Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУ ВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
______________Г. В. Литовка
«_____»_____________2007 г.

МАТЕМАТИКА

Часть 1

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ
для специальностей:
080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111

Составители: Г. Н. Торопчина,
Г. П. Вохминцева

Благовещенск 2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Г. Н. Торопчина, Г.П. Вохминцева
Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математика» для студентов очной формы обучения для специальностей: 080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007. – с.

Учебно-методический комплекс ориентированы на оказание помощи студентам очной формы обучения по специальностям: 080109, 080105, 080102, 080507, 080502, 080504, 080111 при изучении курса математики.

1. Пояснительная записка

Роль математики в подготовке специалиста в области экономики.

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине “Математика” (Ч1) предназначен для студентов первого курса экономических специальностей.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Хороший специалист в области экономики, будучи, прежде всего практиком, должен уметь выявлять конкретные количественные закономерности и взаимосвязи экономических объектов и процессов и описывать их с помощью математических методов и моделей. Возможности экономиста, качество его работы зависит не только от того, в какой степени модель отражает объективные закономерности, но и от того, насколько адекватно и грамотно он применяет математические методы исследования.

Современная экономическая наука немыслима без построения многофакторных моделей экономической динамики, моделей оптимального управления, моделей, использующих деловые игры и исследование операций для выбора наилучших альтернатив при обосновании стратегических и оперативных решений. Подобные модели включают комплекс из многих сотен уравнений и тождеств: они могут быть линейными и нелинейными, непрерывными и дискретными, детерминированными и вероятностными.

Из выше изложенного видна необходимость высокой математической подготовки специалистов: экономистов коммерческой деятельности, экономистов банковской и страховой деятельности, менеджеров, бухгалтеров и т. д.

Учебно-методический комплекс разработан в помощь студентам первого курса и включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному стандарту, учебную программу, тематический план занятий, методические указания, вопросы и тесты для контроля, образцы контрольных и расчетно-графических работ, экзаменационных билетов, методику оценки знаний, рекомендуемую литературу.

1.2 Задачи курса

Задачами преподавания математики как фундаментальной дисциплины являются:

- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- выработка умения моделировать реальные экономические процессы;
- освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач;
- овладение численными методами решения и их реализацией на компьютере.

Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование – важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

1.3. Требования к уровню освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины будущий специалист должен:

- иметь представление о математике как особом способе познания мира, об общности и универсальности ее понятий и представлений;
- уметь использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- иметь представление о математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и доказательствах;
- знать методы и приемы обработки количественной информации;

- владеть способами наглядного графического представления результатов исследования;
- иметь понятие о математическом моделировании финансово-экономических процессов с учетом их стохастического характера;
- иметь навыки исследования моделей и оценки пределов применимости полученных результатов.

2. Государственные стандарты курса учебной дисциплины «Математика»

СПЕЦИАЛЬНОСТИ: 080105, 080102, 080109.

Комплексные числа; прямые и плоскости в аффинном пространстве; выпуклые множества и их свойства; математический анализ; предел последовательности и его свойства; предел и непрерывность функции; экстремумы функций нескольких переменных. Экономико - математические модели: функции полезности; кривые безразличия; функции спроса; уравнение Слуцкого; кривые "доход-потребление"; кривые "цены - потребление"; коэффициенты эластичности; материальные балансы; функции выпуска продукции; производственные функции затрат ресурсов; модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции; модели общего экономического равновесия; модель Эрроу - Гурвица; статистическая и динамическая модели межотраслевого баланса; общие модели развития экономики; модель Солоу.

СПЕЦИАЛЬНОСТИ: 080111, 080507, 080502, 080504

По специальности 080504 - "Государственное и муниципальное управление"

Понятие множества. Операции над множествами. Понятие окрестности точки. Функциональная зависимость. Графики основных элементарных функций. Предел числовой последовательности. Предел функции.

Непрерывность функции в точке. Свойства числовых множеств и последовательностей. Глобальные свойства непрерывных функций. Производная и дифференциал. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения. Выпуклость функции. Неопределенный интеграл. Несобственные интегралы. Точечные множества в N – мерном пространстве. Функции нескольких переменных, их непрерывность. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных. Классические методы оптимизации. Функции спроса и предложения. Функция полезности. Кривые безразличия.

По специальности 080507 - "Менеджмент организации"

Комплексные числа. Понятие множества. Операции над множествами. Понятие окрестности точки. Функциональная зависимость. Графики основных элементарных функций. Предел числовой последовательности. Предел функции. Непрерывность функции в точке. Свойства числовых множеств и последовательностей. Глобальные свойства непрерывны функций. Производная и дифференциал. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения. Точечные множества в N – мерном пространстве. Функции нескольких переменных, их непрерывность. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных. Классические методы оптимизации. Функции спроса и предложения. Функция полезности. Кривые безразличия.

По специальности 080111 - "Маркетинг"

Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Числовые последовательности. Дифференциальное исчисления.

По специальности 080502 - "**Экономика и управление на предприятии *****"***

Аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; Гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика: теория вероятностей, случайные процессы, статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных.

3. *Содержание курса*

Раздел 1. Введение в математический анализ с элементами аналитической геометрии.

Тема 1. Числа. Переменные. Множества. Отображения. Действительные и комплексные числа. Переменные и постоянные величины. Конечные и бесконечные множества.

Тема 2. Функциональная зависимость.

Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания. Классификация функций, их графики. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции и их графики. Преобразование графиков функции.

Тема 3. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Угол между прямыми. Уравнение плоскости. Кривые и поверхности второго порядка.

Тема 4. Пределы и их свойства.

Понятия о числовых последовательностях. Предел последовательности. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их основные свойства. Основные теоремы о пределах.

Признаки существования предела. Два замечательных предела. Раскрытие неопределённости различного вида.

Тема 5. Непрерывность функции.

Непрерывные функции. Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Свойства функции, непрерывных на отрезке.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление.

Тема 1. Производная функции.

Понятие производной. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Непрерывность дифференцируемых функций.

Тема 2. Правила дифференцирования.

Основные правила и формулы дифференцирования функций. Производные высших порядков.

Тема 3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции, его свойства. Связь дифференциала и производной.

Тема 4. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

Тема 5. Приложения производной к исследованию функций.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных. Применение производной к приближённому решению уравнений. Интерполирование функций. Логарифмическая производная, связь с банковским процентом. Эластичность функции, экономические приложения.

Тема 6. Понятие о метрическом пространстве. Окрестность точки. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Понятие о функции многих переменных. Поверхности второго порядка. Предел и непрерывность функции многих переменных. Частные производные и полный дифференциал функции многих переменных. Производная сложной функции. Производная высших порядков. Перестановочность частных производных по разным переменным. Понятие условного экстремума. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Тема 7. Экономико-математические модели.

Функции полезности. Кривые безразличия. Функция спроса, потребление.

"Уравнение Слуцкого". Кривые "доход-потребление". Кривые "цены-потребление". Функции выпуска продукции. Производственные функции затрат ресурсов. Модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции. Модели общего экономического равновесия. Модель Эрроу-Гурвица.

4. **Общие рекомендации студенту по изучению**
1 математических дисциплин

01 Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

12. Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические экономические и управленческие задачи математическими

методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно решить задачу несколькими возможными способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

3. Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и

доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

14. Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

5. Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем,

отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

16. Расчетно – графические работы.

1. При изучении дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд расчетно – графические работы, главная цель которых — оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное исправление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до изучения теоретического материала, соответствующего данному заданию, и решения достаточного количества задач по этому материалу. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Расчетные работы должны выполняться самостоятельно. Выполненная не самостоятельно работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в

результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Расчетно-графические работы выполняются аккуратно на одной стороне листа стандартного формата А4 либо рукописным способом, либо компьютерным (для компьютерного оформления работы рекомендуется использование пакета Microsoft Word). В любом случае необходимо приложение необходимых распечаток результатов работы компьютерных программ, которые требовалось использовать при выполнении заданий. Графики строятся либо при помощи компьютера (рекомендуется использование пакета Microsoft Excel), либо от руки (черными или цветными карандашами средней твердости на обычной или миллиметровой бумаге). Листы с текстом заданий и графики должны быть сшиты.

4. В работу должны быть включены все требуемые задания строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.

6. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.

7. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

8. Работа сдается преподавателю до защиты для проверки. При указании рецензента на требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений. На защите студент должен показать умение ставить и исследовать конкретные финансовые задачи, которые он решал при выполнении контрольных заданий.

9. Прорецензированные контрольные задания вместе со всеми исправлениями и добавлениями, сделанными по требованию рецензента,

следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированного контрольного задания студент не допускается к сдаче экзамена.

10. Контрольные задания настоящего семестра, приведенные в действующей программе дисциплины, повторены в разделе 3, а конкретные методические указания к их выполнению — в разделе 4.

17. Лекции и практические занятия

Студенты очной и заочной формы обучения изучают дисциплину «Математика» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (2 ч. лекций и 2 ч. практических занятий в неделю для студентов очной формы обучения и по одному часу — для студентов, обучающихся по заочной форме). После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Если для студентов очной лекции и практические занятия являются основной формой обучения и на них подробно рассматривается большая часть теоретического материала и разбирается большое количество задач, то студент-заочник эти виды работ должен выполнять самостоятельно.

Вместе с тем, для заочников организуются установочные лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель — обратить внимание на цели и задачи дисциплины, ее место в профессиональной деятельности специалиста, заинтересовать студента изучением дисциплины, обратить внимание на схему построения курса или некоторых его наиболее важных разделов. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

8. Экзамен

На экзамене выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Экзамен проводится в устно-письменной форме, каждый студент получает в билете три теоретических вопроса (их список приведен в разделе 5) и 6 задач. Подготовку к ответу на билет следует начинать с решения задачи, так успешное решение задачи является наиболее важным при сдаче экзамена; без ее решения работа студента признается неудовлетворительной. Затем следует подробно ответить на теоретические вопросы билета. На подготовку теоретических вопроса студенту дается не более 1 ч. На решения задач 1,5ч.

После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

Основные обозначения

$\Rightarrow$ – знак логического следования

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности (эквивалентности)

$\in$ – знак принадлежности

$\to$ – знак соответствия

$\underline{\underline{def}}$ – равенство по определению

$\forall$ – квантор общности

$\exists$ – квантор существования

$\{a, b, c, ...\}$ – множество, состоящее из элементов *a, b, c, …*

$\varnothing$ – пустое множество

$A \cup B$ – объединение множеств *A* и *B*

$A \cap B$ – пересечение множеств *A* и *B*

$A \setminus B$ – разность множеств *A* и *B*

$\overline{A}, U \setminus A$ – дополнение множества *A* до универсального множества *U*

$A \subseteq B$ – множество *A* является подмножеством множества *B*

$A \subset B$ – множество *A* является собственным подмножеством множества *B*

$\{x | P(x)\}$ – множество элементов *x*, удовлетворяющих условию *P(x)*

$\sup A$ – точная верхняя грань множества *A*

$\inf A$ – точная нижняя грань множества *A*

$f : X \to Y$ – функция *f*, отображающая множество *X* в (на) множество *Y*

$f^{-1} : Y \to X$ – функция, обратная к функции *f*, отображающая множество *Y* в (на) множество *X*

$D(f)$ – область определения функции *f*

$E(f)$ – множество значений функции *f*

Латинский алфавит		Греческий алфавит	
a A	а	α	альфа
b B	бэ	β	бэта
c C	цэ	γ	гамма
d D	дэ	δ	дельта
e E	э	ε	эпсилон
f F	эф	ζ	дзэта
g G	ге (же)	η	эта
h H	ха (аш)	ϑ	тэта
i I	и	ι	иота
j J	йот (жи)	κ	каппа
k K	ка	λ	ламбда
l L	эль	μ	мю
m M	эм	ν	ню
n N	эн	ξ	кси
o O	о	o	омикрон
p P	пэ	π	пи
q Q	ку	ρ	ро
r R	эр	σ	сигма
s S	эс	τ	тау
t T	тэ	υ	ипсилон
u U	у	φ	фи
v V	вэ	χ	хи
w W	дубль-вэ	ψ	пси
x X	икс	ω	омега
y Y	игрек		
z Z	зэт		

Количество часов в неделю:

Лекции 2ч практические занятия 2ч по специальностям 080507, 080502, 080504, 080111.
Лекции 2ч практические занятия 3ч по специальностям 080109, 080105, 080102.

5. Темы лекций.

Лекция 1. Основные понятия теории множеств. Понятия функции.

Приложения функций в экономике.

Лекция 2. Уравнение прямой на плоскости.

Лекция 3. Кривые второго порядка.

Лекция 4. Аналитическая геометрия в пространстве.

Лекция 5.Поверхности второго порядка.

Лекция 6. Введение в математический анализ Числовая последовательность.

Лекция 7. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах

Лекция 8. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Лекция 9. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Лекция 10. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Лекция 11.Параметрическое задание функции. Дифференциал функции

Лекция 12. Применение производной в экономике. Предельные показатели в микроэкономике.

Лекция 13. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя.

Лекция 14. Исследование функций с помощью производной. Возрастание и убывание, экстремумы функций.

Лекция 15.Асимптоты. Исследования функций и построение графиков.

Лекция 16.Функции нескольких переменных. Основные понятия.

Лекция 17. Производная и градиент скалярного поля.

Лекция 18. Экстремум функции нескольких переменных. Приложения к решению экономических задач.

6. Календарный план занятий по математике в I семестре

№ недели	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Контроль
1	Основные понятия теории множеств. Понятия функции. Приложения функций в экономике.	Комплексные числа.	Множества. Операции над множествами	К.Р.
2	Уравнение прямой на плоскости.	Уравнение прямой на плоскости	Комплексные числа и действия	Выдача РГР №1

			над ними (Д.З.)	“Введение в анализ с элементами аналитическо й геометрии”
3	Кривые второго порядка.	Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс.	Выполнение дом. Задания по теме: ком. числа	К.Р. (30 мин.)
4	Аналитическая геометрия в пространстве.	Кривые второго порядка. Гипербола. Обратная пропорциональная зависимость. Парабола	Уравнения прямой на плоскости	
5	Поверхности второго порядка.	Прямая и плоскость в пространстве	Кривые второго порядка	
6	Введение в математический анализ Числовая последовательность.	Понятие функции	Выполнение РГР и Д.З.	
7	Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах.	Предел функции	Изучение теории, выполнение РГР и Д.З.	К.Р. (30 мин.)
8	Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.	Замечательные пределы	Выполнение РГР	Коловиквиум по теме: “Введение в анализ”
9	Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.	Непрерывность функции и точки разрыва	Подготовка к занятиям. Правила диф.	
10	Производная функции, ее геометрический и физический смысл.	Производная. Дифференцирован ие явных функций	Повторение школьного материала	К.Р. (40 мин.).
11	Параметрическое задание функции. Дифференциал функции.	Производная. Дифференцирован ие неявных функций. Производные функций заданных параметрическими уравнениями. Предельный	Выполнение Д.З.	Защита РГР №1. Выдача РГР №2

		анализ экономических процессов		
12	Применение производной в экономике. Предельные показатели в микроэкономике.	Интервалы монотонности и экстремумы функции. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба	Повторение школьного материала	К.Р. (40 мин.).
13	Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя.	Асимптоты. Исследование функций и построение их графиков.	Выполнение РГР №2	Защита РГР №2. Выдача РГР №3
14	Исследование функций с помощью производной. Возрастание и убывание, экстремумы функций.	Применение производной в задачах с экономическим содержанием	Выполнение РГР №2	
15	Асимптоты. Исследования функций и построение графиков.	Функции нескольких переменных		
16	Функции нескольких переменных. Основные понятия.	Производная и градиент скалярного поля	Изучение материала и выполнение Д.З. и РГР	
17	Производная и градиент скалярного поля.	. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум		Защита РГР №3.
18	Экстремум функции нескольких переменных. Приложения к решению экономических задач	Функции нескольких переменных в экономических задачах		

7. Конспект лекций

Лекция 1. Основные понятия теории множеств. Понятия функции. Приложения функций в экономике.

.

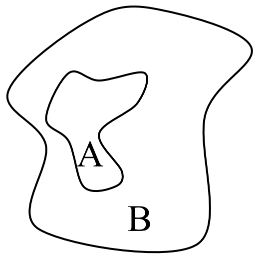
<u>Определение.</u> **Множеством М** называется объединение в единое целое определенных различимых объектов a, которые называются **элементами** множества.

$$a \in \mathrm{M}$$

Множество можно описать, указав какое – нибудь свойство, присущее всем элементам этого множества.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обзначается $\varnothing$.

<u>Определение.</u> Если все элементы множества А являются также элементами множества В, то говорят, что множество А **включается (содержится)** в множестве В.



$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$

<u>Определение.</u> Если А $\subseteq$ В, то множество А называется **подмножеством** множества В, а если при этом А $\neq$ В, то множество А называется **собственным подмножеством** множества В и обозначается А $\subset$ В.

Для трех множеств А, В, С справедливы следующие соотношения.

$$A \subseteq A; \quad A \not\subset A;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subset C \to A \subset C;$$

Связь между включением и равенством множеств устанавливается следующим соотношением:

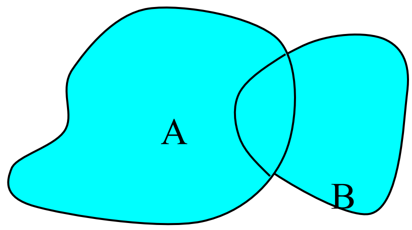
$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Здесь знак $\wedge$ обозначает **конъюнкцию** (логическое “и”).

Операции над множествами.

Определение. **Объединением** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

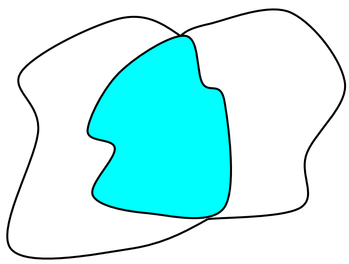
Обозначается $C = A \cup B$.



Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Венна**.

Определение. **Пересечением** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B.

Обозначение $C = A \cap B$.



A C

Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

$$A \cap A = A \cup A = A; \qquad A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A;$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

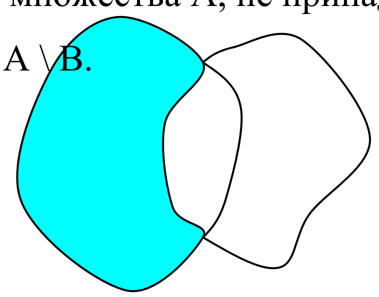
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A;$$

$$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing;$$

Определение. **Разностью** множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Обозначается $C = A \setminus B$.

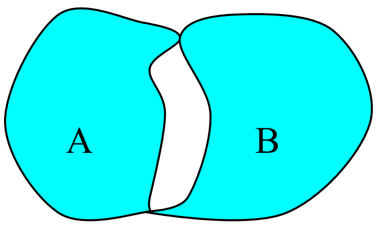


A B

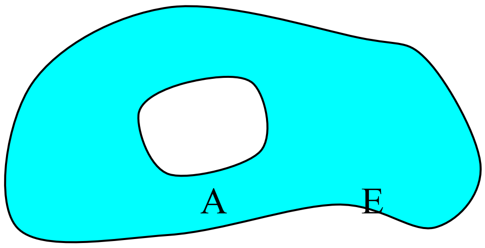
<u>Определение.</u> **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.

Обозначается $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



<u>Определение.</u> C_E называется **дополнением** множества A относительно множества E, если $A \subseteq E$ и $C_E = E \setminus A$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \setminus B \subseteq A; \qquad A \setminus A = \varnothing; \qquad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$

$$A \Delta B = B \Delta A; \qquad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C); \qquad (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C); \qquad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C); \qquad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C);$$

$$A \cup C_E A = E; \qquad A \cap C_E A = \varnothing; \qquad C_E E = \varnothing; \qquad C_E \varnothing = E; \qquad C_E C_E A = A;$$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; \qquad C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B;$$

Пример. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Вейна.

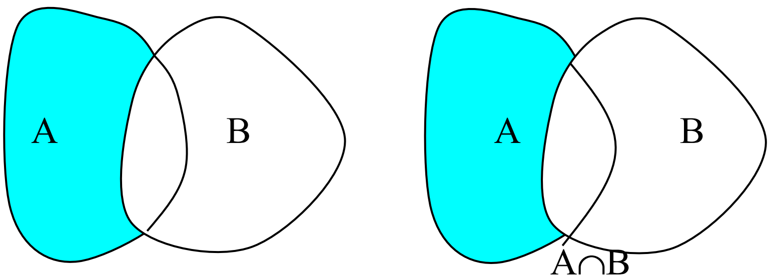
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Из записанных выше соотношений видно, что

$$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B) = A \setminus B$$

Что и требовалось доказать.

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Вейна



Пример. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Если некоторый элемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A, но не принадлежит множествам B и C.

Множество A \ B представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество A \ C представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству C.

Множество (A \ B) ∩ (A \ C) представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат ни множеству B, ни множеству C.

Таким образом, тождество можно считать доказанным.

Понятие функции

Определение функциональной зависимости

Определение 1. Пусть X и У — некоторые числовые множества и пусть каждому элементу x э X по какому-либо закону f поставлен в соответствие один элемент y э Y. Тогда будем говорить, что определена функциональная зависимость y от x по закону y = f (x). При этом x называют независимой переменной (или аргументом), y — зависимой переменной, множество X — областью определения (существования) функции, множество Y — областью значений (изменения) функции.

Кроме буквы f для обозначения функции используются и другие буквы, другими буквами может обозначаться также и независимая переменная. Примеры записи функций: y = y(x), y = F(x), y = g(x).

Если множество Y значений функции ограничено, то функция называется ограниченной, в противном случае — неограниченной.

Способы задания функций

Задать функцию — значит указать закон, по которому, согласно определению, каждому значению аргумента из области определения ставится в соответствие (вычисляется) значение зависимой переменной из области значений функции. Существуют три основных способа задания функций: табличный, аналитический и графический.

1.Табличный способ. Этот способ имеет широкое применение в разных отраслях знаний и приложениях: ряды экспериментальных измерений, социологические опросы, таблицы бухгалтерской отчетности и банковской деятельности и т.п. Как правило, в таких таблицах, по крайней мере, одну из переменных можно принять за независимую (например, время), тогда другие величины будут являться функциями от этого аргумента. По сути дела базы данных основаны на табличном способе задания, хранения и обработки информации, а значит, и на табличной форме функциональной зависимости.

2.Аналитический способ. Этот способ состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формул. Следует подчеркнуть, что функция может определяться и набором формул - на разных промежутках области определения функции используются разные формулы.

Приведем примеры аналитического задания функций.

Пример 1. у = x^3**.** Эта функция задана на бесконечной прямой

- $\infty < \mathbf{x} < \infty$. Множество значений этой функции тоже бесконечная числовая прямая $\infty < y < \infty$. Функция называется кубической параболой.

Пример 2. $y=\sqrt{1-x^2}$ Функция задана на отрезке [-1,1], множество ее значений — отрезок [0,1]. Это половина окружности, лежащая в верхней полуплоскости .

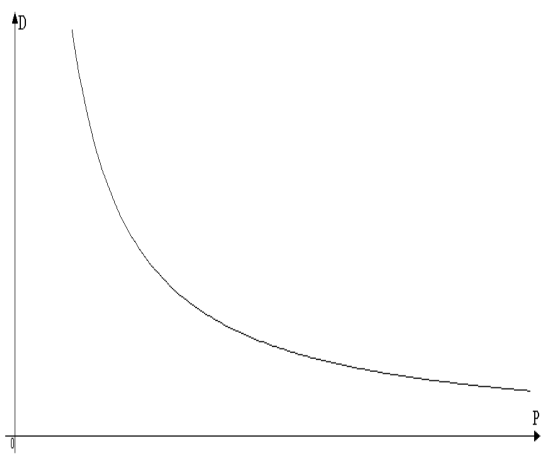
3. Графический способ. Здесь соответствие между аргументом и функцией задается посредством графика. Этот способ обычно используется в экспериментальных измерениях с употреблением самопишущих приборов (осциллографы, сейсмографы и т.п.).

Приложения* в *экономике

Приведем примеры использования функций в области экономики.

1. Кривые спроса и предложения. Точка равновесия. Рассмотрим зависимости спроса $\boldsymbol{D}$ и предложения $\boldsymbol{S}$ от цены на товар $\boldsymbol{P}$. Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательной способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей кривой (рис. 1):

$$D = P^a + c, \qquad \text{где } \boldsymbol{a} < 0.$$



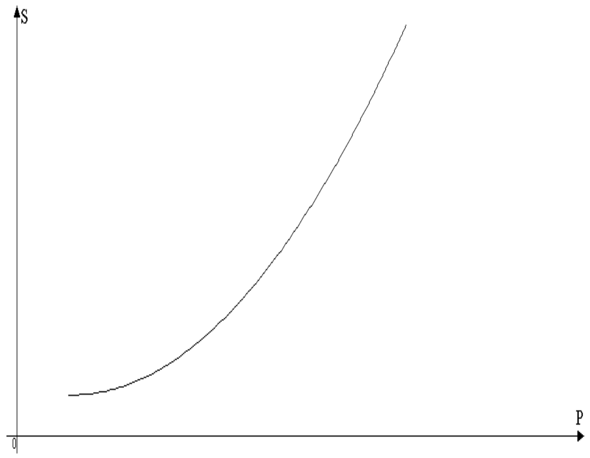


Рис. 1 Рис. 2

В свою очередь предложение растет с увеличением цены на товар и потому зависимость ***S*** от ***P*** имеет следующую характерную форму:

$$S=P^{a}+d,$$

где ***a*** > 1 (рис. 2*)*. В формулах **с** и ***d*** — так называемые экзогенные величины; они зависят от внешних причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Вполне понятно, что переменные, входящие в формулы, положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. когда спрос равен предложению; это условие дается уравнением *D(P)* = *S(P)* и соответствует точке пересечения кривых *D* и *S* — это так называемая точка равновесия. Цена Ро, при которой выполнено условие *D(P)* = *S(P)*, называется ***равновесной*** (рис. 3).

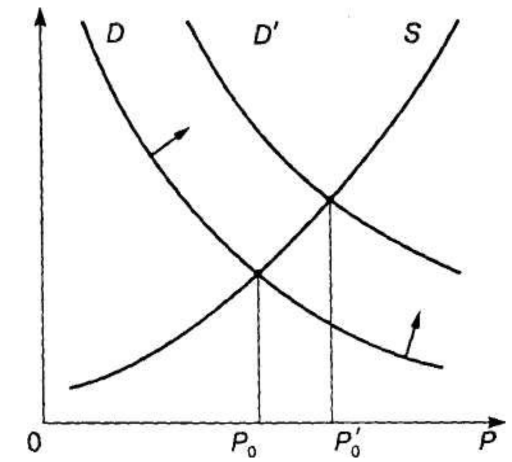


Рис. 3

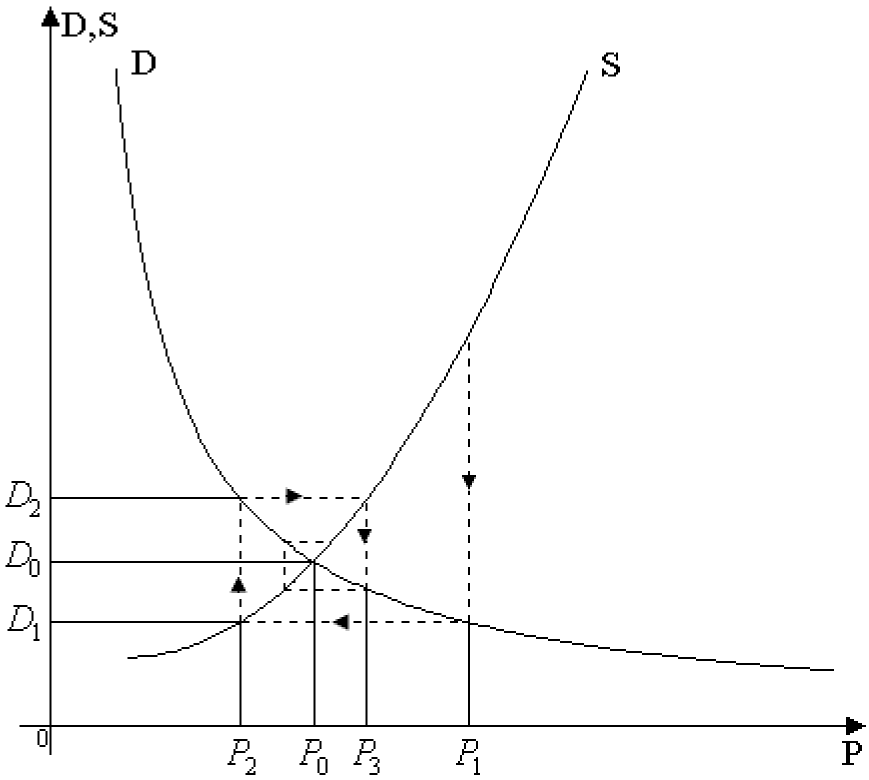
Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. когда спрос равен предложению; это условие дается уравнением *D(P)* = *S(P)* и соответствует точке пересечения кривых *D* и *S* — это так называемая точка равновесия. Цена Ро, при которой выполнено условие *D(P)* = *S(P)*, называется ***равновесной.***

При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины ***c*** в формуле , точка равновесия *M* смещается вправо, так как кривая D поднимается вверх; при этом цена на товар растет при неизменной кривой предложения S.

2. Паутинная модель рынка. Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных проблем рынка, означающая фактически торг между производителем и покупателем (рис. 3.7).

Пусть сначала цену Pi называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена Pi на самом деле выше **равновесной** (естественно, всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D1 при этой цене и определяет свою цену P2, при которой этот спрос D1 равен предложению. Цена P2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь производитель оценивает спрос D2, соответствующий цене P2, и определяет свою цену P3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т.е. к "скручиванию" спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену Po:

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P_0.$$



Лекция 2. Уравнение прямой на плоскости.

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой- либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. **Уравнением линии** называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

<u>Определение.</u> Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ $\{ By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ $\{ Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

<u>Уравнение прямой по точке и вектору нормали.</u>

<u>Определение.</u> В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

<u>Пример.</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

<u>Уравнение прямой, проходящей через две точки.</u>

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1),$$
$$y - 2 = x - 1,$$
$$x - y + 1 = 0.$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k;\quad -\frac{C}{B} = b;\quad т.е.\quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

<u>Определение.</u> Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой

$Ax + By + C = 0.$

<u>Пример.</u> Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1\cdot A + (-1)\cdot B = 0, \text{ т.е. } \quad A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$,

или $x + y + C/A = 0$.

при $x = 1$, $y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение: $x + y - 3 = 0$.

<u>Уравнение прямой в отрезках.</u>

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где } \quad a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

<u>Пример.</u> Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$C = 1$, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, $\quad a = -1$, $\quad b = 1$.

<u>Пример.</u> Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или x + y – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \qquad 3x - 2y = 0.$$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1).$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. *Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \qquad tg\varphi = \left|\frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2}\right| = 1; \quad \varphi = \pi/4.$$

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 1}{5 - 1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y - 1}{4}$; $4x = 6y - 6$;

$2x - 3y + 3 = 0$; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b,$ откуда b = 17.

Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

Лекция 3. <u>Кривые второго порядка.</u>

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
4) $a^2x^2 – c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6) $y^2 – a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9) $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

<u>Окружность.</u>

В окружности $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 – 8x + 5y – 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 – 4x + 2,5y – 2 = 0$$

$$x^2 – 4x + 4 –4 + y^2 + 2,5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

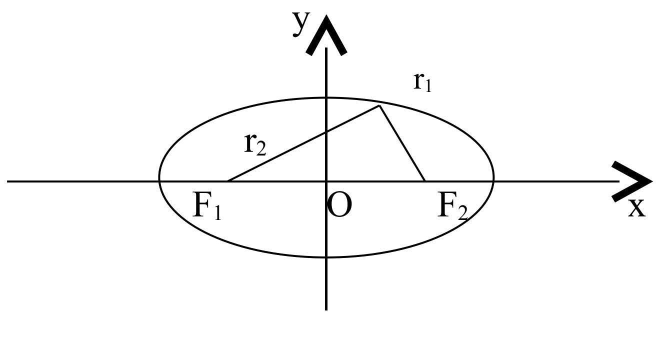
Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

Эллипс.

Определение. Эллипсом называется кривая, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Определение. Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось; b – малая полуось.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1) Координаты нижней вершины: x = 0; $y^2 = 16$; y = -4.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; c = 3; $F_2(-3; 0)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Расстояние между фокусами:

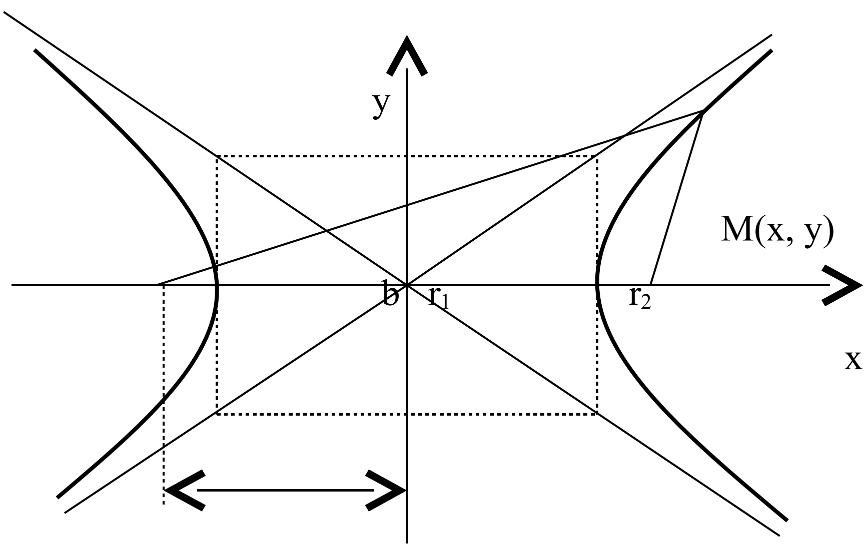
2c = $\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

по условию 2a = 2, следовательно a = 1, b = $\sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

Гипербола.

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



F_1 a F_2

c

По определению $|r_1 – r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$. Выберем на гиперболе произвольную точку M(x, y). Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

обозначим $c^2 – a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

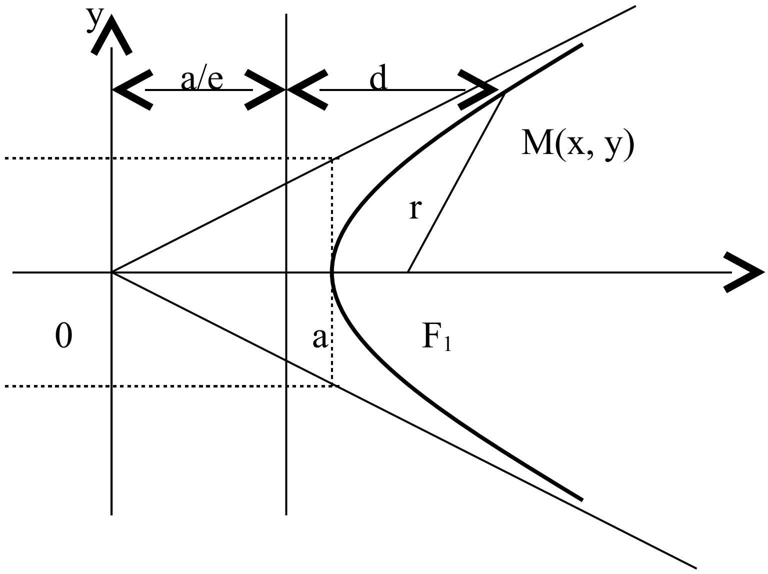
Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a}x.$

Если a = b, e = $\sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

<u>Определение.</u> Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения:

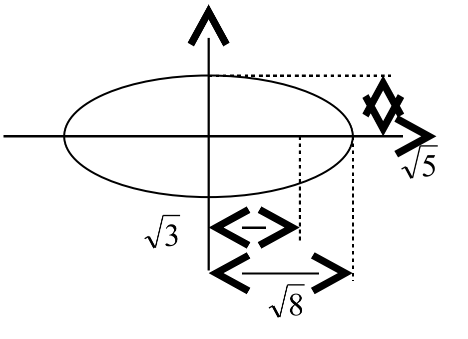
$x = \pm \frac{a}{e}$.

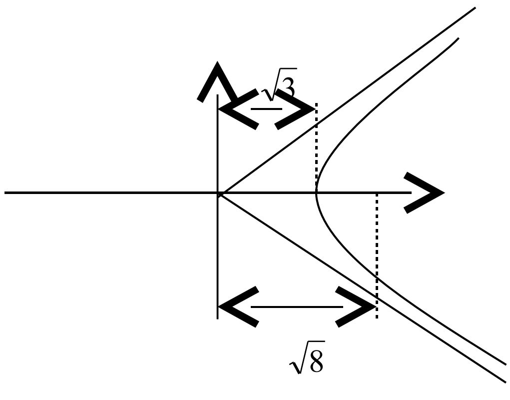


<u>Пример.</u> Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

<u>Пример.</u> Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

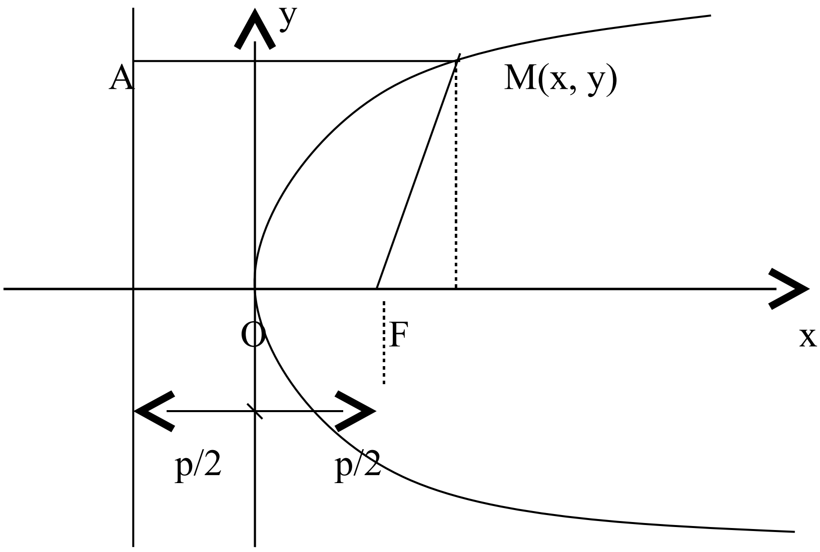
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;
$b^2 = 16 – 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Определение. **Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; $AM = x + p/2$;

$$MF^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 – xp + p^2/4$$

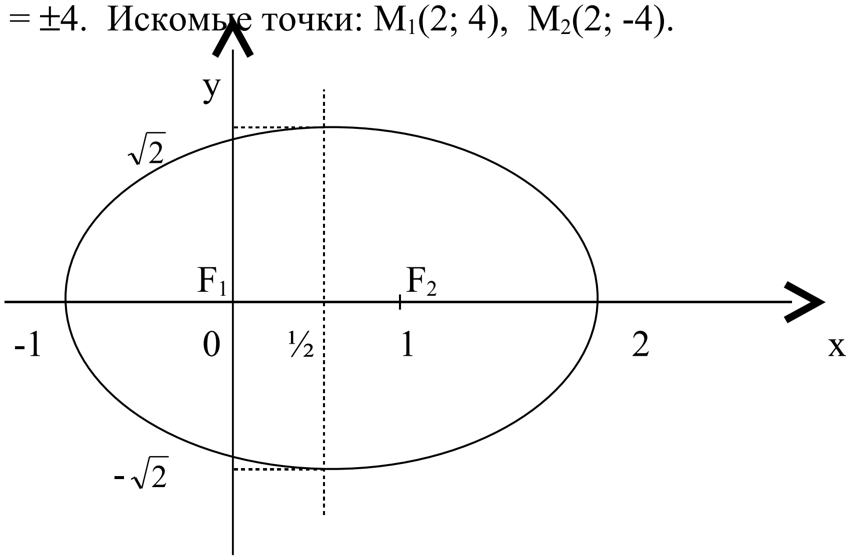
$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы: $x = -p/2$.

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4. r = x + p/2 = 4; следовательно:

$x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.



Лекция 4. Аналитическая геометрия в пространстве.

Уравнение линии в пространстве.

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким- либо уравнением.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L.

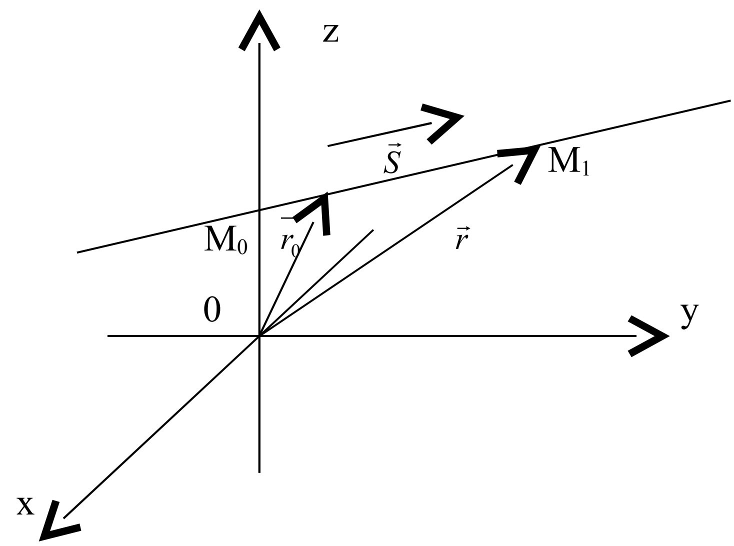
Тогда пару уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$

назовем **уравнением линии в пространстве**.

Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$(m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z).



Обозначим радиус- векторы этих точек как $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что

$\vec{r}$ - $\vec{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}$t, где t – некоторый параметр. Итого, можно записать: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}$t.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

<u>Определение.</u> Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\vec{S}$, которые могут быть вычислены по формулам: $\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$; $\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$; $\cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.

Отсюда получим: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

Числа m, n, p называются **угловыми коэффициентами** прямой. Т.к. $\vec{S}$ - ненулевой вектор, то m, n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

<u>Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.</u>

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

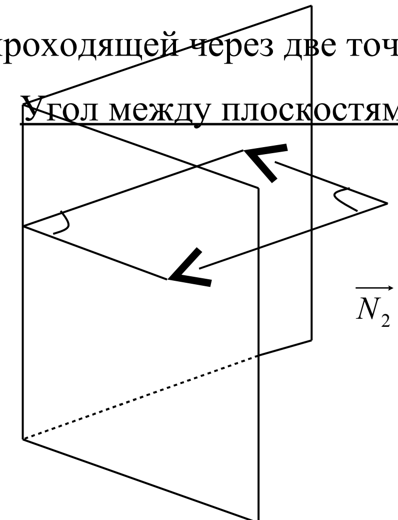
$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

<u>Угол между плоскостями.</u>



φ_1 φ 0

$\overrightarrow{N_1}$

Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, т.е. $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

$\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2). Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения: $\cos\varphi_1 = \dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$.

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \,||\, \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Угол между прямыми в пространстве.

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}||\overrightarrow{S_2}|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Угол между прямой и плоскостью.

<u>Определение.</u> Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

α

φ

Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол $\alpha = 90^0 - \varphi$, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$, $\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\dfrac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$

В координатной форме: $\sin\varphi = \pm\dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

<u>Условия параллельности и перпендикулярности</u>

<u>прямой и плоскости в пространстве.</u>

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N}\perp\vec{S}, \quad \vec{N}\cdot\vec{S} = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N}\times\vec{S} = 0; \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Лекция 5.<u>Поверхности второго порядка.</u>

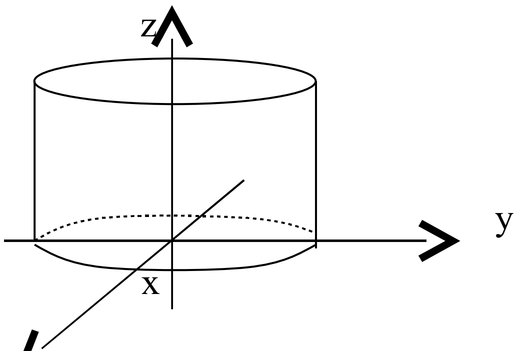
Определение. Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

Цилиндрические поверхности.

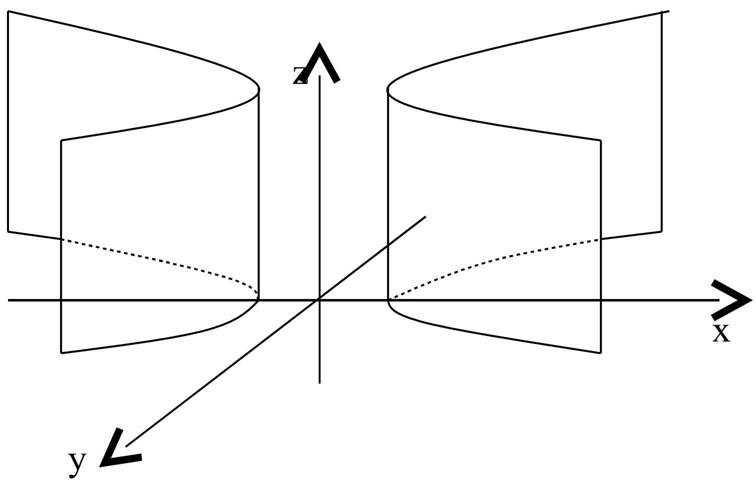
Определение. Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z, т.е. направляющие параллельны оси Oz. Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

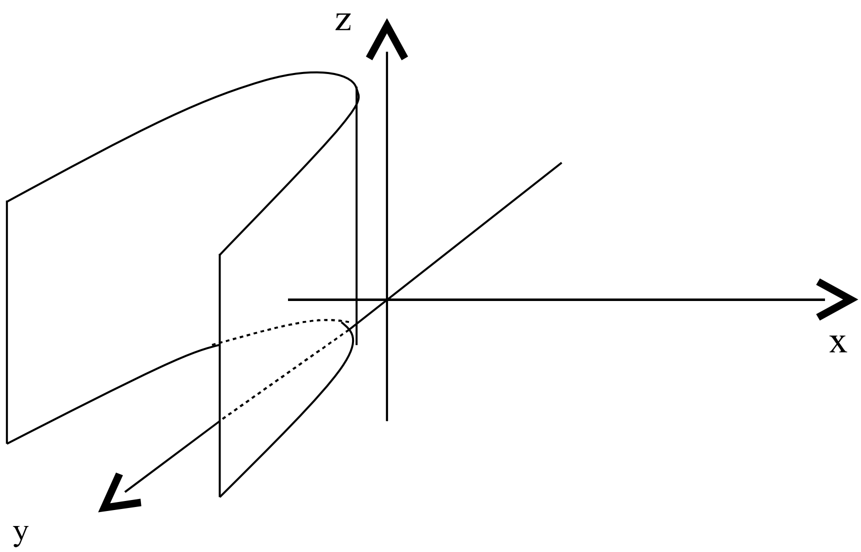
1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллиптический цилиндр.



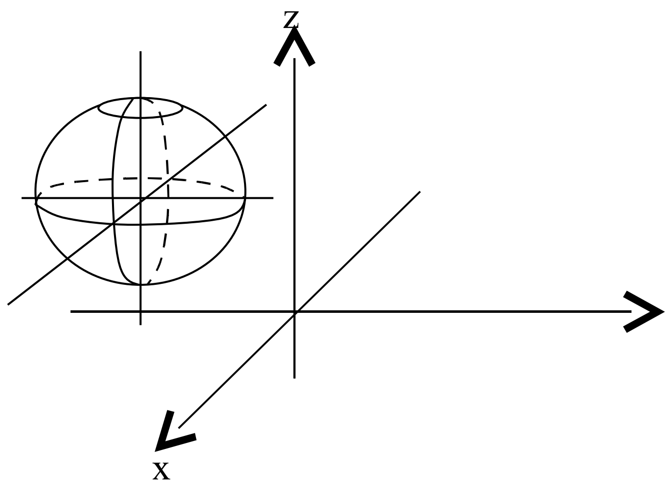
2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболический цилиндр.



3) $x^2 = 2py$ – параболический цилиндр.

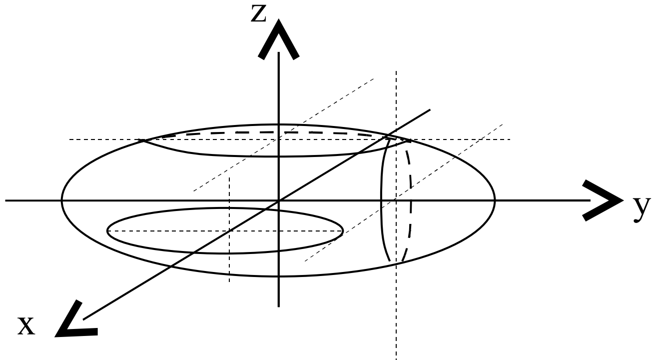


Сфера: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

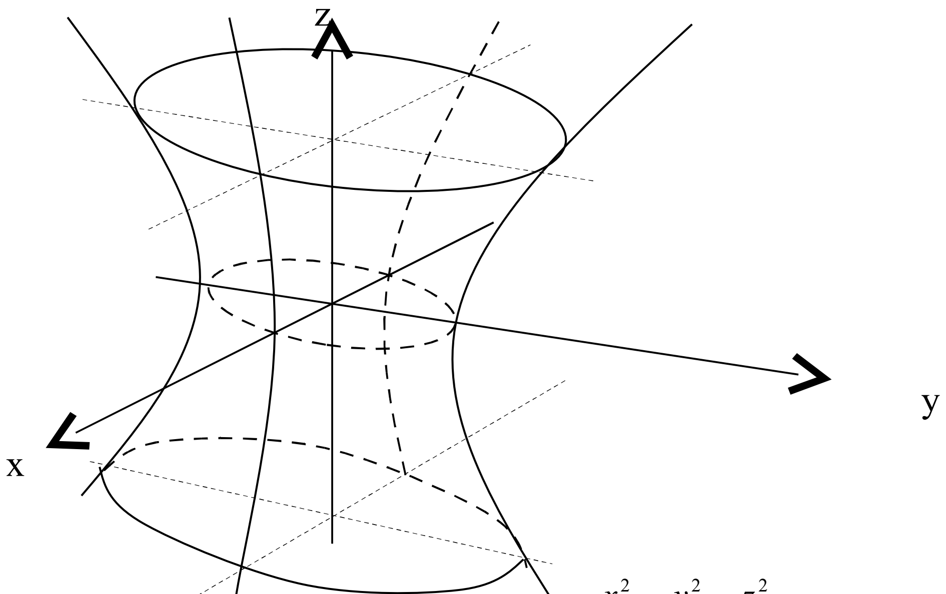


Трехосный эллипсоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

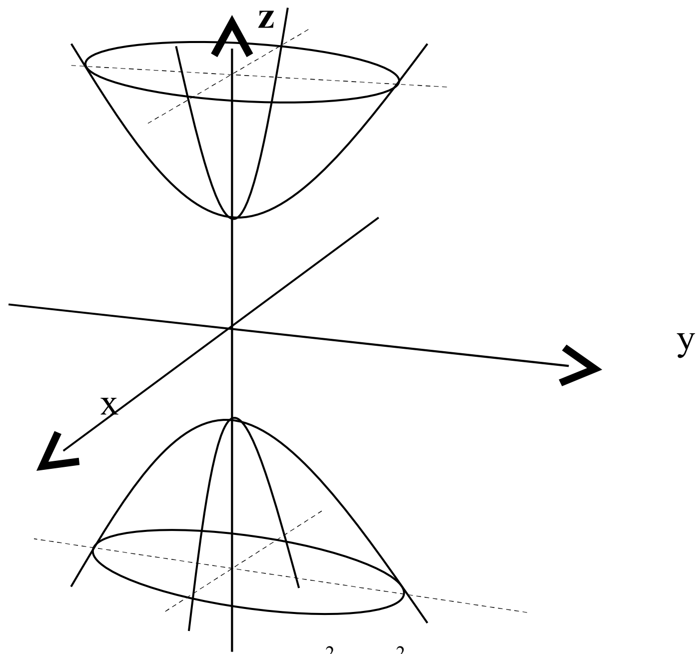
В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.



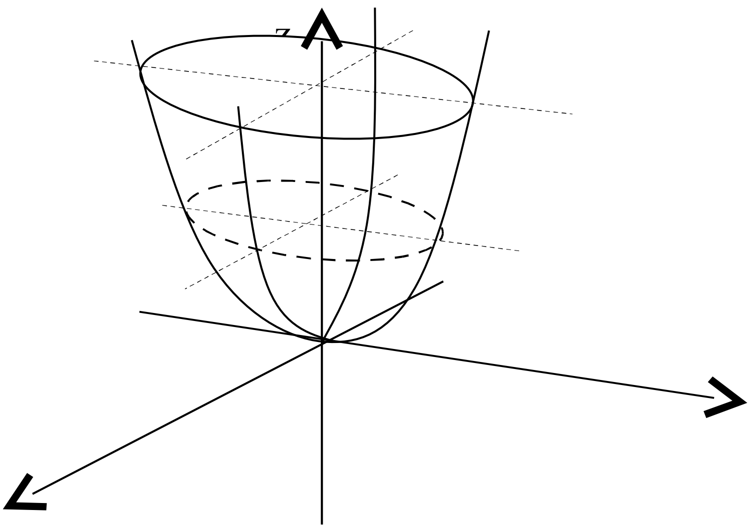
Однополостный гиперболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



Двуполостный гиперболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$



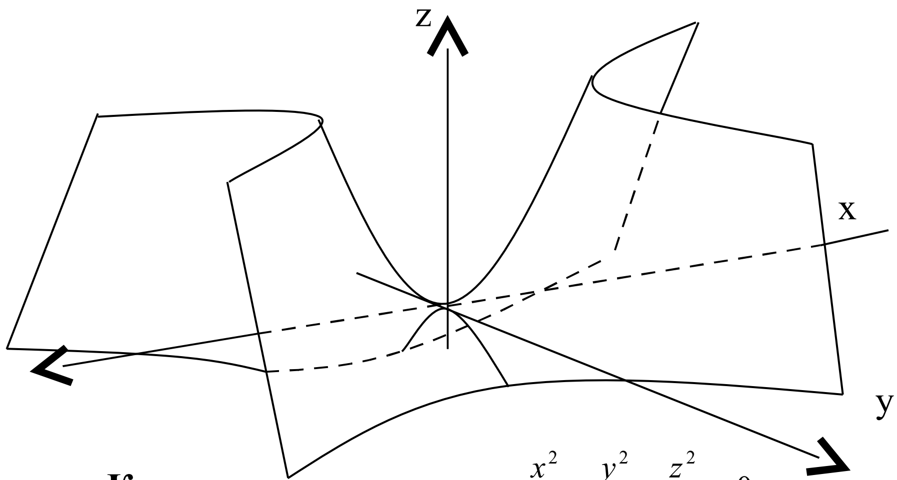
Эллиптический параболоид: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z,\quad где\ p>0, q>0$.



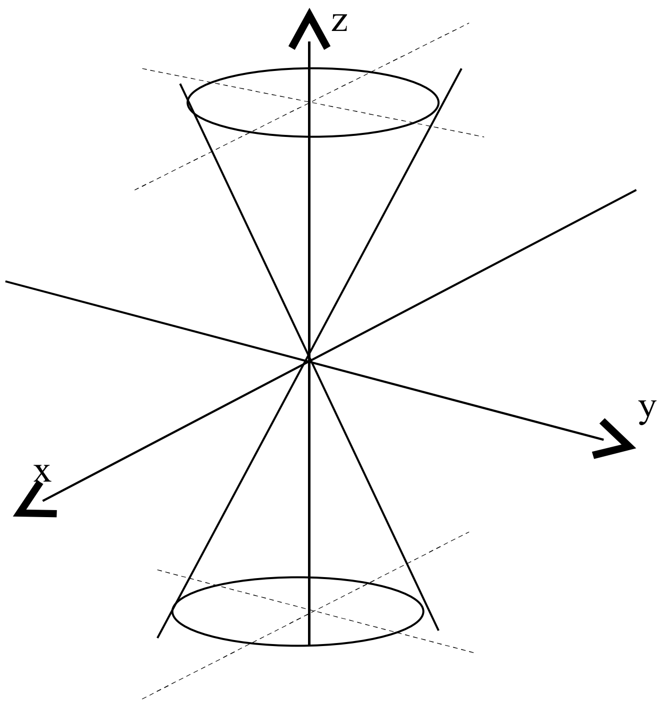
y

x

Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$



Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



Лекция 6. <u>Введение в математический анализ Числовая последовательность. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах.</u>

<u>Числовая последовательность.</u>

<u>Определение.</u> Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n)$$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin\pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n\cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M, что $x_n \leq M$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M, что $x_n \geq M$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

<u>Определение.</u> Число **а** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех n > N выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается:

$$\lim x_n = a.$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$**сходится** к а при $n \to\infty$.

<u>Свойство:</u> Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

<u>Теорема.</u> *Последовательность не может иметь более одного предела.*

<u>Доказательство.</u> Предположим, что последовательность $\{x_n\}$имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n \to a; \ x_n \to b; \quad a \neq b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon >0$, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε- **любое** число, то $|a - b| = 0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то* $|x_n| \to |a|$.

<u>Доказательство.</u> Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время: $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$. Теорема доказана.

<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

<u>Монотонные последовательности.</u>

Определение. 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.

2) Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.

4)Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Пример. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Число *e*.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$.

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометр. прогрессия}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*.

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что e ≤ 3. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем $e \geq 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$

Таким образом, число e заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e.

Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к x до любого действительного числа:

Предположим: $$n \le x \le n+1$$

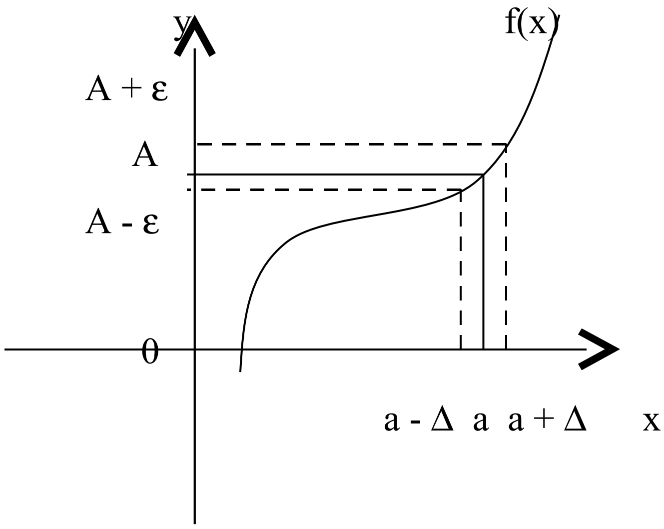
$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} \ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{e}{1} = e;$ $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Лекция 7. Предел функции в точке. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при x→a, если для любого ε>0 существует такое число Δ>0, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

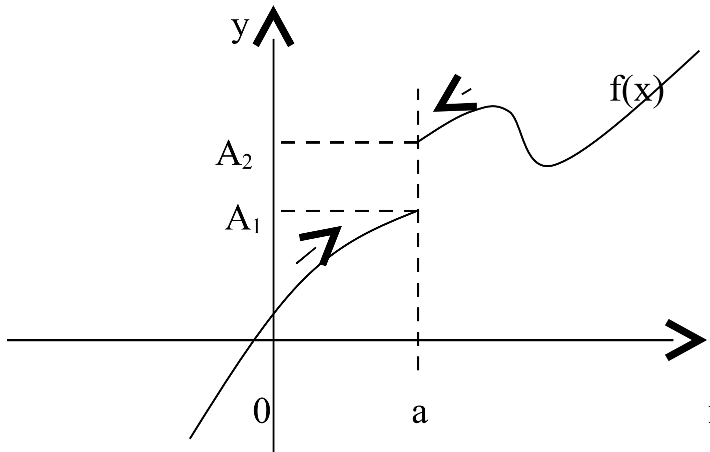
верно неравенство $$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если a - Δ < x < a + Δ, x ≠ a, то верно неравенство A - ε < f(x) < A + ε.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

<u>Определение.</u> Если f(x) $\to$ A_1 при x $\to$ a только при x < a, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если f(x) $\to$ A_2 при x $\to$ a только при x > a, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

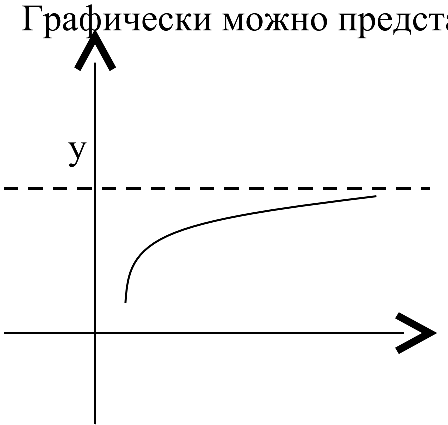
Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

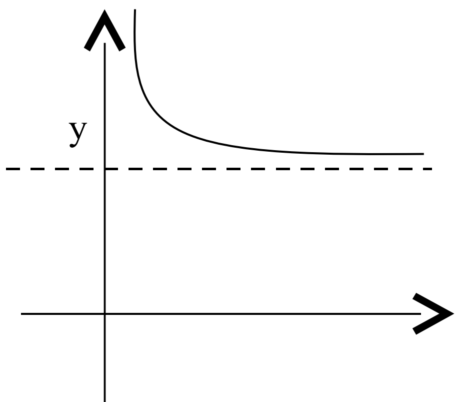
<u>Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.</u>

<u>Определение.</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при x$\to\infty$, если для любого числа ε>0 существует такое число M>0, что для всех x, $|x|$ >M выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$.

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности. Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

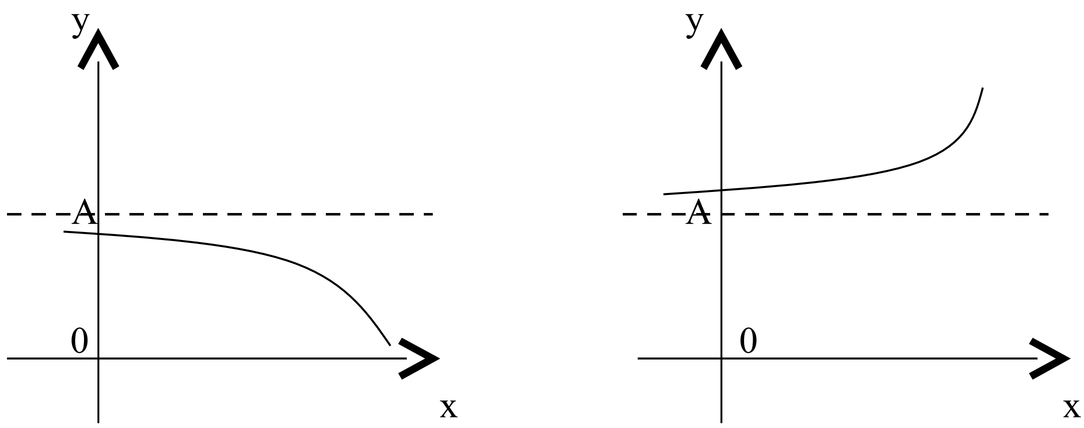
Графически можно представить:





A 0

0 x x



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ для любого x>M и $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

<u>Теорема 6.</u> *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|<M$ вблизи точки x = a.

<u>Теорема 7.</u> *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Лекция 8<u>. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых.</u>

<u>Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.</u>

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

<u>Пример.</u> Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при x→0 и не является бесконечно малой при x→1, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие f(x) = A + α(x), где α(x) – бесконечно малая при x → a (α(x)→0 при x → a).*

<u>Свойства бесконечно малых функций:</u>

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.

4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

<u>Доказательство теоремы 2.</u> Представим f(x) = A + α(x), g(x) = B + β(x), где $A = \lim_{x\to a} f(x),\quad B = \lim_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

A + B = const, α(x) + β(x) – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$.Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 3.</u> Представим f(x) = A + α(x),

g(x) = B + β(x), где $A = \lim_{x\to a} f(x),\quad B = \lim_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x)\cdot g(x) = A\cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

A·B = const, α(x) и β(x) – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} A\cdot B + 0 = A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

<u>Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.</u>

<u>Определение.</u> Предел функции f(x) при x→a, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число Δ>0, что неравенство $|f(x)|>M$ выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

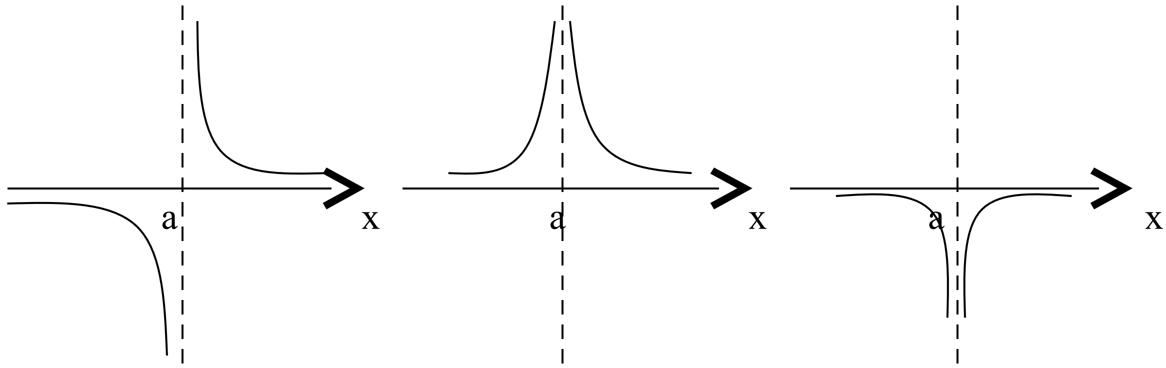
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на f(x)>M, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty ,$$

а если заменить на f(x)<M, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty .$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



<u>Определение.</u> Функция называется **бесконечно большой** при x→a, где а – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x \to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> *Если f(x)→0 при x→a (если x→∞) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

<u>Сравнение бесконечно малых функций.</u>

Пусть α(x), β(x) и γ(x) – бесконечно малые функции при х → а. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция f(x) = x.

<u>Определение.</u> Если $\lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Пример. Сравним бесконечно малые при $x\to 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}}{x} = \lim_{x\to a} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x)= x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x)=x$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x\sin x, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

Пример. Если $\alpha = x\sin\frac{1}{x}, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha, \quad \left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

1 4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

<u>Следствие:</u> а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при $x \to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}2x = 0$.

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β - бесконечно малые при $x\to a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция x^2+x – бесконечно малая при $x\to 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

Некоторые замечательные пределы.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} +\ldots+b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots.+\frac{b_m}{x^m}\right)}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & при \quad n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n=m\\ \infty, & при \quad n>m\end{cases}$

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{array}{l}y=\pi/2-x\\ x=\pi/2-y\\ \pi-2x=\pi-\pi+2y\end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{array}{l}y=x-1\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{array}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2-6x+8=0;$	$x^2-8x+12=0;$
$D=36-32=4;$	$D=64-48=16;$
$x_1=(6+2)/2=4;$	$x_1=(8+4)/2=6;$
$x_2=(6-2)/2=2;$	$x_2=(8-4)/2=2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

<u>Пример.</u> Найти предел. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \frac{2}{-1\cdot(1+1)} = -1.$$

<u>Пример.</u> Найти предел. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left\{x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)\right\} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3),\ \text{т.к.}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2-5x+6 \\ \quad -5x^2+11x & \\ \quad -5x^2+5x & \\ \qquad 6x-6 & \\ \qquad 6x-6 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=$$

$$=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^3(3x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)(3x+2)}$ - не определен, т.к. при стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы $-\infty$ и $+\infty$.

Лекция 9. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

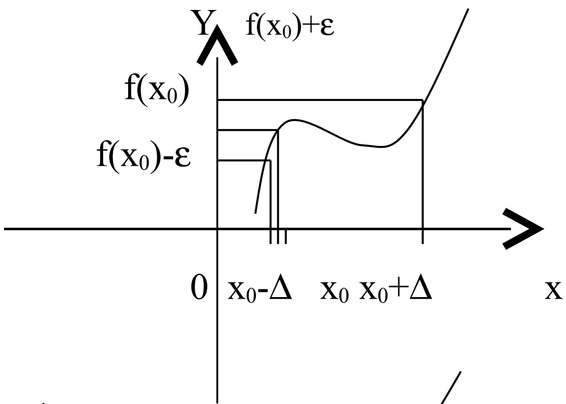
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

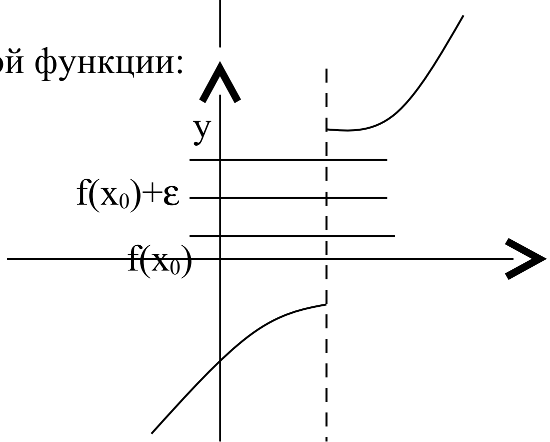
Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



$f(x_0)$-ε

x_0 x

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \Delta$

верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x = x_0, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где α(x) – бесконечно малая при $x \to x_0$.

<u>Свойства непрерывных функций.</u>

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$– есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке x = x_0, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

<u>Непрерывность некоторых элементарных функций.</u>

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль.

Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции sin и cos непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции y = sinx.

Запишем приращение функции $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$, или после преобразования: $\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при $\Delta x \to 0$

$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к.

предел функции синус $\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой

при $\Delta x \to 0$.

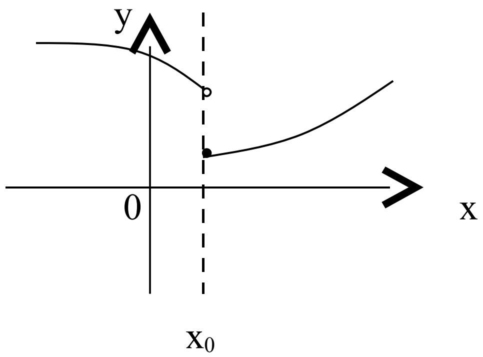
Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Точки разрыва и их классификация.

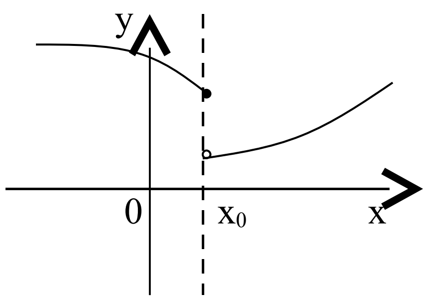
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

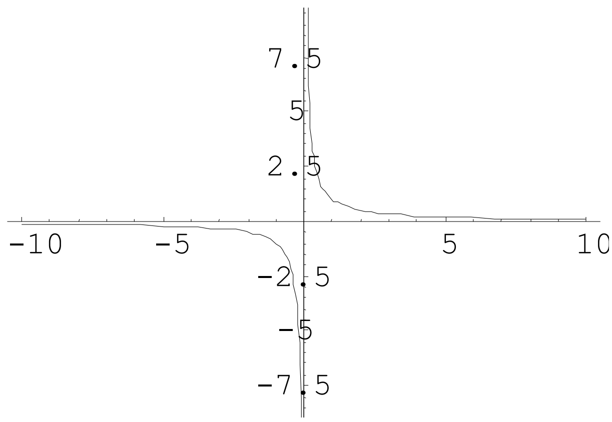
$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке x_0 = 0 точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

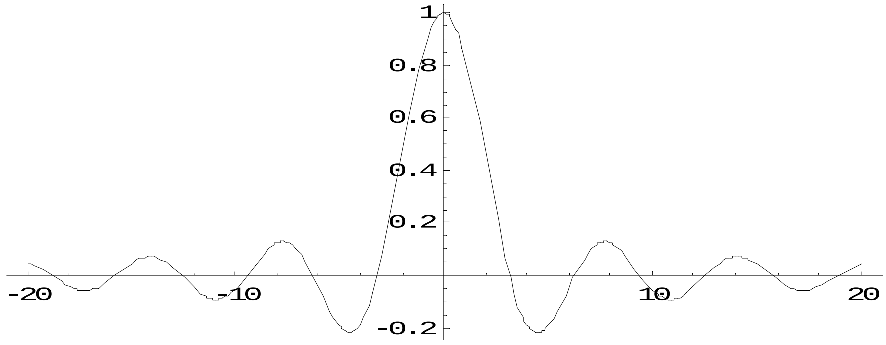


<u>Пример.</u> f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

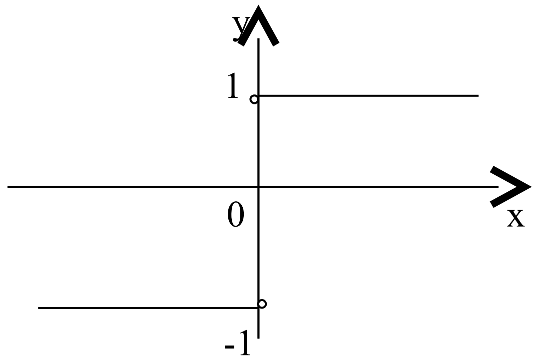
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример. $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые "стягиваются" к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

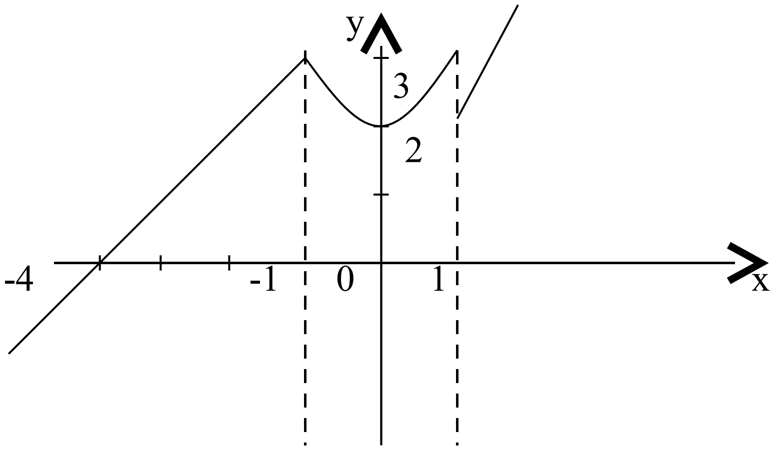
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

в точке x = -1 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



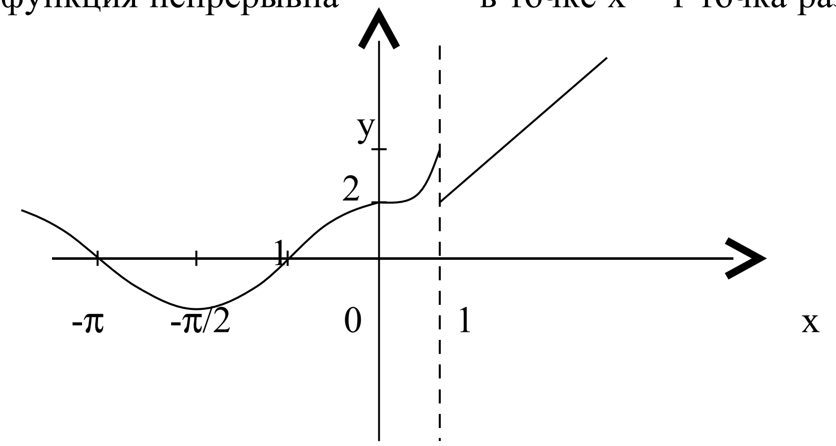
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 2$$

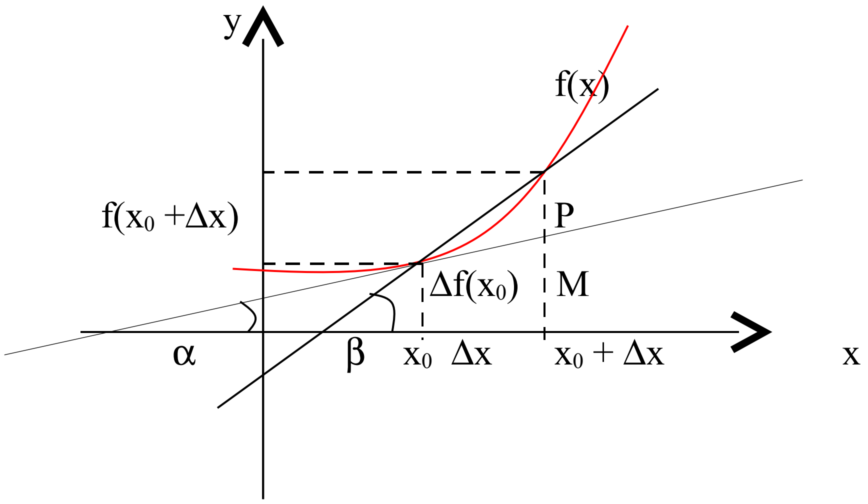
$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$$

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



Лекция 10. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. Производной функции *f(x)* в точке x = x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ - тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha \ ,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$ 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

9) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11) $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

14) $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

15) $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$

16) $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Производная сложной функции.

Теорема. *Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f. Тогда* $y' = f'(u) \cdot u'$

Доказательство. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, т.к. $u = g(x)$ – непрерывная функция). Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x)>0$.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v\ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x; \quad v = x\cos x;$

Производные этих функций: $u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x\sin x;$

Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x\cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2 + 3x)$$

<u>Производная обратных функций.</u>

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$1 = g'(y)y'$ т.к. $g'(y) \neq 0$, $y' = \dfrac{1}{g'(y)}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

<u>Пример.</u> Найти формулу для производной функции arctg.

Функция arctg является функцией, обратной функции tg, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = tgx; \qquad x = arctgy;$$

Известно, что $y' = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx}; \qquad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса: $(arctgy)' = \frac{1}{1+y^2};$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Лекция 11. Параметрическое задание функции. Дифференциал функции Применение производной в экономике Предельные показатели в микроэкономике.

Исследование и построение графика кривой, которая задана системой уравнений вида:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

производится в общем то аналогично исследованию функции вида y = f(x).

Находим производные:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi'(t) \end{cases}$$

Теперь можно найти производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Далее находятся значения параметра t, при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ равна нулю или не существует. Такие значения параметра t называются **критическими**.

Для каждого интервала (t_1, t_2), (t_2, t_3), … , (t_{k-1}, t_k) находим соответствующий интервал (x_1, x_2), (x_2, x_3), … , (x_{k-1}, x_k) и определяем знак производной $\frac{dy}{dx}$ на каждом из полученных интервалов, тем самым определяя промежутки возрастания и убывания функции.

Далее находим вторую производную функции на каждом из интервалов и, определяя ее знак, находим направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t, при приближении к которым или x или y стремится к бесконечности, и такие значения t, при приближении к которым и x и y стремится к бесконечности.

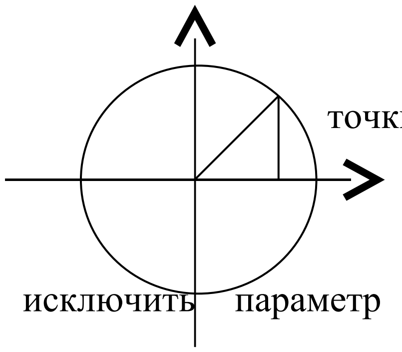
В остальном исследование производится аналогичным также, как и исследование функции, заданной непосредственно.

На практике исследование параметрически заданных функций осуществляется, например, при нахождении траектории движущегося объекта, где роль параметра t выполняет время.

Ниже рассмотрим подробнее некоторые широко известные типы параметрически заданных кривых.

Уравнения некоторых типов кривых в параметрической форме.

Окружность.



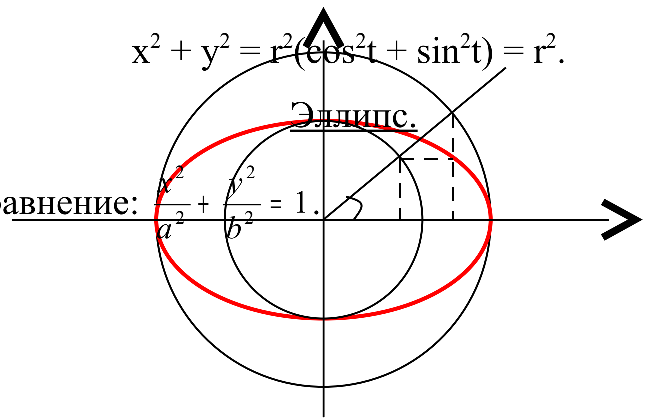
Если центр окружности находится в начале координат, то координаты любой ее точки могут быть найдены по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Если исключить параметр t, то получим каноническое уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

Эллипс.



Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

B M(x, y)

O N P

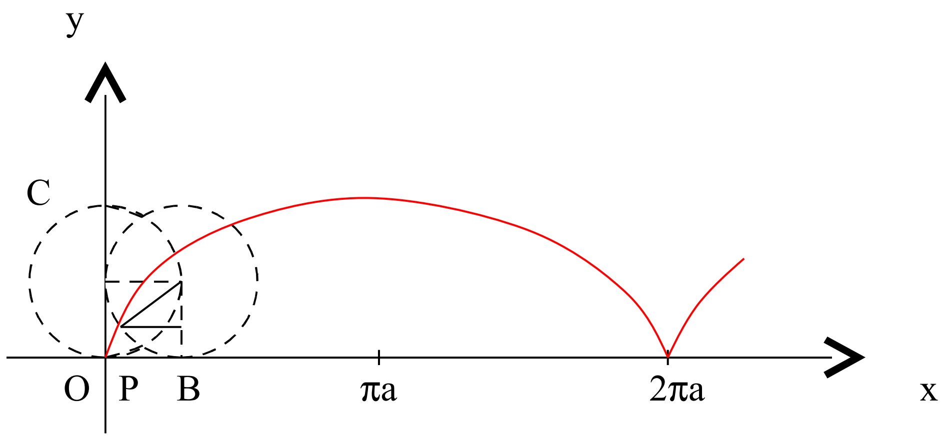
Для произвольной точки эллипса M(x, y) из геометрических соображений можно записать: $\frac{x}{\cos t} = a$ из ΔOBP и $\frac{y}{\sin t} = b$ из ΔOCN, где a- большая полуось эллипса, а b- меньшая полуось эллипса, x и y – координаты точки M.

Тогда получаем параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad \text{где } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Угол t называется **эксцентрическим углом**.

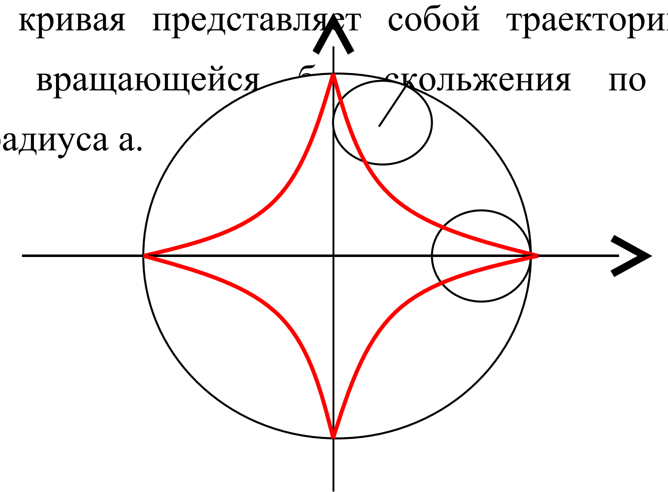
Циклоида.



Определение. Циклоидой называется кривая, которую описывает некоторая точка, лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

Астроида.

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса a/4, вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса a.



x

a

Параметрические уравнения, задающие изображенную выше кривую,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

Преобразуя, получим: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{2/3}$

<u>Производная функции, заданной параметрически.</u>

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le T$

Предположим, что эти функции имеют производные и функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$.

Тогда функция $y = \psi(t)$ может быть рассмотрена как сложная функция $y = \psi[\Phi(x)]$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt}\frac{d\Phi(x)}{dx}$$

т.к. $\Phi(x)$ – обратная функция, то $\dfrac{d\Phi(x)}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}}$

Окончательно получаем: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{d\psi(t)}{dt}}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Таким образом, можно находить производную функции, не находя непосредственной зависимости y от x.

Дифференциал функции.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

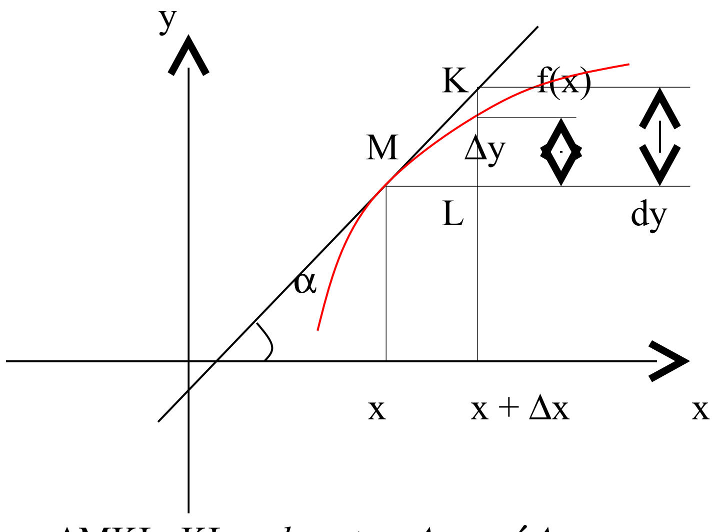
Определение. Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Пример. Найти производную функции $y = x\cos x \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2}\ln x$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2}\,\frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2}\,2x\right)\ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1 + x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$
$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2 \ln x)$$

Лекция 12. <u>Приложения производной в экономике</u>

Предельные показатели в микроэкономике.

Приведем примеры двух предельных показателей в микроэкономике.

1. Первый из них связан с зависимостью себестоимости С произведенной продукции от ее

объема Q: С= f(Q). Так называемая предельная себестоимость характеризует

себестоимость ΔС прироста продукции ΔQ : $MC = \dfrac{\Delta C}{\Delta Q}$

В предположении о непрерывной зависимости ΔС от ΔQ естественно напрашивается замена разностного отношения в его пределом:

$$\text{MC} \approx \lim_{Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \text{C}'(Q)$$

Обычно в приложениях с использованием аппарата математики под предельной себестоимостью понимают именно величину .

Например, пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой

$$C = 40Q - 0{,}03Q^3 \text{ ден. ед.}$$

Определим средние и предельные издержки при объеме продукции Q= 15 ден. ед.

А) Функция средних издержек на единицу продукции определяется по формуле $\overline{C}$ = C/Q, или в нашем случае $C = 40 - 0{,}03Q^2$,

Откуда $\overline{C}$ = 40 – 0,03·225 = 33,25 ден. ед.

Б) Предельные издержки определяются, согласно , по формуле

$$C' = 40 - 0{,}09Q^2,$$

откуда при Q= 15 получаем $C'(15) = 19{,}75$ ден.ед.

Иными словами, при средних издержках на производство единицы продукции в 33,25

ден.ед. дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции составят 19,75 ден.ед. и не превысят средних издержек.

2. В анализе и прогнозах ценовой политики применяется понятие *эластичность спроса.* Пусть $D = f(P)$ – функция спроса от цены товара P (см. п. 3.1). Тогда под эластичностью спроса понимается процентное изменение спроса при изменении цены товара на один процент:

$$E = \frac{\Delta D/D \cdot 100\%}{\Delta P/P \cdot 100\%}$$

Как и в предыдущем случае, в случае непрерывной зависимости ΔD от ΔQ удобно перейти к пределу $\Delta P \to 0$:

$$E(D) = P \cdot \frac{D'(P)}{D(P)}$$

Аналогичное понятие можно ввести и для функции предложения S(P). Напомним, что функция D(P) убывает, а функция S(P) возрастает с ростом цены P.

Укажем некоторые свойства эластичности. Как следует из формулы (5.14а), ее можно выразить так:

$$E(D) = P(\ln D(P))'.$$

Из равенства (5.14б) следует, что E(D) обладает свойствами логарифма, а значит,

$$E(D1D2) = E(D1) + E(D2), \quad E(D1) = E(D1) - E(D2).$$

Заметим, что поскольку функция D(P) убывающая, то $D'(P) < 0$, а тогда согласно формуле (5.14а) и $E(D)<0$. Напротив, поскольку функция предложения возрастающая, то соответствующая эластичность $E(S) > 0$.

Различают три вида спроса в зависимости от величины $|E(D)|$:

а) если $|E(D)| > 1$ ($E(D) < -1$), то спрос считается эластичным;

б) если $|E(D)| = 1$ ($E(D) = -1$), то спрос нейтрален;

в) если |E(D)| <1 (E(D)> - 1), то спрос неэластичный.

Рассмотрим два примера в этой области.

Пример 1. Пусть функция спроса описывается формулой $\mathrm{D}(\mathrm{P}) = D_0 \cdot e^{-k \cdot P^2}$

где D0 и k – известные величины. Найти, при каких значениях цены P спрос будет эластичным.

Решение. Согласно формуле составляем выражение для E(D):

$$\mathrm{E}(\mathrm{D}) = \frac{-2 \cdot k \cdot P \cdot D_0 \cdot e^{-k \cdot P^2}}{D_0 \cdot e^{-k \cdot P^2}} \cdot P = -2k \cdot P^2$$

Для того, чтобы спрос был эластичным (случай а), необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$2kP^2 > 1, \text{ откуда } P > 1/\sqrt{2k}.$$

Пример2. Найти изменение выручки с увеличением цены на товар при разных вариантах эластичности спроса.

Решение. Выручка I равна произведению цены P на товар на величину спроса D: I(P)=D(P)P

Найдем производную этой функции: I′(P)= D(P) + PD′(P)

Теперь проанализируем все варианты эластичности спроса, приведенные выше, с учетом формулы .

1) E(D) < - 1; тогда, подставляя в это неравенство, получаем, что правая часть уравнения отрицательна. Таким образом, при эластичном спросе повышение цены P ведет к снижению выручки. Напротив, снижение цены на товар увеличивает выручку.

2) E(D) = - 1. Из следует, что правая часть равна нулю, т.е. при нейтральном спросе изменение цены на товар не влияет на выручку.

3) E(D) > - 1. Тогда I′(P)>0, т.е. при неэластичном спросе повышение цены P на товар приводит к росту выручки.

Понятие эластичность распространяется и на другие области экономики. Рассмотрим один характерный пример.

Пример 3. Пусть зависимость между себестоимостью продукции C и объемом Q ее производства выражается формулой C = 50 – 0,4Q.

Требуется определить эластичность себестоимости при выпуске продукции Q = 30 ден.ед.

Решение. По формуле получаем $E(C) = -\dfrac{0{,}4 \cdot Q}{50 - 0{,}4 \cdot Q}$

откуда при Q = 30 искомая эластичность составит около 0,32, т.е. при данном объеме выпуска продукции его увеличение на 1% приведет к снижению себестоимости примерно на 0,32%.

Максимизация прибыли

Пусть Q – количество реализованного товара, R(Q)- функция дохода, C(Q)- функция затрат на производство товара. В реальности вид этих функций зависит в первую очередь от способа производства, организации инфраструктуры и т.п. Прибыль от реализации произведенного товара дается формулой $\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$.

В микроэкономике известно утверждение: для того, чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны. Оба упомянутых предельных показателя определяются по аналогии , так что этот принцип можно записать в виде $R'(Q) = C'(Q)$.

Действительно, из необходимого условия экстремума для функции (5.16) следует, что $\Pi'(Q) = 0$, откуда и получается основной принцип.

Пример 4. Найти максимум прибыли, если доход и издержки определяются следующими формулами: $R(Q) = 100Q - Q^2$,

$$C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000.$$

Решение. Согласно (5.16), прибыль $\Pi(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000$. Приравнивая производную функции прибыли к нулю, получаем уравнение

$$Q^2 - 24Q + 23 = 0.$$

Корни этого уравнения Q1 = 1, Q2 = 23. Проверка показывает, что максимальная прибыль достигается при Q= 23: Пmax = 1290.

Закон убывающей эффективности

Этот закон утверждает, что при увеличении одного из основных факторов производства, например капитальных затрат К, прирост производства, начиная с некоторого значения К, является убывающей функцией. Иными словами, объем произведенной продукции V как функция от К описывается графиком со сменой выпуклости вниз на выпуклость вверх.

Пример 5. Пусть эта функция дается уравнением

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}) = V_{\lim}(1 + e^{-b \cdot \mathrm{K} + c})$$

где b и c – известные положительные числа (они определяются прежде всего структурой организации производства), а Vlim - предельно возможный объем выпускаемой продукции. Нетрудно подсчитать, что вторая производная функции (5.17) имеет вид:

$$\mathrm{V}^{//}(\mathrm{K}) = V_{\lim} b^2 \cdot e^{-b \cdot K + c} \cdot \frac{e^{-b \cdot K + c} - 1}{\left(1 + e^{-b \cdot K + c}\right)^3}.$$

Лекция 13. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя.

Теорема Ролля.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция f(x) равная нулю,

$f'(\varepsilon) = 0.$

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке функция f(x) на отрезке [a, b] принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая M = m и M ≠ m.

Пусть M = m. Тогда функция f(x) на отрезке [a, b] сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

Пусть M = m. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка [a, b]. Обозначим ε, a < ε < b точку, в которой f(ε) = M. Так как M- наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка ε + Δx находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \le 0$$

При этом $\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \le 0, & \text{если} \quad \Delta x > 0 \\ \ge 0, & \text{если} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Т.к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \le 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \ge 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad \text{т.е.} \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

1) Если функция f(x) на отрезке [a, b] удовлетворяет теореме Ролля, причем

f(a) = f(b) = 0, то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция f(x) имеет производную (n-1)- го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная (n – 1) – го порядка равна нулю.

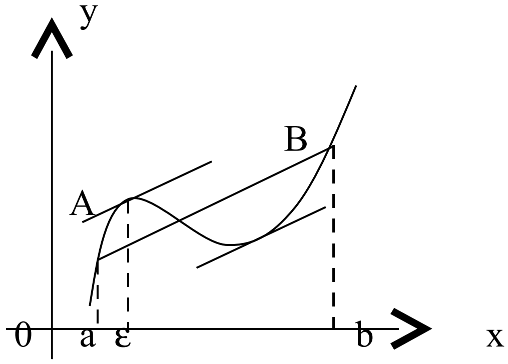
Теорема Лагранжа.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε $a < \varepsilon < b$*, такая, что* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon)$.

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{сек\ AB}$$

Уравнение секущей AB можно записать в виде:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Функция F(x) удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b). По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая что $F'(\varepsilon) = 0$.

Т.к. $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то $F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, следовательно

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Определение. Выражение $f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a)$ называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши.

Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε.

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функции в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это - очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

которая на интервале [a, b] удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при x = a и x = b F(a) = F(b) = 0. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε,

a < ε < b, такая, что F′(ε) = 0. Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon),$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при g(x) = x) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty\cdot 0;\ \infty^{0};\ 1^{\infty};\ \infty-\infty$$

<u>Теорема (правило Лопиталя).</u> *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Доказательство.</u> Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между а и х. Учитывая, что f(a) = g(a) = 0:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при х→а отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками а и х, то при х→а получим ε→а, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана

<u>Пример:</u> Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $\qquad g'(x) = e^x$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \qquad g'(x) = e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right] = \frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \qquad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \qquad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2;$ $\qquad$ $g'(x) = 1 - \cos x;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = e^x - e^{-x};$ $\qquad$ $g''(x) = \sin x;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталя еще раз.

$f'''(x) = e^x + e^{-x};$ $\qquad$ $g'''(x) = \cos x;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2;$

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки a при x→a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Здесь y = x^x, lny = xlnx.

Тогда $\qquad \lim\limits_{0}^{0}\ln \quad \lim\limits_{0}^{0}\ \ln \quad \lim\limits_{0}^{0}\frac{\ln}{1} \left\{ \qquad \right\} = \lim\limits_{0}^{0}\frac{1/}{-1/\ ^2} = -\lim\limits_{0}^{0} = 0;$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x;$ $\quad g'(x) = 2e^{2x};$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{2x}} = \dfrac{\infty}{\infty};$ - получили неопределенность.

Применяем правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = 2;$ $\quad g'(x) = 4e^{2x};$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y″ = (y′)′ или $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;

2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

3) $(u\cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$

$\ldots + uv^{(n)}$.

Лекция 14. Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е.* $f'(x) \geq 0$.

2)*Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем* $f'(x) > 0$ *для* $a < x < b$, *то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Доказательство.

1) Если функция f(x) возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x<0$, тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$.

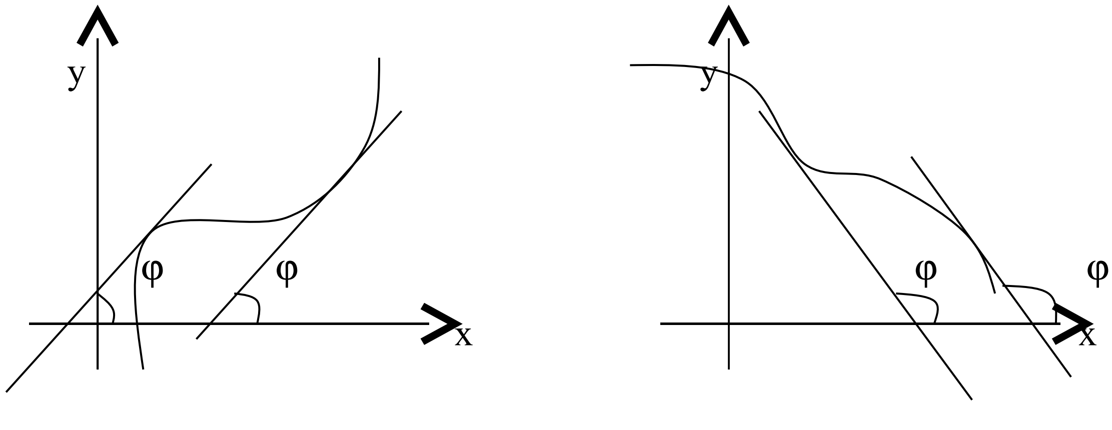
Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x)\leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум.

Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x>0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad при \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \qquad при \quad \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \to 0$ $f'(x_1) = 0$.

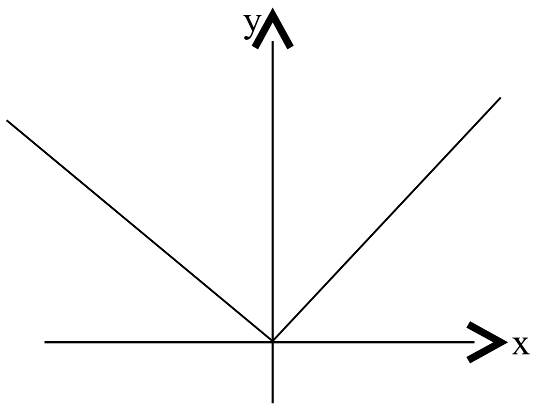
Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

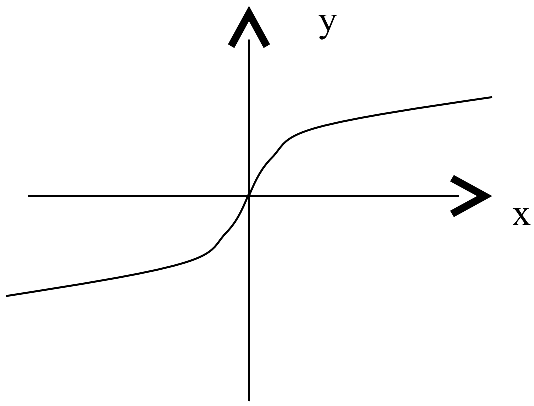
Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x = 0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$ Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$





В точке x = 0 функция имеет минимум, но но не имеет производной.

В точке x = 0 функция не имеет максимума, ни минимума, но имеет производную равную нулю.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с "+" на "-", то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+"- то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \quad \text{или} \quad f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \quad \text{или} \quad f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

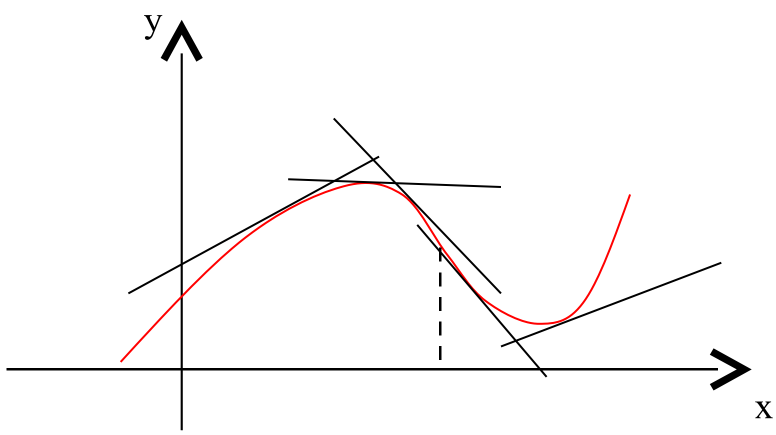
Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

<u>Теорема 1.</u> *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

<u>Доказательство.</u> Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: y = f(x);

Уравнение касательной: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \overline{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \overline{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \overline{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

<u>Определение.</u> Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

<u>Теорема 2.</u> *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная f″(a) = 0 или f″(a) не существует и при переходе через* *точку x = a f″(x) меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть f″(x) < 0 при x < a и f″(x) > 0 при x > a. Тогда при
x < a кривая выпукла, а при x > a кривая вогнута, т.е. точка x = a – точка перегиба.

2) Пусть f″(x) > 0 при x < b и f″(x) < 0 при x < b. Тогда при x < b кривая обращена выпуклостью вниз, а при x > b – выпуклостью вверх. Тогда x = b – точка перегиба.

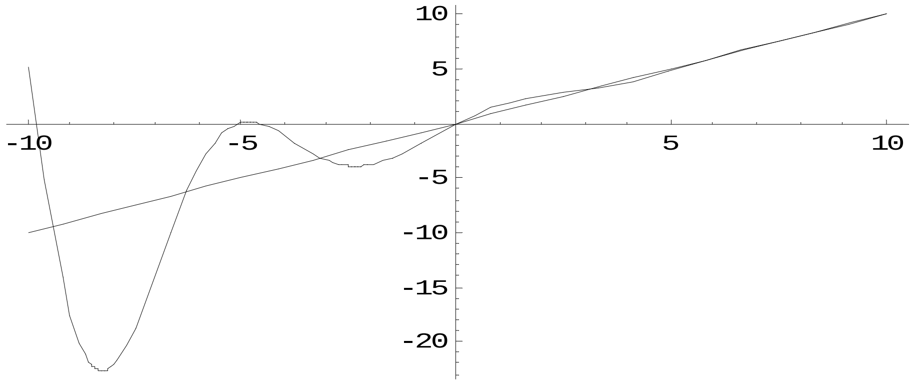
Лекция 15. Асимптоты. Исследования функций и построение грификов.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}}\sin x$. Ее наклонная асимптота y = x.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

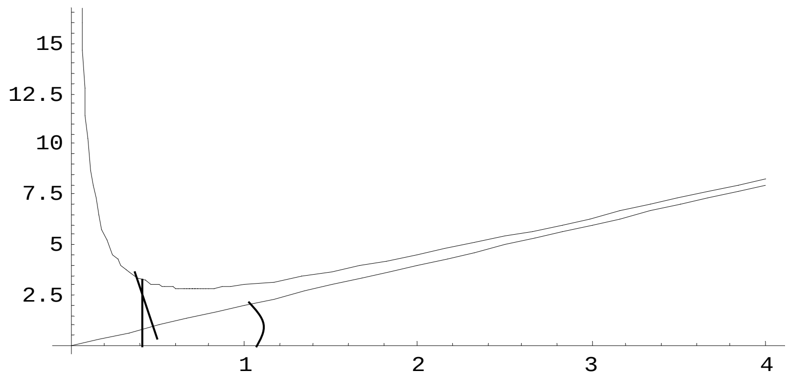
Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

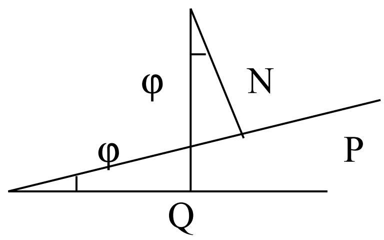
Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту
y = kx + b.



M



Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – М, Р – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ох обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ох пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\bar{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$, $\angle$NMP = φ, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$$

$$|NM| = \big||MQ| - |QN|\big| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки х:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. х→∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно, $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to\infty}b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: y→+∞ x→0-0: y→-∞ x→0+0, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

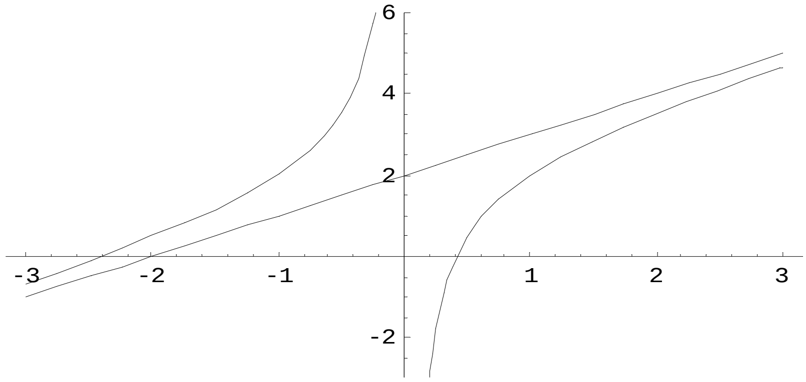
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



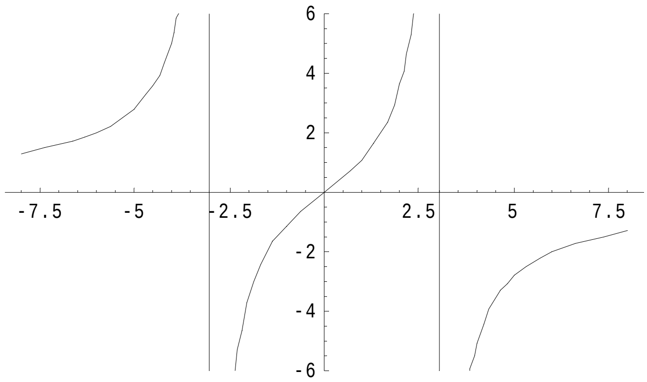
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые x = 3 и x = -3 являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x\to\infty}\frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Прямая x = -2 является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая y = x – 4 является наклонной асимптотой.

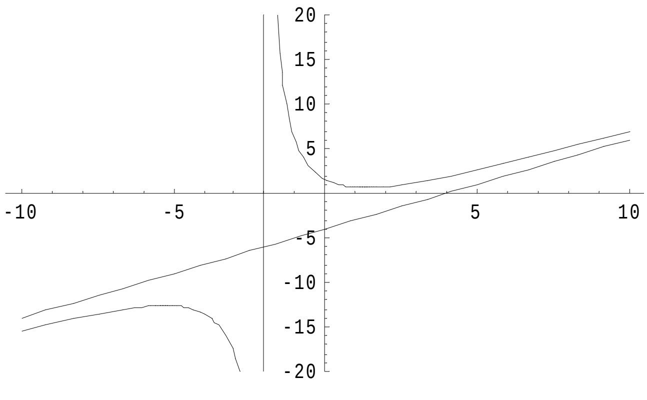


Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

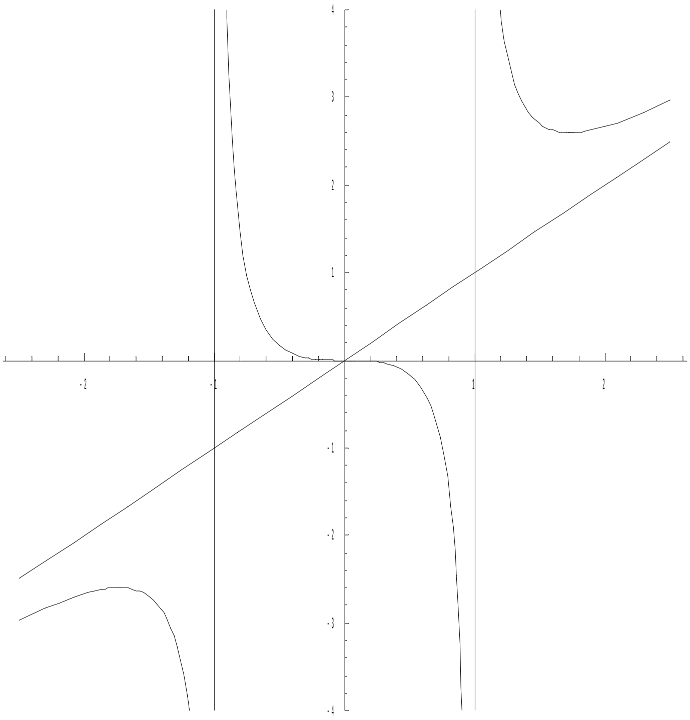
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим *график* функции:



Пример: Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции являются все действительные числа (-∞; ∞).

2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.

3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Oy: x = 0; y = 1;

с осью Ox: y = 0; x = 1;

4. Точки разрыва и асимптоты: Вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты: общее уравнение y = kx + b;

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{1 - x^3}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x) = \lim_{x \leftarrow \infty} \frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1 - x^3}\right)^2 - x \cdot \sqrt[3]{1 - x^3} + x^2\right]} = 0;$$

Итого: y = -x – наклонная асимптота.

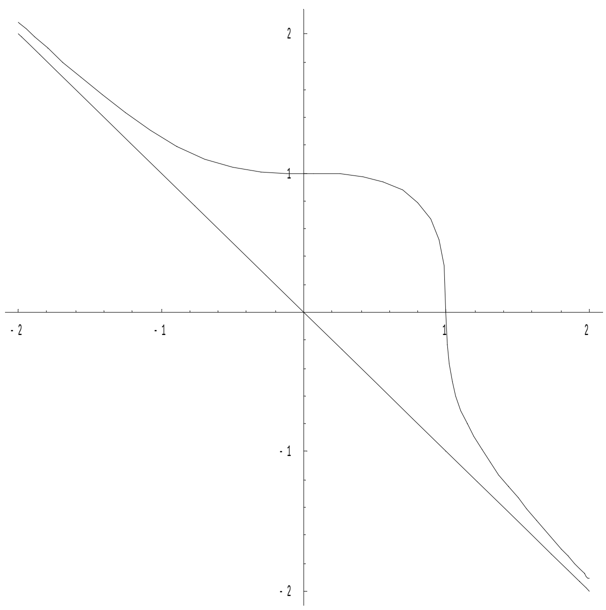
5. Возрастание и убывание функции, точки экстремума.

$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{-2/3} \cdot \left(-3x^2\right)$. Видно, что $y' < 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов. В точке x = 0 первая производная функции равна нулю, однако в этой точке убывание не сменяется на возрастание, следовательно, в точке x = 0 функция скорее всего имеет перегиб. Для нахождения точек перегиба, находим вторую производную функции.

$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^5}}$ $\quad y'' = 0$ при $x = 0$ и $y'' = \infty$ при $x = 1$.

Точки (0,1) и (1,0) являются точками перегиба, т.к. $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$ для любого $h > 0$.

6. Построим график функции.



<u>Пример:</u> Исследовать функцию $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции являются все значения x, кроме x = 0.

2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.

3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Ox: y = 0; $x = -\sqrt[3]{4}$

с осью Oy: x = 0; y – не существует.

4. Точка x = 0 является точкой разрыва $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$, следовательно, прямая x = 0 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты ищем в виде: y = kx + b.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота y = x.

5. Находим точки экстремума функции.

$y' = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0$ при x = 2, $y' = \infty$ при x = 0.

$y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функция возрастает,

$y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функция убывает,

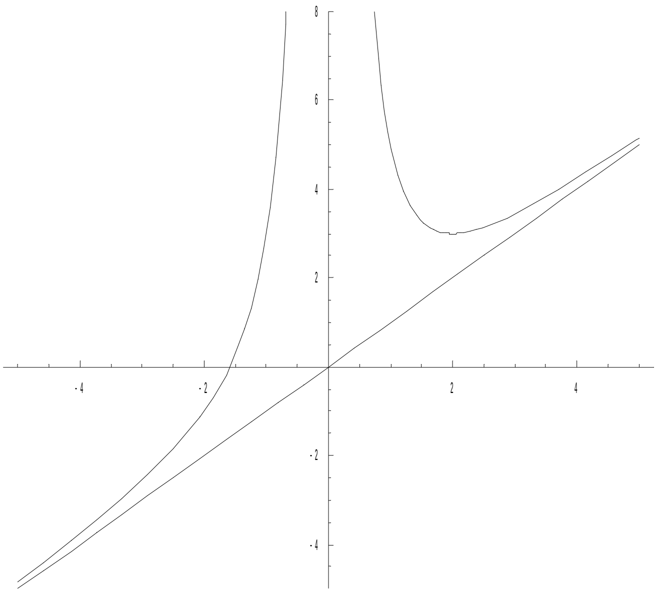
$y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функция возрастает.

Таким образом, точка (2, 3) является точкой минимума.

Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную.

$y'' = \dfrac{24}{x^4} > 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция, вогнутая на всей области определения.

6. Построим график функции.



Лекция 16.<u>Функции нескольких переменных. Основные понятия.</u>

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

<u>**Определение:**</u> Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

<u>**Определение:**</u> Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

<u>**Определение:**</u> **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

<u>**Определение:**</u> **Окрестностью точки** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$.

<u>Определение:</u> Число А называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.т Записывают: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

<u>Определение:</u> Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

<u>Свойство.</u> Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка

$N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$$f(x_0, y_0, \ldots) \ge f(x, y, \ldots)$$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \le f(x, y, \ldots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – **наименьшее значение** функции f(x, y, …) в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка
$N_0(x_0, y_0, \ldots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \ldots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство. Функция f(x, y, …), непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число К, что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, ...)| < K$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число $\Delta > 0$, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon .$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z = f(x, y)$ по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Полное приращение и полный дифференциал.

Определение. Для функции f(x, y) выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением**.

Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \\ + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]$$

Применим теорему Лагранжа к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y}\in(y, y+\Delta y)$; $\bar{x}\in(x, x+\Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z = \Delta x\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

<u>Определение.</u> Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

<u>Определение:</u> **Полным дифференциалом** функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, ..., t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

<u>Пример</u>. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

<u>Пример.</u> Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy.$$

<u>Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.</u>

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

<u>Пример.</u> Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Из заданного выражения определим $\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$,
$\Delta z = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$.

Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1,2,1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

Частные производные высших порядков.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Теорема. Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Лекция 17. Производная и градиент скалярного поля.

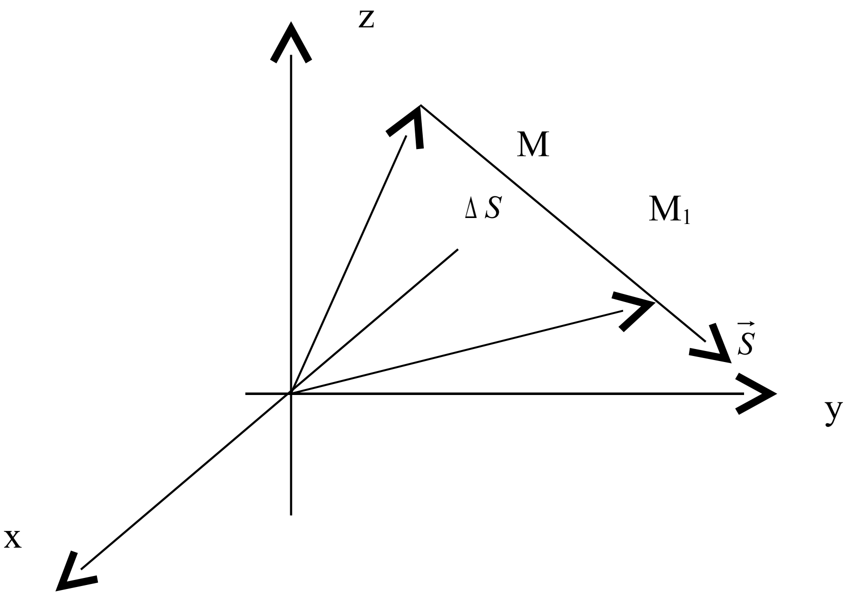
Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Высказанные выше предположения, проиллюстрируем на рисунке:



Далее предположим, что функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

где величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_2\cos\gamma ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

__**Определение:**__ Предел $\lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции u(x, y, z) по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

__Пример.__ Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B (3, 0).

__Решение.__ Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3-1;\ 0-2) = (2;\ -2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}\ .$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке A : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования. Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Связь градиента с производной по направлению.

Теорема: *Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов*

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\vec{S}$ *равняется проекции вектора gradu на вектор* $\vec{S}$.

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *gradu*.

$$grad u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s.

Т.е. $grad u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *gradu* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|grad u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *gradu* на вектор $\vec{S}$.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Лекция 18. Экстремум функции нескольких переменных. Приложения к решению экономических задач.

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

<u>Теорема. (Необходимые условия экстремума).</u>

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

<u>Теорема. (Достаточные условия экстремума).</u>

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

1) Если D(x_0, y_0) > 0, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если

$f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если D(x_0, y_0) < 0, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

<u>Условный экстремум.</u>

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение

φ(x, y) = 0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)).

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ называется функцией Лагранжа.

Пример. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

Применение в задачах экономики

Экстремум функции нескольких переменных

Рассмотрим типичную задачу нахождения экстремума функции нескольких переменных, возникающую в экономике.

Прибыль от производства разных видов товара

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ - количества производимых m разновидностей товара, а их цены – соответственно $P_1, P_2, \ldots, P_m$ (все P_i - постоянные величины). Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек

$$C=S(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Тогда функция прибыли имеет вид

$\Pi=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_mx_m - S(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Максимум прибыли естественно искать как условие локального экстремума функции многих переменных (8.11) при $x_i \geq 0$ (при отсутствии других ограничений).

$\partial\Pi/\partial x_i=0, i=1, 2, \ldots m.$ (1)

Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i

$P_i - \partial S/\partial x_i=0, i=1, 2, \ldots, m.$ (2)

Система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара. Решениями этой системы уравнений являются наборы, состоящие из m значений каждый. Нужно заметить, что сам процесс нахождения решения системы уравнений зависит от вида функции издержек и может быть достаточно сложным.

Приведем конкретный пример. Пусть производятся два вида товаров, обозначим их количества через *x* и *y*. Пусть $P_1=8$ и $P_2=10$ – цены на эти товары соответственно, а $C=x^2 + xy + y^2$ – функция затрат. Тогда согласно (8.11) при $x_1= x$, $x_2=y$ прибыль является функцией двух переменных:

$$\Pi(x,y)=8x + 10y – x^2 – xy – y^2.$$

Условия локального экстремума приводят к системе линейных

алгебраических уравнений $\begin{cases} 2x+ y = 8 \\ x+ 2y = 10, \end{cases}$

решением которой является точка (2, 4). Поскольку

$$a_{11}= -2 < 0,\ \Delta = a_{11}a_{22} – a^2_{12} = 3 > 0,$$

то найденная точка определяет локальный максимум функции прибыли, который равен $\Pi_{max} = 28$.

Оптимальное распределение ресурсов

Рассмотрим типичную задачу оптимального распределения ресурсов на примере функции выпуска $u = a_0xy^2$ при допущении, что функция затрат на ресурсы *x* и *y* линейна, т. е. имеет вид $u = P_1x + P_2y$, где P_1 и P_2 - соответствующие цены на эти факторы.

В точке $F(x_0\ y_0)$, определяющей оптимальное определение ресурсов, линии уровня функций выпуска и затрат касаются (рис 8.5). Эти линии определяются соответственно уравнениями $a_0xy^2 = C$, $P_1x+P_2y = A$, или $y = (b/x\ )^{1/2}$, $y = -(P_1/P_2)x+A/P_2$, где C>0 и A>0 – постоянные числа, $b=C/a_0$. Условие касания этих линий дается уравнением

$$[(b/x)^{1/2}]'\,|_{x0} = - P_1P_2\,.$$

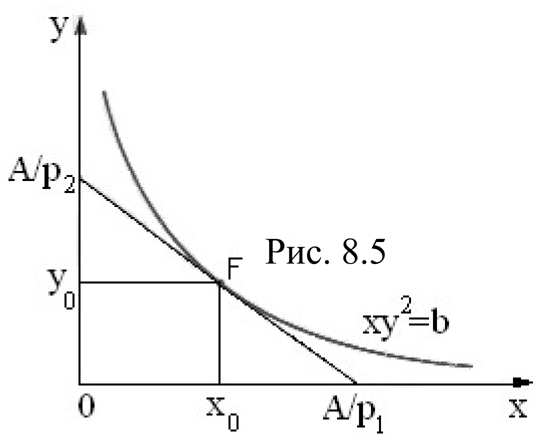


Рис. 8.5

Из этого уравнения определяется значение $x_0=b^{1/3}(P_2/2P_1)^{2/3}$. Тогда из уравнения линии уровня функции выпуска определяется значение

$y_0= (b/x_0)^{1/3} = b^{1/3}(P_2/2P_1)^{2/3}$. Отсюда получаем, что оптимальное распределение ресурсов x_0/y_0 должно быть произведено в отношении $P_2:2P_1$.

Максимизация прибыли производства продукции

Функция прибыли обычно вычисляется по формуле

$$П(К, L) = PF(K, L) – WL – RK, \qquad (8.13)$$

Где F(K, L) – производственная функция, P – цена продукции, W и R – соответственно факторные цены на труд и капитальные затраты, L и K – соответственно затраты трудовых ресурсов и капитала. Рассмотрим две задачи, связанные с определением максимум прибыли.

1. Точка (K_0,L_0) называется оптимальным планом, если в ней функция прибыли (8.13) принимает максимальное значение. Найти предельную норму замещения производственной функции F при оптимальном плане.

В точке локального экстремума первые производные функции прибыли П(К, L) равны нулю, откуда имеем системы двух уравнений

$$\begin{cases} PF'_K(K_0,L_0) - R = 0, \\ PF'_L(K_0,L_0) - W = 0. \end{cases}$$

Как известно, предельная норма замещения вычисляется по формуле

$\mu= -F'_L/F'_K$, откуда при оптимальном плане получаем $\mu = -W/R$.

2. Максимизация функции прибыли. Найти оптимальный план и максимум функции прибыли (8.13), если $F(K,L)=2(KL)^{1/3}$.

В данном случае функция прибыли имеет вид

$$П(K,L)=2P(KL)^{1/3} – WL – RK.$$

Условия локального экстремума приводят к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно координат K_0 и L_0 оптимального плана

$$\begin{cases} \tfrac{2}{3}PL_0^{1/3}K_0^{-2/3} = R, \\ \tfrac{2}{3} PK_0^{1/3}L_0^{-2/3} = W. \end{cases}$$

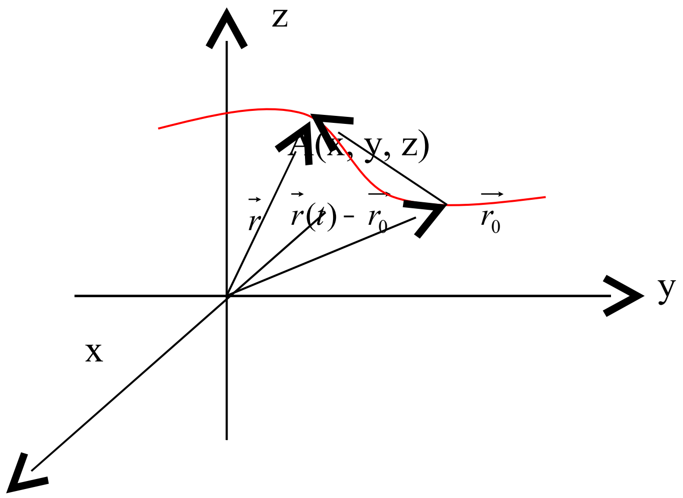
Отсюда получаем координаты оптимального плана:

$K_0 = (2P/3)^3/(R^2W)$, $L_0=(2P/3)^3/(RW^2)$.

Подстановка этих величин в функцию прибыли дает максимум:

$$\Pi_{max} = (2P/3)^3/(RW).$$

<u>Векторная функция скалярного аргумента.</u>



Пусть некоторая кривая в пространстве задана параметрически:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad z = f(t);$$

Радиус- вектор произвольной точки кривой: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$

.

Таким образом, радиус- вектор точки кривой может рассматриваться как некоторая векторная функция скалярного аргумента t. При изменении параметра t изменяется величина и направление вектора $\vec{r}$.

Запишем соотношения для некоторой точки t_0:

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t) = \varphi_0; \quad \lim_{t\to t_0}\psi(t) = \psi_0; \quad \lim_{t\to t_0} f(t) = f_0;$$

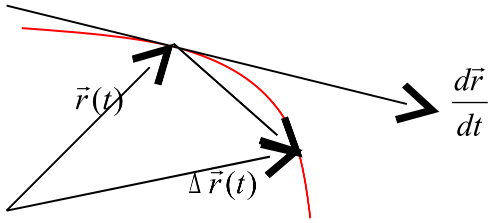
Тогда вектор $\vec{r}_0 = \varphi_0\vec{i} + \psi_0\vec{j} + f_0\vec{k}$ - предел функции $\vec{r}$ (t). $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Очевидно, что

$$\lim_{t\to t_0}|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = \lim_{t\to t_0}\sqrt{(\varphi(t) - \varphi_0)^2 + (\psi(t) - \psi_0)^2 + (f(t) - f_0)^2} = 0,$$

Тогда $\lim_{t\to t_0}|\vec{r}(t)| = |\vec{r}_0|$.

Чтобы найти производную векторной функции скалярного аргумента, рассмотрим приращение радиус- вектора при некотором приращении параметра t.



$$\vec{r}(t+\Delta t)$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \varphi(t+\Delta t)\vec{i} + \psi(t+\Delta t)\vec{j} + f(t+\Delta t)\vec{k}; \qquad \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t);$$

$$\Delta\vec{r} = (\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t))\vec{i} + (\psi(t+\Delta t) - \psi(t))\vec{j} + (f(t+\Delta t) - f(t))\vec{k}$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

или, если существуют производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $f'(t)$, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j} + f'(t)\vec{k} = \vec{r}'$$

Это выражение – вектор производная вектора $\vec{r}$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [f'(t)]^2}$$

Если имеется уравнение кривой:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad z = f(t);$$

то в произвольной точке кривой $A(x_A, y_A, z_A)$ с радиус- вектором

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$$

можно провести прямую с уравнением $\frac{x - x_A}{m} = \frac{y - y_A}{n} = \frac{z - z_A}{p}$

Т.к. производная $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор, направленный по касательной к кривой, то

$$\frac{x - x_A}{\frac{dx_A}{dt}} = \frac{y - y_A}{\frac{dy_A}{dt}} = \frac{z - z_A}{\frac{dz_A}{dt}}.$$

8. Содержания практических занятий

Занятие 1. Комплексные числа.

Определение. **Комплексным числом** z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\, z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

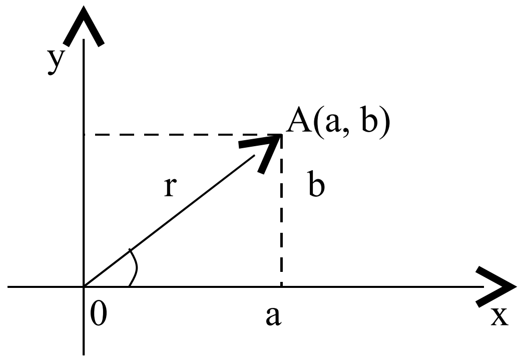
Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$.

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части. $a = b = 0$.

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси Oy – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

<u>Тригонометрическая форма числа.</u>

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ **- аргументом** комплексного числа. $r = |z|$; $\varphi = Arg\, z$.

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}\,.$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.** $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме: $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

4) **Возведение в степень.**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

<u>Показательная форма комплексного числа.</u>

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$; 2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$; 3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

<u>Пример.</u> Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i;\quad z_2 = -7 - 2i$.

Требуется а) найти значение выражения $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме,

б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

a) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

b) $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

б) Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представим в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = |z| = \sqrt{4+12} = 4; \qquad \varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -60^0$$

Тогда $z = 4(\cos 60^0 - i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} восспользуемся формулой Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^0 - i\sin 1200^0) = 4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi + 120^0) - i\sin(3\cdot 2\pi + 120^0)) =$$

$$= 4^{20}(\cos 120^0 - i\sin 120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3 + z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-60^0 + 2\pi k}{3}\right); \quad k \in Z.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

гл. 16. №№16.1-16.4. Задание стр. 388-339.

Занятие 2.Уравнение прямой на плоскости.

гл.4. №№ 4.1-4.9, 4.13, 4.16, 4.21-4.26, 4.31-4.37, 4.41

Занятие 3. Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс.

гл.4. №№ 4.47, 4.49-4.52, 4.55- 4.60, 4.63-4.68,

Занятие 4. Кривые второго порядка. Гипербола. Обратная пропорциональная зависимость. Парабола. гл.4. №№ 4.70-4.86.

Занятие 5.Прямая и плоскость в пространстве.

гл.4. №№ 4.87-4.90, 4.93- 4.100, 4.102-4.109. Задание стр. 122-124.

Занятие 6. Понятие функции. гл.5. №№ 5.12-5.26, 5.38,

Задание стр. 137-139.

Занятие 7. Предел функции.

гл.6. №№ 6.18-6.22, 6.25-6.30, 6.33-6.40, 6.47-6.59, 6.70-6.75, 6.93-6.96.

Занятие 8. Замечательные пределы.

гл.6. №№ 6.100-6.105, 6.108-6.110, 6.124-6.140. Задание стр. 163-164.

Занятие 9.Непрерывность функции и точки разрыва.

гл.6. №№ 6.168-174. Задание стр. 164-165.

Занятие 10. Производная. Дифференцирование явных функций.

гл.7. №№ 7.21-7.28, 7.31-7.51, 7.57-7.70,

Занятие 11. Производная. Дифференцирование неявных функций. Производные функций заданных параметрическими уравнениями. Предельный анализ экономических процессов.

гл.7. №№ 7.76-7.85, 7.86-7.91.7.113-7.125, 7.136-7.154.

Задание стр. 185-188.

Занятие 11. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. гл.8. №№8.15-8.33.

Занятие 12. Интервалы монотонности и экстремумы функции. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба.

гл.8. №№ 8.41-8.50, 8.61-8.63, 8.75-8.77, 8.82-8.90.

Занятие 13. Асимптоты. Исследование функций и построение их графиков.

гл.8. №№ 8.100-8.106, 8.106-8.111.

Занятие 14. Применение производной в задачах с экономическим содержанием. гл.8. №№ 8.128- 8.129, 8.131-8.132, 8.134- 8.135, 8.141-8.143.

Задание стр. 216-219.

Занятие 15.Функции нескольких переменных.

гл.15. №№ 15.6-15.11, 15.14-15.20, 15.31-15.38, 15.41-15.44, Занятие 16. Производная и градиент скалярного поля.

гл.15. №№ 15.47-15.54.

Занятие 17. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум. гл.15. №№ 15.62-15.70, 15.80-15.82.

Занятие 18. Функции нескольких переменных в экономических задачах.

гл.15. №№ 15.110-15.117. Задание стр. 375, 377.

9. Примерные задания для контрольных и расчетно-графических работ.

Расчетно-графическая работа №1 по теме «Аналитическая геометрия с элементами анализа».

Задание №1. Найти множества значений *x*, удовлетворяющих следующим условиям. Изобразить эти множества геометрически:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x-2| \leq 3$; 3) $|x-4| = |x+4|$.

Задание №2. Найти область определения функции и изобразить ее на чертеже. 1) $f(x) = \log_3(3x-4) + \lg(3-x)$; 2)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9} + \lg(x-2).$$

Задание №3. Построить графики функций и сформулировать их основные

свойства. 1) $2^{ч}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{ч}$; 3) $\log_3 x$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} x$; 5) x^3.

Задание №4. С помощью преобразования графика подходящей элементарной функции построить график функции $f(x)$.

1) $\frac{1}{|x|}$; 2) $\frac{2x-4}{x+3}$; 3) $2x^2+3x+4$.

Задание №5. Построить линии. 1) $y=\sqrt{9-x^2}$;2) $y=-3-\frac{1}{3}\sqrt{8+2x-x^2}$;

3) $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$; 4) $x-4y^2-8=0$.

Задание №6. Построить графики зависимостей величины спроса X от дохода J (функции Торнквиста) на:

а) товары первой необходимости $X=\frac{a_1 J}{J+c_1}$, где $J\geq 0$;

б) товары второй необходимости $X=\frac{a_2(J-b_2)}{J+c_2}$, где $J\geq b_2$;

в) товары роскоши $X=\frac{a_3 J(J-b_3)}{J+c_3}$, где $J\geq b_3$.

a_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3
2	2	3	4	2	2	6	2

Задание №7. Построить графики функций, описывающих зависимости:

а) спроса от цены товара $D=KP^a+C$;

б) предложения от цены товара $S=P^b+d$;

в) охарактеризовать эти графики.

K	a	c	b	d
2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{5}$	0,5

Задание №8. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются функциями

$y_1 = a_1 x + b_1$; $y_2 = a_2 x + b_2$, где x - расстояние в сотнях километров, y_1, y_2 - соответствующие транспортные расходы.

Необходимо: построить графики функций; произвести экономический анализ; рассчитать транспортные расходы при $x = x_0$.

a_1	b_1	a_2	b_2	x_0
40	120	35	140	600

Задание №9. Даны вершины треугольника АВС.

Найти: длину стороны ВС; уравнение высоты из вершины А и ее длину; уравнение медианы из вершины А; записать уравнение прямой, проходящей через вершину А; построить чертеж.

А(-2;10); В(5;8); С(4;0).

Задание №10. Для функций спроса D(p) и предложения S(P) найти равновесную цену, если $\mathrm{D(p)} = 3 \cdot 2^{-p}$ *и* $\mathrm{S(p)} = 2^{p} + 2$

Задание №11. Построить поверхности:

1) $2x - 3y - z = 0$; 2) $2x - 3y - z = 0$; 3) $y^2 - 4z - 5 = 0$;

4) $y^2 - 4z^2 + 8x^2 + 8 = 0$; 5) $y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$.

Задание №12. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2 + 1$, *x=3, y=3, x=0, y=0, z=0.*

2) *z=0, z=0, y=0, y=4,* $x = \sqrt{25 - y^2}$.

3) $z = y^2$, *2x+y=6, x=0, z=0.*

Задание №13. Найти пределы числовых последовательностей с заданным общим числом:

а) $\dfrac{2n-3}{n^2+1}$; б) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}}$; в) $\left(\dfrac{n^3}{n^2+1} - \dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$; г) $\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1}\right)$.

Задание №14. Найти пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

Задание №15. Первоначальный вклад, положенный в банк под ***P%*** годовых, составил ***a*** млн. рублей. Найти размер вклада через ***b*** лет при начислении процентов:

а) ежегодном; б) поквартальном; в) ежемесячном г) непрерывно

P=3; a=4; b=2

Задание №16. Доказать непрерывность функции и построить её график:

а) $y=2^{x-2}$; б) $y=\begin{cases}2x+3, & x\le 0,\\ 5-5x, & x>0.\end{cases}$ в) $y=\left|4x-x^2\right|$.

Задание №17. Найти точки разрыва функций и определить их тип. Построить чертёж.

а) $y=\dfrac{x+3}{x-4}$; б) $y=3^{\frac{1}{x-1}}$; в) $y=\dfrac{9x^2-16}{3x+4}$; г) $y=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ -x-1, & x>0.\end{cases}$

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

Задание №15. Первоначальный вклад, положенный в банк под ***P%*** годовых, составил ***a*** млн. рублей. Найти размер вклада через ***b*** лет при начислении процентов:

а) ежегодном; б) поквартальном; в) ежемесячном г) непрерывно

P=3; a=4; b=2

Задание №16. Доказать непрерывность функции и построить её график:

а) $y=2^{x-2}$; б) $y=\begin{cases}2x+3, & x\le 0,\\ 5-5x, & x>0.\end{cases}$ в) $y=\left|4x-x^2\right|$.

Задание №17. Найти точки разрыва функций и определить их тип. Построить чертёж.

а) $y=\dfrac{x+3}{x-4}$; б) $y=3^{\frac{1}{x-1}}$; в) $y=\dfrac{9x^2-16}{3x+4}$; г) $y=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ -x-1, & x>0.\end{cases}$

Расчетно-графическая работа №2 по теме

«Приложение производной функции одной переменной».

Задание 1. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой, $f(x)=\dfrac{-x^3}{6}+x^2-2x-3$; параллельно прямой $3x+6y-2=0$

Задание 2. Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой продукции q выражается формулой $C=40q+0{,}02q^3$, где A и B – известные величины. Определить средние и предельные издержки производства при объеме продукции 10.

Задание 3. Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства q выражается формулой $\tilde{N}=40-0{,}2q$. Требуется определить коэффициент эластичности при выпуске продукции 20 (ден. ед.). (Вычислять либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 0,1.)

Задание 4. Зависимость спроса q от цены p описывается формулой $q = 20e^{-0.02p^2}$. Найти, при каких значениях цены спрос будет эластичным.

Задание 5. Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{P+11}{P+4}$ и предложения $S = P + 0,5$, где q и S - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, P - цена товара. Найти:1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения; 3) изменение дохода при изменении цены на 5 %.

Задание 6. Объём продукции q, произведённый бригадой рабочих, может быть описан уравнением $q = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 90t + 50$ (ед.), $0 \le t \le 8$ где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через *1* часов после начала смены и за *2* часов до её окончания.

Задание 7. Пусть функция дохода $R(q) = 24q - 2q^2$, а функция затрат $C(q) = q^2 - 3$. Каким должен быть налог t с единицы выпускаемой продукции, чтобы величина суммарного налога T со всей продукции была наибольшей?

Задание 8. Определить изменение ставки процента $r=r(t)$, если дана величина вклада в момент времени t: $K(t) = K_0(t+1)^{r_0}$, где t – число лет от открытия вклада, K_0 – величина вклада в начальный момент времени $t=0$, r_0 (%) – номинальная ставка за год. Найти сумму процента через t_1 и t_2 лет.

K_0	r_0	t_1	t_2
10000	15	2	5

Задание 9. Капитал в *1* миллионов ден. ед. может быть размещён в банке под *30* % годовых или инвестирован в производство, причём эффективность вложения в размере *100* %, а издержки задаются квадратичной зависимостью $c = ax^2$. Прибыль облагается налогом в p %. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, чем размещение в банке.

Задание 10. Найти пределы функции, используя правило Лопиталя.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$,	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+5}{6x^2+1}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{x^2-x}$,	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{4x}-2}{\sin x}$,
$\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$,	$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$,	$\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 11. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $9\sqrt{2}$. Каковы должны быть катеты, чтобы периметр был наибольшим?

Задание 12. Исследовать функции и построить их графики.

$y = x^3 + 3x + 2$	$y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y = ln\left(x^2 + x - 2\right)$

Задание 13. Известно, что зависимость издержек и дохода от объёма производства определяется функциями: $C(q) = 18q - 8q^2 + q^3$ и $R(q) = 8q - q^2$ где q – объём производства, $C(q)$ - издержки, $R(q)$ - доход. Найти зависимость прибыли $\Pi(q)$ от объёма производства.

1. Построить графики функций прибыли производства.
2. Найти объёмы производства при которых:

а) прибыль равна нулю;

б) прибыль максимальна;

в) убытки максимальны

3. Найти значения максимальных убытков и прибыли.
4. Найти средние значения прибыли при объёме производства q = 1,5 ед.
5. Найти предельные значения прибыли при объёме производства q = 2,5 ед.

При необходимости результат округлить до 0,01

Расчетно-графическая работа №3 по теме
«Приложение производной функции двух переменных».

Задача № 1. Задана функция $z= 3x^2y+5xy^2+\sqrt{x}y$. Вычислить все ее производные первого порядка в точке А (1,1).

Задача № 2. Задана функция $z= \sqrt{x^2+y^2}$. Найти частные производные 2[го] порядка.

Задача № 3. Задана функция спроса $D= 400-3p+2p_A+0{,}005y$, где p- цена данного товара; p_A- цена альтернативного товара; y- доход потребителей. Найти коэффициенты эластичности при заданных значениях p, p_A, y и пояснить их экономический смысл.
$p=15$, $p_A=18$, $y=1000$.

Задача № 4. Задана функция полезности $U= 5x^{1/4}y^{3/4}$, где x – количество товара X и y- количество товара Y. Требуется оценить (приближенно вычислить) изменение полезности, когда x изменяется от x_1 до x_2, а y от y_1 до y_2. Пояснить экономический смысл решения. $x_1=120$, $x_2=119$, $y_1=200$, $y_2=201$.

Задача № 5. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара X на товар Y для функции полезности $U= 2x^{1/3}y^{2/3}$, где x- количество товара X; y- количество товара Y в точке А (8;12).

Задача № 6. Задана производственная функция $Q=200\sqrt{L}*\sqrt[3]{K}+50L$, где К- капитал, L- труд. Вычислить предельный продукт труда при $L= l_1, l_2, l_3$ и предельный продукт капитала при $K=K_1$. Пояснить экономический смысл полученных результатов. L=100, 225, 400; К= 1000.

Задача № 7. Задана производственная функция $Q= 3L^2K-K+10$, где Q- количество произведенных товаров и услуг, K и L-ресурсы. Построить кривые безразличия при $Q=Q_0$, вычислить коэффициент заменяемости ресурсов R_A, если $A(L_0,K_0)$, пояснить экономический смысл решения. $Q_0=10$; A(1,1/2).

Задача №.8. Задана производственная функция Q= 1/2KL+(47-K-L)*(K/3+L/4), где Q-количество произведенных товаров и услуг, а K и L- капитал и приложенный труд. Найти оптимальные величины K и L, при которых выпуск продукции максимальный.

Задача № 9. Производственная функция имеет вид $Q= 2L^2+10LK$, где Q- выпуск продукции в единицу времени; K-капитал; L-труд. Затраты на единицу капитала и труда составляют соответственно a и b, а общая сумма затрат равна c. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу двумя способами: методом подстановки и методом множителей Лагранжа. a =2, b =3, c =156.

Задача № 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2- xy + y^2 - 4x$, заданной в области D: $2x+3y-12\le 0$

$x=0, y=0.$

Задача № 11. Найти производную в точке А по направлению вектора а.

z=5x^2+6xy   A(2;1), a=i+2j.

Задача № 12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией

z=x^3+y^3+xy-6 A(1;2)

Контрольные работы

Контрольная работа № 1.

1. Выполнить действия: а) $(1+2i)(1-i)$; б) $\dfrac{1-i}{2+i}$; в) $i^3-i^{14}+i^{10}$.
2. Решить уравнения: а) $x^2-4x+5=0$; б) $x^3+9=0$.
3. Вычислить $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$.

Контрольная работа № 2.

Задание 1.
Даны точки *A* (-3; 5) и *B* (3; -4). Найти уравнение прямой, проходящей через точку *C* (1; 2): а) параллельно прямой *AB*; б) перпендикулярно прямой *AB*.

Задание 2.
Построить линии: а) $2x+5y+7=0$; б) $3x^2+5y=10$;
в) $y=-\dfrac{1}{9}\sqrt{9-x^2}$; г) $x=\dfrac{3}{4}\sqrt{y^2-16}$.

Контрольная работа № 3.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x+5x^2}{x^2+x-7}$	2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$	4. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$	6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$
	7. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)(\ln(x+4)-\ln(x-1))$

Контрольная работа № 4.

1. Докажите теорему о пределах частного.
2. График функции $y=\arccos x$.

3. Сравнение бесконечно малых функций.
4. Дайте определение непрерывности функции в точке x_0 на языке приращений.

Контрольная работа № 5.

1. Найти производные: 1) $y = \frac{2+3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, 2) $y = 2x^3 \ln\sin 2x$, 3) $y = (\cos x + 1)^2 tg 4x$

4) $x^3 y + 3y^2 x^2 - 2x + 4y = 0$, 5) $y = x^{\sin 2x}$.

2. Показать, что функция $y = 3e^{x^2}$ удовлетворяет уравнению

$xyy'' - x(y')^2 - xy' = 0.$

3. Найти производную от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^{-2t}\sin 2t; \\ y = e^{2t}\cos 2t. \end{cases}$$

4. Составите уравнение касательных к графику функции $y = \frac{2x+1}{x+1}$

перпендикулярных прямой $y + x + 7 = 0.$

5. Для функции спроса $q = \frac{1}{3}(100 - 5p)$ **найти значение стоимости единицы продукции** ***p*****, при котором спрос является эластичным.**

Основные вопросы коллоквиума по теме « Введение в анализ»

1. Понятие множества.
2. Понятие функции.
3. Способы задания функции.
4. Четность и нечетность функции.
5. Ограниченность, периодичность.
6. Обратная функция.
7. Сложная функция.
8. Классификация функций.
9. Определение числовой последовательности.
10. Предел числовой последовательности.

11. Предел функции в бесконечности и в точке.

12. Бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и $x \to \pm\infty$.

13. Бесконечно большие функции при $x \to x_0$ и $x \to \pm\infty$.

14. Свойства бесконечно малых функций.

15. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

16. Связь бесконечно малых функций с пределами функций.

17. Основные теоремы о пределах.

18. Первый замечательный предел.

19. Второй замечательный предел.

20. Непрерывность в точке.

21. Классификация точек разрыва.

22. Свойства непрерывных функций на отрезке.

10. Тестовые задания для контроля знаний

Тест № 1(входной контроль).

Вариант 1.

1. Укажите все номера целых чисел данного множества

1) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}-4\sqrt{3}$; 2) $3^{\log_{1/6}36}$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right):\dfrac{13}{24}$;

4) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$; 5) $125^{\frac{3}{4}}$.

1) 1, 2, 3 2) 1, 3 3) 1, 3, 5 4) 2, 3, 4 5) 1, 3, 4

---

2. Сократите дробь $\dfrac{5m^2-6mn+n^2}{10m^2-9mn-n^2}$, вычислите её значение при $\dfrac{m}{n}=\dfrac{5}{4}$

1) $\dfrac{1}{3}$ 2) $\dfrac{2}{3}$ 3) $-\dfrac{2}{3}$ 4) 1,5 5) –2,5

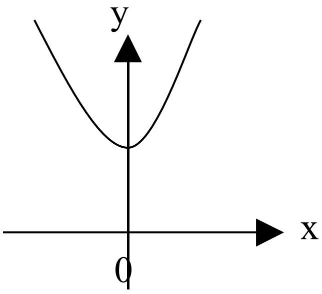
---

3. Профессор принимает экзамен в группе студентов за 4 часа, а его ассистент - за 6 часов. За сколько времени, работая одновременно, профессор и ассистент могут опросить 75 % студентов этой группы?

1) 1,3 часа 2) 1,5 часа 3) 1,8 часа 4) 2 часа 5) 2,2 часа

---

4. Если на рисунке изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и $D = b^2 - 4ac$, то справедливо соотношение



1) $ac < 0$
2) $ab > 0$
3) $bD = 0$
4) $aD > 0$
5) $cD > 0$

---

5. Абсцисса точки пересечение графиков функций $y = 2\log_3 x$ и $y = 6 - x$ принадлежит промежутку

1) (0; 1) 2) (1; 4) 3) (3; 4) 4) (2; 3) 5) (4; 5)

---

6. Укажите все номера только чётных функций данного множества

1) $y = (x^3 + x)\sin x$ 2) $y = (x+1)^2 \cos x$ 3) $y = \dfrac{2x \cdot tg 2x}{x^2 + 1}$ 4) $y = |x| \cdot 2^{-x^4 + 3}$

1) 2, 3, 4 2) 1, 2, 3 3) 1, 3, 4 4) 2, 3 5) 2, 4

---

7. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = -3x^3 + 2x^2 - 3x - 22$ в точке с абсциссой $x = 2$

1) $y = 31x - 18$ 2) $y = 18 - 31x$ 3) $y = 18x - 31$ 4) $y = -18x - 31$ 5) $y = 31 - 18x$

---

8. Найдите длину промежутка возрастания функции $y = 20x^3 - 3x^5 + 2$

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4

---

9. Даны вектор $\vec{a}(2,\ 1,\ -3)$ и точка $A(-2,\ 2,\ 4)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси OX

1) $2\sqrt{6}$ 2) 6 3) $2\sqrt{10}$ 4) $3\sqrt{5}$ 5) $5\sqrt{2}$

---

10. Результат вычисления выражения $4^{\log_2 7 \cdot \log_7 3}$ равен

1) 9 2) 4 3) 16 4) 27 5) 49

Вариант 2

1. Укажите все номера целых чисел данного множества

1) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}-4\sqrt{3}$; 2) $3^{\log_{1/6}36}$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right):\dfrac{13}{24}$;

4) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$; 5) $125^{\frac{3}{4}}$.

1) 1, 2, 3 2) 1, 3 3) 1, 3, 5 4) 2, 3, 4 5) 1, 3, 4

---

2. Сократите дробь $\dfrac{5m^2-6mn+n^2}{10m^2-9mn-n^2}$, вычислите её значение при $\dfrac{m}{n}=\dfrac{5}{4}$

1) $\dfrac{1}{3}$ 2) $\dfrac{2}{3}$ 3) $-\dfrac{2}{3}$ 4) 1,5 5) –2,5

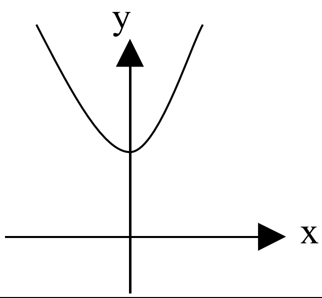
---

3. Профессор принимает экзамен в группе студентов за 4 часа, а его ассистент - за 6 часов. За сколько времени, работая одновременно, профессор и ассистент могут опросить 75 % студентов этой группы?

1) 1,3 часа 2) 1,5 часа 3) 1,8 часа 4) 2 часа 5) 2,2 часа

---

4. Если на рисунке изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ и $D=b^2-4ac$, то справедливо соотношение



1) $ac<0$
2) $ab>0$
3) $bD=0$
4) $aD>0$
5) $cD>0$

---

5. Абсцисса точки пересечение графиков функций $y=2\log_3 x$ и $y=6-x$ принадлежит промежутку

1) (0; 1) 2) (1; 4) 3) (3; 4) 4) (2; 3) 5) (4; 5)

---

6. Укажите все номера только чётных функций данного множества

1) $y = (x^3 + x)\sin x$ 2) $y = (x+1)^2 \cos x$ 3) $y = \dfrac{2x \cdot tg 2x}{x^2 + 1}$ 4) $y = |x| \cdot 2^{-x^4 + 3}$

1) 2, 3, 4 2) 1, 2, 3 3) 1, 3, 4 4) 2, 3 5) 2, 4

---

7. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = -3x^3 + 2x^2 - 3x - 22$ в точке с абсциссой $x = 2$

1) $y = 31x - 18$ 2) $y = 18 - 31x$ 3) $y = 18x - 31$ 4) $y = -18x - 31$ 5) $y = 31 - 18x$

---

8. Найдите длину промежутка возрастания функции $y = 20x^3 - 3x^5 + 2$

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4

---

9. Даны вектор $\vec{a}(2,\ 1,\ -3)$ и точка $A(-2,\ 2,\ 4)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка *B* принадлежит оси *OX*

1) $2\sqrt{6}$ 2) 6 3) $2\sqrt{10}$ 4) $3\sqrt{5}$ 5) $5\sqrt{2}$

---

10. Результат вычисления выражения $4^{\log_2 7 \cdot \log_7 3}$ равен

1) 9 2) 4 3) 16 4) 27 5) 49

К некоторым вопросам предложено несколько ответов. Если Вы не найдёте среди них правильного, можете предложить свой.

Тест № 2 входного контроля.

1. «Многочлен $f(x)$ делится на $(x - a)$, если $f(a) = 0$». Напишите, что в этой теореме дано и что требуется доказать.
2. Решите систему уравнений: $2x - y = 4,\ \ 6x - 3y = 12$.
3. Дано уравнение: $x - 4 = 0$. Всегда ли его левая часть равна правой?
4. Даны два предложения: а) величиной двугранного угла называется величина его линейного угла; б) два перпендикуляра к плоскости параллельны. Какое из них является определением?
5. Два тракториста вспахали поле в 168 га. Первый вспахал вдвое больше второго. Сколько вспахал первый?
6. Дана формула: $s = v_0 t + \left(\dfrac{1}{2}\right) a t^2$. Выразите *a*.

7. Как вы оцениваете справедливость следующего утверждения: «Если число делится нацело на 3, то оно делится и на 12». Ответы: а) верное; б) неверное; в) иногда верное.
8. Дана система уравнений: $x+3y=5,\quad x-y=1$. Если в левые части данных уравнений вместо x и y подставить два фиксированных числа x_0 и y_0, то будут ли левые части равны правым?
9. Найдите a, если $\lg a=2\lg b$.
10. Решите уравнение: $вx=c$, если $в=0$.
11. Решите уравнение: $x^2+5x+4=0$.
12. Как Вы оцениваете справедливость следующего утверждения: «Если верна прямая теорема, то верна и обратная ей»? Ответы: а) верное; б) неверное; в) не знаю.
13. Будем доказывать методом от противного теорему: «Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны». Вам нужно написать только одну фразу: что именно допускается. Итак, допустим, что
14. То, что дано в теореме, называют её условием, то, что требуется доказать – заключением. Чтобы применить (использовать) известную теорему при решении задач надо, проверить: а) выполнено ли условие теоремы; б) выполнено ли заключение теоремы; в) выполнены ли условия и заключения теоремы.
15. Как доказать, что отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, является медианой? Ответы: а) от противного; б) используя свойство медианы; в) это не доказывают.
16. Когда можно доказывать теорему, не используя её условие? Ответы: а) при доказательстве от противного; б) иногда; в) никогда.
17. Когда при доказательстве теоремы можно опираются на то, что требуется доказать? Ответы: а) при доказательстве от противного; б) никогда; в) иногда.

Тест № 3 по теме «Комплексные числа»

1. Комплексные числа $Z_1=a+ib$ и $Z_2=-2-4i$ равны, если
2. Модуль комплексного числа $Z=3-5i$ равен
3. Аргумент числа $Z=1-i$ равен
4. В показательной форме число $Z=-\sqrt{3}+i$ запишется
5. Действительная часть числа $Z=Z_1+Z_2$, где $Z_1=-4+2i$ и $Z_2=-8+3i$ равна

6. Мнимая часть числа $Z = Z_1 \cdot Z_2$, где $Z_1 = 2 + 3i$ и $Z_2 = -3 + 5i$ равна

7. Сумма мнимой и действительной части числа $Z = \dfrac{Z_1}{Z_2}$, где $Z_1 = -2 + i$ и $Z_2 = 1 - 3i$ равна

8. Модуль числа $Z = \sqrt[3]{-4 + 4i}$ равен

9. Мнимая и действительная части числа $Z = 3e^{i\frac{2}{3}\pi}$ равны

10. Сумма корней уравнения $x^3 - 8 = 0$ равна.

Тест № 4 по теме « Аналитическая геометрия на плоскости »

1. Угловой коэффициент прямой, проходящий через точки M_1 (4; -2) и M_2 (3; 8), равен

2. Прямая $x + 4y = 3$ параллельно прямым

   1) $-x + 4y = 2$; 2) $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$;

   3) $x - 4y = 7$; 4) $2x + 8y = 5$.

3. Прямая $y = \dfrac{2}{5}x + 3$ перпендикулярна прямым

   1) $5y - 2x + 8 = 0$; 2) $5x + 2y + 4 = 0$;

   3) $10x + 4y + 11 = 0$; 4) $5y + 2x + 7 = 0$.

4. Расстояние между центрами окружностей $x^2 + 4x + y^2 = 7$ и $2y^2 + 2x^2 - 8y = 0$ равно

5. Сумма полуосей эллипса $25x^2 + 16y^2 = 400$ равна

6. Мнимая полуось гиперболы $x^2 - 4y^2 + 8y = 20$ равна

7. Расстояние от вершины до фокуса параболы $y^2 = -6x + 18$ равно

8. Расстояние между фокусами гиперболы $x^2 - 4y^2 = 4$ равно

9. Расстояние от точки М (1; 2) до центра гиперболы $-x^2 + 2x + y^2 - 4y = 3$ равно

10. Угловой коэффициент прямой, проходящей через центры окружности $x^2+5x+y^2=0$ и эллипса $4x^2+2y^2+6y=0$, равен

Тест № 5 по теме «Введение в анализ»

1. Для функции $y=2^{3x}$ верны утверждения:

   1) монотонная; 2) ограниченная; 3) неограниченная; 4) четная;
   5) нечётная; 6) общего вида; 7) явная; 8) неявная;
   9) сложная.

2. Длина области определения функции $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}$ равна

3. В точке $x=0$ непрерывны функции:

   1) $y=4^{\frac{2}{3-x}}$; 2) $y=\sin\dfrac{x}{x+4}$;

   3) $y=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+4\right)$; 4) $y=\begin{cases}3x+5 \; при \; x\geq 0,\\ 2x-1 \; при \; x<0.\end{cases}$

4. Дана функция $y=\dfrac{2}{x}$, точка $x=0$ есть точка разрыва рода.

5. Для функции $y=\dfrac{2x-3}{x-6}$ взаимно обратной является функция

6. Вертикальные асимптоты имеют графики функций

   1) $y=\dfrac{2x+9}{x^2+4}$; 2) $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$;

   3) $y=\begin{cases}2^x+4 \; при \; x\geq 0;\\ 4-2x \; при \; x<0;\end{cases}$ 4) $y=\dfrac{8}{x+2}$.

7. Сумма натуральных решений неравенства $|x+1|<3$ равна

8. Если $y(x)=\log_2 x$, то $y(2^x)$ равно

9. При исходной стоимости автомобиля 90 тыс. руб. и линейной зависимости стоимости от времени при норме амортизации 11 % стоимость автомобиля через 3 года равна

10. При затратах на производство $y = 120 + 4x$ и доходе от реализации продукции $y = 80 + 6x$ (y – тыс. рыб; x – количество месяцев) производство будет рентабельным начиная с месяца.

Тест № 6 по теме

«Приложение производной функции одной переменных».

2. Угловой коэффициент касательной, проведённой к кривой $y = 2^{3x}$ через точку с абсциссой $x = 0$, равен
3. Если кривая задана уравнениями $x = t^2 + 2t;\ y = t^3 + t$, то угловой коэффициент касательной в точке (0; 0) равен
4. Длина интервала возрастания функции $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$ равна
5. Координаты точек перегиба кривой $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ равны
6. Длина интервала выпуклости кривой $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8$ равна
7. Горизонтальную асимптоту имеет функция

   1) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; 2) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

   3) $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$; 4) $y = x^3 + 4x$.
8. Если зависимость спроса q от цены p описывается равенством $2p + 3q = 12$, то спрос будет эластичным при значениях цены
9. Оптимальное значение выпуска продукции с функцией издержек $C(x) = 25x + 0{,}2x^2$ и доходе от реализации единицы продукции 175 ед. равно
10. Если зависимость производительности труда от времени описывается уравнением $y = -2{,}5t^2 + 15t + 100$, то скорость и темп её изменения при $t = 2$ равны

11. Для зависимости полных затрат y от объёма производства x, заданной соотношением $y = x^2 - 5x + 16$, предельные и средние затраты совпадают при объёме производства равном
12. Если увеличение дохода на 25 р. с первоначального уровня в 500 р. обеспечивает увеличение спроса с 10 до 12 ед., то коэффициент эластичности спроса от дохода равен

Тест № 7 «Приложение производной функции двух переменных».

1. Площадь области распределения функции $Z = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$ равна
2. В явном виде уравнения линий уровня функции $Z = 3x - 4y$ запишутся
3. Сумма частных производных функций $Z = \sin\left(2x + y^2\right)$ в точке (0; 0) равна
4. Модуль градиента функции $Z = e^{-x^2+2y}$ в точке (0; 0) равен
5. В точке (2; 2) функция полезности $U = x^2y^3$ растёт быстрее всего в направлении вектора с координатами
6. Модуль наибольшей скорости возрастания функции $Z = 2x^2 - y^2$ в точке (1; 1) равен
7. Цилиндрические поверхности описываются уравнениями:

   1) $z = 4 - x^2 - y^2$; 2) $2x^2 + y^2 - z^2 = 10$;

   3) $y^2 = 2(x - 1)$; 4) $x^2 - y^2 = 5$.
8. Если в магазине продаются гвозди двух видов по цене соответственно 8 и 12 руб. за кг, а покупатель хочет купить гвозди на 90 руб., то граница бюджетного множества имеет уравнение
9. Оси OZ параллельны плоскости

   1) $2x - y - z = 7$; 2) $y + 4z = 5$;

   3) $z + 3x = 5$; 4) $x - y = 10$.

10. Если функция затрат имеет вид $C = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2$, а стоимость ресурсов соответственно равны 7 и 14 ц, то максимальная прибыль при использовании ресурсов равна

Оценочные критерии

При оценке знаний на экзамене учитывается: правильность и осознанность изложения содержания ответа на вопросы, полнота раскрытия понятий и закономерностей, точность употребления и трактовки общенаучных и специальных терминов; степень сформированности интеллектуальных и научных способностей экзаменуемого; самостоятельность ответа; речевая грамотность и логическая последовательность ответа.

Критерии оценок:

– отлично – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы и рекомендуемой литературы; четко и правильно даны определения и раскрыто содержание концептуальных понятий, закономерностей, корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания, выводы из наблюдений и опытов; ответ самостоятельный, исчерпывающий, без наводящих дополнительных вопросов, с опорой на знания, приобретенные в процессе обучения.

– хорошо – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный; определения понятий неполные, допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях, исправляемые по дополнительным вопросам экзаменаторов.

– удовлетворительно – усвоено основное содержание учебного материала, но изложено фрагментарно, не всегда последовательно; определение понятий недостаточно четкое; не использованы в качестве доказательства выводы из наблюдений и опытов или допущены ошибки при их изложении; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определении понятий.

– неудовлетворительно – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программного материала; не даны ответы на вспомогательные вопросы экзаменаторов; допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

Методика формирования результирующей оценки знаний по математике

1. Результирующая оценка (Р) учитывает работу студента в течение всего периода изучения дисциплины.

2. Результирующая оценка получается на основе обобщения (интеграции) оценок отдельных аспектов работы студентов: работа в течение семестра (С), экзаменационная оценка за ответы по теории (Т), экзаменационная оценка за выполнение практических заданий (П).

3. Все оценки выставляются по 5-балльной шкале.

4. По каждому аспекту оценивания формулируется система критериев, позволяющая содержательно обосновать каждую градацию 5-балльной шкалы.

5. Для оценки относительной важности отдельных видов контроля вводятся их весовые коэффициенты:

- 0,4 – для оценки работы в течение семестра;
- 0,4 – для экзаменационной оценки за теорию;
- 0,2 – для экзаменационной оценки по практике.

6. Находится средневзвешенная оценка частных оценок с учетом их весов, которая округляется до целых единиц.

Пример: а) Если С=5; Т=5; П=5, то Р=0,4·5+0,4·5+0,2·5=5;

б) Если С=3,5; Т=2,5; П=3, то Р=0,4·3,5+0,4·2,5+0,2·3=3

11. Вопросы для подготовки к экзамену

1. Комплексные числа
2. Мнимая единица. Комплексные числа в алгебраической форме. Основные понятия:
вещественная, мнимая части, комплексно-сопряженные числа, взаимно-противоположные числа. Геометрическая интерпретация комплексного числа.
3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа
5. Формулы Эйлера..
6. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
7. Действия над комплексными числами в показательной форме.
8. Применение комплексных чисел при решении алгебраических уравнений.
9. Элементы аналитической геометрии
10. Предмет аналитической геометрии. Декартова система координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи аналитической геометрии: расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении.
11. Общее понятие уравнения линии и поверхности в декартовой системе, классификация линий и поверхностей. Порядок алгебраической линии и поверхности.
12. Прямая линия на плоскости: основные виды уравнений (общее, с угловым коэффициентом, в отрезках, каноническое, параметрическое, неполные). Угол между прямыми, условия коллинеарности и ортогональности. Расстояние от точки до прямой.
13. Кривые второго порядка на плоскости:
14. Окружность: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение.

15. Эллипс: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение, эксцентриситет и его смысл. Эллипс со смещенным центром.

16. Гипербола: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение, асимптоты, эксцентриситет и его смысл. Сопряженная гипербола. Гипербола со смещенным центром.

17. Парабола: определение, вывод канонического уравнения, свойства, построение. Парабола со смещенной вершиной.

18. Общее уравнение линии второго порядка, преобразование к каноническому виду линии со смещением.

19. Плоскость в пространстве: основные виды уравнений (общее, неполные, в отрезках, по трем точкам, нормированное). Основные способы получения уравнения плоскости, построение плоскостей. Угол между плоскостями. Условия коллинеарности и ортогональности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

20. Прямая в пространстве: основные виды уравнений (общее, канонические, параметрические по двум точкам). Основные способы получения уравнения прямой. Приведение общего уравнения прямой к каноническому виду. Угол между прямыми, условия коллинеарности и ортогональности прямых.

21. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Условия коллинеарности и ортогональности прямой и плоскости. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости, точка пересечения прямой и плоскости.

22. Поверхности второго порядка: сфера, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, цилиндры (эллиптический, параболический гиперболический), параболоиды (эллиптический, гиперболический).

23. Основы математического анализа.

24. Понятие переменной и постоянной величины. Понятие функции: область определения и образ функции. Способы задания функции. Графики и свойства основных элементарных функций.

25. Классификация функций. Понятия сложной и обратной функции.

26. Функции, заданные параметрически и в полярной системе координат, построение их графиков.

27. Метод сдвига и деформации при построении графиков.

28. Характеристика поведения функции: четность и нечетность, непрерывность, периодичность, монотонность, ограниченность и неограниченность. Экстремумы функции. Схема исследования функции.

29. Понятие предела переменной величины, предел последовательности и функции в точке. Свойства пределов, вытекающие из определения.

30. Геометрическая интерпретация пределов. Асимптоты.

31.Бесконечно малые, бесконечно большие, их связь и свойства. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.

32. Основные теоремы о пределах.

33. Математические неопределенности и методы их раскрытия.

34. Первый и второй замечательные пределы

35. Различные определения непрерывности функции в точке. Непрерывность на множестве. Классификация точек разрыва.

36. Арифметические свойства непрерывных функций.

37.Теоремы о непрерывности сложной и обратной функции.

38. Теорема о сохранении знака непрерывной функции.

39. Свойства функций, непрерывных на отрезке:

40. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности;

41. Теоремы Коши о промежуточных значениях. Метод половинного деления решения уравнения $f(x) = 0$

42. Асимптоты графика функции: горизонтальные, вертикальные, наклонные и их нахождение.

43. Основы дифференциального исчисления функции одной переменной

44. Задачи, приводящие к понятию производной. Общее понятие производной. Геометрический и механический смысл.

45. Основные свойства производных. Вывод таблицы производных.

46. Понятие дифференцируемой функции. Критерий дифференцируемости. Необходимое условие дифференцируемости.

47. Дифференциал: инвариантная и неинвариантная формы, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Геометрический смысл дифференциала. Свойства и таблица дифференциалов.

48. Производные и дифференциалы высших порядков, их свойства. Механический смысл второй производной. Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков.

49. Формулы Тейлора и Маклорена. Разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ в окрестности точки $x = 0$.

50. Основные теоремы дифференциального исчисления: лемма о достаточном условии возрастания и убывания функций, теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

51. Правила Лопиталя (применение дифференциального исчисления к вычислению пределов).

52. Применение дифференциального исчисления к полному исследованию функций и построению графиков.

53. Необходимые и достаточные условия существования экстремума, возрастание и убывание функции.

54. Необходимые и достаточные условия существования точки перегиба, выпуклость - вогнутость.

55. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

56. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.

57. Вектор - функция. Годограф вектор - функции, дифференцирование вектор - функции. Уравнения касательной и нормали к годографу вектор - функции.

58. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

59. Понятие функции нескольких переменных. Область определения и значений. Графики. Поверхности 2-го порядка. Цилиндрические и конические поверхности. Предел, непрерывность.

60. Частные приращения, частные производные. Частные производные высших порядков.

Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования.

61. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости.

62. Полное приращение, полный дифференциал, его связь с частными производными. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Инвариантная форма дифференциала применение дифференциала к приближенным вычислениям. Уравнение касательной и нормали к поверхности.

63. Дифференцирование сложных, неявных функций нескольких переменных.

64. Дифференциалы высших порядков. Понятие о формуле Тейлора функции нескольких переменных.

65. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия
существования.

66. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

67. Скалярное поле, поверхности и линии равного уровня. Производная по направлению.

68. Градиент скалярного поля, его инвариантное определение, свойства.

12. Примерные экзаменационные билеты.

Экзаменационный билет №1

1. Дать понятие производной по направлению. Вывести формулы для её вычисления.

2. Записать канонические уравнения кривых второго порядка.

3. Сформулировать теорему о производной сложной функции одной переменной. Привести примеры её применения.

4. Задачи.

1). Решить уравнение $x^3 + 125=0$.

2). Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\tilde{o}+5}{\tilde{o}}\right)^{2x}$.

3). Зависимость между издержками производства *y* и объемом выпускаемой продукции *x* выражается функцией $y= 50x – 0{,}05x^3$ (ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

4). Доказать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, если $x=\ln\left(x+e^{-y}\right)$.

5. Построить линии: а) $x + 4y – 8= 0$, б) $x = -4 +3\sqrt{y+5}$, в) $5x^2 + 9y^2= 45$.

Экзаменационный билет № 2

1. Сформулировать свойства функций, непрерывных в точке. Доказать одно из них.

2. Сформулировать алгоритм отыскания точек перегиба графика функций одной переменной.

3. Дать понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

4. Задачи.

1). Найти все корни уравнения $x^3 + 125=0$.

2). Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}$(3 - x)(ln(1–x) – ln(2-x)).

3). Найти интервалы монотонности функции y=x $\cdot\sqrt{1-x^2}$.

4). Показать, что $x\cdot z'_x - y\cdot z'_y$=0. если $z=10^{xy}$.

5). Построить линии: а) 3x + 5y – 15=0, б) x^2+4x+2y+7=0, в) x = $\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$.

Экзаменационный билет № 3

1. Вывести уравнение плоскости.

2. Сформулировать свойства функций, непрерывных на сегменте.

3. Дать понятие частной производной функции нескольких переменных.

4. Задачи.

1. Решить уравнение: $x^2+\sqrt{3}-i=0$.

2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(3; –2) перпендикулярно прямой MN, где M(4; –5), N(2; 4).

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(7; 6; –4) перпендикулярно вектору $\vec{n}(2;3;-4)$..

4. Построить линию: $y=-2-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+9}$.

5.Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+3}{6x+41}\right)^{2x}$.

6. Найти y' : $y=x^3tg^4 5x+2^{\cos^3 4x}+\frac{\ln^2\sqrt{x^5+2}}{\sin 2x}$.

7. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & 0\le x\le 2\\ 2x+3, & x>2\end{cases}$.

8. Дана производственная функция $Q=2K^2+4LK$, K – капитал, L – труд. Затраты на единицу капитала и труда составляют соответственно 3 и 4, а общая сумма затрат равна 160. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный.

Литература

Основная:

1. **Высшая математика для** экономистов [Текст] : учебник для вузов: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1998, 2002, 2003, 2004, 2000. - 472
2. **Высшая математика для** экономистов [Текст] : учеб. пособие / Ред. Н.Ш. Кремер. - М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1997. - 440 с.
3. **Красс, Максим Семенович**. Математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие: рек. УМО вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. - 464 с.
4. **Красс, Максим Семенович**. Основы математики и её приложения в экономическом образовании [Текст] : учеб.: рек. Мин. обр. РФ / Красс М.С., Чупрынов Б.П. - 2- изд., испр., 4-е изд., испр.3-е изд., испр. . - М. : Дело, 2001, 2003, 2002. - 688 с.
5. **Красс, Максим Семенович**. Математика для экономических специальностей [Текст] :учебник для вузов: Рек. Мин. обр. РФ / Красс М.С. - М. :Инфра-М, 1999, 1998. - 464 с.
6. **Математика в экономике** [Текст] : в 2-х ч.: учеб.: рек. Мин. обр. РФ / А. С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2005 -

   Ч. 1. - 2005. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 375.

   Ч. 2. - 2005. - 560 с. - Библиогр.: с. 374.
7. **Общий курс высшей** математики для экономистов [Текст] : учебник для вузов.:Рек. Мин. обр. РФ / Ред.Ермаков В.И. - М. : ИНФРА-М, 2000, 2001. - 656 с
8. **Практикум по высшей** математике для экономистов [Текст] : учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002, 2003, 2004. - 424 с.

Дополнительная:

9. **Замков О.О**. Математические методы в экономике / О.О.Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н.Черемных. – М.: МГУ,ДИС, 1998. – 365с
10. **Москинова Г.И.** " Дискретная математика", М. " Логос", 2000 г..
11. **Федосеев В.В., Эрношвили Н.Д.** " Экономико-математические методы и модели в экономике", М., " Юнити", 2001 г.
12. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа - Москва.: Наука.
13. **Методические разработки кафедры ОМиИ**.

Содержание

1 Пояснительная записка ………………………………………………… 3

2 Государственный стандарт …………………………………………… 5

3 Содержание курса …………………………………………………………7

4. Общее рекомендации студенту по изучению математических дисциплин ……………………………………………………………… 9

5. Темы лекций ………………………………………………………………20

6. Календарный план занятий ……………………………………………. 21

7. Конспект лекций. ………………………………………………………. 24

8. Содержание практических занятий ……………………………………131

9. Примерные задания для контрольных и расчетно-графических работ …………………………………………………………………………..139

10. Тестовые задания для контроля знаний ……………………………...149

11. Примерные вопросы для подготовки к экзамену……………………160

13. Примерные экзаменационные билеты ………………………………165

Литература ……………………………………………………………………167