частей.

Рассмотрим произведение значения некоторой функции F в произвольной точке с координатами (α, β, γ) на площадь частичного участка ΔS_i, содержащего эту точку.

$$F(\alpha, \beta, \gamma)\Delta S_i$$

<u>**Определение.**</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения λ поверхности существует конечный предел интегральных сумм, то этот предел называется **поверхностным интегралом первого рода** или **интегралом по площади поверхности.**

$$\iint_S F(x,y,z)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\Delta S_i$$

<u>Свойства поверхностного интеграла первого рода.</u>

Поверхностные интегралы первого рода обладают следующими свойствами:

1) $\iint_S dS = S$ S – площадь поверхности.

2) $\iint_S kF(x,y,z)dS = k\iint_S F(x,y,z)dS; \quad k = const$

3) $\iint\limits_S [F_1(x,y,z) + F_2(x,y,z)]dS = \iint\limits_S F_1(x,y,z)dS + \iint\limits_S F_2(x,y,z)dS$

4) Если поверхность разделена на части S_1 и S_2, то

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_1} F(x,y,z)dS + \iint\limits_{S_2} F(x,y,z)dS$$

5) Если $F_1(x,y,z) \le F_2(x,y,z)$, то $\iint\limits_S F_1(x,y,z)dS \le \iint\limits_S F_2(x,y,z)dS$

6) $\left|\iint\limits_S F(x,y,z)dS\right| \le \iint\limits_S |F(x,y,z)|dS$

7) Теорема о среднем.

Если функция F(x, y, z) непрерывна в любой точке поверхности S, то существует точка (α, β, γ) такая, что $\iint\limits_S F(x,y,z)dS = F(\alpha, \beta, \gamma) \cdot S$

S – площадь поверхности.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода выполняется через двойной интеграл по **проекции поверхности на плоскость XOY.**

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_\Delta F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}dxdy$$

Поверхностные интегралы второго рода.

Если на поверхности S есть хотя бы одна точка и хотя бы один не пересекающий границу поверхности контур, при обходе по которому направление нормали в точке меняется на противоположное, то такая поверхность называется **односторонней**.

Если при этих условиях направление нормали не меняется, то поверхность называется **двухсторонней**.

Будем считать положительным направлением обхода контура L, принадлежащего поверхности, такое направление, при движении по которому по выбранной стороне поверхности сама поверхность остается слева.

Двухсторонняя поверхность с установленным положительным направлением обхода называется **ориентированной** поверхностью.

Рассмотрим в пространстве XYZ ограниченную двухстороннюю поверхность S, состоящую из конечного числа кусков, каждый из которых задан либо уравнением вида z = f(x, y), либо является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ.

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения поверхности S интегральные суммы, составленные как суммы произведений значений некоторой функции на площадь частичной поверхности, имеют конечный предел, то этот предел называется **поверхностным интегралом второго рода.**

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$ - поверхностный интеграл второго рода.

Свойства поверхностного интеграла второго рода аналогичны уже рассмотренным нами свойствам поверхностного интеграла первого рода.

Т.е. любой поверхностный интеграл второго рода меняет знак при перемене стороны поверхности, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, поверхностный интеграл от суммы двух и более функций равен сумме поверхностных интегралов от этих функций, если поверхность разбита на конечное число частичных поверхностей, интеграл по всей поверхности равен сумме интегралов по частичным поверхностям.

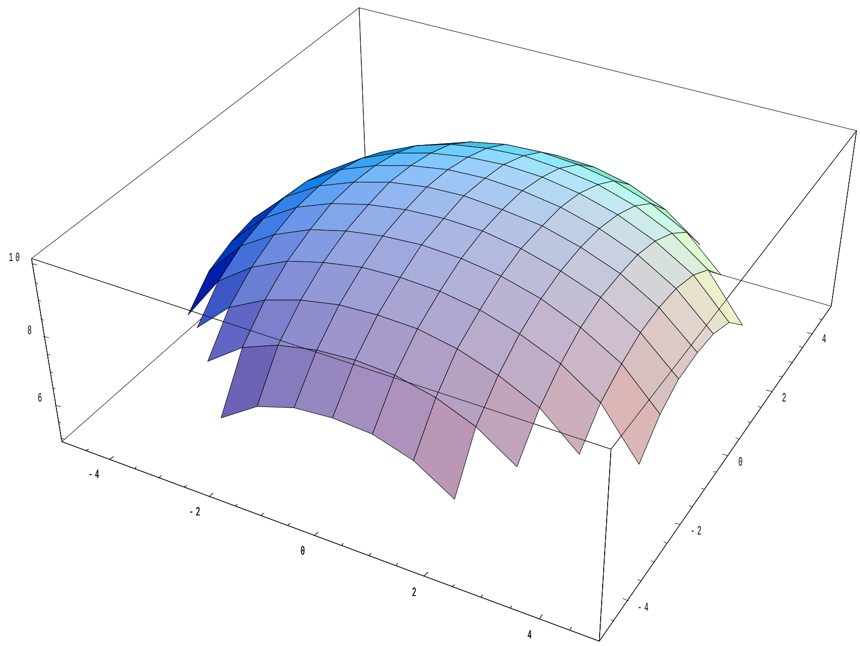
Если S- цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OZ, то $\iint_S R(x,y,z)dxdy = 0$. В случае, если образующие поверхности параллельны осям OX и OY, то равны нулю соответствующие составляющие поверхностного интеграла второго рода.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению соответствующих двойных интегралов. Рассмотрим это на примере.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (z-R)^2\,dxdy$ по верхней стороне полусферы $x^2+y^2+z^2=2Rz, \quad R\le z\le 2R.$

Преобразуем уравнение поверхности к виду: $x^2+y^2+(z-R)^2-R^2=0$

$$z=R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$



Заданная поверхность проецируется на плоскость XOY в круг, уравнение которого: $x^2+y^2\le R^2$

$$\iint\limits_S (z-R)^2\,dxdy=\iint\limits_\Delta (R^2-x^2-y^2)\,dxdy$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_\Delta (R^2-x^2-y^2)\,dxdy=\iint\limits_\tau f(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi\ , \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint\limits_S (z-R)^2\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R (R^2-\rho^2)\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^2\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R d\varphi=\frac{R^4}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi R^4}{2}$$

Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.

Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны друг с другом соотношением: $\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$

В этой формуле $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности S в выбранную сторону поверхности.

Формула Гаусса – Остроградского.

Формула Гаусса – Остроградского является аналогом формулы Грина – Остроградского. Эта формула связывает поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Для вывода формулы Гаусса – Остроградского надо воспользоваться рассуждениями, подобными тем, которые использовались при нахождении формулы Грина – Остроградского.

Рассматривается сначала поверхность, ограниченная сверху и снизу некоторыми поверхностями, заданными известными уравнениями, а сбоку ограниченную цилиндрической поверхностью. Затем рассматривается вариант когда поверхность ограничена цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными двум другим координатным осям.

После этого полученные результаты обобщаются, приводя к формуле **Гаусса – Остроградского:**

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz$$

Отметим, что эта формула применима для вычисления поверхностных интегралов по замкнутой поверхности.

На практике формулу Гаусса – Остроградского можно применять для вычисления объема тел, если известна поверхность, ограничивающая это тело.

Имеют место формулы: $V = \iint_S xdydz = \iint_S ydxdz = \iint_S zdxdy = \iiint_V dxdydz$

Пример. Найти формулу вычисления объема шара.

В поперечных сечениях шара (сечения параллельны плоскости XOY) получаются окружности.

Уравнение шара имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Найти объем шара можно по формуле:

$$V = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dzdydx = 8\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= 8\int_0^R \left[\frac{y\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{2} + \frac{R^2 - x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right] \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = 8\int_0^R \frac{R^2 - x^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}dx = 2\pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^R =$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Для решения этой же задачи можно воспользоваться преобразованием интеграла к сферическим координатам.

Это значительно упростит интегрирование.

$$V = \int_0^\pi d\theta\, 2\int_0^\pi d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin\varphi\, d\rho = 2\int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \frac{R^3}{3}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^\pi 2R^3 d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Элементы теории поля.

Определение. Если каждой точке пространства М ставится в соответствие некоторая скалярная величина U, то таким образом задается **скалярное поле** U(M). Если каждой пространства М ставится в соответствие вектор $\vec{F}$, то задается **векторное поле** $\vec{F}$ (M).

Пусть в пространстве М задана поверхность Δ. Будем считать, что в каждой точке Р определяется положительное направление нормали единичным вектором $\vec{n}(P)$.

В пространстве М зададим векторное поле, поставив в соответствие каждой точке пространства вектор, определенный координатами:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Если разбить каким – либо образом поверхность на частичные участки Δ_i и составить сумму $\sum_i (\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i))\Delta_i$, где $\vec{F}\vec{n}$ - скалярное произведение, то предел этой суммы при стремлении к нулю площадей частичных участков разбиения (если этот предел существует) будет **поверхностным интегралом**.

$$\iint_\Delta \vec{F}\vec{n}d\Delta$$

Определение. Поверхностный интеграл $\iint_\Delta \vec{F}\vec{n}d\Delta$ называется **потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхность Δ.**

Если поверхность разбита на конечное число частичных поверхностей, то поток векторного поля через всю поверхность будет равен сумме потоков через частичные поверхности.

Если преобразовать скалярное произведение в координатную форму, то получаем соотношение:

$$\iint_{\Delta} \vec{F}\vec{n}d\Delta = \iint_{\Delta} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]d\Delta = \iint_{\Delta} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Если на области Δ существует функция *f(x, y, z)*, имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются свойства:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R;$$

то такую функцию называют **потенциальной функцией** или **потенциалом** вектора $\vec{F}$.

Тогда вектор $\vec{F}$ является **градиентом** функции *f*.

$$\vec{F} = gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Потенциал может быть найден по формуле:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

В этой формуле x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой начальной точки. В качестве такой точки удобно брать начало координат.

Теорема. *Для того, чтобы поле вектора $\vec{F}$, заданного в некоторой области, имело потенциал, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:*

1) Интеграл от вектора $\vec{F}$ по любому кусочно – гладкому контуру, принадлежащему области, равен нулю.

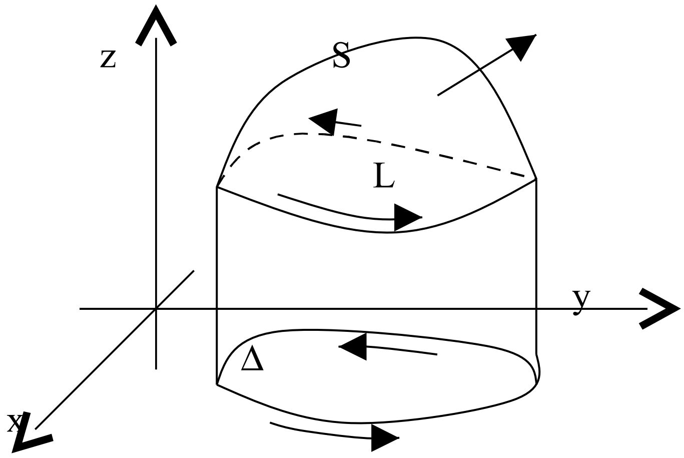
2) Интеграл по любому кусочно – гладкому пути, соединяющему две любые точки поля не зависит, от пути интегрирования.

Формула Стокса.

(Джордж Габриель Стокс (1819 – 1903) – английский математик)

Формула Стокса связывает криволинейные интегралы второго рода с поверхностными интегралами второго рода.

Пусть в пространстве задана некоторая поверхность S. L – непрерывный кусочно – гладкий контур поверхности S.



Предположим, что функции P,Q и R непрерывны на поверхности S вместе со своими частными производными первого порядка. Применим формулу, выражающую криволинейный интеграл через определенный.

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt = \int_\alpha^\beta [Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right)]dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{\left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]x'(t) + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]y'(t)\right\}dt = \oint_L \left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]dx + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]dy$$

Введем обозначения: $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \dfrac{\partial z}{\partial y};$

Применив формулу Грина – Остроградского, можно заменить криволинейный интеграл равным ему двойным интегралом. После преобразований устанавливается следующее соответствие между криволинейным и поверхностным интегралом:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

эта формула и называется **формула Стокса.**

Определение. Вектор $\vec{B}$, компоненты которого равны соответственно равны $B_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y};$

называется **вихрем (ротором)** вектора $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и обозначается: $rot\vec{F}$

Определение. Символический вектор $\vec{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

называется **оператором Гамильтона.** (Уильям Роуан Гамильтон (1805 – 1865) – ирландский математик) Символ ∇ - “набла”.

С учетом этого обозначения можно представить себе понятие ротора вектора $\vec{F}$ как векторного произведения оператора Гамильтона на вектор $\vec{F}$.

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Определение. Криволинейный интеграл, представляющий собой работу векторного поля вдоль некоторой кривой L называется **линейным интегралом** от вектора $\vec{F}$ по ориентированной кривой L.

$$\int_L \vec{F}d\vec{s} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Если кривая L представляет собой замкнутый контур, то линейный интеграл по такому контуру называется **циркуляцией** векторного поля $\vec{F}$ вдоль контура L.

$$Ц = \oint_L \vec{F}d\vec{s} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

В векторной форме теорему Стокса можно сформулировать так:

Циркуляция вектора вдоль контура некоторой поверхности равна потоку вихря (ротора) через эту поверхность.

$$\int_\lambda \vec{F}d\vec{s} = \iint_\Delta \vec{n} rot\vec{F} d\Delta$$

Отметим, что рассмотренная выше формула Грина – Остроградского является частным случаем формулы Стокса.

Также при условии равенства нулю всех компонент ротора вектора, получаем, что криволинейный интеграл по любой пространственной кривой равен нулю, т.е. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

<u>Определение.</u> Выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ называется **дивергенцией вектора (дивергенцией векторной функции)** $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и обозначается $div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Формула Гаусса – Остроградского может быть записана в виде:

$$\oint\!\!\!\oint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \quad \text{или} \quad \iiint_V div\vec{F}dv = \oint\!\!\!\oint_S \vec{F}\vec{n}dS$$

т.е. *интеграл от дивергенции векторного поля* $\vec{F}$ *по объему равен потоку вектора через поверхность, ограниченную этим объемом.*

<u>Определение.</u> Векторное поле $\vec{F}$ называется **соленоидальным (трубчатым)**, если div $\vec{F}$ =0 .

С помощью описанного выше оператора Гамильтона можно представить определенные нами понятия следующим образом:

$$gradf = \vec{\nabla} f; \quad div\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F}; \quad rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F};$$

Как было сказано выше (См. Уравнение Лапласа.), выражение

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется **оператором Лапласа.**

Справедливы следующие соотношения: $div(gradf) = \Delta f$; $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f$

Справедливость этих равенств легко проверить непосредственной подстановкой.

Теперь рассмотрим примеры применения рассмотренных выше понятий.

<u>Пример.</u> Найти $rot(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r}$, если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Найдем скалярное произведение: $\vec{r} \cdot \vec{a} = x + y + z$;

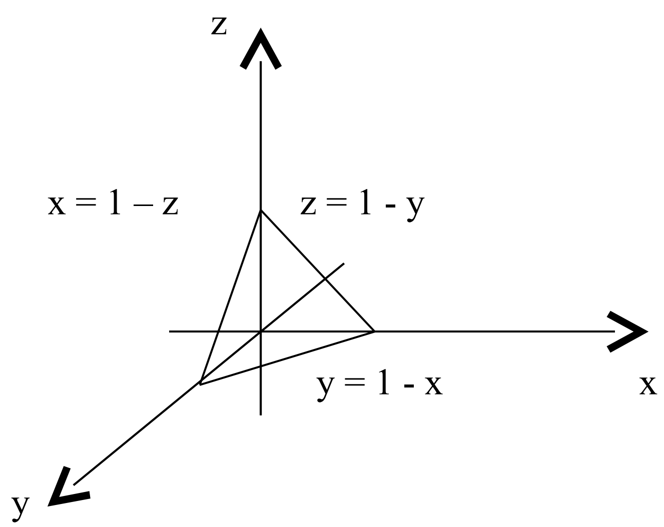
Найдем скалярное произведение:

$$(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} = \{P, Q, R\} = \{x^2 + xy + xz, \quad yx + y^2 + yx, \quad xz + yz + z^2\}$$

$$rot(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\vec{i}(z-y)-\vec{j}(z-x)+\vec{k}(y-x)$$

<u>Пример.</u> Найти поток векторного поля $\vec{F}=(y-x)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x+y+z-1=0$ координатными плоскостями.



$$П=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}ds=\iint\limits_S (y-x)dydz+(x+y)dxdz+ydxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}(y+y+z-1)dz+$$

$$+\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{1-z}(x+1-z-x)dx+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}ydy=\int\limits_0^1\left[2yz+\frac{z^2}{2}-z\right]\Big|_0^{1-y}+\int\limits_0^1[x-zx]\Big|_0^{1-z}+\int\limits_0^1\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}=$$

$$=\int\limits_0^1\left[2y-2y^2+\frac{1}{2}-y+\frac{y^2}{2}-1+y\right]dy+\int\limits_0^1\left[1-z-z+z^2\right]dz+\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[-\frac{3y^2}{2}+2y-\frac{1}{2}\right]dy+\left[z-z^2+\frac{z^3}{3}\right]\Big|_0^1+\left[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]\Big|_0^1=\left[-\frac{y^3}{2}+y^2-\frac{y}{2}\right]\Big|_0^1+1-1+\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

<u>Пример.</u> Найти div(grad *u*), если $u=e^{x+y+z}$.

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=e^{x+y+z}\left[\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right];\quad P=Q=R=e^{x+y+z};$$

$$div(gradu) = 3e^{x+y+z} = 3u.$$

Пример. Определить является ли векторное поле

$\vec{F} = (5x + 6yz; \quad 5y + 6xz; \quad 5z + 6xy)$ и найти его потенциал.

$$gradu = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = 5x + 6yz; \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} = 5y + 6xz; \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} = 5z + 6xy;$$

Если поле потенциально, то должны выполняться следующие условия:

$$1) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad 6z = 6z; \quad 2) \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad 6x = 6x; \quad 3) \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad 6y = 6y;$$

Эти условия эквивалентны условию равенства нулю ротора векторного поля. Справедливость этого утверждения видна из формулы ротора.

Таким образом, поле потенциальное. Потенциал находится по формуле:

$$u = \int_0^x 5xdx + \int_0^y 5ydy + \int_0^z (5z + 6xy)dz = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 + 6xyz;$$

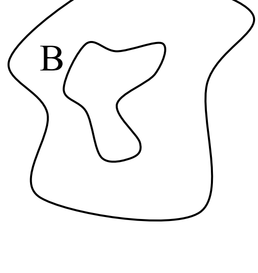
Лекция 16 . Элементы комбинаторики. Множества. Операции над множествами.

Определение. **Множеством М** называется объединение в единое целое определенных различимых объектов *a*, которые называются **элементами** множества. $a \in$ М

Множество можно описать, указав какое – нибудь свойство, присущее всем элементам этого множества.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и означается $\varnothing$.

Определение. Если все элементы множества А являются также элементами множества В, то говорят, что множество А **включается (содержится)** в множестве В.



A A ⊂ B

<u>Определение.</u> Если A⊆ B, то множество A называется **подмножеством** множества B, а если при этом A≠B, то множество A называется **собственным подмножеством** множества B и обозначается A⊂B.

Для трех множеств A, B, C справедливы следующие соотношения.

$A \subseteq A$; $A \not\subset A$; $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$; $A \subseteq B \wedge B \subset C \to A \subset C$;

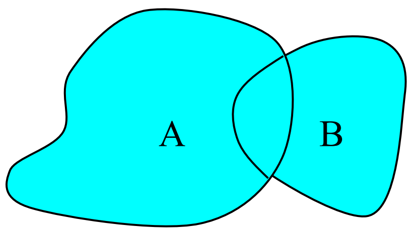
Связь между включением и равенством множеств устанавливается следующим соотношением: $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Здесь знак $\wedge$ обозначает **конъюнкцию** (логическое «и»).

<u>Операции над множествами.</u>

<u>Определение.</u> Объединением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одном из множеств A и B.

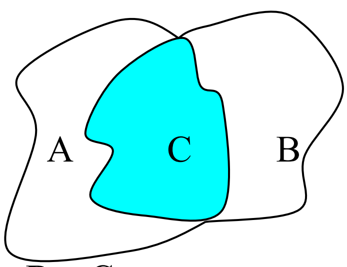
Обозначается C = A ∪ B.



Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Венна**.

<u>Определение.</u> Пересечением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B.

Обозначение C = A ∩ B.



Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

$$A \cap A = A \cup A = A; \qquad A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A;$$

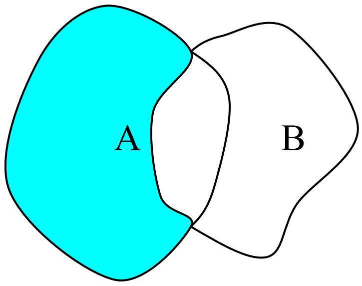
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A; \quad A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing;$$

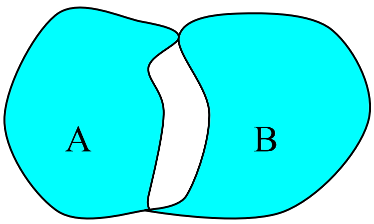
<u>Определение.</u> **Разностью** множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Обозначается $C = A \setminus B$.

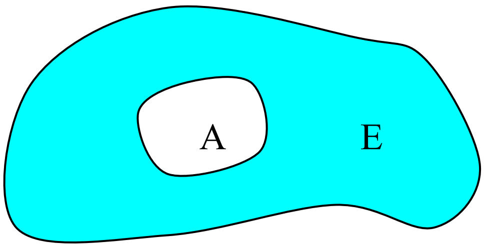


<u>Определение.</u> **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.

Обозначается $A \Delta B$. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



<u>Определение.</u> C_E называется **дополнением** множества A относительно множества E, если $A \subseteq E$ и $C_E = E \setminus A$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \setminus B \subseteq A; \qquad A \setminus A = \varnothing; \qquad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$

$$A \Delta B = B \Delta A; \qquad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C); \qquad (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C); \qquad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$

$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C); \qquad A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C);$$

$$A \cup C_E A = E; \qquad A \cap C_E A = \varnothing; \qquad C_E E = \varnothing; \qquad C_E \varnothing = E; \qquad C_E C_E A = A;$$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; \qquad C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B;$$

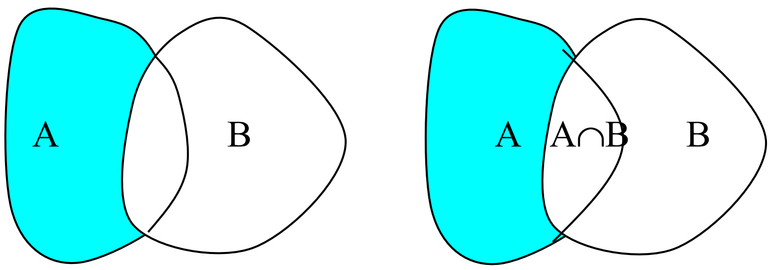
Пример. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Вейна. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Из записанных выше соотношений видно, что

$$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B) = A \setminus B$$

Что и требовалось доказать.

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Вейна



Пример. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Если некоторый элемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A, но не принадлежит множествам B и C.

Множество A \ B представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество A \ C представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству C.

Множество (A \ B) $\cap$ (A \ C) представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат ни множеству B, ни множеству C. Таким образом, тождество можно считать доказанным.

Отношения и функции.

Определение. **Упорядоченной парой** (*a, b)* двух элементов *a* и *b* называется множество $\{\{a\},\{a, b\}\}$.

Для любых элементов *a, b, c, d* справедливо соотношение:

$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d;$$

Определение. **Декартовым произведением** множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (*a, b*), где $a\in$ A, $b\in$ B.

$$A\times B = \{(a,b)|a\in A; \quad b\in B\}$$

Декартово произведение *n* равных множеств A будет называться *n* – й **декартовой степенью** множества A и обозначаться A^n.

Определение. ***n* – мерным отношением** R на непустом множестве A называется подмножество A^n. Если R – n – мерное отношение на множестве A и $(a_1,a_2,\ldots a_n)\in$ R, то говорят, что отношение R выполняется для элементов $a_1,a_2,\ldots a_n$ и записывают R $a_1a_2\ldots a_n$. Если n = 2, то такое отношение называется **бинарным**.

Для бинарного отношения вместо общей записи Ra_1a_2 применяют запись a_1Ra_2.

Свойства бинарных отношений.

Определение. Произведением двух бинарных отношений R и S, заданных на множестве A, называется множество

$$\{(x,y)|\exists z(z\in A)\wedge (x,z)\in R\wedge (z,y)\in S\}$$

Знак **|** называется **штрих Шеффера** и обозначает антиконъюнкцию.

Определение. **Обратным (инверсным)** отношением к отношению R, заданному на множестве A, называется отношение R^{-1}, определяемое равенством: $R^{-1} = \{(x,y) | (y,x) \in R\}$

Если R, S и T – бинарные отношения на множестве A, то выполняются следующие равенства:

$$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T); \qquad (R \cup S) \cdot T = (R \cdot T) \cup (S \cdot T);$$

$$(R \cap S) \cdot T = (R \cdot T) \cap (S \cdot T); \qquad (R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1};$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}; \qquad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$$

Алгебраические структуры.

Определение. На множестве A определена **алгебраическая операция,** если каждым двум элементам этого множества, взятым в определенном порядке, однозначным образом поставлен в соответствие некоторый третий элемент из этого же множества.

Примерами алгебраических операций могут служить такие операции как сложение и вычитание целых чисел, сложение и вычитание векторов, матриц, умножение квадратных матриц, векторное умножение векторов и др.

Отметим, что скалярное произведение векторов не может считаться алгебраической операцией, т.к. результатом скалярного произведения будет число, и числа не относятся к множеству векторов, к которому относятся сомножители.

Определение. Множество A с определенной на нем алгебраической операцией (например, умножением) называется **группой**, если выполнены следующие условия:

1) для любых трех элементов *a, b, c* ∈ A выполняется свойство ассоциативности: $a(bc) = (ab)c$

2) в множестве A существует такой элемент *e*, что для любого элемента *a* из этого множества выполняется равенство: $ae = ea = a$

3) для любого элемента a множества существует элемент a' из этого же множества такой, что $aa' = a'a = e$

Различные множества могут являться группой относительно какой- либо операции и не являться группой относительно другой операции.

Число элементов называется **порядком** группы.

Определение. Между элементами множеств M и N установлено **взаимно однозначное соответствие**, если каждому элементу множества M поставлен в соответствие определенный элемент множества N, причем различным элементам одного множества соответствуют различные элементы другого множества.

Определение. Две группы M и N называются **изоморфными**, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором для любых двух элементов $a, b \in M$ и соответствующим им элементам $a', b' \in N$ элементу $c = ab$ будет соответствует элемент $c' = a'b'$.

При этом отображение группы M на группу N называется **гомоморфизмом**.

Определение. Если операция, определенная в группе коммутативна, (т.е. для любых элементов a и b группы верно соотношение $ab=ba$), то такая группа называется **коммутативной** или **абелевой** группой.

Определение. Множество R с двумя определенными в нем алгебраическими операциями, сложением и умножением, называется **кольцом**, если относительно операции сложения оно является абелевой группой, а операция умножения дистрибутивна, т.е. для любых элементов a, b и $c \in$ R справедливы равенства: $a(b + c) = ab + ac$; $(b + c)a = ba + ca$;

Если операция умножения, определенная в кольце коммутативна, то такое кольцо называется **коммутативным** кольцом.

Определение. **Полем** называется коммутативное кольцо, в котором для любого ненулевого элемента $a \neq 0$ и любого элемента b существует единственный элемент x такой, что $ax = b$.

Бином Ньютона. (полиномиальная формула)

В дальнейшем будет получена формула бинома Ньютона с помощью приемов дифференциального исчисления.

Бином Ньютона – это формула, выражающая выражение $(a + b)^n$ в виде многочлена. Эта формула имеет вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

C_n^k - число сочетаний из n элементов по k. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Лекция 16. Элементы математической логики.

Математическая логика – разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения.

Определение. **Высказыванием** называется предложение, к которому возможно применить понятия истинно или ложно.

В математической логике не рассматривается сам смысл высказываний, определяется только его истинность или ложность, что принято обозначать соответственно И или Л.

Понятно, что истинные и ложные высказывания образуют соответствующие множества. С помощью простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя простые высказывания союзами «и», «или».

Таким образом, операции с высказываниями можно описывать с помощью некоторого математического аппарата.

Вводятся следующие логические операции (связки) над высказываниями

1) **Отрицание**. Отрицанием высказывания Р называется высказывание, которое истинно только тогда, когда высказывание Р ложно.

Обозначается $\neg$ Р или $\overline{P}$.

Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

P	$\neg$ P
И	Л
Л	И

2) **Конъюнкция.** Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначается P&Q или $P \wedge Q$.

P	Q	P&Q
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

3) **Дизъюнкция.** Дизъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначается $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

4) **Импликация.** Импликацией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а Q – ложно.

Обозначается $P \supset Q$ (или $P \Rightarrow Q$). Высказывание P называется посылкой импликации, а высказывание Q – следствием.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

5) **Эквиваленция.** Эквиваленцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают.

Обозначается P~Q или P⇔Q.

P	Q	P~Q
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

С помощью этих основных таблиц истинности можно составлять таблицы истинности сложных формул.

Пример. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными формулы φ и ψ.

$$\varphi = \bar{p} \Rightarrow (p \wedge r)$$
$$\psi = \bar{p} \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$$

Составим таблицы истинности для каждой формулы:

p	r	$\bar{p}$	$(p \wedge r)$	$\bar{p} \Rightarrow (p \wedge r)$
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л

p	r	$\bar{p}$	$\bar{r}$	$(\bar{p} \vee \bar{r})$	$\bar{p} \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$
И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Данные формулы не являются эквивалентными.

Пример. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными формулы φ и ψ.

$$\varphi = (p \Leftrightarrow q) \vee r$$
$$\psi = (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \vee r$$

Составим таблицы истинности для заданных формул.

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \vee r$
И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И
И	Л	И	Л	И

И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	И
Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	И
Л	Л	Л	И	И

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \vee r$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Из составленных таблиц видно, что данные формулы не равносильны.

Основные равносильности.

Для любых формул A, B и C справедливы следующие равносильности:

$$A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A; \quad A \,\&\, A \equiv A; \quad A \,\&\, (B \,\&\, C) \equiv (A \,\&\, B) \,\&\, C;$$

$$A \vee B \equiv B \vee A; \quad A \vee A \equiv A; \quad A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C;$$

$$A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C); \quad A \,\&\, (B \vee C) \equiv (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C);$$

$$A \,\&\, (A \vee B) \equiv A; \; A \vee (A \,\&\, B) \equiv A; \; \neg\neg A \equiv A; \neg(A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B;$$

$$A \equiv (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, \neg B); \quad A \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee \neg B);$$

Лекция 17. Булевы функции. Конечные графы и сети. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Деревья и циклы.

Булевы функции.

Определение. Булевой функцией $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется произвольная *n* – местная функция, аргументы и значения которой принадлежат множеству $\{0, 1\}$.

Вообще говоря между логическими высказываниями, логическими связками и булевыми функциями просматривается явная аналогия. Если логические функции могут принимать значения истинно или ложно, то для булевой функции аналогами этих значений будут значения 0 или 1.

Для булевых функций также можно составить таблицы значений, соответствующим основным логическим операциям.

X_1	X_2	$\neg X_1$	$X_1 \& X_2$	$X_1 \vee X_2$	$X_1 \Rightarrow X_2$	$X_1 \Leftrightarrow X_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Исчисление предикатов.

Определение. Предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, переменные которой принимают значения из некоторого множества М, а сама функция принимает два значения: И (истина) и Л (ложь), т.е.

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{И, Л\}$$

Предикат от n аргументов называется n – местным предикатом. Высказывания считаются нуль – местными предикатами.

Над предикатами можно производить обычные логические операции, в результате которых получаются новые предикаты.

Кроме обычных логических операций к предикатам применяются также специальные операции, называемые **кванторами.**

Кванторы бывают двух видов:

1) **Квантор общности.** Обозначается $(\forall x)P(x)$. Квантором общности называется высказывание истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества М, и ложное – в противном случае.

2) **Квантор существования.** Обозначается $(\exists x)P(x)$. Квантором существования называется высказывание, истинное, когда существует элемент из множества М, для которого $P(x)$ истинно, и ложное в противном случае.

Операцию связывания квантором можно применять и к предикатам от большего числа переменных.

Для формул логики предикатов сохраняется справедливость всех правил равносильных преобразований логики высказываний. Кроме того, справедливы следующие свойства:

1) Перенос квантора через отрицание.

$$\neg(\forall x)A(x) \equiv (\exists x)\neg A(x); \qquad \neg(\exists x)A(x) \equiv (\forall x)\neg A(x);$$

2) Вынесение квантора за скобки.

$$(\exists x)(A(x)\ \&\ \mathrm{B}) \equiv (\exists x)A(x)\ \&\ \mathrm{B}; \qquad (\forall x)(A(x)\ \&\ \mathrm{B}) \equiv (\forall x)A(x)\ \&\ \mathrm{B};$$

$$(\exists x)(A(x) \vee \mathrm{B}) \equiv (\exists x)A(x) \vee \mathrm{B}; \qquad (\forall x)(A(x) \vee \mathrm{B}) \equiv (\forall x)A(x) \vee \mathrm{B};$$

3) Перестановка одноименных кванторов.

$$(\forall y)(\forall x)A(x,y) \equiv (\forall x)(\forall y)A(x,y); \qquad (\exists y)(\exists x)A(x,y) \equiv (\exists x)(\exists y)A(x,y);$$

4) Переименование связанных переменных. Если заменить связанную переменную формулы А другой переменной, не входящей в эту формулу, в кванторе и всюду в области действия квантора получаем формулу, равносильную А.

Исчисление предикатов базируется на приведенных выше свойствах и правилах, называемых аксиомами.

Какими бы ни были формулы А и В для них справедливы следующие аксиомы:

1) $\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A})$;

2) $(\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}))$;

3) $(\neg\mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{A}) \Rightarrow ((\neg\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow \mathrm{B})$;

4) $(\forall x_i)A(x_i) \Rightarrow A(x_j)$, где формула $A(x_i)$ не содержит переменной x_i.

5) $A(x_i) \Rightarrow (\exists x_j)A(x_j)$, где формула $A(x_i)$ не содержит переменной x_i.

Конечные графы и сети. Основные определения.

Определение. Если на плоскости задать конечное множество V точек и конечный набор линий X, соединяющих некоторые пары из точек V, то полученная совокупность точек и линий будет называться **графом**.

При этом элементы множества V называются **вершинами** графа, а элементы множества X – **ребрами**.

В множестве V могут встречаться одинаковые элементы, ребра, соединяющие одинаковые элементы называются **петлями**. Одинаковые пары в множестве X называются **кратными** (или параллельными) ребрами. Количество одинаковых пар (v, w) в X называется **кратностью** ребра (v, w).

Множество V и набор X определяют граф с кратными ребрами – **псевдограф**.

$$G = (V, X)$$

Псевдограф без петель называется **мультиграфом**.

Если в наборе X ни одна пара не встречается более одного раза, то мультиграф называется **графом**.

Если пары в наборе X являются порядочными, то граф называется ориентированным или **орграфом**.

Графу соответствует геометрическая конфигурация. Вершины обозначаются точками (кружочками), а ребра – линиями, соединяющими соответствующие вершины.

<u>**Определение.**</u> Если $x = \{v, w\}$ – ребро графа, то вершины v, w называются концами ребра x.

Если $x = (v, w)$ – дуга орграфа, то вершина v – начало, а вершина w – конец дуги x.

<u>**Определение.**</u> Вершины v, w графа G = (V, X) называются **смежными**, если $\{v,w\}\in X$. Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину.

<u>**Определение.**</u> **Степенью** вершины графа называется число ребер, которым эта вершина принадлежит. Вершина называется **изолированной**, если ее степень равна единице и **висячей**, если ее степень равна нулю.

<u>**Определение.**</u> Графы $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$ называются **изоморфмными**, если существует взаимно однозначное отображение φ: $V_1 \to V_2$, сохраняющее смежность.

<u>**Определение.**</u> **Маршрутом (путем)** для графа G(V, X) называется последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3\ldots x_kv_{k+1}$. Маршрут называется **замкнутым**, если

его начальная и конечная точки совпадают. Число ребер (дуг) маршрута (пути) графа называется **длиной** маршрута (пути).

Определение. Незамкнутый маршрут (путь) называется **цепью**. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется **простой цепью**.

Определение. Замкнутый маршрут (путь) называется **циклом (контуром)**. Цикл, в котором все вершины попарно различны, называется **простым циклом**.

Матрицы графов.

Пусть D = (V, X) – орграф, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Определение. **Матрицей смежности** орграфа D называется квадратичная матрица $A(D) = [a_{ij}]$ порядка n, у которой

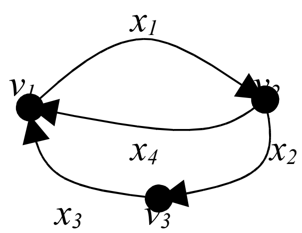
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in X \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin X \end{cases}$$

Определение. Если вершина v является концом ребра x, то говорят, что v и x – **инциндентны**.

Определение. **Матрицей инциндентности** орграфа D называется матрица размерности $n \times m$ $B(D) = [b_{ij}]$, у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги } x_j \\ -1, & \text{если вершина } v_i \text{ является началом дуги } x_j \\ 0,, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_j \end{cases}$$

Пример. Записать матрицы смежности и инцидентности для графа, изображенного на рисунке.



Составим матрицу смежности:

	v_1	v_2	v_3
v_1	0	1	0
v_2	1	0	1
v_3	1	0	0

Т.е. $A(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - матрица смежности.

Матрица инциндентности:

	x_1	x_2	x_3	x_4
v_1	-1	0	1	1
v_2	1	-1	0	-1
v_3	0	1	-1	0

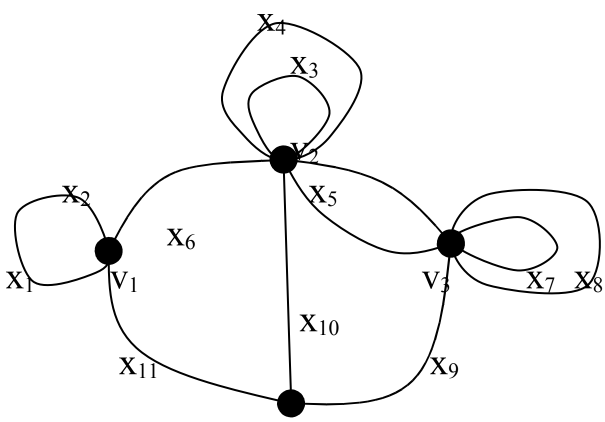
т.е. $B(D)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Если граф имеет кратные дуги (ребра), то в матрице смежности принимается $a_{ij}=k$, где k – кратность дуги (ребра).

С помощью матриц смежности и инциндентности всегда можно полностью определить граф и все его компоненты. Такой метод задания графов очень удобен для обработки данных на ЭВМ.

<u>Пример.</u> Задана симметрическая матрица Q неотрицательных чисел. Нарисовать на плоскости граф G(V, X), имеющий заданную матицу Q своей матрицей смежности. Найти матрицу инциндентности R графа G. Нарисовать также орграф $\vec{G}(N, A)$, имеющий матрицу смежности Q, определить его матрицу инциндентности C.

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



v_4

Составим матрицу инциндентности:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
v_3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Итого: $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Достижимость и связность.

Определение. Вершина *w* графа D (или орграфа) называется **достижимой** из вершины *v*, если либо *w*=*v*, либо существует путь из *v* в *w*(маршрут, соединяющий *v* и *w*).

Определение. Граф (орграф) называется **связным**, если для любых двух его вершин существует маршрут (путь), который их связывает. Орграф называется **односторонне связным**, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Определение. Псевдографом D(V, X), **ассоциированным** с ориентированным псевдографом, называется псевдограф $G(V, X_0)$ в котором X_0 получается из X заменой всех упорядоченных пар (*v, w*) на неупорядоченные пары (*v, w*).

Определение. Орграф называется **слабо связным**, если связным является ассоциированный с ним псевдограф.

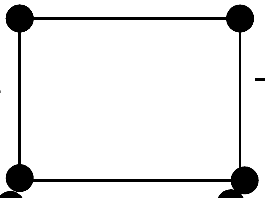
Эйлеровы и гамильтоновы графы.

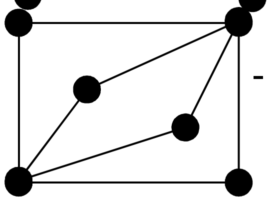
Определение. Цепь (цикл) в псевдографе G называется **эйлеровым**, если она проходит по одному разу через каждое ребро псевдографа G.

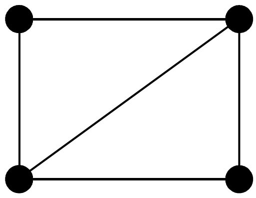
Теорема. *Для того, чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы степени его вершин были четными.*

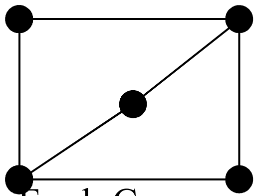
Теорема. *Для того, чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно две вершины нечетной степени.*

Определение. Цикл (цепь) в псевдографе G называется **гамильтоновым**, если он проходит через каждую вершину псевдографа G ровно один раз.

Пример.  - в графе есть и эйлеровый и гамильтонов циклы

 - в графе есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова

 - в графе есть гамильтонов, но нет эйлерова цикла

 - в графе нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла

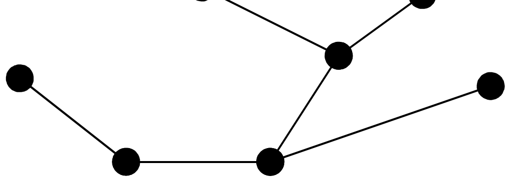
Граф G называется **полным**, если каждая его вершина смежна со всеми остальными вершинами. В полном графе всегда существуют гамильтоновы циклы.

Также необходимым условием существования гамильтонова цикла является связность графа.

Деревья и циклы.

Определение. Граф G называется **деревом**, если он является связным и не имеет циклов. Граф G, все компоненты связности которого являются деревьями, называется **лесом**.

У графа, который является деревом, число ребер на единицу меньше числа вершин. Дерево не содержит циклов, любые две его вершины можно соединить единственной простой цепью.



Если у дерева G есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдется висячая вершина, т.к. в противном случае в графе будет цикл.

Для графов, которые сами по себе не являются деревьями, вводится понятие остовного дерева.

Определение. **Остовным деревом** связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть G – связный граф. Тогда остовное дерево графа G (если оно существует) должно содержать n(G)-1 ребер.

Таким образом, любое остовное дерево графа G есть результат удаления из графа G ровно m(G) - (n(G) - 1) = m(G) – n(G) + 1 ребер.

Число ν(G) = m(G) – n(G) + 1 называется **цикломатическим числом** связного графа G.

Одной из самых распространенных задач является задача построения остовного дерева минимальной длины графа. Для решения этой задачи применяется следующий алгоритм.

1) Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инциндентными ему вершинами оно образует подграф G_2.

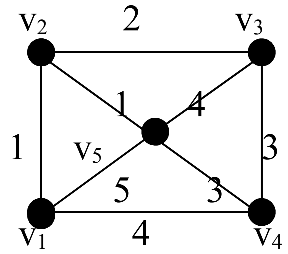
2) Строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди ребер графа G, каждое из которых инциндентно какой либо вершине графа G_2, и одновременно инциндентно какой – либо вершине графа G, не содержащейся в графе G_2.

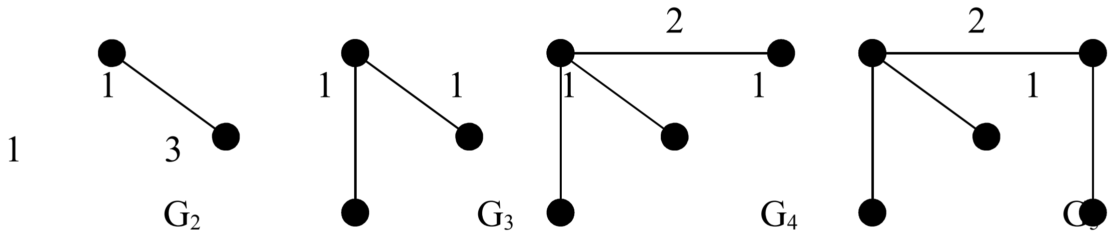
3) Строим графы G_4, G_5, …, G_n, повторяя действия пункта 2 до тех пор, пока не переберем все вершины графа G.

Пример. Определить минимальное остовное дерево нагруженного графа.

Граф называется **нагруженным**, если на множестве его дуг задана некоторая функция, которая называется **весовой** функцией, и определяет длину дуги.

В нашем примере – весовая функция определяет длины дуг числами 1, 2, 3, 4, 5.





11. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ.

Вариант расчетно-графической работы по теме «Кратные интегралы»

1. Изменить порядок интегрирования. $\int_1^2 dx \int_x^{3x} f(x,y)dy$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

   $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

   $z = x+y+2$, $z = 0$, $y = x^2$, $x = y^2$.

4. Найти площадь части поверхности.

   $y^2+x^2 = z$, $y^2+x^2 = 4$.

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

   $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=1$.

6. Вычислить криволинейные интегралы.

   а) $\int_L (2x+3x^2y)dx+x^3dy$, L: $y=\sqrt{x}$ от A(0:0) до B(1:1).

   б) $\int_L \frac{dl}{4x+y}$, L: $y=3x$, $0 \le x \le 1$.

7.Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного поверхностями: а) $x^2+y^2=4$, $z = 6-x-y$, $z=0$; б) $z = x^2+y^2$, $z=1$, $y=x$, $y=x^2$.

8. Используя формулу Остроградского и непосредственно, вычислить поток вектора через поверхность.

$\vec{F} = (y+z)\vec{k}$, 2x+y+2z = 2 , x = 0 , y = 0 , z = 0 .

9. Вычислить циркуляцию вектора по замкнутому контуру непосредственно и по формуле Стокса.

$\vec{F} = (x+z)\vec{i}$, L:2x+y+z = 4 , x = 0 , y = 0 , z = 0.

ЗАДАНИЯ К ЗАЧЕТУ

Вариант 1

1. Найти частные производные первого порядка от функции по x и y:
$$U = x \cdot \sin(y)$$
2. Дано: $U = 3x + 2y + 5z, M(1;2;-3), \vec{l} = \{4;-5;-2\}$ Найти: 1) значение скалярного поля в точке M; 2) определить вид линий или поверхностей уровней данного поля; 3) производную поля в точке M по направлению вектора $\vec{l}$; 4) величину и направление градиента поля в точке M.
3. Найти векторные линии: а) $\vec{F} = 4z\vec{j} - 9y\vec{k}$ б) $\vec{F} = 6x\vec{i} - 12z\vec{k}$
4. Дано: $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}, M(2;-1;1)$ Найти: 1) ротор векторного поля в точке M; 2) дивергенцию векторного поля в точке M.
5. Найти поток векторного поля через данную плоскость:
$$\vec{F} = (x-2z)\vec{i} + (3z-4x)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}, P: x+y+z-1 = 0$$
6. Найти изображение функции $f(t) = t^2 e^{-t}$

   Найти оригинал функции $F(p) = \dfrac{1}{p^2+9}$.
7. Найти общее решение дифференциальных уравнений классическим методом:

   а) $y''' = e^x + x^2$; б) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; в) $xy' = x \cdot \sin(\dfrac{y}{x}) + y$; г) $y^{IV} + 4y'' = 0$;

   д) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

8. Дано $\vec{F} = 3x^2\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + (2x-1)z\vec{k}$. Укажите, к какому виду относится данное поле: 1) потенциальному; 2) соленоидальному; 3) гармоническому.

9. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям:

1) $\begin{cases} x' + 4t - y = 0, x(0) = 2, \\ y' + 2x + y = 0, y(0) = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' + 7x - y = 0, x(0) = 1, \\ y' + 2x + 5y = 0, y(0) = 1. \end{cases}$

10. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке М(1,1,3).

11. Найти массу плоской пластины, ограниченной заданными линиями, если плотность в каждой точке равна: $\rho = x + y^2 \quad y = x^2 - x, y = 3x$

12. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y = \sqrt{x}, x = 4, z = 1, z = 0, y = 0.$

Вариант 2

1. Найти частные производные первого порядка от функции по х и у:
$$U = xz^2 + 4zx + yx + 4x - 5y + 3z$$
2. Дано: $U = e^{x^2 - y^2}, M(-1;1), \vec{l} = \{-3;-4\}$. Найти: 1) значение скалярного поля в точке М; 2) определить вид линий или поверхностей уровней данного поля; 3) производную поля в точке М по направлению вектора $\vec{l}$; 4) величину и направление градиента поля в точке М.
3. Найти векторные линии: а) $\vec{F} = 9z\vec{j} - 4y\vec{k}$, б) $\vec{F} = 2x\vec{i} - 6z\vec{k}$
4. Дано: $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}, M(-1;1;2)$ Найти: 1) ротор векторного поля в точке *M*; 2) дивергенцию векторного поля в точке *M*.
5. Найти поток векторного поля через данную плоскость:
$$\vec{F} = (x + z)\vec{i} - 2x\vec{j} + (2z - x)\vec{k}, P: 2x + 3y + z - 6 = 0$$
6. Найти изображение $f(t) = \sin^2 t$.

   Найти оригинал $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4}$.
8. Найти общее решение дифференциальных уравнений классическим методом:

   а) $y''' = x - e^{4x}$; б) $y^V + 9y''' = 0$; в) $xy' - y - xe^{\frac{y}{x}} = 0$; г) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

   д) $y'' + 9y = x^2 + 2x$

8. Дано $\vec{F} = (x^2 y + y^3)i + (x^2 - xy^2)\vec{j}$ Укажите, к какому виду относится данное поле: 1) потенциальному; 2) соленоидальному; 3) гармоническому.

9. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям:

$$1)\begin{cases} x' - 2x + y' = 0, x(0) = 2, \\ y' + 3y + 2x = 0, y(0) = -3; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x' + y' - y = 1, x(0) = 0, \\ y' + 2y + 2x' = e^t, y(0) = 1. \end{cases}$$

10. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке М(1,0,0).

11. Найти массу плоской пластины, ограниченной заданными линиями, если плотность в каждой точке равна: $\rho = x^2 + 1$ $y = x^2, y = 2x - x^2$.

12. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

$$z = 1 - x^2, x + y = 1, x \geq 0, z = 0, y = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

Вариант 1

1. Вычисление поверхностных интегралов второго рода (по площади поверхности).
2. Определение частных производных функции нескольких переменных и их вычисления.
3. Решить задания.

1) Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2) Найти общее решение дифференциального уравнения.

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 5, \quad x + y = 6.$

4) Найти производную функции $z = 5x^2 + 6x^2y^2$ в точке А(2;1) в направлении вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

5) Вычислить $\int\limits_L (x - y)dx + y^2dy$, если L: $x + y = 4, \quad 1 \le x \le 2$.

6) Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, если D: кольцо, образованное двумя окружностями R=1, R=2

Вариант 2

1. Скалярное поле. Производная по направлению. Вывод формулы.
2. Дифференциальные уравнения. Способы их решения.
3. Решить задания.

1) Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 3\ell^x$.

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, \quad x + y = 6, \quad y = 0.$

4) Найти производную функции $z = 2x^2 + 3xy + y^2$ в точке А(2;-2) в направлении вектора $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

5) Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} (x + y)dy$.

6) Вычислить $\int\limits_L xydx - (x^2 + y^2)dy$ по $x + y = 2$ от т.A(1;1) до т.B(0;2).

7) Вычислить приближенное значение функции $\sin 29^\circ \cdot \cos 59^\circ$.

Подготовка к экзамену

1. Найти частные производные:

$$а)\ z = 4\cos^3(2x - 3y); \qquad б)\ z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \ln xy^2; \qquad в)\ z = \frac{\sin(x - y)}{x^2}.$$

2. Доказать тождества:

$$а)\ Если\ \ z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3, то\ \ x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 3(x^3 - y^3);$$

$$б)\ Если\ \ z = e^{xy}, то\ \ x^2 z''_{xx} - y^2 \cdot z''_{yy} = 0.$$

3. Найти градиент и производную по направлению функции в точке A в направлении вектора $\vec{a}$ **:**

$$а)\ z = \ln\left(5x^2 + 3y^2\right),\ A(1;1),\ \vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j};$$

$$б)\ z = arctg \cdot xy^2,\ A(2;1),\ \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}.$$

4. Решить дифференциальные уравнения:

$$а)\ \sin x \cdot \sin y \cdot dy - \cos x \cdot \cos y \cdot dx = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$$

$$б)\ \left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x^2; \qquad в)\ y''' = \cos\frac{x}{2} + e^x;$$

$$г)\ y'^{\vee} - 8y' = 0; \qquad д)\ y'' - 3y' + 2y = xe^x.$$

5. Изменить порядок интегрирования:

$$а)\ \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x;y)\,dx; \qquad б)\ \int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-\frac{x}{2}}^{3-\frac{1}{2}x^2} f(x;y)\,dy.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 2x^2,\ x - y + 3 = 0;$ б) $y = x^2 + 4x,\ x - y + 4 = 0;$

в) $x^2 + y^2 = 4x,\ y^2 = 2x;$ г) $xy = 4,\ x + y = 5.$

7. Вычислить объём тела, ограниченного линиями:

а) $z = x^2 + 3y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

б) $z = y,\ z = 0,\ y = \sqrt{4 - x},\ y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}.$

8. Найти радиус и интервал сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot x^n}{n!};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{3^n} \cdot x^n;$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot x^n}{5^n \cdot \sqrt{n}};$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-6)^n}{3n+3}.$

9. Разложить функции в ряд Маклорена:

а) $y = x \cdot \cos\dfrac{x}{3};$ б) $y = x^2 \cdot \sin\dfrac{x}{2};$ в) $y = e^{-\frac{x^2}{2}};$ г) $y = x \cdot \ln(1 + x);$ д) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2};$

е) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}};$ ж) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$ з) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x^2}};$ и) $\dfrac{1}{1 + x^4}.$

10. Вычислить определённый интеграл с точностью до 0,01:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot dx;$ б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2 \cdot dx}{1 + x^4};$ в) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^3}}.$

Вариант расчетно-графической работы

1. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{3x} f(x, y)dy$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y=Sinx , y=Cosx, x=0.

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

$z = x+y+2,\quad z = 0,\quad y = x^2,\quad x = y^2.$

4. Найти площадь части поверхности $y^2 + x^2 = z$, $y^2 + x^2 = 4$.

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, x=1.

6. Вычислить криволинейные интегралы.

а) $\int\limits_L (2x+3x^2 y)dx+x^3 dy$, L: $y=\sqrt{x}$ от A(0:0) до B(1:1).

б) $\int\limits_L \frac{dl}{4x+y}$,   L: y=3x , $0 \le x \le 1$.

7.Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного поверхностями а) $x^2+y^2=4$, z = 6-x-y, z=0; б) z = x^2+y^2 , z=1, y=x , y=x^2.

9. Используя формулу Остроградского и непосредственно, вычислить поток вектора через поверхность. $\vec{F}=(y+z)\vec{k}$, 2x+y+2z = 2, x = 0, y = 0, z = 0 .

10. Вычислить циркуляцию вектора по замкнутому контуру непосредственно и по формуле Стокса. $\vec{F}=(x+z)\vec{i}$, L:2x+y+z = 4 , x = 0 , y = 0 , z = 0.

Литература

Основная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М:Наука. 1999.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.Нука, 2001.
3. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, 2001г.

Дополнительная литература

5. Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк.,2003г.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г.
7. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы: Учеб. пособие, 2001г.
8. Методические разработки кафедры. «Общей математики и информатики»:
9. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Теория вероятностей: Практикум;

10. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике.

14. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-преподавательского состава

	для специальностей 260704, 260902, 260901,							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Ефимова О.В., ассистент	АмГУ, физик	-	3	3	2	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1,3 ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	3	3	3	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1ст.
	для специальности 280101, 130301							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Терентьева Е.А., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	6	5	Вечерняя школа	Внеш. совм 0,5ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	5	5	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Костенко С.В., ст.преподаватель	МГПИ, учитель математики	-	15	15	15	АмГУ	Штатный 1 ст.

СОДЕРЖАНИЕ