Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУ ВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
______________Г. В. Литовка
«_____»_____________2007 г.

МАТЕМАТИКА

Часть 4

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ
для специальностей:
080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111

Составители: Г. Н. Торопчина,
Г. П. Вохминцева

Благовещенск 2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Г. Н. Торопчина, Г.П. Вохминцева
Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математика» для студентов очной формы обучения для специальностей: 080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007. – 239с.

Учебно-методический комплекс ориентированы на оказание помощи студентам очной формы обучения по специальностям: 080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111 при изучении курса математики.

Пояснительная записка

Роль математики в подготовке специалиста в области экономики.

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине “Математика” (Ч4) предназначен для студентов второго курса экономических специальностей.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Хороший специалист в области экономики, будучи, прежде всего практиком, должен уметь выявлять конкретные количественные закономерности и взаимосвязи экономических объектов и процессов и описывать их с помощью математических методов и моделей. Возможности экономиста, качество его работы зависит не только от того, в какой степени модель отражает объективные закономерности, но и от того, насколько адекватно и грамотно он применяет математические методы исследования.

Современная экономическая наука немыслима без построения многофакторных моделей экономической динамики, моделей оптимального управления, моделей, использующих деловые игры и исследование операций для выбора наилучших альтернатив при обосновании стратегических и оперативных решений. Подобные модели включают комплекс из многих сотен уравнений и тождеств: они могут быть линейными и нелинейными, непрерывными и дискретными, детерминированными и вероятностными.

Из выше изложенного видна необходимость высокой математической подготовки специалистов: экономистов коммерческой деятельности, экономистов банковской и страховой деятельности, менеджеров, бухгалтеров и т. д. Учебно-методический комплекс разработан в помощь студентам второго курса и включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному стандарту, учебную программу, тематический план занятий, методические указания, вопросы и тесты для контроля, образцы контрольных и расчетно-графических работ, экзаменационных билетов, методику оценки знаний, рекомендуемую литературу.

1. Цели и задачи дисциплины и её место в учебном процессе ИМТП.

Целью курса является ознакомление студентов с основными понятиями и методами исследования операций в экономике, системного анализа и математического программирования.

Основной направленностью курса является обучение студентов практическим навыкам применения основных математических средств, используемых при экономическом анализе: линейного программирования, сетевого планирования и управления, принятие оптимальных решений в конфликтных ситуациях (в условиях риска и неопределенности).

Знакомство студентов с математическими методами исследования экономики должно, кроме усвоения студентами теоретического материала, побуждать их к самостоятельному углубленному изучению этих вопросов и практическому их применению на компьютере с использованием имеющейся в настоящее время обширной литературы, что, в конечном итоге, позволит подготовить высококвалифицированных специалистов в области экономического анализа и управления.

Курс является теоретической основой для практического использования математических методов в экономике, поскольку дает навыки разработки математической модели реальной экономической ситуации, то есть учит студентов понимать, что они делают, решая конкретную задачу, и каков экономический смысл полученного ими решения. Он непосредственно подготавливает студента к использованию имеющихся в настоящее время мощных компьютерных программ типа EXCEL для решения широкого класса практических задач экономики и менеджмента.

В результате изучения дисциплины студент должен <u>знать:</u>

- основные методы исследования операций;
- основные математические модели, наиболее широко используемые для количественного анализа в менеджменте и маркетинге:

<u>уметь:</u>

- использовать аналитические и численные методы (в том числе и специализированные компьютерные программы) для решения практических задач исследования операций;
- использовать пакет Excel для решения задач исследования операций;
- проводить после оптимизационный анализ полученного решения;
- принимать правильные решения на основе компьютерного моделирования.

<u>Основные виды занятий:</u> лекции, семинары и компьютерный практикум.

<u>Использование компьютерных программ:</u> программа «Поиск решения» пакета MS EXCEL.

<u>Область профессионального использования:</u> менеджмент, финансовый анализ, маркетинг.

<u>Основные базовые дисциплины:</u>

- элементарная математика (алгебра и начала анализа, геометрия);
- элементы высшей математики (математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика);
- компьютерные технологии (MS Office, в том числе Excel).

1.2 Задачи курса

Задачами преподавания математики как фундаментальной дисциплины являются:

- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- выработка умения моделировать реальные экономические процессы;

- освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач;
- овладение численными методами решения и их реализацией на компьютере.

Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование – важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

1.3. Требования к уровню освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины будущий специалист должен:

- иметь представление о математике как особом способе познания мира, об общности и универсальности ее понятий и представлений;
- уметь использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- иметь представление о математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и доказательствах;
- знать методы и приемы обработки количественной информации;
- владеть способами наглядного графического представления результатов исследования;
- иметь понятие о математическом моделировании финансово-экономических процессов с учетом их стохастического характера;
- иметь навыки исследования моделей и оценки пределов применимости полученных результатов.

Курс «Математические методы исследования экономики» является частью профилирующих дисциплин, по которым осуществляется подготовка студентов по специальностям «Мировая экономика» и «Менеджмент организации». Он разработан в соответствии с Государственным стандартом образования РФ (Мировая экономика, Менеджмент организации, раздел

ЕН.Ф.01.Математика.) и направлен на подготовку студентов к широкому использованию ими математических методов для оценки деятельности фирмы и повышения эффективности ее работы за счет принятия адекватных конкретной ситуации оптимальных управленческих решений и снижения затрат.

2. Государственные стандарты курса учебной дисциплины «Математика»

СПЕЦИАЛЬНОСТИ: 080105, 080102, 080109.

Экономико-математические методы: линейное и целочисленное программирование; графический метод и симплекс-метод решения задач линейного программирования; динамическое программирование; математическая теория оптимального управления; матричные игры; кооперативные игры; игры с природой; плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы; орграфы; сетевые графики; сети Петри; марковские процессы; задачи анализа замкнутых и разомкнутых систем массового обслуживания.

СПЕЦИАЛЬНОСТИ: 080111, 080507, 080502, 080504

Экономико-математические методы: линейное и целочисленное программирование; графический метод и симплекс-метод решения задач линейного программирования; динамическое программирование; рекуррентные соотношения Беллмана; математическая теория оптимального управления; матричные игры; кооперативные игры; игры с природой; плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы; орграфы; сетевые графики; сети Петри; марковские процессы; задачи анализа замкнутых и разомкнутых систем массового обслуживания.

3. **Содержание программы курса «Экономико – математические методы».**

<u>Раздел 1. Основы математической теории оптимального управления.</u>

Тема 1. Управление производственной системой.

Сложная система. Понятие о системном подходе и системном анализе сложной экономической системы. Предприятие как сложная экономическая система, его структурный граф и взаимодействие с окружающей средой.

Производственная система и система управления. Предпосылки эффективного управления производственной системой. Логическая формула процесса управления.

Роль и место математического моделирования в решении задач управления предприятием (фирмой). Математическая модель и этапы ее построения в деятельности менеджера.

Тема 2. Математические основы оптимального управления.

Исследование операций. Понятие «операция», «цель операции», «стратегия», «критерий эффективности», «целевая функция управления». Основные задачи, стоящие перед лицом, принимающим решение. Общая математическая постановка задачи оптимального управления. Основные идеи оптимизации управления в условиях определенности, риска и неопределенности.

Классификация экономико-математических методов.

<u>Раздел 2. Программирование на графах.</u>

Тема 3. Основные понятия теории графов. Виды графов.

Плоские графы, орграфы, эйлеровы и гамильтоновы графы. Сети Петри.

Тема 4. Основы сетевого планирования и управления.

Сетевой график как математическая модель выполнения комплекса взаимосвязанных работ (проекта). Достоинства и недостатки методов сетевого планирования и управления. Методы CPM и PERT; сходство и различия между ними. Алгоритм построения сетевого графика. Временные параметры сетевого графика и схема их расчета.

Линейный график работ и шкала потребления ресурсов. Календарный план выполнения работ проекта и его построение на основе линейного графика работ. Оптимизация сетевого графика методами «время-стоимость» и по времени выполнения проекта в условиях ограниченности ресурсов.

Ознакомление с существующими компьютерными программами управления проектами на основе использования сетевых методов.

Раздел 3. Линейное программирование и двойственные задачи.

Тема 5. Математическое программирование.

Понятие о математическом программировании. Примеры задач из различных областей экономики и менеджмента, решаемых методами математического программирования. Классификация методов математического программирования.

Тема 6. Линейное программирование.

Линейное программирование как часть математического программирования. Примеры экономических задач, решаемых методами линейного программирования, их математическая модель. Формы записи задачи линейного программирования (ЗЛП), их эквивалентность и способы взаимного преобразования. Базисные и свободные переменные в линейном программировании.

Графический метод решения ЗЛП, его алгоритм. Симплексный метод решения ЗЛП, его алгоритм и симплексная таблица. Симплексные преобразования и их экономический смысл. Признак оптимальности решения ЗЛП. Признаки существования множества оптимальных решений задачи и неограниченности целевой функции.

Тема 7. Двойственность в линейном программировании.

Задача торга как пример двойственной задачи линейного программирования. Математическая модель двойственной задачи линейного программирования. Теневые цены на ресурсы и их экономический смысл. Связь математических моделей прямой и двойственной задач. Основные теоремы теории двойственности и их экономическое содержание.

Нахождение решения двойственной задачи из симплексной таблицы прямой задачи. Экономический смысл дополнительных переменных прямой и двойственной задач. Чувствительность решения задачи линейного программирования к изменению коэффициентов целевой функции и запасов ресурсов. Решение вопроса о целесообразности выпуска предприятием новых видов продукции на прежней ресурсной базе.

Тема 8. Решение задач оптимизации в EXCEL.

Работа с программой “Поиск решения”. Нахождение оптимального решения ЗЛП. Отчеты по результатам, по устойчивости и по пределам изменения управляемых переменных и использование этих отчетов для решения практических задач менеджмента.

<u>Раздел 4. Нелинейное программирование.</u>

Тема 9. Понятие о нелинейном программировании.

Примеры экономических задач, решаемых методами линейного программирования, их математическая модель. Понятие о выпуклом программировании. Решение задач нелинейного программирования в EXCEL.

<u>Раздел 5. Целочисленное программирование.</u>

Тема 10. Особенности и математическая модель задачи целочисленного программирования (ЗЦП).

Понятие о решении решение ЗЦП методом ветвей и границ. Решение ЗЦП в EXCEL. Использование бинарных переменных для решения экономических задач с логической структурой.

<u>Раздел 6. Транспортная задача.</u>

Тема 11. Математическая модель транспортной задачи.

Формулировка транспортной задачи по критерию стоимости. Построение математической модели транспортной задачи. Сбалансированные и несбалансированные модели ТЗ.

Построение начального плана перевозок методом минимального элемента.

Тема 12. Решение транспортной задачи.

Решение ТЗ методом потенциалов. Использование EXCEL для решения ТЗ. Экономические задачи, сводящиеся к транспортной модели: задача о назначениях, распределительные задачи.

<u>Раздел 7. Основы теории игр и статистических решений.</u>

Тема 13. Конфликтные ситуации в экономике и теория игр.

Предмет, основные понятия и классификация теории игр. Теория игр как основная математическая модель конфликтной ситуации. Матричные игры двух лиц с нулевой суммой. Принцип оптимальности стратегий игроков в парной матричной игре с нулевой суммой.

Тема 14. Решение игры в чистых стратегиях.

Нахождение седловой точки платежной матрицы игры. Решение парной матричной игры в чистых стратегиях. Экономические примеры.

Тема 15. Решение матричных игр в смешанных стратегиях.

Основные теоремы теории матричных игр. Решение матричных игр в смешанных стратегиях. Доминирующие, доминируемые и дублирующие стратегии игроков, и их использование для упрощения платежной матрицы игры. Графоаналитический метод решения парной матричной игры в смешенных стратегиях. Приведение парной антагонистической матричной игры к паре симметричных двойственных задач линейного программирования. Транспортная задача в усложнённой постановке. Задача о назначениях как пример целочисленной задачи линейного программирования.

Тема 16. Статистические игры.

Игры с природой. Отличия антагонистической матричной игры от статистической. Матрица рисков. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица выбора оптимальной чистой стратегии статистика. Решение статистической игры в смешанных стратегиях. Примеры решения экономических задач.

Тема 17. Кооперативные игры.

Понятие о кооперативной игре. Множество решений, оптимальных по Парето. Точка угрозы. Переговорное множество. Точка решения Нэша.

4. Рекомендации по изучению курса.

Тема 1. Управление производственной системой.

При изучении данной темы следует обратить внимание на:

- усвоение понятий «система», «сложная система» и характерных особенностей сложной системы;
- усвоение понятий «системный подход» и «системный анализ»;
- усвоение фундаментальных понятий «производственная система» и «система управления»;
- ясно представлять, что такое управление экономической (производственной) системой;
- знать основные предпосылки эффективного управления;
- понимать основные различия между производственной системой и системой управления;
- знать основную логическую формулу управления;
- хорошо представлять себе, что такое математическая модель, её преимущества при исследовании экономических задач;
- ясно представлять все этапы построения математической модели в деятельности современного менеджера;

Тема 2. Математические основы оптимального управления.

При изучении данной темы необходимо:

- иметь понятие об операции, стратегии и основных задачах лица, принимающего решения;

- знать, что такое целевая функция управления и в чём её отличие от цели управляемой системы;
- хорошо понимать особенности принятия решений в условиях определённости, риска и неопределённости;
- иметь представление об общей математической постановке задачи исследования операций;
- знать, что такое многокритериальная оптимизации в экономике и иметь представление об особенностях принятия оптимального решения по нескольким критериям эффективности;
- знать краткую классификацию экономико-математических методов.

Тема 3. Основные понятия теории графов. Виды графов.

Плоские графы, орграфы, эйлеровы и гамильтоновы графы. Сети Петри.

При изучении данной темы необходимо:

- усвоить основные понятия теории графов (граф, плоский граф, вершина, дуга, путь, полный путь, эйлеров граф, гамильтонов граф, орграф);
- сеть Петри, особенность этого графа и экономические модели, в которых он используется.

Тема 4. Основы сетевого планирования и управления.

При изучении данной темы необходимо:

- знать основные понятия методов СПУ (сетевые методы и модели, сетевой график);
- знать виды сетевых методов и моделей (CPM и PERT);
- знать преимущества и области применения методов СПУ;
- знать, что такое «работа», «событие», «фиктивная работа», «полный путь» сетевого графика;
- знать правила построения сетевого графика;

- знать о роли фиктивных работ при построении сетевого графика;
- знать алгоритм построения сетевого графика;
- уметь строить сетевой график реального проекта;
- находить критический путь и критический срок сетевого графика, знать экономический смысл критического срока;
- знать методы расчёта раннего и полного сроков свершения события, резерва времени события;
- знать методы расчёта полного резерва времени работы;
- строить линейный график работ проекта и шкалу потребления ресурса;
- понимать смысл оптимизации сетевого графика, знать виды и цели оптимизации;
- владеть эвристическим методом оптимизации сетевого графика по минимизации общего времени выполнения проекта при ограниченности ресурсов.

5. Темы лекций

1. Выпуклые множества.
2. Общая задача линейного программирования, графический способ решения.
3. Двойственные задачи линейного программирования.
4. Анализ плана выпуска продукции с использованием двойственных оценок.
5. Целочисленное программирование.
6. Транспортная задача.
7. Транспортная задача.
8. Динамическое программирование.
9. Динамическое программирование.
10. Управление запасами.
11. Управление запасами.

12.Сетевые модели.

13.Сетевые модели.

14. Сетевые модели.

15. Модели массового обслуживания.

16. Элементы теории игр.

17. Элементы теории игр.

18. Обзорная лекция.

6. Календарный план занятий по математике в I семестре

№ нед	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Контроль
1	Моделирование экономических систем. Основные понятия и определения.	Классические методы оптимизации	Выполнение Д.З.	
2	Общая задача линейного программирования, графический способ решения.	Модели планирования рыночной экономики.	Выполнение Д.З.	Выдача РГР №1
3	Двойственные задачи линейного программирования	Графическое решения задач линейного программирования	Выполнение Д.З.	К.Р. (30 мин.)
4	Анализ плана выпуска продукции с использованием двойственных оценок.	Алгоритм симплекс-метода.	Выполнение РГР	
5	Целочисленное программирование.	Алгоритм симплекс-метода.	Выполнение РГР	
6	Транспортная задача.	Решение взаимно-двойственных задач линейного программирования	Выполнение РГР	
7	Транспортная задача.	Определения оптимального выпуска продукции и его анализ.	Выполнение РГР	К.Р. (30 мин.)
8	Динамическое программирование.	Транспортная задача.	Выполнение РГР	
9	Динамическое программирование.	Задача оптимального размещения производства.	. Выполнение РГР	
10	Управление запасами.	Динамическое программирование.	Выполнение РГР	К.Р. (40 мин.).
11	Управление запасами.	Динамическое программирование.	Выполнение Д.З.	Защита РГР №1. Выдача

				РГР №2
12	Сетевые модели.	Управление запасами.	Выполнение РГР №2	К.Р. (40 мин.).
13	Сетевые модели.	Управление запасами.	Выполнение РГР №2	Защита РГР №2. Выдача РГР №3
14	Сетевые модели.	Расчет основных показателей сетевого графика.	Выполнение РГР №3	
15	Модели массового обслуживания.	Расчет основных показателей сетевого графика.	Выполнение РГР №3	
16	Элементы теории игр.	Задачи и модели систем массового обслуживания.	Изучение материала и выполнение Д.З. и РГР	
17	Элементы теории игр.	Задачи и модели систем массового обслуживания.	Выполнение Д.З. и РГР	Защита РГР №3.
18	Обзорная лекция.	Элементы теории игр.		

<u>Конспект лекций</u>

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Возникновение и развитие системных представлений

Научно-техническая революция привела к возникновению таких понятий, как *большие и сложные экономические системы*, обладающие специфическими для них проблемами. Необходимость решения таких проблем привела к появлению особых подходов и методов, которые постепенно накапливались и обобщались, образуя, в конце концов, особую науку - системный анализ.

В начале 80-х годов системность стала не только теоретической категорией, но и осознанным аспектом практической деятельности. Широко распространилось понятие того, что наши успехи связаны с тем, насколько системно мы подходим к решению возникающих проблем, а наши неудачи вызваны отсутствием системности в наших действиях. Сигналом о недостаточной системности в нашем подходе к решению какой-либо задачи является появление проблемы, разрешение же возникшей проблемы происходит, как правило, при переходе на новый, более высокий, уровень системности нашей деятельности. Поэтому системность не только состояние, но и процесс.

В различных сферах человеческой деятельности возникли различные подходы и соответствующие методы решения специфических проблем, которые получили различные названия: в военных и экономических вопросах - *«исследование операций»*, в политическом и административном управлении - *«системный подход»*, в философии *«диалектический материализм»*, в прикладных научных исследованиях - *«кибернетика»*. Позже стало ясно, что все эти теоретические и прикладные дисциплины образуют как бы единый поток, «системное движение», которое постепенно оформилось в науку, получившую название «системный анализ». В настоящее время системный анализ является самостоятельной дисциплиной, имеющей свой объект деятельности, свой достаточно мощный арсенал средств и свою прикладную область. Являясь по существу прикладной диалектикой, системный анализ использует все средства современных научных исследований - математику, моделирование, вычислительную технику и натурные эксперименты.

- ***Самая интересная и сложная часть системного анализа*** - это «вытаскивание» проблемы из реальной практической задачи, отделение важного от несущественного, поиск правильной формулировки для каждой из возникающих проблем, т.е. то, что называется «постановкой задачи».

Многие довольно часто недооценивают работу, связанную с формулировкой задачи. Однако многие специалисты полагают, что «хорошо поставить задачу - значит на половину ее решить». Хотя в большинстве случаев заказчику кажется, что он уже сформулировал свою проблему, системный аналитик знает, что предлагаемая клиентом постановка задачи является моделью его реальной проблемной ситуации и неизбежно имеет целевой характер, оставаясь приблизительной и упрощенной. Поэтому необходимо проверить эту модель на адекватность, что приводит к развитию и уточнению первоначальной модели. Очень часто первоначальная формулировка изложена в терминах не тех языков, которые необходимы для построения модели.

Модели и моделирование. Классификация моделей

Первоначально моделью называли некое вспомогательное средство, объект, который в определенных ситуациях заменял другой объект. Например, манекен в определенном смысле заменяет человека, являясь моделью человеческой фигуры. Древние философы считали, что отобразить природу можно только с помощью логики и правильных рассуждений, т.е. по современной терминологии с помощью языковых моделей. Через несколько столетий девизом английского Научного общества стал лозунг: «Ничего словами!», признавались только выводы, подкрепленные экспериментально или математическими выкладками.

<u>В настоящее время для постижения истины существует 3 пути:</u>

1. теоретическое исследование;
2. эксперимент;
3. моделирование.

Моделью называется объект-заместитель, который в определенных условиях может заменять объект-оригинал, воспроизводя интересующие нас свойства и характеристики оригинала, причем имеет существенные преимущества:

- дешевизну;
- наглядность;

- легкость оперирования и т.п.

В теории моделей ***моделированием*** называется результат отображения одной абстрактной математической структуры на другую - тоже абстрактную, либо как результат интерпретации первой модели в терминах и образах второй.

Развитие понятия модели вышло за пределы математических моделей и стало относиться к любым знаниям и представлениям о мире. Поскольку модели играют чрезвычайно важную роль в организации любой деятельности человека их можно разделить на *познавательные (когницитивные) и прагматические*, что соответствует делению целей на *теоретические и практические*.

Познавательная модель ориентирована на приближении модели к реальности, которую эта модель отображает. Познавательные модели являются формой организации и представления знаний, средством соединения новых знаний с имеющимися. Поэтому при обнаружении расхождения между моделью и реальностью встает задача устранения этого расхождения с помощью изменения модели.

Прагматические модели являются средством управления, средством организации практических действий, способом представления образцово правильных действий или их результата, т.е. являются рабочим представлением целей. Поэтому при обнаружении расхождения между моделью и реальностью надо направить усилия на изменение реальности так, чтобы приблизить реальность к модели. Таким образом, прагматические модели носят нормативный характер, играют роль образца, под который подгоняется действительность. *Примерами прагматических моделей служат планы, кодексы законов, рабочие чертежи и т.д.*

Другим принципом классификации целей моделирования может служить деление моделей на *статические и динамические*.

Для одних целей нам может понадобиться модель конкретного состояния объекта в определенный момент времени, своего рода «моментальная фотография» объекта. Такие ***модели называются статическими***. *Примером являются структурные модели систем.*

В тех же случаях, когда возникает необходимость в отображении процесса изменения состояний, требуются ***динамические модели*** систем.

В распоряжении человека имеется два типа материалов для построения моделей - средства самого сознания и средства окружающею материального мира. Соответственно этому модели делятся на *абстрактные (идеальные) и материальные*.

Очевидно, что к ***абстрактным моделям*** относятся языковые конструкции и математические модели. Математические модели обладают наибольшей точностью, но чтобы дойти до их использования в данной области, необходимо получить достаточное количество знаний. По мнению Канта, любая отрасль знания может тем более именоваться наукой, чем в большей степени в ней используется математика.

Адекватность моделей

Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, будем называть ***адекватной*** этой цепи. Адекватность означает, что требования полноты, точности и правильности (истинности) модели выполнены не вообще, а лишь в той мере, которая достаточна достижения поставленной цели.

В ряде случаев удается ввести меру адекватности некоторых целей, т.е. указать способ сравнения двух моделей по степени успешности достижения цели с их помощью. Если к тому же есть способ количественно выразить меру адекватности, то задача улучшения модели существенно облегчается. Именно в таких случаях можно количественно ставить, вопросы об идентификации модели т.е. о нахождении в заданном классе моделей наиболее адекватной, об исследовании чувствительности и устойчивости моделей т.е. зависимости меры адекватности модели от ее точности, об адаптации моделей, т.е. подстройке параметров модели с целью повышения ее точности.

Приближенность модели не следует путать с адекватностью. Приближенность модели может быть очень высокой, но во всех случаях модель - это другой объект и различия неизбежны (единственной совершенной моделью любого объекта является сам объект). Величину, меру, степень приемлемости различия можно ввести, только соотнося его с целью моделирования.

Есть один, довольно загадочный, аспект упрощенности модели. Почему-то оказывается, что из двух моделей, одинаково хорошо описывающих систему, та модель, которая проще, ближе к истине. Древние говорили, что простота - печать истины.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

Понятие операционного исследования

Впервые математические модели были использованы для решения практической задачи в 30-х годах в Великобритании при создании системы противовоздушной обороны. Для разработки данной системы были привлечены ученые различных специальностей. Система создавалась в условиях неопределенности относительно возможных действий противника, поэтому исследования проводились на адекватных математических моделях. В это время впервые был применен термин: «операционное исследование», подразумевающий исследования военной операции. В последующие годы операционные исследования или исследования операций развиваются как наука, результаты которой применяются для выбора оптимальных решений при управлении реальными процессами и системами.

Решения человек принимал всегда и во всех сферах своей деятельности. Раньше хотели, чтобы принимаемые решения всегда были правильными. Теперь принято говорить, что решения должны быть оптимальными. Чем сложнее объект управления, тем труднее принять решение, и, следовательно, тем легче допустить ошибку. Вопросам принятия решений на основе применения ЭВМ и математических моделей посвящена новая наука ***«Исследование операций»***, приобретающая в последние годы все более обширное поле приложений. Эта наука сравнительно молодая, ее границы и содержание нельзя считать четко определенными.

Предмет под названием «Исследование операций» входит в программу элитарных вузов, но не всегда в этот термин вкладывается одно и то же содержание. Некоторые ученые под «исследованием операций» понимают, главным образом, математические методы оптимизации, такие как линейные, нелинейные, динамическое программирование. Другие к исследованию операций подходят с позиции теории игр и статистических решений. Наконец, некоторые ученые вкладывают в понятие «исследование операций» чрезмерно широкий смысл, считая ее основой системного анализа и «наукой наук».

Под термином ***«исследование операций»*** мы будем понимать применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Окончательно термин «исследование операций» закрепился в конце Второй мировой войны, когда в вооруженных силах США были сформированы специальные группы математиков и программистов, в задачу которых входила подготовка решений для командующих боевыми действиями. В дальнейшем исследование операций расширило область своих применений на самые разные области практики: экономика, транспорт, связь и даже охрана природы.

Чтобы человеку принять решение без ЭВМ, зачастую ничего не надо, кроме опыта и интуиции. Правда, никакой гарантии правильности, а тем более оптимальности при этом нет. Подчеркнем, что ЭВМ никаких решений не принимает. Решение принимает человек (ЛПР). А ЭВМ только помогает найти варианты решений. Непременное присутствие человека (как окончательный инстанции принятия решений) не отменяется даже при наличии полностью автоматизированной системы управления. Нельзя забывать о том, что само создание управляющего алгоритма, выбор одного из возможных его вариантов, есть тоже решение. По мере автоматизации управления функции человека перемещаются с одного уровня управления на другой - высший.

<u>Выбор задачи - важнейший вопрос. Какие основные требования должна удовлетворять задача? Таких требований два:</u>

Должно существовать, как минимум, два варианта ее решения (ведь если вариант один, значит и выбирать не из чего);

Надо четко знать в каком смысле искомое решение должно быть наилучшим (кто не знает, куда ему плыть - тому нет и попутного ветра).

Выбор задачи завершается ее содержательной постановкой. Когда производится содержательная постановка задачи, к ней привлекаются специалисты в предметной области. Они прекрасно знают свой конкретный предмет, но не всегда представляют, что требуется для формализации задачи и представления ее в виде математической модели.

Хорошую модель составить не просто. Известный математик Р.Беллман сказал так: «Если мы попытаемся включить в нашу модель слишком много черт действительности, то захлебнемся в сложных уравнениях; если слишком упростим ее, то она перестанет удовлетворять нашим требованиям». Таким образом, исследователь должен пройти между западнями Переупрощения и болотом Переусложнения. Для выполнения успеха моделирования надо выполнить три правила, которые, по мнению древних, являются признаками мудрости. Эти правила применительно к задачам математического моделирования и формулируются так: учесть главные свойства моделируемого объекта; пренебрегать его второстепенными свойствами; уметь отделить главные свойства от второстепенных.

Составление модели - это искусство, творчество. Древние говорили: «Если двое смотрят на одно и то же, это не означает, что оба видят одно и то же». И слова древних греков: «Если двое делают одно и то же, это не значит, что получится одно и то же». Эти слова в полной мере относятся к составлению математических моделей. *Если математическая модель - это диагноз заболевания, то алгоритм - это метод лечения.*

<u>Можно выделить следующие основные этапы операционного исследования:</u>

1. наблюдение явления и сбор исходных данных;
2. постановка задачи;
3. построение математической модели;
4. расчет модели;
5. тестирование модели и анализ выходных данных. Если полученные результаты не удовлетворяют исследователя, то следует либо вернуться на этап 3, т.е. предложить для решения задачи другую математическую модель; либо вернуться на этап 2, т.е. поставить задачу более корректно;
6. применение результатов исследований.

Таким образом, операционное исследование является итерационным процессом, каждый следующий шаг которого приближает исследователя к решению стоящей перед ним проблемы. В центре операционного исследования находятся построение и расчет математической модели.

Математическая модель - это система математических соотношений, приближенно, в абстрактной форме описывающих изучаемый процесс или систему.

Экономико-математическая модель - это математическая модель, предназначенная для исследования экономической проблемы.

Проведение операционного исследования, построение и расчет математической модели позволяют проанализировать ситуацию и выбрать оптимальные решения по управлению ею или обосновать предложенные решения. Применение математических моделей необходимо в тех случаях, когда проблема сложна, зависит от большого числа факторов, по-разному влияющих на ее решение.

Использование математических моделей позволяет осуществить предварительный выбор оптимальных или близких к ним вариантов решений по определенным критериям. Они научно обоснованы, и лицо, принимающее решение, может руководствоваться ими при выборе окончательного решения. Следует понимать, что не существует решений, оптимальных «вообще». Любое решение, полученное при расчете математической модели, оптимально по одному или нескольким критериям, предложенным постановщиком задачи и исследователем.

В настоящее время математические модели применяются для анализа, прогнозирования и выбора оптимальных решений в различных областях экономики. Это планирование и оперативное управление производством, управление трудовыми ресурсами, управление запасами, распределение ресурсов, планировка и размещение объектов, руководство проектом, распределение инвестиций и т.п.

Классификация и принципы построения математических моделей

<u>Можно выделить следующие основные этапы построения математической модели:</u>

1. Определение цели, т.е. чего хотят добиться, решая поставленную задачу.

2. Определение параметров модели, т.е. заранее известных фиксированных факторов, на значения которых исследователь не влияет.

3. Формирование управляющих переменных, изменяя значение которых можно приближаться к поставленной цели. Значения управляющих переменных являются решениями задачи.

4. Определение области допустимых решений, т.е. тех ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.

5. Выявление неизвестных факторов, т.е. величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.

6. Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы, т.е. формирование целевой функции, называемой также критерием эффективности или критерием оптимальности задачи.

Введем следующие условные обозначения:

α - параметры модели;

x - управляющие переменные или решения;

X - область допустимых решений;

ξ - случайные или неопределенные факторы;

W - целевая функция или критерий эффективности (критерий оптимальности).

$$\mathbf{W=W\ (x,\ \alpha,\ \xi)}$$

В соответствии с введенными терминами, математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\mathbf{W=W\ (x,\ \alpha,\ \xi) \rightarrow max\ (min)} \qquad x \in X \qquad (2.1)$$

Решить задачу - это значит найти такое оптимальное решение $x^* \in X$, чтобы при данных фиксированных параметрах α и с учетом неизвестных ξ факторов значения критерия эффективности ***W*** было по возможности максимальным (минимальным).

$$\mathbf{W^*=W\ (x^*,\ \alpha,\ \xi) = max\ (min)\ W\ (x,\ \alpha,\ \xi)} \qquad x \in X$$

Таким образом, ***оптимальное решение*** - это решение, предпочтительное перед другими по определенному критерию эффективности (одному или нескольким).

Перечислим некоторые основные принципы построения математической модели:

1. Необходимо соизмерять точность и подробность модели, во-первых, с точностью тех исходных данных, которыми располагает исследователь, и, во-вторых, с теми результатами, которые требуется получить.

2. Математическая модель должна отражать существенные черты исследуемого явления и при этом не должна его сильно упрощать.

3. Математическая модель не может быть полностью адекватна реальному явлению, поэтому для его исследования лучше использовать несколько моделей, для построения которых применены разные математические методы. Если при этом получаются сходные результаты, то исследование заканчивается. Если результаты сильно различаются, то следует пересмотреть постановку задачи.

4. Любая сложная система всегда подвергается малым внешним и внутренним воздействиям, следовательно, математическая модель должна быть устойчивой (сохранять свойства и структуру при этих воздействиях).

По числу критериев эффективности математические модели делятся на *однокритериальные и многокритериальные*. Многокритериальные математические модели содержат два и более критерия.

По учету неизвестных факторов математические модели делятся на *детерминированные, стохастические и модели с элементами неопределенности*.

В ***стохастических моделях*** неизвестные факторы - это случайные величины, для которых известны функции распределения и различные статистические характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение и т.п.). Среди стохастических характеристик можно выделить:

- модели стохастического программирования, в которых либо в целевую функцию ***(2.1)***, либо в ограничения ***(2.2)*** входят случайные величины;

- модели теории случайных процессов, предназначенные для изучения процессов, состояние которых в каждый момент времени является случайной величиной;

- модели теории массового обслуживания, в которой изучаются многоканальные системы, занятые обслуживанием требований. Также - к стохастическим моделям можно отнести модели теории полезности, поиска и принятия решений.

Для моделирования ситуаций, зависящих от факторов, для которых невозможно собрать статистические данные и значения которых не определены, используются ***модели с элементами неопределенности***.

В ***моделях теории игр*** задача представляется в виде игры, в которой участвуют несколько игроков, преследующих разные цели, например, организацию предприятия в условиях конкуренции.

В ***имитационных моделях*** реальный процесс разворачивается в машинном времени, и прослеживаются результаты случайных воздействии на него, например, организация производственного процесса.

В ***детерминированных моделях*** неизвестные факторы не учитываются. Несмотря на кажущуюся простоту этих моделей, к ним сводятся многие практические задачи, в том числе большинство экономических задач. По виду целевой функции и ограничений детерминированные модели делятся на: *линейные, нелинейные, динамические и графические*.

В ***линейных моделях*** целевая функция и ограничения линейны по управляющим переменным. Построение и расчет линейных моделей являются наиболее развитым разделом математического моделирования, поэтому часто к ним стараются свести и другие задачи либо на этапе постановки, либо в процессе решения. Для линейных моделей любого вида и достаточно большой размерности известны стандартные методы решения.

Нелинейные модели - это модели, в которых либо целевая функция, либо какое-нибудь из ограничений (либо все ограничения) нелинейны по управляющим переменным. Для нелинейных моделей нет единого метода расчета. В зависимости от вида нелинейности, свойств функции и ограничений можно предложить различные способы решения. Однако может случится и так, что для поставленной нелинейной задачи вообще не существует метода расчета. В этом случае задачу следует упростить, либо сведя ее к известным линейным моделям, либо просто линеаризовав модель.

В ***динамических моделях***, в отличие от статических линейных и нелинейных моделей, учитывается фактор времени. Критерий оптимальности в динамических моделях может быть самого общего вида (и даже вообще не быть функцией), однако для него должны выполняться определенные свойства. Расчет динамических моделей сложен, и для каждой конкретной задачи необходимо разрабатывать специальный алгоритм решения.

Графические модели - используются тогда, когда задачу удобно представить в виде графической структуры.

3. Выпуклые множества

Предварительно дадим некоторые понятия, весьма важные для линейного программирования.

Множество точек называется выпуклыми, если оно вместе с любыми двумя точками содержит отрезок, соединяющий эти точки. Простейшими примерами выпуклых множеств могут служить: отрезок, треугольник, квадрат, некоторые геометрические тела, например, пирамида, куб и т.д.

заметим, что выпуклый многоугольник обладает тем свойством, что весь расположен по одну сторону каждой из прямых, участвующих в ее образовании.

Выпуклой линейной комбинацией точек $M_1, M_2, \ldots M_n$ называется любая точка M такая, что:

$$\mathbf{M=a_1M_1+a_2M_2 + \ldots +a_nM_n,}$$

где $a_i \geq 0$ и $a_1+a_2+ \ldots +a_n=1$.

Обобщая сказанное выше, можно сказать, что ***множество точек называется выпуклым***, если вместе с любыми своими точками оно содержит и выпуклую произвольную комбинацию этих точек. Поскольку произвольная точка отрезка представляет собой выпуклую комбинацию его концов, то это и означает, что выпуклое множество вместе с двумя данными точками содержит весь соединяющий их отрезок.

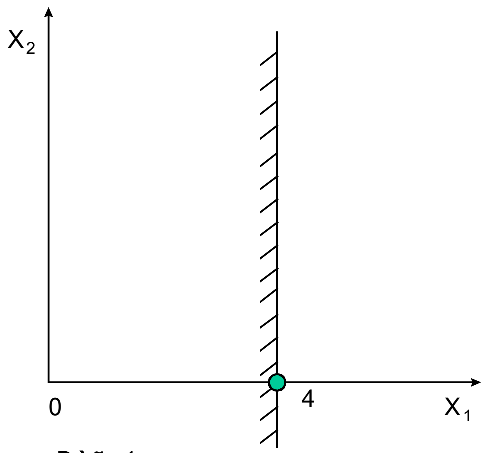
Очевидно, что всякая точка выпуклого многоугольника, лежащая внутри его или на одной из сторон, за исключением вершин, может быть представлена как выпуклая линейная комбинация других точек этого многоугольника. Напротив, вершины многоугольника не представляются в виде выпуклой комбинации двух каких-нибудь других точек. В этом смысле вершины многоугольника называют экстремальными точками.

Прямая линия называется опорной, если она имеет с выпуклым многоугольником, по крайней мере, одну общую точку и весь многоугольник расположен по одну сторону от этой прямой. Через каждую из вершин многоугольника можно провести бесконечное множество опорных линий. В пространстве трех измерений, по аналогии с понятием опорной прямой вводится понятие опорной плоскости.

Опорной плоскостью называется всякая плоскость, имеющая с выпуклым многогранником, по крайней мере, одну общую точку, причем такую, что весь многогранник расположен по одну сторону от нее. Опорная плоскость может иметь с выпуклым многогранником общую точку (вершину многогранника), прямую (ребро), и, наконец, общую грань.

Линейные неравенства

Рассмотрим подробнее системы линейных неравенств и покажем, что решение их тесно связано с понятиями выпуклого многоугольника и выпуклого многогранника.



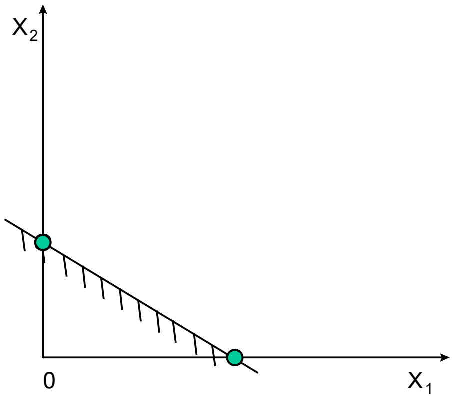
Đèñ. 1

Для начала рассмотрим неравенство с одной переменной величиной x_1, например $x_1 < 4$. Если на плоскости провести прямую $x_1=4$, то она разделит всю плоскость на две части - полуплоскости: в одной из них, а именно слева от прямой $x_1=4$, лежат точки, абсциссы которых меньше *4*, а справа от прямой - точки, абсциссы которых больше *4*. Таким образом, неравенство $x_1<4$ геометрически определяет полуплоскость ***(Рис.1)***. Рассмотрим теперь неравенство с двумя переменными типа $3x_1+4x_2 < 12$. Построим прямую линию $3x_1+4x_2=12$. Разделим обе части уравнения на *12*:

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} = 1$$

из которого видно, что прямая отсекает по осям отрезки, равные *4* и *3*.

Неравенство $3x_1+4x_2 < 12$ определяет собой совокупность всех точек плоскости, лежащих ниже прямой, т.е. в заштрихованной части ***(Рис. 2)***.

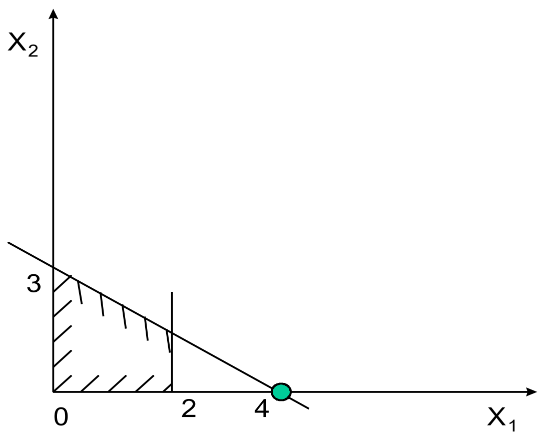


Ðèñ. 2

Чтобы легче было понять, какую именно полуплоскость определяет то или иное неравенство, мы в левую часть неравенства подставим координаты начала координат, т.е. $x_1=0$ и $x_2=0$. Если неравенство удовлетворяется, то оно определяет ту полуплоскость, в которой лежит начало координат, в противном случае - другую полуплоскость. Пользуясь геометрическими соображениями, найти возможные решения системы:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2 \leq 12 \\ x_1 < 2 \\ x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0 \end{cases}$$

Каждое из неравенств системы определяет полуплоскость, отмеченную на ***Рис.3*** штрихами.



Ðèñ. 3

Полученный многоугольник является выпуклым, ибо вместе с любыми двумя точками содержит весь соединяющий их отрезок. Таким образом, мы видим, что выпуклый многоугольник можно задать аналитически, с помощью системы линейных неравенств. Линейное уравнение с тремя переменными: $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$ определяет в пространстве некоторую плоскость, которая рассекает все пространство на два полупространства.

В связи с этим неравенство $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \leq b_1$ определяет одно из полупространств, к которому принадлежит также и сама граничная плоскость. В общем случае, когда система неравенств совместна, пространство решений образует некоторый выпуклый многогранник - многогранник решений. Частным случаем его могут быть: отдельная грань, ребро или точка. Последнее имеет место, когда система неравенств имеет одно единственное решение. Дальнейшие обобщения приводят нас к рассмотрению m линейных неравенств с n неизвестными. Каждое уравнение $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ \dots +a_{in}x_n=b_i$ является уравнением некоторой гиперплоскости в n-мерном пространстве, которая как бы рассекает все пространство на два полупространства.

Значения линейной формы на выпуклом множестве

Предположим, что задана некоторая система из m-линейных неравенств (или уравнений) с n переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$. Система неравенств в случае совместности определяет некоторое выпуклое множество в n-мерном пространстве, ограниченное или бесконечное (многогранник решений).

Допустим далее, что нам задана некоторая линейная форма от этих переменных, определяющая функцию цели:

$$\boldsymbol{f=c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n}$$

В каждой точке выпуклого множества, т.е. для каждого решения нашей системы, линейная форма f принимает определенное значение. Возникает вопрос: в каких точках выпуклого множества линейная форма f достигает своего наибольшего и наименьшего значения, если, конечно, такие существуют? Решение общей задачи линейного программирования сводится, таким образом, к нахождению точек выпуклого множества, в которых заданная линейная форма достигает оптимального значения, и мы ищем такие точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых неотрицательны. Сформулируем одно важное утверждение, облегчающее решение задачи.

В тех случаях, когда множество решений задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник, линейная форма достигает оптимального значения в одной из его вершин, в связи с чем последние и называются ***экстремальными точками***.

В общем случае, линейная форма $f=c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n$ задает гиперплоскость в n-мерном пространстве. При $f=0$ эта гиперплоскость проходит через начало координат. Затем передвигаем эту плоскость параллельно самой себе в направлении вектора P перпендикулярно к этой плоскости. Первая из вершин, в которой линейная форма (гиперплоскость) встретит выпуклый многогранник, будет точкой, в которой линейная форма достигает наименьшего значения, а последняя из вершин - точкой, в которой линейная форма достигает наибольшего значения.

Может случиться, что гиперплоскость окажется параллельной одной из граней или ребер выпуклого многогранника, и тогда линейная форма f достигает своего наименьшего или наибольшего значения в любой точке, лежащей на этом ребре. Но и тогда она достигает эти значения в вершине, лежащей на этом ребре.

Существуют различные методы решения задач линейного программирования. Одним из наиболее простых и наглядных методов решения является графический метод. Этот метод позволяет решать задачи, которые приводят к системам уравнений с двумя или тремя переменными. Большинство задач линейного программирования приводит к системам линейных неравенств с большим числом переменных. Эти задачи решаются симплексным методом.

Говоря точнее, ***линейное программирование*** - это математическая дисциплина, изучающая методы нахождения наименьшего (или наибольшего) значения линейной функции нескольких переменных, при условии, что последние удовлетворят конечному числу линейных уравнений или неравенств. Общая математическая формулировка задачи линейного программирования выглядит следующим образом.

<u>Дана система линейных уравнений:</u>

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

и линейная функция f=$c_1x_1+c_2x_2+ \ldots +c_nx_n$ **(II)**.

Требуется найти такие неотрицательные решения $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ldots x_n \geq 0$ **(III)** системы *(I)* при которых функция f принимает наименьшее (наибольшее) значение.

Уравнения *(I)* называются ограничениями данной задачи, уравнение *(II)* называется линейной формой, а уравнение *(III)*, строго говоря, тоже являются ограничениями, однако их не принято так называть, поскольку они являются общими для всех задач линейного программирования, а не только конкретной задачи. Любое неотрицательное решение системы уравнений называется допустимым. Допустимое решение, дающее минимум функции f, оптимальное решение (если оно существует) не обязательно единственно; возможны случаи, когда имеется бесчисленное множество оптимальных решений. Наконец, саму функцию f часто называют линейной формой или функцией цели.

Казалось бы, т.к. задача линейного программирования ставится как задача минимизации некоторой функции f, то можно применить классический прием дифференциального исчисления. Однако частные производные f равны коэффициентам при неизвестных, которые в «нуль» одновременно не обращаются.

4. Графическая интерпретация решения задач линейного программирования

Задачу линейного программирования *(ЛП)* можно решать аналитическими и графическими методами. Аналитические методы являются основой для решения задачи на ЭВМ. Их единственный недостаток состоит в том, что в отличие от графических методов, они недостаточно наглядны. Графические методы очень наглядны, но они пригодны лишь для решения задач на плоскости, т.е. когда размерность пространства *K=2*. Однако, учитывая большую наглядность графических методов, с их помощью рассмотрим идею решения задачи ЛП на примере задачи распределения ресурсов.

Однако прежде чем заняться решением, сделаем некоторые замечания. Пусть мы имеем систему *m* уравнения с *n* неизвестными (I).

<u>Возможны следующие варианты:</u>

Число неизвестных меньше, чем число уравнений $n < m$.

<u>Например</u>: $\begin{cases} 2x_1=4, \text{ в этом случае } n=1; \\ x_1=5, \text{ тогда } m=2 \text{ (число линейно независимых уравнений).} \end{cases}$ ***(4.4)***

Очевидно, что система *(4.4)* решения не имеет, и она несовместна;

Число неизвестных равно числу уравнений $n=m$.

В этом случае система имеет единственное решение или не имеет ни одного. Заметим, что m равно числу линейно независимых уравнений.

<u>Для системы</u>: $\begin{cases} 2x=10, \; n=1, m=1; \\ 6x=30. \end{cases}$

Если число неизвестных больше числа уравнений, то система имеет бесчисленное множество решений. Пусть $n > m$. Например:

$$\mathbf{2x_1+x_2=2} \tag{4.5}$$

Очевидно, что это уравнение прямой, и все значения x_1 и x_2, лежащие на этой прямой, являются решением уравнения *(4.2)*. Значит уравнение *(4.5)* имеет бесчисленное множество решений.

В случае, когда система имеет больше одного возможного решения, может быть поставлена задача оптимизации, суть которой в том, что из всех допустимых решений, удовлетворяющих ограничениям и граничным условиям, выбрать такое, которое придает целевой функции оптимум. Вспомним построение линейных зависимостей. Пусть дано уравнение:

$$\mathbf{a_1x_1+a_2x_2=b} \tag{4.6}$$

Преобразуем его к виду:

$$\frac{x_1}{b/a_1} + \frac{x_2}{b/a_2} = 1 \qquad (4.7)$$

Запись *(4.7)* называют уравнением прямой в отрезках, что изображено на ***Рис. 4.1***. Рассмотрим еще одну форму представления уравнения *(4.6)*. Запишем это уравнение в виде:

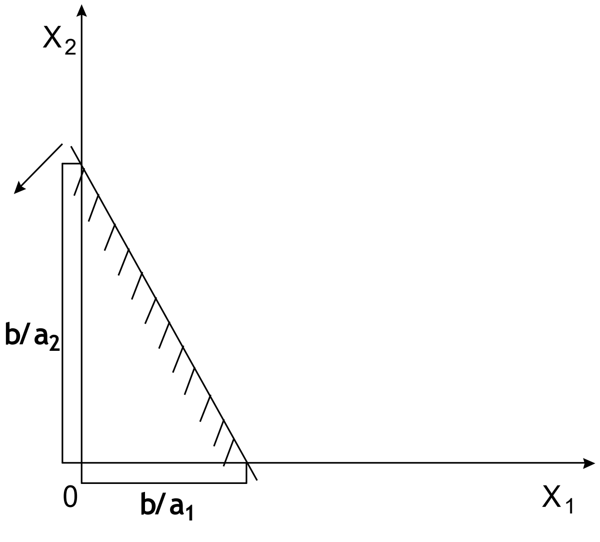
$$\mathbf{a_2x_2=b-a_1x_1}$$

или

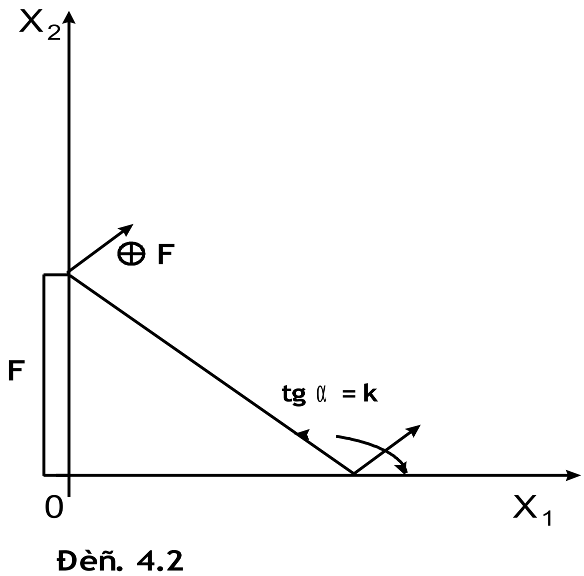
$$x_2 = \frac{b}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} x_1$$

или $\mathbf{x_2=F-kx_1}$ ***(4.8)***

Уравнение *(4.8)* изображено на ***Рис. 4.2***.



Ðèñ. 4.1



Ðèñ. 4.2

Вспомним неравенства. Если линейное уравнение с двумя переменными может быть представлено в виде прямой на плоскости, то неравенство вида:

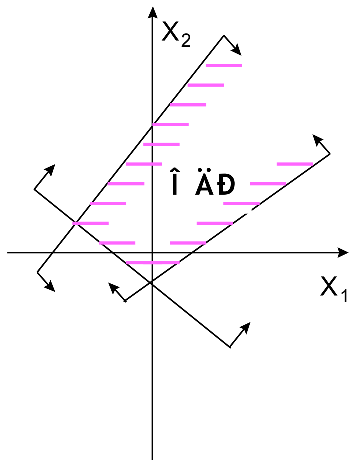
$$\mathbf{a_1x_1+a_2x_2 \le b} \qquad (4.9)$$

изображается как полуплоскость, показанная на *Рис. 4.1*. На этом рисунке часть плоскости, удовлетворяющая неравенству, заштрихована. Координаты всех точек, принадлежащих заштрихованному участку, имеют такие значения x_1 и x_2, которые удовлетворяют заданному неравенству. Значит, эти значения составляют область допустимых решений *(ОДР)*. Саму прямую считаем принадлежащей каждой из двух указанных полуплоскостей. Предположим теперь, что задано не одно неравенство, а система:

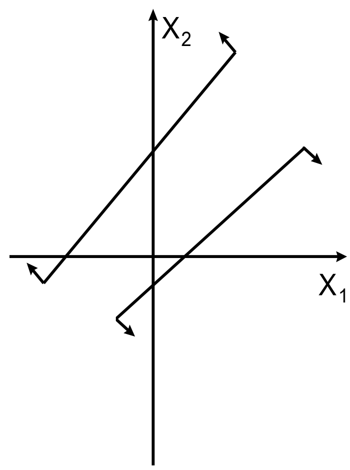
$$\textbf{\textit{(4.10)}}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

где первое неравенство определяет некоторую полуплоскость $П_1$, второе - полуплоскость $П_2$ и т.д.

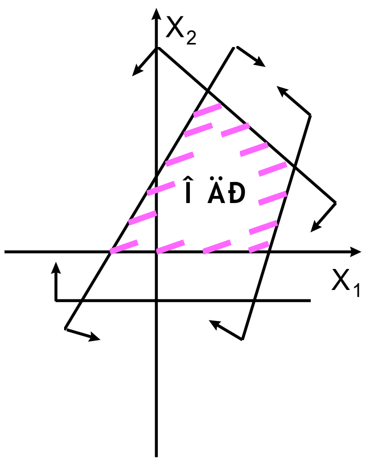
Если какая-либо пара чисел $(x_1,\ x_2)$ удовлетворяет всем неравенствам *(4.10)*, то, соответствующая точка $P(x_1,\ x_2)$, принадлежит всем полуплоскостям $П_1$, $П_2$, ... $П_m$ одновременно. Другими словами, точка P принадлежит пересечению (общей части) полуплоскостей $П_1$, $П_2$, ... $П_m$, т.е. некоторой многоугольной области M ***(Рис. 4.3)***, которая является ОДР. Вдоль контура области изображены штрихи, идущие внутрь области. Они одновременно указывают, с какой стороны от данной прямой лежит соответствующая полуплоскость, то же самое указано и с помощью стрелок на каждой линии. Сразу же отметим, что ОДР не всегда бывает, ограничена: в результате пересечения нескольких полуплоскостей может возникнуть и неограниченная область ***(Рис. 4.4)***. Возможен и случай, когда область допустимых решений (ОДР) пуста. Это означает, что система *(5.7)* противоречива ***(Рис. 4.5)***. Многоугольник ОДР обладает весьма важным свойством: он является выпуклым.



Ðèñ. 4.4



Ðèñ. 4.5



Ðèñ. 4.3

☑ ***Фигура называется выпуклой***, если вместе с любыми двумя своими точками А и В, она содержит и весь отрезок АВ.

В случае трех неизвестных, каждое уравнение представляет собой плоскость в пространстве. Каждая плоскость разбивает все пространство на два полупространства. Система неравенств определяет в пространстве выпуклый объемный многогранник, который представляет ОДР.

5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. Общая и основная задачи линейного программирования

К математическим задачам линейного программирования приводят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов (задача о раскрое, смесях и т.д.).

Во всех этих задачах требуется найти максимум или минимум линейной функции при условии, что ее переменные принимают неотрицательные значения и удовлетворяют некоторой системе линейных уравнений или линейных неравенств либо системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения. Каждая из этих задач является частным случаем общей задачи линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \tag{5.1}$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \quad (i = \overline{1, k}) \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}) \tag{5.3}$$

$$X_j \geq 0 \ (j=1, 1; 1 \leq n) \tag{5.4}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины и $k \le m$.

Функция *(5.1)* называется ***целевой функцией*** (или ***линейной формой***) задачи *(5.1)-(5.4)*, а условия *(5.2)-(5.4)* - ***ограничениями данной задачи***.

Стандартной (или ***симметричной***) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции *(5.1)* при выполнении условий *(5.2)* и *(5.4)*, где $k=m$ и $1=n$.

Канонической (или ***основной***) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции *(5.1)* при выполнении условий *(5.3)* и *(5.4)*, где $k=0$ и $1=n$.

Совокупность чисел $X^* = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи *(5.2)-(5.4)*, называется ***допустимым решением*** (или ***планом***).

План $X^* = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором целевая функция задачи *(5.1)* принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется ***оптимальным***.

Значение целевой функции *(5.1)* при плане X будем обозначать через $F(X)$. Следовательно, X^* - оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) \le F(X^*)$ (соответственно $F(X) \ge F(X^*)$).

Геометрический метод решения задач линейного программирования

Перепишем основную задачу линейного программирования в векторной форме: найти максимум функции

$$\mathbf{F=CX} \qquad (5.5)$$

при условиях:

$$\mathbf{x_1P_1+x_2P_2+ ... +x_nP_n = P_0} \qquad (5.6)$$

$$\mathbf{X \ge 0} \qquad (5.7)$$

где $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$; CX - скалярное произведение; $P_1, P_2, ..., P_n$ и P_0 - m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи.

План $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***опорным планом*** основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j, входящих в разложение *(5.6)* с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т.е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в форме стандартной, содержит не более двух переменных или задача, записанная в форме основной, содержит не более двух свободных переменных. Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции: $\mathbf{F=c_1x_1 + c_2x_2}$ ***(5.8)***

при условиях: $\mathbf{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 \le b_i \ (i=1,\ k)}$ ***(5.9***

$\mathbf{x_j \ge 0 \ (i=1,2)}$ ***(5.10)***

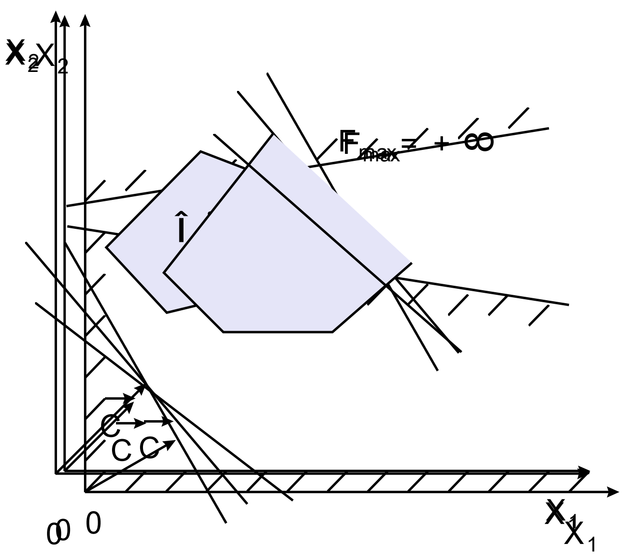
Каждое из неравенств *(5.9)*, *(5.10)* системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}+a_{i2}=b_i$ *(i=1, k)*, $x_1=0$ и $x_2=0$. В этом случае, если система неравенств *(5.9)*, *(5.10)* совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям.

Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей выпуклое, то ***областью допустимых решений (ОДР)*** задачи *(5.8)-(5.10)* является выпуклое множество, которое называется многоугольником решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

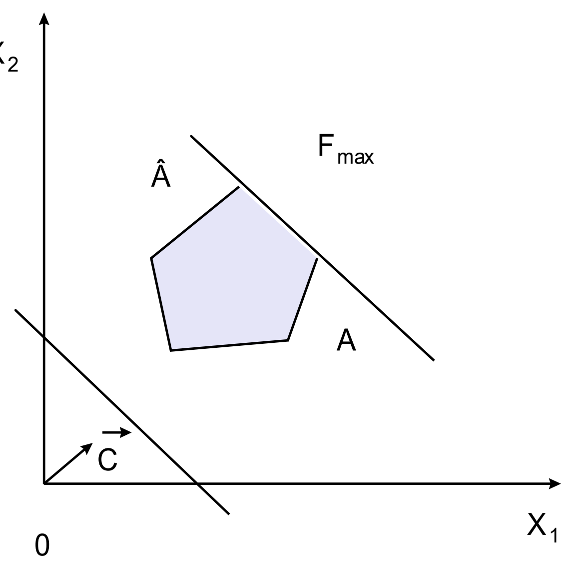
Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки области допустимых решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин ОДР целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $c_1x_1+c_2x_2=h$ (где h - некоторая постоянная), проходящую через ОДР, и будем ее передвигать в направлении вектора $C=(c_1;\ c_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником ОДР. Координаты указанной точки и определяю оптимальный план данной задачи.

При нахождении решения задачи могут встретиться случаи, изображенные на **Рис. 5.1-5.4**. *Рис. 5.1* характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке А. Из *Рис. 5.2* видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка *AB*. На **Рис. 5.3** изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на **Рис. 5.4** - случай, когда система ограничений задачи несовместна.

Отметим, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $c_1x_1+c_2x_2=h$ передвигается не в направлении вектора C, а в противоположном направлении.



Đèñ. 5.1.3. Đèñ.5.4



Đèñ. 5.2.

Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Тот факт, что оптимальное решение находится в одной из вершин многоугольника ОДР, позволяет сделать еще два важных вывода:

1. Если оптимальным решением являются координаты вершины многоугольника ОДР, значит, сколько вершин имеет ОДР, столько существует целевых функций и столько оптимальных решений по этим функциям может иметь задача.

2. Поскольку, чем больше ограничений имеет задача, тем больше вершин, то, следовательно, чем больше целевых функций и, следовательно, тем больше оптимальных решений по этим функциям.

Из рисунков можно сделать вывод, что вершина, координаты которой являются оптимальным решением, определяются углом наклона прямой, описывающей целевую функцию. Значит, каждая вершина будет соответствовать оптимальному решению для некоторой целевой функции. Итак, нахождение решения задачи линейного программирования *(5.8)-(5.10)* на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы.

Этапы нахождения решения задачи линейного программирования:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ораничениях *(5.9) и (5.10)* знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений (ОДР).

4. Строят вектор $C=(c_1; c_2)$.

5. Строят прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$, проходящую через многоугольник решений.

6. Передвигают прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$ в направлении вектора C, в результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

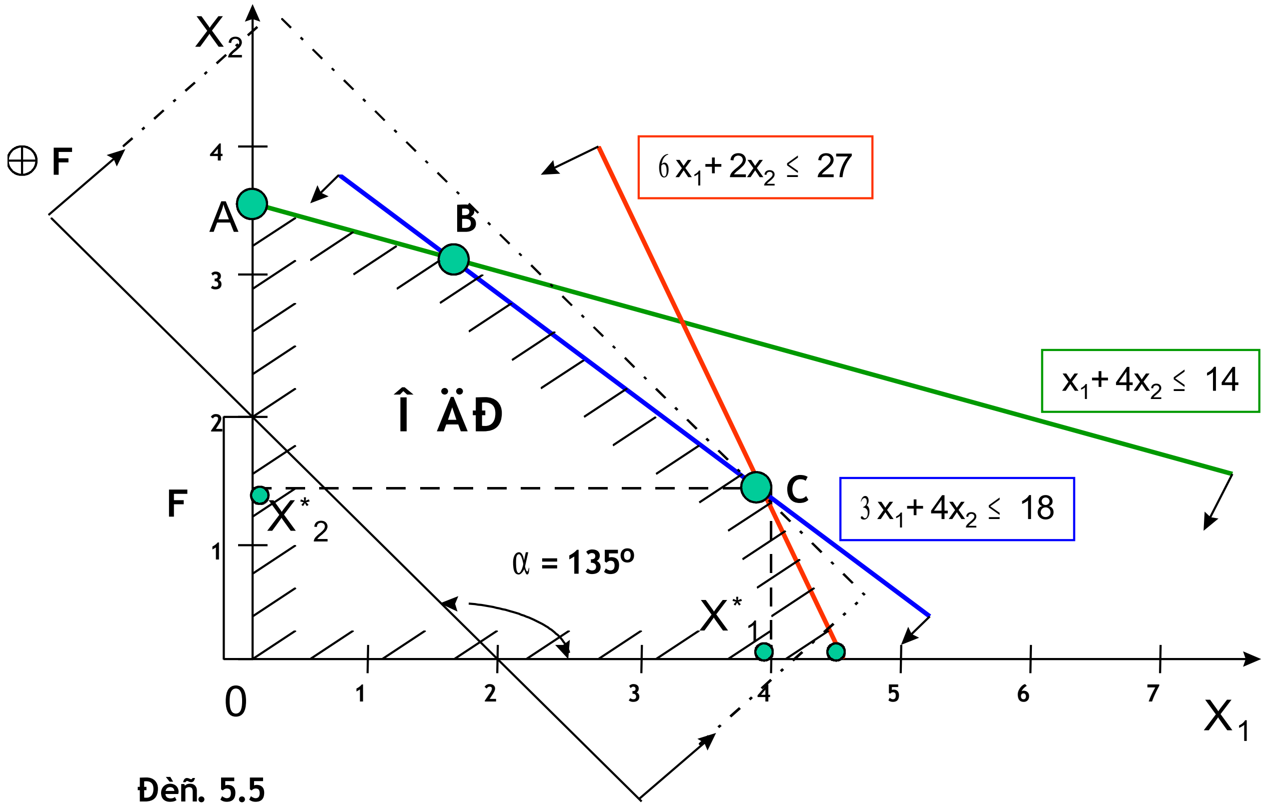
5.3. Графическое решение задачи распределения ресурсов

Пусть для двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ требуются трудовые, материальные и финансовые ресурсы. Наличие ресурсов каждого вида и их нормы расхода, необходимые для выпуска единицы продукции, приведены в **Табл. 5.**

Характеристика	Вид продукции		Ресурс
	$П_1$	$П_2$	
Резервы: трудовые	1	4	14
материальные	3	4	18
финансовые	6	2	27
Выпуск	1	1	---
Прибыль	4	8,5	---
План	X_1	X_2	---

<u>Составим математическую модель задачи.</u>

$$(5.11)\quad \begin{cases} x_1+4x_2 \le 14 \\ 3x_1+4x_2 \le 18 \\ 6x_1+2x_2 \le 27 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$



Ðèñ. 5.5

Математическая модель представляет собой систему линейных неравенств. Значит ОДР нашей задачи выпуклый многоугольник. Для удобства построения неравенства можно записать в форме, аналогичной уравнениям в отрезках:

$$\textit{\textbf{(5.12)}}\quad \begin{cases} x_1/14+x_2/7/2 \le 1 \\ x_1/6+x_2/9/2 \le 1 \\ x_1/9/2+x_2/27/2 \le 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Если мы хотим найти оптимальное решение, то должны принять целевую функцию. Допустим, мы хотим, чтобы решение было оптимальным в смысле максимизации суммарного выпуска. Тогда целевая функция:

$$\mathbf{F=x_1+x_2 \rightarrow max} \qquad \textit{\textbf{(5.13)}}$$

Эту зависимость представим в виде $x_2= F-x_1$. Из графика данного уравнения *(Рис. 5.1)* следует, что $tg\alpha = -1$, при этом $\alpha = 135^o$, а величина F равна отрезку, отсекаемому прямой функции цели на оси координат. Если прямую перемещать параллельно самой себе в направлении, указанном стрелками, то эта величина будет возрастать. Очевидно, что оптимальным решением будут координаты точки $C\ (x^*_1;\ x^*_2)$. При этом $F=F^*$.

На основании рассмотренного, можно сделать исключительно важный вывод: оптимальным решением являются координаты вершин ОДР. А из этого вывода следует метод решения задачи линейного программирования.

<u>Метод решения задачи линейного программирования:</u>

1. Найти вершины ОДР, как точки пересечения ограничений.

2. Определить последовательно значения целевой функции в вершинах.

3. Вершина, в которой целевая функция приобретает оптимальное значение, является оптимальной вершиной.

4. Координаты оптимальной вершины являются оптимальными значениями искомых переменных.

Если направление целевой функции совпадает с направлением одной из сторон, то у задачи будет, по крайней мере, два решения. В таком случае говорят, что задача имеет альтернативные решения. А это значит, что одно и то же оптимальное значение целевой функции может быть получено при различных значениях переменных.

<u>Тот факт, что оптимальное решение находится на вершине ОДР, дает еще два очень важных вывода:</u>

1. Если оптимальным решением являются координаты вершин ОДР, значит, сколько вершин имеет ОДР, столько оптимальных решений может иметь задача.

2. Поскольку чем больше ограничений, тем больше вершин, то, следовательно, чем больше ограничений, тем больше оптимальных решений.

Как видно на *Рис. 5.1*, вершина, координаты которой являются оптимальным решением, определяется углом наклона прямой, описывающей целевую функцию. Значит, каждая вершина будет соответствовать оптимальному решению для некоторой целевой функции. Поясним это на рассмотренном ранее примере. Раньше мы находили оптимальное решение по максимизации суммарного выпуска $F_1=x_1+x_2 \rightarrow max$. Найдем оптимальные решения еще для четырех целевых функций:

$F_2=x_2 \rightarrow max$ (максимизация выпуска продукции $П_2$)

$F_3=x_1 \rightarrow max$ (максимизация выпуска продукции $П_1$)

$F_4=4x_1+8{,}5x_2 \rightarrow max$ (максимизация прибыли)

$F_5=(1+3+6)x_1 + (4+4+2)x_2 = 10x_1+10x_2 \rightarrow max$ (минимизация используемых ресурсов).

Для каждой целевой функции, так же как и для F_1, можно построить линию целевой функции и определить вершину, в которой целевая функция будет иметь оптимальное значение. Результаты решения задачи по пяти целевым функциям сведем в **Таблицу 5.2**, из анализа которой можно сделать вывод: координаты каждой вершины могут быть оптимальным решением в некотором смысле.

ТАБЛИЦА 5.2

Целевая функция	Вершина	x_1	x_2	x_1+x_2	Прибыль	Используемый ресурс
$F_1=x_1+x_2 \to \max$	C	4	1,5	5,5	28,75	55
$F_2=x_2 \to \max$	A	0	3,5	3,5	29,75	35
$F_3=x_1 \to \max$	D	4,5	0	4,5	18	45
$F_4=4x_1+8{,}5x_2 \to \max$	B	2	3	5	33,5	50
$F_5= 10x_1+10x_2$	0	0	0	0	0	0

6. Двойственная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация двойственной задачи.

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую *двойственной* или сопряженной по отношению к исходной или прямой задаче. Дадим определение двойственной задачи по отношению к *общей задаче линейного программирования*, состоящей, как мы уже знаем, в нахождении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1n}x_n \le b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, l}, l \le n\right). \quad (3)$$

Определение. Задача, состоящая в нахождении минимального значения функции

$$F^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \tag{4}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_l \ge c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \ldots + a_{ml+1}y_m \le c_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_m, \end{cases} \tag{5}$$

$$y_i \ge 0 \left(i = \overline{1, k}, k \le m\right), \tag{6}$$

называется *двойственной по* отношению к задаче (1) – (3). Задачи (1) – (3) и (4) – (5) образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой.* Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача составляется согласно следующим правилам:

1. Целевая функция исходной задачи (1) – (2) задается на максимум, а целевая функция двойственной (4) – (5) – на минимум.

2. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (2) исходной задачи (1) – (3), и аналогичная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

в двойственной задаче (4) – (6) получаются друг из друга транспонированием (т. е. заменой строк столбцами, а столбцов – строками).

3. Число переменных в двойственной задаче (4) – (6) равно числу ограничений в системе (3) исходной задачи (1) – (3), а число ограничений в системе (6) двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции (4) двойственной задачи (4) – (6) являются свободные члены в системе (2) исходной задачи (6.1) – (6.3), а правыми частями в соотношениях системы (5) двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции (1) исходной задачи.

5. Если переменная x_j исходной задачи (1) – (3) может принимать только лишь положительные значения, то j–е условие в системе (6) двойственной задачи (4) – (6) является неравенством вида “□ ”. Если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то *1* – соотношение в системе (3) представляет собой уравнение. Аналогичные связи имеют место между ограничениями (2) исходной задачи (1) – (3) и переменными двойственной задачи (4) – (6). Если *i* – соотношение в системе (2) исходной задачи является неравенством, то *i*–я переменная двойственной задачи $y_j \geq 0$. В противном случае переменная y_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственные пары задач обычно подразделяют на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач ограничения (2) прямой задачи и соотношения (5) двойственной задачи являются неравенствами вида “$\leq$ ”. Таким образом, переменные обеих задач могут принимать только лишь неотрицательные значения.

Пример. Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \qquad (3)$$

Решение. Для данной задачи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число переменных в двойственной задаче равно числу уравнений в системе (2), т. е. равно трем. Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы уравнений (2), т.е. числа 12, 24, 18. Целевая функция исходной задачи (1) – (3) исследуется на максимум, а система условий содержит только уравнения. Поэтому в двойственной задаче целевая функция исследуется на минимум, а ее переменные могут принимать любые значения (в том числе и отрицательные). Так как все три переменные исходной задачи (1) – (3) принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе условий двойственной задачи должны быть три неравенства вида “□ ”. Следовательно, для задачи (1) – (3) двойственная задача такова: найти минимум функции $F^* = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3$

при условиях

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3. \end{cases}$$

Пример. Для задачи, состоящей в максимизации функции

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0,$$

сформулировать двойственную задачу.

Решение. Для данной задачи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с общими правилами задача, двойственная по отношению к данной, формулируется следующим образом: найти минимум функции $n_2 = 7a_2 + b_2$. при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge -4, \end{cases}$$
$$y_1, y_3 \ge 0.$$

Связь между решениями прямой и двойственной задач. Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной задачей линейного программирования и двойственной к ней. Исходная задача: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; \left(i = \overline{1, m}\right); \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0 \; \left(j = \overline{1, n}\right). \qquad (5)$$

Двойственная задача: найти минимум функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad 6)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \; \left(j = \overline{1, n}\right). \qquad (7)$$

Каждая из задач двойственной пары (3) – (5) и (6), (7) фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо одна от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач тем самым находится решение и другой задачи.

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами и теоремами двойственности.

Лемма 1.

Если X – некоторый план исходной задачи (7.3) – (7.5), *а Y – произвольный план двойственной задачи* (7.6), (7.7), *то значение целевой функции исходной задачи при плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане Y, т. е.* $F(X) \le F^*(Y)$.

Лемма 2.

Если $F(X^*) = F^*(Y^*)$ *для некоторых планов* X^* *и* Y^* *задач* (3) – (5) *и* (6), (7), *то* X^* *– оптимальный план исходной задачи, а* Y^* *– оптимальный план двойственной задачи.*

Теорема 1 (первая теорема двойственности). *Если одна из задач двойственной пары* (3) – (5) *или* (6), (7) *имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.* $F_{\max} = F^*_{\min}$.

Если же целевая функция одной задачи из двойственной пары неограничена (для исходной (3) – (5) *– сверху, для двойственной* (6), (7) *– снизу), то другая задача вообще не имеет планов.*

Теорема 2 (вторая теорема двойственности).

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *задачи* (7.3) – (7.5) *и план* $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *задачи* (6), (7) *являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого* $j\ (j = \overline{1, n})$ *выполняется равенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0.$$

Геометрическая интерпретация двойственных задач. Если число переменных в прямой и двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, можно легко найти решение данной пары задач. При этом имеет место один из следующих трех взаимно исключающих друг друга случаев: 1) обе задачи имеют планы; 2) планы имеет только одна задача; 3) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

Пример.

Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + 7x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0,$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

Решение. Двойственной задачей по отношению к исходной является задача, состоящая в определении минимального значения функции $F^* = 14y_1 + 8y_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \end{cases}$$
$$y_1,\ y_2 \ge 0.$$

Как в исходной, так и в двойственной задаче число неизвестных равно двум. Следовательно, их решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 7 и 8).

Как видно из рис. 8, максимальное значение целевая функция исходной задачи принимает в точке *B*. Следовательно, X^*=(2, 6) является оптимальным планом, при котором $F_{max} = 46$. Минимальное значение целевая функция двойственной задачи принимает в точке *E* (рис. 8). Значит, Y^*=(1; 4) является оптимальным планом двойственной задачи, при котором $C \subseteq \text{пр}_1 G,$ Таким образом, значения целевых функций исходной и двойственной задач при их оптимальных планах равны между собой.

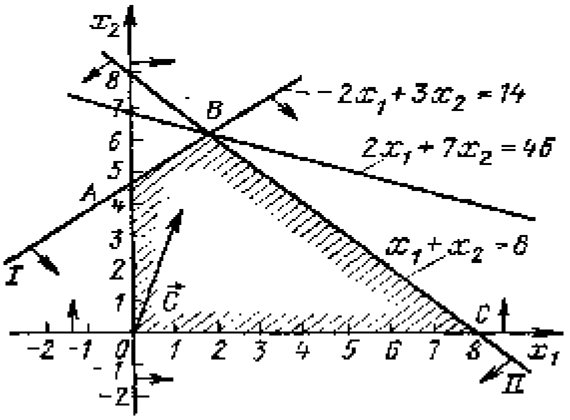


Рис.7

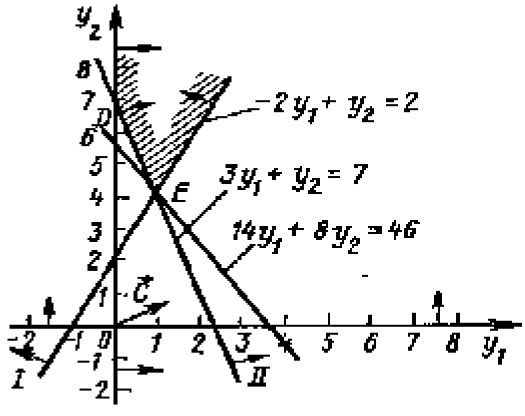


Рис. 8.

Из рис. 7 видно, что при всяком плане исходной задачи значение целевой функции не больше 46. Одновременно, как видно из рис. 8, значение целевой функции двойственной задачи при любом ее плане не меньше 46. Таким образом, при любом плане исходной задачи значение целевой функции не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при ее произвольном плане.

Пример. Найти решение двойственной пары задач.

Исходная задача;

$$F=-2x_1-3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -4x_1+2x_2 \ge 4, \\ x_1+x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача:

$$F^*=4y_1+6y_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -4y_1+y_2 \le -2, \\ 2y_1+y_2 \le -3 \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Решение. Как исходная, так и двойственная задача содержат по две переменные. Поэтому их решение находим, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 7 и 8). Из рис. 7 видно, что исходная задача не имеет оптимального плана из-за неограниченности снизу ее целевой функции на множестве допустимых решений.

Из рис. 10 следует, что двойственная задача не имеет планов, поскольку многоугольник решений ее пуст. Это означает, что если исходная задача двойственной пары не имеет оптимального плана из-за неограниченности на множестве допустимых решений ее целевой функции, то двойственная задача также не имеет планов.

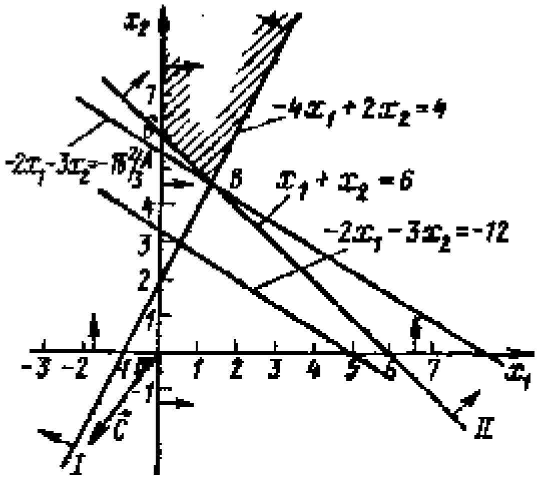


Рис. 9.

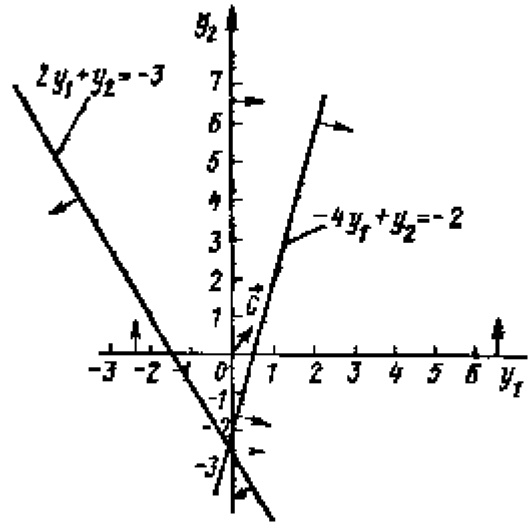


Рис. 10.

Нахождение решения двойственных задач. Рассмотрим пару двойственных задач – основную задачу линейного программирования (3) – (5) и двойственную к ней задачу (6), (7).

Предположим, что с помощью симплексного метода найден оптимальный план X^* задачи (3) – (5) и этот план определяется базисом, образованным векторами $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$.

Обозначим через $C_б = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m})$ вектор-строку, составленную из коэффициентов при неизвестных в целевой функции (7.3) задачи (7.3) – (7.5), а через P^{-1} – матрицу, обратную матрице P, составленной из компонент векторов $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$ базиса. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план X^*, то $Y^* = C_б P^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.

Таким образом, если найти симплексным методом оптимальный план задачи (43) – (45), то, используя последнюю симплекс–таблицу, можно определить $C_Б$ и P^{-1} и с помощью соотношения $Y^* = C_Б P^{-1}$ найти оптимальный план двойственной задачи (6), (7).

В том случае, когда среди векторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (4), имеется *m* единичных, указанную матрицу P^{-1} образуют числа первых *m* строк последней симплекс–таблицы, стоящие в столбцах данных векторов. Тогда нет необходимости определять оптимальный план двойственной задачи умножением $C_Б$ на P^{-1}, поскольку компоненты этого плана совпадают с соответствующими элементами (*m*+1)–й строки столбцов единичных векторов, если данный коэффициент $c_j = 0$, и равны сумме соответствующего элемента этой строки и c_j если $c_j \neq 0$.

Сказанное выше имеет место и для симметричной пары двойственных задач. При этом так как система ограничений исходной задачи содержит неравенства вида “$\leq$”, то компоненты оптимального плана двойственной задачи совпадают с соответствующими числами (*m*+1)–й строки последней симплекс–таблицы решения исходной задачи. Указанные числа стоят в столбцах векторов, соответствующих дополнительным переменным.

Пример.

Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

составить двойственную задачу и найти ее решение.

Решение. Двойственная задача по отношению к исходной состоит в нахождении минимума функции

$$F^* = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3$$

при условиях $\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \geq 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -1 \end{cases}$

$y_1, y_2 \geq 0.$

Чтобы найти решение двойственной задачи, сначала находим решение исходной задачи методом искусственного базиса. Оно приведено в таблице 12.

Из последней симплекс-таблицы видно, что двойственная задача имеет решение

$$y_1^* = \frac{5}{7}; y_2^* = 0; y_3^* = \frac{6}{7}.$$

Оптимальные двойственные оценки удовлетворяют всем условиям двойственной задачи. При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи, равное

$$F_{\min}^* = 12 \cdot \left(\frac{5}{7}\right) + 17 \cdot 0 + 4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right) = 12,$$

совпадает с максимальным значением целевой функции

$F_{\max}$ исходной задачи.

Таблица 1

i	Базис	$C_б$	P_0	1	2	–1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6
1	p_4	0	12	–1	4	–2	1	0	0
2	P_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	p_6	$-M$	4	2	–1	2	0	0	1
4			0	–1	–2	1	0	0	0
5	p_4	0	–4	–2	1	–2	0	0	0
1	P_5	0	14	0	7/2	–1	1	0	1/2
2	p_1	1	15	0	3/2	1	0	1	–1/2
3		2	2	1	–1/2	1	0	0	1/2
4	p_2	0	2	0	–5/2	2	0	0	1/2
1	P_5	1	4	0	1	–2/7	2/7	0	1/7
2	p_1		9	0	0	13/7	–3/7	1	–5/7
3			4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7

Экономическая интерпретация двойственных задач. Экономическую интерпретацию двойственных задач и двойственных оценок рассмотрим на примере.

Пример 1.

Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице 2.

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальной, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида,– не меньше цены единицы продукции данного вида.

Таблица 2

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	C
I II III	4 3 1	2 1 2	1 3 5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12

Решение. Предположим, что производится x_1 изделий *A*, x_2 изделий *B* и x_3 изделий *C*. Для определения оптимального плана производства нужно решить задачу, состоящую в максимизации целевой функции

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \qquad (8)$$

при следующих условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases} \quad (9)$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0. \quad (10)$$

Припишем каждому из видов сырья, используемых для производства продукции, двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2 и y_3. Тогда общая оценка сырья, используемого на производство продукции, составит

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min. \quad (11)$$

Согласно условию, двойственные оценки должны быть такими, чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше цены единицы продукции данного вида, т. е. y_1, y_2 и y_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases} \quad (12)$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0. \quad (13)$$

Как видно, задачи (8) – (10) и (11) – (13) образуют симметричную пару двойственных задач. Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий *A*, *B* и *C*, а решение двойственной – оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этих изделий. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой–либо одной из них. Так как система ограничений задачи (8) – (10) содержит лишь неравенства вида “$\le$”, то лучше сначала найти решение этой задачи. Ее решение приведено в таблице 3.

Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства изделий является такой, при котором изготовляется 82 изделия *B* и 16 изделий *C*. При данном плане производства остается неиспользованным 80 кг сырья II вида, а общая стоимость изделий равна 1340 руб. Из таблицы 14 также видно, что оптимальным решением двойственной задачи является $y_1^* = \frac{23}{4};\ y_2^* = 0;\ y_3^* = \frac{5}{4}.$

Таблица 3

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6
1	p_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
2	P_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
3	p_3	12	16	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4
			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Переменные y_1^* и y_2^* обозначают условные двойственные оценки единицы сырья, соответственно I и III видов. Эти оценки отличны от нуля, а сырье 1 и III видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы сырья II вида равна нулю. Этот вид сырья не полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием сырья. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг. Так, увеличение количества сырья I вида на 1 кг приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 5,75 руб. и станет равной 1340+5,75=1345,75 руб. При этом числа, стоящие в столбце вектора P_4 таблицы 14, показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска изделий *В* на 5/8 ед. и сокращения выпуска изделий *С* на 1/4 ед. Вследствие этого использование сырья II вида уменьшится на 1/8 кг. Точно так же увеличение на 1 кг сырья III вида позволит найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 1,25 руб. и составит

1340+1,25=1341,25 руб. Это будет достигнуто в результате увеличения выпуска изделий *C* на 1/4 ед. и уменьшения изготовления изделий В на 1/8 ед., причем объем используемого сырья II вида возрастет на 5/8 кг.

Продолжим рассмотрение оптимальных двойственных оценок. Вычисляя минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$F^*_{\min} = 180 \cdot \left(\frac{23}{4}\right) + 210 \cdot 0 + 244 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) = 1340,$$

видим, что оно совпадает с максимальным значением целевой функции исходной задачи.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем

$$\begin{cases} 23 + \frac{5}{4} > 10, \\ \frac{23}{3} + \frac{5}{2} = 14, \\ \frac{23}{4} + \frac{25}{4} = 12. \end{cases}$$

Первое ограничение двойственной задачи выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия вида *A*, выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать изделия вида *A* невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом прямой задачи. Второе и третье ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы соответственно изделий *B* и *C*, равны в точности их ценам. Поэтому выпускать эти два вида продукции по двойственным оценкам экономически целесообразно. Их производство и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

Таким образом, двойственные оценки тесным образом связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи может оказать влияние как на ее оптимальный план, так и на систему оптимальных двойственных оценок. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости. К рассмотрению этого мы сейчас и перейдем.

8. Целочисленное программирование

В некоторых экономических задачах (например, при определении оптимального выпуска машин, агрегатов, размещения оборудования) переменные характеризуют физически неделимые единицы и поэтому должны принимать только целые значения.

Формулировка задачи целочисленного программирования: найти наибольшее значение функции

$$\boxed{L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

при ограничениях:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}},$$

$$\boxed{x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}}, \ x_j \text{ - целые, } \boxed{j = \overline{1,k}}.$$

Если $k=n$, то задача полностью целочисленная.

Если $k<n$, то задача является частично целочисленной.

Методы решения задач линейного программирования не гарантируют целочисленности решения.

Иногда задачи целочисленного программирования решают приближенно. Отбросив условие целочисленности, решают задачу методом линейного программирования, затем в полученном оптимальном решении округляют переменные до целых чисел. Такой прием можно использовать, если значения переменных достаточно велики и погрешностью округления можно пренебречь. Если значения переменных невелики, то округление может привести к значительному расхождению с оптимальным решением. Существует аналитический метод решения полностью целочисленных задач - метод Гомори.

Метод Гомори

Основная идея решения целочисленных задач, первоначально предложенная Данцигом, Фулкерсоном и Джонсоном, заключается в том, что задача сначала решается без ограничения целочисленности. Если решение получается целочисленным, то задача решена, если нет, то к задаче присоединяют новое дополнительное ограничение, которое называют сечением. Получают новую задачу, для которой множество допустимых решений будет меньше, чем для исходной задачи, но будет содержать все допустимые целочисленные решения.

Дополнительное ограничение отсекает часть области, содержащую нецелочисленное оптимальное решение.

Вновь полученную задачу решают методом линейного программирования. Процесс построения сечений и решения задачи повторяется до получения целочисленного оптимального решения. Общий систематический способ построения сечений разработал Гомори в 1958 г.

Алгоритм метода Гомори

Пусть дана полностью целочисленная задача линейного программирования: найти максимальное значение функции

$$\boxed{L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

при ограничениях:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}},$$

$\boxed{x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}}$, x_j - целые, $\boxed{j = \overline{1,n}}$.

1) Отбросив условие целочисленности, решаем исходную задачу симплексным методом. Если получится целочисленное оптимальное решение, то задача решена. Если в оптимальном решении не все переменные целочисленны, то строим сечения.

2) Пусть в оптимальном решении переменная x_t - дробное число, т.е. $x_t=f_t$.

Рассмотрим уравнение, в котором x_t - базисная переменная.

$$x_t + \sum_{j\in J} h_{ij} x_j = f_t, \qquad (1)$$

где J - множество индексов свободных переменных.

Разобьем все коэффициенты и свободный член (1) на два слагаемых: целую и дробную часть. Целой частью числа a называется наибольшее целое число, не превышающее a. Дробной частью числа a называется разность между числом a и его целой частью. Целую часть числа обозначим [a], а дробную часть - $\{a\}$, т.е. $a = [a]+\{a\}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$x_t + \sum_{j\in J} \left([h_{ij}] + \{h_{ij}\}\right) x_j = [f_t] + \{f_t\}, \qquad (2)$$

или $x_t + \sum_{j\in J} [h_{ij}] x_j - [f_t] = \{f_t\} - \sum_{j\in J} \{h_{ij}\} x_j$.

Для любого целочисленного решения задачи левая часть уравнения (2) есть целое число, следовательно, и правая часть также будет целым числом.

Неравенство

$$\{f_t\} - \sum_{j\in J} \{h_{ij}\} x_j \le 0 \qquad (3)$$

является сечением Гомори.

Покажем, что любое целочисленное решение задачи удовлетворяет этому неравенству, а нецелочисленное решение ему не удовлетворяет. Пусть $\bar{x}^0 = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ - целочисленное решение, и предположим, что оно не удовле-
или

творяет неравенству (3), т.е. $\{f_t\} - \sum_{j\in J} \{h_{ij}\} l_j > 0$, $\{f_t\} > \sum_{j\in J} \{h_{ij}\} l_j$, по условию $l_j \ge 0$, $0 < \{h_{ij}\} < 1$, отсюда $\sum_{j\in J} \{h_{ij}\} l_j \ge 0$, кроме того, $0 \le \{f_t\} < 1$. Получим $0 \le \sum_{j\in J} \{h_{ij}\} l_j < \{f_t\} < 1$, или $0 \le \sum_{j\in J} \{h_{ij}\} l_j - \{f_t\} < 1$,

т.е. является дробным числом.

Подставив [illegible] в уравнение (2), получим

$$x_t + \sum_{j \in J} [h_{ij}] l_j - [f_t] = \{f_t\} - \sum_{j \in J} \{h_{ij}\} l_j.$$

Правая часть уравнения - дробное число, а левая часть - целое число. Получили противоречие. Следовательно, любое целочисленное решение задачи удовлетворяет неравенству (3).

Покажем, что нецелочисленное оптимальное решение не удовлетворяет неравенству (3).

Пусть $\bar{x}_{опт} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)$ - нецелочисленное оптимальное решение задачи. Подставим его в неравенство (3):

$$\{f_t\} - \sum_{j \in J} \{h_{ij}\} 0 \le 0 \Rightarrow \{f_t\} \le 0,$$ но $0 \le \{f_t\} < 1$.

Следовательно, $\bar{x}_{опт}$ не удовлетворяет неравенству (3).

3) Присоединяя неравенство (3) к ранее решенной задаче, получим новую задачу линейного программирования, которую вновь решаем симплексным методом; если ее оптимальное решение окажется целочисленным, то оно и будет оптимальным решением исходной задачи. Если снова получится нецелочисленное решение, то строим новое сечение, и т.д.

Замечание. Если в оптимальном решении несколько переменных нецелочисленные, то сечение строят по базисной переменной, имеющей наибольшую дробную часть.

<u>Пример.</u> Найти наибольшее значение функции $L(\bar{x}) = 2x_1 + 2x_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 7, \\ -x_1 + 2x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, x_1, x_2 - целые.

Решим задачу симплексным методом без учета целочисленности, для этого приведем ее к каноническому виду

$$\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + x_3 \qquad = 7, \\ -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$.

№ п/п	c_j	Б.п.	2	2	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	0	x_4	**2**	-1	1	0	7
2	0	x_5	-1	2	0	1	3
Δ_j	L_{max}		-2	-2	0	0	0
1	2	x_1	1	-1/2	1/2	0	7/2
2	0	x_4	0	**3/2**	1/2	1	13/2
Δ_j	L_{max}		0	-3	1	0	7
1	2	x_1	1	0	2/3	1/3	17/3
2	2	x_2	0	1	1/3	2/3	13/3
Δ_j	L_{max}		0	0	2	2	20

$\bar{x}'_{опт} = (17/3; 13/3; 0; 0)$, $max\ L = 20$.

Решение нецелочисленное, поэтому строим сечение Гомори. Возьмем первое уравнение из последней симплексной таблицы, так как у x_1 наибольшая дробная часть $\left\{\frac{17}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, $\left\{\frac{13}{3}\right\} = \frac{1}{3}$.

$$x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{17}{3}.$$

Сечение примет вид $\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{2}{3}$ или

$\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - x_5 = \frac{2}{3}$, где $x_5 \geq 0$.

Присоединив это дополнительное ограничение к ограничениям последней симплексной таблицы, получим новую задачу:

$$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \qquad = \frac{17}{3}, \\ \quad x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \qquad = \frac{13}{3}, \\ \qquad \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - x_5 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Решим эту задачу симплексным методом.

№ п/п	c_j	Б.п.	2	2	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
1	2	x_1	1	0	2/3	1/3	0	17/3
2	2	x_2	0	1	1/3	2/3	0	13/3
3			0	0	**2/3**	1/3	-1	2/3
1	2	x_1	1	0	0	0	1	5
2	2	x_2	0	1	0	1/2	1/2	4
3	0	x_3	0	0	1	1/2	-3/2	1
Δ_j	L_{max}		0	0	0	1	3	18

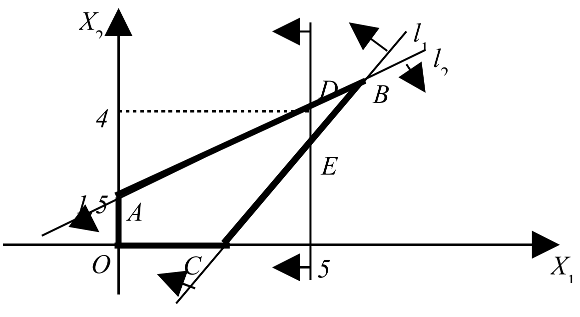
$\bar{x}''_{опт} = (5, 4, 1, 0, 0)$, max L = 18.

Это решение целочисленное, значит исходная задача решена.

$$max\ L = 18,\ \bar{x}_{опт} = (5, 4).$$

Дадим геометрическую иллюстрацию метода Гомори. Областью допустимых решений является четырехугольник $OABC$. Оптимальное решение задачи совпадает с точкой $B(17/3; 13/3)$.

Построили сечение $x_1 \leq 5$, оно отсекает нецелочисленное оптимальное решение. Получили область допустимых решений $OADEC$. Оптимальное решение второй задачи будет в точке D (5, 4). Решение получилось целочисленным, следовательно, исходная задача решена.



10. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи

Пусть m фабрик-поставщиков $A_1, A_2, \ldots, A_m$ вырабатывают однородную продукцию соответственно в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц и отправляют эту продукцию другим фабрикам-потребителям $B_1, B_2, \ldots, B_n$, потребляющим продукцию в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц, соответственно. Известны затраты C_{ij} на перевозку единицы продукции от $A_i(i=1,2,\ldots,m)$ поставщика к $B_j(j=1,2,\ldots,n)$ потребителю.

Таблица 1

Поставщики	Потребители			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}
…………….	……………	……………	……………	……………
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}

Эту таблицу называют матрицей транспортных расходов.

По аналогии составим матрицу неизвестных, приняв, что X_{ij} – количество единиц продукции, доставляемой поставщиком A_i потребителю B_j . Матрица неизвестных. Таблица 2.

Таблица 2

Поставщики	Потребители			
	B_1	B_2	…	Bn
A_1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}
A_2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}
…………….	……..	………	………..	………..
A_m	X_{m1}	X_{m2}	…	X_{mn}

Объединим обе матрицы в таблицу 1и 2.

Матрица (план) перевозок, X_{ij} – перевозки. Таблица 3.

Таблица 3.

A_i	B_j			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_m X_{1n}
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}

Требуется составить план перевозок, обеспечивающий при минимальных транспортных издержках вывоз продукта из всех пунктов производства и удовлетворяющий спрос всех пунктов потребления.

Математически задача ставится так: требуется минимизировать линейную форму

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot C_{ij} \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i (i = 1,2,...m) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j (j = 1,2,...,n) \qquad (3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad (4)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1) – (4) является соблюдение баланса производства и потребления, т.е. выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{m} a_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

Имеем задачу, в которой m+n уравнений, содержащих m • n неизвестных. Можно показать, что одно их уравнений системы (2), (3) является следствием остальных и поэтому может быть исключено из системы.

Таким образом, в общем случае транспортной задачи, имеем дело с системой m+n-1 уравнений с m • n неизвестными, причём (можно доказать) эта система всегда разрешима относительно m+n-1 неизвестных.

Определение: План перевозок, обращающий в минимум суммарные транспортные издержки, называется оптимальным планом или оптимальным решением.

Определение: Ненулевые значение элементов плана перевозок, называется базисными, а нулевые – свободными.

Определение: План задачи, в котором число базисных неизвестных равно m+n-1, называется **невырожденным**.

Определение: План задачи, в котором число базисных неизвестных меньше m+n-1, называется **вырожденным.**

Если план вырожденный и число базисных неизвестных равно m+n-1-k(n≥1), то k неизвестных, равных нулю, которым отвечают минимальные стоимости перевозок, включают в число базисных. Транспортная задача, как задача линейного программирования, может быть решена симплекс-методом. Но т.к. система ограничений имеет в транспортной задаче простое строение, то для её решения созданы алгоритмы, позволяющие получить решение с менее громоздкими вычислениями.

Построение первоначального опорного плана.

Исходная таблица до её заполнения должна иметь такой же вид, что и таблица условий; свободными в ней должны быть середины клеток (таб. 1).

Таблица 4.

A_i	B_j				Итого
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	a_m
Итого	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

При построении исходного опорного плана задачи (первоначальной матрицы перевозок) используют метод северо-западного угла, который состоит в заполнении таблицы 1 в направлении от левого верхнего угла к правому нижнему.

Начнём заполнение матрицы перевозок с первой клетки, находящейся на пересечении первой строки с первым столбцом. В данную клетку поместим число, выражающее количество продукции, которое мы хотим переправить с фабрики A_1 на фабрику B_1.

Могут представиться три случая.

1) $a_1=b_1$ Тогда продукцию A_1 направляем фабрике B_1, полностью удовлетворяя последнюю и исчерпывая все возможности первой;

2) $a_1 > b_1$ Если полностью удовлетворим потребителя B_1, то у поставщика A_1 остается ещё $a_1 - b_1$ единиц продукции, которую направим потребителям B_2, B_3 и т.д. до тех пор, пока не исчерпаем возможности фабрики A_1;
3) $a_1 < b_1$ В этом случае запас продукции фабрики A_1 посылаем фабрике B_1, после чего последней придётся посылать продукцию из других пунктов назначения.

Заполнив северо-западную клетку матрицы перевозок, переходим к заполнению следующей за ней клетки и т.д.

Незаполненные середины клеток матрицы свидетельствуют о том, что из данного пункта производства не надо перевозить продукцию в соответствующий пункт потребления: Это, так называемые нулевые перевозки.

Если полученный план невырожденный, то он должен содержать m+n-1 положительную перемену (заполненные клетки таблицы); остальные перемены – нули (свободные клетки таблицы).

Пример

A_i	B_j			Итого
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12000	3000		15000
A_2		15000	25000	40000
Итого	12000	18000	25000	55000

Полученный опорный план невырожденный (2+3-1=4 переменные).

Для отыскания исходного опорного плана, кроме метода северо-западного угла, существуют другие методы:

1. Выбор по правилу минимального элемента строки, когда сначала заполняется та клетка матрицы решения, которая соответствует минимальному элементу C_{ij} этой строки в матрице стоимостей. Затем переходят ко второй строке, заполняя ту клетку, которая соответствует ми-

нимальной стоимости во второй строке матрицы с учётом того выбора, который был произведён для первой строки и т.д.

2. Выбор по правилу минимального элемента столбца производится точно так же, только строки заменяются столбцами.

3. Выбор по минимальному элементу матрицы. В плане заполняется клетка, которая соответствует минимальному элементу матрицы транспортных издержек, затем клетка, которая соответствует минимальному элементу матрицы среди оставшихся и т.д. Если на некотором шаге возникает ситуация, когда несколько элементов матрицы одинаковы, то минимальным считают тот, у которого меньше индекс i.

Иногда при помощи указанных правил удается получить решение лучшее, чем по методу «северо-западного угла», но в общем случае этого сказать нельзя.

В любом случае полученный план следует проверить на оптимальность.

Принцип оптимальности транспортной задачи.

Можно доказать, что для любого опорного плана транспортной задачи существует такой набор чисел Ui и Vj, называемых потенциалами, которые для базисных переменных опорного плана удовлетворяют равенству

$$Vj - Ui = Cij \qquad (3.1)$$

Где i=1,2,…,m , а j=1,2,…,n.

Опорный план содержит m+n-1 базисную переменную. Следовательно, система (3.1) состоит из m+n-1 уравнений и содержит m+n неизвестных. Так называемых на одно больше числа уравнений, то одной неизвестной, например U_1, можно придать произвольное значение; тогда неизвестное однозначно определяется из системы (3.1).

Потенциалы $U_1, U_2, ..., Um$ будем записывать в соответствующих строках матрицы, а потенциалы $V_1, V_2, ..., Vn$ - над соответствующими столбцами (Таблица 5).

Таблица 5.

Vj	$V_1 = 12$	$V_2 = 11$	Итого	Ui
Bj / Ai	B_1			
A_1	$\boxed{2}$ 3 +	$\boxed{1}$ 7 +	10	$U_1 = 10$
A_2	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$ 10 –	10	$U_2 = 7$
Итого	3	17	20	

Проиллюстрируем процесс вычисления потенциалов на конкретном примере. Найдем потенциалы для матрицы перевозок, приведенной в таблице 5.

Потенциалы следует определять только для базисных неизвестных. Искать их будем по диагональному методу, начинания с первой клетки первой строки, определив все потенциалы для этой строки, перейдем ко второй строке и т.д.

Первая клетка первой строки – базисная. Как отмечалось ранее, один из потенциалов можно выбрать произвольно. Пусть $U_1 = 10,$ тогда из уравнения $V_1 - U_1 = C_{11}$ можно найти $V_1 : V_1 = U_1 + C_{11} = 10 + 2 = 12$

Точно та же найдем потенциал $V_2 : V_2 = U_1 + C_{12} = 10 + 1 = 11$

Во второй строке имеется лишь один базисный элемент, равный 10. Он расположен во второй строке, втором столбце $C_{22} = 4,$ потенциал $V_2 = 11.$

Найдем потенциал $U_2 : V_2 - U_2 = C_{22}$

$U_2 = V_2 - C_{22} = 11 - 4 = 7$

Последовательности этих операций указаны в таблице 5 стрелками + и –. Найдем теперь разности потенциалов для свободных клеток матрицы перевозок и сравним их с издержками, записанными в правом верхнем углу соответствующих клеток. Издержки в свободной клетке, в отличии от издержек в базисной, обозначим через C_{ij}.

Если разность потенциалов $Vj - Ui \le Cij$; то такая перевозка является невыгодной и соответствующая клетка должна остаться незаполненной. Если же $Vj - Ui > Cij$, когда приращение оценки больше транспортных расходов, перевозка становится экономичной; значит, соответствующую клетку нужно заполнить.

<u>Определение</u>: Говорят, что в свободной клетке матрицы перевозок существует невязка, если в ней разность потенциалов больше издержек; в этом случае выражение $Vj - Ui - Cij$ определятся величину невязки и показывает на сколько улучшается значение целевой функции при внесении в эту свободную клетку единицы, означающей единицу продукции. План перевозок будет оптимальным, тогда ни в одной свободной клетке не будет невязок.

Пример: Проверить оптимальность опорного плана, приведенного в таблице 6.

Таблица 6.

Bj / Ai	B_1	B_2	B_3	Итого
A_1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{4}$	15
A_2	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 15	$\boxed{5}$ 10	25
A_3	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$ 20	20
Итого	10	20	30	60

Рассчитаем потенциал этой матрицы. Потенциал $U_1 = 5$ выбираем произвольно. Остальные потенциалы находим описанным диагональным методом.

Vj	$V_1 = 7$	$V_2 = 6$	$V_3 = 8$		Ui
Bj / Ai	B_1	B_2	B_3	Итого	
A_1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{4}$	15	$U_1 = 5$
A_2	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 15	$\boxed{5}$ 10	25	$U_2 = 3$
	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	20	$U_3 = 4$

A_3			20		
Итого	10	20	30	60	

Проверим оптимальность данного плана, для чего определим есть ли невязки в свободных клетках. Проверяем клетку расположенную на пересечении строки A_1 и столбца B_3: $V_3 - U_1 - C_{13} = 8 - 5 - 4 = -1$. В этой клетке невязки нет. Аналогично проверяем остальные свободные клетки:

$A_2 - B_1 : V_1 - U_2 - C_{21} = 7 - 3 - 6 = -2$ невязки нет.

$A_3 - B_1 : V_1 - U_3 - C_{31} = 7 - 4 - 3 = 0$ невязки нет.

$A_3 - B_2 : V_2 - U_3 - C_{32} = 6 - 4 - 1 = 1$ невязка равна единице.

План не является оптимальным, его можно улучшить.

Улучшение плана перевозок. Цикл пересчета.

Если исходный план задачи не является оптимальным, его улучшают путем устранения невязок в свободных клетках матрицы перевозок, причем каждый раз устраняется наибольшая невязка.

Процесс устранения невязок повторяют до тех пор. Пока не получится план, не содержащий их, т.е. оптимальный.

Рассмотрим некоторые понятия.

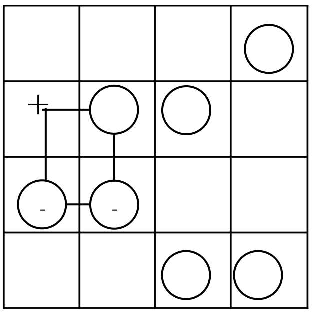
Определение: Циклом пересчета матрицы называют замкнутую ломанную линию, обладающую свойствами:

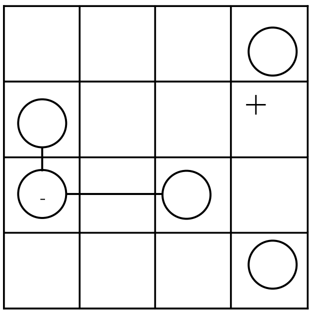
1. вершины ломанной лежат в центрах клеток матрицы, причем только одна вершина расположена в свободной клетке, а остальные в базисах.
2. звенья ломанной располагаются параллельно либо строкам, либо столбцам матрицы.
3. в каждой вершине пересекаются только два звена.
4. никакие три вершины не лежат на одной прямой.
5. вершина, лежащая в свободной клетке матрицы, считается положительной и около нее ставится знак +

6. остальные вершины получают знак + или с таким расчетом, чтобы две соседние вершины имели разные знаки.

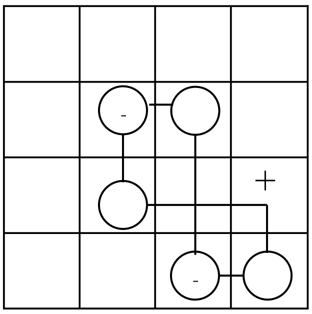
Примеры:

а)

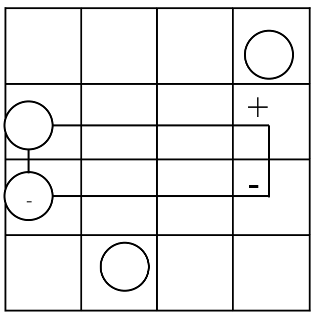




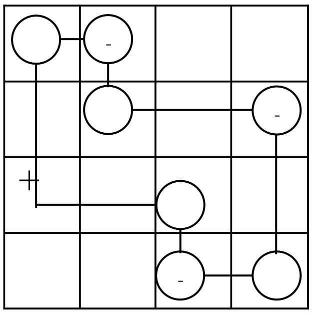
г)



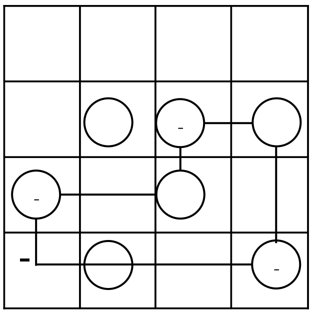
б)



д)



в)



е)

Рисунок 4.1

Ломанные линии, изображенные на рисунке 4.1(а - в), являются циклами пересчета, а ломанные (г, д, е) не являются циклами пересчета.

Доказано, что для любой свободной клетки матрицы перевозок можно составить цикл пересчета, причем для невырожденного плана перевозок он единственный.

Определение: Сдвигом по циклу пересчета на число X называется операция, состоящая в добавлении к числам в положительных клетках числа (+X) и в отрицательных клетках (-X).

Операцию сдвига по циклу пересчета проводят в следующем порядке:

1. в свободную вершину цикла записывают число X, на которое осуществляется сдвиг.
2. выбирается направление пересчета, например, почасовой стрелке от свободной вершины цикла.
3. двигаются вдоль вершин цикла в указанном направлении. Прибавляя поочередно к числам, расположенным в положительных вершинах (+X), а к числам, расположенным в отрицательных вершинах (-X).

В результате получается другая матрица. Чтобы в результате сдвига по циклу пересчета не получились отрицательные перевозки, следует сделать сдвиг на число X, равное по величине самой малой из всех базисных перевозок, расположенных в отрицательных вершинах цикла пересчета: $X = \min\{\vec{X}ij\}$.

Таким образом. Если исходная матрица перевозок транспортной задачи имеет невязку, то:

1. Свободную клетку матрицы, соответствующую наибольшей положительной невязке, принимаем за положительную вершину цикла пересчёта матрицы и составляем этот цикл.
2. Определяем сдвиг, равный наименьшей из перевозок, расположенных в отрицательных вершинах цикла.
3. Сдвигом по циклу пересчёта на число X обращаем новую матрицу перевозок.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.

1. Составляем исходную матрицу перевозок и строим первоначальный опорный план.
2. Вычисляем потенциалы всех положительных перевозок этой матрицы по
   формулам: $V_j = U_i + C_{ij}$; $U_i = V_j - C_{ij}$
3. Подсчитываем невязки всех нулевых перевозок ($V_j - U_i - C_{ij} > 0$).
4. Определяем сдвиг по циклу пересчёта X == min $\{X_{ij}\}$.
5. Осуществляем сдвиг матрицы перевозок на X по циклу пересчёта.
6. Проверяем, оптимальна ли полученная перевозка.
7. Если оптимальна, то задача решена, если нет, то повторяются все операции,
   начиная со второй.

Пример: Однородный груз, сосредоточенный в трёх пунктах отправления A_1, A_2, A_3 в количествах a_1=90, a_2=105, a_3=15 единиц груза соответственно, необходимо доставить в каждый из четырёх пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4 в количествах $в_1$=30, $в_2$=75, $в_3$=45, $в_4$=60. Стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения известна и задаётся таблицей.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	4	2
A_2	1	3	1	2
A_3	4	2	3	1

Составить такой план перевозок груза, чтобы общая стоимость всей транспортировки груза была минимальной.

Решение.

1. Строим исходную матрицу перевозок (Таблица 7.)

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Итого
A_1	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	90
A_2	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	105
A_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	15
Итого	30	75	45	60	210 / 210

Построим первоначальный опорный план методом северо-западного угла (Таблица 7)

Таблица 7.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Итого
A_1	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{1}$ 60	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	90
A_2	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$ 15	$\boxed{1}$ 45	$\boxed{2}$ 45	105
A_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$ 15	15
Итого	30	75	45	60	210 / 210

План не вырожден. Он содержит $m + n - 1 = 6$, базисных неизвестных.

Замечание: Если бы их было меньше, например 5, то за недостающее базисное неизвестное можно было бы принять то свободное неизвестное, которому соответствует минимальная стоимость.

2. Вычислим потенциалы всех положительных перевозок полученной матрицы перевозок (Таблица 8.).

Таблица 8.

V_j	13	11	9	10		U_i
A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Итого	
A_1	30 $\boxed{3}$ -	+ 60 $\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	90	10
A_2	$\boxed{1}$ +	- 15 $\boxed{3}$	45 $\boxed{1}$	45 $\boxed{2}$	105	8
A_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	15 $\boxed{1}$	15	9
Итого	30	75	45	60	210 / 210	

$U_1 = 10$ взято правильно, остальные потенциалы найдены диагональным методом.

3. Подсчитаем невязки всех нулевых перевозок.

A_1 - B_3: 9 - 10 – 4 < 0 невязки нет;

A_1 – B_4: 10 - 10 – 2 < 0 невязки нет;

A_2 – B_1: 13 - 8 – 1 = 4 > 0 невязка;

A_3 – B_1: 13 - 9 – 4 = 0 невязки нет;

A_3 – B_2: 11 - 9 – 2 = 0 невязки нет;

A_3 – B_3: 9 - 9 – 3 < 0 невязки нет;

План не является оптимальным, его можно улучшить.

4. Определяем сдвиг по циклу пересчёта, для чего составим цикл для наибольшей невязки (Таблица 7.) и найдем величину сдвига X = min {15,30}=15.

5. Осуществим сдвиг матрицы перевозок (Таблица 9) на X = 15 по циклу перевозок.

Таблица 9.

V_j	13	11	13	14		U_i
A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Итого	
A_1	15 $\boxed{3}$ -	75 $\boxed{1}$	$\boxed{4}$	+ $\boxed{2}$	90	10
A_2	15 + $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	45 $\boxed{1}$	- 45 $\boxed{2}$	105	12
A_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	15 $\boxed{1}$	15	13
Итого	30	75	45	60	210 210	

7. Проверяем, оптимальна ли полученная перевозка, для чего повторяем операции пунктов 2 и 3, то есть, вычисляем потенциал всех положительных перевозок и невязки свободных клеток (Таблица 9)

A_1 - B_3: 13 - 10 – 4 < 0 невязки нет;

A_1 – B_4: 14 - 10 – 2 = 2 > 0 невязка;

A_2 – B_2: 11 - 12 – 3 < 0 невязки нет;

A_3 – B_1: 13 - 13 – 4 < 0 невязки нет;

A_3 – B_2: 11 - 13 – 2 < 0 невязки нет;

A_3 – B_3: 13 - 13 – 3 < 0 невязки нет;

План не является оптимальным. Улучшаем его.

7. Определяем и осуществляем сдвиг матрицы перевозок (Таблица 9), получим (Таблица 10). X = min {15,45}=15

Таблица 10.

V_j	11	11	11	12		U_i
B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Итого	
A_1	$\boxed{3}$	75 $\boxed{1}$	$\boxed{4}$	15 $\boxed{2}$	90	10
A_2	30 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	45 $\boxed{1}$	30 $\boxed{2}$	105	10
A_3	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	15 $\boxed{1}$	15	11
Итого	30	75	45	60	210 210	

Проверяем оптимальность полученного плана перевозок, то есть вычисляем потенциалы всех положительных перевозок и невязки свободных клеток (Таблица 10).

$A_1 – B_1$: 11 – 10 – 3 < 0 невязки нет;

$A_1 – B_3$: 11 –10 – 4 < 0 невязка нет;

$A_2 – B_2$: 11 – 10 – 3 < 0 невязки нет;

$A_3 – B_1$: 11 – 11 – 4 < 0 невязки нет;

$A_3 – B_2$: 11 – 11 – 2 < 0 невязки нет;

$A_3 – B_3$: 11 – 11 – 3 < 0 невязки нет;

Невязок нет, следовательно, полученный план оптимальный. Таким образом, оптимальный план перевозок

$F = 75 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 45 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 255$.

11. **Динамическое программирование**

Динамическое программирование - один из разделов математического программирования, в котором процесс решения может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Это разбиение осуществляется по различным принципам. В некоторых задачах по временным периодам, в других - по объектам управления. Иногда разбиение производится искусственно.

Такой подход позволяет свести одну большую по размерности задачу ко многим задачам, имеющим меньшую размерность. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческих решений.

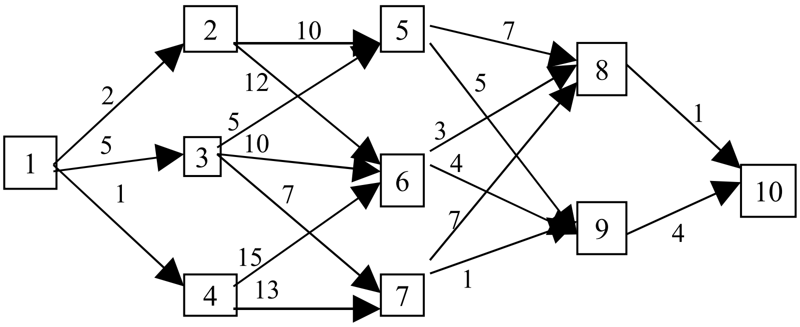
Модели динамического программирования применяются для решения экономических задач следующих типичных областей:

- разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа;
- разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию;
- составление календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования;
- выбор методов проведения рекламной кампании, знакомящей покупателя с продукцией фирмы;
- систематизация методов поиска ресурсов ценного вида.

Основные принципы динамического программирования рассматриваются на следующих примерах.

Задача определения пути **наименьшей стоимости**

Мистер М. решил отправиться в путешествие из пункта 1 в пункт 10 на дилижансе. В бюро путешествий ему показали карту с нанесенной на ней схемой маршрутов движения дилижансов (см. рисунок).



Каждый квадрат на схеме изображает один из населенных пунктов, которые для удобства пронумерованы. Стоимость переезда из пункта i в пункт j обозначим через c_{ij} (значения этих величин для рассматриваемого примера отмечены на схеме).

Требуется определить такой путь из пункта 1 в пункт 10, общая стоимость которого является минимальной.

Заметим, что формально данная задача может быть представлена в виде математической модели задачи комбинаторного программирования, однако ее особенности позволяют построить следующий алгоритм решения.

Прежде всего отметим, что любой путь движения из пункта 1 в пункт 10 включает четыре дилижансовых маршрута (или четыре «шага»).

Далее важно сформировать следующий принцип.

Принцип оптимальности Беллмана

Каким бы ни был путь достижения некоторого пункта, последующие решения должны принадлежать оптимальной стратегии для части пути, начинающейся с этого пункта.

Таким образом, например, оптимальный путь из пункта 6 не зависит от того, каким образом путешественник в него прибыл.

Для использования принципа оптимальности введем следующие обозначения:

$f_n(i)$ - стоимость, отвечающая стратегии минимальных затрат для пути от пункта i, если до конечного пункта остается n шагов;

$P_n(i)$ - решение, позволяющее достичь $f_n(i)$.

Здесь индекс *n* не только равен количеству шагов, оставшихся до конечного пункта, но и совпадает с номером этапа в процессе решения задачи. Таким образом, начинаем поиск оптимального маршрута от конечного пункта, положив *n*=1.

$$f_1(8) = c_{8,10} = 1, \quad P_1(8) = 10;$$

$$f_1(9) = c_{9,10} = 4, \quad P_1(9) = 10.$$

n=2

$$f_2(5) = \min\{c_{5,8} + f_1(8);\quad c_{5,9} + f_1(9)\} = 8, \quad P_2(5) = 8;$$

$$f_2(6) = \min\{c_{6,8} + f_1(8);\quad c_{6,9} + f_1(9)\} = 4, \quad P_2(6) = 8;$$

$$f_2(7) = \min\{c_{7,8} + f_1(8);\quad c_{7,9} + f_1(9)\} = 5, \quad P_2(7) = 9.$$

Определены оптимальные маршруты из пунктов 5, 6, 7 (см. рисунок), от каждого из которых до конечного пункта два шага. На следующем этапе используем эти результаты.

n=3

$$f_3(2) = \min\{c_{25} + f_2(5);\quad c_{26} + f_2(6)\} = 16, \qquad P_3(2) = 6;$$

$$f_3(3) = \min\{c_{35} + f_2(5);\quad c_{36} + f_2(6); c_{37} + f_2(7)\} = 12, \qquad P_3(3) = 7;$$

$$f_3(4) = \min\{c_{46} + f_2(6);\quad c_{47} + f_2(7)\} = 18, \qquad P_3(4) = 7.$$

Теперь известны оптимальные затраты и маршруты для пунктов 2,3,4. Осталось рассмотреть последний этап.

n=4

$$f_4(1) = \min\{c_{12} + f_3(2); c_{13} + f_3(3); c_{14} + f_3(4)\} = 17, \quad P_4(1) = 3$$

Таким образом, определен оптимальный путь: 1-3-7-9-10, затраты по которому составляют $f_n(1) = 17$.

Обобщая данный процесс, получаем формулу:

$$f_n(i) = \min_j \{c_{ij} + f_{n-1}(j)\}, \quad n = \overline{1, N},$$

где N- количество этапов в решении.

Определение 1. *Данная формула называется рекуррентным соотношением Беллмана. Алгоритм, основанный на применении этой формулы, называется рекуррентным алгоритмом. Подобные алгоритмы являются основным методом динамического программирования.*

12. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Модели управления запасами

Возникновение теории управления запасами можно связать с работами Ф. Эджуорта и Ф. Харриса, появившимися в конце XIX – начале XX вв., в которых исследовалась простая оптимизационная модель определении экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта.

Запасами называется любой ресурс на складе, который используется для удовлетворения будущих нужд. Примерами запасов могут служить полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, различные товары, а также такие специфические товары, как денежная наличность, находящаяся в хранилище. Большинство организаций имеют примерно один тип системы планирования и контроля запасов. В банке используются методы контроля за количеством наличности, в больнице применяются методы контроля поставки различных медицинских препаратов.

Простейшая схема системы управления запасами выглядит следующим образом (рис.1.):

Рис. 1. Система управления запасами

Существуют причины, побуждающие организации создавать запасы:

1) дискретность поставок при непрерывном потреблении;
2) упущенная прибыль;
3) случайные колебания:
   - в спросе за период между поставками;
   - в объеме поставок;
   - в длительности интервала между поставками;
4) предполагаемые изменения конъюнктуры:
   - сезонность спроса;
   - сезонность производства;
   - ожидаемое повышение цен.

Имеются также причины, побуждающие предприятия стремиться к минимизации запасов на складе:

1) плата за физическое хранение запаса;
2) потери в количестве запаса;
3) моральный износ продукта.

Рассмотрим определяющие понятия теории управления запасами.

Издержки выполнения заказа (*издержки заказа*) - накладные расходы, связанные с реализацией заказа. В промышленности такими издержками являются затраты на подготовительно-заготовочные операции.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражаются или в абсолютных единицах, или в процентах от закупочной цены и связываются с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль – издержки, связанные с неудовлетворительным спросом, возникающим в результате отсутствия продукта на складе.

Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенного дохода. Иногда к ним прибавляются издержки на покупку товаров.

Срок выполнения заказов – срок между заказом и его выполнением.

Точка восстановления – уровень запаса, при котором делается новый заказ.

Краткая характеристика моделей управления запасами

1.1. Модель оптимального размера заказа.

Предпосылки:

1) темп спроса на товар известен и постоянен;
2) получение заказа мгновенно;
3) отсутствуют количественные скидки при закупке больших партий товара;
4) единственные меняющиеся параметры – издержки заказа и хранения;
5) исключается дефицит в случае своевременного заказа.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения.

Результат: оптимальный размер заказа; время между заказами и их количество за период

1.2. Модель оптимального размера заказа в предположении, что получение заказа не мгновенно. Следовательно, нужно найти объем запасов, при котором необходимо делать новый заказ.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения; время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа; время между заказами; точка восстановления запаса.

1.3. Модель оптимального размера заказа в предположении, что допускается дефицит продукта и связанная с ним упущенная прибыль. Необходимо найти точку восстановления.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения; упущенная прибыль.

Результат: оптимальный размер заказа; время между заказами; точка восстановления запаса.

1.4. Модель с учетом производства (в сочетании с условиями 1.1 – 1.3). Необходимо рассматривать уровень ежедневного производства и уровень ежедневного спроса.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения; упущенная прибыль; темп производства.

Результат: оптимальный уровень запасов (точка восстановления)

1.5. Модель с количественными скидками. Появляется возможность количественных скидок в зависимости от размера заказа. Рассматривается зависимость издержек хранения от цены товара. Оптимальный уровень заказа определяется исходя из условия минимизации общих издержек дл каждого вида скидок.

Модель 1.1 *наиболее экономичного размера заказа.* Заказ, пополняющий запасы, поступает как одна партия. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью пока не достигнет нуля. В этой точке поступает заказ, размер которого равен Q, и уровень запасов восстанавливается до максимального значения. При этом оптимальным решением задачи будет тот размер заказа, при котором минимизируются общие издержки за период (рис. 2).

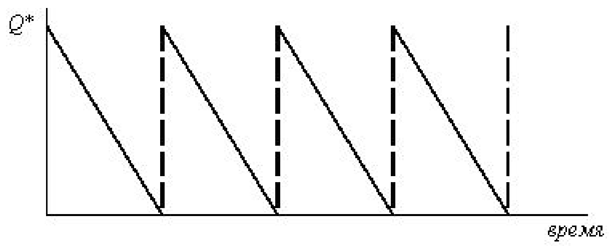


рис. 2

Пусть Q – размер заказа;

T – протяженность периода планирования;

D – величина спроса за период планирования;

d – величина спроса в единицу времени;

K – издержки заказа;

H – удельные издержки за период;

h – удельные издержки хранения в единицу времени.

Тогда:

совокупные издержки заказа = $\frac{D}{Q}K$;

совокупные издержки хранения = $\frac{Q}{2}H$; $d=\frac{D}{T}$; $h=\frac{H}{T}$;

оптимальный размер заказа $Q^*=\sqrt{\frac{2dK}{h}}=\sqrt{\frac{2DK}{H}}$;

оптимальное число заказов за период $N=\frac{D}{Q^*}$;

время цикла (оптимальное время между заказам) $t^*=\frac{Q^*}{d}=\frac{T}{N}$.

Модель 1.2. Введем предположение о том, что заказ может быть получен не мгновенно, а с течением времени. Тогда нам необходимо заранее делать заказ, чтобы в нужное время иметь достаточное количество товара на складе. Следовательно, нам необходимо найти тот уровень запасов, при котором делается новый заказ. Этот уровень называется точкой восстановления R. Пусть L – время выполнения заказа. Тогда R = величина спроса в единицу времени, умноженная на время выполнения заказа = $d \cdot L$. Другие характеристики системы определяются также, как и в модели1.1. Модель иллюстрируется рис. 3.

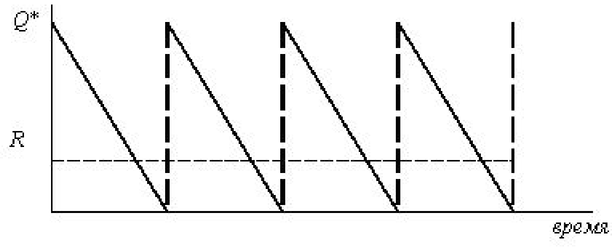


рис. 3

Пример 1. Человек является торговым агентом компании TOYOTA и занимается продажей последней модели этой марки автомобиля. Годовой спрос оценивается в 4000 ед. Цена каждого автомобиля равна 90 тыс. руб., а годовые издержки хранения составляют 10% от цены самого автомобиля.

Человек произвел анализ издержек заказа и понял, что средние издержки заказа составляют 25 тыс. руб. на заказ. Время выполнения заказа равно восьми дням. В течение этого времени ежедневный спрос на автомобили равен 20.

- Чему равен оптимальный размер заказа?
- Чему равна точка восстановления?
- Каковы совокупные издержки?
- Каково оптимальное количество заказов в год?
- Каково оптимальное время между двумя заказами, ели предположить, что количество рабочих дней в году равно 200?

Исходные данные

величина спроса за год $D = 4000$;

издержки заказа $K = 25$;

издержки хранения $h = \frac{9}{200} = 0{,}045$;

цена за единицу $c = 90$;

время выполнения заказа $L = 8$;

ежедневный спрос $d = 20$;

число рабочих дней $T = 200$.

Решение

оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 25}{0{,}045}} \approx 149$;

точка восстановления $R = 160 - 149 = 11$;

число заказов за год $N = \frac{D}{Q^*} = 26{,}83$;

совокупные издержки = совокупные издержки заказа + совокупные издержки хранения $C = \frac{4000}{149} 25 + \frac{149}{2} 9 = 1341{,}64$;

стоимость продаж = 360000;

число дней между заказами $t = 7{,}45$.

Модель 1.3. *оптимального размера заказа* в предположении, что допускается дефицит продукта и связанная с ним упущенная прибыль (рис. 4).

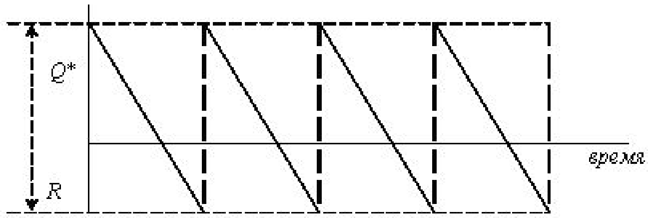


рис. 4

Пусть p – упущенная прибыль в единицу времени, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта;

P – упущенная прибыль за период, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта.

Тогда:

оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}} \cdot \sqrt{\frac{P+H}{P}}$;

максимальный размер запаса $S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P+H}}$;

максимальный дефицит $R = Q^* - S^*$.

Модель 1.4 *производства и распределения*. В предыдущей модели мы допускали, что пополнение запаса происходит единовременно. Но в некоторых случаях, особенно в промышленном производстве, для комплектования партии товаров требуется значительное время и производство товаров для пополнения запасов происходит одновременно с удовлетворением спроса. Такой случай показан на рис. 5.

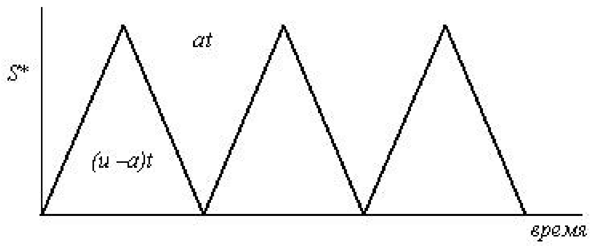


рис. 5

Спрос и производство являются частью цикла восстановления запасов.

Пусть u - уровень производства в единицу времени;

K – фиксированные издержки хранения.

Тогда:

\совокупные издержки хранения = $(\textit{средний уровень запасов}) \times H = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{u}\right)H$;

средний уровень запасов = (максимальный уровень запасов)/2;

максимальный уровень запасов = $u \cdot t - d \cdot t = Q\left(1-\frac{d}{u}\right)$;

время выполнения заказа $t = \frac{Q}{u}$;

издержки заказа = $\frac{D}{Q}K$;

оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}\left(1-\frac{d}{u}\right)} = \sqrt{\frac{2DK}{H}\left(1-\frac{d}{u}\right)}$;

максимальный уровень запасов $S^* = Q^*\left(1-\frac{d}{u}\right)$.

Модель 1.5 *с количественными скидками.* Для увеличения объема продаж компании часто предлагают количественные скидки своим покупателям. Количественная скидка – сокращенная цена на товар в случае покупки большого количества этого товара. Типичные примеры количественных скидок приведена в табл. 1.

Таблица 1

Варианты скидок	1	2	3
Количество, при котором делается скидка	от 0 до 999	от 1000 до 1999	от 2000 и выше
Размер скидки, %	0	3	5
Цена со скидкой	5	4,8	4,75

Пусть I – доля издержек хранения в цене продукта c.

Тогда: $h = I \cdot c$; оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{Ic}}$.

Пример 2. Рассмотрим пример, объясняющий принцип принятия решения в условиях скидки. Магазин "Медвежонок" продает игрушечные гоночные машинки. Эта фирма имеет таблицу скидок на машинки в случае покупок их в определенном количестве (табл. 6.1). Издержки заказа составляют 49 тыс. руб. Годовой спрос на машинки равен 5000. годовые издержки хранения в отношении к цене составляют 20%, или 0,2. Необходимо найти размер заказа, минимизирующий общие издержки.

Решение. Рассчитаем оптимальный размер заказа для каждого вида скидок, т.е. $Q1^*$, $Q2^*$ и $Q3^*$, и получим $Q1^* = 700$; $Q2^* = 714$; $Q3^*=718$.

Так как $Q1^*$ - величина между 0 и 999, то ее можно оставить прежней. $Q2^*$ меньше количества, необходимого для получения скидки, следовательно, его значение необходимо принять равным 1000 единиц. Аналогично $Q3^*$ берем равным 2000 единиц. Получим $Q1^* = 700$; $Q2^* = 1000$; $Q3^* = 2000$.Далее необходимо рассчитать общие издержки для каждого размера заказа и вида скидок, а затем выбрать наименьшее значение.

Рассмотрим следующую таблицу.

Варианты скидок	1	2	3
Цена	5	4,8	4,75
Размер заказа	700	1000	2000
Цена на товар за год	25000	24000	23750
Годовые издержки заказа	350	245	122,5
Годовые издержки хранения	350	480	950
Общие годовые издержки	25700	24725	24822,5

Выберем тот размер заказа, который минимизирует общие годовые издержки. Из таблицы видно, что заказ в размере 1000 игрушечных гоночных машинок будет минимизировать совокупные издержки.

Методы оптимизации сетевых графиков.

Одно из важнейших преимуществ сетевого планирования заключается в возможности анализа первоначального варианта плана с целью сокращения сроков выполнения работ. Для этого, прежде всего, тщательно проверяют достоверности временных оценок для работ, попавших в критическую зону. Если проверка подтверждает правильность оценок, то осуществляют перепланировку (оптимизацию) сетевого графика.

Существуют следующие методы перепланировки:

1. Сокращение продолжительности отдельных работ критической зоны путем перераспределения ресурсов или привлечения дополнительных ресурсов, а также благодаря улучшению организации и технологии проведения этих работ. В частности, в ряде случаев рассматривается возможность переброски части рабочих с менее напряженных работ (работ со значительным резервом времени) на работы критического пути; в результате, естественно, сокращается продолжительность критических работ. Аналогичных результатов можно добиться переброской дополнительного количества машин, материалов и т. д.

2. Изменение состава или последовательности выполнения отдельных работ, а также взаимосвязи между ними с целью сокращения общей длительности критического пути. Так, широко применяется метод разделения отдельных работ на несколько работ, выполняемых параллельно (другое название этого метода – метод выведения работ на параллельные пути).

3. Исключение некоторых работ критической зоны. Например, в отдельных случаях можно приступить к выпуску изделий, не опробовав технологии в опытном масштабе. Разумеется, такое исключение работ уменьшает вероятность получения изделий нужного качества и может привести к дополнительным расходам в производстве.

Необходимо отметить, что когда имеется выбор между несколькими методами оптимизации, нужно путем технико-экономического анализа выбрать лучший из них как с точки зрения продолжительности, так и с точки зрения стоимости работ и вероятности достижения требуемых результатов. Вместе с тем следует иметь в виду и то, что ни один из перечисленных методов оптимизации не гарантирует оптимальности плана. Поэтому все шире используют методы математической оптимизации с обработкой графиков на электронных вычислительных машинах. При этом оптимальный вариант выбирается с учетом всей сети в целом, т. е. целесообразность проведения любой работы, приемлемость намечаемых сроков ее проведения и эффективность используемых оргтехмероприятий определяются исходя из того, как они повлияют на соответствующие показатели всего комплекса работ.

Рассмотренные методы сетевого планирования и управления относятся главным образом к определению временных параметров сети. Поскольку эти методы учитывают только фактор времени, а располагаемые ресурсы не играют какой-либо определяющей роли, то методы получили название сетевых методов планирования и управления по критерию времени.

При всех достоинствах сетевого планирования по критерию времени недостатком такой системы является невозможность учета имеющихся в наличии ресурсов (финансовых, трудовых, материальных, производственно-технических). Формализация задач сетевого планирования и управления по критерию времени допускает, что предприятие располагает неограниченными ресурсами для выполнения того или иного комплекса работ. В действительности же ресурсы, как правило, ограничены.

Кроме того, методы сетевого планирования по критерию времени страдают тем недостатком, что при заданных сроках выполнения комплекса работ они не позволяют добиться оптимального распределения ресурсов по отдельным работам.

В свою очередь эффективность организации того или иного производственного процесса определяется не только четкой координацией работ по времени, что достигается рассмотренными выше методами, но – и в значительно большей степени – тем, как правильно выбраны и распределены имеющиеся в наличии располагаемые ресурсы. Совершенно очевидно также, что некоторые рекомендации по ускорению работ без учета имеющихся ресурсов могут оказаться практически нереализуемыми.

К числу систем, реализующих метод сетевого планирования и управления по критерию стоимости, за рубежом относят ПЕРТ-стоимость, СКАНС, РАМПС, ЛЕСС, МКИКС и некоторые другие. Достаточно подробно описаны общие вопросы системы сетевого планирования и управления по критерию стоимости и в отечественной литературе.

Следует отметить, что метод сетевого планирования и управления производством по критерию стоимости является дальнейшим развитием и совершенствованием системы СПУ по времени и в своей первичной основе базируется на последней; поэтому различные модификации сетевых методов СПУ по стоимости часто называют методами «время–стоимость». Органическая связь СПУ по стоимости и СПУ по времени заключается, наконец, и в том, что фаза стоимостной оценки планируемого процесса может наступить лишь только в том случае, когда сетевой график уже полностью построен в соответствии с ранее описанными правилами сетевого планирования и управления по времени.

Исходя из основной идеи метода СПУ по стоимости, заключающегося в совместном анализе стоимости отдельных работ и временных параметров сети, рекомендуется переходить к планированию работы по методам «время–стоимость» лишь после полного изучения и освоения на практике методов СПУ по времени. Рекомендуется также, чтобы определением стоимостных оценок работ занимались те же самые эксперты (ответственные исполнители), которые работали над сетевым графиком с временными оценками.

Методам «время–стоимость» присущ целый ряд специфических особенностей. Алгоритм этих методов можно подразделить на два основных этапа: на первом проводятся соответствующие вычисления, связанные с планированием комплекса работ, а на втором выполняются расчеты по оптимизации системы, связанные с управлением этим комплексом.

В дополнение к терминам, присущим системе СПУ по времени, для методов «время – стоимость» характерен еще ряд понятий. Например, физически минимально возможный срок выполнения какой-либо работы называется экстренной продолжительностью работы. В свою очередь непосредственные затраты на работу при экстренном ее выполнении носят название затрат экстренной продолжительности.

Длительность выполнения работы в обычных условиях, характеризующихся минимальными затратами на ее проведение, называется нормальной продолжительностью работы. Нормальная продолжительность работ определяется тремя вероятностными оценками времени t_{min}, $t_{н.в.}$ и t_{max}, а экстренная продолжительность характеризуется лишь одной оценкой $t_{ож}$

На практике возможны самые разнообразные варианты зависимостей величины затрат на работу от времени ее выполнения (рис. 1).

Наиболее характерной является кривая зависимости от времени, показанная на рис. 1, а. Она может быть не только вогнутой, но и выпуклой (рис. 1, б) или выпукло-вогнутой (рис. 1,б). Отмечаются случаи прямолинейной зависимости расходов на работу от ее продолжительности (рис. 1, *г),* разрывной зависимости (рис. 1, *д),* а также линейной зависимости «горизонтального типа»

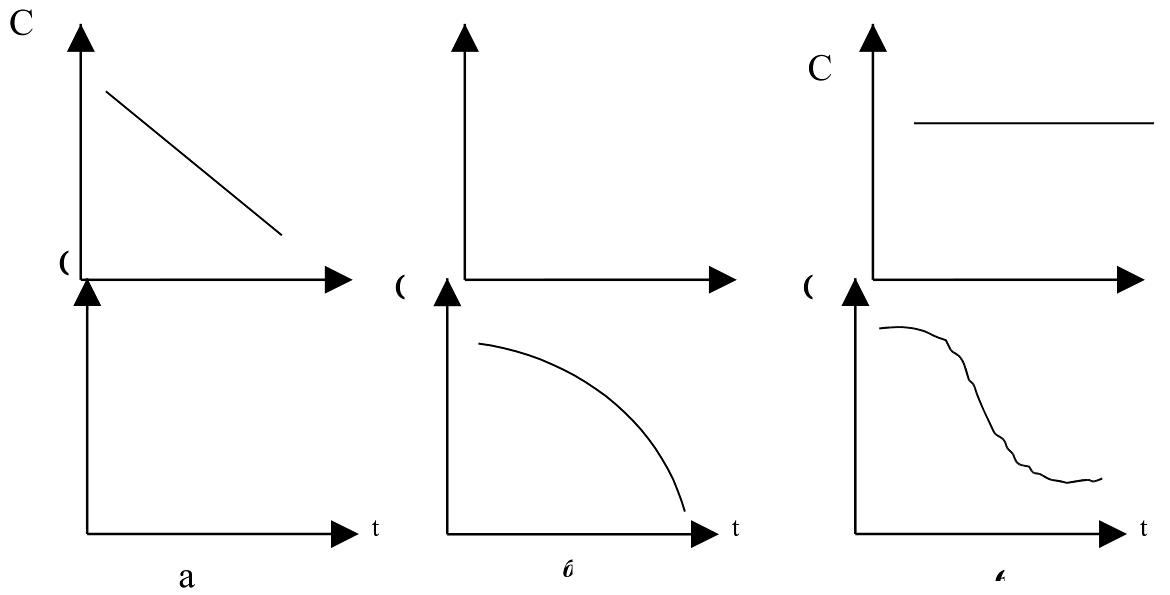


Рис. 1. Различные варианты зависимости величины затрат на работу (С) от продолжительности ее выполнения (t).

(рис.1,е). В любом конкретном случае требуется уточнение характера упомянутой зависимости.

В целях удобства последующих расчетов кривые зависимостей «время—стоимость» аппроксимируются известными методами математической статистики, причем в процессе аппроксимации достигается замена кривой соответствующими ей вписанными или описанными отрезками, составляющими кусочно-линейную кривую.

Кривая зависимости стоимости работы от ее продолжительности определяет так называемую величину н а к л о н а , являющегося показателем изменения величины стоимости работы при увеличении или уменьшении ее продолжительности на единицу времени. Аналитически величина наклона может быть определена из выражения

$$\gamma = \frac{C_2 - C}{t_{ож1} - t_{ож2}} \qquad (1)$$

где γ— показатель величины наклона;

C_1 — стоимость работы в первом (нормальном) варианте;

C_2 — стоимость работы во втором (экстренном) варианте;

$t_{ож1}$— ожидаемая продолжительность работы в первом (нормальном) варианте;

$t_{ож2}$— ожидаемая продолжительность работы во втором (экстренном) варианте.

Несмотря на целый ряд допущений при вычислении наклона (о них будет сказано ниже), этот показатель с определенной достоверностью дает представление о требуемом объеме дополнительно привлекаемых средств при сокращении продолжительности работы на единицу времени.

При оптимизации сетевых графиков в качестве исходного принят принцип первоочередного сокращения времени наиболее «дешевых» работ составляющих сеть и лежащих на критическом пути, «дешевыми» работами в этом случае считаются такие, которые позволяют уменьшить продолжительность выполнения комплекса на единицу времени при наименьшем (самом «дешевом») возрастании затрат. Поскольку же уменьшения продолжительности выполнения комплекса можно добиться только за счет работ, лежащих на критическом пути, то оптимизация проводится не за счет вообще «дешевых» работ, а только по «дешевым» критическим работам.

Задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов по отдельным работам сетевой модели представляют собой сложные математические задачи, причем их характер зависит как от количества работ, составляющих сеть, так и от той величины, которую стремятся оптимизировать. Поэтому, для решения целого ряда задач сетевого планирования и управления по критерию стоимости с успехом используются методы линейного программирования.

Критерием эффективности таких задач может быть время выполнения комплекса работ. В этом случае возможна формулировка задачи следующим образом: минимизировать продолжительность выполнения планируемого комплекса работ при наличии ограниченных ресурсов.

Другими словами, требуется так распределить ограниченные ресурсы, чтобы длительность выполнения работ была минимальной.

Бывает и наоборот: требуется минимизировать расход ресурсов при условии выполнения соответствующего комплекса работ в заданный срок.

В зависимости от постановки задачи математическая формулировка и методы решения последней могут быть, вполне естественно, различны. Учитывая сравнительно простую возможность решения задач линейного программирования, наибольший интерес в смысле удобства решения представляют такие задачи, которые могут быть сведены к задачам линейного программирования.

Покажем, как задача СПУ, требующая минимизации стоимости планируемых работ, может быть сведена к типовой задаче линейного программирования.

Критическое время $t_{кр}$ представляет собой минимальное количество времени, необходимое для выполнения всего комплекса работ. Из данного определения следует, что $t_{кр}$ численно равно максимальной длине пути из начального события *0* сети в завершающее *n,* т. е.

$$t_{кр} = \max \ t \quad \{ \ \} \qquad (2)$$

Если t_i — ранний срок свершения события i, t_j — поздний срок наступления события j, а t_{i-j} — продолжительность работы i-j, то полный резерв времени этой работы P_{i-j} определится разностью t_j-t_i-t_{i-j} отсюда очевидно, что для любой i-j-й работы должно выполняться условие

$$t_j - t_i - t_{i-j} \geq 0. \qquad (3)$$

Можно доказать, что из всех путей, соединяющих О с ***n***, критическим является только такой путь, для всех работ которого полный резерв времени равен нулю, т. е.

$$t_j - t_i - t_{i-j} = 0. \qquad (4)$$

Если все работы, составляющие сеть и удовлетворяющие условию (4), критические, то для некритических работ, согласно условиям (3) и (4), справедливо следующее соотношение:

$$t_j - t_i - t_{i-j} > 0. \tag{5}$$

Снижение затрат на осуществление планируемого комплекса работ может быть проведено за счет некритических работ, причем в результате оптимизации все работы должны быть критическими. Из сказанного вытекает, что для всех событий должно выполняться условие

$$t_i = t_i , \tag{6}$$

справедливость которого может быть доказана.

Теперь мы имеем возможность записать следующее равенство:

$$t_i = t_i = t_i . \tag{7}$$

Вместе с тем, если до оптимизации сетевого графика время некритической работы составляло t_{i-j}, то после оптимизации ее продолжительность может только увеличиться, т. е.

$$t_j - t_i \geq t_{i-j} . \tag{8}$$

Внеся в выражения (2) и (8) новые обозначения [см. выражение (7)], Соответственно получим:

$$t_n = t_{кр}; \tag{9}$$

$$t_j - t_i \geq t_{i-j} . \tag{10}$$

Считая, что величина затрат C_{i-j} каждой работы линейно зависит от ее продолжительности, т.е.

$$C_{i-j} = a_{i-j} - b_{i-j} t_{i-j} , \tag{11}$$

Где a_{i-j} и b_{i-j} – некоторые константы, можно выразить цель оптимизации сетевого

графика, заключающуюся в минимизации функции стоимости работ:

$$L(t) = \sum_{I,j} [a_{i-j} - b_{i-j} (t_j - t_i)] \rightarrow \min. \tag{12}$$

Теперь задача заключается в том, чтобы найти такие неотрицательные значения переменных t_i (i=1, 2, 3, …, n), которые бы удовлетворяли условиям (9) и (10) и обращали бы в минимум линейную форму (12).

Приведенная здесь постановка задачи является наиболее употребительной, хотя в частных случаях возможны и другие формулировки задач СПУ.

Пример. Требуется оптимизировать укрупненный сетевой график выполнения работ по реконструкции прядильной фабрики. Перечень планируемых работ с указанием их экстренной и нормальной продолжительности и соответствующих затрат на выполнение приведен в табл.1. Здесь же указан показатель наклона γ, определяющий дополнительные затраты (в тыс. руб.), необходимые для сокращения продолжительности работ на одну неделю.

Как видно из таблицы, общие затраты на проведение работ при нормальной их продолжительности составляют 25,3 тыс. руб., а при экстренной увеличиваются до 36,4 тыс. руб. В свою очередь из графика на рис. 20 следует, что если продолжительность выполнения всего комплекса по реконструкции при нормальном проведении работ составляет 14 недель (рис. 20, *а)*, то в случае экстренного выполнения она сокращается до 8 недель (рис. 20, б).

Таблица 1

Содержание работы	Код работы	Продолжительность (в неделях)		Затраты в тыс. руб.		Затраты γ, необходимые для сокращения продолжительности работ на 1 неделю (тыс. руб.)
		нормальная tож	нормальная tож	при нормальной продолжительности С1	при экстренной продолжительности С2	
Ремонт трепально-разрыхлительных агрегатов	0 - 1	2	2	0,8	0,8	
Модернизация прядильных машин	0 - 3	10	6	5,5	8,3	0,7
Модернизация ленточных машин	0 - 4	3	2	1,3	1,7	0,4
Реконструкция воздуховодов	0 - 5	3	1	0,6	2,2	0,8
Ремонтные работы на участке чесальных машин	1 - 2	9	4	3,6	6,1	0,5
Фиктивная работа	2 - 8	0	0	0	0	
....	3 - 5	0	0	0	0	
Монтаж подвесного транспорта на участке	4 - 6	3	3	6,8	6,8	

ленточных машин						
Фиктивная работа	5 - 7	0	0	0	0	
Монтаж пухообдувателей пола	5 - 8	2	1	0,8	1,7	0,9
пневмотранспорта для угаров на участке ленточных машин	6 - 7	1	1	0,2	0,2	
Фиктивная работа	7 - 8	0	0	0	0	
Ремонт пола	8 - 9	2	1	3,3	6,2	2,9
Косметический ремонт помещений	8 - 10	1	1	2,4	2,4	
Фиктивная работа	9 - 10	0	0	0	0	
Всего				25,3	36,4	

При оптимизации сети, заключающейся в уменьшении продолжительности работ при минимальных затратах, на критическом пути отбираем наиболее «дешевые» работы. Поскольку критический путь определяется работами 0-3, 3-5, 5-8, 8-9 9-10 (рис. 2,а), а затраты, сокращающие критический путь на 1 неделю, составляют для работы 0-3 0,7 тыс. руб., для работы 5-8 0,9 тыс. руб. и для работы 8-9 2,9 тыс. руб., прежде всего сокращаем продолжительность работы *0—3* (как самой «дешевой»). Теперь весь комплекс работ сети может быть закончен за 13 недель (рис. 3, а). Стоимость же его выполнения возрастает на 0,7 тыс. руб. и составит 26 тыс. руб

На этом шаге оптимизации графика в сети появляются два критических пути. Дальнейшее сокращение длительности выполнения комплекса возможно только при одновременном уменьшении продолжительности работ обоих критических путей.

Поскольку наиболее «дешевыми» работами на путях 0—1—2— 8—9—10 и 0—3—5—8—9—10 являются работы 0—3 и 1—2, новый вариант сети примет вид, изображенный на рис.3, б. Затраты на выполнение работ по этому графику составляют 27,2 тыс. руб. Проведенное сокращение продолжительности сети не изменило направления критических путей. Поэтому продолжаем уменьшать время выполнения работ 0—3 и 1—2 (рис. 3, *в* и *г*). Стоимость работ сети возрастает сначала до 28,4, а затем до 29,6 тыс. руб.

Последнее преобразование графика (рис. 3, *г)* также не изменило направления критических путей, но превратило работу 0—3 в экстренную, дальнейшее сокращение продолжительности которой физически невозможно.

Исходя из этого, следующий шаг оптимизации проводим по работе 5—8, которая стала самой «дешевой» в цепи 0—3—5—8—9—10 (рис. 3, *д)*. При подобной организации работ по реконструкции фабрики продолжительность выполнения всего комплекса работ сокращается до девяти недель, а затраты, связанные с реконструкцией, возрастают до 31,0 тыс. руб. Так как теперь на графике появляется третий критический путь 0—4—6—7—8—9—10, последующее уменьшение времени выполнения планируемого комплекса работ по реконструкции прядильной фабрики возможно только за счет работы, общей для всех критических путей, т. е. 8—9. Продолжительность ее выполнения, как видно из табл.1, можно сократить до одной недели.

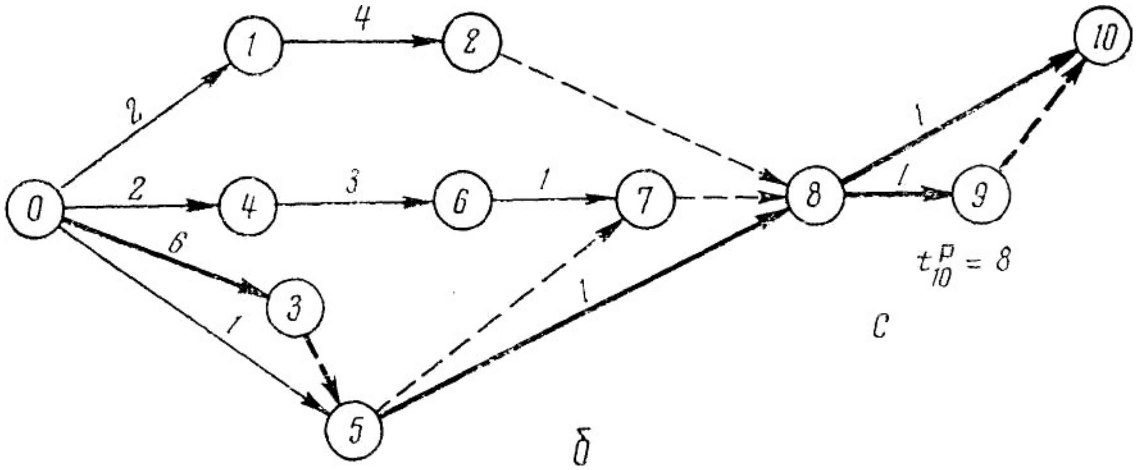
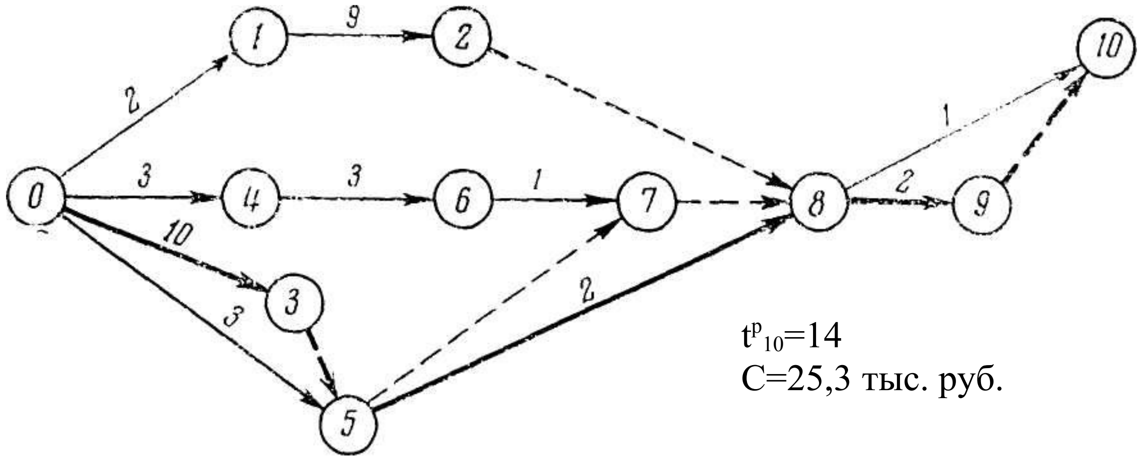


Рис. 2. Сетевые графики нормального (а) и экстренного (б) проведения работ по реконструкции прядильной фабрики



Это увеличивает стоимость работ сети на 2,9 тыс. руб., повышая общие затраты на реконструкцию до 33,9 тыс.руб. при сокращении общей продолжительности комплекса работ до 8 недель. После такого сокра-

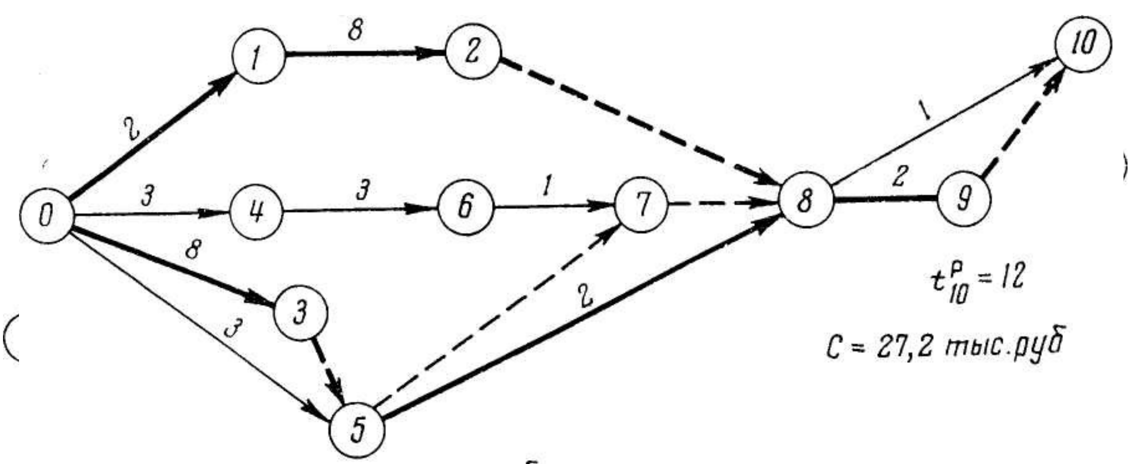
C = 36,4 тыс.руб.

щения критической становится и работа 8—10 (рис.3, *е*). В результате анализа графика, изображенного на рис. 3, *е,* устанавливаем, что можно производить дальнейшее сокращение времени выполнения лишь трех работ: 0—4 и 1—2 на одну неделю и 0—5 на две недели.

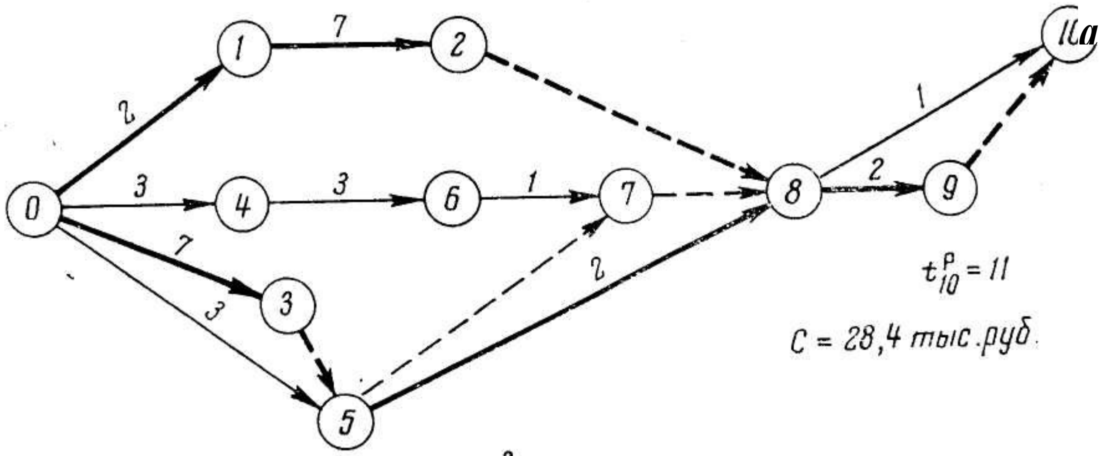
Объем дополнительных затрат при таком варианте организации работ возрастает соответственно на 0,4; 0,5 и 1,6 тыс. руб., а всего на 2,5 тыс. руб. Очевидно, что в этом случае мы приходим к экстренному случаю выполнения всех работ, т. е. к графику экстренной реконструкции фабрики, приведенному на рис.2, *б.* Это подтверждается и общей суммой затрат на реконструкцию: 33,9 + 2,5 = 36,4 тыс. руб.

Чтобы окончательно определить наиболее приемлемую продолжительность реконструкции прядильной фабрики, обеспечивающую наивысшую эффективность, необходимо проанализировать все имеющиеся графики организации работ (рис. 2 и 3). Анализ сетевых графиков с целью нахождения оптимального из них заключается в сравнении затрат на выполнение работ с экономическим эффектом, который достигается на предприятии в результате сокращения срока окончания планируемого комплекса работ. В процессе проведения анализа сетевого графика немаловажным фактором является также учет располагаемых предприятием ресурсов.

Наиболее наглядно и просто можно осуществить анализ время-стоимостных показателей графически. Если в рассмотренном выше примере реконструкция прядильной фабрики обеспечивает увеличение прибыли на 2,5 тыс. руб. в неделю, а предприятие располагает на реконструкцию 34,0 тыс. руб., то, используя полученные значения время –стоимостных показателей при различных вариантах организации работ, можно построить график, на котором изобразим зависимость величины затрат от продолжительности выполнения работ (рис.4.).

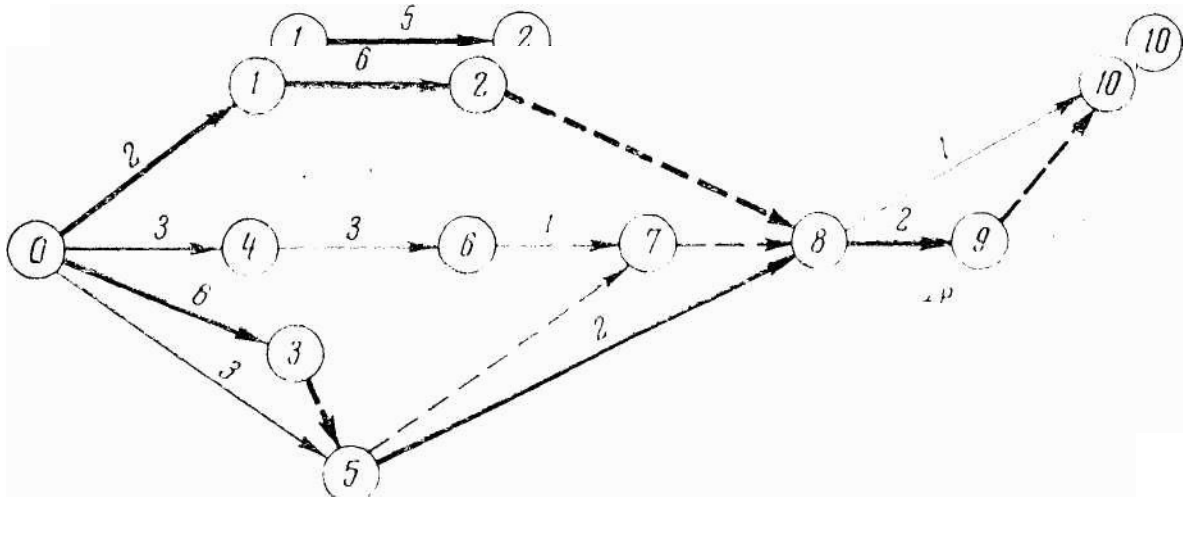


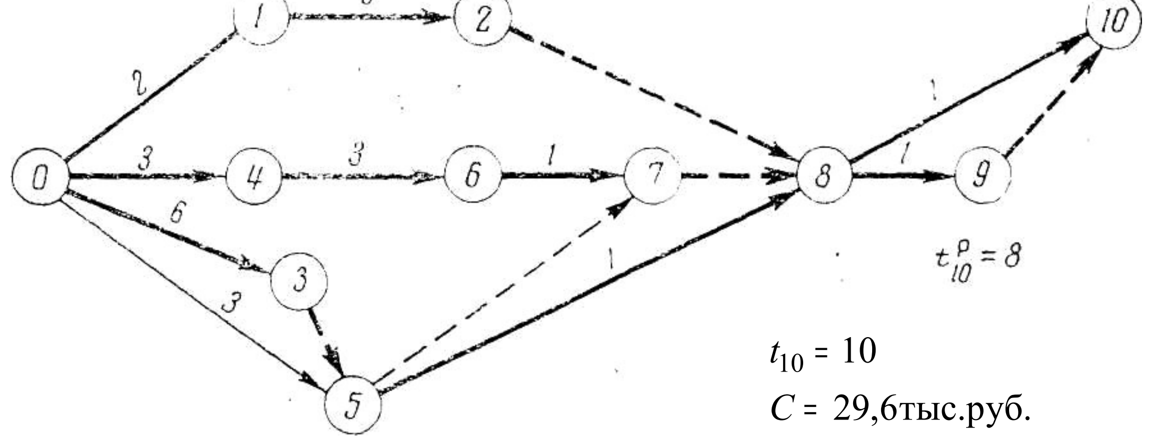
б



в

Рис. 3. Шесть шагов оптимизации сетевого графика реконструкции прядильной фабрики





t_{10} = 10

C = 29,6тыс.руб.

Отложив на оси абсцисс ранние сроки свершения завершающих событий, которые соответствуют времени окончания работ по реконструкции фабрики, а на оси ординат стоимостные показатели выполнения этих работ, и соединив соответствующие точки на графике отрезками, получаем

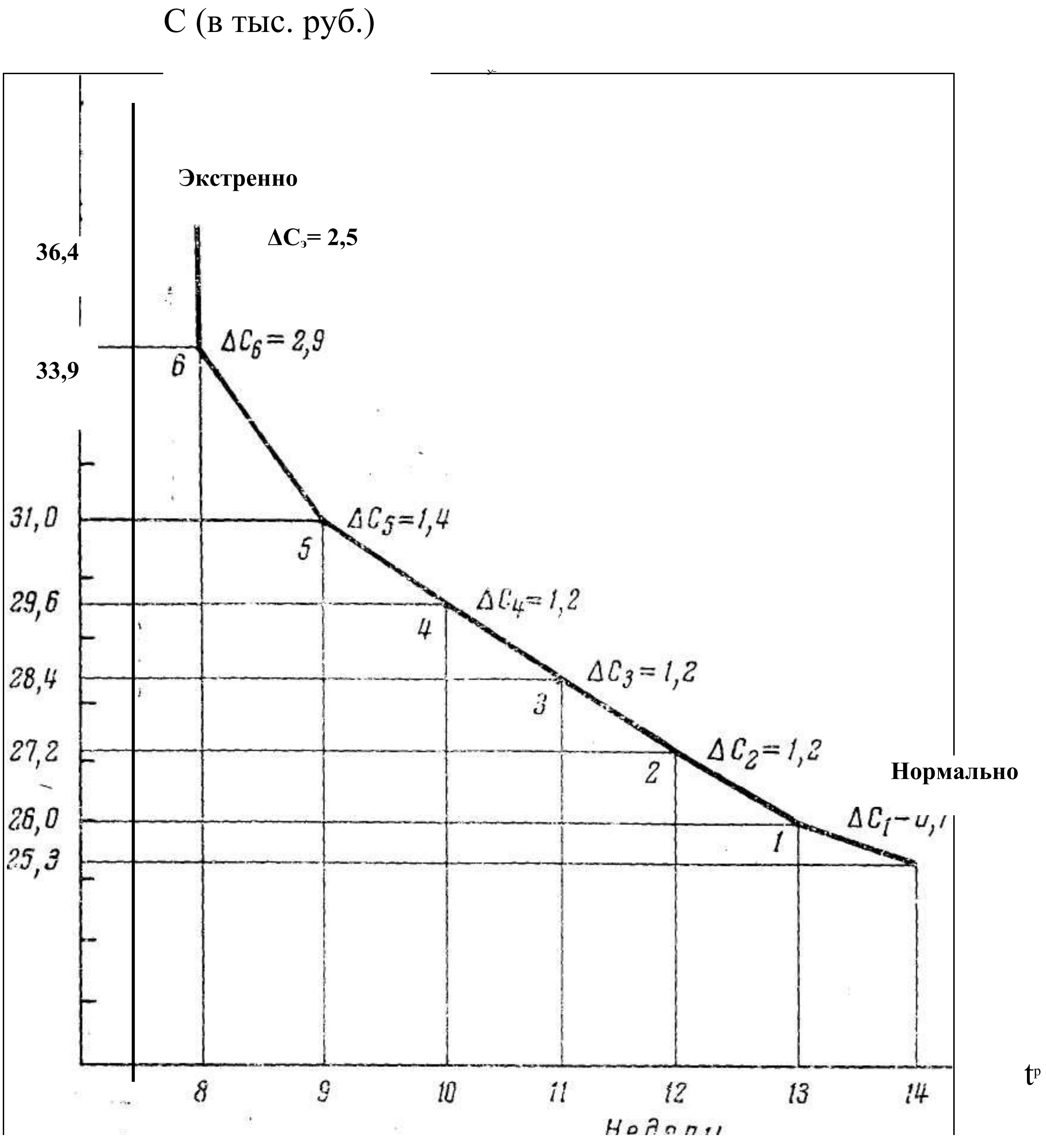


Рис.4. Зависимость величины затрат на реконструкцию фабрики (С) от продолжительности выполнения работ (t^p)

кусочно-линейную зависимость стоимости работ от продолжительности их выполнения. Определив теперь разности в затратах при сокращении продолжительности реконструкции на каждую последующую неделю (ΔС), нетрудно убедиться, что оптимальным с точки зрения распределения ресурсов будет пятый вариант сетевого графика организации проведения работ по реконструкции прядильной фабрики (см. рис. 3, *д*). Действительно, лишь при этом варианте организации работ обеспечивается максимальное уменьшение продолжительности выполнения всего планируемого комплекса при условии, что стоимость сокращения работы на одну неделю не будет превышать получаемой то этого эффективности.

Экономическая эффективность проведения реконструкции фабрики по пятому варианту графика составляет (14-9)*2,5-(0,7+1,2+1,2+1,2+1,4)=6,8 тыс. руб. по сравнению с нормальным проведением работ. Кроме того, как уже указывалось, график оптимального выполнения работ по реконструкции позволяет также сократить продолжительность всего комплекса с 14 до 9 недель.

Дальнейшее сокращение продолжительности работ до 8 недель (см. рис. 3, *е*) уменьшает достигнутую эффективность до 6,4 тыс. руб., а при экстренном проведении работ (см. рис. 3, *б*) она будет составлять лишь 3,9 тыс. руб.

С другой стороны, четвертый вариант графика (см. рис. 3, *г*), при котором продолжительность работ сокращена до 10 недель, также обеспечивает эффективность меньшую, чем в пятом варианте. В данном случае она составляет 5,7 тыс. руб.

Пятый вариант организации проведения реконструкции прядильной фабрики удовлетворяет и условию располагаемых предприятием финансовых ресурсов, так как стоимость всех работ при этом составляет 31,0 тыс. руб. против 34,0 тыс. руб., первоначально выделявшихся на реконструкцию

12. Понятие и классификация систем массового обслуживания.

Системой массового обслуживания (СМО) называют любой процесс, характеризуемый возникновением потока требований и их удовлетворением или отказом в удовлетворении.

Примеры: телефонные станции, билетные кассы, магазины, страховые бюро, различные ателье и т. п.

Часть процесса, в которой возникает требование, называется обслуживаемой системой, другая его часть, которая удовлетворяет эти требования, называется обслуживающей системой.

Под требованиями понимают различного рода заявки, поступающие из определенного источника и требующие соответствующего обслуживания.

Последовательность появления заявок называется потоком требований, который может быть входящим (поступающим в СМО), или выходящим (покидающий СМО). Любая СМО включает следующие компоненты: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания), выходящий поток требовании.

СМО делят на два основных типа (класса):

СМО с отказами, и СМО с ожиданием (очередью). В СМО с отказами заявка, поступающая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. Например, заявка на телефонный разговор, когда все каналы заняты. В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание. Примером СМО с ожиданием служит работа билетной кассы,

В зависимости от организации очереди СМО с ожиданием подразделяются на системы в ограниченной и неограниченной длиной очереди, с ограниченным или не ограниченным временем ожидания и т. п.

По числу каналов системы делят на одноканальные и многоканальные. По месту нахождения источника требований СМО делятся на разомкнутые, когда источник находится вне системы, и замкнутые, когда источник находится в самой системе.

Например, ситочный участок, на котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, и требований на их обслуживание, является замкнутой СМО.

СМО подразделяют также на системы с приоритетами (заявки обслуживаются вне очереди) и системы без приоритетов

Распространена следующая сокращенная форма записи классификационных

признаков СМО: $a|в|R|N|$, где a - распределение потока требований; $в$ - распределение

времени обслуживания; R - число каналов обслуживания; N - объем источника поступления требований.

Например, $M|E|1|8|$ означает, что имеется одноканальная СМО с экспоненциальным

распределением потока требований и распределением времени по закону Эрланга при объёме источника из восьми элементов.

Показатели эффективности СМО.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО с показателями эффективности, описывающими ее способность справиться с потоком заявок.

Показатели эффективности делятся на показатели:

1. Характеризующие качество и условия работы обслуживающей системы;
2. Отражающие экономические особенности системы.

Показатели первой группы формируют на основе полученных из расчетов значений вероятностей состояний системы. Показатели второй группы рассчитывают на основе показателей первой группы.

Среди показателей первой группы можно выделить следующие:

1. Вероятность того, что поступающее в систему требование откажется присоединяться к очереди и теряется;

2. Среднее количество требований, ожидающих начала обслуживания $(L_{оч})$;

3. Относительная *(q)* и абсолютная *(A)* пропускные способности системы:

$$q = 1 - P_{отк}, \qquad A = \lambda \cdot q$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов;

5. Общее среднее количество требований, находящихся в системе $(L_{сист})$;

6. Среднее время ожидания требования начала обслуживания $(T_{оч})$;

7. Среднее время пребывания требования в системе $(T_{сист})$

Все эти показатели на практике рассчитываются по формулам, полученным в предположении, что входящий поток требований простейший (пуассоновский), с интенсивностью λ, а интервал времени между двумя следующими одно за другим требованиями в простейшем потоке распределены по показательному закону с параметром λ.

Эти обстоятельства позволяют приписывать происходящему в СМО процессу основное свойство марковских случайных процессов: для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент и не зависят оттого, когда и как система пришла в это состояние.

Для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока требований:

$$T_{сисит} = \frac{L_{сист}}{\lambda}, \quad (2.1) \qquad и \qquad T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч},$$

(2.2)

Формулы (2.1) и (2.2) называются формулами Литтла.

Показатели, характеризующие экономические особенности, формируют в соответствии с конкретным видом системы. Одним из общих экономических показателей является экономическая эффективность

$$E = P_{обсл} \lambda CT - G_n,$$

где $P_{обсл}$ - вероятность обслуживания, С - средний экономический эффект, полученный при обслуживании одного требования, Т – рассматриваемый интервал времени,

G_n - величина потерь в системе.

Система массового обслуживания с отказами.

Показателями эффективности СМО с отказами являются:

A - абсолютная пропускная способность системы, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

q - относительная пропускная способность системы, т.е. средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{отк}$ - вероятность отказа, т.е. того, что заявка покинет систему необслуженной;

$\bar{r}$ - среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

Это показатели рассчитываются по формулам приведёнными в табл. 3.1, где

λ - интенсивность входящего потока требований;

μ - интенсивность потока обслуживания;

$\bar{t}_{обс}$ - среднее время обслуживания требования и $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{обс}}$;

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - интенсивность нагрузки канала; r - число каналов.

Таблица 3.1

Вид системы Показатель	Одноканальная	Многоканальная
q	$\dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$	$1 - \dfrac{\rho^r}{r!} P_0$
$P_{отк}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$	$\dfrac{\rho^r}{r!} P_0$
A	$\lambda q = \dfrac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$	$\lambda \left(1 - \dfrac{\rho^r}{r!} P_0\right)$
$\bar{r}$		$\dfrac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \dfrac{\rho^r}{r!} P_0\right)$

Замечание

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^r}{r!}\right)^{-1} \qquad (3;1)$$

и $P_1 = \rho P_0$, $\quad P_2 = \dfrac{\rho^2}{2!} P_0, \ldots, \quad P_r = \dfrac{\rho^r}{r!} P_0$. (3.2)

Формулы (3.1) и (3.2) называются формулами Эрланга.

Задача 3.1.

В вычислительный центр, с тремя ЭВМ, поступают заказы на вычислительные работы. Если работают все три машины, то вновь поступающий заказ не принимается. Пусть среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0,25 (1/ч). Найти вероятность отказа и среднее число занятых ЭВМ.

Решение.

Имеем: r = 3; $\lambda = 0{,}25$ (1/ч), $T_{обс} = 3$ (ч)

Находим

$$\mu = \frac{1}{3}; \quad \rho = \frac{0{,}25}{1/3} = 0{,}75;$$

$$P_0 = \left(1 + 0{,}75 + \frac{0{,}75^2}{2!} + \frac{0{,}75^3}{3!}\right)^{-1} = (2{,}1)^{-1},$$

$$P_{отк} = \frac{0{,}75^3}{3!} \cdot \frac{1}{2{,}1} = 0{,}033, \quad \bar{r} = 0{,}75\left(1 - \frac{0{,}75^3}{3!} \cdot \frac{1}{2{,}1}\right) \approx 0{,}72.$$

Итак, $P_{отк} = 0{,}033, \bar{k} \approx 0{,}72$

Система массового обслуживания с ожиданием (очередью).

Показателями эффективности СМО с неограниченной очередью являются:

A - абсолютная пропускная способность;

q - относительная пропускная способность;

$P_{отк}$ - вероятность отказа;

$\bar{r}$ - среднее число занятых каналов;

$L_{сист}$ - среднее число заявок в системе;

$T_{сист}$ - среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{об}$ - среднее число заявок, находящихся под обслуживанием;

$L_{оч}$ - среднее число заявок в очереди (длина очереди);

$T_{оч}$ - среднее время пребывания заявки в очереди;

$P_{зан}$ - вероятность тою, что канал занят (степень загрузки канала).

Необходимые для расчетов формулы представлены в таблице 4.1

Таблица 4.1

Вид системы / Показатели	Одноканальная с неограниченной очередью	Многоканальная с неограниченной очередью
$L_{сист}$	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$L_{оч}+\rho$
$L_{оч}$	$L_{сист}-L_{об}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{\rho^{r+1}P_0}{r\cdot r!\left(1-\frac{\rho}{r}\right)^2}$
$L_{об}$	$L_{об}=P_{зан}=1-P_0=\rho$	
$T_{сист}$	$\frac{1}{\lambda}L_{сист}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$	$\frac{1}{\lambda}L_{сист}$
$T_{оч}$	$\frac{1}{\lambda}L_{оч}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$	$\frac{1}{\lambda}L_{оч}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$
$\bar{r}$		$\frac{\lambda}{\mu}=\rho$
$P_{зан}$	$1-P_0=\rho$	

Замечание. Для многоканальной СМО

$$P_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^r}{r!} + \ldots + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)}\right)^{-1}$$

$$P_1 = \rho P_0, \ldots,$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \ldots, \quad P_{r+1} = \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} P_0, \ldots, \quad P_{r+l} = \frac{\rho^{r+l}}{r^l \cdot r!} P_0$$

где

P_{r+l} – вероятность того, что все каналы заняты, l заявок стоит в очереди.

Показатели эффективности СМО с ограниченной очередью рассчитываются по формулам, представленным в таблице 4.2., где m – число заявок в очереди (длина очереди).

Таблица 4.1

Вид системы Показатели	Одноканальная СМО с ограниченной очередью	Многоканальная СМО с ограниченной очередью
Предельные вероятности	$P_0 = \frac{1-p}{1-p^{m+2}}$ $P_1 = \rho P_0, P_2 = \rho^2 P_0,$ $\ldots, P_k = \rho^k P_0$	$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^r}{r!} + \ldots + \frac{\rho^{r+1}\left(1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^l\right)}{r \cdot r!\left(1-\frac{\rho}{r}\right)}\right]^{-1}$ $P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0, \ldots, P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \ldots,$ $P_n = \frac{\rho^r}{r!} P_0, \ldots, P_{n+1} = \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} P_0$ $P_{r+n} = \frac{\rho^{r+n}}{r^n \cdot r!} P_0$ ($n=1,\ldots,m$)

Вероятность отказа	$P_{отк.} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$	$P_{отк.} = p_{m+1} = \dfrac{\rho^{n+m}}{r^m \cdot r!} p_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \rho^{m+1} p_0\right)$	$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{r^m \cdot r!} p_0\right)$
Относитель-ная пропускная способность	$q = 1 - P_{отк.} = 1 - \rho^{m+1} p_0$	$q = 1 - P_{отк.} = 1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{r^m \cdot r!} p_0$
Среднее число заявок в очереди	$L_{оч.} = \rho^2 \dfrac{\left[1 - \rho^m\left(m + 1 - m\rho\right)\right]}{\left(1 - \rho^{m+2}\right)\left(1 - \rho\right)}$	$L_{\hat{i}\div .} = \dfrac{\rho^{n+1} P_0 \left[1 - \left(m + 1 - m\dfrac{\rho}{r}\right)\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m\right]}{r \cdot r! \left(1 - \dfrac{\rho}{r}\right)^2}$
Среднее число Заявок под об-служиваннии-ем (среднее число занятых каналов)	$L_{об.} = 1 - p_0$	$\bar{r} = \rho \left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{r^m \cdot r!} p_0\right)$
Среднее число заявок в системе	$L_{сист.} = L_{оч.} + L_{об.}$	$L_{сист.} = L_{оч.} + \bar{r}$

Задача 4.1. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем два судна.

Решение. Имеем $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\ \bar{t}_{об.} = o{,}4 \cdot 2 = 0{,}8.$ Так как $\rho = 0{,}8 < 1,$ то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Вероятность того, что причал свободен, $P_0 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$

а вероятность того, что он занят, $P_{зан.} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Вероятность того, что у причала нахходятся1,2,3 судна (т. е. ожидают разгрузки 0,1,2 судна), равны $P_1 = 0{,}8(1 - 0{,}8) = 0{,}16;$ $P_2 = 0{,}8^2(1 - 0{,}8) = 0{,}128;$ $P_3 = 0{,}8^3(1 - 0{,}8) = 0{,}1024.$

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна, равна $P = P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904.$

Среднее число судов, ожидающих разгрузки $L_{оч.} = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 3{,}2$.

а среднее время ожидания разгрузки $T_{оч.} = \frac{3{,}2}{0{,}8} = 4$ (сутки).

Среднее число судов, находящихся у причала, $L_{сист.} = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 4$ (судов).

$L_{сист.} = 3{,}2 + 0{,}8 = 4$ (судов),

а среднее время пребывания судна у причала

$T_{сист.} = \frac{4}{0{,}8} = 5$ (сутки).

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысока. Для ее повышения необходимо уменьшить среднее время разгрузки судна $\bar{t}_{об.}$ либо увеличить число каналов *r*.

Задача 4.2. По условию задачи 4.1 найти показатели эффективности работы причала. Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

Решение. По условию m=3. Используем формулы, приведенные во второй графе табл. 4.2.

Вероятность того, что причал свободен:

$$P_0 = \frac{1-0{,}8}{1-0{,}8^{3+2}} = 0{,}297.$$

Вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки:

$$P_{отк} = 0{,}8^{3+1}0{,}297 = 0{,}122.$$

Относительная пропускная способность причала:

$$q = 1\text{-}0{,}122 = 0{,}878$$

Абсолютная пропускная способность причала А = 0,4*0,878 = 0,351, т.е. в среднем в сутки разгружается 0,35 судна.

Среднее число судов, ожидающих разгрузку

$$L_{оч} = \frac{0{,}8^2\left[1-0{,}8^3\left(3+1-3\cdot 0{,}8\right)\right]}{\left(1-0{,}8^{3+2}\right)\left(1-0{,}8\right)}$$

а среднее время ожидания разгрузки

$$T_{оч} = \frac{0{,}861}{0{,}8} = 1{,}076 \quad \text{(сутки)}$$

Среднее число судов, находящихся у причала

$$L_{сист} = 0{,}861 + (1\text{-}0{,}297) = 1{,}564,$$

а среднее время пребывания судна у причала по (4.2):

$$T_{сист} = \frac{1{,}564}{0{,}8} = 1{,}955 \quad \text{(сутки)}.$$

Замкнутые СМО.

В замкнутых системах массового обслуживания поступление потока требований зависит от самой системы. Элемент системы после выполнения своего требования не покидает систему, а возвращается назад и любой момент может опять послать очередную заявку, то есть требования движутся по циклу, а источники заявок являются не внешними, а внутренними. Замкнутые СМО типичны для таких производственных ситуаций, когда рассматриваются организационные формы обслуживания технологического оборудования. Источником требований обычно выступают машины (потоки, станки, выпуски), число которых ограничено и равно т. Обслуживание этих машин осуществляется r (r >1) рабочими, причем каждый рабочий обслуживает одновременно только одну машину.

Показателями эффективности системы служат:

1) Средняя длина очереди (среднее число требований, ожидающих обслуживания):

$$L_{оч} = \sum_{n=r+1}^{m} (n - r)P_n \,, \qquad (5,1)$$

где n - число машин, стоящих в очереди на обслуживание или уже обслуживаемых (число простаивающих машин), P_n - вероятность нахождения n простаивающих станков, причем

$$P_n = \frac{m!}{(m-n)!n!} \cdot \rho^n P_0 ,$$

$1 \le n \le r,$ (5,2)

$$P_n = \frac{m!}{(m-n)!n!r!r^{n-r}} \rho^n P_0, \qquad r < n \le m \quad \text{и}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{r} \frac{m!}{(m-n)!n!} \rho^n + \sum_{n=r+1}^{m} \frac{m!}{(m-n)!r!r^{n-r}} \rho^n \right]^{-1}$$

Для практических расчетов удобно пользоваться формулами:

$$P_n = a_n P_0, \quad n = 1,2,...,m, \qquad (5,3)$$

где $P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{m} a_n\right)^{-1}$, $a_n = \frac{(m-n+1)\rho}{n} a_{n-1}$ для 1 $\leq n \leq r-1, a_0 = 1$

$$a_n = \frac{(m-n+1)\rho}{r} a_{n-1} \quad \text{для} \quad r \leq n \leq m.$$

2) Среднее число незагруженных каналов обслуживания

$$\bar{r}_0 = \sum_{n=0}^{r} (r-n) P_n; \tag{5,4}$$

3) Среднее число требований, находящихся в обслуживании

$$L_{об} = r - \bar{r}_0; \tag{5,5}$$

4) Среднее число требований в системе

$$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} \tag{5,6}$$

5) Коэффициент простоя оборудования из-за ожидания обслуживания

$$k_c = \frac{L_{оч}}{m} = \frac{\sum_{n=r+1}^{m} (n-r) P_n}{m} \tag{5,7}$$

и процент простоя из-за совпадения операций

$$П_c = k_c \cdot 100; \tag{5,8}$$

6) Коэффициент простоя рабочего, обслуживающего систему

$$k_r = \frac{r_0}{r} \tag{5,9}$$

и соответственно коэффициент загруженности рабочего

$$k_з = 1 - k_r = 1 - \frac{r_0}{r}; \tag{5,10}$$

7) Среднее время ожидания машиной обслуживания

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda\left(m - L_{сист}\right)} = \frac{\sum\limits_{n=r+1}^{m}\left(n - r\right)P_n}{\lambda\left(m - L_{сист}\right)}; \qquad (5,11)$$

8) Среднее время совпадения операций

$$T_c = dT_{оч}, \qquad (5,12)$$

где d — число требований (остановок), приведенное к единице продукции.

Задача 5.1 Рабочий обслуживает группу из трех станков. Каждый станок останавливается в среднем два раза в час. Процесс наладки занимает в среднем 10 мин. Определить абсолютную пропускную способность наладки рабочих станков.

Решение. Имеем: $r = 1, m = 3, \lambda = 2, T_{обс} = 1/6, \mu = 6.$

Находим: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$

$$P_0 = \left(1 + 3\cdot\frac{1}{3} + \frac{3!}{1!\,1!\,1^1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3!}{0!\,1!\,1^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{-1} = \left(1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{26} = 0,346$$

Находим вероятность того, что рабочий будет занят обслуживанием

$P_3 = 1 - P_0 = 0,654.$

Если рабочий занят обслуживанием, то он обслуживает 6 станков в час, поэтому $A = \mu\cdot P_3 = 6\cdot 0,654 = 4,$ т.е. пропускная способность наладки рабочим станков равна 4 (станка в час).

Задача5.2 Ткач обслуживает пять ткацких автоматических станков. Производительность одного станка П = 3 м/ч; число самоостановок станка по данным наблюдений d = 2 на 1 м ткани; средняя продолжительность устранения причины остановки $\bar{t}$ =30 сек. Время обслуживания распределено по показательному закону. Требуется наши характеристики работы системы. Решение.

Имеем: $r = 1, m = 5, \lambda = \frac{d\Pi\Pi}{60} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{60} = 0{,}5$ требовании в минуту;

$\mu = \frac{1}{0{,}5} = 2 \quad \mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}$ требования в минуту. Следовательно, коэффициент

обслуживания (интенсивность загрузки канала) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25.$

Вычислим вероятность P_n останова n станков, для чего воспользуемся формулам (5,2):

$a_0 = 1,$

$a_1 = \frac{(5 - 1 + 1) \cdot 0{,}25}{1} \cdot 1 = 1{,}25,$

$a_2 = (5 - 2 + 1) \cdot 1{,}25 = 1{,}25,$

$a_3 = (5 - 3 + 1) \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}25 = 0{,}938,$

$a_4 = (5 - 4 + 1) \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}938 = 0{,}469,$

$a_5 = (5 - 5 + 1) \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}469 = 0{,}117$

$\sum_{n=1}^{m} a_n = 4{,}024.$

Находим: $P_0 = (1 + 4{,}024)^{-1} = 0{,}199,$

$P_1 = a_1 P_0 = 0{,}249; \; P_2 = a_2 P_0 = 0{,}249; \quad P_3 = a_3 P_0 = 0{,}187;$

$P_4 = a_4 P_0 = 0{,}093; \quad P_5 = a_5 P_5 = 0{,}023;$

Проверим условие $\sum_{n=0}^{m} P_n = 1$; -оно выполняется.

Рассчитаем остальные характеристики системы:

$L_{оч} = (2 - 1) \cdot 0{,}249 + (3 - 1) \cdot 0{,}187 + (4 - 1) \cdot 0{,}093 + (5 - 1) \cdot 0{,}024 = 0{,}994;$

доля свободного времени ткача (среднее число незагруженных каналов)

$\bar{r}_0 = (1 - 0) \cdot 0.199 + (1 - 1) \cdot 0.249 = 0.199;$

среднее число требований с обслуживании

$L_{об} = 1 - 0{,}199 = 0{,}801;$

среднее число требований в системе

$L_{сист} = 0{,}994 + 0{,}801 = 1{,}795;$

коэффициент простоя стайкой из-за ожидания обслуживании

$k_c = 0{,}994/5 = 0{,}199$ или 19,9% = П;

коэффициент простоя рабочего), обслуживающего систему

$k_r = 0{,}199/1 = 0{,}199$;

коэффициент загруженности рабочего

$k_з$= 1-0,199 = 0,804 или 80,1%;

среднее время ожидания обслуживании $T_{оч} = \dfrac{0{,}994}{0{,}5(5-1{,}795)} = 0{,}62$;

среднее время совпадения операций $T_c = 2 \cdot 0{,}62$ = 1,24 мин. на 1 м ткани.

Анализ найденных характеристик показывает высокую загруженность системы при средней очереди 0,994 станка, величина простоя станков из-за ожидания 19,9% и загруженность рабочего 80%.

13. Теория игр

В большинстве теоретических задач речь идет о постановках и методах решения задач, не содержащих неопределенностей. Однако, как правило, большинство реальных задач содержит в том или ином виде неопределенность. Можно даже утверждать, что решение задач с учетом разного вида неопределенностей является общим случаем, а принятие решений без их учета – частным. Однако, из–за концептуальных и методических трудностей в настоящее время не существует единого методологического подхода к решению таких задач. Тем не менее, накоплено достаточно большое число методов формализации постановки и принятия решений с учетом неопределенностей. При использовании этих методов следует иметь в виду, что все они носят рекомендательный характер, и выбор окончательного решения всегда остается за человеком (ЛПР).

В исследовании операций принято различать три типа неопределенностей:

- неопределенность целей;

-неопределенность наших знаний об окружающей обстановке и действующих в данном явлении факторах (неопределенность природы);

- неопределенность действий активного или пассивного партнера или противника.

В приведенной классификации тип неопределенности рассматривается с позиции того или иного элемента математической модели. Так, например, неопределенность целей отражается при постановке задачи на выборе либо отдельных критериев, либо всего вектора полезного эффекта.

С другой стороны, два другие типа неопределенностей влияют, в основном, на составление целевой функции, уравнений ограничений и метода принятия решения. Приведенное выше утверждение является достаточно условным, как, впрочем, и любая классификация. Приводим его лишь с целью, выделить еще некоторые особенности неопределенностей, которые надо иметь в виду в процессе принятия решений.

Кроме рассмотренной выше классификации неопределенностей надо учитывать их тип (или «род») с точки зрения отношения к случайности.

По этому признаку можно различать стохастическую (вероятностную) неопределенность, когда неизвестные факторы статистически устойчивы и поэтому представляют собой обычные объекты теории вероятностей – случайные величины (или случайные функции, события и т.д.). При этом должны быть известны или определены при постановке задачи все необходимые характеристики (законы распределения и их параметры).

Другим крайним случаем, может быть неопределенность нестохастического вида (по выражению Е.С. Вентцель – «дурная неопределенность»), при которой никаких предположений о стохастической устойчивости не существует. Наконец, можно говорить о промежуточном типе неопределенностей, когда решение принимается на основании каких – либо гипотез о законах распределения случайных величин.

В зависимости от условий внешней среды и степени информативности лица принимающего решение (ЛПР) производится следующая классификация задач принятия решений:

а) в условиях риска;

б) в условиях неопределенности;

в) в условиях конфликта или противодействия (активного противника).

Наиболее распространенные методы решения подобных задач отражены на рисунке 1.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР.

Постановка общей задачи теории игр.

Теория игр – это теория математических моделей конфликтных ситуаций, - это одна из задач теории оптимальных решений – принятия решения в условиях неопределенности.

Примеры: экономические соревнования, боевые операции, спортивные игры и т. д.

Столкновение противоположных интересов участников приводит к возникновению конфликтных ситуаций. Необходимость анализировать такие ситуации привела к возникновению теории игр, задачей которой является выработка рекомендаций по рациональному образу действия участников конфликта.

Отдельные математические соображения по поводу конфликтов высказывались, начиная с 17 века, многими учеными. Системно теория игр была разработана Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (1944г.) как средство математического подхода к явлениям конкурентной экономики.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более противников. В первом случае игра называется парной, во втором – множественной. Участников конфликта называют игроками. Стратегией игрока называется система правил (план), по которому он совершает выбор в любой возможной ситуации и при любой возможной фактической информации.

В зависимости от числа возможных стратегии игры делятся на конечные и бесконечные.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальных стратегий.

Матричные игры. Чистые стратегии.

2.1. Постановка общей задачи теории игр.

Теория игр – это теория математических моделей конфликтных ситуаций, - это одна из задач теории оптимальных решений – принятия решения в условиях неопределенности.

Примеры: экономические соревнования, боевые операции, спортивные игры и т. д.

Столкновение противоположных интересов участников приводит к возникновению конфликтных ситуаций. Необходимость анализировать такие ситуации привела к возникновению теории игр, задачей которой является выработка рекомендаций по рациональному образу действия участников конфликта.

Отдельные математические соображения по поводу конфликтов высказывались, начиная с 17 века, многими учеными. Системно теория игр была разработана Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (1944г.) как средство математического подхода к явлениям конкурентной экономики.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более противников. В первом случае игра называется парной, во втором – множественной. Участников конфликта называют игроками. Стратегией игрока называется система правил (план), по которому он совершает выбор в любой возможной ситуации и при любой возможной фактической информации.

В зависимости от числа возможных стратегии игры делятся на конечные и бесконечные.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальных стратегий.

2.2 Матричные игры. Чистые стратегии.

Наибольшее практическое значение имеет парные игры. Поэтому рассмотрим только их.

Участников игры обозначим через *A* и *B*.

Игра называется с нулевой суммой, если один игрок выигрывает столько, сколько второй проигрывает в той же партии.

Каждая фиксированная стратегия, которую может выбрать игрок, называется его чистой стратегией.

Игра состоит из двух ходов: игрок *A* выбирает одну из своих возможных стратегий Ai (i = 1,2,..,m), а игрок *B* выбирает стратегию *B*j (j = 1,2,..,n), при чем каждый выбор производится при полном незнании выбора другого игрока. В результате выигрыши $\varphi_1(Ai;\ Bj)$ и $\varphi_2(Ai;\ Bj)$ каждого из игроковудовлетворяют соотношению: $\varphi_1(Ai;Bj) + \varphi_2(Ai;\ Bj) \equiv 0$. (2,1)

Обозначив $\varphi_1(Ai;\ Bj) = \varphi(Ai;\ Bj)$, получим $\varphi_2(Ai;\ Bj) = -\varphi(Ai;\ Bj)$

Цель игрока *A* максимизировать функцию $\varphi(Ai;\ Bj)$, цель игрока *B* - минимизировать эту же функцию.

Пусть $\varphi(Ai;\ Bj) = a_{ij}$

Составим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки матрицы *A* соответствуют стратегиям *Ai,* столбцы - стратегиям *Bj*.

Матрица *A* называется платёжной или матрицей игры. Элемент a_{ij} платёжной матрицы - выигрыш игрока *A*, если он выбрал стратегию *Ai*, а игрок В выбрал стратегию *Bj.*

Если матрица *A* составлена, то говорят, что игра приведена к матричной форме.

Пусть игрок *A* выбирает стратегию *Ai,* тогда в наихудшем случае он получит выигрыш, равный $\min\limits_j a_{ij}$. Поэтому игрок *A* должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad (2,2)$$

Величина α – гарантированный выигрыш игрока *A* - называется нижней ценой игры.

Стратегия Ai_0, обеспечивающая получения выигрыша, называется максиминной.

Пусть теперь игрок *B* выбирает стратегию *Bj*, тогда в наихудшем случае он получит проигрыш, равный $\max\limits_i a_{ij}$. Поэтому он должен выбрать такую стратегию, чтобы минимизировать свой минимальный проигрыш β :

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (2,3)$$

Величина β называется верхней ценой игры, а соответствующая проигрышу β стратегия Bj_0 – минимаксной.

Фактический выигрыш игрока А при разумных действиях партнеров ограничен нижней и верхней ценой игры. В теории доказано, что по всем i и j справедливо неравенство: $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \le \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ или $\alpha \le \beta$. Если же эти выражения равны,

т.е. $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \beta = U$, (2,4)

то выигрыш игрока *A* - вполне определенное число. Игра называется вполне определенной, а выигрыш (2,4) называется значением игры и равен элементу матрицы a_{i0j0}.

Вполне определенные игры называют играми с седловой точкой. Элемент a_{i0j0} в матрице такой игры является одновременно минимальным в строке i_0 максимальным в столбце j_0 и называется седловой точкой.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков, их совокупность является решением игры, которое обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого отклонение от его оптимальной стратегии не может быть выгодно.

Задача 2.1. Два игрока, один из которых (*A*) представляет швейную фирму, а другой (*B*) - сбытовую организацию, на оптовой ярмарке пытаются прийти к соглашению о заключении договора на производство новых изделий. Игрок *A* уверен в перспективности предлагаемых моделей, игрок *B* считает, что их производство принесет торговле убытки. Игрок *A* для осуществления своей цели располагает тремя стратегиями (m = 3), игрок *B* двумя (*n* = 2).

Результаты игр характеризуются платежной матрицей (табл. 2,1), элементы a_{ij} которой показывают выигрыш одной стороны м предполагаемый проигрыш другой (тыс. руб.). Найти оптимальные стратегии игроков.

Табл. 2,1

Стратеги игроков A/B	j=1	j=2
i=1	11,6	9,8
i=2	9,3	9,6
i=3	12,5	7,8

Решение. К таблице (2,1) добавим, справа столбец, в котором впишем $\min\limits_j a_{ij}$, снизу строку, в которую впишем $\max\limits_i a_{ij}$. Получим таблицу (2,2)

Табл. 2,2

Стратегии игроков A/B	j = 1	j =2	$\min\limits_j a_{ij}$
i = 1	11,6	9,8	9,8
i = 2	9,3	9,6	9,3
i = 3	12,5	7,8	7,8
$\max\limits_i a_{ij}$	12,5	9,8	

Из таблицы (2,2) следует, что $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 9,8$

$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9{,}8$, т.е. игра вполне определенная причем легко видеть, что отклонение одним из игроков от оптимальной стратегии ($i = 1$);

($j = 2$) приводит к уменьшению выигрыша (для игрока *A*) и увеличению проигрыша (для игрока *B*).

Смешанные стратегии.

При выборе единственной чистой стратегии в реальных задачах часто невозможно найти седловую точку. Особенно это проявляется в, так называемых, играх против природы, под которой понимают не только природные условия (наводнение, засуха, ураган и т.д.), но и все другие обстоятельства, не контролируемые человеком.

Чтобы найти оптимальную стратегию в подобных играх используют смешанные стратегии. В матричной игре смешанная стратегия определяется смесью нескольких чистых стратегий, взятых в определенных пропорции.

Матричная игра, решаемая с использованием смешанных стратегий, называется игрой со смешанным расширением. Стратегии, примененные с вероятностью, отличной от нуля, называется активными стратегиями.

В игре, матрица которой имеет размерность m x n, стратегии игрока *A* задаются наборами вероятностей $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, с которыми игрок применяет свои первоначальные стратегии. Эти наборы можно рассматривать, как m - мерные векторы, для компонент которых выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,m$$

Аналогично для игрока *B* определяют n - мерные векторы $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, соответствующие его смешанным стратегиям.

Стратегии игроков *A* и *B*, для которых вероятности x_i и y_j отличны от нуля, называются активными.

Каждый игрок имеет бесчисленное множество смешанных стратегий. Обозначим через S_1 и S_2 множество смешанных стратегий игроков *A* и *B* соответственно.

Задача игрока А состоит в выборе такой стратегии $x^* \in S_1$, чтобы при отсутствии информации о выборе игрока В максимизировать свой выигрыш. Задача игрока В состоит в выборе такой стратегии $y^* \in S_2$, чтобы при отсутствии информации о выборе игрока *А* минимизировать выигрыш первого.

Если игроки А и В применяют стратегии *x* и *y* соответственно, то средний выигрыш

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Выигрыш *M(x, y)* называют функцией игры. Например в задаче с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

игрок имеет две чистые стратегии $x^{(1)} = (1:0)$ и $x^{(2)} = (0:1)$ и бесчисленное множество смешанных стратегий, таких как $x^{(3)} = (1/2,1/2)$, $x^{(4)} = (1/17;\ 16/17)$, $x^{(5)} = (12/25;\ 13/25)$ и т.д.; все они являются элементами множества $S_1 = \{x: x = (x_1; x_2),\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1\}$; Игрок *B* имеет четыре чистые стратегии $y^{(1)} = (1;0;0;0)$, $y^{(2)} = (0;1;0;0)$, $y^{(3)} = (0;0;1;0)$, $y^{(4)} = (0;0;0;1)$ и бесконечное множество смешанных стратегий, таких как $y^{(5)} = (1/4;\ 0;\ 1/4;\ 1/2)$, $y^{(6)} = (1/3;\ 1/6,1/4;\ 1/4)$ и т.д. Все они являются элементами множества $S_2 = \{y : y = (y_1, y_2, y_3, y_4),\ y_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4;\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$.

Если игрок *A* применяет стратегию $x^{(0)} = (1/6;\ 5/6)$, а игрок В применяет стратегию $y^{(0)} = (1/3;\ 0;\ 1/3;\ 1/3)$, то средний выигрыш игрока А равен

$$M(x^{(0)}, y^{(0)}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_i y_j \text{ или } M(x^{(0)}, y^{(0)}) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} -$$

$$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0 + 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + (-5) \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{9}.$$

Пара смешанных стратегий (x^*, y^*) называется седловой точкой функции *M(x, y),* если $M(x, y^*) \leq M(x^*, y^*) \leq M(x^*, y)$. (2,5)

Каждая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. существуют смешанные стратегии x^* и y^* игроков такие, что выполняется условие (2,5).

Гарантированный выигрыш игрока А, применяющего смешанную стратегию х,

$$U_A(x) = \min_{y \in S_2} M(x, y);$$

$$S_2 = \{y: y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}.$$

Стратегия x^*, при которой гарантированный выигрыш игрока *A* достигнет максимального значения, называется его оптимальной стратегией.

$$U_A(x^*) = \max_{x \in S_1} U_A(x) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} M(x, y)$$

$$S_1 = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}.$$

Гарантированный проигрыш игрока В $U_В(y) = \max_{x \in S_1} M(x, y)$.

y* - оптимальная стратегия игрока *B*, если

$$U_В(y^*) = \min_{y \in S_2} U_В(y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} M(x, y).$$

Гарантированный выигрыш игрока А, применяющего свою оптимальную стратегию, равен гарантированному проигрышу игрока В, применяющего свою оптимальную стратегию:

$$U_A(x^*) = U_В(y^*) = U, \quad \text{где} \quad U \text{ - цена игры.}$$

Методы решения задач теории игр.

Методы решения задач теории игр зависят от условий задачи и от платежной матрицы *A*.

Рассмотрим некоторые методы решения задач теории игр.

1. Если матрица *A* имеет седловую точку, то решение игры сводится к нахождению седловой точки. Оптимальные стратегии игроков определяются координатами (*i, j*) седловой точки матрицы *A*, а цена игры – элементом a_{ij} в седловой точке.

2. Наиболее простой матричной игрой является игра, в которой каждый из игроков имеет две стратегии.

Матрица *A* игры имеет вид $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Если седловой точки нет, то решением игры являются смешанные стратегии $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$

Согласно основной теореме теории игр, применение оптимальной стратегии $x^* = (x_1, x_2)$ обеспечивает для игрока *A* получение выигрыша *U* при любых стратегиях игрока *B*. Оптимальная стратегия игрока В также является смешанной. Поэтому, если игрок *A* применяет свою оптимальную стратегию, то при этом игрок *B* может использовать одну из чистых стратегий, величина выигрыша игрока *A* остается неизменной.

Запишем систему уравнений: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = U \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = U \end{cases} \qquad (2;\ 6)$$

Так как $x_1 + x_2 = 1$, то решение системы:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (2;\ 7\ )$$

Подставляя значения x_1 и x_2 в уравнения системы (2,6), получим

$$U = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (2;\ 8)$$

Составляя аналогичную систему для игрока *B*, можно найти его оптимальную стратегию:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (2;\ 9)$$

Решение игры с матрице 2 х 2 можно найти и графически. Для чего на оси абсцисс откладываем отрезок, длина которого равна единице.

Левый конец отрезка (точка х = 0) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2. Промежуточные точки х соответствуют некоторым смешанным стратегиям (x_1, x_2), где $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$. На концах выбранного отрезка проведем прямые, перпендикулярные оси абсцисс, на них отложим выигрыши при соответствующих чистых стратегиях. Если игрок *B* применит стратегию B_1, то выигрыш при использовании чистых стратегий A_1 и A_2 составляет соответственно a_{11}, и a_{21}. Отложим эти точки на прямых и соединим полученные точки прямой B_1 B_1 (рис. 1). Если игрок *A* применяет смешанную стратегию, то его выигрышу соответствует некоторая точка М, лежащая на этой прямой.

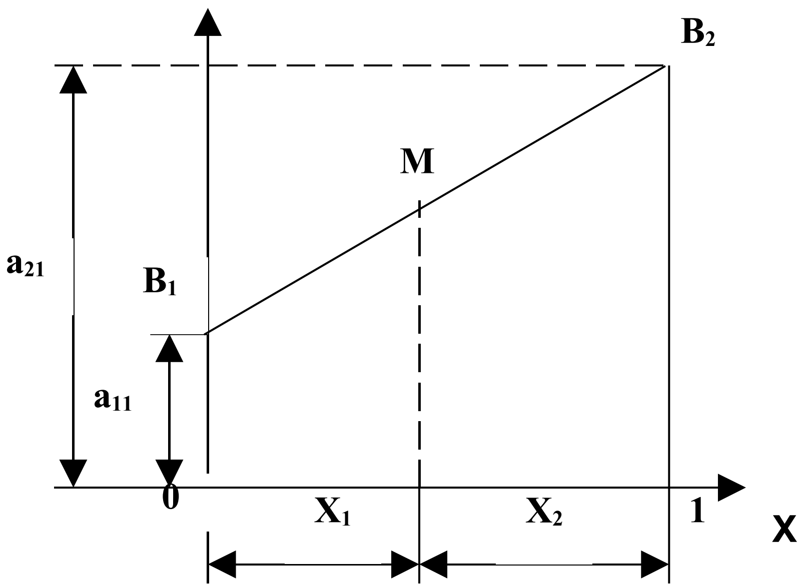
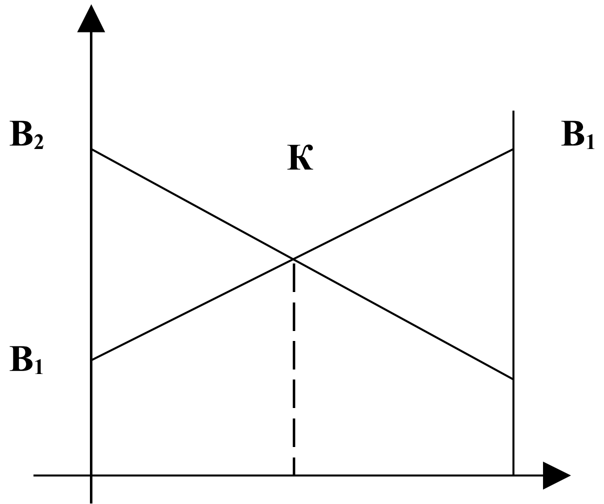


Рис.2.1.

Аналогично можно построить прямую B_2 B_2 соответствующую стратегии B_2 игрока *B* (рис.2.2).

Ломанная B_1KB_2 является нижней границей выигрыша, полученного игроком *A*. Точка *K*, в которой он максимален, определяет цену игры и ее решение.

Можно рассмотреть задачу минимизации верхней границы для игрока *B*, поменяв местами при решении игроков *A* и *B*.



B_2

0 **1**

Рис.2.2

Геометрически, можно найти решения игр, заданных матрицей размером m x 2 или 2 x n.

Для игры с матрицей размера 2 x n, каждой из n стратегий игрока *B* соответствует прямая. Построив эти прямые, находят нижнюю границу выигрыша. Точка *K*, лежащая на нижней границе, для которой величина выигрыша наибольшая, определяет цену игры и ее решение. При этом определяются активные стратегии игрока *B* (соответствующие им прямые пересекаются в точке *K*).

Аналогично может быть решена игра с матрицей m x 2, только в этом случае строят верхнюю границу выигрыша и на ней определяют минимум.

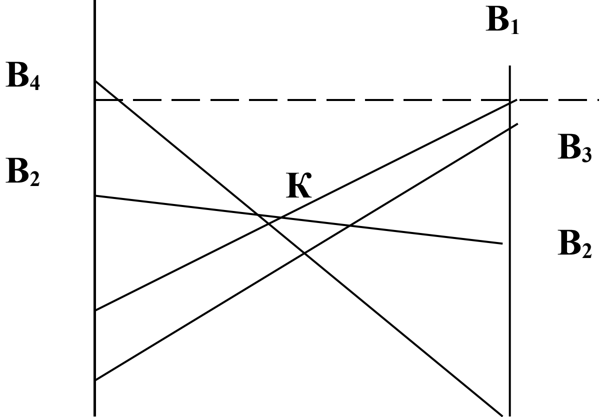
Следует заметить, что геометрические построения имеет смысл использовать для определения активных стратегий игроков. Затем решение игры можно получить с помощью формул (4, 1) - (4, 4)

Формулы (4, 1) - (4, 4) можно использовать, т.к. из соответствующей матрицы исключаются все стратегии, кроме активных, и она содержит две строки и два столбца.

Пример 2.2. Найти решение игры, заданной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Строим прямые соответствующие стратегиям игрока *B*
(рис. 2.3).



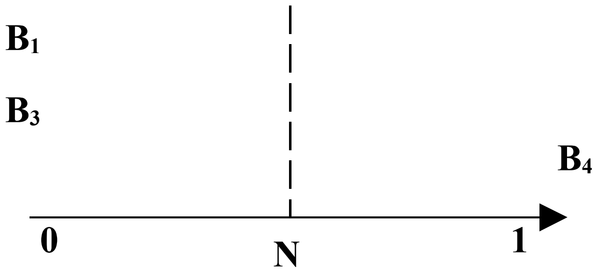


Рис. 2.3

Ломанная B_2KB_4 соответствует нижней границе выигрыша. Активные стратегии игрока B – B_3 и B_4. Исключая из рассмотрения остальные стратегии, получим матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

По формулам (2, 6) - (2, 9) получим решение игры $x = (0{,}4;\ 0{,}6)$,

$y = (0;\ 0;\ 0{,}6;\ 0{,}4)$, $U = 2{,}2$.

Таким образом игрок A применяет стратегию A_1 с вероятностью 0,4, A_2 - с вероятностью 0,6, при этом его выигрыш в среднем составит 2,2(ед.).

3. Оптимальные стратегии легко находятся для небольших игр но вычисления становятся достаточно сложными с ростом числа стратегий. Для поиска оптимальных стратегий рекомендуется несколько подходов.

Для уменьшения размерности игры используется *доминирование* строк и столбцов. Обычно говорят, что каждая строка матрицы A доминирует i-тую строку (т. е. одна чистая стратегия доминирует другую), если

$$a_{ij} \le a_{kj} \text{ для всех } j, \quad a_{ij} < a_{kj} \text{ хотя бы для одного } j.$$

Аналогично l-й столбец доминирует j-й столбец, если

$$a_{lj} \le a_{kj} \text{ для всех } i, \quad a_{lj} < a_{kj} \text{ хотя бы для одного } i.$$

В самом деле, будут существовать оптимальные смешанные стратегии, при которых вероятность использования доминируемых строк и столбцов равна нулю, и при решении игры все доминируемые строки и столбцы могут быть отброшены, что позволяет уменьшить размеры матрицы. (Этот подход мог использоваться также при поиске решения игры в чистых стратегиях.)

Рассмотрим, например, игру со следующей матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Третья строка этой матрицы доминирует вторую. Исключение второй строки приводит к матрице

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Третий столбец в этой урезанной матрице доминирует второй, и исключение второго столбца дает

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

В итоги, если можно найти решение для полученной игры, то его легко использовать для решения исходной игры, просто приписав исключённым строкам и столбцам нулевые вероятности.

Другой метод упрощения матрицы выигрышей основывается на доказанном в теории игр свойстве, согласно которому *аффинное* преобразование матрицы платежей (т. е. преобразование всех элементов матрицы А по правилу $a'_{ij} = ha_{ij} + b$, где $h \neq 0$) не изменяет решения игры; кроме того, цена преобразованной игры U' может быть получена из цены первоначальной игры по такому же правилу $U' = hU + b$. Это означает, что для задания игры в принципе безразлично, в каких единицах измеряются выигрыши (например, в рублях или долларах); прибавление (вычитание) некоторой фиксированной суммы b изменит на такую же сумму выигрыш (проигрыш) каждого из игроков, не меняя решения игры.

Это свойство может быть использовано для упрощения и придания наглядности матрице выигрышей: так, если в клетках этой матрицы имеются дроби с общим знаменателем, всю матрицу можно умножить на некоторую константу для получения целых чисел; если большинство клеток матрицы заполнено одинаковыми элементами, их можно вычесть из всей матрицы для получения нулей в этих клетках.

Задача 2.3. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

Решение. Легко видеть, что в чистых стратегиях решения игры нет, так как $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 1, \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 3,\ \alpha < \beta$.

Упростим матрицу A, заметив, что третий столбец этой матрицы доминирует первый и второй. Исключение первого и второго столбца приводит к матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице средняя арифметическая элементов второй и третьей строк не меньше соответствующих элементов первой строки, т. е. первая строка является доминируемой. Отбросив её, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 20 \end{pmatrix},$$

из которой легко заметить, что можно опустить второй столбец

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

Геометрически найдем активные стратегии (рис.2. 4). Активные стратегии

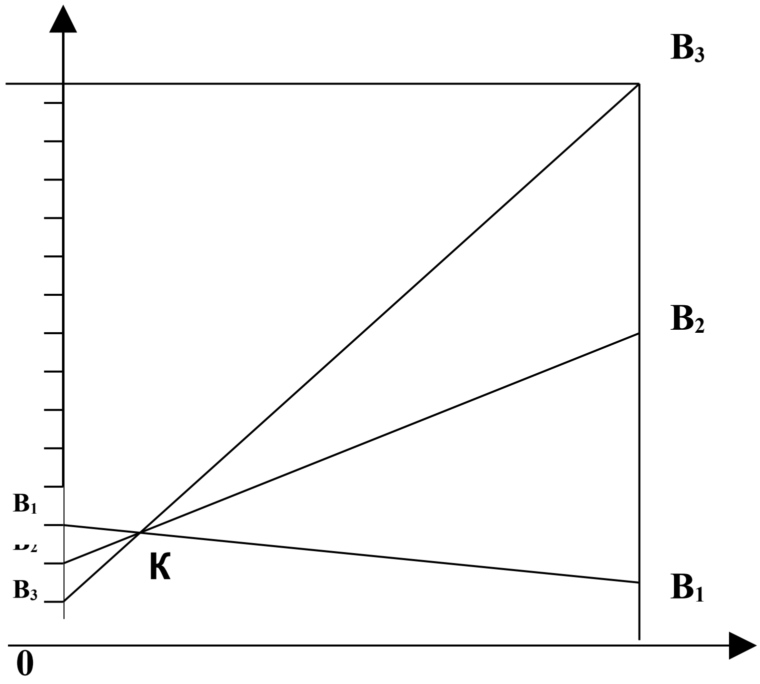


Рис.2.4.

игрока B – B_2 и B_1. Исключая стратегию B_3, получим $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

По формулам (2, 6) - (2, 9) находим:

$$x_1 = \frac{9-1}{3+9-1-2} = \frac{8}{9}; \qquad U = \frac{3\cdot 9 - 2\cdot 1}{9} = \frac{25}{9};$$

$$x_2 = \frac{3-2}{3+9-1-2} = \frac{1}{9}; \qquad y = \left(\frac{7}{9}; \quad \frac{2}{9}; \quad 0\right).$$

Следовательно, исходная матрица A имеет следующее решение: $U = \frac{25}{9}$

$$x = \left(0; \quad \frac{8}{9}; \quad \frac{1}{9}\right), \qquad y = \left(0; \quad 0; \quad \frac{7}{9}; \quad 0; \quad \frac{2}{9}; \quad 0\right).$$

4. В общем случае задача теории игр может быть сведена в задаче линейного программирования.

Рассмотрим игру, матрица которой имеет размерность m x n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пусть матрица A не содержит седловой точки в чист стратегиях, поэтому решение игры представим в смешанных стратегиях: $x = (x_1, x_2 \ldots x_m)$,

$y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$.

.Применение оптимальной стратегии x игрока A должна обеспечить ему при любых действиях игрока В выигрыш не менее цены игры U поэтому выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq U, j = 1,2,\ldots,n \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq U, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq U. \end{cases} \tag{2,10}$$

Величина U (цена игры) неизвестна, однако можно считать U > 0. Это условие выполняется всегда, если элементы матрицы A неотрицательны, а этого можно достичь, прибавлял ко всем элементам матрицы некоторое положительное число.

Разделив все члены неравенств системы (2,10) на U, полу

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{mt}t_m \geq 1 \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \tag{2,11}$$

где $t_i = \dfrac{x_i}{U}, \ i = 1,2,\ldots,m.$

Из условия $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ следует, что $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \dfrac{1}{U}$.

Решение игры должно максимизировать значение U, значит функция

$F = \sum_{i=1}^{m} t_i$, при ограничениях (2,11) должна принять минимальное значение.

Получена задача линейного программирования: $F = \sum_{i=1}^{m} t_i$ – min при ограничениях (2,11) и дополнительных условиях $t_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m$.

Решая её, находим значения t_i и величину $\dfrac{1}{U}$, затем отыскиваем значения $x_i = t_i \cdot U$.

Для определения оптимальной у игрока *B* воспользуемся тем, что эта стратегия игрока *A* обеспечивает ему проигрыш не превышающий цены игры *U*, т. е. справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq U, i = 1,2,...,m \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq U, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}x_n \leq U \end{cases}$$

Откуда разделив обе части этих неравенств на *U (U>0)*, получим:

$$\begin{cases} a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + ... + a_{1n}V_n \leq U, \\ a_{m1}V_1 + a_{m2}V_2 + ... + a_{mn}V_n \leq U \end{cases} \qquad (2; 12)$$

где $V_i = \dfrac{y_j}{U}, j = 1,2,...,n$.

Переменные должны быть выбраны так, чтобы выполнялись, условия (2,12) и достигался максимум функции $\Phi = V_1 + V_2 + ... + V_n = \dfrac{1}{U}$.

Таким образом, для решения игры имеем пару двойственных симметричных задач линейного программирования.

Используя свойство симметричности, можно решить одну из них, требующую меньших вычислений, а решение второй найти на основании оптимального плана двойственной.

Задача 2.4. Пусть прядильная фабрика в течение месяца должна получить 600 т. хлопка трех селекций (i =1,2,3) и различных марок (j = 1,2,3), марки для предприятия неизвестны. Величина потерь (тыс, руб.) в виде отходов из-за отходов в виде угаров в расчете на 1 т. пряжи характеризуется данными таблицы (4,1).

i\j	j = 1	j = 2	j = 3
i = 1	-0,21	-0,18	-0,26
i = 2	-0,19	-0,25	-0,13
i = 3	-0,32	-0,28	-0,3

Фабрика может выбирать на сырьевой базе хлопок различных селекций, но марки не знает. Требуется определить оптимальную стратегию на оформление заявки по видам сырья.

Решение. Преобразуем таблицу (матрицу *A*), для чего ко всем ее элементам прибавим положительное число 0,32. В результате получим новую

i\j	j = 1	j = 2	j = 3
i = 1	0,11	0,14	0,06
i = 2	0,13	0,07	0,19
i = 3	0	0,04	0,02

Определим оптимальную смешанную стратегию, для чего решим задачу линейного программирования соответствующую модели (2,11).

Пользуясь исходными данными таблицы, запишем:

$$F(t) = t_1 + t_2 + t_3 – \min$$

$$\begin{cases} 0{,}11t_1 + 0{,}13t_2 \geq 1, \\ 0{,}14t_1 + 0{,}07t_2 + 0{,}04t_3 \geq 1 \\ 0{,}06t_1 + 0{,}19t_2 + 0{,}03t_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$t_1 \geq 0,\ \ t_2 \geq 0,\ \ t_3 \geq 0$$

Решив эту задачу линейного программирования, получим

$t = (t_1, t_2, t_3) = (4{,}946; 3{,}542; 1{,}635)$, $F_{\min} = 10{,}082$

Находим цену игры $U = \dfrac{1}{F_{\min}} = 0{,}099$ и оптимальные стратегии:

$x_1 = 0{,}099 \cdot 4{,}946 \approx 0{,}49;$

$x_2 = 0{,}099 \cdot 3{,}542 \approx 0{,}35;$

$x_3 = 0{,}099 \cdot 1{,}635 \approx 0{,}16.$

Следовательно, из планируемых к получению 600 т. сырья необходимо заказать 49 % хлопка 1 селекции, 35% - 2 селекции и 16% - 3 селекции, соответственно: 294 т., 210 т., 96 т. Такая стратегия должна обеспечить экономию благодаря сокращению отходов в размере 99 руб. на 1т. пряжи, это равноценно тому, что общие потери от угаров не превысят 0,32 - 0,099 = 0,221 тыс. руб. на 1т. пряжи.

ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Общие понятия.

Неопределенность является характеристикой внешней среды (природы), в которой принимается управленческое решение о развитии (или функционировании) экономического объекта. Здесь будем рассматривать неопределенность «природы», вызванную отсутствием, недостатком информации о действительных условиях (факторах), при которых развивается объект управления. Внешняя среда («природа») может находиться в одном из множества возможных состояний. Это множество может быть конечным и бесконечным. Будем считать, что множество состояний конечно или по крайней мере количество состояний можно пронумеровать.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, называется статистической игрой или «игрой с природой». Игрок в этой игре называется лицом, принимающим решения (ЛПР).

Пусть S_i - состояние «природы», при этом $i = \overline{1,n},$ где n — число возможных состояний. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения. Будем считать, что множество управленческих решений (планов) R_j, также конечно и равно $m.$ Реализация R_j плана в условиях, когда «природа» находится в S_i состоянии, приводит к определенному результату, который можно оценить, введя количественную меру. В качестве этой меры могут служить выигрыши от принимаемого решения (плана); потери от принимаемого решения, а также полезность, риск и другие количественные критерии.

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческим решения) R_j, а столбцы — возможным состояниям «природы» S_i.

Допустим, каждому R_j-му действию и каждому возможному состоянию «природы» соответствует результат (исход), определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе j-го действия и реализации i-го состояния, - V_{ij}.

$$\begin{array}{c|cccccc} & S_1 & S_2 & \dots & S_j & \dots & S_n \\ \hline R_1 & V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1i} & \dots & V_{1n} \\ R_2 & V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2i} & \dots & V_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_j & V_{j1} & V_{j2} & \dots & V_{ji} & \dots & V_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_m & V_{m1} & V_{m2} & \dots & V_{mi} & \dots & V_{mn} \end{array} \qquad (3.1)$$

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{S_i\}$, множеством планов (стратегий) $\{R_j\}$ и матрицей возможных результатов $\|V_{ji}\|$. В качестве результатов в отдельных задачах рассматривается матрица рисков $\|r_{ji}\|$.

Риск - мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ связаны с элементами матрицы полезностей (выигрышей) следующим соотношением:

$$r_{ji} = V_i - V_{ji}, \qquad (3.2)$$

где $V_i = \max\limits_j V_{ji}$ - максимальный элемент в столбце i матрицы полезностей.

Если матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ следует определять по формуле

$$r_{ji} = V_{ji} - V_i \qquad (3.3)$$

где $V_i = \min\limits_j V_{ji}$ - минимальный элемент в столбце i матрицы потерь (результатов).

Таким образом, риск - это разность между результатом, который можно получить, если знать действительное состояние «природы», и результатом, который будет получен при j-й стратегии.

Матрица рисков дает более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей (полезностей).

Непосредственный анализ матриц выигрышей $\|V_{ji}\|$ или рисков $\|r_{ji}\|$ не позволяет в общем случае принять решение по выбору оптимальной стратегии (плана), за исключением тривиального случая, когда выигрыши при одной стратегии выше, чем при любой другой для каждого состояния «природы» (элементы матрицы выигрышей в некоторой строке больше, чем в любой из других). Другими словами, имеется в наличии «доминирующая» стратегия.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них. Это критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

Критерий Лапласа

Этот критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния «природы» S_i, $i = \overline{1,n}$, полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию S_i ставится вероятность q_i, определяемая по формуле

$$q_i = \frac{1}{n}, \qquad (3.4)$$

При этом исходной может рассматриваться задача принятия решения в условиях риска, когда выбирается действие R_j, дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Для принятия решения для каждого действия R_j вычисляют среднее арифметическое значение выигрыша:

$$M_j(R) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ji}\ . \qquad (3.5)$$

Среди $M_j(R)$ выбирают максимальное значение, которое будет соответствовать оптимальной стратегии R_j.

Другими словами, находится действие R_j^*, соответствующее

$$\max_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ji}\right\} \qquad (3.6)$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей рисков $\|r_{ji}\|$, то критерий Лапласа принимает следующий вид:

$$\min_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ji}\right\} \qquad (3.7)$$

8. Содержания практических занятий

Занятие 1. Классические методы оптимизации

1. Заданы функции полного дохода $R= -2q^2+10q$ и полных издержек $C=2q+6$, где q – количество проданного товара. Определить границы прибыльности производства q_1 и q_2, и точку q_0, в которой прибыль достигает максимального значения.
2. В краткосрочном плане производственная функция Q зависти от численности персонала фирмы x и от вложенных дополнительных инвестиций y (тыс.у.е.) и имеет вид $Q= xy\,(150 - x- 2y)$. Требуется определить оптимальную численность персонала и оптимальное количество вложенных инвестиций, при которых выпуск Q достигнет максимального значения.
3. Производственная функция имеет вид $Q= f(K,L)$, где Q- выпуск продукции в единицу времени, K- капитал, L – труд. Затраты на единицу капитала и труда составляют соответственно a и b, а общая сумма затрат равна c. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу двумя способами: методом подстановки и методом множителей Лагранжа. $Q=2L^2+10LK$, $a=2$, $b=3$, $c=156$.

Задание для самостоятельной работы.

1. Заданы функции полного дохода $R= -5q^2+25q$ и полных издержек $C= 5q+15$, где q – количество проданного товара. Определить границы прибыльности производства q_1 и q_2, и точку q_0, в которой прибыль достигает максимального значения.
2. Найти оптимальный объем производства товаров Q_1 и Q_2, если их цена соответственно равна $P_{Q1} = 175$, $P_{Q2} = 200$, а функция издержек имеет вид: $C = Q_1^2+Q_1Q_2+Q_2^2$.
3. Производственная функция имеет вид $Q= f(K,L)$, где Q- выпуск продукции в единицу времени, K- капитал, L – труд. Затраты на единицу

капитала и труда составляют соответственно a и b, а общая сумма затрат равна c. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу двумя способами: методом подстановки и методом множителей Лагранжа.

$Q=L^2+10LK$, a=5, b=4, c=140.

4. Заданы функции полного дохода $R= -2q^2+14q$ и полных издержек $C= 4q+8$, где q – количество проданного товара. Определить границы прибыльности производства q_1 и q_2 , и точку q_0, в которой прибыль достигает максимального значения.

5. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y – соответственно объемы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функции издержек заводов имеют вид: $C_1(x) = 1/7x^2 - 10x + 500$, $C_2(y) = 1/3y^2 - 20y + 750$.

6. Производственная функция имеет вид Q= f(K,L), где Q- выпуск продукции в единицу времени, K- капитал, L – труд. Затраты на единицу капитала и труда составляют соответственно a и b, а общая сумма затрат равна c. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу двумя способами: методом подстановки и методом множителей Лагранжа.

$Q=5L^2+18LK$, a=6, b=5, c=240.

Занятие 2. Модели планирования рыночной экономики

Математическое программирование ("планирование") – это раздел математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений функции, на аргументы которой наложены ограничения. Методы математического программирования используются в экономических, организационных, военных и др. системах для решения так называемых **распределительных задач**. Распределительные задачи (РЗ) возникают в случае, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой из намеченных работ эффективным образом и необходимо наилучшим образом распределить ресурсы по работам в соответствии с выбранным критерием оптимальности.

Линейное программирование (ЛП) является наиболее простым и лучше всего изученным разделом математического программирования. Характерные черты задач ЛП следующие:

1) показатель оптимальности L(X) представляет собой ***линейную*** функцию от элементов решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид ***линейных*** равенств или неравенств.

Общая форма записи модели задачи ЛП

Целевая функция (ЦФ)

$$L(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max(\min),$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge, =) b_2, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge, =) b_m, \\ x_1, x_2, ... x_k \ge 0 \; (k \le n). \end{cases} \tag{1.1}$$

При описании реальной ситуации с помощью линейной модели следует проверять наличие у модели таких свойств, как пропорциональность и аддитивность. **Пропорциональность** означает, что вклад каждой переменной в ЦФ и общий объем потребления соответствующих ресурсов должен быть ***прямо пропорционален*** величине этой переменной. Например, если продавая j-й товар в общем случае по цене 100 рублей, фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки до уровня цены 95 рублей, то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной x_j. Т.е. в разных ситуациях *одна* единица j-го товара будет приносить *разный* доход. **Аддитивность** означает, что ЦФ и ограничения должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных. Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых одной фирмой, влияет на объем реализации другого.

Допустимое решение – это совокупность чисел (план) $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1.1).

Оптимальное решение – это план, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Задача № 1. Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок (табл. 1.1). Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 1.1

Параметры задачи о производстве красок

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1	2	6
В	2	1	8

Решение

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения ***экономики***, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1) Что является ***искомыми величинами*** задачи?
2) Какова ***цель*** решения? Какой ***параметр*** задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком ***направлении*** должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?
3) Какие ***условия*** в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в ***математическом*** виде, т.е. к записи математической модели.

1) Искомые величины являются ***переменными*** задачи, которые как правило обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
2) Цель решения записывается в виде ***целевой функции***, обозначаемой, например, $L(X)$. Математическая формула ЦФ $L(X)$ отражает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.
3) Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ***ограничений***. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе записи математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений.

Построим модель задачи №1.01, используя описанную методику.

Переменные задачи

В задаче №1.01 требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные объемы производства* каждого вида красок:

x_1 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т краски/сутки];

x_2 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т краски/сутки].

Целевая функция

В условии задачи №1.01 сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр *суточного дохода*, который должен стремится к *максимуму*. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи краскок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, т.е. x_1 и x_2 т краски в сутки, а также оптовые цены на краски 1-го и 2-го видов – согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс.руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски 1-го вида равен $3x_1$ тыс.руб. в сутки, а от продажи краски 2-го вида – $2x_2$ тыс.руб. в сутки. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи красок 1-го и 2-го видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок)

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \ [\text{тыс.руб./сутки}],$$

$$\left[\frac{\text{тыс.руб.}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}} = \frac{\text{тыс.руб.}}{\text{сутки}}\right].$$

Ограничения

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

•количество ингредиентов А и В, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;

•согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более, чем на 1 т краски;

•объем производства краски 2-го вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;

•объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи №1.01 делятся на 3 группы, обусловленные:

1)расходом ингредиентов;

2)рыночным спросом на краску;

3)неотрицательностью объемов производства.

Ограничения **по расходу** любого из ингредиентов имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\begin{pmatrix} \text{Расход конкретного ингредиента} \\ \text{на производство обоих видов краски} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{Максимально возможный} \\ \text{запас данного ингредиента} \end{pmatrix}.$$

Запишем эти ограничения в ***математической*** форме.

Левая часть ограничения – это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента А на производство 1 т краски 1-го вида (1 т ингр. А) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. А) (см. табл.1.1). Тогда на производство x_1 т краски 1-го вида и x_2 т краски 2-го вида потребуется $1x_1 + 2x_2$ т ингр. А.

Правая часть ограничения – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т ингредиента А в сутки (см. табл.1.1). Таким образом, ограничение по расходу А имеет вид

$$1x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \left[\frac{\text{т ингр.А}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.А}}{\text{сутки}}\right].$$

Аналогична математическая запись ограничения по расходу В

$$2x_1 + 1x_2 \le 8 \quad \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{сутки}}\right].$$

Примечание. Следует всегда проверять размерность левой и правой части каждого из ограничений, поскольку их несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет

содержательную форму

$$\left(\begin{array}{l}\text{Превышение объема производства краски 2-го вида} \\ \text{над объемом производства краски 1-го вида}\end{array}\right) \le \left(1\,\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_2 - x_1 \le 1 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида имеет

содержательную форму

$$(\text{Спрос на краску 1-го вида}) \le \left(2\,\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_1 \le 2 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$\begin{array}{l} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0 \end{array}.$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \ [\text{руб./сутки}]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \ [\text{т ингр. А/сутки}], \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \ [\text{т ингр. В/сутки}], \\ -x_1 + x_2 \le 1 \ [\text{т краски/сутки}], \\ \qquad x_2 \le 2 \ [\text{т краски/сутки}], \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \ [\text{т краски/сутки}]. \end{cases}$$

Задача №2

Выполнить заказ по производству 32 изделий $И_1$ и 4 изделий $И_2$ взялись бригады $Б_1$ и $Б_2$. Производительность бригады $Б_1$ по производству изделий $И_1$ и $И_2$ составляет соответственно 4 и 2 изделия в час, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады $Б_2$ – соответственно 1 и 3 изделия в час, а ее фонд рабочего времени – 4 ч. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады $Б_1$ равны соответственно 9 и 20 руб., для бригады $Б_2$ – 15 и 30 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный объем выпуска изделий, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение заказа.

Решение

Переменные задачи

Искомыми величинами в задаче являются объемы выпуска изделий. Изделия $И_1$ будут выпускаться двумя бригадами $Б_1$ и $Б_2$. Поэтому необходимо *различать* количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_1$, и количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_2$. Аналогично, объемы выпуска изделий $И_2$ бригадой $Б_1$ и бригадой $Б_2$ также являются различными величинами. Вследствие этого в данной задаче 4 переменные. Для удобства восприятия будем использовать двухиндексную форму записи x_{ij} – количество изделий $И_j$ (j=1,2), изготавливаемых бригадой $Б_i$ (i=1,2), а именно,

x_{11} – количество изделий $И_1$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{12} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{21} – количество изделий $И_1$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.];

x_{22} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.].

Примечание. В данной задаче нет необходимости привязываться к какому-либо временному интервалу (в задаче №1.01 была привязка к суткам), поскольку здесь требуется найти не объем выпуска за определенное время, а способ распределения известной плановой величины заказа между бригадами.

Целевая функция

Целью решения задачи является выполнение плана с *минимальными* затратами, т.е. критерием эффективности решения служит показатель *затрат на выполнение всего заказа*. Поэтому ЦФ должна быть представлена формулой расчета этих затрат. Затраты каждой бригады на производство одного изделия $И_1$ и $И_2$ известны из условия. Таким образом, ЦФ имеет вид

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min,$$

$$\left[\frac{\text{руб.}}{\text{шт.}} \cdot \text{шт.} = \text{руб.}\right].$$

Ограничения

Возможные объемы производства изделий бригадами ограничиваются следующими условиями:

•общее количество изделий $И_1$, выпущенное обеими бригадами, должно равняться 32 шт., а общее количество изделий $И_2$ – 4 шт.;

•время, отпущенное на работу над данным заказом, составляет для бригады $Б_1$ – 9,5 ч, а для бригады $Б_2$ – 4 ч;

•объемы производства изделий не могут быть отрицательными величинами.

Таким образом, все ограничения задачи №1.02 делятся на 3 группы, обусловленные:

1)величиной заказа на производство изделий;

2)фондами времени, выделенными бригадам;

3)неотрицательностью объемов производства.

Для удобства составления ограничений запишем исходные данные в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2

Исходные данные задачи №1.02

Бригада	Производительность бригад, шт/ч		Фонд рабочего времени, ч
	$И_1$	$И_2$	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Заказ, шт	32	4	

Ограничения по **заказу** изделий имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\begin{pmatrix} \text{количество изделий } И_1, \\ \text{произведенных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2 \end{pmatrix} = (32 \text{ шт.})$$

и

$$\begin{pmatrix} \text{количество изделий } И_2, \\ \text{произведенных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2 \end{pmatrix} = (4 \text{ шт.}).$$

Математическая форма записи имеет вид

$$x_{11} + x_{21} = 32 \quad [\text{шт.}] = [\text{шт.}] \text{ и}$$

$$x_{12} + x_{22} = 4 \quad [\text{шт.}] = [\text{шт.}].$$

Ограничение по **фондам времени** имеет ***содержательную*** форму

$$\begin{pmatrix} \text{Общее время, затраченное бригадой } Б_1 \\ \textit{на} \text{ выпуск изделий } И_1 \text{ и } И_2 \end{pmatrix} \le (9{,}5 \text{ ч})$$

и

$$\begin{pmatrix} \text{Общее время, затраченное бригадой } Б_2 \\ \text{на выпуск изделий } И_1 \text{ и } И_2 \end{pmatrix} \le (4\text{ ч}).$$

Проблема заключается в том, что в условии задачи прямо не задано время, которое тратят бригады на выпуск одного изделия $И_1$ или $И_2$, т.е. не задана трудоемкость производства. Но имеется информация о производительности каждой бригады, т.е. о количестве производимых изделий в 1 ч. Трудоемкость Тр и производительность Пр являются обратными величинами, т.е.

$$Тр = \frac{1}{Пр} \quad \left[\frac{ч}{шт.}\right] = \left[1 \Big/ \frac{шт.}{ч}\right].$$

Поэтому используя табл.1.2, получаем следующую информацию:

$\to \frac{1}{4}$ ч тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_1$;

$\to \frac{1}{2}$ ч тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_2$;

$\to \frac{1}{1}$ ч тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_1$;

$\to \frac{1}{3}$ ч тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_2$.

Запишем ограничения по фондам времени в ***математическом*** виде

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad \left[\frac{ч}{шт.} \cdot шт\right] \le [ч]$$

и

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4 \quad \left[\frac{ч}{шт.} \cdot шт\right] \le [ч].$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1,2;\ j = 1,2).$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min\ [руб.],$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 & [\text{шт.}], \\ x_{12} + x_{22} = 4 & [\text{шт.}], \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 & [\text{ч}], \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \le 4 & [\text{ч}], \\ x_{ij} \ge 0 \, (i = 1,2;\ j = 1,2) & [\text{шт.}]. \end{cases}$$

Задача № 3

Для пошива одного изделия требуется выкроить из ткани 6 деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. В табл.1.3 приведены характеристики вариантов раскроя 10 $м^2$ ткани и комплектность, т.е. количество деталей определенного вида, которые необходимы для пошива одного изделия. Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного типа составляет 405 $м^2$. В ближайший месяц планируется сшить 90 изделий.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

Таблица 1.3

***Характеристики вариантов раскроя отрезов ткани по 10** $м^2$*

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез						Отходы, $м^2$/отрез
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	2	

Решение

В данной задаче искомые величины явно не указаны, но сказано, что должен быть выполнен ежемесячный план по пошиву 90 изделий. Для пошива 90 изделий в месяц требуется раскроить строго определенное количество деталей.

Крой производится из отрезов ткани по 10 $м^2$ двумя различными способами, которые позволяют получить различное число деталей. Поскольку заранее неизвестно, сколько ткани будет раскраиваться первым способом и сколько – вторым, то в качестве искомых величин можно задать *количество отрезов ткани по 10* $м^2$*,* раскроенных каждым из способов:

x_1 – количество отрезов ткани по 10 $м^2$, раскроенных первым способом в течение месяца, [отрез./мес.];

x_2 – количество отрезов ткани по 10 $м^2$, раскроенных вторым способом в течение месяца, [отрез./мес.].

Целевая функция

Целью решения задачи является выполнение плана при минимальном количестве отходов. Поскольку количество изделий строго запланировано (90 шт./мес.), то этот параметр не описывает ЦФ, а относится к ограничению, невыполнение которого означает, что задача не решена. А критерием эффективности выполнения плана служит параметр "количество отходов", который необходимо свести к минимуму. Поскольку при раскрое одного отреза (10 $м^2$) ткани по 1-му варианту получается 0,5 $м^2$ отходов, а по 2-му варианту – 0,35 $м^2$ (см. табл.1.3), то общее количество отходов при крое (ЦФ) имеет вид

$$L(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min,$$

$$\left[\frac{м^2\ отх.}{отрез.} \cdot \frac{отрез.}{мес.} = \frac{м^2\ отх.}{мес.}\right].$$

Ограничения

Количество раскроев ткани различными способами ограничивается следующими условиями:

•должен быть выполнен план по пошиву изделий, другими словами, общее количество выкроенных деталей должно быть таким, чтобы из него можно было пошить 90 изделий в месяц, а именно: деталей 1-го вида должно быть как минимум

90 и деталей остальных видов – как минимум по 180 (см. комплектность в табл.1.3).

•расход ткани не должен превышать месячного запаса его на складе;

•количество отрезов раскроенной ткани не может быть отрицательным.

Ограничения по **плану пошива** пальто имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №1,}\\ \text{выкроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (90\ \text{штук});$$

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №2,}\\ \text{выкроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (180\ \text{штук});$$

…

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №6,}\\ \text{выкроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (180\ \text{штук}).$$

Математически эти ограничения записываются в виде

$$60x_1 + 80x_2 \geq 90;$$

$$35x_2 \geq 180;$$

$$90x_1 + 20x_2 \geq 180;$$

$$40x_1 + 78x_2 \geq 180;$$

$$70x_1 + 15x_2 \geq 180;$$

$$90x_1 \geq 180;$$

$$\left[\frac{\text{шт.}}{\text{отрез.}} \cdot \frac{\text{отрез.}}{\text{мес.}}\right] \geq \left[\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}\right].$$

Ограничение по **расходу ткани** имеет следующие формы записи:

содержательную

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество ткани,}\\ \text{раскроенной за месяц}\end{pmatrix} \leq \left(405\ \text{м}^2\right)$$

и ***математическую***

$$x_1 + x_2 \le \frac{405}{10},$$

$$\left[\frac{\text{отрез.}}{\text{мес.}}\right] \le \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{отрез.}}{\text{мес.} \cdot \text{м}^2}\right].$$

Неотрицательность количества раскроенных отрезов задается в виде

$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0.$$

Таким образом, ***математическая модель*** задачи №1.03 имеет вид

$$L(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min \ [\text{м}^2 \text{ отх./мес.}],$$

$$\begin{cases} 60x_1 + 80x_2 \ge 90 & [\text{шт./мес.}], \\ 35x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 90x_1 + 20x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 40x_1 + 78x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 70x_1 + 15x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 90x_1 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ x_1 + x_2 \le 40{,}5 & [\text{отрез./мес.}], \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & [\text{отрез./мес.}]. \end{cases}$$

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 1.

Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции. На рис.1.1 показана технологическая схема производства изделий

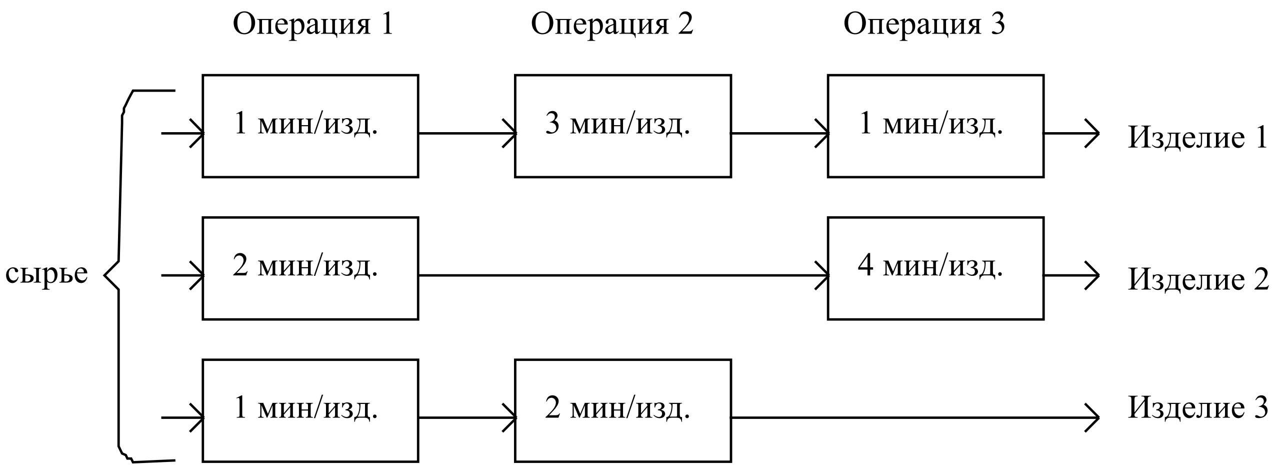


Рис.1.1. Технологическая схема производства

Фонд рабочего времени ограничен следующими предельными значениями: для первой операции – 430 мин; для второй операции – 460 мин; для третьей операции – 420 мин. Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 рублей соответственно.

Постройте математическую модель, позволяющую найти наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции?

Задача № 2

При изготовлении изделий $И_1$ и $И_2$ используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия $И_1$ требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия $И_2$ требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия $И_1$ составляет 6 руб. и от единицы изделия $И_2$ – 16 руб.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Задача № 3

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ – 2 руб., $П_2$ –3 руб.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

Задача № 4

В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5 $м^3$ коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 $м^3$ еловых и 7,5 $м^3$ пихтовых лесоматериалов. Для приготовления листов фанеры по 100 $м^2$ требуется 5 $м^3$ еловых и 10 $м^3$ пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 $м^3$ еловых и 180 $м^3$ пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 $м^3$ пиломатериалов и 1200 $м^2$ фанеры. Доход с 1 $м^3$ пиломатериалов составляет 160 руб., а со 100 $м^2$ фанеры – 600 руб.

Постройте математическую модель для нахождения плана производства, максимизирующего доход.

Примечание 1.3. При построении модели следует учесть тот факт, что пиломатериалы могут быть реализованы только в виде неделимого комплекта размером 2,5 $м^3$, а фанера – в виде неделимых листов по 100 $м^2$.

Задача № 5

С вокзала можно отправлять ежедневно курьерские и скорые поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в табл.1.4.

Таблица 1.4

Исходные данные задачи №1.5

Характеристики парка вагонов	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Число вагонов в поезде, шт.:					
курьерском	1	–	5	6	3
скором	1	1	8	4	1
Вместимость вагонов, чел.	–	–	58	40	32
Наличный парк вагонов, шт.	12	8	81	70	27

Постройте математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума.

Занятие 3. Графическое решения задачи линейного программирования.

Пример 1. Решить ЗЛП графическим методом:

$$
\begin{aligned}
&X = (x_1; x_2)\\
&Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max;\\
&x_1 + 4x_2 \le 8; \qquad\qquad (1)\\
&2{,}5x_1 + 2x_2 \le 12;\\
&x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

<u>Решение</u>.

Вначале решим задачу <u>графическим методом</u>.

Поскольку переменных всего две, это сделать можно.

1) Строим область допустимых решений задачи (ОДР). Для этого записываем уравнения прямых линий, соответствующих первым двум неравенствам системы ограничений задачи: 1) $x_1 + 4x_2 = 8$.

Прямая, которую представляет данное уравнение, проходит через точки: (0;2) и (8;0). Строим на плоскости прямоугольную систему координат. Данная прямая делит координатную плоскость на две полуплоскости. Полуплоскость, координаты точек которой удовлетворяют первому ограничению - неравенству , определяем методом пробной точки. Для этого берём любую точку на плоскости, не лежащую на прямой (например, точку (0;0)). Она располагается ниже прямой. Следовательно, любая точка, взятая в нижней левой полуплоскости, удовлетворяет первому ограничению – неравенству. Обозначаем этот факт стрелочками, направленными в сторону пробной точки.

Аналогично строим уравнение второй прямой: 2) $2{,}5x_1 + 2x_2 = 12$.

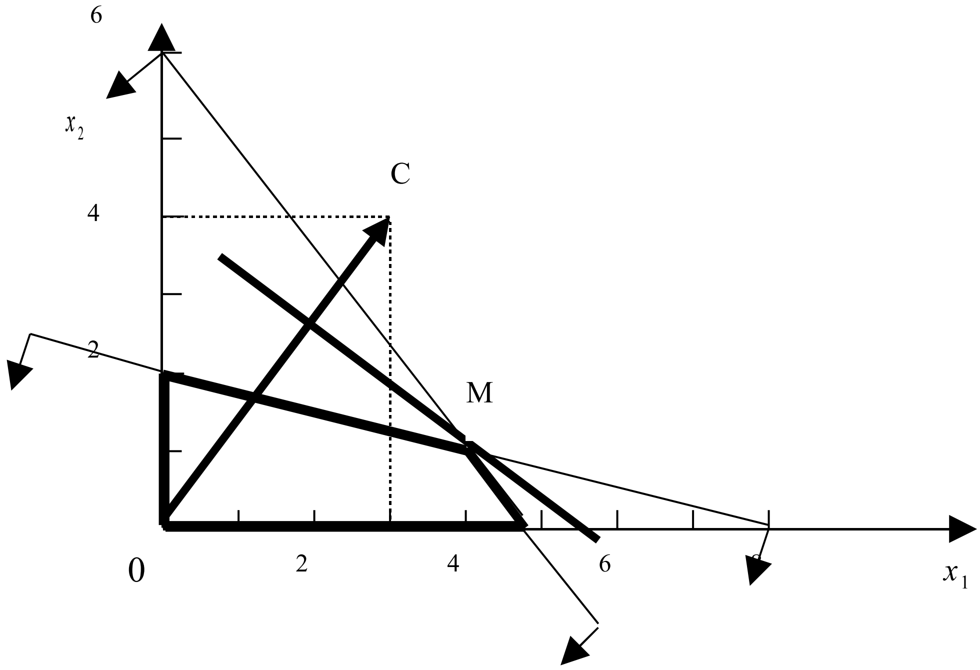
Эта прямая проходит через точки: (0; 6) и (4,8; 0). Пробная точка (0;0) вновь показывает, что направление стрелок сохраняется.

Строим ОДР, учитывая все ограничения задачи и заштриховываем её. В данной задаче ОДР – выпуклый четырёхугольник.

2) Строим градиент C=(3;4) целевой функции; это – вектор, начало которого находится в центре системы координат, а конец – точке (3;4).

3) Строим линию уровня целевой функции, опуская перпендикуляр из любой точки внутри ОДР на направление градиента.

4) Перемещаем линию уровня целевой функции параллельно самой себе в направлении градиента (тип экстремума – максимум) до тех пор, пока она не пересечёт самую крайнюю из всех угловых точек ОДР. Эта точка M является точкой максимума целевой функции.



5) Находим координаты точки максимума путём совместного решения уравнений (1) и (2):

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 8; \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 &= 12. \end{aligned} \qquad (2)$$

Решение системы даёт компоненты оптимального плана ЗЛП:

$$X^* = (x_1^*; x_2^*) = (4;1).$$

Максимальное значение целевой функции равно

$$Z^*_{\max} = 3*4+4*1=16.$$

Задачи для самостоятельного решения: № 20.1-20.11

Занятие 4, 5. Алгоритм симплекс метода.

Решить задачу линейного программирования примера 1 симплексным методом.

1) Приводим модель ЗЛП к канонической форме путём введения дополнительных неотрицательных переменных $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$. В результате модель ЗЛП примет следующий вид:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4);$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max; \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 \quad &= 8; \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 \quad + x_4 &= 12. \end{aligned}$$

2) Определяем базисные и свободные переменные в система ограничений; для этого записываем ограничения в векторной форме:

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

В системе ограничений имеется два единичных вектора; их число равно числу уравнений, поэтому заключаем, что вся система имеет предпочтительный вид. Переменные x_3 и x_4, стоящие при единичных векторах, имеют предпочтительный вид и, следовательно, являются базисными. Остальные переменные x_1 и x_2 являются свободными.

3) Составляем симплексную таблицу, в которую заносим все характеристики математической модели ЗЛП.

Таблица 1.

Номер приближения	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
				3	4	0	0	

	x_3	0	8	1	4	1	0	8/4=2
0	x_4	0	12	2,5	2	0	1	12/2=6
	Δ_j		0	-3	-4	0	0	

Последовательно заполняем индексную строку симплексной таблицы.

$\Delta_0 = C_б A_0$=0*8+0*12=0;

$\Delta_1 = C_б A_1 - c_1$=0*1+0*2,5-3= - 3;

$\Delta_2 = C_б A_2 - c_2$=0*4+0*2-4= - 4;

$\Delta_3 = C_б A_3 - c_3$=0*1+0*0-0= 0;

$\Delta_4 = C_б A_4 - c_4$=0*0+0*1-0= 0.

Результаты расчётов помещаем в индексную строку таблицы.

4) Составляем начальный опорный план. Для этого используем симплексную таблицу, в которой все свободные переменные x_1 и x_2 равны нулю, а базисные переменные x_3 и x_4 при этом должны принять неотрицательные значения. В результате получим:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции для этого плана:

$$Z(X_0) = \Delta_0 = 0.$$

5) Исследуем начальный опорный план на оптимальность. Из индексной строки таблицы следует, что все оценки свободных переменных x_1 и x_2 отрицательны. Поскольку задача решается на максимум целевой функции, то это означает, что начальный опорный план не оптимален и может быть улучшен.

Выбираем из отрицательных оценок $\Delta_1 = -3$ и $\Delta_2 = -4$ максимальную по модулю; это – число –4. Соответствующий столбец таблицы будет разрешающим (выделен серым цветом), а соответствующая свободная переменная x_2 – перспективной. Эту переменную следует ввести в базис.

Для решения вопроса о том, какую из прежних базисных переменных вывести из базиса, составляем для каждой строки таблицы симплексные отношения. Для этого следует разделить элементы столбца A_0 на положительные элементы разрешающего столбца. Результаты заносим в последний столбец таблицы.

Выбираем минимальное из симплексных отношений. Соответствующая строка таблицы будет разрешающей, а соответствующая базисная переменная x_3 - не перспективной; её следует вывести из базиса и сделать свободной переменной. Разрешающая строка таблицы помечена серым цветом.

Элемент таблицы, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, является разрешающим элементом; в таблице соответствующая ячейка выделена двойной линией.

6) Производим преобразования элементов таблицы в результате перехода к новому базису (симплексные преобразования):

А) новые значения разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

Б) новые значения разрешающего столбца заполняются нулями, за исключением одного, стоящего на месте прежнего разрешающего элемента и равного нулю;

В) остальные пустые клетки таблицы заполняются по правилу прямоугольника.

<u>Замечание</u>: Значения ячеек столбца $C_Б$ списываются из первой подстроки таблицы.

В результате получим первое приближение таблицы. Ниже приведены соответствующие расчёты и новое приближение таблицы.

Напомним правило: новое значение элемента таблицы равно разности произведений элементов главной и побочной диагоналей прямоугольника, поделённой на разрешающий элемент. Для примера ниже приведен результат расчёта второго компонента вектора A_0:

$$\frac{4*12-8*2}{4}=8.$$

Таблица 2.

Номер приближения	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
				3	4	0	0	
1	x_2	4	2	1/4	1	1/4	0	2/(1/4)=8
	x_4	0	8	2	0	-1/2	1	8/2=4
	Δ_j		8	-2	0	1	0	

7) Стоим новый опорный план задачи:

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

и соответствующее значение целевой функции:

$$Z(X_1)=\Delta_0=8.$$

Видно, что план улучшен по сравнению с исходным, поскольку значение целевой функции возросло.

Однако, и этот план не оптимален, поскольку в индексной строке имеется отрицательная оценка Δ_1=-2.

Вновь выбираем разрешающий столбец (это столбец x_1) с перспективной переменной. Составляем симплексные отношения и находим разрешающую строку (это стока x_4). Поэтому опять переходим к новому базису (x_1 и x_2).

После проведения симплексных преобразований получим второе приближение таблицы.

Номер приближения	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
				3	4	0	0	

	x_2	4	1	0	1	5/16	-1/8	
2	x_1	3	4	1	0	-1/4	1/2	
	Δ_j		16	0	0	1/2	1	

Из индексной строки таблицы 3 следует, что в ней нет отрицательных оценок свободных переменных. Это означает, что получено оптимальное решение задачи:

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

соответствующее значение целевой функции равно

$$Z^*_{\max}(X^*) = \Delta_0 = 16 .$$

Поскольку среди оценок свободных переменных в последней таблице нет нулевых, данный оптимальный план – единственный.

Задачи для самостоятельного решения: № 21.1-21.15

Занятие 6, 7. **Двойственность в линейном программировании.**

При изучении данной темы необходимо:

- знать экономическое содержание задачи торга;
- уметь строить модель двойственной ЗЛП, если известна модель прямой задачи;
- понимать экономический смысл основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач ЛП;
- знать математические формулировки основных теорем теории двойственности и их экономический смысл;
- уметь находить решение одной из пары двойственных задач, если известно решение другой задачи;
- уметь находить интервалы значений цен на продукцию предприятия, для которых выгодно сохранить прежнюю номенклатуру выпускаемой продукции.

Вопросы для самоконтроля по теме

1. Опишите экономическое содержание и сформулируйте математическую модель задачи торга.
2. Сформулируйте правила, на основании которых можно составить модель одной из двойственных задач, если известна модель другой задачи.
3. Дайте формулировки основных теорем теории двойственности. Каково их экономическое содержание?
4. Какими способами можно получить оптимальное решение одной из пары двойственных задач, если получено оптимальное решение другой задачи?
5. Каким способом можно определить диапазон рыночных цен на продукцию предприятия, при котором сохраняется прежний ассортимент выпускаемой продукции?
6. Как можно определить, выгодно ли предприятию выпустить новый вид продукции на прежней ресурсной базе?

Пример решения двойственной задачи линейного программирования.

Пример 1.

Составить и решить двойственную задачу по отношению к задаче примера 3.

Решение.

1) Используя соответствия между прямой и двойственной задачами, составим модель двойственной ЗЛП:

$$\begin{aligned}
&Y = (y_1, y_2);\\
&f = 8y_1 + 12y_2 \to \min;\\
&y_1 + 2{,}5y_2 \geq 3;\\
&4y_1 + 2y_2 \geq 4;\\
&y_1 \geq 0;\ \ y_2 \geq 0.
\end{aligned} \qquad (5)$$

2) Приведём к канонической форме модель (5), введя дополнительные неотрицательные переменные $y_3 \geq 0;\ \ y_4 \geq 0.$ В результате получи преобразованную модель:

$$
\begin{aligned}
&Y = (y_1, y_2; y_3; y_4);\\
&f = 8y_1 + 12y_2 + 0y_3 + 0y_4 \to \min;\\
&y_1 + 2{,}5y_2 - y_3 \quad = 3;\\
&4y_1 + 2y_2 \quad -y_4 = 4;\\
&y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

1) Установим соответствие между переменными обеих задач:

$$
\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_2 \end{matrix}. \tag{7}
$$

2) Получим оптимальный план двойственной ЗЛП, используя соответствие (7):

$$
Y^* = (y_1^*;\ y_2^*;\ y_3^*;\ y_4^*) = (1/2;\ 1;\ 0;\ 0). \tag{8}
$$

Минимальное значение целевой функции двойственной задачи равно максимальному значению примой задачи:

$$
f^*_{\min} = 8 * 1/2 + 12 * 1 = 16. \tag{9}
$$

Задачи для самостоятельного решения: № 22.1-21.9

Пример решения задачи линейного программирования в Excel.

ИНСТРУКЦИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ Microsoft Excel ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1.Ввести условие задачи:

a) ***создать экранную форму для ввода условия задачи***:

- переменных,
- целевой функции (ЦФ),
- ограничений,
- граничных условий;

b) ***ввести исходные данные в экранную форму***:

- коэффициенты ЦФ,
- коэффициенты при переменных в ограничениях,
- правые части ограничений;

c) ***ввести зависимости из математической модели в экранную форму***:

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) ***задать ЦФ*** (в окне **"Поиск решения"**):

- целевую ячейку,
- направление оптимизации ЦФ;

e) ***ввести ограничения и граничные условия*** (в окне **"Поиск решения"**):

- ячейки со значениями переменных,
- граничные условия для допустимых значений переменных,
- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2.Решить задачу:

a) ***установить параметры решения задачи*** (в окне **"Поиск решения"**);

b) ***запустить задачу на решение*** (в окне **"Поиск решения"**);

c) ***выбрать формат вывода решения*** (в окне **"Результаты поиска решения"**).

1.3.1. Одноиндексные задачи ЛП

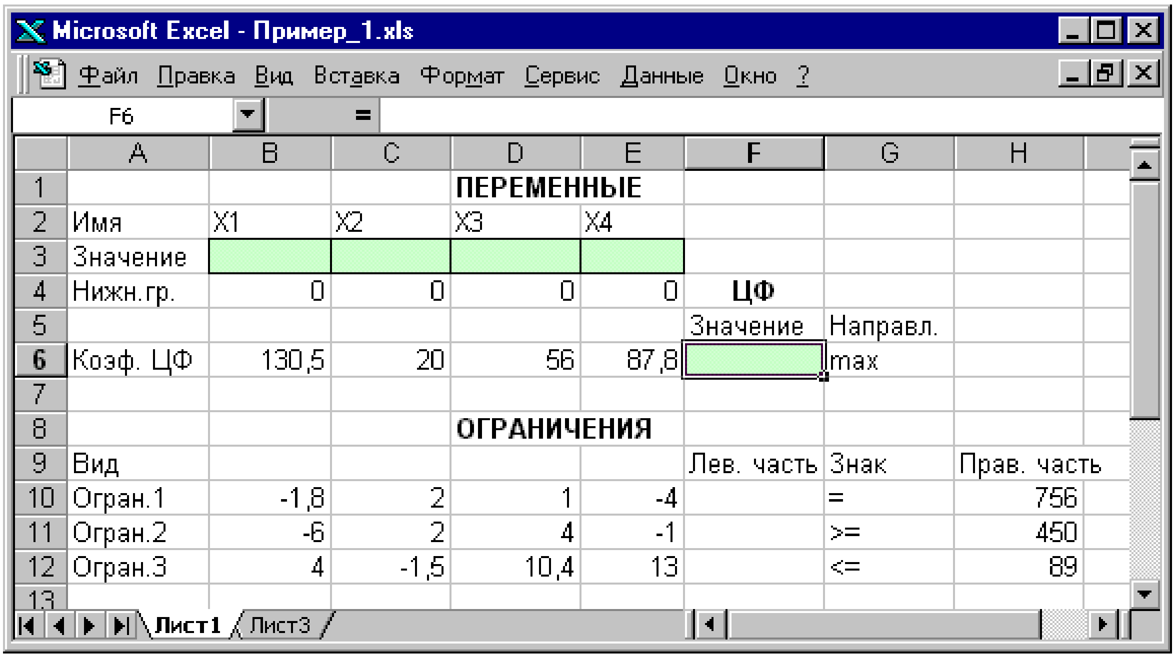
Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$L(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \ge 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \le 89, \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \qquad (1.1)$$

1.3.1.1. Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис.1.1.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89

Рис.1.1. Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рис.1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки **B3** (x_1), **C3** (x_2), **D3** (x_3), **E3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ($c_1 = 130,5$), **C6** ($c_2 = 20$), **D6** ($c_3 = 56$), **E6** ($c_4 = 87,8$), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ($b_1 = 756$), **H11** ($b_2 = 450$), **H12** ($b_3 = 89$) и т.д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести **формулу,** по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 . \qquad (1.2)$$

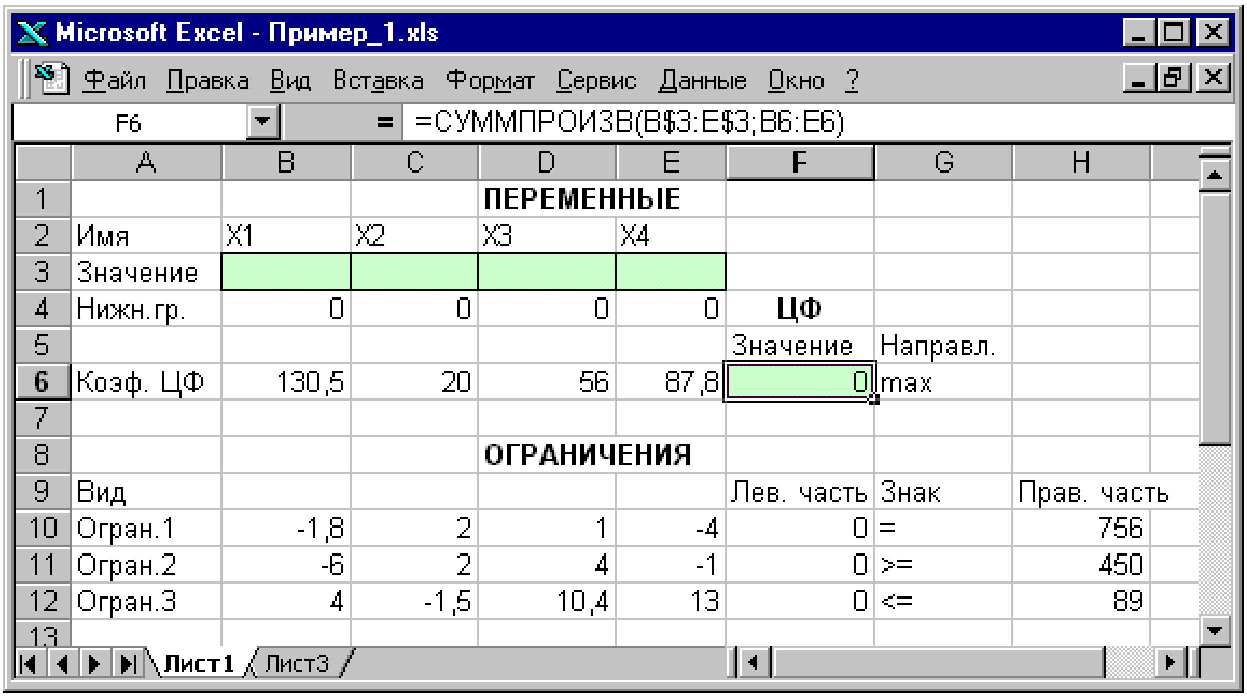
Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис.1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как **сумму произведений** каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 . \qquad (1.3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу **"Enter"**

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6), (1.4)

где символ **$** перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;
символ **:** означает, что в формуле будут использованы **все** ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6 и E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис.1.2).


Microsoft Excel - Пример_1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

F6 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89
13								

Лист1 / Лист3

Рис.1.2. Экранная форма задачи (1.1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание 1.1. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима **"Вставка функций",** который можно вызвать из меню **"Вставка"** или при нажатии кнопки **"** f_x **"** на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

•курсор в поле **F6;**

•нажав кнопку **"** f_x **",** вызовите окно **"Мастер функций – шаг 1 из 2";**

•выберите в окне **"Категория"** категорию **"Математические";**

•в окне **"Функция"** выберите функцию **СУММПРОИЗВ*;***

•в появившемся окне **"СУММПРОИЗВ"** в строку **"Массив 1"** введите выражение **B$3:E$3**, а в строку **"Массив 2"** – выражение **B6:E6** (рис.1.3);

•после ввода ячеек в строки **"Массив 1"** и **"Массив 2"** в окне **"СУММПРОИЗВ"** появятся числовые значения введенных массивов (см. рис.1.3), а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

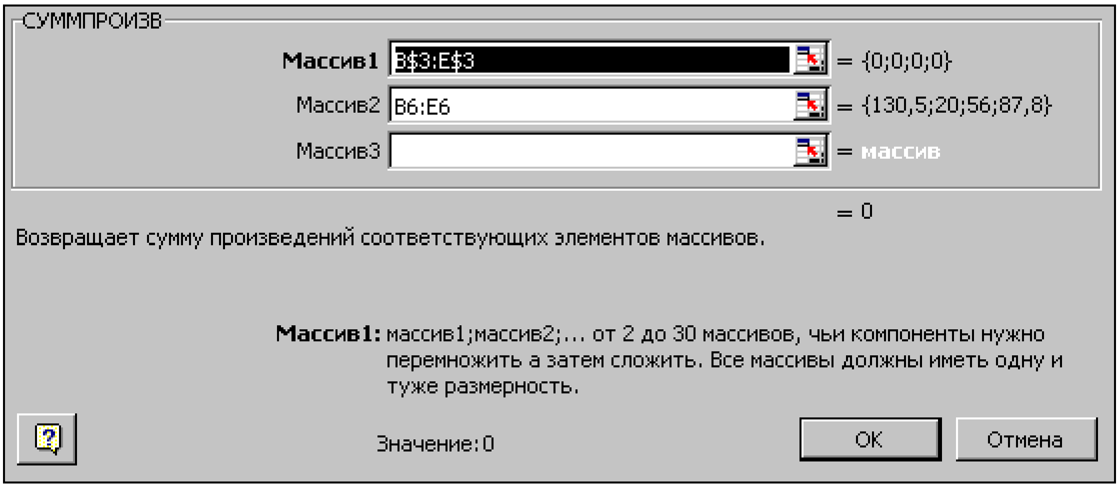


Рис.1.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно **"Мастер функций"**

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10 –** 1-е ограничение**; B11, C11, D11, E11** – 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12 –** 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)

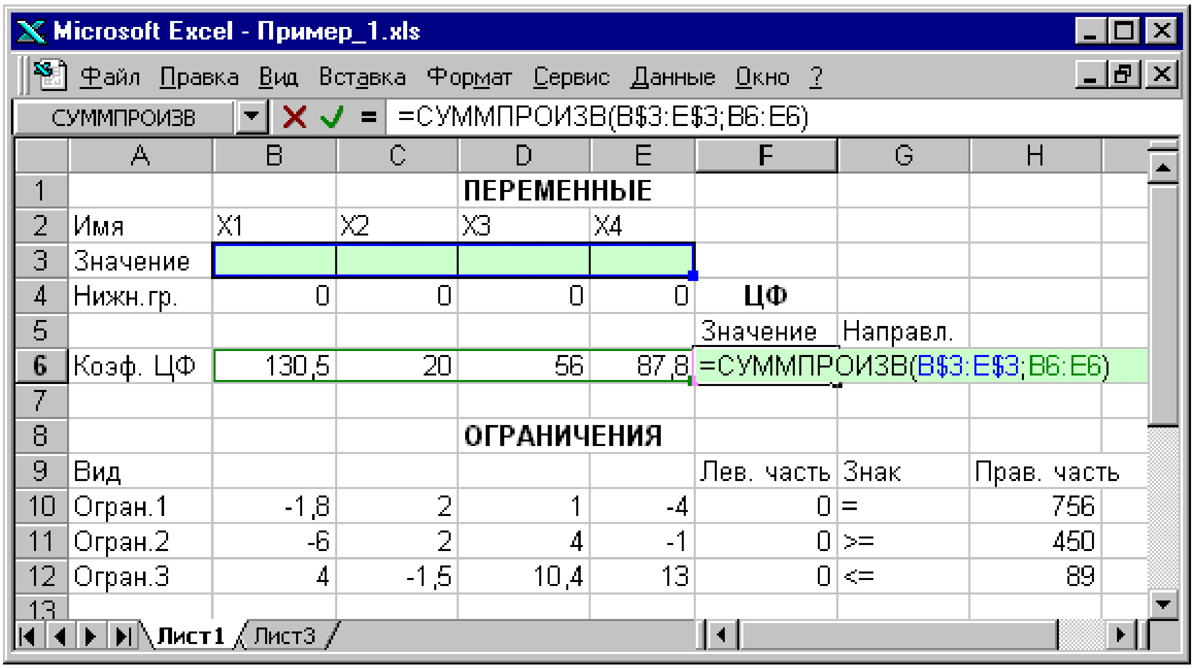
Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10**)
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11**)
$4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12**)

Как видно из табл.1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и скопировать в буфер содержимое ячейки **F6** (клавишами **"Ctrl-Insert"**);
- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в **F10, F11** и **F12,** и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами **"Shift-Insert"**) (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис.1.2).

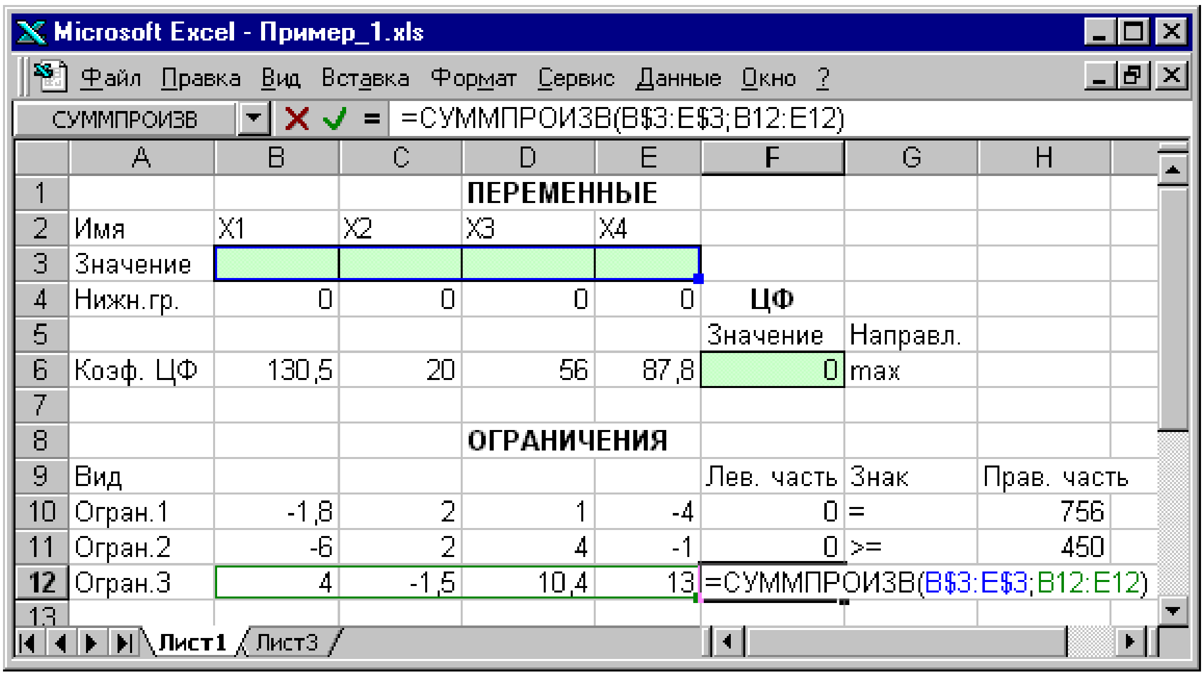
<u>Проверка правильности введения формул</u>

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис.1.4 и 1.5).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)		
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89
13								

Рис.1.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку **F6**



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)		
13								

Рис.1.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку **F12**

для левой части ограничения.

<u>Задание ЦФ</u>

Дальнейшие действия производятся в окне **"Поиск решения"**, которое вызывается из меню **"Сервис"** (рис.1.6):

•поставьте курсор в поле **"Установить целевую ячейку"**;

•введите адрес целевой ячейки **$F$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

•введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке **"максимальному значению".**

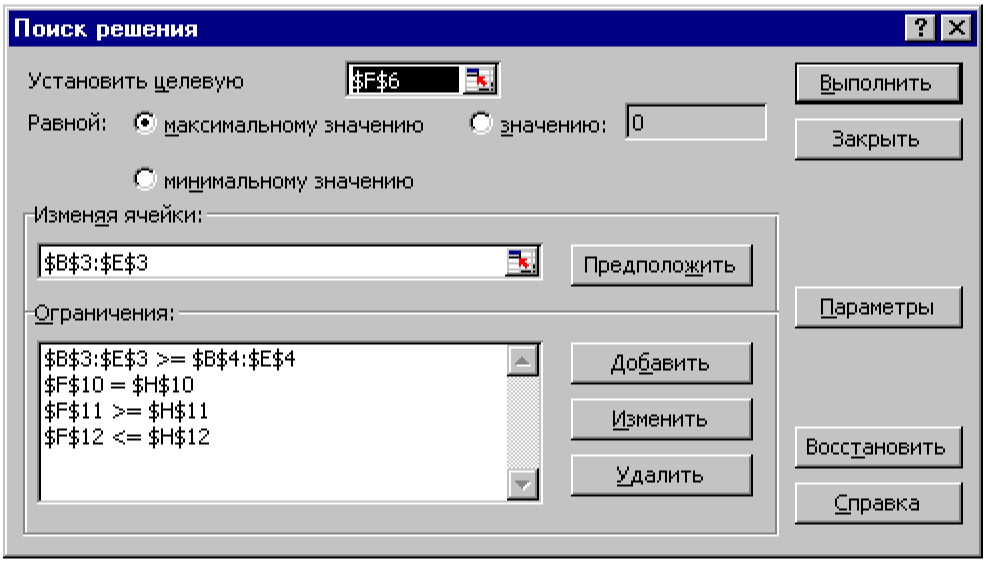


Рис.1.6. Окно **"Поиск решения"** задачи (1.1)

Ввод ограничений и граничных условий. <u>Задание ячеек переменных</u>

В окно **"Поиск решения"** в поле **"Изменяя ячейки"** впишите адреса **$B$3:$E$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле **"Изменяя ячейки"** и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

<u>Задание граничных условий для допустимых значений переменных</u>

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис.1.1).

•Нажмите кнопку **"Добавить"**, после чего появится окно **"Добавление ограничения"** (рис.1.7).

•В поле **"Ссылка на ячейку"** введите адреса ячеек переменных **$B$3:$E$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

•В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите ≥ .

•В поле **"Ограничение"** введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **$B$4:$E$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

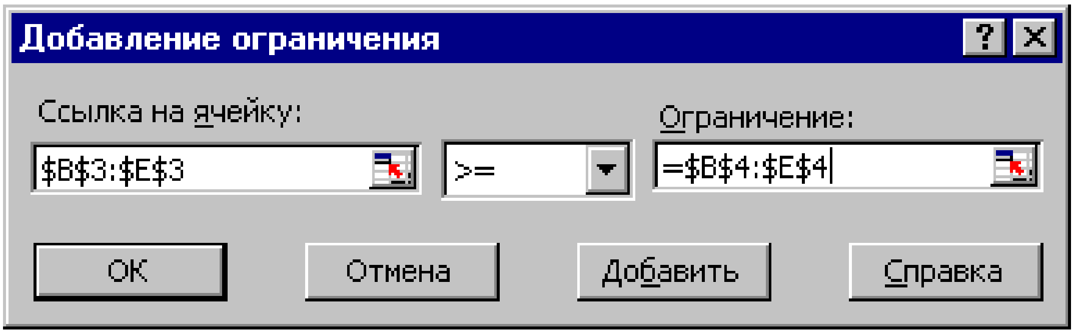


Рис.1.7. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

<u>Задание знаков ограничений</u> ≤ , ≥ , =

•Нажмите кнопку **"Добавить"** в окне **"Добавление ограничения"**.

•В поле **"Ссылка на ячейку"** введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **$F$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.

•В соответствии с условием задачи (1.1) выбрать в поле знака необходимый знак, например =.

•В поле **"Ограничение"** введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **$H$10**.

•Аналогично введите ограничения: **$F$11>=$H$11**, **$F$12<=$H$12**.

•Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **OK**.

Окно **"Поиск решения"** после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рис.1.6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки **"Изменить"** или **"Удалить"** (см. рис.1.6).

Решение задачи

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне **"Поиск решения".** Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку **"Параметры"** и заполнить некоторые поля окна **"Параметры поиска решения"** (рис.1.8).

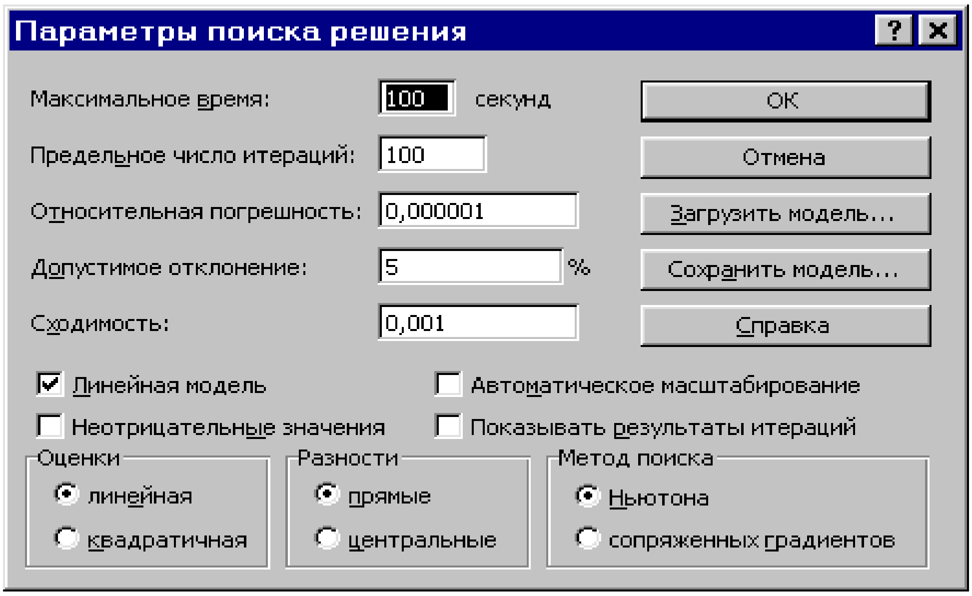


Рис.1.8. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр **"Максимальное время"** служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр **"Предельное число итераций"** служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр **"Относительная погрешность"** служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр **"Допустимое отклонение"** служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр **"Сходимость"** применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка **"Линейная модель"** обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки **"ОК"**.

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна **"Поиск решения"** путем нажатия кнопки **"Выполнить".**

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно **"Результаты поиска решения"** с одним из сообщений, представленных на рис.1.9, 1.10 и 1.11.

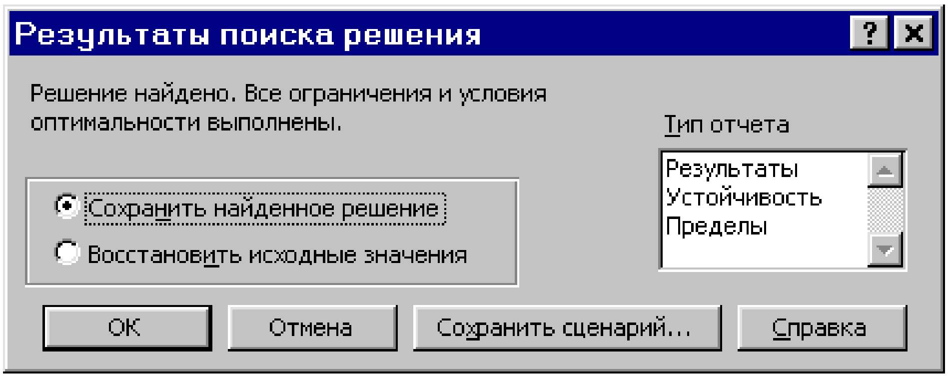


Рис.1.9. Сообщение об успешном решении задачи

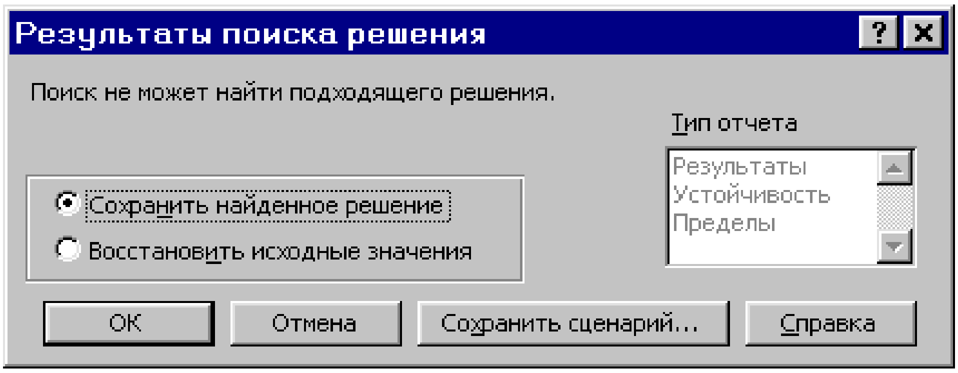


Рис.1.10. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

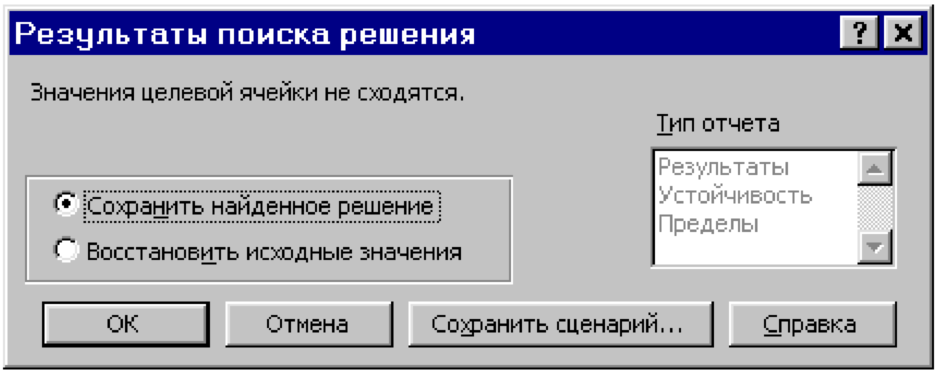


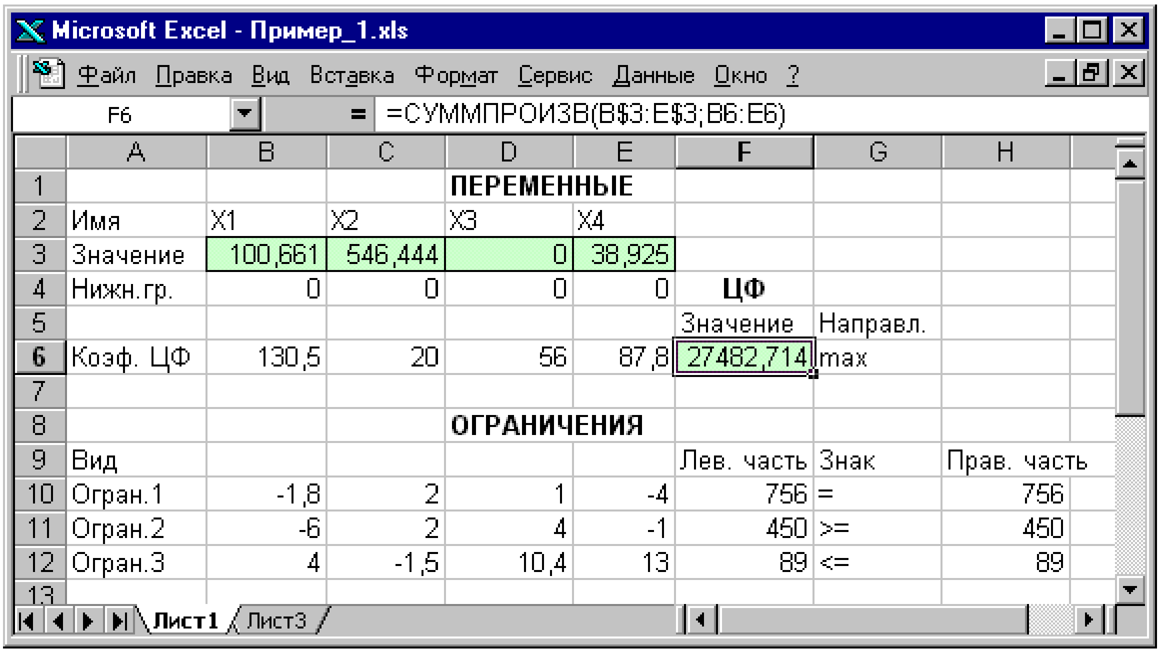
Рис.1.11. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис.1.10 и 1.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует (см. ниже подразд.1.3.5).

Если при заполнении полей окна **"Поиск решения"** были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра **"Относительная погрешность"** не позволяет найти оптимальное решение.

Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне **"Результаты поиска решения"** представлены названия трех типов отчетов: **"Результаты", "Устойчивость", "Пределы"**. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность (см. ниже подразд.3.3). Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку **"ОК".** После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис.1.12).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925			
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,714	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89
13								

Рис.1.12. Экранная форма задачи (1.1) после получения решения

1.3.2. Целочисленное программирование

Допустим, что к условию задачи (1.1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

•В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рис.1.13).

•В окне **"Поиск решения"** (меню **"Сервис"→"Поиск решения"**), нажмите кнопку **"Добавить"** и в появившемся окне **"Добавление ограничений"** введите ограничения следующим образом (рис.1.14):

–в поле **"Ссылка на ячейку"** введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **$B$3:$E$3**;

–в поле ввода знака ограничения установите **"целое"*;***

–подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки "**OK".**

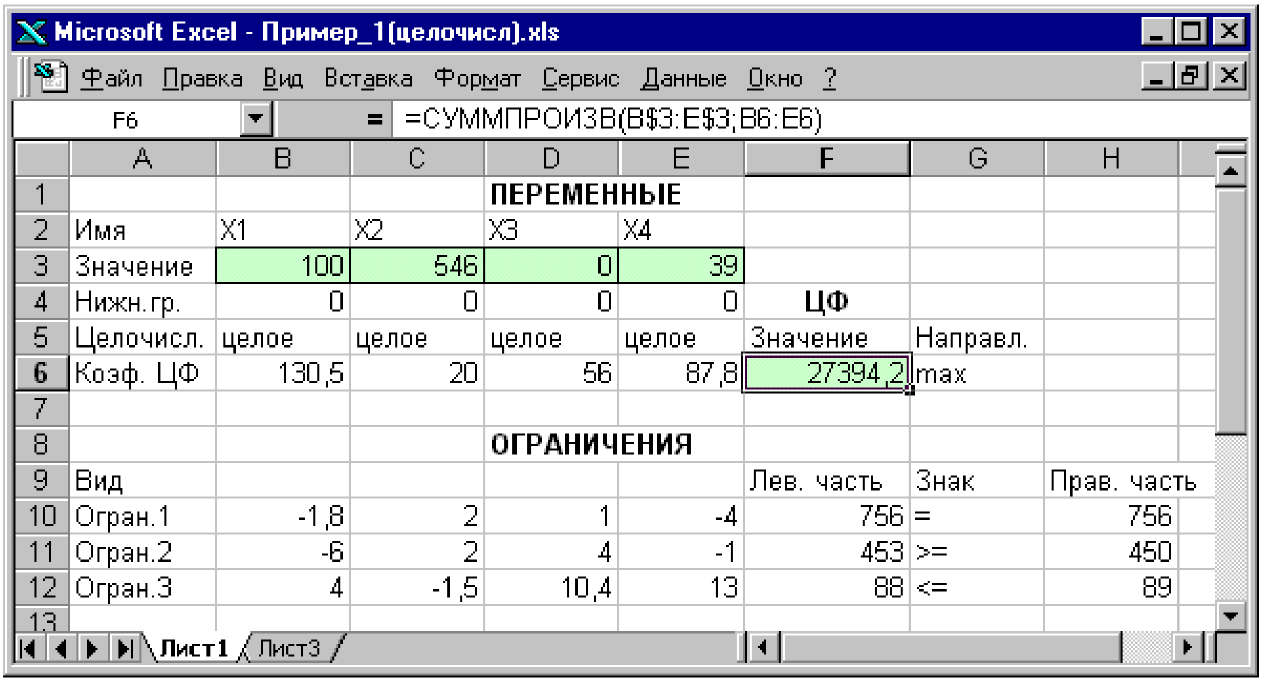


Рис.1.13. Решение задачи (1.1) при условии целочисленности ее переменных

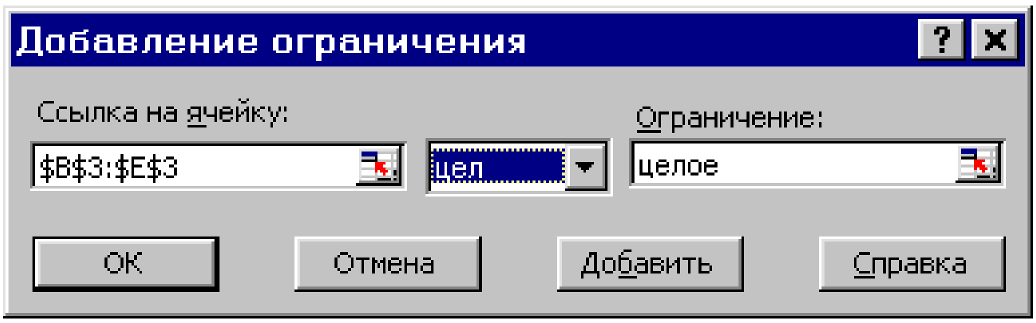


Рис.1.14. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1.1)

На рис.1.13 представлено решение задачи (1.1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменн

Занятие 8, 9. Транспортная задача. Задача оптимального размещения производства

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.

Задача №1

На фабрике эксплуатируются три типа ткацких станков, которые могут выпускать четыре вида тканей. Известны следующие данные о производственном процессе:

•производительности станков по каждому виду ткани, м/ч

$$\left(\lambda_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 24 & 30 & 18 & 42 \\ 12 & 15 & 9 & 21 \\ 8 & 10 & 6 & 14 \end{pmatrix};$$

•себестоимость тканей, руб./м

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

•фонды рабочего времени станков (a_i): 90, 220, 180 ч;

•планируемый объем выпуска тканей (b_j): 1200, 900, 1800, 840 м.

Требуется распределить выпуск ткани по станкам с целью минимизации общей себестоимости производства ткани.

Решение

Пусть переменные x_{ij} – это время, в течение которого i-й станок будет выпускать j-ю ткань. Сведем исходные данные задачи в распределительную таблицу.

Распределительная матрица задачи

Станки	Ткани				Фонд времени a_i, ч
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 (c_{ij}) (λ_{ij}) 24	1 30	3 18	1 42	90
A_2	3 12	2 15	4 9	1 21	220
A_3	6 8	3 10	5 6	2 14	180
Объем выпуска b_j, м	1200	900	1800	840	

ЦФ имеет смысл себестоимости выпуска запланированного количества ткани всех видов

Ограничения имеют вид

$$\begin{cases} \text{по фондам времени, ч} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{31} + x_{34} = 180, \\ \text{по объемам выпуска, м} \\ 24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200, \\ 30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900, \\ 18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800, \\ 42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840, \\ x_{ij} \geq 0 \left(\forall\, i = \overline{1,3};\, j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Преобразуем РЗ в ТЗ, т.е. представим исходную задачу в виде, когда ткани производит только один станок – базовый и все параметры задачи согласуем с его характеристиками. В качестве базового можно выбирать любой из станков. Мы выберем станок с максимальной производительностью, т.е. A_1. По формуле (6.2) определим производительности станков α_i, нормированные относительно производительности базового станка:

$$\alpha_1 = \frac{24}{24} = \frac{30}{30} = \frac{18}{18} = \frac{42}{42} = 1;$$

$$\alpha_2 = \frac{12}{24} = \frac{15}{30} = \frac{9}{18} = \frac{21}{42} = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_3 = \frac{8}{24} = \frac{10}{30} = \frac{6}{18} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, базовый станок работает в два раза быстрей второго станка и в три раза быстрей третьего.

Пересчитаем фонды времени станков по формуле (6.3):

$$a_1' = 90 \cdot 1 = 90 \ [\text{ч}]; \ a_2' = 220 \cdot \frac{1}{2} = 110 \ [\text{ч}]; \ a_3' = 180 \cdot \frac{1}{3} = 60 \ [\text{ч}].$$

Из этих величин следует, что тот объем работ, который второй станок выполняет за свой фонд времени 220 ч базовый станок сможет выполнить за 110 ч. Аналогично объем работ, который третий станок выполняет за 180 ч базовый выполнит за 60 ч. Пересчитаем плановое задание по формуле (6.4):

$$b_1' = \frac{1200}{24} = 50 \ [\text{ч}]; \ b_2' = \frac{900}{30} = 30 \ [\text{ч}]; \ b_3' = \frac{1800}{18} = 100 \ [\text{ч}]; \ b_4' = \frac{840}{42} = 20 \ [\text{ч}].$$

Отсюда следует, что план выпуска первого вида ткани базовый станок выполнит за 50 ч, второго вида – за 30 ч и т.д.

Пересчет себестоимостей производим по формуле (6.5), например:

$$c_{13}' = 3 \cdot 18 = 54 \ [\text{руб./ч}]; \ c_{21} = 3 \cdot 24 = 72 \ [\text{руб./ч}]; \ c_{34}' = 2 \cdot 42 = 84 \ [\text{руб./ч}].$$

В полученной ТЗ условие баланса (4.2) не выполняется, т.к. суммарный фонд времени станков больше, чем это необходимо для выполнения плана по выпуску всех тканей (260 ч > 200 ч). Введем фиктивный столбец $B_ф$ и запишем все пересчитанные параметры РЗ в транспортную матрицу (см. табл.6.3). Фиктивные тарифы для упрощения приравняем к нулю.

Транспортная матрица задачи №1

Станки	Ткани					Фонд времени a', ч
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_Ф$	
A_1	48	30	54	42	0	90
A_2	72	60	72	42	0	110
A_3	144	90	90	84	0	60
Объем выпуска b'_j, ч	50	30	100	20	60	

Для упрощения вместо оптимального решения рассмотрим опорный план $X'_{СЗУ}$, найденный методом северо-западного угла.

$$X'_{СЗУ} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60^{ф} \end{pmatrix} [ч].$$

Преобразуем опорный план ТЗ $X'_{СЗУ}$ в опорный план РЗ $X_{СЗУ}$ согласно (6.6)

$$X_{СЗУ} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180^{ф} \end{pmatrix} [ч].$$

Таким образом, первый станок должен 50 ч производить ткань первого вида, 30 ч – ткань второго вида и 10 ч – ткань третьего вида. Второй станок должен 180 ч производить ткань третьего вида и 40 ч – ткань четвертого вида. А третий станок будет простаивать, не выпуская ткань вообще, т.к. согласно решению, его загрузка находится в фиктивном столбце ($x_{35} = 180^{ф}$).

Определим, сколько метров ткани каждого вида должны произвести станки по формуле (6.7)

$$X^{к}_{СЗУ} = \begin{pmatrix} 1200 & 900 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1620 & 840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix} \text{ [м].}$$

Определим общую себестоимость производства по формуле (6.1), используя вычисленные значения элементов матрицы $X^{к}_{СЗУ}$

$$L(X) = 2 \cdot 1200 + 1 \cdot 900 + 3 \cdot 180 + 4 \cdot 1620 + 1 \cdot 840 = 16020 \text{ (руб.).}$$

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №6.1

Решите РЗ, исходные данные которой приведены в табл.6.4.

Таблица 6.4

Распределительная матрица задачи №6.1

Производитель	Продукция			Фонд времени, ч
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 (c_{ij}, руб./т) (λ_{ij}, т/ч) 6	5 2	4 4	360
A_2	6 12	2 4	2 8	90
A_3	3 72	9 24	1 48	146
A_4	2 9	5 3	3 6	1296
Объем выпуска, т	7056	3216	2976	

Задача №6.2

Некоторая фирма содержит три магазина, которым еженедельно следует доставлять товар: первому магазину – 1050 кг сыра, второму – 600 мешков муки, третьему – 2400 упаковок сока. Товары доставляются грузовыми машинами четырех транспортных предприятий. Количество машин на этих предприятиях составляет 65, 40, 45 и 20 машин. Все машины имеют различную грузоподъемность [ед.тов./маш.], в зависимости от типа машины и типа перевозимого груза

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \\ 50 & 30 & 60 \\ 25 & 15 & 30 \\ \text{кг / маш.} & \text{мешков / маш.} & \text{упак. / маш.} \end{pmatrix}.$$

Стоимости использования машин [руб./маш.] в зависимости от дальности перевозки и емкости машины равны

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 & 24 \\ 10 & 9 & 6 \\ 250 & 210 & 240 \\ 100 & 75 & 90 \end{pmatrix}.$$

Организуйте экономичную перевозку товаров (при решении используйте метод северо-западного угла).

Занятие 10,11. Динамическое программирование.

Задача 1Требуется проложить путь (трубопровод, шоссе) между двумя пунктами ***A*** и ***B*** таким образом, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальными.

<u>Решение.</u> Разделим расстояние между пунктами **А** и **В** на шаги (отрезки). Пусть на каждом шаге можно двигаться строго на восток (по оси **X**), либо строго на север (по оси **У**). Тогда путь от **А** в **В** представляет ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей. Затраты на сооружение каждого из отрезков (в млн. руб.) известны (рис. 3):

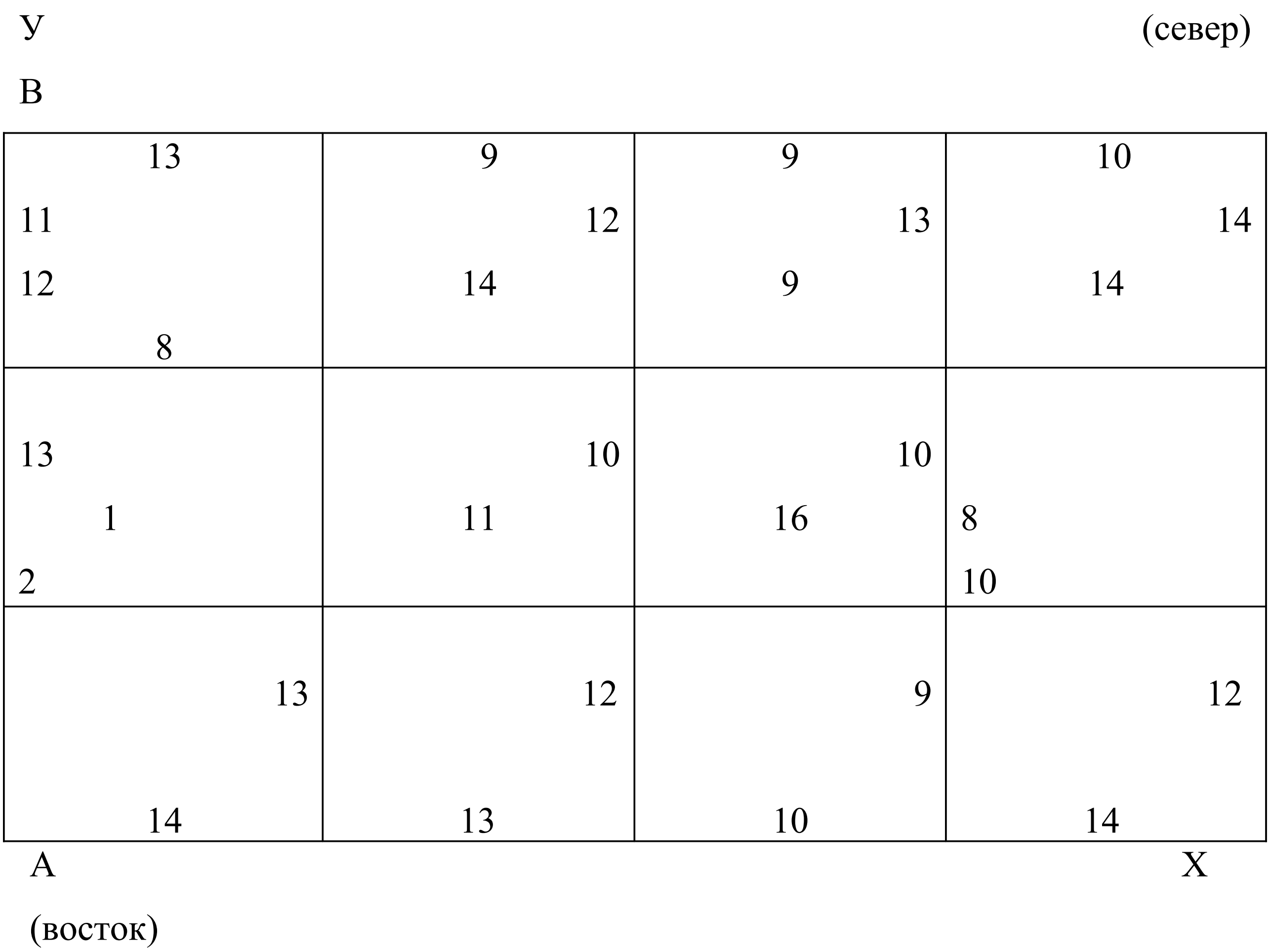


Рис.1

Разделим расстояние от А до В в восточном направлении на 4 части, в северном - на 3 части. Этот процесс можно рассматривать как управляемую систему, перемещающуюся под влиянием управления из начального состояния А в конечное состояние В. Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя целочисленными координатами х и у.

Для каждого из состояний системы (узловой точки) найдем условное оптимальное управление. Оно выбирается так, чтобы стоимость всех оставшихся шагов до конца процесса была минимальной. Процедуру условной оптимизации проводим в обратном направлении, т.е. от точки В к точке А.

Найдем условную оптимизацию последнего шага (рис.4). В точке В можно попасть из В1 или В2. В узлах запишем стоимость пути. Стрелкой покажем минимальный путь.

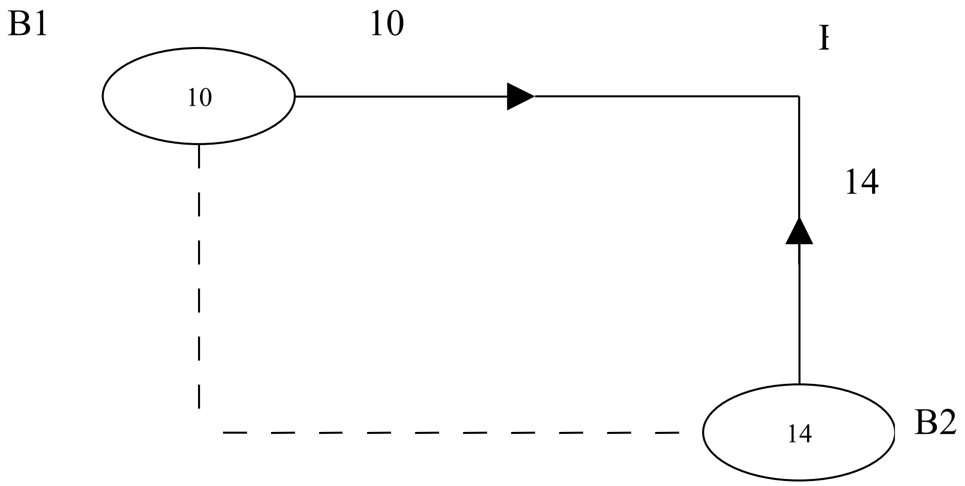


Рис.2.

Рассмотрим предпоследний шаг (рис.5).

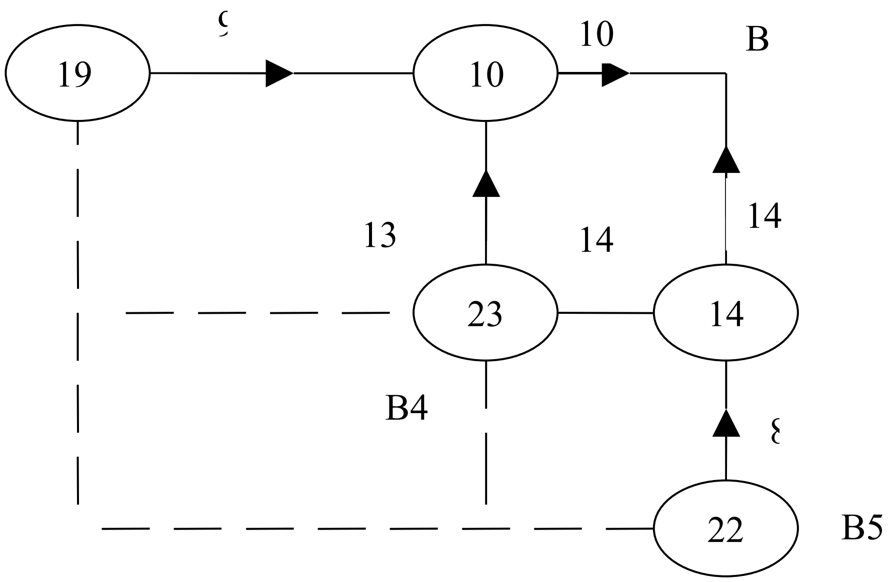


Рис.3.

Для точки В3 условное управление - по оси ох, а для точки В5 - по оси оу. Управление для точки В4 выбираем как

$$\min(13+10;\ 14+14)=(23;28)=23,$$

т. е. по оси оу.

Продолжая условную оптимизацию для всех остальных угловых точек (рис.5).

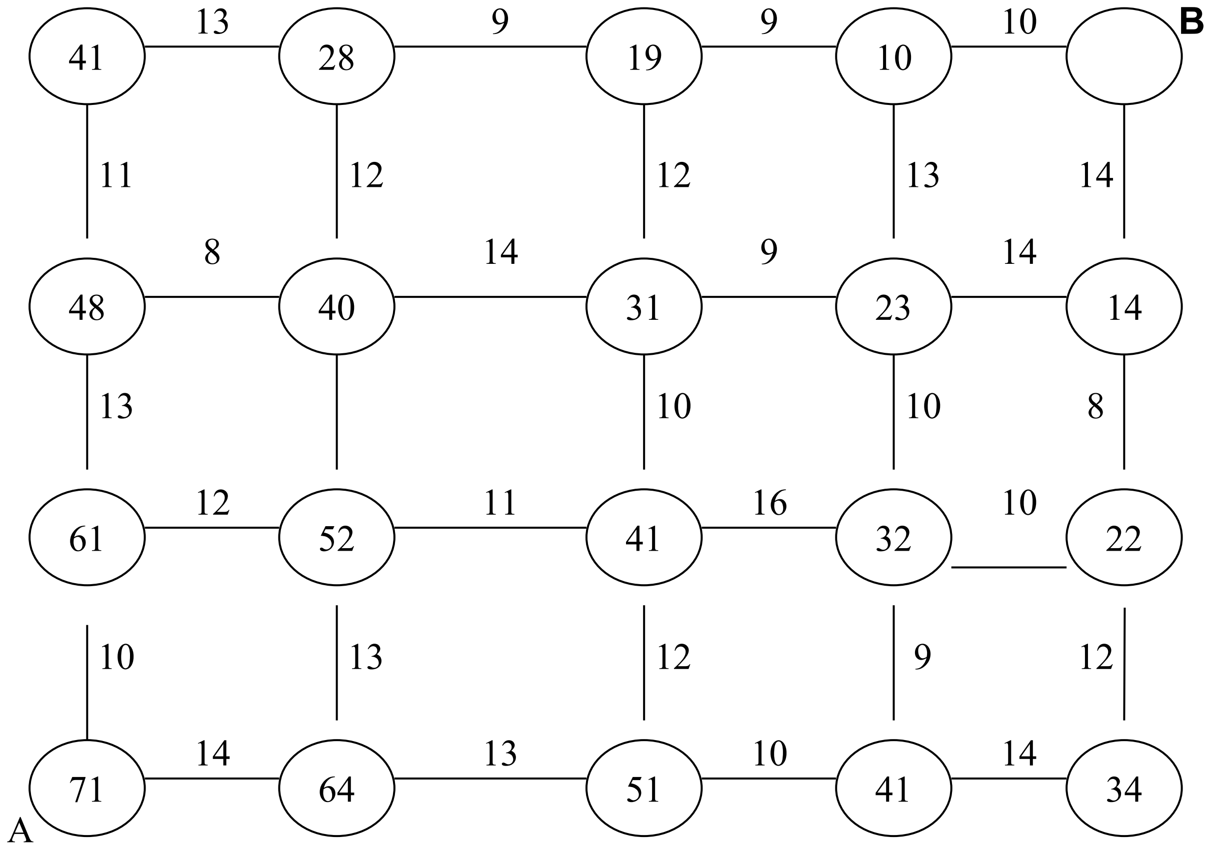


Рис. 4.

Получим:

Хопт=(с,с,в,с,в,в,в),

где с где с— север, в— восток.

Минимальные затраты составляют

10+13+8+12+9+9+10=71 млн.руб.

Если решать задачу, исходя из оптимальности на каждом этапе, то решение будет следующим: X_1 = (с, в, в, с, в, с, в).Затраты составят 10+12+11+10+9+13+10=75>71.

<u>Ответ</u>. Прокладывать путь целесообразно по схеме: с, с, в, с, в, в, в, при этом затраты будут минимальными и составят 71 млн. руб.

Задача 2. Производственное объединение состоит из четырех предприятий .Общая сумма капитальных вложений равна 700 денежных единиц при этом

суммы выделяемые предприятиям кратны 100 денежным единицам. Значения функции $f_j(x_j)$ приведены в таблице.

x_j	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_j(x_j)$	**0**	**42**	**58**	**71**	**80**	**89**	**95**	**100**
$f_j(x_j)$	**0**	**30**	**49**	**63**	**68**	**69**	**65**	**60**
$f_j(x_j)$	**0**	**22**	**37**	**49**	**59**	**68**	**76**	**82**
$f_j(x_j)$	**0**	**50**	**68**	**82**	**92**	**100**	**107**	**112**

Требуется найти такое распределение капитальных вложений между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли всей отрасли.

Занятие 12, 13. Управление запасами.

Задача №1

Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок супа в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2 руб. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 руб. Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения в год составляют 40 коп. за один пакет. Необходимо определить: сколько пакетов должен заказывать владелец магазина для одной поставки; частоту заказов; точку заказа. Известно, что магазин работает 300 дней в году.

Решение

Примем за единицу времени год, тогда $\nu = 500$ шт. пакетов в год, $K = 10$ руб., $s = 0{,}4$ руб./шт.$\cdot$год. Поскольку пакеты супа заказываются со склада поставщика, а не производятся самостоятельно, то будем использовать модель Уилсона.

$$Q_W = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0{,}4}} = 158{,}11 \approx 158 \text{ штук.}$$

Поскольку число пакетов должно быть целым, то будем заказывать по 158 штук. При расчете других параметров задачи будем использовать не $Q^* = 158{,}11$, а Q=158. Годовые затраты на УЗ равны

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} = 10 \cdot \frac{500}{158} + 0{,}4 \cdot \frac{158}{2} = 63{,}25 \text{ рублей в год.}$$

Подачу каждого нового заказа должна производиться через

$$\tau = \frac{Q}{\nu} = \frac{158}{500} = 0{,}316 \text{ года.}$$

Поскольку известно, что в данном случае год равен 300 рабочим дням, то

$$\tau = 0{,}316 \text{ год} \cdot 300 \ \frac{\text{раб.дней}}{\text{год}} = 94{,}8 \approx 95 \text{ рабочих дней.}$$

Заказ следует подавать при уровне запаса, равном

$$h_0 = \nu T_д = \frac{500}{300} \cdot 12 = 20 \text{ пакетам,}$$

т.е. эти 20 пакетов будут проданы в течение 12 дней, пока будет доставляться заказ.

Задача № 2

На некотором станке производятся детали в количестве 2000 штук в месяц. Эти детали используются для производства продукции на другом станке с интенсивностью 500 шт. в месяц. По оценкам специалистов компании, издержки хранения составляют 50 коп. в год за одну деталь. Стоимость производства одной детали равна 2,50 руб., а стоимость на подготовку производства составляет 1000 руб. Каким должен быть размер партии деталей, производимой на первом станке, с какой частотой следует запускать производство этих партий?

Решение

$K = 1000$ руб., $\lambda = 2000$ шт. в месяц или 24000 шт. в год, $\nu = 500$ шт. в месяц или 6000 шт. в год, $s = 0{,}50$ руб. в год за деталь. В данной ситуации необходимо использовать модель планирования экономичного размера партии.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu\lambda}{s(\lambda - \nu)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 6000 \cdot 24000}{0{,}50(24000 - 6000)}} = 5656{,}9 \approx 5657 \text{ шт.}$$

Частота запуска деталей в производство равна

$$\tau = \frac{Q}{v} = \frac{5657}{6000} = 0{,}94 \text{ года или } 11{,}28 \text{ месяцев.}$$

Общие затраты на УЗ составляют

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q(\lambda - \nu)}{2\lambda} = \frac{1000 \cdot 6000}{5657} + \frac{0{,}50 \cdot 5657 \cdot 18000}{2 \cdot 24000} = 2121{,}32 \text{ руб. в год.}$$

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №3

Используя график циклов изменения запасов в модели планирования экономичного размера партии (см. рис.11.4), выведите формулы для расчета длительности периодов производства/использования запаса (t_1) и использования запаса (t_2).

Задача №4

Постройте график общих годовых затрат на УЗ для задачи №11.01 ($Q \leq 200$ шт.) с учетом затрат владельца магазина на закупку пакетов супа у поставщика (12.1) (см. рис. 11.2). Графически определите наиболее выгодный объем заказа, если суп отпускается упаковками по 90 шт.

Задача №5

Фирма может производить изделие или покупать его. Если фирма сама выпускает изделие, то каждый запуск его в производство обходится в 20 руб. Интенсивность производства составляет 120 шт. в день. Если изделие закупается, то затраты на осуществление заказа равны 15 руб. Затраты на содержание изделия в запасе независимо от того, закупается оно или производится, равны 2 коп. в день. Потребление изделия фирмой оценивается в 26 000 шт. в год.

Предполагая, что фирма работает без дефицита, определите, что выгоднее: закупать или производить изделие (в месяце 22 рабочих дня).

Организуйте поставку кефира в санаторий в течение одной санаторной смены, учитывая в затратах на УЗ (12.1) цену покупки кефира. Постройте график циклов изменения запаса кефира.

1 Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №1

Рассмотрите задачу №12.01 и определите оптимальный объем заказа и общие затраты на УЗ за *цикл изменения уровня запасов* для случаев, когда скидки предоставляются при размере заказа: 1) 30 шт.; 2) 5 шт.

Задача №.2

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 320$ шт./дн.; K=20 руб.;

s=2 руб./шт.*дн.; C=5 руб./шт.; $C_1 = 4$ руб./шт.; $C_2 = 3$ руб./шт.;

$Q_{p_1} = 500$ шт.; $Q_{p_2} = 700$ шт.

Задача №3

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 240$ шт./дн.; K=30 руб.;

s=3 руб./шт.*дн.; C=6 руб./шт.; $C_1 = 5$ руб./шт.; $C_2 = 3$ руб./шт.; $Q_{p_1} = 50$ шт.; $Q_{p_2} = 500$ шт.

Задача №4

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 0{,}460$ т/дн.; K=20 руб.; s=4,2 руб./т*дн.; C=10 руб./т; $C_1 = 7$ руб./т.; $C_2 = 3$ руб./т; $Q_{p_1} = 3$ т; $Q_{p_2} = 4$ т.

Задача №.5

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 0{,}850$ т/дн.; K=25 руб.; s=2,6 руб./т*дн.; C=12 руб./т; $C_1 = 9$ руб./т.; $C_2 = 5$ руб./т; $Q_{p_1} = 2$ т; $Q_{p_2} = 3$ т.

Задача №6

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 0{,}290$ т/дн.; K=30 руб.; s=5,6 руб./т*дн.; C=8 руб./т; $C_1 = 6$ руб./т.; $C_2 = 4$ руб./т; $Q_{p_1} = 2{,}5$ т; $Q_{p_2} = 4$ т.

Занятие 14, 15. Расчет основных показателей сетевого графика.

Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №8.1

Рассчитайте временные параметры событий и работ сетевых моделей задач №7.1–7.4, определите критические пути и их длительность.

Задача №8.2

Определите критические пути и указанные параметры работ в сетевой модели (рис.8.3): Rc(1,5), Rп(1,5), Tрн(5,7), Tпн(5,7), Tро(2,6), Tпн(3,6), Tро(4,7), Tпо(1,5), Tпн(1,5).

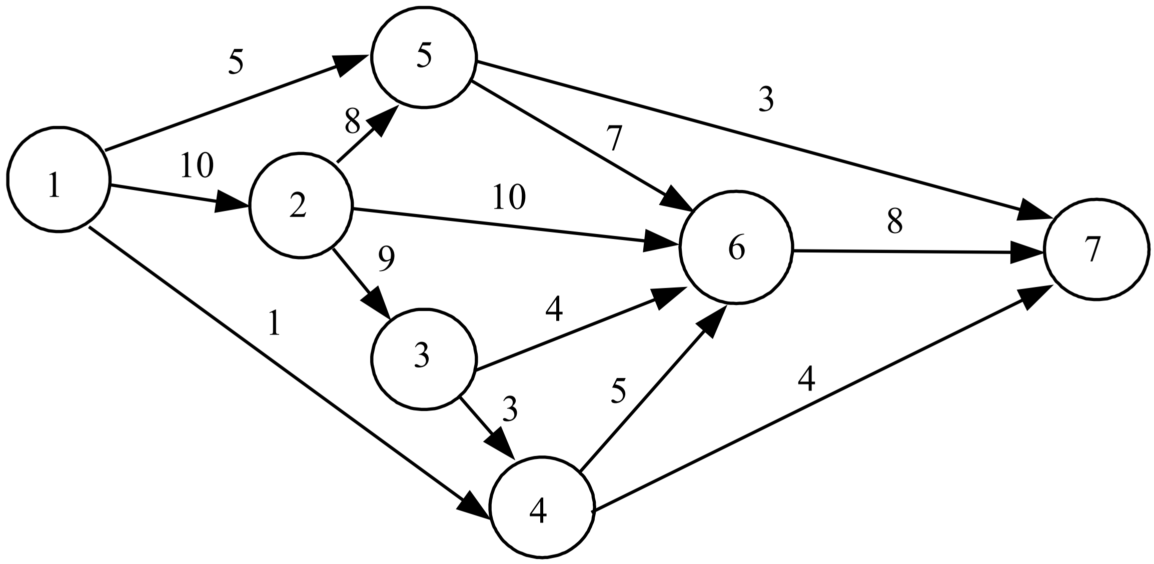


Рис.8.3. Сетевая модель задачи №8.2

Задача №8.3

Задание из задачи №8.2 для рис.8.4: Rc(1,3), Rп(1,2), Tро(3,7), Tрн(2,5), Tпн(1,6), Tпо(1,3), Tпн(4,5), Tро(1,4), Tпо(1,2).

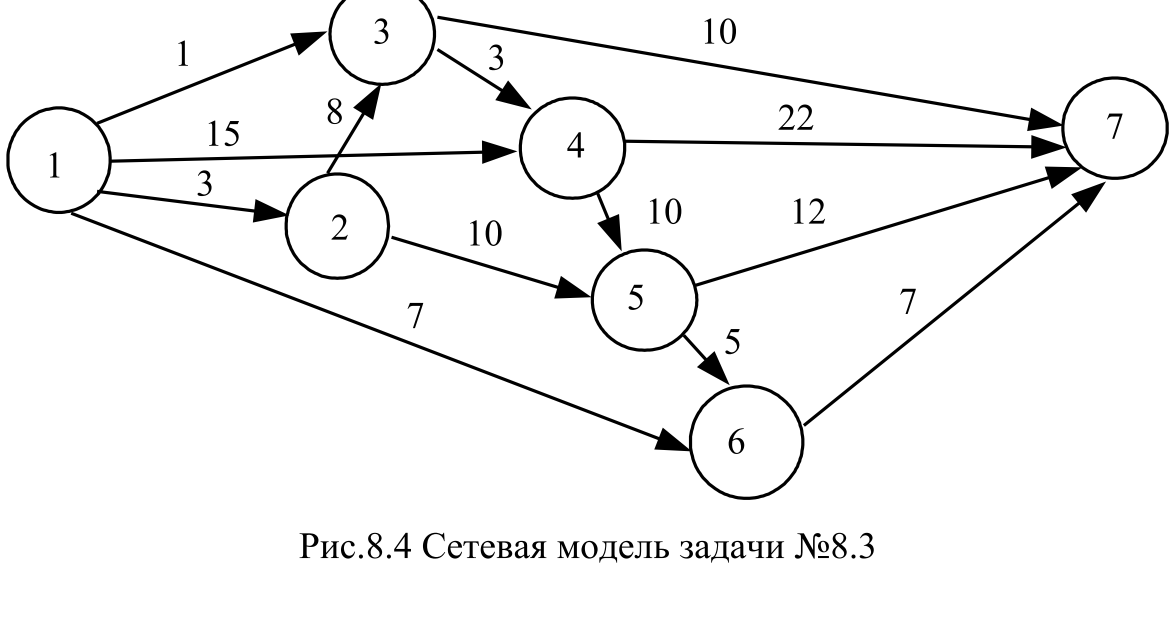


Рис.8.4 Сетевая модель задачи №8.3

Задача №8.4

Определите критические пути и указанные параметры работ в сетевой модели, полученной после *исправлений* в процессе решения задачи №7.6 (см. рис.7.8): Tрн(H), Rп(N), Tпн(F), Tпо(A), Rc(A), Tпн(M), Tро(M), Rп(A), Tро(G), Tпн(E), Rc(J), Tпн(G).

Задача №8.5

Проанализируйте, как повлияет на ход выполнения проекта, представленного на рис.8.3, одновременная задержка следующих работ: (1,5) – на 19 дней, (3,6) – на 3 дня..

Занятие 16, 17. Задачи и модели систем массового обслуживания

Задачи №1.

Дисплейный зал имеет 5 дисплеев. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих дисплейный зал за сутки, равно 140. Время обработки информации одним пользователем на одном дисплее распределено по показательному закону и составляет в среднем 40 минут. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пользователь застанет все дисплеи занятыми; среднее число пользователей в дисплейном зале; среднее число пользователей в очереди; среднее время ожидания свободного дисплея; среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале.

Для решения задач такого типа следует изучить раздел «Марковские системы массового обслуживания» [1, 3, 4, 7], познакомиться с классификацией СМО, показателями эффективности, параметрами и характеристиками СМО. Изучить решение задачи Эрланга, расчет показателей эффективности для различных типов СМО.

Решение. Рассматриваемая в задаче СМО относится к классу многоканальных систем с неограниченной очередью. Число каналов k =5. Найдем λинтенсивность потока заявок: $\lambda = \dfrac{1}{M[T]}$, где $M[T] = \dfrac{24}{140} \approx 0{,}17$ (час.) - среднее время между двумя последовательными заявками входящего потока пользователей. Тогда $\lambda = \dfrac{1}{0{,}17} \approx 5{,}85$ польз./час. Найдем μ -интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{M[Тообс.]}$, где М[Т обсл.]=40 мин=0,67 часа -среднее время обслуживания одного пользователя одним дисплеем, тогда $\mu = \dfrac{1}{0{,}67} \approx 1{,}49$ польз/час. Таким образом, классификатор данной системы имеет вид СМО (5, ∞; 5,85; 1,49).

Вычислим коэффициент загрузки СМО $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} \approx \dfrac{5{,}85}{1{,}49} \approx 3{,}93$. Известно, что для СМО такого класса стационарный режим существует, если отношение коэффициента загрузки системы к числу каналов меньше единицы. Находим это отношение

$$x = \frac{\rho}{k} = \frac{3{,}93}{5} \approx 0{,}79 < 1.$$

Следовательно, стационарный режим существует. Предельное распределение вероятностей состояний вычисляется по формулам

$$p_o = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{k \bullet k!} \bullet \frac{1}{1 - x}\right]^{-1};$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} \bullet p_o, \ i \in \{1, \ldots, k\}, \quad p_{k+r} = \frac{\rho^{k+r}}{k^r \bullet k!} \bullet p_0, \quad r \geq 1.$$

Поскольку k=5, имеем

$$p_o = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{5 \bullet 5!} \bullet \frac{1}{1-x}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{3{,}93}{1} + \frac{15{,}44}{2} + \frac{60{,}70}{6} + \frac{238{,}55}{24} + \frac{937{,}48}{120} + \frac{3684{,}30}{5 \bullet 120} \bullet \frac{1}{1-0{,}79}\right]^{-1} =$$

$$= [1 + 3{,}93 + 7{,}72 + 10{,}12 + 9{,}94 + 7{,}81 + 29{,}24]^{-1} = [69{,}76]^{-1} = 0{,}014.$$

Вычислим P_*- вероятность того, что пользователь застанет все дисплеи занятыми. Очевидно, она равна сумме вероятностей таких событий: все дисплеи заняты, очереди нет (p_5); все дисплеи заняты, один пользователь в очереди (p_6); все дисплеи заняты, два пользователя в очереди (p_7) и так далее. Поскольку для полной группы событий сумма вероятностей этих событий равна единице, то справедливо равенство

$$P_*=p_5+p_6+p_7+\ldots=1 - p_o - p_1 - p_2 - p_3 - p_4.$$

Найдем эти вероятности: p_o=0,014; p_1=3,93●0,014; p_2=7,72●0,014; p_3=10,12●0,014; p_4=9,94●0,014.

Вынося за скобки общий множитель, получим

$$P_*=1-0{,}014\bullet(1+3{,}93+7{,}72+10{,}12+9{,}94)=1-0{,}014\bullet 32{,}71=1-0{,}46=0{,}54.$$

Используя формулы для вычисления показателей эффективности [7, стр.41], найдем:

1) среднее число пользователей в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{k+1} \bullet p_o}{k \bullet k!(1-x)^2} = \frac{(3{,}93)^6 \bullet 0{,}014}{5 \bullet 5! \bullet (1-0{,}79)^2} \approx 1{,}95 \quad (\text{польз});$$

2) среднее число пользователей в дисплейном зале

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho \approx 1{,}95 + 3{,}93 \approx 5{,}88 \quad (\text{польз});$$

3) среднее время ожидания свободного дисплея

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx \frac{1{,}95}{5{,}85} \approx 0{,}33\,(\text{час}) \approx 20\,(\text{мин});$$

4) среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}}{\lambda} \approx \frac{5{,}88}{5{,}85} \approx 1{,}01\,(\text{час}) \approx 60{,}3\,(\text{мин}).$$

О т в е т : стационарный режим работы дисплейного зала существует и характеризуется следующими показателями P_*=0,54; $\bar{r}$ = 1,95 пользователя; $\bar{z}$ = 5,88 пользователя; $\bar{t}_{оч}$ = 20 мин; $\bar{t}_{сист}$ = 1 час.

Задачи для самостоятельного решения: № 32.1 - 32.12.

Занятие 18. Элементы теории игр.

Пример 3.1. Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается (прогнозируется), что он может принять одно из четырех значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. т. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Ниже приводится таблица, определяющая, возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей:

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Решение. Согласно условию задачи, имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: S_1, S_2, S_3, S_4. Известны также четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: R_1, R_2, R_3, R_4. Затраты на развитие провозных возможностей при каждой паре S_i и R_i заданы следующей матрицей (таблицей):

$$V = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline R_1 & 6 & 12 & 20 & 24 \\ R_2 & 9 & 7 & 9 & 28 \\ R_3 & 23 & 18 & 15 & 19 \\ R_4 & 27 & 24 & 21 & 15 \end{array}$$

Принцип Лапласа предполагает, что S_1, S_2, S_3, S_4 равновероятны. Следовательно, $P\{S = S_i\} = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25,\ \ i = 1{,}2{,}3{,}4$ и ожидаемые затраты при различных действиях R_1, R_2, R_3, R_4 составляют

$$W\{R_1\} = 0{,}25 \cdot (6 + 12 + 20 + 24) = 15{,}5;$$
$$W\{R_2\} = 0{,}25 \cdot (9 + 7 + 9 + 28) = 13{,}25;$$
$$W\{R_3\} = 0{,}25 \cdot (23 + 18 + 15 + 19) = 18{,}75;$$
$$W\{R_4\} = 0{,}25 \cdot (27 + 24 + 21 + 15) = 21{,}75.$$

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2.

Критерий Вальда (минимаксный или максимальный критерий)

Применение данного критерия не требует знания вероятностей состояний S_i. Этот критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j.

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max\limits_i \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j (строка j), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \min_j \max_i \{V_{ji}\} \qquad (3.8)$$

Если в исходной матрице по условию задачи результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *максиминный критерий.*

Для определения оптимальной стратегии R_j в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min_i \{V_{ji}\}$, а за тем выбирается действие R_j (строка j), которому будут соответствовать наибольшие элементы из этих наименьших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \max_j \min_i \{V_{ji}\} \qquad (3.9)$$

Пример3.2. Рассмотрим пример 1. Так как V_{ji} в этом примере представляет потери (затраты), применим минимаксный критерий. Необходимее результаты вычисления приведены в следующей таблице:

Состояние S_i Стратегия R_i	Затраты, д. е. (V_{ji})				$\max_i \{V_{ji}\}$	$W = \min_j \max_i \{V_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	6	12	20	24	24	–
R_2	9	7	9	28	28	–
$\boldsymbol{R_3}$	23	18	15	19	23	23
$\boldsymbol{R_4}$	27	24	21	15	27	–

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» будет третья, т.е. R_3.

Минимаксный критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». «Пессимистичность» этого критерия исправляет критерий Сэвиджа.

Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков $\|r_{ji}\|$. Элементы данной матрицы можно определить по формулам (3.2), (3.3), которые перепишем в следующем виде

$$r_{ji} = \begin{cases} \max\limits_{j}\{V_{ji}\} - V_{ji}, \textit{ если } V - \textit{выигрыш} \\ V_{ji} - \min\limits_{j}\{V_{ji}\}, \textit{ если } V - \textit{потери.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Это означает, что r_{ji} есть разность между наилучшим значением в столбце i и значениями V_{ji} при том же i. Отметим, что независимо от того, является ли V_{ji} доходом (выигрышем) или потерями (затратами), r_{ji} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решение. Следовательно, можно применять к r_{ji} только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Пример 3.3. Рассмотрим пример 3.1. Заданная матрица определяет потери (затраты). По формуле (5.10) вычислим элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$

$$\|r_{ji}\| = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline R_1 & 0 & 5 & 11 & 9 \\ R_2 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ R_3 & 17 & 11 & 6 & 4 \\ R_4 & 21 & 17 & 12 & 0 \end{array}$$

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа оформим в следующей таблице:

Состояние S_i / Стратегия R_i	Затраты, д. е. (V_{ji})				$\max\limits_{i}\{V_{ji}\}$	$W = \min\limits_{j}\max\limits_{i}\{V_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	5	11	9	11	11
R_2	3	0	0	13	13	–
R_3	17	11	6	19	17	–

R_4	21	17	12	0	21	–

Введение величины риска r_{ji} привело к выбору первой стратегии R_1, обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален)

Задача 2

АО «Силуэт» выпускает женскую одежду, которая реализуется через сеть фирменных магазинов. Сбыт продукции во многом зависит от состояния погоды (теплая, холодная). АО «Силуэт» занимается производством женской одежды двух видов- платьев и костюмов. Затраты на производство и реализацию единицы продукции составляют: костюмы — 270 руб., платья — 80 руб., а продажная цена - 480 и 160 руб. По данным наблюдений, АО может реализовать в течение мая в условиях теплой погоды 1200 костюмов и 3950 платьев, а при холодной погоде- 2000 костюмов и 1250 платьев. Требуется найти план выпуска, максимизирующий среднюю прибыль.

Решение. Задача состоит в максимизации средней величины прибыли от реализации выпущенной продукции с учетом капризов погоды. АО располагает в этих ситуациях двумя стратегиями: в расчете на теплую погоду (стратегия А); в расчете на холодную погоду (стратегия В).

Если АО примет стратегию А и погода будет теплой (стратегия природы С), то вся продукция будет реализована- значит, АО получит прибыль от реализации *П(АС):*

$$П(AC) = 1200 \cdot (480 - 270) + 3950 \cdot (160 - 80) = 568000 \text{ руб.}$$

Если АО примет стратегию А и погода будет холодной (стратегия природы Д), то костюмы будут проданы полностью, а платья - только в количестве 1250 шт. Прибыль АО в данном случае *П(АД)* составит:

$П(АД) = 1200 \cdot (480 - 270) + 1250 \cdot (160 - 80) - (3950 - 1250) \cdot 80 = 136000$

руб. Аналогичным образом можно определить прибыль предприятия в случае применения им стратегии В. В условиях теплой погоды (стратегия природы С) прибыль *П(ВС)* составит:

$П(ВС) = 1200 \cdot (480 - 270) + 1250 \cdot (160 - 80) - (2000 - 1200) \cdot 270 = 136000$ руб.

Принятие той же стратегии, но в условиях холодной погоды, позволит реализовать всю выпущенную продукцию, и прибыль *П(ВД)* в этом случае составит:

$П(ВД) = 2000 \cdot (480 - 270) + 1250 \cdot (160 - 80) = 520000$ руб.

Рассматривая АО «Силуэт» и природу в качестве двух игроков P_1 и P_2

получим по итогам произведенных расчетов так называемую платежную матрицу следующего вида

Игроки	*P/* (АО «Силуэт»)			
P_2 (природа)	стратегии	стратегия А	стратегия В	min по строкам
	стратегия С	568 000	136 000	136 000
	стратегия Д	136 000	520 000	136 000
	max	568 000	520 000	-

По данным платежной матрицы игрок P_1 (АО «Силуэт») никогда не получит прибыль меньше 136 000 руб. Если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то прибыль АО (выигрыш) будет составлять 568 000 или 520 000 руб. Если игрок P_1 будет постоянно принимать стратегию А, а игрок P_2 - стратегию Д, то прибыль снизится до 136 000 руб. То же самое будет, если игрок P_1 постоянно принимает стратегию В, а игрок P_2 - стратегию С. Следовательно, АО может обеспечить себе наибольшую прибыль, если будет попеременно

принимать то стратегию А, то стратегию В. Такая стратегия называется смешанной, а ее элементы (А и В) - чистыми стратегиями.

Найдем оптимальную стратегию АО:

$$X_1 = \frac{520000 - 136000}{568000 + 520000 - 136000 - 136000} = \frac{8}{17} \approx 0.47,$$

$$X_2 = \frac{568000 - 136000}{568000 + 520000 - 136000 - 136000} = \frac{9}{17} \approx 0.53.$$

При этом цена игры П(С) (средний выигрыш) будет составлять при теплой погоде (стратегия С, игрока $Р_2$)

$$П(С) = 568000 \cdot \frac{8}{17} + 136000 \cdot \frac{9}{17} = \frac{1}{17} \cdot (4544000 + 1224000) = \frac{1}{17} \cdot 5768000 = 339300$$

при холодной погоде (стратегия Д , игрок $Р_2$)

$$П(Д) = 136000 \cdot \frac{8}{17} + 520000 \cdot \frac{9}{17} = \frac{1}{17} \cdot (1088000 + 4680000) = \frac{1}{17} \cdot 5768000 = 339300\,руб.$$

В заключение следует определить, сколько платьев и сколько костюмов должно выпустить в мае АО «Силуэт» для реализации оптимальной смешанной стратегии, т.е. для получения максимальной прибыли при любой погоде.

$$(1200кост. + 3950плат.) \cdot \frac{8}{17} + (2000кост. + 1250плат.) \cdot \frac{9}{17} = \frac{1}{17} \cdot (9600кост. + 31600плат. +$$

$$+ 18000кост. + 11250плат.) = \frac{1}{17} \cdot (27600кост. + 42850плат.) = 1624кост. + 2520плат.$$

Значит, оптимальная стратегия АО «Силуэт» означает выпуск 1624 костюмов и 2520 платьев, в таком случае при любых погодных условиях АО получит среднюю прибыль $П_{ср}$ в сумме 339300 руб.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение апреля- мая на единицу продукции составят: платья $-n_1$ ден. ед. костюмы $-m_1$ ден. ед. Цена реализации составит n_2 ден. ед. и m_2 ден. ед. соответственно.

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды c_1 шт. платьев и d_1 шт. костюмов, при холодной погоде c_2 шт. платьев и d_2 шт. костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход.

Значения Варианты	n_1	n_2	m_1	m_2	c_1	c_2	d_1	d_2
1	5	25	10	36	1220	550	430	980

Задача 2. Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля $R_j = (j = 1,4)$. Определена экономическая эффективность V_{ij} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_{ij} (i=l,3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице (ден. ед.) Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при α =0,1. Сравните решение и сделайте выводы.

1.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	10
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

2.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	27	25	18
R_2	28	24	10
R_3	15	24	12
R_4	9	30	26

9. Примерные задания для контрольных и расчетно-графических работ.

Контрольная 1.

1.Заданы функции полного дохода $R= -2q^2+14q$ и полных издержек $C= 4q+8$, где q – количество проданного товара. Определить границы прибыльности производства q_1 и q_2 , и точку q_0 , в которой прибыль достигает максимального значения.

2.Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y – соответственно объемы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функции издержек заводов имеют вид: $C_1(x) = 1/7x^2 - 10x + 500$, $C_2(y) = 1/3y^2 - 20y + 750$.

3. Производственная функция имеет вид Q= f(K,L), где Q- выпуск продукции в единицу времени, K- капитал, L – труд. Затраты на единицу капитала и труда составляют соответственно a и b, а общая сумма затрат равна c. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу двумя способами: методом подстановки и методом множителей Лагранжа.

$Q=5L^2+18LK$, $a=6$, $b=5$, $c=240$.

Контрольная 2.

Решить графическим методом

$$L(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge \grave{}6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$L(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений.

Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум и почему?

2. На имеющихся у фермера 400 гектарах земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требует на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед.. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.

Фермеру хотелось бы знать, сколько гектар нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

Контрольная 3.

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I II III	1 1 1	2 1 3	1 2 3	0 1 2	18 30 40
Цена изделия	12	7	18	10	

Требуется:

1) Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
2) Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.
3) Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4) На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и II вида на 4 и 3 единицы соответственно и уменьшении на 3 единицы сырья III вида;
- оценить целесообразность включения в план изделий "Д" ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Контрольная 4.

На предприятии производятся **m** видов пищевых продуктов, при этом используется оборудование **n** типов. Известны следующие данные о производственном процессе:

•суточная производительность оборудования по каждому виду продукции (λ_{ij}), т/сутки;

•себестоимость производства продукции (c_{ij}), руб./т;

•фонды рабочего времени оборудования (a_i), сутки;

•планируемый объем выпуска продукции (b_j), т;

•m – количество строк, n – количество столбцов в матрицах (λ_{ij}) и (λ_{ij}).

Требуется распределить выпуск продукции по оборудованию с целью минимизации общей себестоимости производства.

Вариант 1

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 3 \\ 12 & 28 & 16 & 8 \\ 6 & 14 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \ (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(a_i) = (320, 115, 240); \ (b_j) = (1320, 2324, 864, 384).$$

Расчетно - графическая 1.

Вариант 1

1. Решить следующие задачи линейного программирования графическим методом

1. $L = 3x_1 - x_2 + 6 \to \max(\min);$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 10 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $L = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min);$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить задачу линейного программирования с n переменными графическим методом

$L = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max(\min);$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

3. Решить задачи линейного программирования симплекс-методом. Результаты проверить графическим методом.

1. $f(X) = 10x_1 + 5x_2$

$2x_1 - 3x_2 \le 6$

$x_1 + 2x_2 \ge 4$

$4x_1 + x_2 \ge 1$

$x_{1,2} \ge 0$

2. $f(X) = 3x_1 + 5x_2$

$x_1 + 5x_2 \ge 5$

$3x_1 - x_2 \le 3$

$2x_1 - 3x_2 \ge -6$

$x_{1,2} \ge 0$

4. Решить задачи.

1. Требуется купить акварельной краски по цене 30 д.е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д.е. за коробку, линейки по цене 12 д.е., блокноты по цене 10 д.е. Красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов – столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупку выделяется не менее 300 д.е. В каком количестве требуется купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наибольшим?

2. Используйте аппарат теории двойственности для экономико-математического анализа оптимального плана ЗЛП.

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

При решении задачи на максимум общей стоимости выпускаемой продукции (вся готовая продукция реализуется) были получены следующие результаты: $X_1 = 18$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 11$.

Требуется:

1) сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости выпускаемой продукции, пояснить нулевые значения X_2, X_3;
2) сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план;
3) проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане;
4) определить, как изменятся общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и II вида на 4 и 3 ед. соответственно и уменьшении на 3 ед. сырья III вида;
5) определить целесообразность включения в план изделий «Д» ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Расчетно - графическая 2.

Задача 1. Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью a_1; a_2 и a_3 млн. галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет b_1; b_2 и b_3 млн. галлонов. Бензин транспортируется в бензохранилища по трубопроводу. Стоимость перекачки бензина на 1 км составляет c д. е. на 100 галлонов. Завод 1 не связан с хранилищем 3. Расстояние от заводов до бензохранилищ следующее:

№ завода	Бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	–
2	420	180	60
3	200	280	120

Сформулируйте следующую транспортную задачу и решите на минимум транспортных затрат.

Пусть производительность нефтеперерабатывающего завода 1 снизилась до d млн. галлонов. Кроме того, обязательно полное удовлетворение спроса бензохранилища 2. Недопоставки в хранилища 1 и 3 штрафуются на сумму S д. е. за каждый галлон.

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и решите на минимум издержек.

№ варианта	Переменные								
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c	d	S
1	10	6	6	7	6	9	5	8	8

Задачи 2. Компания, занимающаяся ремонтом автомобильных дорог, в следующем месяце будет проводить ремонтные работы на пяти участках автодорог. Песок на участки ремонтных работ может доставляться из трех карьеров, месячные объемы предложений по карьерам известны. Из планов производства ремонтных работ известны месячные объемы потребностей по участкам работ. Имеются экономические оценки транспортных затрат (в у.е.) на перевозку 1тонны песка с карьеров на ремонтные участки.

Числовые данные для решения содержатся ниже в матрице планирования (повариантно).

Требуется:

1) Предложить план перевозок песка на участки ремонта автодорог, который обеспечивает минимальные совокупные транспортные издержки.

2) Что произойдет с оптимальным планом, если изменятся условия перевозок: а) появится запрет на перевозки от первого карьера до второго участка работ?; б) по этой коммуникации будет ограничен объем перевозок 3 тоннами?

2.1. Матрица планирования:

Участки работ / Карьеры	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Предложение
A_1	5	3	4	6	4	40
A_2	3	4	10	5	7	20
A_3	4	6	9	3	4	40
Потребности	25	10	20	30	15	

Расчетно - графическая 3.

Задание 1. Определите верхнюю и нижнюю цену игры и наличие седловой точки:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 10 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение апреля- мая на единицу продукции составят: платья $-n_1$ ден. ед. костюмы $-m_1$ ден. ед. Цена реализации составит n_2 ден. ед. и m_2 ден. ед. соответственно.

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды c_1 шт. платьев и d_1 шт. костюмов, при холодной погоде c_2 шт. платьев и d_2 шт. костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей масимальный доход.

Значения Варианты	n_1	n_2	m_1	m_2	c_1	c_2	d_1	d_2
1	5	25	10	36	1220	550	430	980

Задача 3.Определите тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры:

R_1 - сооружается гидростанция;

R_2 - сооружается теплостанция;

R_3 - сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы S_i (i= 1,5).

Результаты расчета экономической эффективности приведены в следующей таблице:

Вариант 1.

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	40	60	30	25	45
R_2	55	50	65	60	30
R_3	50	30	40	35	60

Вариант 2.

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	40	40	60	25	45
R_2	20	50	45	20	30
R_3	50	30	40	35	50

Задача 4.

По данным таблицы необходимо:

1. Построить сетевой график и его линейную диаграмму.
2. Определить временные характеристики работ и событий.
3. Определить критический путь и его длину.
4. Определить коэффициенты напряженности работ.

При выписывании данных задачи подставьте вместо n номер своего варианта и полученное число округлите до целого.

Работа	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(5,6)
Длитель-ность	$4+\frac{n}{2}$	$4+\frac{n}{3}$	$12+\frac{n}{4}$	$6+\frac{n}{5}$	$7+\frac{n}{6}$	$10+\frac{n}{3}$	$24+\frac{n}{8}$	$10+\frac{n}{2}$	$3+\frac{n}{5}$

11. Экзаменационные вопросы

Экономико-математические методы.

1. Понятие модели и моделирование.
2. Элементы и этапы процесса моделирования.
3. Формы моделирования.
4. Особенности математического моделирования экономических объектов.
5. Производственно-технологический и социально-экономический уровни
6. экономико-математического моделирования.
7. Случайность и неопределённость в экономико-математическом моделировании.
8. Классификация моделей в экономике. Признаки классификации.
9. Теоретико-аналитические и прикладные модели.
10. Детерминистские и стохастические модели.
11. Статистические и динамические модели.
12. Открытые и замкнутые модели.
13. Макро и микроэкономические модели.
14. Задача математического программирования в общем виде.
15. Виды ограничений и множеств допустимых значений.
16. Целевая функция задачи математического программирования.
17. Классификация задач математического программирования.
18. Функция Лагранжа. Седловая точка функции Лагранжа.
19. Задача оптимизации плана выпуска готовой продукции.
20. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования
21. Стандартная и каноническая формы представления задач линейного программирования.
22. Геометрическая интерпретация Симплекс – метод. Симплексные таблицы.
23. Экономическая интерпретация элементов симплексной таблицы.

24. Двойственные задачи и методы.
25. Экономическая интерпретация и свойства двойственных оценок в производственных задачах.
26. Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи.
27. Потенциалы, их экономический смысл.
28. Метод потенциалов.
29. Основные способы построения начального опорного решения.
30. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.
31. Примеры целочисленных моделей.
32. Метод Гомори.
33. Метод ветвей и границ.
34. Постановка задачи о коммивояжере. Решение её методом ветвей и границ
35. Понятие динамического программирования.
36. Принцип поэтапного построения оптимального управления.
37. Простейшие экономические задачи, решаемые методом динамического программирования.
38. Дробно-линейное программирование.
39. Элементы теории графов. Основные понятия и определения.
40. Задание графов. Плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы
41. графы.
42. Системы массового обслуживания и их классификация.
43. Основные понятия: поток, очередь, канал обслуживания.
44. Показатели эффективности систем массового обслуживания.
45. Простейший поток и его свойства.
46. Система дифференциальных уравнений для потока и её решение.
47. Системы массового обслуживания с Марковскими потоками состояний.
48. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики.
49. Основные понятия: работы, события, сетевой график.
50. Правила построения сетевых графиков, нумерация событий.
51. Основные показатели сетевых графиков: критический путь и его продолжительность, времени событий и работ.

52.Понятия межотраслевого баланса(МОБ).
53.Схема и модель межотраслевого баланса производства и распределения продукции.
54.Общая схема МОБ.
55.Основные балансовые соотношения.
56.Система управлений МОБ, её анализ.
57.Определения равновесного выпуска и равновесных цен.
58. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат, их экономический смысл
59.Матричный мультипликатор Леонтьева.
60.Коэффициенты полных затрат ресурсов, коэффициенты прямых затрат труда и фондов. Плановые расчёты на основе МОБ.
61.Необходимость моделирования управления запасами.
62.Модели управления запасами.
63.Управляемые переменные.
64.Целевая функция модели.
65.Оптимизация запасов в простейших моделях.
66.Основные понятия и определения.
67.Классификация игр и методов решения игровых задач.
68.Оптимальность в антагонистических играх.
69.Принцип максимина.
70.Нижнее значение игры.
71.Принцип минимакса.
72.Верхнее значение игры.
73.Ситуация равновесия в чистых стратегиях.
74.Седловая точка. Значение игры.
75.Смешанные стратегии.
76.Существования минимаксов в смешанных стратегиях.
77.Решение игры “2*2”, графический метод решения игры “2*2”.
78.Графоаналитический метод решение игр “2*n”, “m*2”.
79.Способы редуцирования игр “m*n”.
80.Доминирование стратегий.

81.Матричные игры и линейное программирование.

12. Образцы экзаменационных билетов.

Билет 1

1. Правило построения двойственной задачи, математическая запись. Теоремы двойственности и их использование для анализа оптимальных решений

2.Назначение и область применения сетевых моделей. Основные элементы сетевой модели

Задача 1. Использовать аппарат теории двойственности для экономико-математического анализа оптимального плана задачи линейного программирования.

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Требуется: Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и II вида на 4 и 3 единицы соответственно и уменьшении на 3 единицы сырья III вида;

оценить целесообразность включения в план изделий "Д" ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Задача 2.

Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объём заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:

Таблица тарифов на перевозку продукции и объёмов запасов на складе и заказов:

Магазин Склад	ВДНХ	Юго-Западная	Фили	Арбат-ская	Сокольники	Запасы на складе (ед.прод)
Пролетарская	10	8	3	15	16	60
Митино	7	5	9	4	6	30
Строгино	2	0	14	5	20	40
Объём заказа (ед.прод)	10	20	40	30	65	

Литература

Основная:

1. **Высшая математика для** экономистов [Текст] : учебник для вузов: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1998, 2002, 2003, 2004, 2000. - 472
2. **Высшая математика для** экономистов [Текст] : учеб. пособие / Ред. Н.Ш. Кремер. - М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1997. - 440 с.
3. **Красс, Максим Семенович**. Математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. - 464 с.
4. **Красс, Максим Семенович**. Основы математики и её приложения в экономическом образовании [Текст] : учеб.: рек. Мин. обр. РФ / Красс М.С., Чупрынов Б.П. - 2- изд., испр., 4-е изд., испр.3-е изд., испр. . - М. : Дело, 2001, 2003, 2002. - 688 с.
5. **Красс, Максим Семенович**. Математика для экономических специальностей [Текст] :учебник для вузов: Рек. Мин. обр. РФ / Красс М.С. - М. :Инфра-М, 1999, 1998. - 464 с.
6. **Математика в экономике** [Текст] : в 2-х ч.: учеб.: рек. Мин. обр. РФ / А. С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2005 -

   Ч. 1. - 2005. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 375.

   Ч. 2. - 2005. - 560 с. - Библиогр.: с. 374.
7. **Общий курс высшей** математики для экономистов [Текст] : учебник для вузов.:Рек. Мин. обр. РФ / Ред.Ермаков В.И. - М. : ИНФРА-М, 2000, 2001. - 656 с
8. **Практикум по высшей** математике для экономистов [Текст] : учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002, 2003, 2004. - 424 с.

Дополнительная:

9. **Малыхин В.И.** Математическое моделирование экономики - М.: УРАО,1998.- 160 с.
10. **Замков О.О**. Математические методы в экономике / О.О.Замков, А.В.Толстопятенко, Ю.Н.Черемных. – М.: МГУ,ДИС, 1998. – 365с
11. **Исследование операции в экономике** [Текст] под ред. Н.Ш. Кремера, М, " Банки и биржи", 1997 г.
12. **Москинова Г.И.** " Дискретная математика", М. " Логос", 2000 г.
13. **Фомин Г.П.** " Методы и модели линейного программирования", М. " Финансы и статистика", 2000 г.
14. **Колемаев В.А. , Калинина В.Н.** Теория вероятности и математическая статистика.- Москва.: ИнФРА-М,1997.
15. **Фомин Г.П.** " Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности", М.ф. и ст., 2000 г.
16. **Федосеев В.В., Эрношвили Н.Д.** " Экономико-математические методы и модели в экономике", М., " Юнити", 2001 г.
17. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа - Москва.: Наука.
18. **Методические разработки кафедры ОМиИ**.

Содержание