Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУ ВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
______________Г. В. Литовка
«_____»_____________2007 г.

МАТЕМАТИКА

Часть 2

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ
для специальностей:
080102, 080105, 080109, 080502, 080504, 080507, 080111

Составители: Г. Н. Торопчина,
Г. П. Вохминцева

Благовещенск 2007г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Г. Н. Торопчина, Г.П. Вохминцева
Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математика» для студентов очной формы обучения для специальностей: 080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007. – 197с.

Учебно-методический комплекс ориентирован на оказание помощи студентам очной формы обучения по специальностям: 080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111 при изучении курса математики.

Пояснительная записка

Роль математики в подготовке специалиста в области экономики.

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине “Математика” (Часть вторая) предназначен для студентов первого курса экономических специальностей.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Хороший специалист в области экономики, будучи, прежде всего практиком, должен уметь выявлять конкретные количественные закономерности и взаимосвязи экономических объектов и процессов и описывать их с помощью математических методов и моделей. Возможности экономиста, качество его работы зависит не только от того, в какой степени модель отражает объективные закономерности, но и от того, насколько адекватно и грамотно он применяет математические методы исследования.

Современная экономическая наука немыслима без построения многофакторных моделей экономической динамики, моделей оптимального управления, моделей, использующих деловые игры и исследование операций для выбора наилучших альтернатив при обосновании стратегических и оперативных решений. Подобные модели включают комплекс из многих сотен уравнений и тождеств: они могут быть линейными и нелинейными, непрерывными и дискретными, детерминированными и вероятностными.

Из выше изложенного видна необходимость высокой математической подготовки специалистов: экономистов коммерческой деятельности, экономистов банковской и страховой деятельности, менеджеров, бухгалтеров и т. д.
Учебно-методический комплекс разработан в помощь студентам первого курса и включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному стандарту, учебную программу, тематический

план занятий, методические указания, вопросы и тесты для контроля, образцы контрольных и расчетно-графических работ, экзаменационных билетов, методику оценки знаний, рекомендуемую литературу.

1.2 Задачи курса

Задачами преподавания математики как фундаментальной дисциплины являются:

- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- выработка умения моделировать реальные экономические процессы;
- освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач;
- овладение численными методами решения и их реализацией на компьютере.

Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование – важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

1.3. Требования к уровню освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины будущий специалист должен:

- иметь представление о математике как особом способе познания мира, об общности и универсальности ее понятий и представлений;
- уметь использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- иметь представление о математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и доказательствах;
- знать методы и приемы обработки количественной информации;
- владеть способами наглядного графического представления результатов исследования;
- иметь понятие о математическом моделировании финансово-экономических процессов с учетом их стохастического характера;
- иметь навыки исследования моделей и оценки пределов применимости полученных результатов.

2. Государственные стандарты курса учебной дисциплины «Математика»

СПЕЦИАЛЬНОСТИ: 080105, 080102, 080109.

Операции над векторами и матрицами; системы линейных алгебраических уравнений; определители и их свойства; собственные значения матриц; неопределенный и определенный интегралы; числовые и степенные ряды; дифференциальные уравнения первого порядка; линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

СПЕЦИАЛЬНОСТИ: 080111, 080507, 080502, 080504

По специальности 080504 - "Государственное и муниципальное управление"

Линейная алгебра. Определители. Системы векторов, ранг матрицы. N – мерное линейное векторное пространство. Линейные операторы и матрицы. Собственные векторы линейных операторов. Евклидово пространство. Квадратичные формы. Неопределенный интеграл. Несобственные интегралы

По специальности 080507 - "Менеджмент организации"

Неопределенный интеграл. Несобственные интегралы.
Линейная алгебра. Системы линейных уравнений. Определители. Системы векторов, ранг матрицы. N – мерное линейное векторное пространство. Линейные операторы и матрицы. Собственные векторы линейных операторов. Евклидово пространство. Квадратичные формы

По специальности 080111 - "Маркетинг"

Интегральное исчисления. Векторный анализ и элементы теории поля.

Гармонический анализ. Дифференциальные уравнения. Численные методы.

По специальности 080502 **- "Экономика и управление на предприятии "**

Линейная алгебра. Интегральное исчисления. Ряды. Дифференциальные уравнения.

3. *Содержание курса*

Раздел 1. Основы алгебры.

Тема 1. Матрицы.

Матрицы и операции над ними. Основные свойства операции над матрицами.

Тема 2. Определители.

Определители квадратных матриц: определения и основные свойства. Вычисление определителя.

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений: определение, примеры. Свойства систем уравнений: совместимость, несовместимость, определённость. Частные и общие решения. Эквивалентность систем; элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем. Однородные неоднородные системы линейных уравнений. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем. Структура общего решения неоднородной системы.

Тема 4. Методы решения систем линейных уравнений.

Решение систем методом Гаусса, по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы.

Тема 5. Векторное пространство и линейные преобразования.

Векторное пространство: определение и примеры. Линейно зависимые системы векторов и их свойства. Базис линейного пространства. Теорема о ранге и её следствия. Размерность линейного пространства. Подпространства. Теорема Кронекера − Капелли. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений. Формула для общего решения неоднородной системы линейных уравнений. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Тема 6. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Использование алгебры матриц. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Линейная модель торговли.

Раздел 2. Интегральное исчисление.

Тема 1. Первообразная функция и неопределённый интеграл. Первообразная: определения, примеры. Теорема об общем виде всех первообразной данной функции. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов. Методы интегрирования по частям и заменой переменных. Методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Тема 2. Определённый интеграл.

Понятие об определённом интеграле. Свойства определённого интеграла. Теорема о существовании определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной. Интегрирование по частям. Несобственный интеграл. Приближённое вычисление определённых интегралов.

Тема 3. Интегралы по фигуре от скалярных функций.

Понятие о кратных (двойных и тройных) интегралах. Вычисление кратных интегралов. Сведение их к повторным.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения.

Тема 1. Основные понятия.

Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Тема 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Различные виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделяющимися переменными, однородные линейные уравнения.

Тема 3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Уравнения второго порядка, решаемые понижением порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Приложение к описанию линейных моделей в экономике.

Раздел 4. **Системы обыкновенных дифференциальных уравнений**

Тема 1. Общие понятия.

Нормальная система дифференциальных уравнений. Автономные системы. Векторная запись нормальной системы. Геометрический смысл решения. Фазовое пространство (плоскость), фазовая кривая. Приложения в моделировании экономических процессов.

Тема 2Решение нормальной системы дифференциальных уравнений.

Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений, свойства решений. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Раздел 5. Ряды.

Тема 1. Числовые ряды.

Понятие о числовом ряде. Примеры числовых рядов: бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, обобщённый гармонический ряд. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признак сравнения, признак Даламбера. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

Тема 2. Степенные ряды.

Понятие о функциональном ряде. Степенной ряд. Интервал сходимости степенного ряда. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Разложение функции в степенные ряды. Ряд Маклорена. Применение ряда

Маклорена к разложению в степенные ряды некоторых функций. Применение рядов к приближённым вычислениям. Ряд Тейлора, экономические приложения.

4. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ ПО ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

1 Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

2. Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические экономические и управленческие задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно решить задачу несколькими возможными способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

3. Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

4. Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими.

Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

5. Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

6. Расчетно – графические работы.

1. При изучении дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд расчетно – графические работы, главная цель которых — оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное исправление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до изучения теоретического материала, соответствующего данному заданию, и решения достаточного количества задач по этому материалу. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Расчетные работы должны выполняться самостоятельно. Выполненная не самостоятельно работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Расчетно-графические работы выполняются аккуратно на одной стороне листа стандартного формата А4 либо рукописным способом, либо компьютерным (для компьютерного оформления работы рекомендуется использование пакета Microsoft Word). В любом случае необходимо приложение необходимых распечаток результатов работы компьютерных программ, которые требовалось использовать при выполнении заданий. Графики строятся либо при помощи компьютера (рекомендуется использование пакета Microsoft Excel), либо от руки (черными или цветными карандашами средней твердости на обычной или миллиметровой бумаге). Листы с текстом заданий и графики должны быть сшиты.

4. В работу должны быть включены все требуемые задания строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.

6. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.

7. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

8. Работа сдается преподавателю до защиты для проверки. При указании рецензента на требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений. На защите студент должен показать умение ставить и исследовать конкретные финансовые задачи, которые он решал при выполнении контрольных заданий.

9. Прорецензированные контрольные задания вместе со всеми исправлениями и добавлениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированного контрольного задания студент не допускается к сдаче экзамена.

10. Контрольные задания настоящего семестра, приведенные в действующей программе дисциплины, повторены в разделе 3, а конкретные методические указания к их выполнению — в разделе 4.

7. Лекции и практические занятия

Студенты очной формы обучения изучают дисциплину «Математика» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (2 ч. лекций и 2 ч. практических занятий в неделю для студентов очной формы обучения и по одному часу — для студентов, обучающихся по заочной форме). После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Если для студентов очной лекции и практические занятия являются основной формой обучения и на них подробно рассматривается большая часть теоретического материала и разбирается большое количество задач, то студент эти виды работ должен выполнять самостоятельно.

Вместе с тем, для заочников организуются установочные лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель — обратить внимание на цели и задачи дисциплины, ее место в профессиональной деятельности специалиста, заинтересовать студента изучением дисциплины, обратить внимание на схему построения курса или некоторых его наиболее важных разделов. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

8. Экзамен

На экзамене выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Экзамен проводится в устно-письменной форме, каждый студент получает в билете три теоретических вопроса (их список приведен в разделе 5) и 6 задач. Подготовку к ответу на билет следует начинать с решения задачи, так успешное решение задачи является наиболее важным при сдаче экзамена; без ее решения работа студента признается неудовлетворительной. Затем следует подробно ответить на теоретические вопросы билета. На подготовку теоретических вопроса студенту дается не более 1 ч. На решения задач 1,5ч.

После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

9.Методика формирования результирующей оценки знаний по математике

1. Результирующая оценка (Р) учитывает работу студента в течение всего периода изучения дисциплины.

2. Результирующая оценка получается на основе обобщения (интеграции) оценок отдельных аспектов работы студентов: работа в течение семестра (С), экзаменационная оценка за ответы по теории (Т), экзаменационная оценка за выполнение практических заданий (П).

3. Все оценки выставляются по 5-балльной шкале.

4. По каждому аспекту оценивания формулируется система критериев, позволяющая содержательно обосновать каждую градацию 5-балльной шкалы.

5. Для оценки относительной важности отдельных видов контроля вводятся их весовые коэффициенты:

- 0,4 – для оценки работы в течение семестра;
- 0,4 – для экзаменационной оценки за теорию;
- 0,2 – для экзаменационной оценки по практике.

6. Находится средневзвешенная оценка частных оценок с учетом их весов, которая округляется до целых единиц.

Пример: а) Если С=5; Т=5; П=5, то Р=0,4·5+0,4·5+0,2·5=5;

б) Если С=3,5; Т=2,5; П=3, то Р=0,4·3,5+0,4·2,5+0,2·3=3.

5. Темы лекций.

Лекция 1. Линейная алгебра. Основные определения.

Лекция 2. Обратная матрица. Базисный минор матрицы. Ранг матрицы. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Лекция 3. Метод Крамера. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса.

Лекция 4. Элементы векторной алгебры.

Лекция 5. Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике. Модель равновесных цен. Линейная модель торговли.

Лекция 6. Интегральное исчисление. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.

Лекция 7. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций.

Лекция 8. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Лекция 9. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.

Лекция 10.Несобственные интегралы. Геометрические приложения определенного интеграла. Кратные интегралы.

Лекция 11.Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Лекция 12. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Лекция 13. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

Лекция 14.Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Лекция 15. Ряды. Основные определения. Ряды с неотрицательными членами.

Лекция 16. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Функциональные ряды.

Лекция 17. Степенные ряды. Действия со степенными рядами Разложение функций в степенные ряды. Формула Тейлора.

Лекция 18. Представление некоторых элементарных функций по формуле Тейлора. Разложение функций в степенные ряды.

6. Календарный план занятий по математике в I семестре

№ нед.	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Контроль
1	Линейная алгебра. Основные определения.	Матрицы и операции над ними		Выдача РГР №1 Линейная алгебра.
2	Обратная матрица. Базисный минор матрицы. Ранг матрицы. Матричный метод решения систем линейных уравнений	Определители и их свойства, вычисление. Формулы Крамера.	Решение систем уравнении Метод Крамера. Метод Гаусса.	
3	Метод Крамера. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса.	Решение экономических задач	Матричный метод решения систем линейных уравнений.	К.Р. (30 мин.)
4	Элементы векторной алгебры.	Системы линейных уравнений	Однородные системы уравнений	
5	Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике. Модель равновесных цен. Линейная модель торговли.	Непосредственное интегрирование	Дифференцирование сложных функций.	
6	Интегральное исчисление. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.	Интегрирования рациональных функций	Выполнение РГР и Д.З.	
7	Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций.	Интегрирования иррациональных функций	Изучение теории, выполнение РГР и Д.З.	К.Р. (30мин.)
8	Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций	Интегрирования тригонометрических функций	Выполнение РГР	Коловиквиум по теме: “Введение в анализ”

9	Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.	Методы вычисления определенного интеграла	Приближенные вычисления определенных интегралов.	
10	Несобственные интегралы. Геометрические приложения определенного интеграла. Кратные интегралы.	Геометрические приложения определенного интеграла	Несобственные интегралы.	К.Р. (40мин.).
11	Обыкновенные дифференциальные уравнения.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	Выполнение Д.З.	Защита РГР №1. Выдача РГР №2
12	Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	Дифференциальные уравнения, допускающие понижения	Выполнение РГР №2	К.Р. (40 мин.).
13	Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	Выполнение РГР №2	Защита РГР №2. Выдача РГР №3
14	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.	Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Контрольные задания	Выполнение РГР №3	
15	Ряды. Основные определения. Ряды с неотрицательными членами.	Признаки сходимости рядов с положительными членами.	Выполнение РГР №3	
16	Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды.	Сходимость рядов с членами произ-	Изучение материала и вы-	

	Функциональные ряды	вольного знака Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора Маклорена.	полнение Д.З. и РГР	
17	Степенные ряды. Действия со степенными рядами Разложение функций в степенные ряды. Формула Тейлора	Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора Маклорена.	Выполнение Д.З. и РГР	Защита РГР №3.
18	Представление некоторых элементарных функций по формуле Тейлора Разложение функций в степенные ряды.	Применение рядов в приближенных вычислениях		

Конспект лекций

Лекция 1. Линейная алгебра. Основные определения.

Определение. **Матрицей** размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

<u>Определение.</u> Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

<u>Определение.</u> Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

<u>Пример.</u> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

<u>Определение.</u> Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha\pm\beta) = \alpha A \pm \beta A.$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам: $A \cdot B = C$;

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \ .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$A \cdot O = O$; $O \cdot A = O$, где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство: $(AB)C=A(BC)$.

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

5) Если определено произведение AB , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство: $(AB)^T = B^T A^T$, где
индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц
$\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

<u>Определение</u>. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что: $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

<u>Определители.</u>(детерминанты).

<u>**Определение.**</u> **Определителем** квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$, где

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу: $\det\ A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}M_{ik}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число $M_{1к}$ называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. **Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение: $\det A = \det A^T$;

Свойство 2. $\det(A \pm B) = \det A \pm \det B$.

Свойство 3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

<u>Свойство 6.</u> Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

<u>Свойство 7.</u> Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

<u>Свойство 8.</u> Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

<u>Пример:</u>. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2;   det B = 15 – 2 = 13;   det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 – 152 = -26.

<u>Элементарные преобразования матрицы</u>.

<u>Определение.</u> Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5) <u>транспонирование</u>;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы.

Определение. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами* $i_1, \ldots, i_s$*, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Лекция 2. Обратная матрица. Базисный минор матрицы. Ранг матрицы.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11}=4; \quad M_{12}= 3; \quad M_{21}= 2; \quad M_{22}=1$$

$$x_{11}= -2; \quad x_{12}= 1; \quad x_{21}= 3/2; \quad x_{22}= -1/2$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$; 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

<u>Базисный минор матрицы. Ранг матрицы.</u>

<u>Определение.</u> В матрице порядка $m\times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

<u>Определение.</u> Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством <u>элементарных преобразований</u> матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

<u>Определение.</u> Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эививалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

<u>Теорема.</u> *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{RgA} = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема. *В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если А- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать: $A \cdot X = B$.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$
$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$$
$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Лекция 3 Метод Крамера. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса.

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0. $\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$ *Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.*

Решение произвольных систем линейных уравнений.

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

<u>Определение.</u> Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

<u>Определение.</u> Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

<u>Определение.</u> Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

<u>Определение.</u> Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

<u>Определение.</u> Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

<u>Элементарные преобразования систем.</u>

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Теорема Кронекера – Капелли.

(условие совместности системы)

Теорема: Система *совместна* (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда *ранг* матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

$$RgA = RgA^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы А, а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \to A^*$ не изменяют ранга.

2) Если $RgA = RgA^*$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, те верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 \quad RgA = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \qquad RgA^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad RgA = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad RgA^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Метод Гаусса.

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2;\ x_2 = 5;\ x_1 = 1.$$

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } z = 3;\ y = 2;\ x = 1.$$

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

Лекция 4. Элементы векторной алгебры.

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

<u>Определение.</u> Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\, \vec{a}$; $\quad \left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

<u>Свойства векторов.</u>

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

<u>Определение.</u>

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

<u>Определение.</u> Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\vec{e_1} + \beta\,\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}) = (\lambda\alpha)\vec{e_1} + (\lambda\beta)\,\vec{e_2} + (\lambda\gamma)\,\vec{e_3}\,.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}\,; \qquad \vec{b} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}\,;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e_3}\,.$$

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\vec{a_1},...,\vec{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + ... + \alpha_n\vec{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + ... + \alpha_n\vec{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов $\vec{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$(-1; 0; 3), $\vec{c}$(2; 1; -1) и $\vec{d}$(3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования.

Определение: Пусть L – заданное n- мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\overline{x} \in \mathrm{L}$ называется **собственным вектором** линейного преобразования А, если существует такое число λ, что выполняется равенство: $\mathrm{A}\overline{x} = \lambda\overline{x}$.

При этом число λ называется **собственным значением (характеристическим числом)** линейного преобразования А, соответствующего вектору $\overline{x}$.

Определение: Если линейное преобразование А в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ имеет матрицу А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования А можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением,** а его левая часть - **характеристическим многочленом** линейного преобразования А.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть А – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование А может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Если преобразование А имеет собственный вектор с собственным значением λ, то А$\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является **характеристическим уравнением линейного преобразования А**.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x}$ (x_1, x_2) линейного преобразования А с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование А не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования А, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое **собственное направление** или **собственную прямую**.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две **собственные прямые**.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей А = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{matrix}$

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) + 16 = -12 - 6\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Получаем: $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; t)*** где *t*-параметр.

Собственный вектор можно записать: $\vec{u} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})t$.

Рассмотрим другой частный случай. Если $\bar{x}$ - собственный вектор линейного преобразования А, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, то

$$x_1' = \lambda x_1; \quad x_2' = \lambda x_2; \quad x_3' = \lambda x_3,$$

где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования А.

Если матрица линейного преобразования А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ. Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

Тогда любое линейное преобразование в трехмерном пространстве имеет собственные векторы.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0$$

$$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$

$$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0$$

$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$; $x_3 = -1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_1} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_3} = (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

Лекция 5. Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике.

Модель равновесных цен. Линейная модель торговли

Эффективное ведение хозяйства предполагает баланс между отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой, – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определенного вида таблицами, называемыми таблицами межотраслевого баланса.

Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в трудах американского экономиста В. Леонтьева в 1936 г. Эта модель основана на алгебре матриц.

Будем предполагать, что рассматривается n отраслей $O_1, O_2, \ldots, O_n$ хозяйства, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной и других отраслей, а другая часть предназначена для потребления вне сферы материального производства.

Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени $[T_0;T_1]$, в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем обозначения:

x_i– общий объем продукции i-й отрасли (ее валовый выпуск);

x_{ij}– объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j;

y_i–объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере (продукт конечного потребления). Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции.

Указанные величины сведем в табл. 1.

Таблица 1

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовой выпуск
x_{11} x_{12} … x_{1n}	y_1	x_1

x_{21} x_{22} … x_{2n}	y_2	x_2
. . . .	…	…
x_{n1} x_{n2} … x_{nn}	y_n	x_n

Балансовый принцип связи различных отраслей хозяйства состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах.

В самой простой форме (гипотеза линейности) балансовые соотношения имеют вид:

$$x_i=x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in} + y_i;\ \ i=1,2,\ldots,n. \qquad (1)$$

Уравнения (2.1) называются соотношениями баланса.

Единицы измерения указанных величин могут быть натуральными (тонны, штуки, кубометры и т.д.) или стоимостными.

В зависимости от этого различают натуральный и стоимостный межотраслевой балансы. Для определенности будем иметь в виду стоимостный баланс.

В. Леонтьев на основании анализа экономики США в предвоенный период установил важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются практически неизменными и могут рассматриваться как постоянные числа.

Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.

При $x_j=1$ (руб.) $a_{ij}=x_{ij}$. Таким образом, a_{ij} – есть стоимость i продукции, вложенной в 1 руб. продукции j-й отрасли.

В силу сказанного сделаем допущение: для выпуска любого объема x_j продукции j-й отрасли необходимо затратить продукцию i-й отрасли в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} –постоянный коэффициент. Иначе говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение называется гипотезой линейности существующей технологии. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых материальных затрат.

Таким образом, коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учесть только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

Итак, согласно гипотезе линейности имеем

$$x_{ij}=a_{ij}x_j; \quad i, j=1, 2, \ldots, n; \qquad (2)$$

где x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью;

x_j – объем произведенной j-й отраслью продукции;

a_{ij} – коэффициенты прямых затрат (коэффициент материалоемкости).

Из уравнений (2.1) и (2.2) следует:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+y_1, \\ x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$x_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n+y_n\,.$$

Введем в рассмотрение технологическую матрицу, или матрицу коэффициентов прямых затрат (коэффициентов материалоемкости) и векторы (матрицы) конечного выпуска и потребления

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3) в матричной форме запишется:

$$\vec{x}=A\vec{x}+\vec{y}\,. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Система (3) или уравнение (2.4) называются экономико-математической моделью межотраслевого баланса или вместе с интерпретацией матрицы A и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – моделью Леонтьева или моделью «затраты - выпуск».

В уравнении (4) приняты следующие обозначения:

$\vec{x}$ – вектор валового выпуска;

$\vec{y}$ – вектор конечного потребления;

А – матрица прямых затрат.

С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов.

1. Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (x_i), можно определить объемы конечной продукции (y_i) :

$$\vec{y} = (E-A)\vec{x}. \qquad (5)$$

2. Задав величины конечной продукции всех отраслей (y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (x_i):

$$\vec{x} = (E-A)^{-1}\vec{y}. \qquad (6)$$

3. Для ряда отраслей, задав величины валовой продукции, а для всех других отраслей задав объемы конечной продукции, можно из системы (2.3) найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

В равенствах (5) и (6) Е – единичная матрица n-го порядка.

Пусть $|E-A| \neq 0$, тогда существует матрица $(E-A)^{-1}=B(b_{ij})$ и уравнение (6) примет вид

$$\vec{x} = B\vec{y}. \qquad (7)$$

где В – мтрица прямых затрат.

Из уравнения (7) для любого i имеем $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \quad i=\overline{1,n} \qquad (8)$

Из уравнения (8) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величины потребления продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции *i*-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции *j*-й отрасли. Коэффициенты b_{ij} называются коэффициентами полных материальных затрат и включают как прямые, так и косвенные затраты.

Коэффициент полных материальных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Если Δx_i и Δy_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно, то $\Delta x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta y_j$ (9)

Следовательно, коэффициенты материальных затрат можно применять, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей.

Заметим, что система (3) (уравнение (4)) имеет особенности, вытекающие из прикладного характера задачи: все элементы матрицы А и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ должны быть неотрицательными.

Определение. Матрица А≥0 (элементы матрицы А неотрицательны) называется продуктивной, если для любого вектора $\vec{y}$ ≥0 существует решение $\vec{x}$ ≥0 этого уравнения.

Теорема 1. Если для матрицы А≥0 и некоторого вектора $\vec{y}^*$ ≥0 уравнение (4) имеет решение $\vec{x}^*$ ≥0, то матрица А продуктивна.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы А.

Первый критерий продуктивности: матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

Второй критерий продуктивности: матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Пусть $A \geq 0$ –продуктивная матрица.

<u>Определение</u>. Запасом продуктивности матрицы A называется число $\alpha>0$ такое, что все матрицы λA, где $1<\lambda<1+\alpha$ продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$- непродуктивна.

<u>Задача</u>. Исследовать на продуктивность матрицу $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>. Легко видеть, что второй критерий продуктивности не выполняется. Поэтому исследуем продуктивность матрицы A с помощью первого критерия.

Имеем $E\text{-}A=\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,9 & 0,7 \end{pmatrix}$,

$|E-A| = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,9 & 0,7 \end{vmatrix}$ =0,56 - 0,54=0,02$\Rightarrow$ матрица $(E\text{-}A)^{-1}$ существует.

Найдем $(E\text{-}A)^{-1} = \dfrac{1}{0,02}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,9 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы $(E\text{-}A)^{-1}$ неотрицательны,– следовательно, матрица A продуктивна.

<u>Задача</u>. Найти запас продуктивности матрицы $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>. В силу первого критерия продуктивности матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда существует и неотрицательная матрица $(E\text{-}\lambda A)^{-1}$.

Найдем матрицу $E\text{-}\lambda A=\begin{pmatrix} 1-0,5\lambda & -0,3\lambda \\ -0,4\lambda & 1-0,5\lambda \end{pmatrix}$.

Определитель ее $\Delta=|E-\lambda A|$=(1-0,5λ)(1-0,5λ)-0,12λ^2=1-λ+0,25λ^2-0,12λ^2=

=1-λ+0,13λ^2. Обратной матрицей является матрица

$$(E\text{-}\lambda A)^{-1}=1/\Delta\begin{pmatrix} 1-0,5\lambda & 0,3\lambda \\ 0,4\lambda & 1-0,5\lambda \end{pmatrix}.$$

Для продуктивности матрицы λA необходимо, чтобы все элементы матрицы $(E-\lambda A)^{-1}$ были неотрицательны, то есть $\Delta>0$, $1-0{,}5\lambda>0$ и

$0{,}13\lambda^2-\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=6{,}5;\ \lambda_2=1{,}19.$

Решаем систему $\begin{cases} 0{,}13\lambda^2-\lambda+1>0, \\ 1-0{,}5\lambda>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda>6{,}5;\ \lambda<1{,}19 \\ \lambda<2 \end{cases} \Rightarrow \lambda<1{,}19.$

При $\lambda<1{,}19$ матрица λA будет продуктивной, при $\lambda=1{,}19$ матрица λA непродуктивна. Запас продуктивности равен 1,19-1=0,19, то есть запас продуктивности матрицы достаточен.

Задача. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл.ден.ед.:

Отрасли	Потребление O_1	Потребление O_2	Конечный продукт	Валовой продукт
O_1	3	8	89	100
O_2	5	7	88	100

Требуется:

Составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность.

Вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 100 % и 50% соответственно.

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в k=1 раз, а отрасли O_2 – на Р %=10%.

Найти векторы валового выпуска и потребления при уменьшении валового выпуска первой отрасли на 40% и увеличении конечного потребления вторьй отрасли на 2ед.

Решение.

1. Введем в рассмотрение матрицу $\begin{pmatrix} 3\,8 \\ 5\,7 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{y}=\begin{pmatrix} 89 \\ 88 \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу прямых затрат А, учитывая, что ее элементы $a_{ij}=x_{ij}/x_j$:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что сумма элементов столбцов (строк) матрицы А меньше единицы. Следовательно, в силу второго критерия продуктивности матрица A продуктивна.

2. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид: $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$. При увеличении валового выпуска отраслей O_1 и O_2 на 100% и 50% соответственно получим новый вектор валового выпуска $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$. Вектор потребления $\vec{y}_1$, соответствующий вектору $\vec{x}_1$, находится из уравнения баланса

$$\vec{y}_1=(E\text{-}A)\,\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 129{,}5 \end{pmatrix}.$$

Изменения объемов конечного продукта O_1 на 182-89=93 ед., или 104,5%, O_2 на 129,5 - 88=41,5 ед., или на 47,2%.

3. Конечное потребление отрасли O_1 остается без изменения, а отрасли O_2 станет равным 88 1,1=96,8; то есть новый вектор конечного потребления $\overrightarrow{y_2} = \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix}$.

Новый вектор валового выпуска $\overrightarrow{x_2}$ находится из уравнения баланса:

$$\vec{x}_2=(\mathrm{E}\text{-}\mathrm{A})^{-1}\vec{y}_2$$

$$\mathrm{E}\text{-}\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix};\quad |E-A|=0{,}8981.$$

$$(\mathrm{E}\text{-}\mathrm{A})^{-1}=1/0{,}8981\begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100{,}38 \\ 109{,}88 \end{pmatrix}.$$

Валовый продукт отраслей необходимо увеличить: O_1 – на 0,38%.

O_2 –на 9,88%.

4. Пусть $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 60 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} y_1 \\ 90 \end{pmatrix}$ – искомые векторы валового выпуска и потребления. Согласно уравнению баланса (2.4) получим:

$$\begin{pmatrix} 60 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 90 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} 60 = 0{,}03 \cdot 60 + 0{,}08 + y_1 \\ x_2 = 0{,}05 \cdot 60 + 0{,}07 x_2 + 90 \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем $x_2 = 100, \quad y_1 = 50{,}2.$

Таким образом, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 50{,}2 \\ 90 \end{pmatrix}.$

Модель равновесных цен

Пусть A = (a_{ij}), $i, j=\overline{1, n}$ – матрица прямых затрат;

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$$ — вектор валового выпуска;

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_2 \\ p_2 \\ .... \\ p_n \end{pmatrix}$$ — вектор цен (p_i – цена единицы продукции i-й отрасли).

От реализации продукции i-я отрасль получит доход $x_i p_i$, который идет на закупку сырья $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_b)$, а некоторая его часть составляет добавленную стоимость V_i (стоимость условно чистой продукции).

Имеем равенства $x_i p_i = x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i} + \ldots + a_{ni}\, p_n) + V_i \quad i=\overline{1, n}$. (11)

Разделив обе части уравнения (11) на x_i получим:

$$p_i = a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}\, p_n + V_i, \quad i=\overline{1, n}, \qquad (12)$$

где $V_i = V_i / x_i$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции *i*-й отрасли).

Если ввести в рассмотрение вектор норм добавленной стоимости $\vec{V}$ =($V_1,V_2,\ldots,V_n$) то система (12) в матричной форме примет вид:

$$\vec{p} = A^{T}\vec{p} + \vec{V} \qquad (13)$$

Система (2.12), или (2.13), называется моделью равновесных цен (модель равновесных цен двойственна по отношению к балансовой модели Леонтьева).

<u>Задача</u>. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух отраслей (промышленности и сельского хозяйства).

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ — матрица прямых затрат; $\vec{V}$ =(4; 10) – вектор норм добавленной стоимости.

Определить: 1)Равновесные цены. 2)Равновесные цены при увеличении нормы добавленной стоимости первой отрасли на 1,1.

<u>Решение</u>. 1. Из уравнения модели равновесных цен $\vec{p} = A^{T}\vec{p} + \vec{V}$,

где $\vec{p}$ – вектор цен, $\vec{V}$ =($V_1,V_2,\ldots,V_n$) – вектор норм добавленной стоимости, A –матрица прямых затрат, A^T – транспонированная ей матрица, найдем вектор цен $\vec{p} = \left(E - A^{T}\right)^{-1} \cdot \vec{V}$

Имеем: $E\text{-}A^T = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, $\left|E - A^{T}\right| = \begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{vmatrix}$=0,48-0,15=0,33≠0,

следовательно, матрица $(E\text{-}A^T)^{-1}$=1/0,33$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}42 & 0{,}91 \\ 1{,}51 & 1{,}82 \end{pmatrix}$.

Тогда $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}42 & 0{,}91 \\ 1{,}51 & 1{,}82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}68 + 9{,}1 \\ 6{,}04 + 18{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18{,}78 \\ 24{,}24 \end{pmatrix}$.

2. Если в первой отрасли норма добавленной стоимости возрастет на 1,1, то новый вектор $\vec{V}$ =(5,1; 10), а новые равновесные цены

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2{,}42 & 0{,}91 \\ 1{,}51 & 1{,}82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21{,}44 \\ 25{,}9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, продукция первой отрасли подорожает на

(21,44-18,78)/18,78 100%=14,2 %, второй (25,9 –24, 24)/24,24=6,8%.

Схема межотраслевого баланса

При экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов широко применяются балансовые модели. В основе этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся межрегиональных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Важнейшие виды балансовых моделей:

частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей; межотраслевые балансы; матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования (технологическая матрица). В связи с этим балансовые модели называют матричными. Несмотря на специфику различных балансовых моделей, их объединяет не только общий формальный (матричный) принцип построения и единство системы расчетов, но и аналогичность ряда экономических характеристик. Это позволяет рассматривать структуру, содержание и основные зависимости матричных моделей на принципе одной из них, а именно – на примере межотраслевого баланса производства и распределения продукции в хозяйстве.

Принципиальная схема межотраслевого баланса представляет собой крестообразное наложение двух таблиц (матриц) одна на другую (табл.2).

Производящие отрасли	Потребляющие 1	2	…	n	Итого	Конечный продукт	Валовой продукт
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum x_{1j}$	1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum x_{2j}$	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	x_{nj}	y_n	x_n
Итого	$\sum x_{j1}$	$\sum x_{j2}$	…	$\sum x_{nn}$	$\sum\sum x_{ij}$	$\sum y_j$	$\sum x_j$
Амортизация	c_1	c_2	…	c_n			
Оплата труда	V_1	V_2	…	V_n			
Чистый доход	m_1	m_2	…	m_n			
Валовой продукт	x_1	x_2	…	x_n		$\sum x_i = \sum x_j$	

Схема межотраслевого баланса. *Таблица 2.*

Горизонтальная таблица отражает взаимосвязи по распределению производственной продукции и служит основой для определения равновесного выпуска продукции, вертикальная – взаимосвязи по производству продукции и служит основой для определения равновесных цен.

Рассмотрим схему межотраслевого баланса (МОБ) в разрезе его крупных составных частей (таблица 3). Выделяются 4 части, имеющие различное экономическое содержание, они называются квадрантами баланса.

Укрупнённый матричный баланс. *Таблица 3.*

1	2
3	4

В первом квадранте в подлежащем и сказуемом записывают показатели, представляющие собой величины межотраслевых потоков продукции. В общем виде они обозначаются x_{ij} и характеризуют стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером i и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером j.

Таким образом, первый квадрант – квадратная матрица порядка n, сумма элементов которой равна (годовому) фонду возмещения затрат средств-производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представляется необходимая информация о результатах производства отрасли (валовом и товарном выпуске, номенклатуре). В табл. 2 этот раздел дан укрупненно в виде одного столбца Y_i . Итак, второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопления по отраслям производства и потребителям.

В третьем квадранте представлены отраслевые затраты на выпускаемую продукцию, т. е. данные этого квадранта характеризуют национальный доход, но со стороны его стоимостного состава – как сумму чистой продукции (оплата труда и чистый доход) и амортизации. Сумму амортизаций (c_j) и чистой продукции ($V_j + m_j$) некоторой j-й отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать z_j, т.е.

$$z_j=c_j + V_j+m_j\,,\ \ j=\overline{1,n}$$

В четвертом квадранте, находящемся на пересечении второго (конечной продукции) и третьего, квадратов отражается конечное распределение и использование национального дохода. Детально составляющие элементы этого квадранта не рассматриваем, однако заметим, что общий итог четвертого квадранта, как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Сущность МОБ можно записать в виде следующих важнейших соотношений:

1. Сумма распределенной для производственных целей продукции отрасли j и конечной продукции дают валовой выпуск этой продукции:

$$\sum x_{ij} + y_i = x_i,\ \ i=\overline{1,n} \qquad (14)$$

Уравнение (2.14) называется уравнением распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

2. Стоимость продукции отрасли j определяется затратами на потребленную продукцию отрасли $\sum x_{ij}$, а также всеми прочими затратами:

$$x_j = \sum x_{ij} + z_j\ \ ,\ j=\overline{1,n} \qquad (15)$$

Уравнения (2.15) отражают стоимостной состав продукции всех отраслей материальной среды.

Суммируя по всем отраслям уравнения (14) и (15), получим:

$$\sum_i x_i = \sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i y_i\ \ ,$$

$$\sum_j x_j = \sum_j \sum_i x_{ij} + \sum_j z_j\ ,$$

причем $\sum_j \sum_i x_{ij} = \sum_i \sum_j x_{ij}$ – внутренний оборот отрасли.

Из последних двух равенств следует

$$\sum_i y_i = \sum_j z_j \qquad (16)$$

Уравнение (16) показывает, что в МОБ соблюдается важнейший принцип материального и стоимостного состава национального дохода.

Стоимость конечной продукции отрасли в целом равна сумме всех ресурсов, поступающих со стороны, плюс расходы на возмещение износа основных фондов, плюс заработная плата и прибавочный продукт.

Задача. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных материальных затрат, вектор валовой продукции и заполнить схему межотраслевого материального баланса.

Решение.1. Найдем коэффициенты полных материальных затрат, учитывая, что $B=(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix}$.

2. Используя формулу (7), найдём

$$\vec{x} = B \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775{,}3 \\ 510{,}1 \\ 729{,}6 \end{pmatrix}.$$

3. Для определения элементов первого квадранта МОБ воспользуемся формулой (2), а условно чистую продукцию найдем как разность между валовой и потребленной продукцией. В результате получим МОБ производства и распределения продукции.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600	
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		2015,0

Линейная модель торговли

Пусть бюджеты n стран, которые обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров.

Обозначим: a_{ij} – доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, если весь бюджет идет на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n \qquad (17)$$

(сумма элементов любого столбца равна единице). Матрица А со свойством (17) называется структурной матрицей торговли. Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i-й страны выражается равенством

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n. \tag{18}$$

Условие бездефицитной торговли (сбалансированной) формируется следующим образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т. е. $p_i \geq x_i$ или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{19}$$

Однако в условиях (19) не может быть неравенства. В самом деле, сложим эти неравенства при i от 1 до n. Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j, получим

$$x_1(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2})+\ldots+x_n(a_{in}+a_{2n}+\ldots+a_{nn})\geq x_1+x_2+\ldots+x_n$$

в силу свойств (17) $\Rightarrow$ $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq x_1+x_2+\ldots+x_n \Rightarrow$ возможен лишь знак равенства. Поэтому, условия (19) принимают вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases} \tag{20}$$

Введем вектор бюджетов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Тогда система (20) запишется $A\vec{x} = \vec{x}.$ (21)

Уравнение (21) означает, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы А соответствующей собственному значению λ=1, то есть вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению λ=1.

Существование такого собственного вектора вытекает из теоремы.

Теорема 2. Если в матрице A сумма элементов каждого столбца равна единице, то имеется собственный вектор, соответствующий собственному значению 1.

Задача 2.5. Дана структурная матрица торговли трех стран

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна в=7000.

Решение. Легко видеть, что элементы матрицы А удовлетворяют условиям теоремы 2. Следовательно, существует собственный вектор, соответствующий собственному значению 1.

Из уравнения (2.17) получим $(A-E)\vec{x}=\vec{0}$ или $\begin{pmatrix}-0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}4 & -0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$,

или $$\begin{cases}-0{,}8x_1+0{,}1x_2+0{,}3x_3=0,\\ 0{,}4x_1-0{,}5x_2+0{,}3x_3=0,\\ 0{,}4x_1+0{,}4x_2-0{,}6x_3=0.\end{cases}$$

Определитель системы равен нулю, а $\begin{vmatrix}-0{,}8 & 0{,}1\\ 0.4 & -0.5\end{vmatrix}=0.36\neq 0$. Следовательно, ранг системы равен двум. Поэтому, отбросив третье уравнение, имеем:

$$\begin{cases}-0{,}8x_1+0{,}1x_2+0{,}3x_3=0,\\ 0{,}4x_1-0{,}5x_2+0{,}3x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=k,\\ x_2=3k, \quad k\in R.\\ x_3=5/3k,\end{cases}$$

Учитывая, что сумма $x_1+x_2+x_3=7000$, определим величину k: $k+3k+5/3k=7000 \Rightarrow k=1235{,}3$. Поэтому $x_1=1235{,}3$; $x_2=3705{,}9$; $x_3=2058{,}8$. Таким образом, искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле соответственно равны: $x_1=1235{,}3$; $x_2=3705{,}9$; $x_3=2058{,}8$.

Лекция 6. Интегральное исчисление. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
1. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	e^x + C
2	$\int ctgx dx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos x dx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin x dx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}+C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$

Неопределенный интеграл.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных). Интегрирование по частям.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos xdx = \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{Bmatrix} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos xe^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos xdx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos xdx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x} dx; \\ du = 2x dx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix} \right\} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2x dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5} e^{5x}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{x e^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right).$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{ dx = d(x+1) \} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{ x + 1 = t \} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3} dx; \\ du = \dfrac{1}{x} dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & dv = x dx; \\ du = \dfrac{1}{x} dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \left\{ t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx; \right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Лекция 7. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

I. $$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

II. $$\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{ \begin{matrix} u = 6x-5; & du = 6dx; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; & \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} arctg\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3} arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x+3; & du = dx; \\ x = u-3; & \end{matrix} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x-3; & du = dx; \\ x = u+3; & \end{matrix} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Интегрирование рациональных функций.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+...+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+...+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+...+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases}A+B+C=9\\-4A-2B-6C+D=-30\\4A+4B+8C-6D=28\\-16A-8B+8D=-88\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=-30+4A+2B+54-6A-6B\\2A+2B+4C-3D=14\\2A+B-D=11\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14\\2A+B-24+2A+4B=11\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\4A+5B=35\end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Итого:

$$\int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{2}{x^2+4}dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C.$$

Лекция 8. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx. Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt;\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример.

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=2\int\frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ *если функция* R *является нечетной относительно cosx.*

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = sinx$.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}\cos xdx$$

Функция $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\sin x)\cos xdx=\int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}=\begin{cases}\sin x=t\\ dt=\cos xdx\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{cases}=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+$$

$$+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ *если функция R является нечетной относительно sinx.*

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка t = $\cos x$. Тогда $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\cos x)\sin xdx=-\int r(t)dt.$

Пример.

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\begin{cases}\cos x=t\\ dt=-\sin xdx\end{cases}=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int\frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt=\int\left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt=$$

$$=\int\left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt=\int tdt+\int 2dt-4\int\frac{tdt}{t+2}-5\int\frac{dt}{t+2}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4\int\frac{t}{t+2}dt=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{t}{t+2}=\dfrac{A}{t+2}+B\\ A+Bt+2=t\\ B=1,\quad A=-2\\ \dfrac{t}{t+2}=\dfrac{-2}{t+2}+1\end{cases}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\int\frac{dt}{t+2}-4\int dt=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\ln|t+2|-4t=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$

функция R четная относительно sinx и cosx.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка

t = tgx.

Тогда $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(t)dt$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \left\{ \begin{array}{l} tgx = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx + 3 - 5}{tgx + 3 + 5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx - 2}{tgx + 8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Пример.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$

$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{dctg2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2ctg2x + C$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$
$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *где n- натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t) dt.$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \left\{\sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3};\right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$
$$= -2\int \left(t + \frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int t dt - 2\int \frac{t}{t-1}dt = -t^2 - 2\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$
$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Пример.

$$\int\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx=\left\{\begin{matrix}\sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12};\\ dx=12t^{11}dt;\end{matrix}\right\}=\int\frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)}=12\int\frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=12\left(\int\frac{t^3}{t^2+1}dt+\int\frac{t^2}{t^2+1}dt\right)=12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt+\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right)=12\int tdt-12\int\frac{tdt}{t^2+1}+12\int dt-$$

$$-12\int\frac{dt}{1+t^2}=6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12arctgt+C=6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-$$

$$-12arctg\sqrt[12]{x-1}+C.$$

Тригонометрическая подстановка.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})du$ подстановкой $u=m\sin t$ или $u=m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left\{\begin{matrix}x=a\sin t;\\ dx=a\cos tdt\end{matrix}\right\}=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=\int a^2\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

\

$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})du$ подстановкой $u=mtgt$ или $u=mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

Пример:

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=\left\{\begin{matrix}x=atgt;dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos t};\end{matrix}\right\}=\int\frac{a\cos tdt}{\cos^2 ta^4tg^4ta}=\int\frac{\cos^3 tdt}{a^4\sin^4 t}=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t}=$$

$$=-\frac{1}{3a^4\sin^3 t}+\frac{1}{a^4\sin t}+C=\left\{\sin t=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\}=-\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x}+C.$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})du$ подстановкой $u=\dfrac{m}{\sin t}$ или $u=\dfrac{m}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример:

$$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}=\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{\cos t};dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{x^2-4}=2tgt;\end{array}\right\}=\int\frac{2\sin t\cos tdt}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5 tg^5 t}=\frac{1}{32}\int ctg^4 tdt=$$

$$=\frac{1}{32}\int ctg^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\frac{1}{32}\int ctg^2 td(ctgt)-\frac{1}{32}\int ctg^2 tdt=-\frac{1}{96}ctg^3 t-\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{96}ctg^3 t+\frac{1}{32}ctgt+\frac{t}{32}+C=\left\{ctgt=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right\}=-\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+$$

$$+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

Пример:

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\cos t};dx=\dfrac{tgt}{\cos t}dt;\\ \sqrt{x^2-1}=tgt;\end{array}\right\}=\int\frac{\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt=\int\frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}dt=\int\cos^2 tdt=$$

$$=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\left\{\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C.$$

С учетом того, что функции arcsin и arccos связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}=\left\{\begin{array}{l} x=\sin t;\\ dx=\cos tdt;\\ \cos t=\sqrt{1-x^2}\end{array}\right\}=\int\frac{\cos tdt}{\cos^3 t}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=tgt+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$

Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$, где P(x)- многочлен степени выше второй.

1) $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона

2) $\int \sin x^2 dx;\quad \int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм

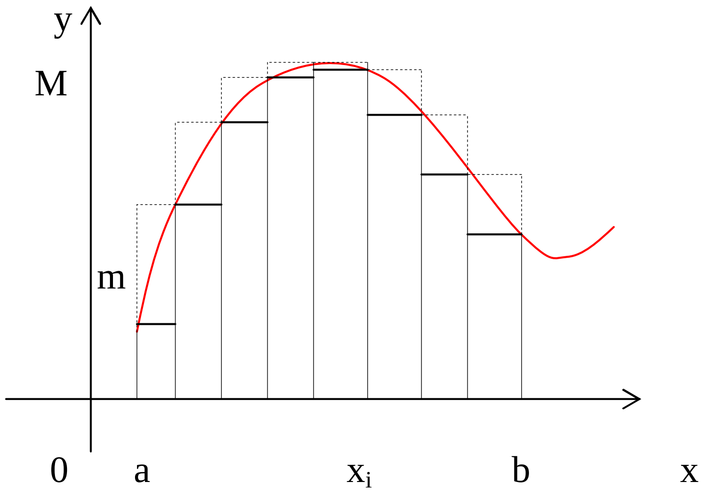
1) $\int \frac{e^x}{x}dx$ - приводится к интегральному логарифму

2) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ - интегральный синус

3) $\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральный косинус

Лекция 9. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]. Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками. $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int\limits_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$
2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$
3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$
5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,.$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число C, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x, т.е. при x = a:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C, \quad C = -F(a).$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при x = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

<u>Замена переменных в определенных интегралах.</u>

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b]. Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

<u>Пример.</u>

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} x = \sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{cases} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция должна быть непрерывна на отрезке интегрирования.

Пример.

$\int_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^{0} \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = $\pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции.

Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках x_0, x_1, … , x_m, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом: ь $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …. , $y_n = f(x_n)$.

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$

$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Лекция 10. Несобственные интегралы. Геометрические приложения определенного интеграла. Кратные интегралы.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

<u>Определение:</u> Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции f(x) на интервале [a, ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

<u>Пример.</u>

$\int\limits_0^\infty \cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b \cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to\infty}\sin b$ - не существует.

Несобственный интеграл расходится.

<u>Пример.</u> $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_b^{-1} = \lim\limits_{b\to-\infty}\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1$ - интеграл сходится

<u>Теорема:</u> Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx \ge \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

<u>Теорема:</u> Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

Интеграл от разрывной функции.

Если в точке x = c функция либо неопределена, либо разрывна, то

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)dx$$

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int_a^c f(x)dx$ - расходится.

Если в точке x = a функция терпит разрыв, то $\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)dx$.

Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

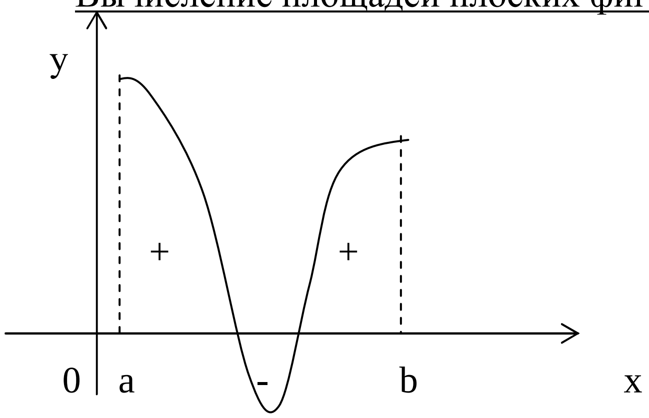
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

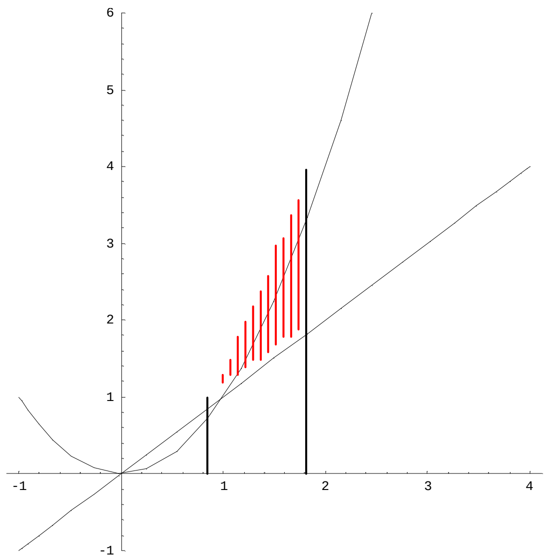


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x).

Если график расположен ниже оси Ox, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”.Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

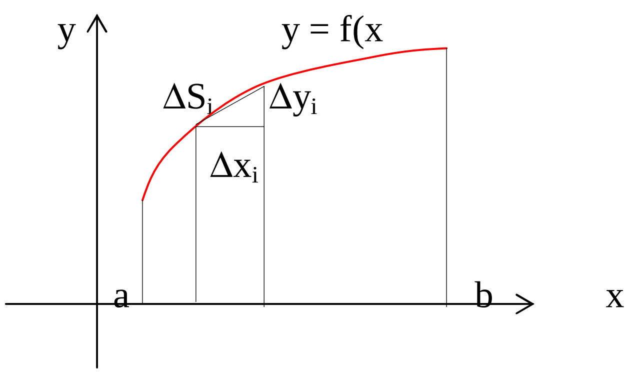
Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} (\text{ед}^2)$$

Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$. Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

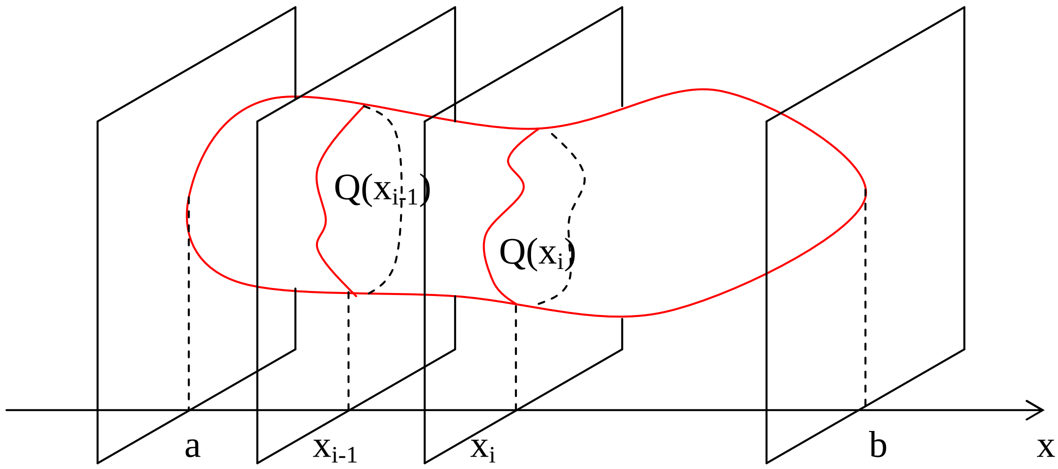
В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда $S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$, где x = φ(t) и y = ψ(t).

Вычисление объемов тел.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

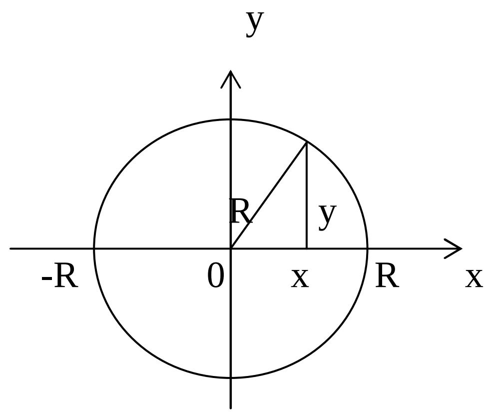
Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел: $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле: $V = \int_a^b Q(x)dx$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R.



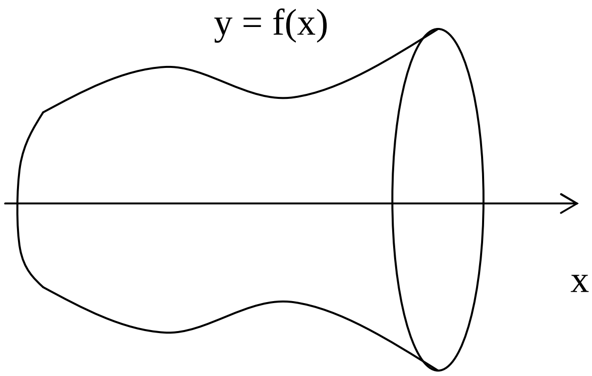
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле: $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

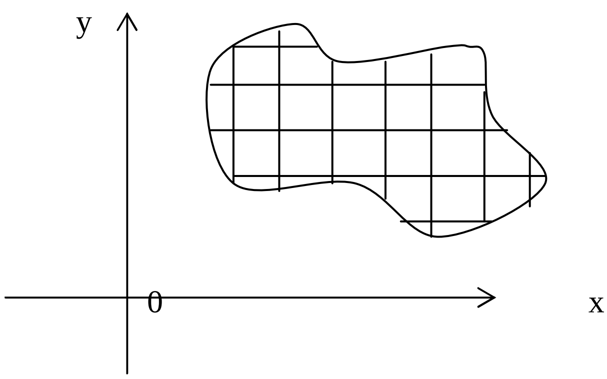
Кратные интегралы.

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производится неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов. Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения двойных интегралов.

Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой

f(x, y) = 0.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. области

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

<u>**Определение:**</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum\sum_{\Delta} \quad f(x,y)\Delta y\Delta x$$

Условия существования двойного интеграла.

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

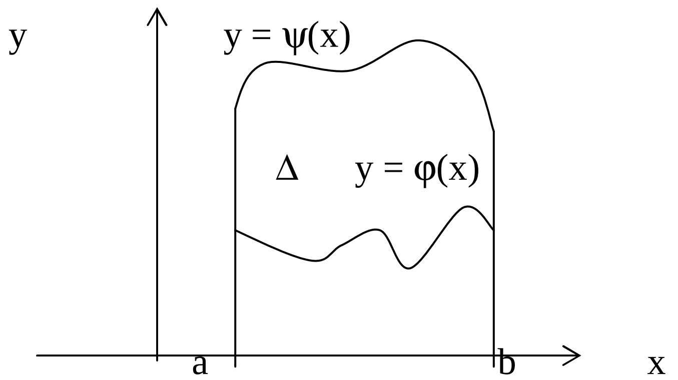
Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл* $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ *существует.*

Теорема. *Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл* $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ *существует.*

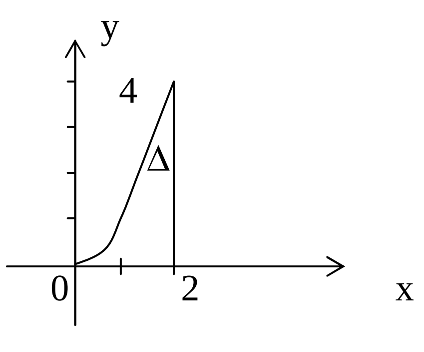
Вычисление двойного интеграла.

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ ≤ ψ, тогда*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$



Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.



$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x-y)dy = \int_0^2 (xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 (x^3 - \frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2.

$$\iint_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y)dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y)dx = \int_0^2 (x^3 - yx^2 + yx)\Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} \right)\Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

<u>Тройной интеграл.</u>

При рассмотрении тройного инеграла не будем подробно останавливаться на всех тех теоретических выкладках, которые были детально разобраны применительно к двойному интегралу, т.к. существенных различий между ними нет.

Единственное отличие заключается в том, что при нахождении тройного интеграла интегрирование ведется не по двум, а по трем переменным, а областью интегрирования является не часть плоскости, а некоторая область в техмерном пространстве.

$$\iiint_r f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum\sum_v\sum \quad f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z$$

Суммирование производится по области v, которая ограничена некоторой поверхностью φ(x, y, z) = 0.

$$\iiint_r f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dzdydx$$

Здесь x_1 и x_2 – постоянные величины, y_1 и y_2 – могут быть некоторыми функциями от x или постоянными величинами, z_1 и z_2 – могут быть функциями от x и y или постоянными величинами.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx = \int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2 y\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}\right)dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2 yx^2y^2dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^4y^3dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^4\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^{x^2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^4x^8}{4}dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{13}x^{13}\Big|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

Лекция 11. <u>Обыкновенные дифференциальные уравнения.</u>

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)\cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

<u>Определение.</u> Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

<u>Определение.</u> Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

<u>Определение.</u> Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

<u>Пример.</u>

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

<u>Определение.</u> Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

<u>Свойства общего решения.</u>

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

<u>Определение.</u> Решение вида y = φ(x, C_0) называется **частным решением** дифференциального уравнения.

<u>Определение.</u> **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида y = φ(x, C_0), удовлетворяющего начальным условиям y(x_0) = y_0.

<u>Теорема Коши.</u> (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, *то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$, *определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при x = x_0 значение φ(x_0) = y_0, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.*

<u>Определение.</u> **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем $2 = \dfrac{C}{1}; \quad C = 2;$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши). $y = \dfrac{2}{x}$.

<u>Определение.</u> Интегральной кривой называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

<u>Определение.</u> Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (х, у) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение y = 0. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида *y' = f(x).*

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде $y' = \alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ } при \text{ } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0; \quad \int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C, а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$,

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\cos y dy = -2x dx$$

$$\int y\cos y dy = -2\int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям :

$$\int y\cos y dy = \left\{ \begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix} \right\} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной x.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$$yy' = -\frac{2x}{\cos y}$$ - верно.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y$$

$$dx = \frac{\ln ydy}{y}$$

$$\int dx = \int \frac{\ln ydy}{y}$$

$$x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1).$

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Пример. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$

$$ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y} dy = -xdx;$$

$$\int \frac{y}{e^y} dy = -\int xdx$$

$$\int ye^{-y} dy = \begin{Bmatrix} u = y; & e^{-y}dy = dv; \\ du = dy; & v = -e^y; \end{Bmatrix} = -e^y y - \int -e^y dy = -e^{-y} y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Если y(1) = 0, то $2e^0(0+1) = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = 1;$

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

$$\ln\left|tg\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$$

Пример. Решить уравнение $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$

Преобразуем заданное уравнение:

$$2xe^{-x^2} + \frac{dy}{ydx} = 0$$

$$2xe^{-x^2} dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2} dx + \int \frac{dy}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Если из этого соотношения выразить искомую функцию y, то получим общее решение.

Однородные уравнения.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x,y)=x^3+3x^2y$?

$$f(tx,ty)=(tx)^3+3(tx)^2ty=t^3x^3+3t^3x^2y=t^3(x^3+3x^2y)=t^3 f(x,y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y'=f(x,y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y'=f(x,y)$.

Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t=\frac{1}{x}$. Получаем: $f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u=\frac{y}{x}$, т.е. $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u)$;

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде: $y'=\varphi(u)$

Далее заменяем $y=ux$, $y'=u'x+ux'$.

$$u'x+ux'=\varphi(u);\quad u'x+u=\varphi(u);\quad u'=\frac{\varphi(u)-u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u .$$

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде: $y' + P(x)y = Q(x),$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1\cdot 2x^2$; $y = 2\cdot x^2$; $y = 2x\cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx}+P(x)u=0$.

Таким образом, возможно получить функцию u, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u}=-P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx; \qquad \ln|u|=-\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1|+\ln|u|=-\int P(x)dx; \qquad u=Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C=1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим поученное выражение для функции u в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x); \qquad Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v:

$$Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1; \qquad v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y=uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y=uv=Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right),$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

$$y=e^{\frac{1}{x}}(ax+C).$$

Лекция 12. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \quad .... \quad , \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то какова бы не была точка ($x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$) в этой области, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, определенного в некотором интервале, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

…………………………………………………………….

$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0;$ $y_0 = 1;$ $y_0' = -1;$ $y_0'' = 0.$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

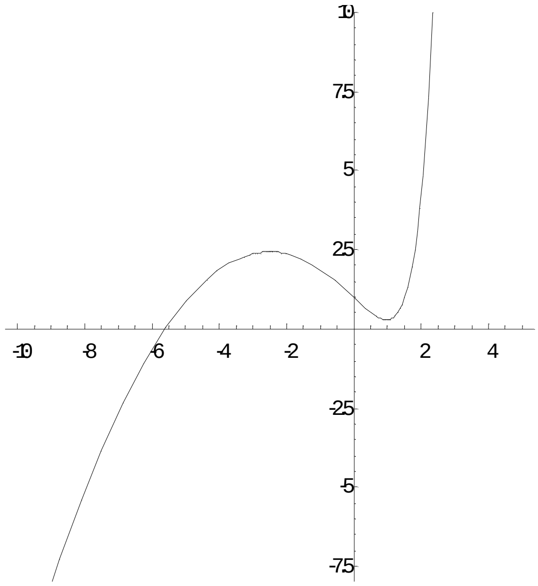
Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Ниже показана интегральная кривая данного дифференциального уравнения.



<u>Уравнения, не содержащие явно искомой функции</u>

<u>и ее производных до порядка *k – 1* включительно.</u>

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение уравнения $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y''';$

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x = 0$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p \right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем: $F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) = 0$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Замена переменной: $p = y'; \qquad y'' = \frac{dp}{dy} p;$

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y \frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

1) $y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int \frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|; \qquad \int \frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C$;

2) $p = 0; \qquad y' = 0; \qquad y = C;$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим *L(y)*.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Определение. Если *f(x) = 0*, то уравнение *L(y) = 0* называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение *L(y) = f(x)* называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ – постоянные числа, то уравнение *L(y) = f(x)* называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

Определение. Выражение $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется **линейным дифференциальным оператором**.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

1) $L(Cy) = CL(y)$;

2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

Структура общего решения.

Определение. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение. Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

Теорема. *Если функции* $y_1, y_2, ..., y_n$ *линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

Теорема. *Если функции* $y_1, y_2, ..., y_n$ *линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Теорема. *Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения* $y_1, y_2, ..., y_n$ *была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.*

Теорема. *Если* $y_1, y_2, ..., y_n$ *- фундаментальная система решений на интервале* (a, b)*, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где C_i –постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Лекция 13. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты *p* зависят от *x*, эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

<u>Теорема.</u> *Если задано уравнение вида* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *и известно одно ненулевое решение* $y = y_1$*, то общее решение может быть найдено по формуле*: $y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1.$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

<u>Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.</u>

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$.

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $\quad y'' = k^2 e^{kx}$; $\quad ... \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений: $e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad ... \quad x^{m-1}e^{kx}$.

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad ... \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad ...x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0;$

$$(k-1)(k^2+k+1)=0; \qquad k_1 = 1; \qquad k^2+k+1=0;$$

$$D = 1-4=-3; \qquad k_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad k_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y^{IV} - y = 0.$

Составим характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0.$

$$(k^2-1)(k^2+1)=0; \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Общее решение: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 2.$

Общее решение: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$k^2 + 2k + 5 = 0; \qquad D = -16; \qquad k_1 = -1+2i; \qquad k_2 = -1-2i.$

Общее решение: $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0; \qquad k(k^2-7k+6)=0;$

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 6;$$

Общее решение: $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{6x};$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$

Общее решение: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}.$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y^V - 9y''' = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^5 - 9k^3 = 0; \qquad k^3(k^2-9)=0;$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0; \qquad k_4 = 3; \qquad k_5 = -3;$$

Общее решение: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x};$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$.

С учетом обозначения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = L(x)$ можно записать:

$$L(x) = f(x).$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ в некоторой области есть сумма* ***любого*** *его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

Доказательство. Пусть Y – некоторое решение неоднородного уравнения.

Тогда при подстановке этого решения в исходное уравнение получаем тождество: $L(Y) \equiv f(x)$.

Пусть $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$; $C_i = const$.

Далее покажем, что сумма $Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ является общим решением неоднородного уравнения.

$$L(Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(Y) + L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) = L(Y) = f(x)$$

Вообще говоря, решение Y может быть получено из общего решения, т.к. является частным решением.

Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким- то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Обычно оно находится подбором.

На практике удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**.

Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$;

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения: $y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$;

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию $A(x)$.

$$A(x)=\int\left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int\sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x; & dv=\sin x dx; \\ du=dx; & v=-\cos x \end{matrix}\right\} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int\cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Теперь находим *B(x).*

$$B(x)=\int x\cos x dx - 2\int\cos^2 x\sin x dx = \left\{\begin{matrix} u=x; & dv=\cos x dx; \\ du=dx; & v=\sin x; \end{matrix}\right\} = x\sin x - \int\sin x dx + \frac{2}{3}\cos^3 x =$$

$$=\frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения.

Окончательный ответ: $y=\frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Лекция 14. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,

где $P(x)=A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ - многочлен степени *m*.

Тогда частное решение ищется в виде: $y = x^r e^{\alpha x}Q(x)$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y''' - 4y' = x$.

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' - 4y' = 0$.

$$k^3 - 4k = 0; \quad k(k^2 - 4) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = -2;$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x};$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше. $P(x) = x; \quad \alpha = 0.$

Частное решение ищем в виде: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, где $r = 1; \quad \alpha = 0; \quad Q(x) = Ax + B.$

Т.е. $y = Ax^2 + Bx.$

Теперь определим неизвестные коэффициенты *A* и *B*.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A; \quad y''' = 0;$$

$$0 - 8Ax - 4B = x; \quad -8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8}; \quad B = 0;$$

Итого, частное решение: $y = -\dfrac{x^2}{8}.$

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения: $y = -\dfrac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m- большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений $L(y) = f_1(x)$ и $L(y) = f_2(x)$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0;$ $k_{1,2} = \pm i;$

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0,$ $r = 0, Q(x) = Ax + B;$ Т.е. $y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$
$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x;$

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0;$ $P_2(x) = -1;$ $\alpha = 0;$ $\beta = 2;$ $r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$
$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$
$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3}.$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x.$

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 - 0; \qquad k_1 = k_2 = 1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C; \; y = Cx^2 e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2 e^x; \qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2 e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2 e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2 e^x + Cx^2 e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \frac{3}{2} x^2 e^x.$

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x.$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y''' - y' = x^2 - 1.$

Характеристическое уравнение: $k^3 - k = 0; \quad k(k^2 - 1) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = -1;$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$

Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

Лекция 15. Ряды. Основные определения. Ряды с неотрицательными членами.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

<u>Определение.</u> Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

<u>Свойства рядов.</u>

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где C – постоянное число.

<u>Теорема.</u> *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна S, то ряд* $\sum Cu_n$ *тоже сходится, и его сумма равна CS. (*$C \neq 0$*)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

<u>Теорема.</u> *Если ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *сходятся и их суммы равны соответственно S и* σ*, то ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ *тоже сходится и его сумма равна S +* σ*.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Необходимые и достаточные условия сходимости ряда

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{3n-1}+...$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+$… расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{при четных } n\\ 1, & \text{при нечетных } n\end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n|<2$ при любом n.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n < M$, где M – некоторое число. Но т.к. $u_n \leq v_n$, то

$S_n \le \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+...+\frac{1}{\ln n}+...$

Т.к. $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если $u_n>0,\ \ v_n>0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условиеь $\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1,$ то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, *то при* $\rho < 1$ *ряд сходится, а при* $\rho > 1$ *– расходится. Если* $\rho = 1$, *то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$ Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число* $q<1$, *что для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{u_n}\ge 1$, *то ряд* $\sum u_n$ *расходится.*

Следствие. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1.$$ Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1;\infty)$, *то ряд $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\leq 1$ т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\leq 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **общегармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Лекция 16. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Функциональные ряды.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$$

где $u_n > 0,\quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$, *то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого ε>0 существует число N, такое, что при n>N и любом целом p>0 верно неравенство:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Функциональные ряды.

Определение. Частными (частичными) суммами функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,...$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Совокупность всех значений x, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n>N$ и любом целом $p>0$ неравенство

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

<u>Теорема.</u> (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :* $M_1+M_2+\ldots+M_n+\ldots$ *т.е. имеет место неравенство:* $\left|u_n(x)\right| \le M_n$.

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $\left|\cos nx\right| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при α=3>1 сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах (-∝, -1) ∪ (1, ∝) расходится.

<u>Свойства равномерно сходящихся рядов.</u>

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *- непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha,\beta \in [a,b]$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}.$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной *x*, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

Лекция 17. Степенные ряды. Теоремы Абеля. Действия со степенными рядами Разложение функций в степенные ряды. Формула Тейлора.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x| .$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и –1.

При x = -1: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$ ряд сходится по признаку Лейбница.

При x = 1: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ ряд расходится (гармонический ряд).

Теоремы Абеля.

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при x = x_1, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| < |x_1|$.

Доказательство. По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то

$$\left|a_nx_1^n\right| \le k,$$

где *k*- некоторое постоянное число. Справедливо следующее неравенство:

$$\left|a_nx^n\right| = \left|a_nx_1^n\right|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Из этого неравенства видно, что при $x<x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ по условию

теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum|a_n x^n|$ сходится, а значит ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2|x_1|$ с центром в точке $x = 0$.

<u>Следствие.</u> Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал (-R, R) называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

<u>Пример.</u> Найти область сходимости ряда $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Находим радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|n| = |\infty|$.

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x. Общий член этого ряда стремится к нулю. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$

Теорема. Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|; |x_1|)$.

Действия со степенными рядами.

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция *f(x)* определяется степенным рядом: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3) Сложение, вычитание, умножение и деление степенных рядов.

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, полученное из записанного выше равенства и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \dots + q_n b_0 \end{cases}$$

Формула Тейлора.

Теорема Тейлора. 1) *Пусть функция f(x) имеет в точке x = a и некоторой ее окрестности производные порядка до (n+1) включительно.{ Т.е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности}.*

2) Пусть x- любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε, что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- это выражение называется **формулой Тейлора**, а выражение:

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)}$$

называется **остаточным членом в форме Лагранжа**.

Доказательство. Представим функцию f(x) в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, значение которого в точке x = a равно значению функции f(x), а значения его производных равно значениям соответствующих производных функции в точке x = a.

$$P_n(a) = f(a); \quad P_n'(a) = f'(a); \quad P_n''(a) = f''(a); \quad \dots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (1)$$

Многочлен $P_n(x)$ будет близок к функции f(x). Чем больше значение n, тем ближе значения многочлена к значениям функции, тем точнее он повторяет функцию.

Представим этот многочлен с неопределенными пока коэффициентами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n \qquad (2)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов вычисляем производные многочлена в точке x = a и составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + ... + nC_n(x-a)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...2\cdot 1C_n \end{cases} \qquad (3)$$

Решение этой системы при x = a не вызывает затруднений, получаем:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2\cdot 1C_2$$

$$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1C_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

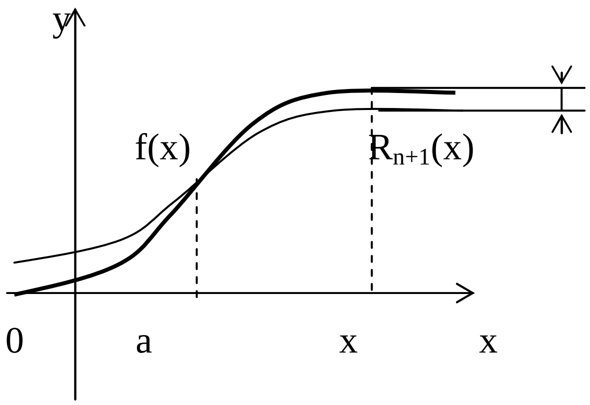
$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)...2\cdot 1C_n$$

Подставляя полученные значения C_i в формулу (2), получаем:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Как было замечено выше, многочлен не точно совпадает с функцией f(x), т.е. отличается от нее на некоторую величину. Обозначим эту величину $R_{n+1}(x)$. Тогда: $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$

Рассмотрим подробнее величину $R_{n+1}(x)$.



Как видно на рисунке, в точке x = a значение многочлена в точности совпадает со значением функции $P_n(x)$ Однако, при удалении от точки x = a расхождение значений увеличивается

.

Иногда используется другая запись для $R_{n+1}(x)$. Т.к. точка $\varepsilon \in (a, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0 < \theta < 1$, что $\varepsilon = a + \theta(x - a)$.

Тогда можно записать:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Тогда, если принять $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

Если принять n =0, получим: $\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\cdot\Delta x}$ – это выражение называется **формулой Лагранжа**. (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик и механик).

Формула Тейлора имеет огромное значение для различных математических преобразований. С ее помощью можно находить значения различных функций, интегрировать, решать дифференциальные уравнения и т.д.

Формула Маклорена.

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при a = 0:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Мы получили так называемую формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Следует отметить, что при разложении функции в ряд применение формулы Маклорена предпочтительнее, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т.к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой- либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

Однако, выбор числа *a* очень важен для практического использования. Дело в том, что при вычислении значения функции в точке, расположенной относительно близко к точке *a*, значение, полученное по формуле Тейлора, даже при ограничении тремя – четырьмя первыми слагаемыми, совпадает с точным значением функции практически абсолютно. При удалении же рассматриваемой точки от точки *a* для получения точного значения надо брать все большее количество слагаемых формулы Тейлора, что неудобно.

Т.е. чем больше по модулю значение разности ($x - a$) тем более точное значение функции отличается от найденного по формуле Тейлора.

Кроме того, можно показать, что остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$, причем долее высокого порядка, чем $(x - a)^m$, т.е. $R_{n+1}(x) = \alpha([x-a]^n)$.

Таким образом, ряд Маклорена можно считать частным случаем ряда Тейлора.

Лекция 18. Представление некоторых элементарных функций по формуле. Тейлора Разложение функций в степенные ряды.

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Непосредственное вычисление интегралов некоторых функций может быть сопряжено со значительными трудностями, а замена функции степенным рядом позволяет значительно упростить задачу. Нахождение значений тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических функций также может быть сведено к нахождению значений соответствующих многочленов.

Если при разложении в ряд взять достаточное количество слагаемых, то значение функции может быть найдено с любой наперед заданной точностью. Практически можно сказать, что для нахождения значения любой функции с разумной степенью точности (предполагается, что точность, превышающая 10 – 20 знаков после десятичной точки, необходима очень редко) достаточно 4-10 членов разложения в ряд.

Применение принципа разложения в ряд позволяет производить вычисления на ЭВМ в режиме реального времени, что немаловажно при решении конкретных технических задач.

Функция $f(x) = e^x$.

Находим: $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$

……………………

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$

Тогда: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$

Пример: Найдем значение числа е.

В полученной выше формуле положим х = 1.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$

Для 8 членов разложения: е = 2,71827876984127003

Для 10 членов разложения: е = 2,71828180114638451

Функция $f(x) = \sin x$.

Получаем $f(x) = \sin x$; $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$; $f'(0) = 1$;

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2)$; $f''(0) = 0$;

f‴(x) = -cosx = sin(x + 3π/2); f‴(0)=-1;

…………………………………………

$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2);$ $f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2);$

$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n + 1)\pi/2);$ $f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n + 1)\pi/2);$

Итого:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Функция f(x) = cosx.

Для функции cosx, применив аналогичные преобразования, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Функция f(x) = (1 + x)$^{\alpha}$. (α - действительное число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \quad f'(0) = \alpha;$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$

……………………………………………………..

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}; \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

Тогда: $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Если в полученной формуле принять α = n, где n- натуральное число и $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1} = 0$, тогда

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + x^n$$

Получилась формула, известная как **бином Ньютона**.

Чтобы получить наиболее точное значение функции при наименьшем количестве членов разложения надо в формуле Тейлора в качестве параметра *a* выбрать такое число, которое достаточно близко к значению *x*, и значение функции от этого числа легко вычисляется.

Для примера вычислим значение $\sin 20^0$.

Предварительно переведем угол 20^0 в радианы: $20^0 = \pi/9$.

Применим разложение в ряд Тейлора, ограничившись тремя первыми членами разложения:

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 = 0{,}348889 - 0{,}007078 + 0{,}000043 = 0{,}341854$$

без потери в точности ограничиться первым членом разложения, т.е. $\sin x \cong x$.

Функция f(x) = ln(1 + x).

Получаем: $f(x) = \ln(1 + x);$ $f(0) = 0;$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \qquad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \qquad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3}; \qquad f'''(0) = 2;$$

……………………………………………

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!;$$

Итого: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 2}{3!}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x);$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1};$$

Полученная формула позволяет находить значения любых логарифмов (не только натуральных) с любой степенью точности. Ниже представлен пример вычисления натурального логарифма ln1,5. Сначала получено точное значение, затем – расчет по полученной выше формуле, ограничившись пятью членами разложения. Точность достигает 0,0003.

$$\ln 1{,}5 = 0{,}405465108108164381$$

$$\ln 1{,}5 = \ln(1+0{,}5) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^4}{4} + \frac{0{,}5^5}{5} - \frac{0{,}5^6}{6} + \frac{0{,}5^7}{7} = 0{,}4058035$$

Разложение различных функций по формулам Тейлора и Маклорена приводится в специальных таблицах, однако, формула Тейлора настолько удобна, что для подавляющего большинства функций разложение может быть легко найдено непосредственно.

Разложение функций в степенные ряды.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд. Такие способы как разложение при помощи рядов Тейлора и Маклорена были рассмотрены ранее. Существует также способ разложения в степенной ряд **при помощи алгебраического деления.** Это – самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

Пример. Разложить в ряд функцию $\frac{1}{1-x}$.

По формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

то получаем: $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\quad f'(0) = 1$;

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0) = 3!;$$

………………………………

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}};\quad f^{(n)}(0)=n!;$$

Итого, получаем: $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

Рассмотрим способ разложения функции в ряд **при помощи интегрирования.**

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x)=f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx;$$

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x)=\ln(1+x)$.

Решим эту задачу при помощи интегрирования.

При $f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+x}$ может быть легко найдено способом алгебраического деления аналогично рассмотренному выше примеру.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

Тогда получаем: $\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Окончательно получим: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$

Пример. Разложить в степенной ряд функцию $arctgx$.

Применим разложение в ряд с помощью интегрирования.

$$f(x)=arctgx;\quad f(0)=0;\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2};$$

$$arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

Тогда $arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Окончательно получаем: $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$

Пример. С точностью до 0,001 вычислить интеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

Т.к. интегрирование производится в окрестности точки x=0, то можно воспользоваться для разложения подинтегральной функции формулой Маклорена.

Разложение функции cos$x$ имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Зная разложение функции cos$x$ легко найти функцию 1 – cos$x$:

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

В этой формуле суммирование производится по n от 1 до бесконечности, а в предыдущей – от 0 до бесконечности. Это – не ошибка, так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подинтегральное выражение.

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + ... + = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

Теперь представим наш интеграл в виде:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}dx$$

В следующем действии будет применена теорема о почленном интегрировании ряда. (Т.е. интеграл от суммы будет представлен в виде суммы интегралов членов ряда).

Вообще говоря, со строго теоретической точки зрения для применения этой теоремы надо доказать, что ряд сходится и, более того, сходится равномерно на отрезке интегрирования [0, 0,5]. Отметим лишь, что в нашем случае подобное действие справедливо хотя бы по свойствам определенного интеграла (интеграл от суммы равен сумме интегралов).

Итак:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int_0^{0,5}x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Big|_0^{0,5}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 0,5^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}$$

Итого, получаем:

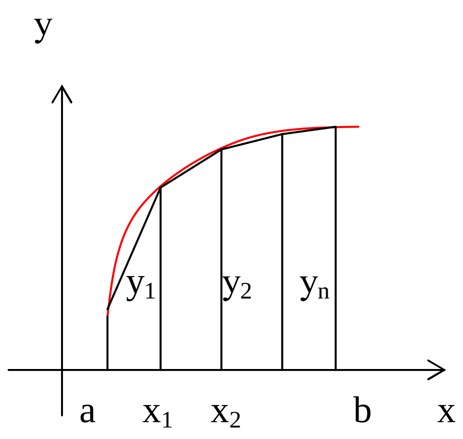
$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!(2n-1)2^{2n-1}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 6!}-...=$$

$$=0,25-0,00174+0,0000086-...\approx 0,248$$

Как видно, абсолютная величина членов ряда очень быстро уменьшается, и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения

Дополнительные лекции для самостоятельного изучения.

Формула трапеций.



Эта формула является более точной по сравнению с формулой прямоугольников. Подинтегральная функция в этом случае заменяется на вписанную ломаную.

Геометрически площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей вписанных трапеций. Очевидно, что чем больше взять точек n разбиения интервала, тем с большей точностью будет вычислен интеграл.

Площади вписанных трапеций вычисляются по формулам:

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x; \quad \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x; \quad \ldots \quad , \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

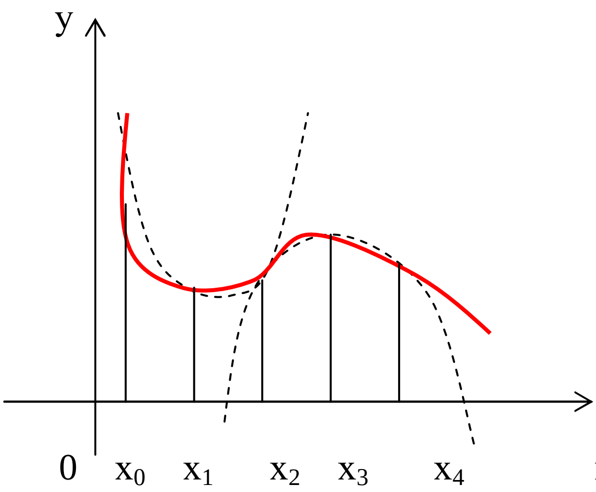
После приведения подобных слагаемых получаем **формулу трапеций**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Формула парабол (формула Симпсона)

Разделим отрезок интегрирования [a, b] на четное число отрезков (2m). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x) заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси Оу и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.



Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \qquad (1)$$

Обозначим $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2}(Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right]\Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

Если принять $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, то $S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$ (2)

Тогда уравнения значений функции (1) имеют вид:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

С учетом этого: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Отсюда уравнение (2) примет вид: $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

Складывая эти выражения, получаем **формулу Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})\right]$$

Чем больше взять число m, тем более точное значение интеграла будет получено.

Пример. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

По формуле Симпсона получим:

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}[y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) +$$
$$+ y(7)]].$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	2.828	3.873	4	4.123	4.899	6.557	8.944	11.874	15.232	18.947	22.978

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2.828+22.978+2[4+4.899+8.944+15.232]+4[3.873+4.123+6.557+$$
$$+11.874+18.947]]=91.151$$

Точное значение этого интеграла – 91.173.

Как видно, даже при сравнительно большом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная.

Для сравнения применим к этой же задаче формулу трапеций.

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)=\frac{8+2}{10}\left(\frac{2.828+22.978}{2}+3.873+4+4.123+\right.$$
$$+4.899+6.557+8.944+11.874+15.232+18.947)=91.352$$

Формула трапеций дала менее точный результат по сравнению с формулой Симпсона.

Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

С помощью степенных рядов возможно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+...+p_n(x)y=f(x)$$

Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды, то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям.

Это решение можно представить степенным рядом:

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+...$$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные c_i.

Эта задача решается **методом сравнения неопределенных коэффициентов**. Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые действия со степенными рядами (дифференцирование, сложение, вычитание, умножение и пр.)

Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_i.

Отметим, что этот метод применим и к нелинейным дифференциальным уравнениям.

<u>Пример.</u> Найти решение уравнения $y'' - xy = 0$ с начальными условиями *y(0)=1, y'(0)=0.*

Решение уравнения будем искать в виде $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ...$

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + ...$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + ...$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + ...) - (c_0x + c_1x^2 + c_2x^3 + c_3x^4 + ...) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + ... = 0$$

Отсюда получаем: $2c_2 = 0$

$$\begin{aligned} &6c_3 - c_0 = 0 \\ &12c_4 - c_1 = 0 \\ &20c_5 - c_2 = 0 \\ &30c_6 - c_3 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Получаем, подставив начальные условия в выражения для искомой функции и ее первой производной: $\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$

Окончательно получим: $c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = \frac{1}{6}; \quad c_4 = 0; \quad c_5 = 0;$

$c_6 = \frac{1}{180}; \quad ...$ Итого: $y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...$

Существует и другой метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же пример. Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Если заданные начальные условия $y(0)=1$, $y'(0)=0$ подставить в исходное дифференциальное уравнение, получим, что $y''(0) = 0$.

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде $y'' = xy$ и будем последовательно дифференцировать его по x.

$$\begin{aligned}
&y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1;\\
&y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;\\
&y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0;\\
&y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

После подстановки полученных значений получаем:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$$

Ряды Фурье. Тригонометрический ряд.

Определение. Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \ldots$$

или, короче, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$.

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции $\sin nx$ и $\cos nx$ также периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке [-π; π], а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна *f(x)*.

Определим коэффициенты этого ряда.

Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0,1,2,.. \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,..., \quad n = 1,2,...$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул. Т.к. функция *f(x)* непрерывна на отрезке [-π; π], то существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = \pi a_0$$

Такой результат получается в результате того, что $\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = 0$.

Получаем: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на cosnx и интегрируем в пределах от -π до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx)dx = \pi a_n$$

Отсюда получаем: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1,2,...$

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на sinnx и интегрируем в пределах от -π до π.

Получаем: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Таким образом, если функция *f(x)* – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции *f(x)*.

Определение. **Рядом Фурье** для функции *f(x)* называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции *f(x)* сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье.

Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.

Теорема. (Теорема Дирихле) *Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке [-π;π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π;π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$*, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке [-π;π].

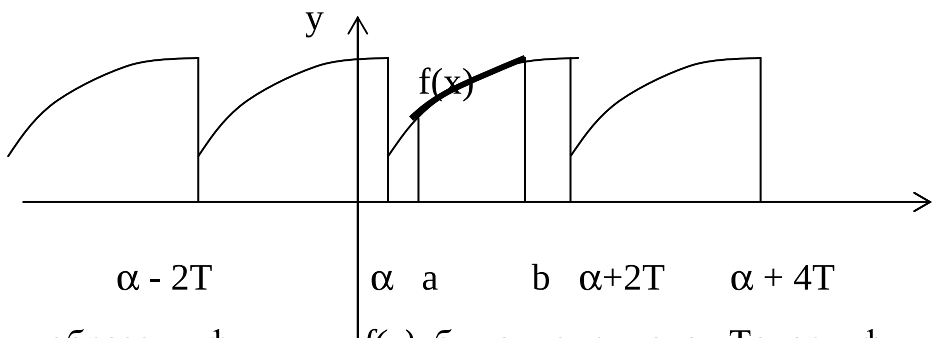
Теорема. *Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-π;π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции* *f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. *При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

Разложение в ряд Фурье непериодической функции.

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция *f(x)* задана на отрезке [a, b] и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b-a|$, совпадающую с функцией f(x) на отрезке [a, b].



Таким образом, функция *f(x)* была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка [a, b] совпадает с функцией *f(x),* т.е. можно считать, что функция *f(x)* разложена в ряд Фурье на отрезке [a, b].

Таким образом, если функция f(x) задана на отрезке, равном 2π ничем не отличается от разложения в ряд периодической функции. Если же отрезок, на котором задана функция, меньше, чем 2π, то функция продолжается на интервал (b, a + 2π) так, что условия разложимости в ряд Фурье сохранялись.

Вообще говоря, в этом случае продолжение заданной функции на отрезок (интервал) длиной 2π может быть произведено бесконечным количеством способов, поэтому суммы получившихся рядов будут различны, но они будут совпадать с заданной функцией f(x) на отрезке [a,b].

<u>Ряд Фурье для четных и нечетных функций.</u>

Отметим следующие свойства четных и нечетных функций:

1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \textit{нечетная} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \textit{четная} \end{cases}$$

2) Произведение двух четных и нечетных функций является четной функцией.

3) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Справедливость этих свойств может быть легко доказана исходя из определения четности и нечетности функций.

Если f(x) – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0; \qquad (n = 1,2,...)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 0,1,2,...).$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n = 1,2,...).$$

<u>Пример.</u> Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом T = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx dx = \left\{\begin{matrix} u = x^3; & dv = \sin nx dx; \\ du = 3x^2 dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3 \cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \cos nx dx; \\ du = 2x dx; & v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right]\right) =$$

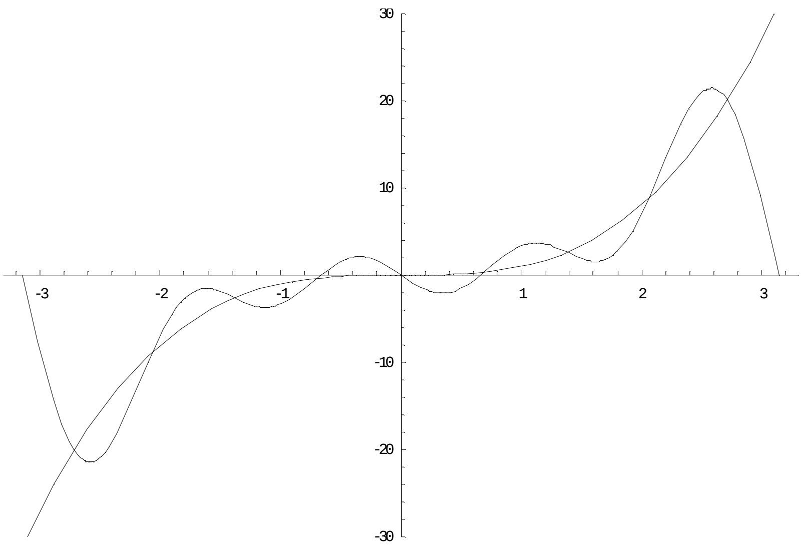
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \sin nx dx; \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x \cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{6\pi \cos \pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} \right)\right) = -\frac{2\pi^2 \cos \pi n}{n} + \frac{12 \cos \pi n}{n^3} = (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right)$$

Получаем: $\quad x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx$.

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.



Ряды Фурье для функций любого периода.

Ряд Фурье для функции *f(x)* периода $T = 2l$, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [$-l$, l] имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,...$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

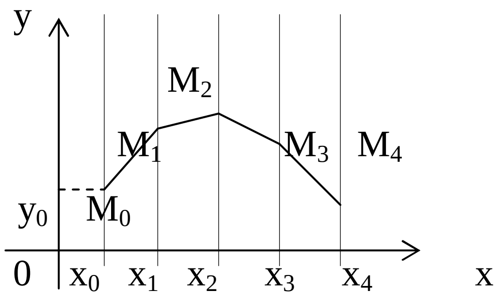
В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

Метод Эйлера.

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке

$$tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$

Производя аналогичную операцию для отрезка [x_1, x_2], получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера**.

Можно записать общую формулу вычислений:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый **уточненный метод Эйлера** или **формула пересчета**.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения

$y_0' = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h;$$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2}h;$$

Затем третье: $y_1^{(3)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2}h;$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений *y*.

Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

При использовании компьютерной версии “*Курса высшей математики*” возможно запустить программу, которая решает любое дифференциальное уравнение первого порядка методом Эйлера и уточненным методом Эйлера. На каждом шаге вычислений подробно выводятся все указанные выше значения.

Метод Рунге – Кутта.

Метод Рунге – Кутта является более точным по сравнению с методом Эйлера.

Суть уточнения состоит в том, что искомое решение представляется в виде разложения в ряд Тейлора.

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} + y_i^{IV}\ \frac{h^4}{4!} + \ldots$$

Если в этой формуле ограничиться двумя первыми слагаемыми, то получим формулу метода Эйлера. Метод Рунге – Кутта учитывает четыре первых члена разложения.

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} = y_i + \Delta y_i\ .$$

В методе Рунге – Кутта приращения Δy_i предлагается вычислять по формуле: $\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$

где коэффициенты k_i вычисляются по формулам:

$$k_1^{(i)} = hf\,(x_i, y_i);$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^{(i)}\right);$$

<u>Пример.</u> Решить методом Рунге – Кутта дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1.

Для i = 0 вычислим коэффициенты k_i.

$$k_1^{(0)} = hf\,(x_0, y_0) = 0{,}1(x_0 + y_0) = 0{,}1(0+1) = 0{,}1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}05) = 0{,}11;$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}055) = 0{,}1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1105) = 0{,}1211;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}22 + 0{,}221 + 0{,}1211) = 0{,}1104;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1104 = 1{,}1104;$$

Последующие вычисления приводить не будем, а результаты представим в виде таблицы.

i	x_i	k		Δy_i	y_i
0	0	1	0,1000	0,1104	1
		2	0,1100		
		3	0,1105		
		4	0,1155		
1	0,1	1	0,1210	0,1325	1,1104
		2	0,1321		
		3	0,1326		
		4	0,1443		
2	0,2	1	0,1443	0,1569	1,2429
		2	0,1565		
		3	0,1571		
		4	0,1700		
3	0.3	1	0,1700	0,1840	1,3998
		2	0,1835		
		3	0,1842		
		4	0,1984		
4	0,4	1	0,1984	0,2138	1,5838
		2	0,2133		
		3	0,2140		
		4	0,2298		
5	0,5				1,7976

Решим этот же пример методом Эйлера.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$

$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$

$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad \frac{dy}{y} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$

$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \qquad y = Ce^x;$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x)=\int xe^{-x}dx=\begin{cases} u=x; & dv=e^{-x}dx; \\ du=dx; & v=-e^{-x}; \end{cases} = -xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C;$$

Общее решение: $y=Ce^{x}-x-1;$

С учетом начального условия: $1=C-0-1; \qquad C=2;$

Частное решение: $y=2e^{x}-x-1;$

Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i			
		Метод Эйлера	Уточненный метод Эйлера	Метод Рунге - Кутта	Точное значение
0	0	1	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1104	1,1103
2	0,2	1,22	1,243	1,2429	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3998	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5838	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7976	1,7975

Как видно из полученных результатов метод Рунге – Кутта дает наиболее точный ответ. Точность достигает 0,0001. Кроме того, следует обратить внимание на то, ошибка (расхождение между точным и приближенным значениями) увеличивается с каждым шагом вычислений. Это обусловлено тем, что во – первых полученное приближенное значение округляется на каждом шаге, а во – вторых – тем, что в качестве основы вычисления принимается значение, полученное на предыдущем шаге, т.е. приближенное значение. Таким образом происходит накопление ошибки.

Это хорошо видно из таблицы. С каждым новым шагом приближенное значение все более отличается от точного.

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где x- независимая переменная, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Теорема. (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $\ldots$ $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, ..., y_n$, *то для любой точки* $(x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ *этой области существует единственное решение* $y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $\ldots$ $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Определение. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \qquad (2)$$

Решения системы (2) обладают следующими свойствами:

1) Если *y, z, u* – решения системы, то *Cy, Cz, Cu* , где *C = const* – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$, $u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде:

$$y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$$

Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно *k*. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (2):

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$

$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$

$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (2):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$

$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$

$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$

$$x'' - 7x' + 6x = 0, \quad k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$

$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$$

8. Содержания практических занятий

1. Практикум по высшей математике для экономистов.

Под редакцией Н. Ш. Кемера. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. Москва. 2002г.

2. Элементы матричной алгебры и их приложения в экономике.

Учебное пособие. Благовещенск 2003г.

3**. Интегрирование функции одной переменной**.

Учебное пособие. Благовещенск 2006г.

Занятие 1. Матрицы и операции над ними.

1. № 1.6 – 1.10, 1.12 – 1. 15, 1.29 – 1.31, 1.41 – 1.42, 1.54 – 1.57. Контрольные задания стр. 29.
2. стр. 55 - 58 .

Занятие 2. Определители и их свойства, вычисление. Формулы Крамера.

№ 2.6 – 2.9, 2.14 – 2.17, 2.37 – 2.42, 2.55 – 2.58.

1. стр. 59 – 61.

Занятие 3. Решение экономических задач.

1. № 2.62 – 2.66. Тестовые задания стр. 56.
2. стр.61 – 64.

Занятие 4. Системы линейных уравнений.

Контрольные задания стр. 54 - 56.

Занятие 5. Непосредственное интегрирование.

1. № 10.2 – 10.17, 10.28 – 10.49, 10.56 – 10.70.

3. стр. 12 – 13, 16.

Занятие 6. Интегрирования рациональных функций.

1. № 10.107 – 10.130.

3. стр.22 – 23.

Занятие 7. Интегрирования иррациональных функций.

1. № 10.133 – 142.

3. стр. 24 – 25.

Занятие 8. . Интегрирования тригонометрических функций

1. № 10.146 – 10.163. Контрольные задания стр. 254.

3. стр. 29.

Занятие 9. Методы вычисления определенного интеграла.

№ 11.2 – 11.28.

Занятие 10. Геометрические приложения определенного интеграла.

№ 11.36 – 11.45, 11.54 – 11.55, 11.62 – 11.67.

Занятие 11. Дифференциальные уравнения первого порядка.

№ 12.17 – 12.26, 12.33 – 12.40, 12.48 – 12.54.

Занятие 12. Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка. № 12.62 – 12.71.

Занятие 13. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. № 12.78 – 12-89

Занятие 14. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Контрольные задания стр. 308 – 309.

Занятие 15. Признаки сходимости рядов с положительными членами. № 13.17 – 13.24, 13.29 – 13.35, 13.39 – 13.50, 13.56 – 13.62.

Занятие 16. Сходимость рядов с членами произвольного знака. № 13.71 – 13.77, 13.82 – 13.84, 13.89, 13.90. Контрольные задания стр. 328.

Занятие 17. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора Маклорена.
№ 14.2 – 14.13, 14.29 – 37.

Занятие 18. Применение рядов в приближенных вычислениях. № 14.60 – 14.77. Контрольные задания стр. 350.

9. Примерные задания для контрольных и расчетно-графических работ.

Расчетно – графическая работа № 1.

Элементы матричной алгебры и их приложения

Задание №1. Даны матрицы *А, В, С, Д*.

Найти: 1) $A^T, B^T, Д^T$; 2) $A\,B+C\,Д$; 3) $2A-E$; 4) $E-A$.

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\7&3&5\\5&4&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-2&2&8&1\\0&1&-7&6\\4&0&5&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}9&0\\7&4\\-1&8\end{pmatrix};\ Д=\begin{pmatrix}1&-1&6&0\\2&3&7&-2\end{pmatrix}.$$

Задание №2. Даны матрицы *А, В, С*.

Вычислить: 1) детерминанты матриц *А, В* и *С*; 2) rang *В*, rang *С*; 3) A^{-1}, B^{-1}.

A=$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; C=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание № 3 Решить систему: 1) методом Гаусса; 2) по формулам Крамера; 3) с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 7x-5y = 31, \\ 4x+11z=-43, \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$$

Задание № 4. Найти общее и два частных решения системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x+5y+6z+2t=3, \\ 3x-y+2z+6t=4, \\ 2x+3y+z+3t=1. \end{cases}$$

Задание №5. Решить однородную систему уравнений $\begin{cases} x+2y+2z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x+4y-5z=0. \end{cases}$

Задание №6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание №7. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели заданы векторами:

$\vec{\mathbf{g}}$ – вектор ассортимента (количество изделий); $\vec{\mathbf{g}}$=(44; 30; 66; 58

$\vec{\mathbf{s}}$ – вектор расхода сырья (кг/изд.); $\vec{\mathbf{s}}$=(7; 2; 3; 6)

$\vec{\mathbf{t}}$ – вектор затрат рабочего времени (ч/изд.); $\vec{\mathbf{t}}$=(5; 4; 8; 7)

$\vec{\mathbf{p}}$ – ценовой вектор (ед/изд.); $\vec{\mathbf{p}}$=(27; 63; 40; 87)

Требуется определить ежесуточные показатели предприятия:

S – расход сырья;

Т – затраты рабочего времени;

Р – стоимость выпускаемой продукции

Задание №8. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы:

$$\begin{array}{cc} & \text{Виды сырья} \\ & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ A= & \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} \\ \mathbf{a}_{41} & \mathbf{a}_{42} & \mathbf{a}_{43} & \mathbf{a}_{44} \end{pmatrix} \text{Вид изделия} \end{array}$$

При заданном векторе-плане выпуска продукции $\vec{\mathbf{g}}$ найти затраты сырья каждого вида. $A=\begin{pmatrix} 9\,3\,5\,6 \\ 3\,2\,4\,7 \\ 2\,3\,4\,9 \\ 4\,2\,3\,5 \end{pmatrix}$ $\vec{\mathbf{g}}$ = (80; 30; 54; 30)

Задание №9. Затраты четырех видов сырья на выпуск четырех видов продукции характеризуется матрицей А, С – матрица себестоимости сырья и его доставки (соответственно, первая и вторая строки).

Найти: 1) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку;

2) общие затраты на сырье и его транспортировку.

$$C=\begin{pmatrix} 4\,1\,5\,6 \\ 2\,2\,8\,3 \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} 9\,3\,5\,6 \\ 3\,2\,4\,7 \\ 2\,3\,4\,9 \\ 4\,2\,3\,5 \end{pmatrix};\ \vec{\mathbf{g}}=(80;\ 30;\ 54;\ 30)$$

Задание №10. В матрицах А и В представлены: А – данные о дневной производительности пяти предприятий, выпускающих четыре вида продукции, В – матрица затрат сырья на единицу изделия: $\vec{\mathbf{P}}$ – вектор стоимости сырья,

$\vec{T}$ – вектор количества рабочих дней в году. Требуется определить**:**

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска изделий указанных видов и при определенном количестве рабочих дней.

№ п/п	$A=(a_{ij})$, i=1, 2, 3, 4 – вид изделия j=1, 2, 3, 4, 5 – производственные предприятия	$B=(в_{ij})$, i=1, 2, 3 – вид сырья j=1, 2, 3, 4 – вид изделия	$\vec{P}$	$\vec{T}$
1	$\begin{pmatrix} 2&5&2&0&5 \\ 7&3&2&5&0 \\ 2&5&9&0&1 \\ 5&8&3&7&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2&0&3&4 \\ 2&4&9&1 \\ 4&5&4&0 \end{pmatrix}$	(64; 45; 30)	(120; 150; 240; 140; 290)

Задание №11. Исследовать продуктивность матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Задание №12. Найти запас продуктивности матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Задание №13. Ниже приведены данные об исполнении стоимостного баланса за отчетный период (усл. ден. ед.).

№ п/п	***Отрасль***	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		O_1	O_2		
1	O_1	x_{11}	x_{12}	y_1	x_1
2	O_2	x_{21}	x_{22}	y_2	x_2

Таблица задана матрицей $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ и векторами $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Требуется: 1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;

2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 100 % и 50% соответственно;

3) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в k раз, а отрасли O_2 –Р%.

№ п/п	X	$\vec{\mathbf{y}}$	$\vec{\mathbf{x}}$	k	P
1	$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 85 \\ 160 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$	1,4	20

Задание № 14 . Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей – промышленности и сельского хозяйство. Пусть A – матрица прямых затрат, $\vec{V}$ – вектор норм добавленной стоимости**.**

Определить: 1) равновесные цены; 2) равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=0 и b=1,5 $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}=(8, 10)$

Задание №15. Дана структурная матрица $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов равна b=12000.

Задание № 16. Используя балансовые соотношения между элементами таблицы, завершите составление баланса в каждом из следующих случаев:

	O_1	O_2	$\sum$	Y	X
O_1	150	0		130	
O_2	70	120			

Σ			
V			
X		240	

Расчетно – графическая работа № 2.

Неопределенные и определенные интегралы.

Часть 1. Неопределенные интегралы.

$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$	$\int \ell^{2x^2+3}xdx$	$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$
$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+5}}{x}dx$	$\int x\sin x^2 dx$	$\int \frac{4x^5 dx}{\sqrt{x^6}+7}$
$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$	$\int \frac{x^3}{4+5x^4}dx$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$	$\int \ell^{4x}\sin \ell^{4x}dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$
$\int \frac{x^3}{x-4}dx$	$\int \frac{x-2}{x+1}dx$	$\int \frac{dx}{2x^2+4x+6}$
$\int \arcsin 2xdx$	$\int x\ln xdx$	$\int x\cos xdx$
$\int (x^2+3)\ell^{3x}dx$	$\int arctgxdx$	$\int \frac{x}{\ell^{2x}}dx$
$\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-9}dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}}dx$
$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$	$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x}dx$	$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)}$
$\int \sin^2 x\cos^3 xdx$	$\int \sin^2(x+\frac{3}{4}\pi)dx$	$\int \cos 2x\cos 4xdx$
$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$	$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$	$\int \cos^4 xdx$

Часть 2.

1 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot dx$ б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx$

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} \cdot dx$ г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{16}} x^2 \cdot \sin 4x \cdot dx$

д) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx$ е) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x \cdot dx}{x^2 + x + 1}$

2 Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (2x+1)^2 \cdot dx$

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ г) $\int\limits_{0}^{5} \frac{x-3}{x} \cdot dx$

3 Найти площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми:

а) $y = \sqrt{2x-1}$, y = 0, x = 5. б) $y = x^2 - 2x + 3$, y = 3x – 1

4 Найти объём тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными кривыми. $y = \frac{1}{x}$, x = 1, x = 2, y = 0

5 Вычислить приближенно определенный интеграл, разделив [a;b] на 10 частей. $\int\limits_{1}^{11} \sqrt{x^3 + 3} \cdot dx$.

6 Найти среднее значение издержек K(x), выраженных в денежных единицах, если объём продукции x меняется [0;a] единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение $K(x) = 3x^2 + 4x$, x Є [0;2].

7 Определить количество тракторов, выпущенных за t лет, если годовой выпуск рос в арифметической прогрессии f(t) = 3 + 4t, t = 3 года

8 Определить запас товаров на складе, образуемых за t дней, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t) = 3t^2 + t$, t = 4.

9 Определить объём продукции, произведённой рабочим за время t, если производительность труда характеризуется функцией

$f(t) = \frac{4}{3t+4} + 7$, t Є [2;3].

10 Найти массу плоской пластины, ограниченной заданными линиями, если плотность в каждой точке ρ = f(x,y). y + x = 2, x = 0, y = 0, ρ = x + 2.

11 Найти объём тела V, ограниченного заданными поверхностями.

$z = \frac{y^2}{2}$, 2x + 3y – 12 = 0, z = 0, x = 0.

12 Найти массу объёмного тела, ограниченного заданными поверхностями, если плотность в каждой точке ρ = f(x,y,z).

3x+ y + 3z = 6, x = 0, y = 0, z = 0, ρ = x.

Расчетно – графическая работа № 3.
Дифференциальное уравнение. Ряды.

1. **Решить дифференциальное уравнение.**

1. $xy' - y = 0$

2. $y' = (2y+1)ctgx, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

3. $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0$

4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

5. $y''' = \sin\frac{x}{3} - 1$

6. $y''' + y' = 0$

7. $xy'' + 2y' = x^2$

8. $y^{IV} - 4y''' + 13y'' = 0$

9. $y'' + 4y = \sin x$

10. $y'' + 2y' + 10y = -x^2 + 3x$

11. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

12. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3$

2. Определить сходимость числовых рядов.

1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$; 2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+1}$; 3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4-2n}$; 4). $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{3n-1})^n$;

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n-1}$; 6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4-3n}$; 7). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^n}$; 8). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$;

9). $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n}$.

3. Вычислить сумму ряда с заданной точностью.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$ 0,01

4. Найти интервал сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{10^n}$**.**

5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ 0,01**.**

Примерные варианты контрольных

Контрольная работа №1.

1.Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

2.Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

3. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 14$;

Решить задачу.

Задача. Для выполнения полевых работ сельскохозяйственное предприятие может купить тракторы марок Т1 и Т2. Все необходимые данные приведены .

Вид работ	Объем работы	Производительность трактора	
		T_1	T_2
P_1	60	4	3
P_2	40	8	1
Цена трактора, ден. ед.		7	2

Записать в математической форме условия выполнения всего комплекса полевых работ приобретенными тракторами, если на их покупку отпущено 53 ден. ед.

Установить, сколько тракторов той и другой марки следует приобрести сельскохозяйственному предприятию для выполнения запланированного объема полевых работ.

Контрольная работа №2.

Задача 1. Решить систему уравнений методом матриц и по формулам Крамара.

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16. \end{cases}$$

Задача 2. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} x-y-z=0, \\ x+4y+2z=0, \\ 3x+7y+3z=0. \end{cases}$$

Задача 3. С помощью теоремы Кронекера - Капелли доказать совместность системы линейных уравнений и решить их:

1) $\begin{cases} 2x+4y+3z+t=3, \\ 3x+5y+z+2t=5, \\ x+2y+2z+4t=2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x_1+3x_2+x_3=2, \\ x_1-2x_2+x_3=-3, \\ 8x_1+x_2+2x_3=-1 \end{cases}$

Контрольная работа №3.

Вариант 1

1. $\int(\cos 5x+3\sqrt{x}-e^{2x})dx$.
2. $\int(2+5x)^9 dx$.
3. $\int(\sqrt[4]{2x+3}-\sqrt[3]{x-2})dx$.
4. $\int(\frac{3}{4x-1}-\frac{1}{1-8x})dx$.
5. $\int\arcsin^3 x\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.
6. $\int(\frac{20}{36+9x^2}-\frac{4}{\sqrt{1-4x^2}})dx$.
7. $\int(\frac{\sin x}{\cos^5 x}-\frac{1}{x(1+\ln x)})dx$.

Вариант 2

1. $\int(\sin 7x+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^3)dx$
2. $\int\frac{dx}{\cos^2 4x}$.
3. $\int(\sqrt[3]{5-2x}-\sqrt{3x+1})dx$.
4. $\int(\frac{1}{5x+2}-\frac{3}{1+2x})dx$.
5. $\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.
6. $\int(\frac{1}{9x^2+1}-\frac{3}{\sqrt{8-9x^2}})dx$.
7. $\int(\cos^3 x+e^{\cos x})\sin x dx$.

8. $\int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$.

9. $\int \sin^2 4xdx$.

8. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$.

9. $\int \cos^2 3xdx$.

Контрольная работа №4.

Вариант 1

1. $\int x\ln 2xdx$.
2. $\int (x+1)\sin xdx$.
3. $\int x^2 \cos 3xdx$.

Вариант 2

1. $\int \arcsin 5xdx$.
2. $\int (x+3)\cos 2xdx$.
3. $\int x^2 e^x dx$.

Контрольная работа №5.

Вариант 1

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$.
2. $\int \frac{xdx}{(x-3)(x^2+25)}$.
3. $\int \frac{(x+3)dx}{x^2(x-1)}$.

Вариант 2

1. $\int \frac{dx}{(x-1)^2 x}$.
2. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+9)}$.
3. $\int \frac{x^2+3x}{(x+1)(x-2)}dx$.

Контрольная работа №6

1. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^3 \frac{dx}{(x+2)^2}$

б) $\int_2^3 \frac{dx}{x\ln^2 x}$

в) $\int_1^2 x^2\ln 2xdx$

г) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$

д) $\int_1^2 (x+1)\cdot \ln x\cdot dx$

е) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми

а) $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = 0$.

б) $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.

3. Найти объём тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными кривыми.

$y = x^2$, $y = x + 2$, $x \geq 0$

Контрольная работа №7.

1. **Решить дифференциальное уравнение.**

1. $(1+y^2)dx = (1+x^2)dy$
2. $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$
3. $y'x - y = x^3y^2$
4. $y''' = \sin 4x - 1$
5. $y^{IV} - 8y' = 0$
6. $4y''' - 8y'' + 5y' = 0$
7. $y'' + y' = x^2 - 2x$
8. $y'' + 2y' - 8y = 2\sin 3x$
9. $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 1$

Контрольная работа №8.

Определить сходимость числовых рядов.

1). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}$; 2). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n}$; 3). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n+3}$; 4). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$;

5). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^n$; 6). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$; 7). $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$; 8). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+n^2}$;

2. **Вычислить сумму ряда с заданной точностью.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+2)}$ 0,001.

10. Тестовые задания для контроля знаний

Тестовое задания №1. Элементы матричной алгебры и их приложения

1. Векторы $\vec{a}=\{2;6;\alpha;5\}$и $\vec{b}=\{\alpha;3;2;7\}$ ортогональны при α, равном…

2. Векторы $\vec{a}=\{2;\alpha;5;2\}$и $\vec{b}=\{6;2;\beta;6\}$ коллинеарны при значениях параметров, равных…

3. Векторы $\vec{a}=\{3;2\}$ и $\vec{b}=\{k;6\}$ образуют базис в двумерном пространстве при k, не равном…

4. Линейная комбинация $\lambda\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$есть вектор $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ при значениях параметров λ и μ, соответствено равных…

5. Одним из базисов системы векторов $\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ являются векторы…

6. Система векторов $(2;\quad 1;\quad 1)$, $(1;\quad 1;\quad 1)$, $(2;\quad 1;\quad 3)$ является линейно…

7. Скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{4;\quad 3;\quad 1;\quad 0\}$ и $\vec{b}=\{1;\quad 2;\quad 6;\quad 2\}$ равно…

8. Детерминант матрицы $\begin{pmatrix}1&4&3&4\\0&1&0&1\\0&2&1&2\\2&-1&3&1\end{pmatrix}$ равен…

9. Если $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&0\\2&1\end{pmatrix}$, то наименьший элемент матрицы A^T+2B равен …

10. Если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, то наибольший элемент матриц равен …

11. Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & -2\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$ равен…

12. Если $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, то сумма элементов матрицы A^{-1} равна…

13. Если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, то координаты собственного вектора соответствующего меньшему собственному значению равны…

14. Число свободных неизвестных в системе $\begin{cases}2x+\ \ y+z=0,\\ -x+2y+3z=0,\\ x+5y+4z=0\end{cases}$ равно…

15. Если $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}7\end{pmatrix}$ – структурная матрица торговли двух стран, то бюджеты этих стран, удовлетворяющие без дефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов b=1000, соответственно равны …

16. Если $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V}=\{3;\quad 6\}$–вектор норм добавленной стоимости, то равновесные цены равны…

17. Если $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат $\vec{x}=\{80;100\}$–вектор валового продукта, то $\vec{y}$ – вектор конечного продукта – равен…

11. Вопросы для подготовки к экзаменам

Раздел 1. Линейная алгебра.

1. Определение матрицы.
2. Сложение и вычитание матриц, свойства.
3. Умножение матриц на число, свойства.
4. Умножение матриц.
5. Равенство матриц.
6. Транспонирование матриц.
7. Определитель, его определение, порядок.
8. Основные свойства определителей.
9. Обратная матрица (определение).
10. Нахождение обратной матрицы.
11. Решение матричных уравнений.
12. Минор матрицы.
13. Ранг матрицы.
14. Элементарные преобразование матриц.
15. Эквивалентные матрицы.
16. Общий вид систем линейных неоднородных уравнений.
17. Общий вид систем линейных однородных уравнений.
18. Определение решения систем линейных уравнений.
19. Совместные и несовместные системы уравнений.
20. Матричная запись систем линейных уравнений.
21. Методы решения систем линейных уравнений.
22. Методы Гаусса решения систем линейных уравнений.
23. Теорема Кронекера – Капелли.
24. Условия единственности решения систем линейных уравнений.
25. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.
26. Решение систем линейных уравнений, когда число уравнений и неизвестных не совпадают.

27. N-мерные векторы. Действия с n-мерными векторами.
28. Скалярное произведение n-мерных векторов. Свойства скалярного произведения.
29. Длина вектора. Угол между n-мерными векторами.
30. Линейные комбинации векторов.
31. Линейная зависимость векторов.
32. Базис и размерность линейного пространства.
33. Ортогональные системы векторов.
34. Ортонормированная система векторов. Декартова система координат.
35. Модель Леонтьева.
36. Матрица затрат.
37. Условия продуктивности матрицы полных затрат.
38. Модель равновесных цен.
39. Линейная модель торговли.

Раздел 2 Интегральное исчисление.

40. Неопределенный интеграл, его определение геометрическая интерпретация.
41. Методы и правила интегрирования.
42. Определенный интеграл, определение и геометрическая интерпретация.
43. Методы интегрирования определенных интегралов.
44. Несобственные интегралы.
45. Кратные интегралы и их вычисление.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения.

46. Понятие о дифференциальном уравнении и его решении.
47. Порядок дифференциального уравнения.
48. Классификация дифференциальных уравнений: линейные, нелинейные, однородные, неоднородные, с постоянными и функциональными коэффициентами, без и правой частью.
49. Методы решения дифференциальных уравнений.

Раздел 4. Ряды.

50.Понятие числового ряда.

51.Примеры простейших числовых рядов.

52.Ряды с положительными членами.

53.Ряды с знакопеременными членами.

54.Сходимость числовых рядов.

55.Признаки сходимости рядов: необходимые и достаточные.

56.Примеры простейших функциональных рядов.

57.Степенные ряды, их примеры.

58.Ряд Маклорена.

59.Ряд Тейлора.

60. Примеры разложения функций в ряды Маклорена и Тейлора.

61. Радиус (интервал) сходимости степенного ряда.

62. Приложения рядов.

12. Примерные экзаменационные билеты.

Экзаменационный билет №1.

1. Постановка и решение задачи о массе фигуры. Записать рабочие формулы для вычисления массы любой фигуры.
2. Сформулировать алгоритм отыскания области сходимости степенного ряда.
3. Понятие минора и алгебраического дополнения элементов определителя.
4. Практические задания.

1.Если матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то сумма элементов матрицы AB равна _______________

2.В системе $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$,число независимых уравнений равно ____________

3.Если матрица $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6\\ 0,8 & 0,4\end{pmatrix}$- структурная матрица торговли двух стран, то бюджет этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов b=8000, соответственно равны______________

4.Если $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,5\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}$- матрица прямых затрат, $\overline{V}=(2;7)$- вектор норм добавленной стоимости, то равновесные цены равны______________

5.Если $A=\begin{pmatrix}0,07 & 0,14\\ 0,12 & 0,,10\end{pmatrix}$- матрица прямых затрат,$\overline{Y}=(72;123)$- вектор конечного продукта, то $\overline{X}$ - вектор валового продукта, равен______________

6. Неопределенный интеграл $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$ равен______________

7.Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ равен______________

8.Несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$______________

9.Площадь фигуры, ограниченной линиями y$=x^2-6$x и y+x=4, равна_______

10.Длина дуги кривой $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ рана______________

11.Частное решение дифференциального уравнения ylnydx+xdy=0, удовлетворяющее условие y(1)=e, имеет вид______________

12. 12.Если y(x)- частное решение дифференциального уравнения y''+4y=0, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=0, y'(0)=1, то y$\left(\frac{\pi}{8}\right)$ равно_________

13.Общее решение дифференциального уравнения y''+y'=x+1 имеет вид______

14. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ __________________ в силу__________________

15.С точностью до 0,01 интеграл $\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x^2}dx$ равен_____________

Экзаменационный билет №2.

1. Доказать неравенство Коши-Буняковского.
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и их решение.
3. Понятие несобственного интеграла I рода и его сходимости.
4. Практические задания.

1.Если матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то наибольший элемент матрицы

$2A + B^T$ равен ______________

2.Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ равен ______________

3.Если матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$- структурная матрица торговли двух стран, то бюджет этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов b=7000, соответственно равны______________

4.Если $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$- матрица прямых затрат, $\overline{V} = (4;8)$- вектор норм добавленной стоимости, то равновесные цены равны______________

5.Если $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$- матрица прямых затрат,$\overline{Y} = (150;100)$- вектор конечного продукта, то $\overline{X}$ - вектор валового продукта, равен______________

6. Неопределенный интеграл $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ равен______________

7.Неопределенный интеграл $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$ равен______________

8.Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1-x}$______________

9.Площадь фигуры, ограниченной линиями xy=3 и x+y-4=0, равна__________

10.Объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями xy=4, y=0, x=4, равен______________

11.Частное решение дифференциального уравнения ydx+ctgxdy=0, удовлетворяющее условие $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$, имеет вид_______________

12.Если y(x)- частное решение дифференциального уравнения y''+9y=0, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=0, y'(0)=1, то y(π) равно_________

13.Общее решение дифференциального уравнения y''+4y=sin x имеет вид

14.Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{n+2}$ ___________________ в силу___________________

15.С точностью до 0,01 интеграл $\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^4}$ равен_________

Экзаменационный билет №3.

1. Доказать, что, если функция разлагается в степенной ряд, то этот ряд есть ряд Тейлора.
2. Сформулировать алгоритм приложения интегралов к решению задач.
3. Дать понятие базиса и размерности линейного пространства. Привести примеры.
4. Практические задания.

1. $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ − матрица прямых затрат, $V = (4;\ 5)$ − вектор норм добавленной стоимости, найти равновесные цены.

2.Вычислить интегралы: а) $\int\frac{x+4}{x^2+6x+10}dx$; б) $\int arctg\, x\, dx$.

3. Вычислить интегралы: а) $\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{7x+1}}$; б) $\int_1^{\infty}\frac{x}{6+3x^2}dx$.

4.Найти общие решения уравнений: а) $y' = \frac{y^2}{xy-x^2}$; б) $y'' + y' = x^2 - 4$.

5. Определить сходимость ряда: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$.

6. Вычислить интеграл с точностью до 0,о1 $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

Литература

Основная:

1. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1998, 2002, 2003, 2004, 2000. - 472
2. Высшая математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие / Ред. Н.Ш. Кремер. - М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1997. - 440 с.
3. Красс, Максим Семенович. Математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. - 464 с.
4. Красс, Максим Семенович. Основы математики и её приложения в экономическом образовании [Текст] : учеб.: рек. Мин. обр. РФ / Красс М.С., Чупрынов Б.П. - 2- изд., испр., 4-е изд., испр.3-е изд., испр. . - М. : Дело, 2001, 2003, 2002. - 688 с.
5. Красс, Максим Семенович. Математика для экономических специальностей [Текст] :учебник для вузов: Рек. Мин. обр. РФ / Красс М.С. - М. :Инфра-М, 1999, 1998. - 464 с.
6. Математика в экономике [Текст] : в 2-х ч.: учеб.: рек. Мин. обр. РФ / А. С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2005 -

   Ч. 1. - 2005. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 375.

   Ч. 2. - 2005. - 560 с. - Библиогр.: с. 374.
7. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник для вузов.:Рек. Мин. обр. РФ / Ред.Ермаков В.И. - М. : ИНФРА-М, 2000, 2001. - 656 с
8. Практикум по высшей математике для экономистов [Текст] : учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002, 2003, 2004. - 424 с.

Дополнительная:

9. Замков О.О. Математические методы в экономике / О.О.Замков, А.В.Толстопятенко, Ю.Н.Черемных. – М.: МГУ,ДИС, 1998. – 365с
10. Москинова Г.И. " Дискретная математика", М. " Логос", 2000 г..
11. Федосеев В.В., Эрношвили Н.Д. " Экономико-математические методы и модели в экономике", М., " Юнити", 2001 г.
12. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа - Москва.: Наука.
13. Методические разработки кафедры ОМиИ.

Содержание