Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО
«Амурский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
___________Г.В. Литовка
«_____»__________2007 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

для специальности
030301 – психология

Составитель: Т.А. Юрьева

Благовещенск, 2007

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного университета

Т.А Юрьева

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» для специальности 030301. – Благовещенск: АмГУ, 2007. – 162 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1.1. Цели и задачи учебной дисциплины «Математика»

Преподавание дисциплины «Математика» ставит своей целью:

- формирование личности студента, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске решений.

Задачи изучения дисциплины:

- на примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии других наук;
- научить студентов приемам исследования и решения, математически формализованных задач;
- выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

Перечень учебных дисциплин с указанием разделов, усвоение которых необходимо для изучения осознания учебных тем, вопросов курса «Математика»: основные аксиомы и теоремы элементарной геометрии, алгебры, начала математического анализа.

После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

- основные понятия и методы дискретной математики и теории множеств, функционального анализа, векторной алгебры, линейной алгебры, основы теории вероятностей;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы статистического оценивания и проверки гипотез.

1.2. Содержание учебной дисциплины «Математика»

Согласно государственному стандарту математических и естественных дисциплин для специальности 030301 студент должен изучить:

- введение в дискретную математику;
- элементы теории множеств;
- векторная алгебра;
- матрицы;
- элементы функционального анализа;
- вероятность и статистика;
- теория вероятностей;
- статистическое оценивание и проверка гипотез;
- параметрические и непараметрические методы;
- элементы дисперсионного анализа;
- статистические методы обработки экспериментальных данных.

1.3. Распределение учебного времени

В течение периода изучения математики студенты специальности «Психология» обязаны прослушать теоретический курс в объеме 72 часов и закрепить материал на практических занятиях.

Программа курса математики составлена в объеме необходимом для изучения общенаучных гуманитарных и специальных дисциплин, развития навыков математического мышления для специальностей гуманитарного профиля, необходимого для обработки информации и использования математических моделей в компьютерной технике.

Примерное планирование материала с разделением часов на лекционные, практические занятия и отведенные на самостоятельную работу студентов приведено в таблице 1.

Таблица 1 – Тематическое планирование материала

№	Тема ***1 семестр***	Кол. часов		
		Лекции (заочное)	Практич. занятия (заочное)	Сам. раб. (заочное)
1.	**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.** Определители, их свойства и вычисление. Матрицы и операции над ними. Свойства операций. Обратная матрица. Ранг матрицы. Система линейных уравнений. Свойства систем уравнений: совместимость, определенность. Частное и общее решение. Эквивалентность систем. Однородные и неоднородные СЛУ. Свободные и базисные переменные.	6 (2)	6 (2)	6 (12)
2.	**ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.** Векторы. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису i, j, k. Векторное произведение векторов, его свойства. Условие коллинеарности векторов. Смешанное произведение векторов. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора.	4 (2)	6	4 (10)
3.	**АНАЛИТИЧСЕКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.** Уравнения линий на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения.	2	4	6 (12)
4.	**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.** Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Сложные и обратные функции, их графики. Предел функции. Бесконечно малые функции и их свойства. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.	2 (2)	4	6 (10)
5.	**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.** Производная функции, ее физический и геометрический смысл. Правило нахождения производной, производная сложной и обратной функции. Параметрические функции и их дифференцирование. Производные высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям; дифференциалы высших порядков: теоремы Ролля, Лагранжа, Коши; правило Лопиталя.	4 (2)	6	6 (14)
6.	**ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ.** Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции, экстремум функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции. Выпуклость и вогнутость графика функции, точка перегиба, асимптоты графика функции, примеры построения графиков функции.	2	4	6 (14)
7.	**ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.** Определение, способы задания, область определения, предел, непрерывность, частные производные, полный дифференциал. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков, дифференцирование неявных функций, экстремум функции нескольких переменных. Скалярное поле, производная по направлению, градиент.	2 (2)	4	4 (12)

8.	**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.** Первообразная и неопределенный интеграл, его свойства. Методы интегрирования.	2 (2)	4	6 (10)
9.	**ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.** Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, определение интеграла, его свойства. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования. Приложения интегралов к решению задач. Несобственные интегралы и их свойства.	4 (2)	6	6 (12)
10.	**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕТВ.** Множества, подмножества, операции над множествами. Отношения, свойства отношений. Соответствия. Алгебраические структуры. Изоморфизм и гомоморфизм алгебраических структур.	2	4	4 (12)
11.	**ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ.** Алгебра высказываний. Логические операции и их свойства. Функции алгебры логики. Минимизация булевых функций. Графы. Пути и циклы графа. Взвешенный граф. Проблемы коммивояжера.	6	6	6 (14)
12.	**ВСЕГО**	36 (14)	54 (2)	60(134)
	2 семестр			
13.	**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.** - предмет теории вероятностей; случайные события; классификация событий; алгебра событий; формулы комбинаторики; различные подходы к введению понятий вероятностей события; - теорема сложения несовместимых событий; условия вероятностей; умножение вероятностей; теорема сложения совместимых событий; вероятность появления хотя бы одного из событий; формула полной вероятности; теорема полной вероятности; теорема гипотез; повторные испытания; формула Бернулли; формула Пуассона; локальная и интегральная теоремы Лапласа; - случайные величины, функция и плотность распределения; числовые характеристики случайных величин; математические ожидания; свойства математического ожидания; дисперсия случайной величины и ее свойства; основные распределения случайной величины; биноминальное распределение; распределение Пуассона; равномерное распределение; нормальное распределение; показательное распределение и их свойства; Т-распределение Стьюдента, распределение χ^2; закон больших чисел; системы случайных величин.	18 (4)	26 (4)	30(70)
14	**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.** Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Полигон и гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия. Понятия доверительных оценок. Доверительный интервал. Постановка задачи проверки гипотез. Критерий оценки и его мощность. Критическая область и область принятия гипотезы. Проверка гипотез о значениях параметров нормального рас-	18 (2)	28 (4)	30(64)

	пределения. Параметрические и непараметрические критерии. Элементы дисперсионного анализа. Методы обработки экспериментальных данных. Корреляционный анализ. Меры связи. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов.			
	ВСЕГО	36(6)	54 (8)	60(136)

1.4. Темы для самостоятельного изучения

1. Векторы. Линейные операции над векторами. Направляющие косинусы и длина вектора.
2. Скалярное произведение вектора и его свойства. Длина вектора и угол между двумя векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.
3. Уравнение линий на плоскости. Различные формы уравнений на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
4. Множество вещественных чисел, функция, область ее определения. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
5. Производная функции, ее смысл в прикладных задачах (скорость, плотность). Правило нахождения производной и дифференциала. Дифференциальное исчисление функции одной переменой.

Основное время, выделенное на самостоятельную работу студентам очной формы обучения, отдается на выполнение РГР, составление отчетов по лабораторным работам и подготовку к коллоквиумам и контрольным.

Студентам заочной формы обучения самостоятельно необходимо прорабатывать все разделы программы, так как аудиторные занятия носят вводный либо обобщающий характер.

1.5. Формы текущего контроля знаний студентов

Данная программа предусматривает в течение первого семестра проведение двух плановых контрольных работы, одного коллоквиума и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль над выполнением РГР осуществляется в два этапа: проверка письменных отчетов и защита заданий в письменной или устной форме.

В течение второго семестра проведение, двух плановых контрольных работы, двух индивидуальных заданий (РГР) и пяти лабораторных работ.

Студенты заочной формы обучения текущий контроль усвоения материала осуществляют самостоятельно по контрольным вопросам и заданиям контрольной работы. Контрольная работа для студентов-заочников предусмотрена во втором семестре.

Тематическое планирование практических занятий и формы текущего контроля приведено в таблице 2.

Таблица 2 - Тематическое планирование практических занятий и формы текущего контроля

1 семестр				
Тема занятия	**Час.**	**Форма контроля**		
		Кол-м	**ргр**	**К.р.**
1. Определители и их свойства их вычисление. Формулы Крамера.	2			
2. Матрицы, операции над матрицами. Обратная матрица.	2			
3. Ранг матрицы. Метод Гаусса.	2			
4. Однородные и неоднородные СЛУ	2		+	
5. Векторы. Линейные операции. Длина вектора. Скалярное произведение.	2			
6. Векторное и смешанное произведение	2			
7. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора	2			
8. Прямая на плоскости	2			+
9. Кривые второго порядка	2			

10. Функция. Область определения. Элем. функции.	2		+	
11. Предел функции. Непрерывность.	2			
12. Таблица производных. Правила дифференцирования.	4			
13. Физический, геометрический смысл производной. Дифференциал.	2			
14. Приложение производной**.** Исследование функций и построение графиков	2			
15. Нахождение частных производных функции многих переменных	2			
16. Экстремум функции нескольких переменных.	2			
17. Методы интегрирования (табличное, по частям и подстановкой)	2			+
18. Интегрирование алгебраических дробей	2			
19. Вычисление определенных интегралов Методы интегрирования	2			
20. Приложение определенного интеграла	2			
21. Несобственные интегралы.	2			
22. Операции над множествами	2			
23. Свойства бинарных отношений	2			
24. Логические операции	2	+		
25. Графы	2			
26. Прикладные задачи и алгоритмы анализа графов	2			
2 семестр				
Тема занятия	**Час.**	**Форма контроля**		
		К. р.	**ргр**	**лабор. раб.**
1. Перестановки, размещения, сочетания.	2			
2. Классическое и геометрическое определение вероятностей.	2			
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	2			
4. Противоположные события. Вероятность появления хотя бы одного из событий.	2		+	
5. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.	2			
6. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число появления событий.	2			
7. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.	2			

8. Дискретные случайные величины и их законы распределения и числовые характеристики.	2			
9. Функция распределения непрерывной случайной величины. Плотность распределения вероятности.	2			
10. Равномерное, показательное распределения.	2		+	
11. Нормальное распределение. Правило 3σ.	2			
12. t-распределение Стьюдента, распределение χ^2	2			
13. Законы больших чисел.	2			
14. Дискретные вариационные ряды и их характеристики.	2	+		
15. Непрерывные вариационные ряды и их характеристики.	2			
16. Точечные оценки. Ошибки выборки. Определение объема выборки.	2			+
17. Интервальное оценивание.	2			
18. Параметрические критерии (t-критерий Стьюдента)	2			+
19. Параметрические критерии (F- критерий Фишера)	2			
20. Введение в дисперсионный анализ	2			+
21. Введение в дисперсионный анализ	2			
22. Метод наименьших квадратов.	2			+
23. Корреляционный анализ.	4			+
24. Непараметрические критерии (χ^2).	6	+		

1.6.Итоговый контроль

1 семестр

Вопросы к зачету

1. Определители второго, третьего, четвертого и n - го порядка. Способы их вычисления.
2. Свойства определителей (с доказательством).
3. Решение систем линейных уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера.
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Матрицы, основные понятия, действия над матрицами.

6. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений с помощью матриц.
7. Векторы, основные понятия, линейные операции над векторами.
8. Проекция вектора на ось, свойства проекции.
9. Модуль вектора, расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении, направляющие косинусы, координаты единичного вектора.
10. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства, физический смысл, вычисление.
11. Нахождение угла между векторами. Условия перпендикулярности и параллельности векторов.
12. Векторное произведение векторов. Определения, свойства, физический смысл, вычисление. Геометрический смысл.
13. Смешанное произведение векторов. Определение, свойства, геометрический смысл, вычисление.
14. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование. Уравнение прямой в отрезках.
15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой проходящей через одну точку, через две точки.
16. Нахождение угла между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
17. Окружность, Эллипс, гипербола, парабола.
18. Последовательность. Предел последовательности.
19. Элементарные функции их свойства и графики.
20. Предел функции.
21. Бесконечно малые функции и основные теоремы и них.
22. Эквивалентные бесконечно малые, их применение к вычислению пределов.
23. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.
24. Определение производной, геометрический смысл производной.
25. Основные правила дифференцирования функций.
26. Производные высших порядков функций заданных явно. Физический смысл второй производной.
27. Производные высших порядков функций заданных неявно, параметрически.
28. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.

29. Дифференциалы различных порядков.
30. Необходимые условия возрастания и убывания функции.
31. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
32. Экстремум функции. Необходимые условия экстремума функции.
33. Достаточные условия существования экстремума функции.
34. Выпуклость, вогнутость, точка перегиба графика функции. Достаточный признак выпуклости графика функции.
35. Асимптоты графика функции.
36. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.
37. Свойства неопределенного интеграла.
38. Методы интегрирования.
39. Задачи, приводящие к определенному интегралу.
40. Определение определенного интеграла.
41. Условия существования определенного интеграла.
42. Геометрический и механический смысл определенного интеграла.
43. Свойства определенного интеграла.
44. Формула Ньютона - Лейбница.
45. Методы интегрирования.
46. Несобственные интегралы 1 и 2 - порядка.
47. Приложение определенного интеграла.
48. Определение, способы задания, область определения функции нескольких переменных.
49. Частные производные и их геометрический смысл.
50. Частные производные высших порядков.
51. Частные дифференциалы и полный дифференциал.
52. Определение экстремума. Необходимое и достаточное условия существования экстремума.
53. Множества, подмножества, операции над множествами.
54. Отношения, свойства отношений.
55. Соответствия.
56. Алгебраические структуры. Изоморфизм и гомоморфизм алгебраических структур.

57. Алгебра высказываний. Логические операции и их свойства.
58. Функции алгебры логики.
59. Минимизация булевых функций.
60. Графы. Матрица инцидентности.
61. Пути и циклы графа.
62. Взвешенный граф. Проблемы коммивояжера.

2 семестр

Вопросы к экзамену (дифференцированному зачету)

1. Случайные события. Основные определения.
2. Алгебра событий.
3. Различные подходы к введению понятия вероятности.
4. Практически невозможное и практически достоверное событие.
5. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.
6. Теорема умножения вероятностей, зависимых событий.
7. Сложение совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из событий.
8. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.
9. Формула Бернулли, Пуассона.
10. Локальная теорема Лапласа.
11. Интегральная теорема Лапласа.
12. Определение дискретной и непрерывной случайных величин. Ряд распределения, многоугольник распределения.
13. Функция распределения, свойства.
14. Плотность распределения, свойства.
15. Математическое ожидание. Математическое ожидание как среднее значение случайной величины. Свойства.
16. Дисперсия и ее свойства.
17. Биномиальное распределение.
18. Распределение Пуассона.
19. Равномерное распределение.
20. Нормальное распределение.
21. Вероятность заданного отклонения.
22. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок. Функция Лапласа.
23. Системы случайных величин. Распределение системы случайных величин.
24. Функция распределения системы и ее свойства.
25. Плотность распределения системы и ее свойства.
26. Оценка отклонения распределения случайной величины от нормального.

27. Т- распределение Стьюдента.
28. Распределение χ^2.
29. Теорема Чебышева.
30. Неравенство Чебышева.
31. Теорема Бернулли.
32. Вариационные ряды, виды вариационных рядов, графическое представление.
33. Числовые характеристики вариационных рядов.
34. Статистическое оценивание.
35. Ошибки выборки.
36. Определение численности (объема) выборки.
37. Интервальное оценивание.
38. Понятие статистических гипотез. Классификация гипотез.
39. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости. Мощность критерия.
40. Статистические критерии. Критическая область и область допустимых значений.
41. Алгоритм проверки статистических гипотез. Основной принцип их проверки.
42. Классификация статистических критериев.
43. Асимметрия, эксцесс, их интерпретация, связь с видом распределения.
44. Мода, способы ее вычисления. Понятие бимодальности, полимодальности ряда.
45. Медиана. Способы ее вычисления в дискретных и интервальных рядах.
46. Меры связи. Способы их вычисления. Интерпретация.
47. Линейная регрессия. Точечные оценки и доверительные интервалы для параметров линейной регрессии.
48. Метод наименьших квадратов.
49. Нелинейная корреляционная зависимость. Корреляционное отношение.
50. Дисперсионный анализ, суть метода.
51. Однофакторный дисперсионный анализ, алгоритм расчета.
52. Однофакторный дисперсионный анализ с неравными объемами выборок.
53. Двухфакторный дисперсионный анализ с одинаковым числом наблюдений.
54. Дисперсионный анализ с постоянными эффектами при неравном числе наблюдений.

55. Непараметрические критерии, их достоинства и недостатки. Примеры.
56. Параметрические критерии, их достоинства и недостатки. Примеры.
57. χ^2 – критерий Пирсона.
58. Критерий Колмогорова-Смирнова.
59. Критерий φ^*-угловое преобразование Фишера.
60. t-критерий Стьюдента.
61. F –критерий Фишера.

1.7. Учебно-методические материалы

Основная литература

1. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, 2001г.

Дополнительная литература

1. Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк.,2003г.

2. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г..

3. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы: Учеб. пособие, 2001г.

4. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учеб. Пособие: Рек. УМО вузов/А. И. Кибзун и др. – М.: Физматлит, 2002г.

5. Ермолов О. Ю. Математическая статистика для психологов.,2003 г.

6. Методические разработки кафедры. «Общей математики и информатики»:

а) Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Теория вероятностей: Практикум;

б) Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике;

в) Терентьева Е.А., Чалкина Н.А., Юрьева Т.А. Математика для студентов-заочников факультета социальных наук.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ

2.1 Методические рекомендации по проведению лекций

Лекция - традиционно ведущая форма обучения в вузе. Ее основная дидактическая цель - формирование ориентировочной основы для последующего усвоения студентами учебными материала. Будучи главным звеном дидактического цикла обучения, она выполняет научные, воспитательные и мировоззренческие функции, вводит студента в творческую лабораторию лектора.

Лекция - методологическая и организационная основа для всех форм учебных занятий, в том числе самостоятельных. Методологическая основа - так как вводит студента в науку вообще, придает учебному курсу концептуальность, а организационная - так как все другие формы учебных занятий так или иначе "завязаны" на лекцию, чаще всего логически следуют за ней, опираются на нее содержательно и тематически.

Содержание лекции устанавливается на основе учебной программы данной дисциплины. Каждая лекция требует такого построения, чтобы студенты могли конспектировать ее в виде четко ограниченных, последовательных и взаимосвязанных положений, тезисов с выводами и заключениями.

Все отдельные лекции лекционного курса требуют, поэтому взаимосвязи, последовательности и единства цели. Важной является связь лекционного материала с другими курсами и видами обучения.

Как правило, отдельная лекция состоит из трех основных частей: введения, изложения содержательной части и заключения:

1. Вводная часть. Формирование цели и задачи лекции. Краткая характеристика проблемы. Показ состояния вопроса. Список литературы. Иногда установление связи с предыдущими темами.

2. Изложение. Доказательства. Анализ, освещение событий. Разбор фактов. Демонстрация опыта. Характеристика различных точек зрения. Определение своей позиции. Формулирование частных выводов. Показ связей с практи-

кой. Достоинства и недостатки принципов, методов, объектов рассмотрения. Область применения.

3. Заключение. Формулирование основного вывода. Установка для самостоятельной работы. Методические советы. Ответы на вопросы.

Лектор не может не считаться с общим уровнем подготовки и развитием студентов, но в то же время ему не следует ориентироваться как на слабо подготовленных студентов, так и на особо одаренных студентов. Ориентиром, очевидно, должны быть студенты, успевающие по данному предмету, представляющие основной состав лекционных потоков.

В лекционных курсах необходимо последовательно, от лекции к лекции повышать уровень научного изложения и наблюдать, чтобы лекции были посильны и интересны большинству студентов. Особенно велика развивающая роль лекций как формы научного мышления на первых курсах обучения. Здесь наряду с учебной информацией лекция организует и направляет самостоятельную работу студентов, вызывает потребность дополнительного приобретения знаний путем самообразования. Поэтому на первых курсах необходимо основное педагогическое и психологическое внимание уделять системности лекционного изложения и рекомендациям для самостоятельной работы. Развивающая роль лекционного преподавания на первых курсах нуждается в большей доступности изложения материала, в более четкой форме логического построения, в замедленном функционировании основных положений и выводов. На первых курсах нужны конкретные указания о связи лекций с учебниками, пособиями, заданиями и другой самостоятельной работой. Необходимо на младших курсах приучить студентов вести записи лекций, так как правильное конспектирование не только фиксирует основное содержание лекций, но и активизирует восприятие лекционного материала и организует внимание студентов к предмету.

Применение на лекциях вспомогательных средств, главным образом демонстрационных, повышает интерес к изучаемому материалу, обостряет и направляет внимание, усиливает активность восприятия, способствует прочному запоминанию.

2.2 Методические рекомендации по проведению практических и лабораторных занятий

Практические занятия целесообразно начинать с проверки знания и понимания студентами теоретического материала и умения применять эти знания для решения типовых задач.

Основной блок практического занятия составляет решение задач, поскольку истинное качество усвоения информации достигается именно в процессе формирования умений ее востребовать и применять. Задачи должны различаться по степени обобщенности действий и по виду самостоятельной деятельности, выполняемой студентами.

Организация процесса решения задач на практических занятиях должна обеспечивать самостоятельность студентов, основанная на индивидуальном и дифференцированном подходе, когда каждый студент работает в оптимальном для него темпе. Однако некоторые виды работ целесообразно организовывать, объединяя студентов в малые группы. В конце занятия обязательным является подведение итогов работы.

Одной из форм организации практических занятий выступает лабораторная работа. Эту форму рекомендуется применять, когда громоздкий математический аппарат используется для решения прикладной задачи.

В курсе математики для психологов предусмотрено проведение пяти лабораторных работ: «Точечные оценки параметров распределения», «Интервальные оценки параметров распределения», «Проверка статистических гипотез», «Корреляция», «Метод наименьших квадратов». Каждая из этих работ освещает определенный аспект либо вид психологического исследования. Так, работа «Точечные оценки параметров распределения» позволяет по имеющейся выборке установить, либо опровергнуть близость распределения генеральной совокупности к тому или иному закону распределения, что позволяет делать дальнейшие выводы и проводить вычисления, в соответствии с установленным законом. Работа «Интервальные оценки параметров распределения» позволяет с заданной точностью установить границы важнейших математических характеристик генеральной совокупности. При проведении работы «Проверка статистических гипотез» с указанной достоверностью устанавливается принадлежность генеральной совокупности к определенному виду распределения. При выполнении лабораторной работы «Корреляция» студенты учатся определять силу и тесноту зависимости между двумя факторами, что является чрезвычайно важным для дальнейших исследований и последующих выводов. Наконец, «Метод наименьших квадратов» позволяет установить не только силу, но и характер этой зависимости, даже в случае, когда зависимость не является линейной.

Задачей преподавателя при проведении лабораторных работ по математике для студентов психологов является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение учащихся к самостоятельному анализу результата, определение места математических исследований в дальнейшей профессиональной работе психолога.

2.3 Методические рекомендации по проведению по организации контроля знаний

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения домашних заданий, контрольные работы, выполнение и защита РГР и лабораторных работ, проведение коллоквиумов, зачеты и экзамены.

Каждое практическое занятие начинается с проверки домашнего задания, опроса по теоретическому материалу.

На лекциях и практических занятиях проводятся мини контрольные работы.

Студенты заочной формы обучения текущий контроль усвоения материала осуществляют самостоятельно по контрольным вопросам и заданиям контрольной работы.

Студенты дневного отделения допускаются к сдаче зачета при условии выполнения ими на положительную оценку всех форм текущего контроля, предусмотренных программой.

Студенты-заочники допускаются к зачету в установленном порядке, определенном «Положением о курсовых экзаменах и зачетах» АмГУ.

Зачет проводится по билетам, содержащих 10 заданий по вопросам из различных разделов программы. Отметка зачтено ставится при выполнении не менее 7 заданий.

Студенты дневного отделения допускаются к сдаче экзамена при условии выполнения ими на положительную оценку всех форм текущего контроля, предусмотренных программой.

Студенты-заочники допускаются к зачету при выполнении на положительную оценку контрольной работы.

Критерии оценок контрольных работ: оценка «отлично» ставится за полностью правильно выполненные задания; оценка «хорошо» ставится при верном применении необходимых теоретических знаний, и при наличии не более двух недочетов; оценка «удовлетворительно» - при наличии одной грубой ошибки в применении теоретических знаний или при правильном выполнении не менее 70% заданий. В противном случае – оценка «неудовлетворительно».

Экзамен проводится по билетам, содержащим теоретические вопросы и практические задания по различным разделам программы на второй семестр.

Итоговая оценка по дисциплине рассчитывается по формуле: $0{,}4x+0{,}6y$, где x – средняя оценка, полученная в результате выполнения текущих форм контроля, y – результат итогового зачета (экзамена).

3. ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

3.1. Конспект лекций

Первый семестр

Лекция 1. Матрицы и определители

1.1.Матрицы. Операции над матрицами.

Прямоугольной матрицей размера $m\times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно в виде $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу, называются ее *элементами*; первый индекс указывает на номер строки, второй - на номер столбца. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называются *равными*, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно *вектор-строкой* или *вектор-столбцом*. Вектор-столбцы и вектор-строки называют просто *векторами.*

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Матрица размера $m\times n$, все элементы которой равны нулю, называются *нулевой матрицей* и обозначается через 0. Элементы матрицы с одинаковыми индексами называют элементами *главной диагонали*. Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть $m = n$, то матрицу называют *квадратной* порядка n. Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются *диагональными матрицами.*Если все элементы a_{ii} диагональной матрицы равны 1, то матрица называется *единичной* и обозначается буквой E.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. *Транспонированием* называется такое преобразование матрицы, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров. Обозначается транспонирование значком Т наверху.

Пусть дана матрица А. Переставим строки со столбцами. Получим матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая будет транспонированной по отношению к матрице А. В частности, при транспонировании вектора-столбца получается вектор-строка и наоборот.

Произведением матрицы А на число λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы А умножением на число λ: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведение АВ матрицы А на матрицу В определяется в предположении, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Произведением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$, где $i = \overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, заданных в определенном порядке АВ, называется матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу: $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{im} b_{mk} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sk}$.

Иначе говоря, элементы матрицы-произведения определяются следующим образом: элемент i-й строки и k-го столбца матрицы С равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы k-го столбца матрицы В.

1.2. Определители

Перестановкой чисел 1, 2,..., n называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. В элементарной алгебре доказывается, что число всех перестановок, которые можно образовать из n чисел, равно 12...n = n!. Например, из трех чисел 1, 2, 3 можно образовать 3!=6 перестановок: 123, 132, 312, 321, 231, 213. Говорят, что в данной перестановке числа i и j составляют *инверсию* (беспорядок), если i>j, но i стоит в этой перестановке раньше j, то есть если большее число стоит левее меньшего.

Перестановка называется *четной* (или *нечетной)*, если в ней соответственно четно (нечетно) общее число инверсий. Операция, посредством которой от одной перестановки переходят к другой, составленной из тех же n чисел, называется *подстановкой n-ой степени*.

Подстановка, переводящая одну перестановку в другую, записывается двумя строками в общих скобках, причем числа, занимающие одинаковые места в рассматриваемых перестановках, называются *соответствующими* и пишутся одно под другим. Например, символ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ обозначает подстановку, в которой 3 переходит в 4, $1 \to 2$, $2 \to 1$, $4 \to 3$. Подстановка называется *четной* (или *нечетной*), если общее число инверсий в обеих строках подстановки четно (нечетно). Всякая подстановка n-ой степени может быть записана в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$,т.е. с натуральным расположением чисел в верхней строке.

Пусть нам дана квадратная матрица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим все возможные произведения по n элементов этой матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, т.е. произведений вида:

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\ \dots\ a_{nq_n},$$

где индексы q_1, q_2,..., q_n составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2,..., n. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, т.е. равно n!. Знак произведения (4.4) равен $(-1)^q$, где q - число инверсий в перестановке вторых индексов элементов.

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице, называется алгебраическая сумма n! членов вида $a_{1q_1}a_{2q_2}\ \dots\ a_{nq_n}$. Для записи определителя употребляется символ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ или det A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (детерминант, или определитель, матрицы A).

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.

2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j=\overline{1,n})$, то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определи-

теле, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.

8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя d n-го порядка называется определитель порядка n-1, который получается из d вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя d называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем обозначать A_{ij}. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Способы практического вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков, дает следующая теорема.

Теорема (разложение определителя по строке или столбцу).

Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеет место разложение d по элементам i-й строки $d = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$ $(i = \overline{1,n})$ или j- го столбца $d = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}$ $(j = \overline{1,n})$.

В частности, если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

Лекция 2. Ранг матрицы. Обратная матрица

2.1. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу. Если в этой матрице выделить произвольно *k* строк и *k* столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка* матрицы А. Очевидно, что матрица А обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n. Среди всех отличных от нуля миноров матрицы А найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом* матрицы. Если ранг матрицы А равен r, то это означает, что в матрице А имеется отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю. Ранг матрицы А обозначается через r(A). Очевидно, что выполняется соотношение $0 \le r(A) \le \min(m, n)$.

Ранг матрицы находится либо методом окаймления миноров, либо методом элементарных преобразований. При вычислении ранга матрицы первым способом следует переходить от миноров низших порядков к минорам более высокого порядка. Если уже найден минор D k-го порядка матрицы А, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры (k+1)-го порядка, окаймляющие минор D, т.е. содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Элементарными называются следующие преобразования матрицы:

1) перестановка двух любых строк (или столбцов),

2) умножение строки (или столбца) на отличное от нуля число,

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы А и В эквивалентны, то это записывается так: А ~ В.

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц (число которых может равняться нулю), а все остальные элементы равны нулю,

например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

2.2. Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу A.

Обозначим Δ =det A.

Квадратная матрица A называется *невырожденной,* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной,* или *особенной*, если Δ = 0.

Квадратная матрица B называется *обратной* для квадратной матрицы A того же порядка, если их произведение A B = B A = E, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрицы A и B.

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице A, обозначается через A^{-1}, так что B = A^{-1}. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы по формуле для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (ЭП). Любую неособенную матрицу A путем ЭП только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице Е. Если совершенные над матрицей А ЭП в том же порядке применить к единичной матрице Е, то в результате получится обратная матрица. Удобно совершать ЭП над матрицами А и Е одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту. Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Лекция 3 Системы линейных уравнений

3.1. Критерий совместности

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \qquad (*) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Здесь a_{ij} и b_i ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) - заданные, а x_j - неизвестные действительные числа. Используя понятие произведения матриц, можно переписать систему (*) в виде:

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ - матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы, которая называется *матрицей системы*, $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $B = (b_1, b_2,\ldots, b_m)^T$ - векторы-столбцы, составленные соответственно из неизвестных x_j и из свободных членов b_i.

Упорядоченная совокупность *n* вещественных чисел $(c_1, c_2,\ldots, c_n)$ называется *решением системы* (*), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных $x_1, x_2,\ldots, x_n$ каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор $C= (c_1, c_2,\ldots, c_n)^T$ такой, что $AC \equiv B$.

Система (*) называется *совместной,* или *разрешимой,* если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной,* или *неразрешимой*, если она не имеет решений.

Матрица

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице A столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы.*

Вопрос о совместности системы (*) решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера - Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц A и $\overline{A}$ совпадают, т.е. $r(A) = r(\overline{A}) = r$.

Для множества M решений системы (*) имеются три возможности:

1) $M = \varnothing$ (в этом случае система несовместна);

2) M состоит из одного элемента, т.е. система имеет единственное решение (в этом случае система называется *определенной*);

3) M состоит более чем из одного элемента (тогда система называется *неопределенной*). В третьем случае система (*) имеет бесчисленное множество решений.

Система имеет единственное решение только в том случае, когда $r(A) = n$. При этом число уравнений - не меньше числа неизвестных ($m \geq n$); если $m > n$, то $m-n$ уравнений являются следствиями остальных. Если $0 < r < n$, то система является неопределенной.

Для решения произвольной системы линейных уравнений нужно уметь решать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных, - так называемые *системы крамеровского типа*:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \qquad (**)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n1} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n.$$

Системы (**) решаются одним из следующих способов: 1) методом Гаусса, или методом исключения неизвестных; 2) по формулам Крамера; 3) матричным методом.

3.2. Метод Гаусса

Исторически первым, наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной. При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

3.3. Формулы Крамера

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим *главный определитель системы* (**), т.е. определитель матрицы А $\Delta = \det(a_{ij})$ и *n вспомогательных определителей* Δ_i ($i=\overline{1,n}$), которые получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера имеют вид: $\Delta \cdot x_i = \Delta_i$ ($i = \overline{1,n}$).

Правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_i = \Delta_i / \Delta$.

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители $\Delta_i = 0$ ($i= \overline{1,n}$), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

3.4. Матричный метод

Если матрица A системы линейных уравнений невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную, и решение системы совпадает с вектором $C = A^{-1}B$. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле $X=C$, $C=A^{-1}B$ называют *матричным способом решения системы,* или *решением по методу обратной матрицы*.

3.5. Системы линейных уравнений общего вида

Если система (*) оказалась совместной, т. е. матрицы A и $\overline{A}$ имеют один и тот же ранг, то могут представиться две возможности: а) $r = n$; б) $r < n$:

а) если $r = n$, то имеем n независимых уравнений с n неизвестными, причем определитель Δ этой системы отличен от нуля. Такая система имеет единственное решение, получаемое по формулам Крамера;

б) если $r < n$, то число независимых уравнений меньше числа неизвестных.

Перенесем лишние неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2},\dots, x_n$, которые принято называть свободными, в правые части; наша система линейных уравнений примет вид:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 +\dots + a_{1r} x_r = b_1 - a_{1,r+1} x_{r+1} -\dots - a_{1n}x_n,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 +\dots + a_{2r} x_r = b_2 - a_{2,r+1} x_{r+1} -\dots - a_{2n}x_n,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 +\dots + a_{rr} x_r = b_r - a_{r,r+1} x_{r+1} -\dots - a_{rn}x_n.$$

Ее можно решить относительно $x_1, x_2,\dots, x_r$, так как определитель этой системы (r-го порядка) отличен от нуля. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, получим по формулам Крамера соответствующие числовые значения для $x_1, x_2,\dots, x_r$. Таким образом, при $r < n$ имеем бесчисленное множество решений.

Система (*) называется *однородной*, если все $b_i = 0$, т. е. она имеет вид:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 +\dots + a_{1n} x_n = 0,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0, \qquad (***)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m1} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0.$$

Из теоремы Кронекера-Капелли следует, что она всегда совместна, так как добавление столбца из нулей не может повысить ранга матрицы. Это, впрочем, видно и непосредственно - система (***) заведомо обладает нулевым, или тривиальным, решением $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Пусть матрица А системы (**) имеет ранг r.

Если r = n, то нулевое решение будет единственным решением системы (***); при r < n система обладает решениями, отличными от нулевого, и для их разыскания применяют тот же прием, как и в случае произвольной системы уравнений.

Лекция 4. Векторная алгебра

Упорядоченную совокупность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n вещественных чисел называют *n-мерным вектором*, а числа x_i $(i = \overline{1,n})$ - *компонентами,* или *координатами,* вектора.

Компоненты вектора нельзя менять местами, например, (3, 2, 5, 0, 1) ≠ ≠ (2, 3, 5, 0, 1).

Произведением вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на действительное число λ называется вектор $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Суммой векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется вектор $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

N-мерное векторное пространство R^n определяется как множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Система $e_1, e_2, \ldots, e_m$ n-мерных векторов называется *линейно зависимой*, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = 0$; в противном случае данная система векторов называется *линейно независимой*, то есть указанное равенство возможно лишь в случае, когда все $\lambda_1=\lambda_2=...= = \lambda_m = 0$.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов в R^3, интерпретируемых как направленные отрезки, поясняют следующие теоремы.

Теорема 1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Теорема 2. Для того, чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Теорема 3. Для того, чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Тройка некомпланарных векторов a, b, c называется *правой*, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов a, b, c в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае a, b, c - *левая тройка*. Все правые (или левые) тройки векторов называются *одинаково ориентированными.*

Тройка e_1, e_2, e_3 некомпланарных векторов в R^3 называется *базисом*, а сами векторы e_1, e_2, e_3 - *базисными*. Любой вектор a может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть представлен в виде

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \qquad (*)$$

Числа x_1, x_2, x_3 в разложении (*) называются *координатами* вектора a в базисе e_1, e_2, e_3 и обозначаются $a(x_1, x_2, x_3)$. Если векторы e_1, e_2, e_3 попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты x_1, x_2, x_3 - *прямоугольными.* Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать i, j, k.

Будем предполагать, что в пространстве R^3 выбрана правая система декартовых прямоугольных координат {0, i, j, k}.

Векторным произведением вектора a на вектор b называется вектор c, который определяется следующими тремя условиями:

1. Длина вектора c численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, т. е. $|c| = |a|\,|b| \sin(a\hat{}b)$.

2. Вектор c перпендикулярен к каждому из векторов a и b.

3. Векторы a, b и c, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку.

Для векторного произведения c вводится обозначение $c = [ab]$ или $c = a\times b$.

Если векторы a и b коллинеарны, то $\sin(a\hat{}b) = 0$ и $[ab] = 0$, в частности, $[aa] = 0$. Векторные произведения ортов: $[ij] = k$, $[jk] = i$, $[ki] = j$.

Если векторы a и b заданы в базисе i, j, k координатами $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, то

$$[ab] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \bar{j}\,(a_1b_3 - a_3b_1) + \bar{k}\,(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Если векторное произведение двух векторов a и b скалярно умножается на третий вектор c, то такое произведение трех векторов называется *смешанным произведением* и обозначается символом a b c.

Если векторы a, b и c в базисе i, j, k заданы своими координатами $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$, то

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование - это скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

Если векторы образуют правую тройку, то их смешанное произведение есть число положительное, равное указанному объему; если же тройка a, b, c - левая, то $a\,b\,c<0$ и $V = -\,a\,b\,c$, следовательно $V = |a\,b\,c|$.

Координаты векторов, встречающиеся в задачах первой главы, предполагаются заданными относительно правого ортонормированного базиса. Единичный вектор, сонаправленный вектору a, обозначается символом a^o. Символом r=OM обозначается радиус-вектор точки M, символами a, AB или $|a|$, $|AB|$ обозначаются модули векторов a и AB.

Лекция 5. Линейные операторы. Собственные векторы линейного оператора

Всякий ненулевой вектор - столбец $X = (x_1, x_2,..., x_n)^T$ называется *собственным вектором линейного преобразования (квадратной матрицы* A*),* если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство $AX = \lambda X$.

Число λ называется *собственным значением линейного преобразования (матрицы* A*),* соответствующим вектору X. Матрица A имеет порядок n.

В математической экономике большую роль играют так называемые *продуктивные матрицы*. Доказано, что матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы.

Для нахождения собственных значений матрицы A перепишем равенство $AX = \lambda X$ в виде $(A - \lambda E)X = 0$, где E - единичная матрица n-го порядка или в координатной форме:

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{array} \qquad (**)$$

Получили систему линейных однородных уравнений, которая имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т.е.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получили уравнение n-ой степени относительно неизвестной λ, которое называется *характеристическим уравнением матрицы* A, многочлен $|A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а его корни - *характеристическими числами, или собственными значениями, матрицы* A.

Для нахождения собственных векторов матрицы А в векторное уравнение $(A - \lambda E)X = 0$ или в соответствующую систему однородных уравнений (**) нужно подставить найденные значения λ и решать обычным образом.

Лекция 6. Аналитическая геометрия на плоскости

В аналитической геометрии *линия на плоскости* определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$. При этом на функцию F должны быть наложены ограничения так, чтобы, с одной стороны, это уравнение имело бесконечное множество решений и, с другой стороны, чтобы это множество решений не заполняло “куска плоскости”. Важный класс линий составляют те, для которых функция $F(x,y)$ есть многочлен от двух переменных, в этом случае линия, определяемая уравнением $F(x,y)=0$, называется *алгебраической*. Алгебраические линии, задаваемые уравнением первой степени, суть прямые. Уравнение второй степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или линию, распадающуюся на две прямые.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Прямая на плоскости может быть задана одним из уравнений:

1^0. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Вектор $n(A,B)$ ортогонален прямой, числа А и В одновременно не равны нулю.

2^0. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_o = k (x - x_o),$$

где k - угловой коэффициент прямой, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox, $M (x_o, y_o)$ - некоторая точка, принадлежащая прямой.

Уравнение2^0 принимает вид $y = kx + b$, если $M (0, b)$ есть точка пересечения прямой с осью Oy.

3^0. Уравнение прямой в отрезках:

$$x/a + y/b = 1,$$

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

4^0. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки - $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

5^0. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ параллельно данному вектору $a(m, n)$:

$$\frac{y - y_1}{n} = \frac{x - x_1}{m}.$$

6^0. Нормальное уравнение прямой:

$$rn^o - p = 0,$$

где r - радиус-вектор произвольной точки M(x, y) этой прямой, n^o - единичный вектор, ортогональный этой прямой и направленный от начала координат к прямой; p - расстояние от начала координат до прямой.

Нормальное уравнение прямой в координатной форме имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox.

Величина угла между прямыми $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$ задается формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left|\frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}\right|.$$

Равенство $1 + k_1 k = 0$ есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых.

Для того, чтобы два уравнения $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, задавали одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были пропорциональны:

$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$; задавали две различные параллельные прямые: $A_1/A_2 = B_1/B_2$ и $B_1/B_2 \neq C_1/C_2$; прямые пересекались: $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$.

Расстояние d от точки $M_o(x_o, y_o)$ до прямой есть длина перпендикуляра, проведенного из точки M_o к прямой. Если прямая задана нормальным уравнением, то $d = | r_o n^o - p |$, где r_o - радиус-вектор точки M_o или, в координатной форме, $d = | x_o \cos\alpha + y_o \sin\alpha - p |$.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Предполагается, что среди коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} есть отличные от нуля.

Уравнение окружности с центром в точке C(a, b) и радиусом, равным R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная 2a.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1. \qquad (*)$$

Эллипс, заданный уравнением (*), симметричен относительно осей координат. Параметры *a* и *b* называются *полуосями* эллипса.

Пусть a>b, тогда фокусы F_1 и F_2 находятся на оси Ox на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Расстояния от точки M(x, y) эллипса до его фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами: $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Если же a < b, то фокусы находятся на оси Oy, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$, $r_1 = b + \varepsilon x$, $r_2 = b - \varepsilon x$.

Если a = b, то эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса *a*.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) равна по абсолютной величине данному числу 2a.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1. \qquad (**)$$

Гипербола, заданная уравнением (**), симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось Ox в точках A (a,0) и A (-a,0) - вершинах гиперболы и не пересекает ось Oy. Параметр *a* называется *вещественной полуосью*, *b* - *мнимой полуосью*. Параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}$ есть расстояние от фокуса до начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые $y = \pm b/a\ x$ называются *асимптотами* гиперболы. Расстояния от точки M(x,y) гиперболы до ее фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами: $r_1 = |\varepsilon x - a|$, $r_2 = |\varepsilon x + a|$.

Гипербола, у которой a = b, называется *равносторонней*, ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнение асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ называются *сопряженными*.

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1) $y^2 = 2px$ - парабола симметрична относительно оси Ox.

2) $x^2 = 2py$ - парабола симметрична относительно оси Oy.

В обоих случаях p>0 и вершина параболы, то есть точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола $y^2 = 2px$ имеет фокус F(p/2,0) и директрису x = - p/2, фокальный радиус-вектор точки M(x,y) на ней r = x+ p/2.

Парабола $x^2 = 2py$ имеет фокус F(0, p/2) и директрису y = - p/2; фокальный радиус-вектор точки M(x,y) параболы равен r = y + p/2.

Лекция 7. Введение в анализ

7.1. Предел последовательности и функции. Теоремы о пределах

Постоянное число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует номер N, что все значения x_n, у которых n>N, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Записывают это следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Неравенство (*) равносильно двойному неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \qquad (**)$$

которое означает, что точки x_n, начиная с некоторого номера n>N, лежат внутри интервала (a-ε, a+ε), т.е. попадают в какую угодно малую ε-окрестность точки a.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае - *расходящейся*.

Понятие предела функции является обобщением понятия предела последовательности, так как предел последовательности можно рассматривать как предел функции $x_n = f(n)$ целочисленного аргумента n.

Пусть дана функция f(x) и пусть a - *предельная точка* области определения этой функции D(f), т.е. такая точка, любая окрестность которой содержит точки множества D(f), отличные от a. Точка a может принадлежать множеству D(f), а может и не принадлежать ему.

Определение 1. Постоянное число A называется *пределом функции* f(x) *при* x→a, если для всякой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к a, соответствующие им последовательности $\{f(x_n)\}$ имеют один и тот же предел A.

Это определение называют *определением предела функции по Гейне,* или "*на языке последовательностей*".

Определение 2. Постоянное число A называется *пределом функции* f(x) *при* x→a, если, задав произвольное как угодно малое положительное число ε, можно найти такое δ >0 (зависящее от ε), что для всех x, лежащих в δ-окрестности числа a, т.е. для x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, значения функции f(x) будут лежать в ε-окрестности числа A, т.е. $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Это определение называют *определением предела функции по Коши,* или *“на языке* ε - δ“.

Определения 1 и 2 равносильны. Если функция f(x) при $x \to a$ имеет предел, равный A, это записывается в виде

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

В том случае, если последовательность $\{f(x_n)\}$ неограниченно возрастает (или убывает) при любом способе приближения x к своему пределу a, то будем говорить, что функция f(x) имеет *бесконечный предел,* и записывать это в виде:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty).$$

Переменная величина (т.е. последовательность или функция), имеющая своим пределом нуль, называется *бесконечно малой величиной.*

Переменная величина, имеющая бесконечный предел, называется *бесконечно большой величиной*.

Для нахождения пределов на практике пользуются следующими теоремами.

Теорема 1. Если существуют пределы $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$, то

$\lim_{x\to a} (f(x)+(g(x)) = A + B$, $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = AB$, $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B \quad (B \neq 0)$.

Замечание. Выражения вида $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ являются неопределенными, например, отношение двух бесконечно малых или бесконечно больших величин, и нахождение пределов такого вида носит название “раскрытие неопределенностей”.

Теорема 2. $\lim_{x\to a} (f(x))^{\alpha} = (\lim_{x\to a} f(x))^{\alpha},$ где $\alpha = \mathrm{const}$, т.е. можно переходить к пределу в основании степени при постоянном показателе, в частности, $\lim_{x\to a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x\to a} f(x)}$;

$\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)} = b^A$, где b = const, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$; $\lim\limits_{x\to a} \log_c f(x) = \log_c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, где c = const.

Теорема 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, a = const, a >0, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$, где $e \approx 2.7$ - основание натурального логарифма.

Используются на практике и формулы: $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\log_c(1+\alpha)}{\alpha} = \log_c e$,

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(a^\alpha - 1)/\alpha = \ln a$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}((1+\alpha)^\mu - 1)/\alpha = \mu$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$.

Если $x\to a$ и при этом $x > a$, то пишут $x\to a+0$. Если, в частности, a=0, то вместо символа 0+0 пишут +0. Аналогично если $x\to a$ и при этом $x<a$, то пишут $x\to a-0$. Числа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ называются соответственно *пределом справа* и *пределом слева функции* f(x) *в точке a*. Для существования предела функции f(x) при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Функция f(x) называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$.

Условие можно переписать в виде: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x_o)$,то есть возможен предельный переход под знаком функции, если она непрерывна в данной точке.

Если равенство нарушено, то говорят, что *при* $x = x_o$ *функция* f(x) *имеет разрыв.* Рассмотрим функцию y = 1/x. Областью определения этой функции является множество R, кроме x = 0. Точка x = 0 является предельной точкой множества D(f), поскольку в любой ее окрестности, т.е. в любом открытом интервале, содержащем точку 0, есть точки из D(f), но она сама не принадлежит этому множеству. Значение $f(x_o)= f(0)$ не определено, поэтому в точке $x_o = 0$ функция имеет разрыв.

Функция f(x) называется *непрерывной справа в точке* x_o, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, и *непрерывной слева в точке* x_o, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность функции в точке x_o равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно и справа и слева.

Для того, чтобы функция была непрерывна в точке x_o, например, справа, необходимо, во-первых, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, а во-вторых, чтобы этот предел был равен $f(x_o)$. Следовательно, если хотя бы одно из этих двух условий не выполняется, то функция будет иметь разрыв.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ существует и не равен $f(x_o)$, то говорят, что *функция* f(x) *в точке* x_o имеет *разрыв первого рода,* или *скачок*.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен ∞ или не существует, то говорят, что в *точке* x_o *функция имеет разрыв второго рода*.

Например, функция y = ctg x при $x \to +0$ имеет предел, равный $+\infty$, значит, в точке x=0 она имеет разрыв второго рода. Функция y = E(x) (целая часть от *x*) в точках с целыми абсциссами имеет разрывы первого рода, или скачки.

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка [a,b], называется *непрерывной* в [a,b]. Непрерывная функция изображается сплошной кривой.

Лекция 8 Производная

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X. *Производной* функции y = f(x) в точке x_o называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел *конечный,* то функция f(x) называется *дифференцируемой* в точке x_o; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.

Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или - ∞), то при условии, что функция в точке x_o непрерывна, будем говорить, что функция f(x) имеет в точке x_o *бесконечную производную*.

Производная обозначается символами

$$y', \quad f'(x_o), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции. *Геометрический смысл производной* состоит в том,что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в данной точке x_o; *физический смысл* - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении s = s(t) в момент t_o.

Если *c* - постоянное число, и u = u(x), v = v(x) - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) (c) ' = 0, (cu) ' = cu';

2) (u+v)' = u'+v';

3) (uv)' = u'v+v'u;

4) $(u/v)' = (u'v-v'u)/v^2$;

5) если y = f(u), u = φ(x), т.е. y = f(φ(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций φ и f, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция x = g(y), причем $\frac{dg}{dy} = x'_y \neq 0$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

На основе определения производной и правил дифференцирования можно составить список табличных производных основных элементарных функций.

1. $(u^\mu)' = \mu\, u^{\mu-1}\, u'$ ($\mu \in$ R).

2. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.

3. $(e^u)' = e^u\, u'$.

4. $(\log_a u)' = u'/(u \ln a)$.

5. (ln u)' = u'/u.

6. (sin u)' = cos u· u'.

7. (cos u)' = - sin u· u'.

8. $(\text{tg } u)' = 1/\cos^2 u \cdot u'$.

9. $(\text{ctg } u)' = - u' / \sin^2 u$.

10. $(\arcsin u)' = u' / \sqrt{1 - u^2}$.

11. $(\arccos u)' = - u' / \sqrt{1 - u^2}$.

12. $(\mathrm{arctg}\, u)' = u'/(1 + u^2)$.

13. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = - u'/(1 + u^2)$.

Вычислим производную степенно-показательного выражения $y=u^v$, $(u>0)$, где *u* и *v* суть функции от *x*, имеющие в данной точке производные *u′*, *v′*.

Прологарифмировав равенство $y=u^v$, получим $\ln y = v \ln u$.

Приравнивая производные по *x* от обеих частей полученного равенства с помощью правил 3, 5 и формулы для производной логарифмической функции, будем иметь: $y'/y = vu'/u + v' \ln u$, откуда $y' = y\, (vu'/u + v' \ln u)$.

Итак, $(u^v)' = u^v\, (vu'/u + v' \ln u)$, $u > 0$.

Например, если $y = x^{\sin x}$, то $y' = x^{\sin x} (\sin x/x + \cos x \cdot \ln x)$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке *x*, т.е. имеет в этой точке конечную производную *y′*, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$; отсюда $\Delta y = y' \Delta x + \alpha x$.

Главная часть приращения функции, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом функции* и обозначается dy: $dy = y' \Delta x$. Если положить в этой формуле $y=x$, то получим $dx = x'\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x$, поэтому $dy=y'dx$, т. е. символ для обозначения производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как дробь.

Приращение функции Δy есть приращение ординаты кривой, а дифференциал dy есть приращение ординаты касательной.

Пусть мы нашли для функции $y=f(x)$ ее производную $y' = f'(x)$. Производная от этой производной называется *производной второго порядка* функции f(x), или *второй производной,* и обозначается y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются и обозначаются:

производная третьего порядка - y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$,

производная четвертого порядка - y^{IV}, $f^{IV}(x)$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

и вообще *производная n-го порядка* - $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Лекция 9 Правило Лопиталя.

9.1. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

1. Неопределенность вида 0/0. Первое правило Лопиталя.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, когда последний существует.

2. Неопределенность вида ∞/∞. Второе правило Лопиталя.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, когда последний существует.

3. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞} и 0^0 сводятся к неопределенностям 0/0 и ∞/∞ путем алгебраических преобразований.

9.2. Приближенные вычисления с помощью производной.

Лекция 10 Экстремум функции

Функция y=f(x) называется *возрастающей* (*убывающей*) в некотором интервале, если при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Если дифференцируемая функция y = f(x) на отрезке [a, b] возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Точка x_o называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции f(x), если существует окрестность точки x_o, для всех точек которой верно неравенство $f(x) \le f(x_o)$ ($f(x) \ge f(x_o)$).

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках - ее *экстремумами.*

Необходимые условия экстремума. Если точка x_o является точкой экстремума функции f(x), то либо $f'(x_o) = 0$, либо $f'(x_o)$ не существует. Такие точки называют *критическими,* причем сама функция в критической точке определена. Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек.

Первое достаточное условие. Пусть x_o - критическая точка. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_o меняет знак плюс на минус, то в точке x_o функция имеет максимум, в противном случае - минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_o экстремума нет.

Второе достаточное условие. Пусть функция f(x) имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки x_o и вторую производную $f''(x_0)$ в самой точке x_o. Если $f'(x_o) = 0$, $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), то точка x_o является точкой локального минимума (максимума) функции f(x). Если же $f''(x_0)=0$, то нужно либо пользоваться первым достаточным условием, либо привлекать высшие производные.

На отрезке [a,b] функция y = f(x) может достигать наименьшего или наибольшего значения либо в критических точках, либо на концах отрезка [a,b].

Лекция 11 Частные производные. Метод наименьших квадратов

Пусть D(x, y) - некоторое множество точек плоскости *Oxy*. Если каждой упорядоченной паре чисел *(x, y)* из области D соответствует определенное число $z \in Z \subset R$, то говорят, что *z* есть *функция двух независимых переменных x* и *y*. Переменные *x* и *y* называются *независимыми переменными,* или *аргументами*, D - *областью определения,* или *существования, функции*, а множество Z всех значений функции - *областью* ее *значений.* Функциональную зависимость *z* от *x* и *y* записывают в виде z = f(x, y), z = z(x, y), z = F(x, y) и т.д. Например, объем цилиндра $V = \pi R^2 H$ есть функция от радиуса R его основания и от высоты H, т.е. V = f(R, H), которая дает возможность, зная значения независимых переменных R и H, установить соответствующее значение для V.

Частное значение функции z = f(x, y) при $x = x_o$, $y=y_o$ обозначается $z_o= f(x_o, y_o)$. Геометрически область определения функции D представляет собой конечную или бесконечную часть плоскости, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается D, во втором случае - *открытой.*

Наподобие того, как функция $y = f(x)$ геометрически иллюстрируется своим графиком, можно геометрически истолковать и уравнение $z = f(x, y)$. Возьмем в пространстве R^3 прямоугольную систему координат и изобразим на плоскости *Oxy* область D. В каждой точке $M(x, y) \in D$ восстановим перпендикуляр к плоскости *Oxy* и отложим на нем значение $z = f(x, y)$. Геометрическое место полученных таким образом точек и явится своего рода пространственным графиком нашей функции. Это будет, вообще говоря, некоторая поверхность, поэтому уравнение $z = f(x, y)$ называется *уравнением поверхности*. Пара значений *x* и *y* определяет на плоскости *Oxy* точку $M(x, y)$, а $z = f(x, y)$ - аппликату соответствующей точки $P(x, y, z)$ на поверхности. Поэтому говорят, что *z* есть функция точки $M(x, y)$ и пишут $z = f(M)$.

Функция $f(M)$ имеет *предел* A, $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, если разность $f(M) - A$ есть бесконечно малая, когда $\rho = M_oM \to 0$ при любом способе приближения M к M_o (например, по любой линии).

Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке M_o, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Областью определения функции трех переменных является множество точек пространства R^3, но непосредственной геометрической интерпретации для функций с числом аргументов больше двух не существует, однако для них вводятся по аналогии все определения (частные производные, предел, непрерывность и т.д.), сформулированнные для $f(x,y)$.

Аналогично определяется функция *n* независимых переменных $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$.

Областью определения такой функции будет множество $D \subset R^n$.

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ *частной производной по переменной x* называется производная этой функции по *x* при постоянном *y*. Обозначается частная производная по x следующим образом: $z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x(x_0, y_0),\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Аналогично *частной производной функции* z = f(x, y) *по аргументу y* называется производная этой функции по *y* при постоянном *x*. Обозначения:

$$z'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ f'_y(x_0, y_0),\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Частными производными второго порядка функции z = f(x, y) называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Если первая производная была взята, например, по аргументу *x*, то вторые производные обозначаются символами z''_{xx}, z''_{x^2}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Пусть функция z = f(x, y) определена в области D и точка $M_o(x_o, y_o)$ будет внутренней точкой этой области. Говорят, что функция f(x, y) в точке $M_o(x_o, y_o)$ имеет *максимум* (*минимум*), если ее можно окружить такой окрестностью

$$(x_o - \delta,\ x_o + \delta;\ y_o - \varepsilon,\ y_o + \varepsilon),$$

чтобы для всех точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$f(x,y) \le f(x_o,y_o)\ (\ f(x,y) \ge f(x_o,y_o)).$$

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существует хотя бы одна из них. Такие точки называются *критическими*. Названные условия являются необходимыми условиями экстремума, но еще не достаточными (они могут выполняться и в точках, где нет экстремума). Чтобы критическая точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия. Сформулируем достаточные условия экстремума для функции двух переменных. Пусть точка $M_o(x_o, y_o)$ - критическая точка функции z = f(x, y), т.е. $f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$, и функция z = f(x, y) имеет непрерывные вторые частные производные в некоторой окрестности точки $M_o(x_o, y_o)$. Обозначим $z''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $z''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $z''_{yy}(x_0, y_0) = C$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция z имеет экстремум в точке M_o: максимум при $A < 0$, минимум при $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_o нет;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

В естествознании, технике и экономике часто приходится иметь дело с *эмпирическими формулами*, т.е. формулами, составленными на основе обработки статистических данных или результатов опытов. Одним из распространенных приемов построения таких формул является *метод наименьших квадратов.* Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаями линейной и квадратичной зависимости. Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y, Допустим, что точки, взятые из таблицы (опытные точки) группируются около некоторой прямой линии. Тогда можно предположить,что между x и y существует линейная зависимость $\bar{y} = ax+b$, где a и b - коэффициенты, подлежащие определению, $\bar{y}$ - теоретическое значение ординаты.

Лекция 12. Неопределенный интеграл.

Функция F(x), дифференцируемая в данном промежутке X, называется *первообразной для функции* f(x), *или интегралом от* f(x), если для всякого $x \in X$ справедливо равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Нахождение всех первообразных для данной функции называется ее *интегрированием. Неопределенным интегралом функции* f(x) на данном промежутке X называется множество всех первообразных функций для функции f(x); обозначение -

$$\int f(x)\,dx.$$

Если F(x) - какая-нибудь первообразная для функции f(x), то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Непосредственно из определения получаем основные свойства неопределенного интеграла и список табличных интегралов:

1) $d\int f(x)=f(x)dx$,

2) $\int df(x)=f(x)+C$,

3) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ (a=const),

4) $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

Список табличных интегралов

1. $\int x^{\mu}\,dx = x^{\mu+1}/(\mu + 1) +C$ ($\mu \neq -1$).

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| +C$.

3. $\int a^{x}\,dx = a^{x}/\ln a + C$ ($a>0, a\neq 1$).

4. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$.

5. $\int \sin x\,dx = \cos x + C$.

6. $\int \cos x\,dx = -\sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$.

Для интегрирования многих функций применяют *метод замены переменной,* или *подстановки,* позволяющий приводить интегралы к табличной форме.

Если функция f(z) непрерывна на $[\alpha, \beta]$, функция z=g(x) имеет на [a,b] непрерывную производную и $\alpha \leq g(x) \leq \beta$, то

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz,$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку z=g(x).

Для доказательства достаточно записать исходный интеграл в виде:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x).$$

Пусть u = f(x) и v = g(x) - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда, по правилу дифференцирования произведения,

$$d(uv)= udv + vdu \text{ или } udv = d(uv) - vdu.$$

Для выражения d(uv) первообразной, очевидно, будет *uv*, поэтому имеет место формула:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула выражает правило *интегрирования по частям*. Оно приводит интегрирование выражения udv=uv'dx к интегрированию выражения vdu=vu'dx.

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^k \ln^m x\, dx,\ \int x^k \sin bx\, dx,\ \int x^k \cos bx\, dx,\ \int x^k e^{ax}\, dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Лекция 13. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке [a, b] определена функция f(x). Разобьем отрезок [a, b] на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* функции f(x) от *a* до *b* и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функция f(x) в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* [a, b], числа *a* и *b* носят название *нижнего и верхнего предела интеграла*.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(z)dz = \int\limits_a^b f(t)dt$;

2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, ($k$ = const, $k \in R$);

5) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$;

6) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

7) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ($\xi \in [a,b]$).

Последнее свойство называется *теоремой о среднем значении*.

Пусть f(x) непрерывна на [a, b]. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

и имеет место *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Геометрическая интерпретация: определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой y= f(x), прямыми x = a и x = b и отрезком оси *Ox*.

Лекция 14. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных (неограниченных) функций называются *несобственными. Несобственные интегралы I рода* - это интегралы на бесконечном промежутке, определяемые следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся несобственным интегралом от* f(x) *на интервале* [a,+∞), а функцию f(x) называют *интегрируемой на бесконечном промежутке* [a,+∞). В противном случае про интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ говорят, что он *не существует, или расходится*.

Аналогично определяются несобственные интегралы на интервалах (-∞, b] и (-∞, +∞):

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^A f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_A^b f(x)dx.$$

Определим понятие интеграла от неограниченной функции. Если f(x) непрерывна для всех значений *x* отрезка [a,b], кроме точки *c*, в которой f(x) имеет бесконечный разрыв, то *несобственным интегралом II рода от* f(x) *в пределах от a до b* называется сумма:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu\to 0}\int_{c+\mu}^{b} f(x)dx,$$

если эти пределы существуют и конечны. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\int_a^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu\to 0}\int_{c+\mu}^{b} f(x)dx.$$

Лекция 15. Элементы теории множеств

Итак, исходные неопределяемые понятия: *множество и элемент*. Их надо воспринимать интуитивно, на уровне жизненного опыта. Множество - это синоним слова совокупность. Множество состоит из элементов. Если *a* - элемент множества *A,* то пишут , а если *a* не является элементом множества *A*, то пишут . Символ означает, что множество *A* состоит из элементов . Если нужно символически записать фразу «*множество A состоит из элементов a, обладающих свойством f*»*,* то принято писать:

.

Символ $|A|$ обозначает количество элементов во множестве A. Если специально не оговорено иное, то все множества в наших рассмотрениях будут конечными, т.е. такими, что .

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A - *подмножество* B и пишут . Принято специальным термином и специальным символом выделять множество, не содержащее ни одного элемента: его называют *пустым* множеством и обозначают символом . Если одновременно и , то множества A и B называются *равными* и пишут . Над множествами можно проводить ряд традиционных действий. А именно:

1.*Объединение*. Так называется множество C, которое строится по заданным множествам A и B следующим образом: в него включаются все элементы из A и все элементы из B. Обозначение:

2. *Пересечение*. Так называется множество C, которое строится по заданным множествам A и B следующим образом: в него включаются все элементы, принадлежащие одновременно множеству A и множеству B. Обозначение:

3.*Вычитание.* Так называется множество C, которое строится по заданным множествам A и B следующим образом: в него включаются все элементы из A, не принадлежащие множеству B. Обозначение: Часто при включении вместо пишут и говорят о *дополнении* подмножества B.

4. *Произведение.* Так называется множество C, которое строится по заданным множествам A и B следующим образом: в него включаются все упорядоченные пары , где . Обозначение: Если , то называется *декартовым квадратом* множества A; подмножество всевозможных элементов во множестве называется *диагональю* множества A и обозначается .

Напомним еще несколько определений.

Отношение на множестве. Если в декартовом квадрате некоторого множества *A* выделено какое-либо подмножество , то говорят, что на *A задано отношение* (или *бинарное отношение*). Если для некоторых элементов имеет место включение , то говорят, что *находятся в отношении* .

Если , то отношение называется *рефлексивным.*

Если отношение таково, что из включения обязательно следует, что , то отношение называется *симметричным.*

Если отношение таково, что из включений и следует, что , то отношение называется *транзитивным.*

Если отношение таково, что из одновременных включений и следует, что , то отношение называется *антисимметричным*.

Полагают, по определению, что пустое множество является отношением одновременно рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным.

Если отношение рефлексивно, транзитивно и симметрично, то оно называется *эквивалентностью*. Если же отношение одновременно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, то оно называется *частичным порядком.*

Если - частичный порядок на множестве *A* и , то говорят, что элементы *сравнимы относительно* или просто *сравнимы;* иногда пишут в этом случае или просто .

Лекция 16. Элементы математической логики

Понятие высказывания и логические операции над высказываниями

Высказывание - связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Пример.

1. Река Амур впадает в Балтийское море. Это предложение ложное высказывание.

2. Является ли x = 3 корнем уравнения $x^3 - 27 = 0$? Не является высказыванием, так как представляет собой вопросительное предложение.

3. "2 < 7" - истинное высказывание.

4. Химия - интересный предмет. Не является высказыванием, гак как не может единого мнения о том, истинно это предложение или ложно.

5. $x > 4$. Не является высказыванием. Из-за присутствия в предложении переменной, оно обладает свойством превращаться в высказывание при фиксации значения этой переменной.

6. Длина ромба больше площади круга. Не является высказыванием. Об этом предложении нельзя сказать, истинно оно или ложно, из-за отсутствия в нем какого-либо смысла.

Пусть. А - высказывание, через A^* обозначим его значение истинности ("истина", "ложь"). Если А - истинное высказывание, то $A^* = 1$ (и). Если А – ложное высказывание, то $A^* = 0$ (л).

В русском языке из простых связных повествовательных предложений с помощью некоторых стандартных связок можно образовать новые (составные) повествовательные предложения. В алгебре высказываний этим конструкциям соответствуют логические операции. Так как нас интересует не содержательный смысл высказывания, а только его значение истинности, то для задания операций достаточно определить значение истинности результата применения операций.

<u>Отрицание</u> - логическая операция, соответствующая конструкциям "не...", "не верно, что...". Отрицание высказывания обозначается $\overline{A}$ и определяется следующей таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Конъюнкция (логическое умножение) соответствует союзу "и", то есть конетрукции «...и...». Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое $A \neg B$ ($A*B$, AB) и определяемое следующей таблицей истинности:

A	B	AB
0	0	0

0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция АВ истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания А, В.

Дизъюнкция (логическое сложение) соответствует неразделительному «или» в русском языке, то есть конструкции «...или…».

Дизъюнкцией высказываний А, В называется высказывание, обозначаемое А v В и определяемое следующей таблицей истинности:

A	*B*	A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкция А v В ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания А, В.

Эквиваленция (равносильность) соответствует конструкции «…равносильно…» ("...тогда и только тогда, когда …"). Эквиваленцией высказываний А, В называется высказывание, обозначаемое *A*~В и определяемое следующей таблицей истинности:

A	*B*	A v B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция А v В истинна тогда и только тогда, когда образующеие высказывания А и В имеют одинаковые значения истинности.

Импликация соответсгвчет конструкции "Если …, то…". Импликацией высказываний А и В называется высказывание обозначаемое А→В и определяемое следующей таблицей истинности:

A	*B*	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация $A \to B$ ложна тогда и только тогда, когда А- истина, а В - ложь. А называется посылкой (гипотезой), В— заключением (выводом).

Логика высказываний - простейший раздел математической логики. Логика высказываний интересуется единственным свойством элементарных высказываний - их значением истинности. Составные части высказывания изучаются со стороны их структуры, отражающей способ, которым они образованны. Структура составных высказываний определяет зависимость их значений истинности от значений истинности составляющих элементарных высказываний.

Формулы алгебры логики

Пусгь X, У,…, Z – переменные, вместо которых можно подставлять любые элементарные высказывания (или их значения истинности). Такие переменные будем называть высказывательными (пропозициональными) переменными, С помощью этих переменных и символов логических операций любые высказывания можно формализовать, то есть заменить формулой, выражающей его логическую структуру.

Зададим алфавит, то есть набор символов, которые будем употреблять в логике высказываний:

1) X, У,… - символы для обозначения пропозициональных переменных;

2) 0, 1 - символы, обозначающие логические константы «ложь», « истина»;

3) $\neg$, v,$\to$, ~ - символы логических операций;

4) (,) - скобки, которые являются вспомогательными символами и служат для указания порядка выполненных операций.

Определение формулы логики высказываний:

1) всякая высказывательная (пропозициональная) переменная – формула;

2)символы 0,1 -формулы:

3)если F - формула, то $\overline{F}$ - формула;

4) если F_1 и F_2 - формулы, то $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \neg F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \sim F_2)$ -формулы;

5) никаких других формул в логике высказываний нет.

Формализация высказываний заключается в следующем:

1. Если высказывание простое, то ему ставится в соотношение элементарная формула.

2. Кслии высказывание составное, то для составления соответствующей формулы нужно: а) выделить все элементарные высказывания и логические связки, образующие данное высказывание; 6) заменить их соответствующими символами; в) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

Путь F - некоторая формула логики высказываний. Если каждой переменной, входящей в эту формулу, присваивать одно из значений истинности (0 или I), то, пользуясь определениями логических операций, можно найти значение формулы F при данном наборе значений ее переменных.

Примем следующие соглашение об упрощении записи формул: а) наружные скобки в записи формул можно опускать; б) конъюнкция " сильнее" дизъюнкции, а обе они "сильнее" импликации и эквиваленции, поэтому часть скобок, определяющих порядок действий, можно опускать; в) скобки, определяющие порядок действий, в ассоциативном случае можно опускать; г) конъюнкцию будем обозначать знаком " • " или знак конъюнкции опускать.

Формулы, принимающие значение 1 при всех наборах значений входящих в них переменных, а также формула 1 называются тавтологиями (тождественно - истинными формулами). Предположения, которые формализуются тавтологиями, называются истинными предположениями. Формулы F_1 и F_2 называются равносильными, если их эквиваленция $F_1 \sim F_2$, - тавтология. Так как эквиваленция истинна тогда и только тогда, когда составляющие ее высказывания оба истинны либо оба ложны, то $F_1 \sim F_2$есть тавтология в том и только в том случае, если формулы F_1 и F_2 одновременно, т.е. при одинаковых наборах значений переменных, входящих в формулы, принимают одинаковые значения истинности (1 или 0).

Лекция 17. Графы

Определение графа. Вершины и ребра. Графическая интерпретация графа. Смежность и инцидентность. Локальная степень. Подграф. Полный граф. Матрицы смежностей и инциденций. Изоморфизм графов.

Пусть *A* - любое множество. Обозначим через множество всех *неупорядоченных* пар его различных элементов. Например, если *A*={1,2,3}, то ={(1,2), (1,3), (2,3)}; если *A*={1,2}, то ={(1,2)}. Если *A*={1}, то , так как различных элементов в *A* нет. Когда в записи ={(1,2), (1,3), (2,3)} указывается пара (1,2), подразумевается, что выражения (1,2) и (2,1) означают одно и то же: это и означает, что пара *неупорядочена*, т.е. не имеет значения, в каком порядке записаны элементы пары.

Графом называется пара множеств , где *A* - любое непустое множество, а *B* . Элементы из *A* называются *вершинами* графа, а элементы из *B* - его *ребрами*. Вот пример графа:

Опишем традиционную *геометрическую интерпретацию* графа. Пусть - некоторый граф и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$. Фиксируем на плоскости произвольным образом *p* точек и произвольным образом дадим им в качестве имен имена вершин данного графа; в итоге на плоскости возникнут точки, обозначенные как . Затем для каждой пары точек таких, что , проведем отрезок прямой, соединяющий точки . В результате таких действий возникнет некоторый рисунок, который и называется *геометрической интерпретацией* графа. Заметим, что одному и тому же графу соответствует много рисунков, которые могут быть его геометрическими интерпретациями.

Если в некотором графе , где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$,

пара вершин такова, что , то вершины называются *смежными*; в этой ситуации каждая из них называется *инцидентной ребру*

, а ребро называется *инцидентным* каждой из вершин .

Если вершина и ребро инцидентны, то пишут .

Количество ребер, инцидентных данной вершине *a* называется ее *степенью* или *локальной степенью графа в вершине a*; степень вершины *a* обозначается через . В приведенном выше примере степень вершины «1» равна 4, степень вершины «2» равна 2, степень вершины «3» равна 3, степень вершины «4» равна 2, степень вершины «5» равна 1. А вот пример графа с локальной степенью 0: ; здесь вершина «3» имеет степень 0. Вершины со степенью 0 называются *изолированными*.

Можно проверить, что *в любом графе количество вершин нечетной степени обязательно четно*.

Пусть теперь - два графа таких, что и ; тогда говорят, что является *подграфом* графа . Если в некотором графе множество ребер *B* таково, что , то граф называется *полным*. Заметим, что если в полном графе число вершин равно *p*, то число ребер равно .

Пусть по-прежнему - граф и $A=\{a_1,a_2,\dots,a_p\}$ - его вершины. Построим квадратную матрицу , положив

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & (a_i,a_j)\in B,\\ 0, & (a_i,a_j)\notin B.\end{cases}$$

Очевидно, эта матрца симметрична. Она называется *матрицей смежностей* графа . В приведенном выше примере графа матрица смежностей такова:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопоставим графу еще одну матрицу. Будем считать, что $A = \left\{ a_1, a_2, \ldots, a_p \right\}$ - по-прежнему множество вершин и пусть - множество ребер. Определим матрицу следующим образом:

Введенная так матрица *N* называется *матрицей инциденций* данного графа.

Очевидно, вид матрицы смежностей и вид матрицы инциденций существенно зависят от того, как именно занумерованы вершины и ребра. Если в приведенном выше примере графа считать, что ,то матрица инциденций будет такой:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В каждом столбце матрицы инциденций всегда ровно две единицы, остальные элементы равны нулю. Если в графе все вершины имеют степень ноль, то матрицы инциденций не существует.

Наконец, введем одно из важнейших понятий в теории графов - понятие изоморфизма графов. Пусть - два графа. Предположим, что существует такое отображение множеств вершин , что выполнены следующие четыре условия:

1) если , то ;

2) для всякого существует такой, что ;

3) если , то ;

4) для всякого существует такое , что

и .

Тогда отображение *f* называется *изоморфизмом* графов , а сами эти графы называются *изоморфными*. Нетрудно заметить, что при изоморфизме каждая вершина переходит в вершину с той же степенью. Поэтому наверняка неизоморфны графы, в списке локальных степеней которых есть резкие отличия (например, в одном графе есть вершина со степенью 3, а в другом такой степени вообще нет). Однако проверка двух графов на изоморфизм представляет собой намного более трудную задачу, чем простое сравнение степеней.

Лекция 18. Пути и циклы графа

Путь в графе и связные компоненты графа. Цепи, простые цепи, циклы, простые циклы. Операции удаления вершины, удаления ребра, подразбиения ребра. Дерево и его особенности.

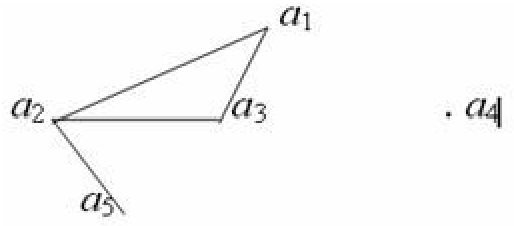
Пусть - граф и, как обычно, $A=\{a_1,\dots,a_p\}$, $B=\{b_1,\dots,b_q\}$.

Путь в графе - это символ вида

,

где . Таким образом, среди вершин и ребер могут быть повторы. По символу пути на графической интерпретации графа можно воспроизвести «движение» от вершине к вершине, выбирая каждый раз очередное ребро в соответствии с указанием в пути.

Вершины в приведенных выше обозначениях называются *концами* пути и *связанными* или *соединенными путем L*. Отдельным термином выделяют тот факт, что две вершины графа могут быть связаны некоторым путем: их называют *связанными*. Например, в графе



вершины a_3 и a_5 связаны (путем), а вершины a_4 и a_1 нет.

Граф, в котором связанны любые две вершины, называется *связным*. Таким образом, выше приведен пример графа несвязного. *Связной компонентой* графа называется такой его подграф, который является сам по себе графом связным и при этом совпадающим с любым другим содержащим его связным подграфом. Таким образом, связный граф обладает единственной связной компонентой - это он сам.

Путь без повторяющихся ребер называется *цепью*, а цепь без повторяющихся вершин называется *простой*. Цепь, в которой совпадают концевые вершины, называется *циклом*, а цикл, в котором нет повторяющихся вершин, кроме концевых, называется *простым*.

Ведем теперь три стандартные операции над графами.

Удаление вершины. Пусть - граф и . Удалить вершину a из графа Г - это значит построить новый граф , в котором

и получается из B удалением всех ребер, инцидентных вершине a.

Удаление ребра. Пусть - граф и . Удалить ребро b - это значит построить новый граф , в котором и .

Подразбиение ребра. Пусть - граф и . Выполнить подразбие-ние ребра b - это значит построить новый граф , в котором (т.е. z -некая новая вершина) и . С графической точки зрения эта операция означает «внесение в ребро новой вершины».

Деревом называется связный граф без циклов.

Если граф является деревом и число его вершин равно p, то о числе его ребер можно сказать совершенно определенно: количество ребер равно . В каждом дереве имеется еще одна особенность: любые две вершины в дереве связаны и притом единственной простой цепью. Оба эти обстоятельства имеют несложные доказательства.

Второй семестр

Лекция 1.

Предмет теории вероятностей. Случайные события. Алгебра событий. Относител-ная частота и вероятность случайного события. Полная группа событий. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности. Основные формулы комбинаторики.

В различных разделах науки и техники нередко возникают ситуации, когда результат каждого из многих проводимых опытов заранее предугадать невозможно, однако можно исследовать закономерности, возникающие при проведении серии опытов. Нельзя, например, точно сказать, какая сторона монеты окажется сверху при данном броске: герб или цифра – но при большом количестве бросков число выпадений герба приближается к половине количества бросков; нельзя заранее предсказать результат одного выстрела из данного орудия по данной цели, но при большом числе выстрелов частота попадания прибли-жается к некоторому постоянному числу. Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет предмет теории вероятностей.

Основным интуитивным понятием классической теории вероятностей является случайное событие. События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:

а) достоверное событие – событие, которое всегда происходит при проведении опыта;

б) невозможное событие – событие, которое в результате опыта произойти не может;

в) случайное событие – событие, которое может либо произойти, либо не произойти.

Алгебра событий.

Определение 1.1. Суммой A+B двух событий A и B называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B. Суммой нескольких событий, соответ-ственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Назовем все возможные результаты данного опыта его *исходами* и предположим, что множество этих исходов, при которых происходит событие A (исходов, *благоприятных* событию A), можно представить в виде некоторой области на плоскости. Тогда множество исходов, при которых произойдет событие A+B, является объединением множеств исходов, благоприятных событиям A или B.

Определение 1.2. Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B. Аналогично произведением нескольких событий называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.

Определение 1.3. Разностью A\B событий A и B называется событие, состоящее в том, что A произошло, а B – нет.

Определение 1.4. События A и B называются совместными, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае (то есть если они не могут произойти одновременно) события называются несовместными.

Замечание 1. Если изобразить графически области исходов опыта, благоприятных несовместным событиям, то они не будут иметь общих точек.

Замечание 2. Из определения несовместных событий следует, что их произведение является невозможным событием.

Определение 1.5. Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из событий этой группы.

Замечание. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта произойдет *одно и только одно* из них. Такие события называют элементарными событиями.

Определение 1.6. События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое.

Классическое определение вероятности.

При изучении случайных событий возникает необходимость количественно сравнивать возможность их появления в результате опыта. Например, при последовательном извлечении из колоды пяти карт более возможна ситуация, когда появились карты разных мастей, чем появление пяти карт одной масти; при десяти бросках монеты более возможно чередование гербов и цифр, нежели выпадение подряд десяти гербов, и т.д. Поэтому с каждым таким событием связывают по определенному правилу некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Это число называется вероятностью события и является вторым основным понятием теории вероятностей.

Отметим, что само понятие вероятности, как и понятие случайного события, является аксиоматическим и поэтому не поддается строгому определению. То, что в дальнейшем будет называться различными определениями вероятности, представляет собой способы вычисления этой величины.

Определение 1.7. Если все события, которые могут произойти в результате данного опыта,

а) попарно несовместны;

б) равновозможны;

в) образуют полную группу,

то говорят, что имеет место схема случаев.

Можно считать, что случаи представляют собой все множество исходов опыта. Пусть их число равно n (число возможных исходов), а при m из них происходит некоторое событие А (число благоприятных исходов).

Определение 1.8. Вероятностью события А называется отношение числа исходов опыта, благоприятных этому событию, к числу возможных исходов:

$$p(A) = \frac{m}{n} \quad - \tag{1.1}$$

- *классическое определение вероятности.*

Свойства вероятности.

Из определения 1.8 вытекают следующие свойства вероятности:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Доказательство. Так как достоверное событие всегда происходит в результате опыта, то все исходы этого опыта являются для него благоприятными, то есть $m = n$, следовательно,

$P(A) = 1$.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство. Для невозможного события ни один исход опыта не является благоприятным, поэтому $m = 0$ и $p(A) = 0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Доказательство. Случайное событие происходит при некоторых исходах опыта, но не при всех, следовательно, $0 < m < n$, и из (1.1) следует, что $0<p(A)<1$.

Относительная частота. Статистическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности применимо только для очень узкого класса задач, где все возможные исходы опыта можно свести к схеме случаев. В большинстве реальных задач эта схема неприменима. В таких ситуациях требуется определять вероятность события иным образом. Для этого введем вначале понятие относительной частоты W(A) события А как отношения числа опытов, в которых наблюдалось событие А, к общему количеству проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{M}{N}, \tag{1.2}$$

где N – общее число опытов, M – число появлений события A.

Большое количество экспериментов показало, что если опыты проводятся в одинаковых условиях, то для большого количества испытаний относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число можно считать вероятностью рассматриваемого события.

Определение 1.9. Статистической вероятностью события считают его относительную частоту или число, близкое к ней.

Замечание 1. Из формулы (1.2) следует, что свойства вероятности, доказанные для ее классического определения, справедливы и для статистического определения вероятности.

Замечание 2. Для существования статистической вероятности события A требуется:

1) возможность производить неограниченное число испытаний;
2) устойчивость относительных частот появления A в различных сериях достаточно большого числа опытов.

Замечание 3. Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Основные формулы комбинаторики.

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы *комбинаторики* – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества. Определим основные такие комбинации.

Определение 1.10. Перестановки – это комбинации, составленные из всех n элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n! \tag{1.3}$$

Определение 1.11. Размещения – комбинации из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1). \qquad (1.4)$$

Определение 1.12. Сочетания – неупорядоченные наборы из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов). Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.5)$$

Лекция 2.

Геометрические вероятности. Теорема сложения вероятностей. Противоположные события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Вероятность появления хотя бы одного события.

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. В таких случаях можно воспользоваться понятием геометрической вероятности.

Пусть на отрезок *L* наудачу брошена точка. Это означает, что точка обязательно попадет на отрезок *L* и с равной возможностью может совпасть с любой точкой этого отрезка. При этом вероятность попадания точки на любую часть отрезка *L* не зависит от расположения этой части на отрезке и пропорциональна его длине. Тогда вероятность того, что брошенная точка попадет на отрезок *l*, являющийся частью отрезка *L*, вычисляется по формуле:

$$p = \frac{l}{L}, \qquad (2.1)$$

где *l* – длина отрезка *l*, а *L* – длина отрезка *L*.

Можно дать аналогичную постановку задачи для точки, брошенной на плоскую область *S* и вероятности того, что она попадет на часть этой области *s*:

$$p = \frac{s}{S}, \qquad (2.1`)$$

где s – площадь части области, а S – площадь всей области.

В трехмерном случае вероятность того, что точка, случайным образом расположенная в теле V, попадет в его часть v, задается формулой:

$$p = \frac{v}{V}, \qquad (2.1``)$$

где v – объем части тела, а V – объем всего тела.

Теорема сложения вероятностей.

Теорема 2.1 (теорема сложения). Вероятность $p(A + B)$ суммы событий A и B равна

$$P(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB). \qquad (2.2)$$

Доказательство.

Докажем теорему сложения для схемы случаев. Пусть n – число возможных исходов опыта, m_A – число исходов, благоприятных событию A, m_B – число исходов, благопри-ятных событию B, а m_{AB} – число исходов опыта, при которых происходят оба события (то есть исходов, благоприятных произведению AB). Тогда число исходов, при которых имеет место событие $A + B$, равно $m_A + m_B - m_{AB}$ (так как в сумме $(m_A + m_B)$ m_{AB} учтено дважды: как исходы, благоприятные A, и исходы, благоприятные B). Следовательно, вероятность суммы можно определить по формуле (1.1):

$$p(A+B) = \frac{m_A + m_B - m_{AB}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n} = p(A) + p(B) - p(AB),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Теорему 2.1 можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий A, B и C

$$P(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC) \qquad (2.3)$$

и т.д.

Следствие 2. Если события A и B несовместны, то $m_{AB} = 0$, и, следовательно, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = p(A) + p(B). \qquad (2.4)$$

Определение 2.1. Противоположными событиями называют два несовместных события, образующих полную группу. Если одно из них назвать A, то второе принято обозначать $\bar{A}$.

Замечание. Таким образом, $\bar{A}$ заключается в том, что событие A не произошло.

Теорема 2.2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1. \qquad (2.5)$$

Доказательство.

Так как A и $\bar{A}$ образуют полную группу, то одно из них обязательно произойдет в результате опыта, то есть событие $A + \bar{A}$ является достоверным. Следовательно,

$P(A + \bar{A}) = 1$. Но, так как A и $\bar{A}$ несовместны, из (2.4) следует, что $P(A + \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$. Значит, $p(A) + p(\bar{A}) = 1$, что и требовалось доказать.

Замечание. В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле (2.5).

Теорема умножения вероятностей.

Определение 2.2. Назовем условной вероятностью $p(B/A)$ события B вероятность события B при условии, что событие A произошло.

Замечание. Понятие условной вероятности используется в основном в случаях, когда осуществление события A изменяет вероятность события B.

Теорема 2.3 (теорема умножения). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A). \qquad (2.6)$$

Доказательство.

Воспользуемся обозначениями теоремы 2.1. Тогда для вычисления $p(B/A)$ множеством возможных исходов нужно считать m_A (так как A произошло), а множеством благоприятных исходов – те, при которых произошли и A, и B (m_{AB}). Следовательно,

$p(B/A) = \frac{m_{AB}}{m_A} = \frac{m_{AB}}{n} \cdot \frac{n}{m_A} = p(AB):p(A)$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. Если подобным образом вычислить вероятность события BA, совпадающего с событием AB, то получим, что $p\,(BA) = p\,(B) \cdot p\,(A/B)$. Следовательно,

$$p\,(A) \cdot p\,(B/A) = p\,(B) \cdot p\,(A/B). \qquad (2.7)$$

Определение 2.3. Событие B называется независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, то есть $p\,(B/A) = p\,(B)$.

Замечание. Если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. Действительно, из (2.7) следует при этом, что $p\,(A) \cdot p\,(B) = p\,(B) \cdot p\,(A/B)$, откуда $p\,(A/B) = p\,(A)$. Значит, свойство независимости событий взаимно.

Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

$$p\,(AB) = p\,(A) \cdot p\,(B)\,, \qquad (2.8)$$

то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

При решении задач теоремы сложения и умножения обычно применяются вместе.

Вероятность появления хотя бы одного события.

Теорема 2.4. Вероятность появления хотя бы одного из попарно независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна

$$p\,(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n\,, \qquad (2.9)$$

где q_i – вероятность события $\overline{A_i}$, противоположного событию A_i.

Доказательство.

Если событие A заключается в появлении хотя бы одного события из A_1, $A_2, \ldots, A_n$, то события A и $\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}$ противоположны, поэтому по теореме 2.2 сумма их вероятностей равна 1. Кроме того, поскольку $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то независимы и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$, следовательно, $p(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = p(\overline{A_1})p(\overline{A_2}) \ldots p(\overline{A_n}) = q_1 q_2 \ldots q_n$. Отсюда следует справедливость формулы (2.9).

Лекция 3.

Формула полной вероятности и формула Байеса. Схема и формула Бернулли. Приближение Пуассона для схемы Бернулли.

Определение 3.1. Пусть событие A может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Тогда события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются гипотезами.

Теорема 3.1. Вероятность события A, наступающего совместно с гипотезами $H_1, H_2, \ldots, H_n$, равна:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)p(A/H_i), \qquad (3.1)$$

где $p(H_i)$ – вероятность i- й гипотезы, а $p(A/H_i)$ – вероятность события A при условии реализации этой гипотезы. Формула (3.1) носит название формулы полной вероятности.

Доказательство.

Можно считать событие A суммой попарно несовместных событий AH_1, $AH_2, \ldots, AH_n$. Тогда из теорем сложения и умножения следует, что

$$p(A) = p(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = p(AH_1) + p(AH_2) + \ldots + p(AH_n) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)p(A/H_i),$$

что и требовалось доказать.

Формула Байеса (теорема гипотез).

Пусть известен результат опыта, а именно то, что произошло событие A. Этот факт может изменить априорные (то есть известные до опыта) вероятности гипотез. Например, в предыдущем примере извлечение из урны белого шара говорит о том, что этой урной не могла быть третья, в которой нет белых шаров, то есть $p\ (H_3/A) = 0$. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется формула Байеса:

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(A)}. \qquad (3.2)$$

Действительно, из (2.7) получим, что $p(A)p(H_i / A) = p(H_i)p(A/H_i)$, откуда следует справедливость формулы (3.2).

Схема повторения испытаний. Формула Бернулли.

Рассмотрим серию из *n* испытаний, в каждом из которых событие *А* появляется с одной и той же вероятностью *р*, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется схемой повторения испытаний. Найдем вероятность того, что в такой серии событие *А* произойдет ровно *к* раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равно-вероятных несовместных событий, заключающихся в том, что *А* произошло в некоторых *к* испытаниях и не произошло в остальных $n-к$ испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из *п* по *к*, то есть $C_n^к$, а вероятность каждого из них: $p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте *А* не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим формулу Бернулли:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{3.3}$$

Приближение Пуассона для схемы Бернулли.

Формула Бернулли требует громоздких расчетов при большом количестве испытаний. Можно получить более удобную для расчетов приближенную формулу, если при большом числе испытаний вероятность появления *А* в одном опыте мала, а произведение $np = \lambda$ сохраняет постоянное значение для разных серий опытов (то есть среднее число появле-ний события *А* в разных сериях испытаний остается неизменным). Применим формулу Бернулли:

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Найдем предел полученного выражения при $n \to \infty$:

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right) = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot 1.$$

Таким образом, формула Пуассона

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{3.4}$$

позволяет найти вероятность *к* появлений события *А* для массовых (*п* велико) и редких (*р* мало) событий.

Лекция 4.

Случайные величины. Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется и более удобное понятие *случайной величины*.

Определение 4.1. Случайной величиной называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита (X, Y,Z,…), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами (x_i, y_i,…).

Примеры: число очков, выпавших при броске игральной кости; число появлений герба при 10 бросках монеты; число выстрелов до первого попадания в цель; расстояние от центра мишени до пробоины при попадании.

Можно заметить, что множество возможных значений для перечисленных случайных величин имеет разный вид: для первых двух величин оно конечно (соответственно 6 и 11 значений), для третьей величины множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел, а для четвертой – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени. Таким образом, для первых трех величин множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для четвертой оно представляет собой непрерывную область. По этому показателю случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.

Определение 4.2. Случайная величина называется дискретной, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Определение 4.3. Случайная величина называется непрерывной, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Дискретные случайные величины.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется законом распределения случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Заметим, что событие, заключающееся в том, что случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным, поэтому

$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1.$

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде многоугольника распределения – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).

Функция распределения.

Определение 4.4. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x:

$$F(x) = p(X < x). \tag{4.1}$$

Свойства функции распределения.

1) $0 \le F(x) \le 1$.

   Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность.

2) Функция распределения является неубывающей функцией, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Это следует из того, что $F(x_2) = p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \le X < x_2) \ge F(x_1)$.

3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. В частности, если все возможные значения X лежат на интервале $[a, b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$. Действительно, $X < a$ – событие невозможное, а $X < b$ – достоверное.

4) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a, b]$, равна разности значений функции распределения на концах интервала:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Справедливость этого утверждения следует из определения функции распределения (см. свойство 2).

Для дискретной случайной величины значение $F(x)$ в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции.

Вернемся к схеме независимых испытаний и найдем закон распределения случайной величины X – числа появлений события A в серии из n испытаний. Возможные значения A: 0, 1, …, n. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (4.2)$$

(p – вероятность появления A в каждом испытании).

Такой закон распределения называют биномиальным, поскольку правую часть равенства (4.2) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона: $$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Распределение Пуассона.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую только целые неотрицательные значения (0, 1, 2,…, m,…), последовательность которых не ограничена. Такая случайная величина называется распределенной по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет значение m, выражается формулой:

$$p(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad (4.3)$$

где a – некоторая положительная величина, называемая *параметром* закона Пуассона.

Покажем, что сумма всех вероятностей равна 1:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(X = m) = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!} = e^{-a}\cdot e^{a} = 1$$

(использовано разложение в ряд Тейлора функции e^x).

Рассмотрим типичную задачу, приводящую к распределению Пуассона. Пусть на оси абсцисс случайным образом распределяются точки, причем их распределение удовлетворяет следующим условиям:

1) вероятность попадания некоторого количества точек на отрезок длины l зависит только от длины отрезка и не зависит от его расположения на оси (то есть точки распределены с одинаковой средней плотностью);
2) точки распределяются независимо друг от друга (вероятность попадания какого-либо числа точек на данный отрезок не зависит от количества точек, попавший на любой другой отрезок);
3) практическая невозможность совпадения двух или более точек.

Тогда случайная величина X – число точек, попадающих на отрезок длины l – распределена по закону Пуассона, где a – среднее число точек, приходящееся на отрезок длины l.

Замечание. В лекции 3 говорилось о том, что формула Пуассона выражает биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события. Поэтому закон Пуассона часто называют *законом редких явлений*.

Лекция 5.

Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Равномерное распределение вероятностей.

Определение и свойства функции распределения сохраняются и для непрерывной случайной величины, для которой функцию распределения можно считать одним из видов задания закона распределения. Но для непрерывной случайной величины вероятность каждого отдельного ее значения равна 0. Это следует из свойства 4 функции распределения: $p(X = a) = F(a) - F(a) = 0$. Поэтому для такой случайной величины имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал.

Вторым способом задания закона распределения непрерывной случайной величины является так называемая плотность распределения (плотность вероятности, дифферен-циальная функция).

Определение 5.1. Функция $f(x)$, называемая плотностью распределения непрерывной случайной величины, определяется по формуле:

$$f(x) = F'(x), \tag{5.1}$$

то есть является производной функции распределения.

Свойства плотности распределения.

1) $f(x) \geq 0$, так как функция распределения является неубывающей.

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, что следует из определения плотности распределения.

3) Вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) определяется формулой $p(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$

Действительно, $p(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки). Его справедливость следует из того, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

5) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$ так как $F(x) \to const$ при $x \to \pm\infty$.

Таким образом, график плотности распределения представляет собой кривую, располо-женную выше оси Оx, причем эта ось является ее горизонтальной асимптотой при $x \to \pm\infty$ (последнее справедливо только для случайных величин, множеством возможных значений которых является все множество действительных чисел). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, равна единице.

Замечание. Если все возможные значения непрерывной случайной величины сосредоточе-ны на интервале [a, b], то все интегралы вычисляются в этих пределах, а вне интервала [a, b] $f(x) \equiv 0$.

Равномерный закон распределения.

Часто на практике мы имеем дело со случайными величинами, распределенными определенным типовым образом, то есть такими, закон распределения которых имеет некоторую стандартную форму. В прошлой лекции были рассмотрены примеры таких законов распределения для дискретных случайных величин (биномиальный и Пуассона). Для непрерывных случайных величин тоже существуют часто встречающиеся виды закона распределения, и в качестве первого из них рассмотрим равномерный закон.

Определение 5.2. Закон распределения непрерывной случайной величины называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение ($f(x)$ = const при $a \le x \le b$, $f(x) = 0$ при $x < a$, $x > b$.

Найдем значение, которое принимает $f(x)$ при $x \in [a,b]$. Из условия нормировки следует, что $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c dx = c(b-a) = 1$, откуда $f(x) = c = \frac{1}{b-a}$.

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на интервал $[\alpha, \beta]$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$ равна при этом $\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Вид функции распределения для нормального закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Лекция 6.

Нормальный закон распределения вероятностей. Нормальная кривая. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания в заданный интер-

вал нормальной случайной величины. Правило трех сигм. Показательное распределение. Функция надежности. Показательный закон надежности.

Определение 6.1. Непрерывная случайная величина называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{6.1}$$

Замечание. Таким образом, нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ.

График плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса). Выясним, какой вид имеет эта кривая, для чего исследуем функцию (6.1).

1) Область определения этой функции: (-∞, +∞).
2) $f(x) > 0$ при любом x (следовательно, весь график расположен выше оси Оx).
3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0,$ то есть ось Оx служит горизонтальной асимптотой графика при $x \to \pm\infty$.
4) $f'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0$ при $x = a$; $f'(x) > 0$ при $x > a$, $f'(x) < 0$ при $x < a$. Следовательно, $\left(a, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ - точка максимума.
5) $F(x - a) = f(a - x)$, то есть график симметричен относительно прямой $x = a$.
6) $f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) = 0$ при $x = a \pm \sigma$, то есть точки $\left(a \pm \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ являются точками перегиба.

Найдем вид функции распределения для нормального закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{6.2}$$

Перед нами так называемый «неберущийся» интеграл, который невозможно выразить через элементарные функции. Поэтому для вычисления значений $F(x)$ приходится пользоваться таблицами. Они составлены для случая, когда $a = 0$, а $\sigma = 1$.

Определение 6.2. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется нормированным, а его функция распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad - \tag{6.3}$$

- функцией Лапласа.

Замечание. Функцию распределения для произвольных параметров можно выразить через функцию Лапласа, если сделать замену: $t = \frac{x-a}{\sigma}$, тогда

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot$$

Найдем вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный интервал:

$$p(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \tag{6.4}$$

Правило «трех сигм».

Найдем вероятность того, что нормально распределенная случайная величина примет значение из интервала $(a - 3\sigma,\ a + 3\sigma)$:

$$p(a - 3\sigma < x < a + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}9986 - 0{,}0014 = 0.9973.$$

Следовательно, вероятность того, что значение случайной величины окажется *вне* этого интервала, равна 0,0027, то есть составляет 0,27% и может считаться пренебрежимо малой. Таким образом, на практике можно считать, что *все* возможные значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале $(a - 3\sigma,\ \ a + 3\sigma)$.

Полученный результат позволяет сформулировать правило «трех сигм»: *если случайная величина распределена нормально, то модуль ее отклонения от $x = a$ не превосходит 3σ.*

Показательное распределение.

Определение 6.3. Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \qquad (6.5)$$

В отличие от нормального распределения, показательный закон определяется только одним параметром λ. В этом его преимущество, так как обычно параметры распределения заранее не известны и их приходится оценивать приближенно. Понятно, что оценить один параметр проще, чем несколько.

Найдем функцию распределения показательного закона:

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \lambda \int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Теперь можно найти вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в интервал (a, b):

$$p(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (6.7)$$

Значения функции e^{-x} можно найти из таблиц.

Функция надежности.

Пусть *элемент* (то есть некоторое устройство) начинает работать в момент времени $t_0 = 0$ и должен проработать в течение периода времени t. Обозначим за T непрерывную случайную величину – время безотказной работы элемента, тогда функция $F(t) = p(T > t)$ определяет вероятность отказа за время t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время равна

$$R(t) = p(T > t) = 1 - F(t). \qquad (6.8)$$

Эта функция называется функцией надежности.

Показательный закон надежности.

Часто длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение, то есть

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} .$$

Следовательно, функция надежности в этом случае имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} .$$

Определение 6.4. Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством

$$R(t) = e^{-\lambda t} , \tag{6.9}$$

где λ – интенсивность отказов.

Лекция 7.

Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Их свойства и примеры.

Закон распределения (функция распределения и ряд распределения или плотность вероятности) полностью описывают поведение случайной величины. Но в ряде задач доста-точно знать некоторые числовые характеристики исследуемой величины (например, ее среднее значение и возможное отклонение от него), чтобы ответить на поставленный во-прос. Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическое ожидание.

Определение 7.1. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называ-ется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n\,. \qquad (7.1)$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то

$M(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, если полученный ряд сходится абсолютно.

Замечание 1. Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание 2. Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Замечание 3. Математическое ожидание дискретной случайной величины есть *неслучайная* (постоянная) величина. В дальнейшем увидим, что это же справедливо и для непрерывных случайных величин.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C. \qquad (7.2)$$

Доказательство. Если рассматривать C как дискретную случайную величину, принимающую только одно значение C с вероятностью $p = 1$, то $M(C) = C{\cdot}1 = C$.

2) Постоянный множитель можно выносит за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C\,M(X). \tag{7.3}$$

Определение 7.2. Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины зависимы.

Определение 7.3. Назовем произведением независимых случайных величин X и Y случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям всех возможных значений X на все возможные значения Y, а соответствующие им вероятности равны произведениям вероятностей сомножителей.

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y). \tag{7.4}$$

Доказательство. Для упрощения вычислений ограничимся случаем, когда X и Y принимают только по два возможных значения:

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

y_i	y_1	y_2
g_i	g_1	g_2

Тогда ряд распределения для XY выглядит так:

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
p	p_1g_1	p_2g_1	p_1g_2	p_2g_2

Следовательно, $M(XY) = x_1y_1{\cdot}p_1g_1 + x_2y_1{\cdot}p_2g_1 + x_1y_2{\cdot}p_1g_2 + x_2y_2{\cdot}p_2g_2 = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + \quad + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) = (y_1g_1 + y_2g_2)\,(x_1p_1 + x_2p_2) = M(X){\cdot}M(Y)$.

Замечание 1. Аналогично можно доказать это свойство для большего количества возможных значений сомножителей.

Замечание 2. Свойство 3 справедливо для произведения любого числа независимых случайных величин, что доказывается методом математической индукции.

Определение 7.4. Определим сумму случайных величин X и Y как случайную величину $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности таких сумм равны произведениям вероятностей слагаемых (для зависимых случайных величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго).

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\,(X + Y) = M\,(X) + M\,(Y). \qquad (7.5)$$

Доказательство.

Вновь рассмотрим случайные величины, заданные рядами распределения, приведенными при доказательстве свойства 3. Тогда возможными значениями $X + Y$ являются $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$, $x_2 + y_2$. Обозначим их вероятности соответственно как p_{11}, p_{12}, p_{21} и p_{22}. Найдем $M(\,X+Y\,) = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} =$

$$= x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}).$$

Докажем, что $p_{11} + p_{22} = p_1$. Действительно, событие, состоящее в том, что $X + Y$ примет значения $x_1 + y_1$ или $x_1 + y_2$ и вероятность которого равна $p_{11} + p_{22}$, совпадает с событием, заключающемся в том, что $X = x_1$ (его вероятность – p_1). Аналогично дока-зывается, что $p_{21} + p_{22} = p_2$, $p_{11} + p_{21} = g_1$, $p_{12} + p_{22} = g_2$. Значит,

$$M(X + Y) = x_1p_1 + x_2p_2 + y_1g_1 + y_2g_2 = M\,(X) + M\,(Y).$$

Замечание. Из свойства 4 следует, что сумма любого числа случайных величин равна сумме математических ожиданий слагаемых.

Дисперсия.

Наряду с математическим ожиданием желательно знать, насколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

Определение 7.5. Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\,(X - M(X))^2. \tag{7.6}$$

Замечание 1. В определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего, а его квадрат. Это сделано для того, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.

Замечание 2. Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Замечание 3. Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии, справедливость которой доказывается в следующей теореме:

Теорема 7.1. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$. (7.7)

Доказательство.

Используя то, что $M(X)$ – постоянная величина, и свойства математического ожидания, преобразуем формулу (7.6) к виду:

$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) =$

$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$, что и требовалось доказать.

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D\,(C) = 0. \tag{7.8}$$

Доказательство. $D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X). \tag{7.9}$$

Доказательство. $D(CX) = M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) = M(C^2(X - M(X))^2) = C^2 D(X)$.

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \qquad (7.10)$$

Доказательство. $D(X + Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = M(X^2) + 2M(X)M(Y) +$

$+ M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) = (M(X^2) - M^2(X)) + (M(Y^2) - M^2(Y)) = D(X) + D(Y).$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y). \qquad (7.11)$$

Доказательство. $D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2D(Y) = D(X) + D(X).$

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

Определение 7.6. Средним квадратическим отклонением σ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,. \qquad (7.12)$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Распространим определения числовых характеристик случайных величин на непре-рывные случайные величины, для которых плотность распределения служит в некото-ром роде аналогом понятия вероятности.

Определение 7.7. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \qquad (7.13)$$

Замечание 1. Общее определение дисперсии сохраняется для непрерывной случайной величины таким же, как и для дискретной (опр. 7.5), а формула для ее вычисления имеет вид:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X). \tag{7.14}$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле (7.12).

Замечание 2. Если все возможные значения непрерывной случайной величины не выходят за пределы интервала [a, b], то интегралы в формулах (7.13) и (7.14) вычисля-ются в этих пределах.

Числовые характеристики случайных величин, имеющих некоторые стандартные законы распределения.

1. Биномиальное распределение.

Для дискретной случайной величины X, представляющей собой число появлений события A в серии из n независимых испытаний (см. лекцию 6), $M(X)$ можно найти, используя свойство 4 математического ожидания. Пусть X_1 – число появлений A в первом испытании, X_2 – во втором и т.д. При этом каждая из случайных величин X_i задается рядом распределения вида

X_i	0	1
p_i	q	p

Следовательно, $M(X_i) = p$. Тогда $M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$

Аналогичным образом вычислим дисперсию: $D(X_i) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$, откуда по свойству 4 дисперсии $D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1 - p) = npq.$

2. Закон Пуассона.

Если $p(X = m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$, то $M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m}{m!}e^{-a} = ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = ae^{-a}e^{a} = a$ (использо-валось разложение в ряд Тейлора функции e^x).

Для определения дисперсии найдем вначале $M(X^2) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2\frac{a^m}{m!}e^{-a} = a\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a} =$

$$= a\sum_{m=1}^{\infty}\left((m-1)+1\right)\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a} = a\left(\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}\right) = a(a+1).$$

Поэтому $D(X) = a^2 + a - a^2 = a$.

Замечание. Таким образом, обнаружено интересное свойство распределения Пуассона: математическое ожидание равно дисперсии (и равно единственному параметру a, определяющему распределение).

3. Равномерное распределение.

Для равномерно распределенной на отрезке $[a,\ b]$ непрерывной случайной величины $M(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$, то есть математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины равно абсциссе середины отрезка $[a,\ b]$.

Дисперсия

$$D(X) = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}.$$

4. Нормальное распределение.

Для вычисления математического ожидания нормально распределенной случайной величины воспользуемся тем, что *интеграл Пуассона* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{2\pi}$.

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = (z = \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma z + a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = a$ (первое слагаемое равно 0, так как подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля).

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=(u=z,dv=ze^{-\frac{z^2}{2}})=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-0+\sqrt{2\pi}\right)=\sigma^2.$$

Следовательно, параметры нормального распределения (a и σ) равны соответственно математическому ожиданию и среднему квадратическому отклонению исследуемой случайной величины.

Лекция 8.

Некоторые числовые характеристики одномерных случайных величин: начальные и центральные моменты, мода, медиана, квантиль, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Определение 8.1. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k). \tag{8.1}$$

В частности, $\nu_1 = M(X)$, $\nu_2 = M(X^2)$. Следовательно, дисперсия $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Определение 8.2. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется мате-матическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M((X - M(X))^k). \tag{8.2}$$

В частности, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$, $\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X)$.

Можно получить соотношения, связывающие начальные и центральные моменты:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2,\ \ \mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^2,\ \ \mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4.$$

Мода и медиана.

Такая характеристика случайной величины, как математическое ожидание, называется иногда *характеристикой положения*, так как она дает представление о положении случайной величии-ны на числовой оси. Другими характеристиками положения являются мода и медиана.

Определение 8.3. Модой M дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, модой M непрерывной случайной величины – значение, в котором плотность вероятности максимальна.

Замечание 1. Если кривая распределения имеет больше одного максимума, распределение называется полимодальным, если эта кривая не имеет максимума, но имеет минимум – антимодальным.

Замечание 2. В общем случае мода и математическое ожидание не совпадают. Но, если распре-деление является симметричным и модальным (то есть кривая распределения симметрична от-носительно прямой $x = M$) и имеет математическое ожидание, оно совпадает с модой.

Определение 8.4. Медианой Me непрерывной случайной величины называют такое ее значение, для которого

$$p(X < Me) = p(X > Me). \tag{8.3}$$

Графически прямая $x = Me$ делит площадь фигуры, ограниченной кривой распределения, на две равные части.

Замечание. Для симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

Определение 8.5. Для случайной величины X с функцией распределения $F(X)$ квантилью порядка p $(0 < p < 1)$ называется число K_p такое, что $F(K_p) \le p$, $F(K_p + 0) \ge p$. В частности, если $F(X)$ строго монотонна, K_p: $F(K_p) = p$.

Асимметрия и эксцесс.

Если распределение не является симметричным, можно оценить асимметрию кривой распределения с помощью центрального момента 3-го порядка. Действительно, для симметричного распределения все нечетные центральные моменты равны 0 (как интегралы от нечетных функций в симметричных пределах), поэтому выбран нечетный момент наименьшего порядка, не тождественно равный 0. Чтобы получить безразмерную характеристику, его делят на σ^3 (так как μ_3 имеет размерность куба случайной величины).

Определение 8.6. Коэффициентом асимметрии случайной величины называется

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad . \tag{8.4}$$

Для оценки поведения кривой распределения вблизи точки максимума (для определения того, насколько «крутой» будет его вершина) применяется центральный момент 4-го порядка.

Определение 8.7. Эксцессом случайной величины называется величина

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{8.5}$$

Замечание. Можно показать, что для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, и, соответственно, $Ex = 0$. Для кривых с более острой вершиной $Ex > 0$, в случае более плоской вершины $Ex < 0$.

Лекция 9.

Распределения «хи-квадрат», Стьюдента и Фишера. Связь этих распределений с нормальным распределением.

Рассмотрим некоторые распределения, связанные с нормальным и широко применяющиеся в математической статистике.

Распределение «хи-квадрат».

Пусть имеется несколько нормированных нормально распределенных случайных величин: $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($a_i = 0$, $\sigma_i = 1$). Тогда сумма их квадратов

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{9.1}$$

является случайной величиной, распределенной по так называемому закону «хи-квадрат» с $k = n$ степенями свободы; если же слагаемые связаны каким-либо соотношением (например, $\sum X_i = n\overline{X}$), то число степеней свободы $k = n - 1$.

Плотность этого распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, \ x > 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Здесь $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция; в частности, $\Gamma(n+1) = n!$.

Следовательно, распределение «хи-квадрат» определяется одним параметром – числом степеней свободы k.

Замечание 1. С увеличением числа степеней свободы распределение «хи-квадрат» постепенно приближается к нормальному.

Замечание 2. С помощью распределения «хи-квадрат» определяются многие другие распределения, встречающиеся на практике, например, распределение случайной величины $\sqrt{\chi^2}$ - длины случайного вектора (X_1, X_2,…, X_n), координаты которого независимы и распределены по нормальному закону.

Распределение Стьюдента.

Рассмотрим две независимые случайные величины: Z, имеющую нормальное распределение и нормированную (то есть $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$), и V, распределенную по закону «хи-квадрат» с k степенями свободы. Тогда величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \tag{9.3}$$

имеет распределение, называемое t – распределением или распределением Стьюдента с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

Распределение F Фишера – Снедекора.

Рассмотрим две независимые случайные величины U и V, распределенные по закону «хи-квадрат» со степенями свободы k_1 и k_2 и образуем из них новую величину

$$F = \frac{U / k_1}{V / k_2}. \tag{9.4}$$

Ее распределение называют распределением F Фишера – Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2. Плотность его распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 0; \\ C_0\dfrac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2+k_1x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad x>0, \end{cases} \qquad (9.5)$$

где $C_0=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}$. Таким образом, распределение Фишера определяется двумя параметрами – числами степеней свободы.

Изучение статистических закономерностей позволило установить, что при некоторых условиях суммарное поведение большого количества случайных величин почти утрачи-вает случайный характер и становится закономерным (иначе говоря, случайные отклоне-ния от некоторого среднего поведения взаимно погашаются). В частности, если влияние на сумму отдельных слагаемых является равномерно малым, закон распределения суммы приближается к нормальному. Математическая формулировка этого утверждения дается в группе теорем, называемой законом больших чисел.

Неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева, используемое для доказательства дальнейших теорем, справед-ливо как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Докажем его для дискретных случайных величин.

Теорема 9.1(неравенство Чебышева). $p(\,|X-M(X)|<\varepsilon\,)\ge D(X)/\varepsilon^2$. (9.6)

Теоремы Чебышева и Бернулли.

Теорема 9.2 (теорема Чебышева). Если $X_1, X_2,\dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, дисперсии которых равномерно ограничены ($D(X_i)\le C$), то для сколь угодно малого числа ε вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

будет сколь угодно близка к 1, если число случайных величин достаточно велико.

Замечание. Иначе говоря, при выполнении этих условий

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Следствие.

Если X_1, X_2, …, X_n – попарно независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями, имеющие одинаковое математическое ожидание, равное a, то для любого сколь угодно малого ε > 0 вероятность неравенства $\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon$ будет как угодно близка к 1, если число случайных величин достаточно велико. Иначе говоря, $\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$.

Вывод: среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин принимает значения, близкие к сумме их математических ожиданий, то есть утрачивает характер случайной величины. Например, если проводится серия измерений какой-либо физической величины, причем: а) результат каждого измерения не зависит от результатов остальных, то есть все результаты представляют собой попарно независимые случайные величины; б) измерения производятся без систематических ошибок (их математические ожидания равны между собой и равны истинному значению a измеряемой величины); в) обеспечена определенная точность измерений, следовательно, дисперсии рассматриваемых случайных величин равномерно ограничены; то при достаточно большом числе измерений их среднее арифметическое окажется сколь угодно близким к истинному значению измеряемой величины.

Теорема Бернулли.

Теорема 9.3 (теорема Бернулли). Если в каждом из n независимых опытов вероятность p появления события A постоянна, то при достаточно большом числе испытаний вероятность того, что модуль отклонения относительной частоты появлений A в n опытах от p будет сколь угодно малым, как угодно близка к 1:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (9.7)$$

Замечание. Из теоремы Бернулли *не следует*, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}=p.$ Речь идет лишь о *вероятности* того, что разность относительной частоты и вероятности по модулю может стать сколь угодно малой. Разница заключается в следующем: при обычной сходимости, рассматриваемой в математическом анализе, для всех *n*, начиная с некоторого значения, неравенство $\left|\dfrac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ выполняется всегда; в нашем случае могут найтись такие значения *n*, при которых это неравенство неверно. Этот вид сходимости называют сходимостью по вероятности.

Лекция 10.

Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд, статистический ряд. Группированная выборка. Группированный статистический ряд. Полигон частот. Выборочная функция распределения и гистограмма.

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической статистики являются:

- определение способов сбора и группировки этих статистических данных;

- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности N и объем выборки n – число объектов в рассматривае-мой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Замечание. Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведе-нии интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правиль-но представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была репрезентативной (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Первичная обработка результатов.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n,$ где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2,\dots, x_к$ называют вариантами, а n_1, n_2,…, $n_к$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим относительные частоты $w_i = \frac{n_i}{n}.$ Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом:

x_i	x_1	x_2	…	x_k

n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h, а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Составленная по этим результатам таблица называется группированным статистическим рядом:

Номера интервалов	1	2	…	k
Границы интервалов	$(a, a + h)$	$(a + h, a + 2h)$	…	$(b - h, b)$
Сумма частот вариант, попавших в интервал	n_1	n_2	…	n_k

Полигон частот. Выборочная функция распределения и гистограмма.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот.

По аналогии с функцией распределения случайной величины можно задать некоторую функцию, относительную частоту события $X < x$.

Определение 15.1. Выборочной (эмпирической) функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Таким образом,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \qquad (10.1)$$

где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Замечание. В отличие от эмпирической функции распределения, найденной опытным путем, функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ – его относительную частоту. При достаточно больших n, как следует из теоремы Бернулли, $F^*(x)$ стремится по вероятности к $F(x)$.

Из определения эмпирической функции распределения видно, что ее свойства совпадают со свойствами $F(x)$, а именно:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$.
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3) Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

Для непрерывного признака графической иллюстрацией служит гистограмма, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высотами – отрезки длиной n_i/h (гистограмма частот) или w_i/h (гистограмма относительных частот). В первом случае площадь гистограммы равна объему выборки, во втором – единице.

Лекция 11.

Числовые характеристики статистического распределения: выборочное среднее, оценки дисперсии, оценки моды и медианы, оценки начальных и центральных моментов.

Одна из задач математической статистики: по имеющейся выборке оценить значения числовых характеристик исследуемой случайной величины.

Определение 11.1. Выборочным средним называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_ix_i}{n}, \qquad (11.1)$$

где x_i – варианты, n_i - частоты.

Замечание. Выборочное среднее служит для оценки математического ожидания исследуемой случайной величины. В дальнейшем будет рассмотрен вопрос, насколько точной является такая оценка.

Определение 11.2. Выборочной дисперсией называется

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_B)^2}{n}, \tag{11.2}$$

а выборочным средним квадратическим отклонением –

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \tag{11.3}$$

Так же, как в теории случайных величин, можно доказать, что справедлива следующая формула для вычисления выборочной дисперсии:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \tag{11.4}$$

Другими характеристиками вариационного ряда являются:

- мода M_0 – варианта, имеющая наибольшую частоту.

- медиана m_e - варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно ($n = 2k + 1$), то $m_e = x_{k+1}$,

а при четном $n = 2k$ $m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Оценки начальных и центральных моментов (так называемые эмпирические моменты) определяются аналогично соответствующим теоретическим моментам:

- начальным эмпирическим моментом порядка k называется

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}. \tag{11.5}$$

В частности, $M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}_B$, то есть начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочному среднему.

- центральным эмпирическим моментом порядка k называется

$$m_k = \frac{\sum n_i(x_i - \bar{x}_B)^k}{n}. \tag{11.6}$$

В частности, $m_2 = \dfrac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = D_B$, то есть центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии.

При статистическом исследовании двумерных случайных величин основной задачей является обычно выявление связи между составляющими.

Двумерная выборка представляет собой набор значений случайного вектора: (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). Для нее можно определить выборочные средние составляющих: $\bar{x}_B = \dfrac{\sum x_i}{n}$, $\bar{y}_B = \dfrac{\sum y_i}{n}$ и соответствующие выборочные дисперсии и средние квадратические отклонения. Кроме того, можно вычислить условные средние: $\bar{y}_x$ - среднее арифметическое наблюдавшихся значений Y, соответствующих $X = x$, и $\bar{x}_y$ - среднее значение наблюдавшихся значений X, соответствующих $Y = y$.

Если существует зависимость между составляющими двумерной случайной величины, она может иметь разный вид: функциональная зависимость, если каждому возможному значению X соответствует одно значение Y, и статистическая, при которой изменение одной величины приводит к изменению распределения другой. Если при этом в результате изменения одной величины меняется среднее значение другой, то статистическую зависимость между ними называют корреляционной.

Лекция 12.

Основные свойства статистических характеристик параметров распределения: несмещенность, состоятельность, эффективность. Несмещенность и состоятельность выборочного среднего как оценки математического ожидания. Смещенность выборочной дисперсии.

Получив статистические оценки параметров распределения (выборочное среднее, выборочную дисперсию и т.д.), нужно убедиться, что они в достаточной степени служат приближением соответствующих характеристик генеральной совокупности. Определим требования, которые должны при этом выполняться.

Пусть Θ^* - статистическая оценка неизвестного параметра Θ теоретического распределения. Извлечем из генеральной совокупности несколько выборок одного и того же объема n и вычислим для каждой из них оценку параметра Θ: $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$. Тогда оценку Θ^* можно рассматривать как случайную величину, принимающую возможные значения $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$. Если математическое ожидание Θ^* не равно оцениваемому параметру, мы будем получать при вычислении оценок систематические ошибки одного знака (с избытком, если $M(\Theta^*) > \Theta$, и с недостатком, если $M(\Theta^*) < \Theta$). Следовательно, необходимым условием отсутствия систе-матических ошибок является требование $M(\Theta^*) = \Theta$.

Определение 12.2. Статистическая оценка Θ^* называется несмещенной, если ее математичес-кое ожидание равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки:

$$M(\Theta^*) = \Theta. \qquad (12.1)$$

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Однако несмещенность не является достаточным условием хорошего приближения к истинному значению оцениваемого параметра. Если при этом возможные значения Θ^* могут значительно отклоняться от среднего значения, то есть дисперсия Θ^* велика, то значение, найденное по данным одной выборки, может значительно отличаться от оцениваемого параметра. Следовательно, требуется наложить ограничения на дисперсию.

Определение 12.2. Статистическая оценка называется эффективной, если она при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема к статистическим оценкам предъявляется еще и требование состоятельности.

Определение 12.3. Состоятельной называется статистическая оценка, которая при $n \to \infty$ стре-мится по вероятности к оцениваемому параметру (если эта оценка несмещенная, то она будет состоятельной, если при $n \to \infty$ ее дисперсия стремится к 0).

Убедимся, что $\bar{x}_B$ представляет собой несмещенную оценку математического ожидания $M(X)$.

Будем рассматривать $\bar{x}_B$ как случайную величину, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть значения исследуемой случайной величины, составляющие выборку, – как независимые, одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющие математическое ожидание a. Из свойств математического ожидания следует, что

$$M(\bar{X}_B) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = a.$$

Но, поскольку каждая из величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеет такое же распределение, что и генеральная совокупность, $a = M(X)$, то есть $M(\bar{X}_B) = M(X)$, что и требовалось доказать. Выборочное среднее является не только несмещенной, но и состоятельной оценкой математического ожидания. Если предположить, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют ограниченные дисперсии, то из теоремы Чебышева следует, что их среднее арифметическое, то есть $\bar{X}_B$, при увеличении n стремится по вероятности к математическому ожиданию a каждой их величин, то есть к $M(X)$. Следовательно, выборочное среднее есть состоятельная оценка математического ожидания.

В отличие от выборочного среднего, выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности. Можно доказать, что

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_Г, \qquad (12.2)$$

где $D_Г$ – истинное значение дисперсии генеральной совокупности. Можно предложить другую оценку дисперсии – исправленную дисперсию s^2, вычисляемую по формуле

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}. \qquad (12.3)$$

Такая оценка будет являться несмещенной. Ей соответствует исправленное среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}. \qquad (12.4)$$

Определение 12.4. Оценка некоторого признака называется асимптотически несмещенной, если для выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = X, \qquad (12.5)$$

где X – истинное значение исследуемой величины.

Способы построения оценок.

1. Метод наибольшего правдоподобия.

Пусть X – дискретная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Предположим, что нам известен закон распределения этой величины, определяемый параметром Θ, но неизвестно численное значение этого параметра. Найдем его точечную оценку.

Пусть $p(x_i, \Theta)$ – вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i. Назовем функцией правдоподобия дискретной случайной величины X функцию аргумента Θ, определяемую по формуле:

$$L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta) = p(x_1,\Theta)p(x_2,\Theta)\ldots p(x_n,\Theta).$$

Тогда в качестве точечной оценки параметра Θ принимают такое его значение $\Theta^* = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Оценку Θ^* называют оценкой наибольшего правдоподобия.

Поскольку функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении Θ, удобнее искать максимум $\ln L$ – логарифмической функции правдоподобия. Для этого нужно:

1) найти производную $\dfrac{d \ln L}{d\Theta}$;
2) приравнять ее нулю (получим так называемое *уравнение правдоподобия*) и найти критическую точку;
3) найти вторую производную $\dfrac{d^2 \ln L}{d\Theta^2}$; если она отрицательна в критической точке, то это – точка максимума.

Достоинства метода наибольшего правдоподобия: полученные оценки состоятельны (хотя могут быть смещенными), распределены асимптотически нормально при больших значениях n и имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками; если для оцениваемого параметра Θ существует эффективная оценка Θ^*, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение Θ^*; метод наиболее полно использует данные выборки и поэтому особенно полезен в случае малых выборок.

Недостаток метода наибольшего правдоподобия: сложность вычислений.

Для непрерывной случайной величины с известным видом плотности распределения $f(x)$ и неизвестным параметром Θ функция правдоподобия имеет вид:

$$L\ (x_1, x_2,\ \ldots, x_n; \Theta) = f(x_1,\Theta)f(x_2,\Theta)\ldots f(x_n,\Theta).$$

Оценка наибольшего правдоподобия неизвестного параметра проводится так же, как для дискретной случайной величины.

2. Метод моментов.

Метод моментов основан на том, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответственно начальных и центральных теоретических моментов, поэтому можно приравнять теоретические моменты соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Если задан вид плотности распределения $f(x, \Theta)$, определяемой одним неизвестным параметром Θ, то для оценки этого параметра достаточно иметь одно уравнение. Например, можно приравнять начальные моменты первого порядка:

$$\bar{x}_B = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\Theta)dx = \varphi(\Theta),$$

получив тем самым уравнение для определения Θ. Его решение Θ^* будет точечной оценкой параметра, которая является функцией от выборочного среднего и, следовательно, и от вариант выборки:

$$\Theta = \psi\ (x_1, x_2,\ \ldots, x_n).$$

Если известный вид плотности распределения $f(x, \Theta_1, \Theta_2)$ определяется двумя неизвестными параметрами Θ_1 и Θ_2, то требуется составить два уравнения, например

$$\nu_1 = M_1, \;\; \mu_2 = m_2.$$

Отсюда $\begin{cases} M(X) = \bar{x}_B \\ D(X) = D_B \end{cases}$ - система двух уравнений с двумя неизвестными Θ_1 и Θ_2. Ее решениями будут точечные оценки Θ_1^* и Θ_2^* - функции вариант выборки:

$$\Theta_1 = \psi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\Theta_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

3. Метод наименьших квадратов.

Если требуется оценить зависимость величин y и x, причем известен вид связывающей их функции, но неизвестны значения входящих в нее коэффициентов, их величины можно оценить по имеющейся выборке с помощью метода наименьших квадратов. Для этого функция $y = \varphi(x)$ выбирается так, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ от $\varphi(x_i)$ была минимальной:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2 = \min.$$

При этом требуется найти стационарную точку функции $\varphi(x; a, b, c\ldots)$, то есть решить систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x_i; a,b,c...))\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x_i; a,b,c...))\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial b}\right)_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x_i; a,b,c...))\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial c}\right)_i = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(решение, конечно, возможно только в случае, когда известен конкретный вид функции φ).

Рассмотрим в качестве примера подбор параметров линейной функции методом наименьших квадратов.

Для того, чтобы оценить параметры a и b в функции $y = ax + b$, найдем

$\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i = x_i; \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial b}\right)_i = 1.$ Тогда $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) = 0 \end{cases}$. Отсюда

$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 \end{cases}$. Разделив оба полученных уравнения на n и вспомнив определения эмпирических моментов, можно получить выражения для a и b в виде:

$a = \dfrac{(K_{xy})_B}{(D_x)_B}, \; b = \bar{y}_B - \dfrac{(K_{xy})_B}{(D_x)_B}\bar{x}_B$. Следовательно, связь между x и y можно задать в виде:

$$y - \bar{y}_B = \frac{(K_{xy})_B}{(D_x)_B}(x - \bar{x}_B).$$

Лекция 13.

Интервальное оценивание неизвестных параметров. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность), доверительный интервал. Построение доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения при известной и при неизвестной дисперсии. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, что приводит к грубым ошибкам. Поэтому в таком случае лучше пользоваться *интервальными оценками*, то есть указывать интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение оцениваемого параметра. Разумеется, чем меньше длина этого интервала, тем точнее оценка параметра. Поэтому, если для оценки Θ^* некоторого параметра Θ справедливо неравенство $| \Theta^* - \Theta | < \delta$, число $\delta > 0$ характеризует точность оценки (чем меньше δ, тем точнее оценка). Но статистические методы позволяют говорить только о том, что это неравенство выполняется с некоторой вероятностью.

Определение 13.1. Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ^* параметра Θ называется вероятность γ того, что выполняется неравенство $|\Theta^* - \Theta| < \delta$. Если заменить это неравенство двойным неравенством $-\delta < \Theta^* - \Theta < \delta$, то получим:

$$p\ (\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta\ ) = \gamma.$$

Таким образом, γ есть вероятность того, что Θ попадает в интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$.

Определение 13.2. Доверительным называется интервал, в который попадает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Построение доверительных интервалов.

1. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

Пусть исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону с известным средним квадратическим σ, и требуется по значению выборочного среднего $\bar{x}_B$ оценить ее математическое ожидание a. Будем рассматривать выборочное среднее $\bar{x}_B$ как случайную величину $\bar{X}$, а значения вариант выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как одинаково распределенные независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ. При этом $M(\bar{X}) = a$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (используем свойства математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин). Оценим вероятность выполнения неравенства $|\bar{X} - a| < \delta$. Применим формулу для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал:

$p(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Тогда , с учетом того, что $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $p(|\overline{X}-a|<\delta)$

$=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=$

$=2\Phi(t)$, где $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Отсюда $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, и предыдущее равенство можно переписать так:

$$p\left(\overline{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma\ . \qquad (13.1)$$

Итак, значение математического ожидания a с вероятностью (надежностью) γ попадает в интервал $\left(\overline{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где значение t определяется из таблиц для функции Лапласа так, чтобы выполнялось равенство $2\Phi(t)=\gamma$.

2. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.

Если известно, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону с неизвестным средним квадратическим отклонением, то для поиска доверительного интервала для ее математического ожидания построим новую случайную величину

$$T=\frac{\overline{x}_B-a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \qquad (13.2)$$

где $\overline{x}_B$ - выборочное среднее, s – исправленная дисперсия, n – объем выборки. Эта случайная величина, возможные значения которой будем обозначать t, имеет распределение Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы.

Поскольку плотность распределения Стьюдента $s(t,n) = B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$, где

$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$, явным образом не зависит от a и σ, можно задать вероятность ее попадания в некоторый интервал $(-t_\gamma, t_\gamma)$, учитывая четность плотности распределения, следующим образом: $p\left(\left|\frac{\bar{x}_B - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} s(t,n)dt = \gamma$. Отсюда получаем:

$$p\left(\bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma. \qquad (13.3)$$

Таким образом, получен доверительный интервал для a, где t_γ можно найти по соответствующей таблице при заданных n и γ.

3. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

Будем искать для среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины доверительный интервал вида $(s - \delta, s + \delta)$, где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, а для δ выполняется условие: $p(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$.

Запишем это неравенство в виде: $s\left(1-\frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1+\frac{\delta}{s}\right)$ или, обозначив $q = \frac{\delta}{s}$,

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q). \qquad (13.4)$$

Рассмотрим случайную величину χ, определяемую по формуле

$$\chi = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n-1},$$

которая распределена по закону «хи-квадрат» с n-1 степенями свободы . Плотность ее распределения

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

не зависит от оцениваемого параметра σ, а зависит только от объема выборки n. Преобразуем неравенство (18.4) так, чтобы оно приняло вид $\chi_1 < \chi < \chi_2$. Вероятность выполнения этого неравенства равна доверительной вероятности γ, следовательно, $\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi, n) d\chi = \gamma$. Предположим, что $q < 1$, тогда неравенство (13.4) можно записать так:

$$\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)},$$

или, после умножения на $s\sqrt{n-1}$, $\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$. Следовательно,

$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$. Тогда $\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} R(\chi, n) d\chi = \gamma$. Существуют таблицы для распределения «хи-квадрат», из которых можно найти q по заданным n и γ, не решая этого уравнения. Таким образом, вычислив по выборке значение s и определив по таблице значение q, можно найти доверительный интервал (18.4), в который значение σ попадает с заданной вероятностью γ.

Замечание. Если $q > 1$, то с учетом условия $\sigma > 0$ доверительный интервал для σ будет иметь границы

$$0 < \sigma < s(1+q). \qquad (13.5)$$

Лекция 14.

Статистическая проверка статистических гипотез. Общие принципы проверки гипотез. Понятия статистической гипотезы (простой и сложной), нулевой и конкурирующей гипотезы, ошибок первого и второго

рода, уровня значимости, статистического критерия, критической области, области принятия гипотезы. Наблюдаемое значение критерия. Критические точки. Мощность критерия. Критерии для проверки гипотез о вероятности события, о математическом ожидании, о сравнении двух дисперсий.

Определение 14.1. Статистической гипотезой называют гипотезу о виде неизвестного распределения генеральной совокупности или о параметрах известных распределений.

Определение 14.2. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. Конкурирую-щей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Определение 14.3. Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение, сложной – гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В результате проверки правильности выдвинутой нулевой гипотезы (такая проверка называется статистической, так как производится с применением методов математичес-кой статистики) возможны ошибки двух видов: ошибка первого рода, состоящая в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза, и ошибка второго рода, заключаю-щаяся в том, что будет принята неверная гипотеза.

Замечание. Какая из ошибок является на практике более опасной, зависит от конкретной задачи. Например, если проверяется правильность выбора метода лечения больного, то ошибка первого рода означает отказ от правильной методики, что может замедлить лече-ние, а ошибка второго рода (применение неправильной методики) чревата ухудшением состояния больного и является более опасной.

Определение 14.4. Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости α.

Основной прием проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины, имеющей известный закон распределения.

Определение 14.5. Статистическим критерием называется случайная величина K с известным законом распределения, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Определение 14.6. Критической областью называют область значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, областью принятия гипотезы – область значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Итак, процесс проверки гипотезы состоит из следующих этапов:

1) выбирается статистический критерий K;
2) вычисляется его наблюдаемое значение $K_{набл}$ по имеющейся выборке;
3) поскольку закон распределения K известен, определяется (по известному уровню значимости α) критическое значение $k_{кр}$, разделяющее критическую область и область принятия гипотезы (например, если $p(K > k_{кр}) = \alpha$, то справа от $k_{кр}$ располагается критическая область, а слева – область принятия гипотезы);
4) если вычисленное значение $K_{набл}$ попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается, если в критическую область – нулевая гипотеза отвергается.

Различают разные виды критических областей:

- правостороннюю критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$);

- левостороннюю критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$);

- двустороннюю критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$ $\quad (k_2 > k_1)$.

Определение 14.7. Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что верна конкурирующая гипотеза.

Если обозначить вероятность ошибки второго рода (принятия неправильной нулевой гипотезы) β, то мощность критерия равна 1 – β. Следовательно, чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода. Поэтому после выбора уровня значимости следует строить критическую область так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Критерий для проверки гипотезы о вероятности события.

Пусть проведено n независимых испытаний (n – достаточно большое число), в каждом из которых некоторое событие A появляется с одной и той же, но неизвестной вероятностью p, и найдена относительная частота $\frac{m}{n}$ появлений A в этой серии испытаний. Проверим при заданном уровне значимости α нулевую гипотезу H_0, состоящую в том, что вероятность p равна некоторому значению p_0.

Примем в качестве статистического критерия случайную величину

$$U = \frac{\left(\frac{M}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}, \tag{14.1}$$

имеющую нормальное распределение с параметрами $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$ (то есть нормированную). Здесь $q_0 = 1 - p_0$. Вывод о нормальном распределении критерия следует из теоремы Лапласа (при достаточно большом n относительную частоту можно приближенно считать нормально распределенной с математическим ожиданием p и средним квадрати-ческим отклонением $\sqrt{\frac{pq}{n}}$).

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

1) Если H_0: $p = p_0$, а H_1: $p \neq p_0$, то критическую область нужно построить так, чтобы вероятность попадания критерия в эту область равнялась

заданному уровню значимости α. При этом наибольшая мощность критерия достигается тогда, когда критическая область состоит из двух интервалов, вероятность попадания в каждый из которых равна $\frac{\alpha}{2}$. Поскольку U симметрична относительно оси Оy, вероятность ее попадания в интервалы (-∞; 0) и (0; +∞) равна 0,5, следовательно, критическая область тоже должна быть симметрична относительно Оy. Поэтому $u_{кр}$ определяется по таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$, а критическая область имеет вид $(-\infty; -u_{кр}) \cup (u_{кр}; +\infty)$.

Замечание. Предполагается, что используется таблица значений функции Лапласа, заданной в виде $\Phi(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, где нижний предел интегрирования равен 0, а не -∞. Функция Лапласа, заданная таким образом, является нечетной, а ее значения на 0,5 меньше, чем значения стандартной функции $\Phi(x)$.

Далее нужно вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{набл} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}. \tag{14.2}$$

Если $|U_{набл}| < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Если $|U_{набл}| > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

2) Если конкурирующая гипотеза H_1: $p > p_0$, то критическая область определяется неравенством $U > u_{кр}$, то есть является правосторонней, причем $p(U > u_{кр}) = \alpha$. Тогда $p(0 < U < u_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1-2\alpha}{2}$. Следовательно, $u_{кр}$ можно найти по таблице значений функции Лапласа из условия, что $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$. Вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле (14.2).

Если $U_{набл} < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Если $U_{набл} > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

3) Для конкурирующей гипотезы H_1: $p < p_0$ критическая область является левосторонней и задается неравенством $U <- u_{кр}$, где $u_{кр}$ вычисляется так же, как в предыдущем случае.

Если $U_{набл} > - u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Если $U_{набл} < - u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

Критерий для проверки гипотезы о математическом ожидании.

Пусть генеральная совокупность X имеет нормальное распределение, и требуется проверить предположение о том, что ее математическое ожидание равно некоторому числу a_0. Рассмотрим две возможности.

1) Известна дисперсия σ^2 генеральной совокупности. Тогда по выборке объема n найдем выборочное среднее $\bar{x}_B$ и проверим нулевую гипотезу H_0: $M(X) = a_0$.

Учитывая, что выборочное среднее $\bar{X}$ является несмещенной оценкой $M(X)$, то есть $M(\bar{X}) = M(X)$, можно записать нулевую гипотезу так: $M(\bar{X}) = a_0$. Для ее проверки выберем критерий

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (14.3)$$

Это случайная величина, имеющая нормальное распределение, причем, если нулевая гипотеза справедлива, то $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

Выберем критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы:

- если H_1: $M(\bar{X}) \neq a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$, критическая область двусторонняя, $U_{набл} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$, и, если $|U_{набл}| < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $|U_{набл}| > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

- если H_1: $M(\bar{X}) > a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$, критическая область правосторонняя, и, если $U_{набл} < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $U_{набл} > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

- если H_1: $M(\overline{X}) < a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1 - 2\alpha}{2}$, критическая область левосторонняя, и, если $U_{набл} > - u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $U_{набл} < - u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

2) Дисперсия генеральной совокупности неизвестна.

В этом случае выберем в качестве критерия случайную величину

$$T = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}, \qquad (14.4)$$

где S – исправленное среднее квадратическое отклонение. Такая случайная величина имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Рассмотрим те же, что и в предыдущем случае, конкурирующие гипотезы и соответствующие им критические области. Предварительно вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{набл} = \frac{(\overline{x}_B - a_0)\sqrt{n}}{S}. \qquad (14.5)$$

- если H_1: $M(\overline{X}) \neq a_0$, то критическая точка $t_{двуст.кр.}$ находится по таблице критических точек распределения Стьюдента по известным α и $k = n - 1$.

Если $| T_{набл} | < t_{двуст.кр.}$, то нулевая гипотеза принимается.

Если $| T_{набл} | > t_{двуст.кр.}$, то нулевая гипотеза отвергается.

- если H_1: $M(\overline{X}) > a_0$, то по соответствующей таблице находят $t_{правост.кр.}(\alpha, k)$ – критичес-кую точку правосторонней критической области. Нулевая гипотеза принимается, если

$T_{набл} < t_{правост.кр.}$.

- при конкурирующей гипотезе H_1: $M(\overline{X}) < a_0$ критическая область является левосторон-ней, и нулевая гипотеза принимается при условии $T_{набл} > - t_{правост.кр.}$. Если $T_{набл} < - t_{правост.кр.}$, нулевую гипотезу отвергают.

Критерий для проверки гипотезы о сравнении двух дисперсий.

Пусть имеются две нормально распределенные генеральные совокупности X и Y. Из них извлечены независимые выборки объемов соответственно n_1 и n_2, по которым вычислены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. Требуется при заданном уровне значимос-ти α проверить нулевую гипотезу H_0:

$D(X) = D(Y)$ о равенстве дисперсий рассматривае-мых генеральных совокупностей. Учитывая несмещенность исправленных выборочных дисперсий, можно записать нулевую гипотезу так:

$$H_0\colon M\,(s_X^2) = M\,(s_Y^2). \tag{14.6}$$

Замечание. Конечно, исправленные дисперсии, вычисленные по выборкам, обычно оказываются различными. При проверке гипотезы выясняется, является ли это различие незначимым и обусловленным случайными причинами (в случае принятия нулевой гипотезы) или оно является следствием того, что сами генеральные дисперсии различны.

В качестве критерия примем случайную величину

$$F = \frac{S_\sigma^2}{S_M^2} \ - \tag{14.7}$$

- отношение большей выборочной дисперсии к меньшей. Она имеет распределение Фишера-Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, где n_1 – объем выборки, по которой вычислена большая исправленная дисперсия, а n_2 – объем второй выборки. Рассмотрим два вида конкурирующих гипотез:

- пусть H_1: $D(X) > D(Y)$. Наблюдаемым значением критерия будет отношение большей из исправленных дисперсий к меньшей: $F_{набл} = \frac{s_\sigma^2}{s_M^2}$. По таблице критических точек распреде-ления Фишера-Снедекора можно найти критическую точку $F_{набл}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$. При $F_{набл} < F_{кр}$ нулевая гипотеза принимается, при $F_{набл} > F_{кр}$ отвергается.

- если H_1: $D(X) \neq D(Y)$, то критическая область является двусторонней и определяется неравенствами $F < F_1$, $F > F_2$, где $p(F < F_1) = p(\ F > F_2) = \alpha/2$. При этом достаточно найти правую критическую точку $F_2 = F_{кр}\ (\ \frac{\alpha}{2},\ k_1,\ k_2)$. Тогда при $F_{набл} < F_{кр}$ нулевая гипотеза принимается, при $F_{набл} > F_{кр}$ отвергается.

Лекция 15.

Критерий Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины. Проверка гипотез о нормальном, показательном и

равномерном распределениях по критерию Пирсона. Критерий Колмогорова. Приближенный метод проверки нормальности распределения, связанный с оценками коэффициентов асимметрии и эксцесса.

В предыдущей лекции рассматривались гипотезы, в которых закон распределения генеральной совокупности предполагался известным. Теперь займемся проверкой гипотез о предполагаемом законе неизвестного распределения, то есть будем проверять нулевую гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена по некоторому известному закону. Обычно статистические критерии для проверки таких гипотез называются критериями согласия.

Критерий Пирсона.

Достоинством критерия Пирсона является его универсальность: с его помощью можно проверять гипотезы о различных законах распределения.

1. Проверка гипотезы о нормальном распределении.

Пусть получена выборка достаточно большого объема n с большим количеством различ-ных значений вариант. Доя удобства ее обработки разделим интервал от наименьшего до наибольшего из значений вариант на s равных частей и будем считать, что значения вариант, попавших в каждый интервал, приближенно равны числу, задающему середину интервала. Подсчитав число вариант, попавших в каждый интервал, составим так называемую сгруппированную выборку:

варианты………..$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_s$

частоты…………$n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_s$,

где x_i – значения середин интервалов, а n_i – число вариант, попавших в i-й интервал (эмпи-рические частоты).

По полученным данным можно вычислить выборочное среднее $\bar{x}_B$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B. Проверим предположение, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с параметрами $M(X) = \bar{x}_B$, $D(X) = \sigma_B^2$. Тогда можно найти количество чисел из выборки объема n, которое должно оказаться в каждом интер-вале при этом предположении (то есть теоретические частоты). Для этого по таблице значений функции Лапласа найдем вероятность попадания в i-й интервал:

$$p_i = \Phi\left(\frac{b_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right),$$

где a_i и b_i - границы i-го интервала. Умножив полученные вероятности на объем выборки п, найдем теоретические частоты: $n_i = n \cdot p_i$. Наша цель – сравнить эмпирические и теоретические частоты, которые, конечно, отличаются друг от друга, и выяснить, являются ли эти различия несущественными, не опровергающими гипотезу о нормальном распределении исследуемой случайной величины, или они настолько велики, что противоречат этой гипотезе. Для этого используется критерий в виде случайной величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}. \qquad (15.1)$$

Смысл ее очевиден: суммируются части, которые квадраты отклонений эмпирических частот от теоретических составляют от соответствующих теоретических частот. Можно доказать, что вне зависимости от реального закона распределения генеральной совокупно-сти закон распределения случайной величины (15.1) при $n \to \infty$ стремится к закону распределения χ^2 с числом степеней свободы $k = s - 1 - r$, где r – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки. Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами, поэтому $k = s - 3$. Для выбранного критерия строится правосторонняя критическая область, определяемая условием

$$p(\chi^2 > \chi^2_{kp}(\alpha, k)) = \alpha, \qquad (15.2)$$

где α – уровень значимости. Следовательно, критическая область задается неравенством $\chi^2 > \chi^2_{kp}(\alpha, k)$, а область принятия гипотезы - $\chi^2 < \chi^2_{kp}(\alpha, k)$.

Итак, для проверки нулевой гипотезы H_0: генеральная совокупность распределена нормально – нужно вычислить по выборке наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \qquad (15.1`)$$

а по таблице критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$, используя известные значения α и $k = s - 3$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нулевую гипотезу принимают, при $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ ее отвергают.

2. Проверка гипотезы о равномерном распределении.

При использовании критерия Пирсона для проверки гипотезы о равномерном распределе-нии генеральной совокупности с предполагаемой плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

необходимо, вычислив по имеющейся выборке значение $\bar{x}_B$, оценить параметры a и b по формулам:

$$a^* = \bar{x}_B - \sqrt{3}\sigma_B, \quad b^* = \bar{x}_B + \sqrt{3}\sigma_B, \qquad (15.3)$$

где a^* и b^* - оценки a и b. Действительно, для равномерного распределения $M(X) = \dfrac{a + b}{2}$, $\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\dfrac{(a - b)^2}{12}} = \dfrac{a - b}{2\sqrt{3}}$, откуда можно получить систему для определения a^* и b^*: $\begin{cases} \dfrac{b^* + a^*}{2} = \bar{x}_B \\ \dfrac{b^* - a^*}{2\sqrt{3}} = \sigma_B \end{cases}$, решением которой являются выражения (15.3).

Затем, предполагая, что $f(x) = \dfrac{1}{b^* - a^*}$, можно найти теоретические частоты по формулам

$$n'_1 = np_1 = nf(x)(x_1 - a^*) = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*}(x_1 - a^*);$$

$$n'_2 = n'_3 = \ldots = n'_{s-1} = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*}(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1,2,\ldots,s-1;$$

$$n'_s = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*}(b^* - x_{s-1}).$$

Здесь s – число интервалов, на которые разбита выборка.

Наблюдаемое значение критерия Пирсона вычисляется по формуле (15.1\`), а критическое – по таблице с учетом того, что число степеней свободы $k = s - 3$. После этого границы критической области определяются так же, как и для проверки гипотезы о нормальном распределении.

3. Проверка гипотезы о показательном распределении.

В этом случае, разбив имеющуюся выборку на равные по длине интервалы, рассмотрим последовательность вариант $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, равноотстоящих друг от друга (считаем, что все варианты, попавшие в i – й интервал, принимают значение, совпадающее с его серединой), и соответствующих им частот n_i (число вариант выборки, попавших в i – й интервал). Вычислим по этим данным $\bar{x}_B$ и примем в качестве оценки параметра λ величину $\lambda^* = \dfrac{1}{\bar{x}_B}$. Тогда теоретические частоты вычисляются по формуле

$$n_i' = n_i p_i = n_i p(x_i < X < x_{i+1}) = n_i (e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}).$$

Затем сравниваются наблюдаемое и критическое значение критерия Пирсона с учетом того, что число степеней свободы $k = s - 2$.

Критерий Колмогорова.

Этот критерий применяется для проверки простой гипотезы H_0 о том, что независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерыв-ную функцию распределения $F(x)$.

Найдем функцию эмпирического распределения $F_n(x)$ и будем искать границы двусторон-ней критической области, определяемой условием

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} | F_n(x) - F(x) | > \lambda_n. \tag{15.4}$$

А.Н.Колмогоров доказал, что в случае справедливости гипотезы H_0 распределение статистики D_n не зависит от функции $F(x)$, и при $n \to \infty$

$$p(\sqrt{n} D_n < \lambda) \to K(\lambda), \ \lambda > 0,$$

где

$$K(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-2m^2\lambda^2} - \tag{15.5}$$

- критерий Колмогорова, значения которого можно найти в соответствующих таблицах. Критическое значение критерия $\lambda_n(\alpha)$ вычисляется по заданному уровню значимости α как корень уравнения $p(D_n \geq \lambda) = \alpha$.

Можно показать, что приближенное значение вычисляется по формуле

$$\lambda_n(\alpha) \approx \sqrt{\frac{z}{2n}} - \frac{1}{6n},$$

где z – корень уравнения $1 - K\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) = \alpha$.

На практике для вычисления значения статистики D_n используется то, что

$D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, где $D_n^+ = \max\limits_{1 \leq m \leq n}\left(\frac{m}{n} - F(X_{(m)})\right)$, $D_n^- = \max\limits_{1 \leq m \leq n}\left(F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n}\right)$,

а $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ - вариационный ряд, построенный по выборке X_1, X_2, …, X_n.

Приближенный метод проверки нормальности распределения, связанный с оценками коэффициентов асимметрии и эксцесса.

Определим по аналогии с соответствующими понятиями для теоретического распределения асимметрию и эксцесс эмпирического распределения.

Определение 15.1. Асимметрия эмпирического распределения определяется равенством

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_B^3}, \tag{15.6}$$

где m_3 – центральный эмпирический момент третьего порядка.

Эксцесс эмпирического распределения определяется равенством

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3, \tag{15.7}$$

где m_4 – центральный эмпирический момент четвертого порядка.

Как известно, для нормально распределенной случайной величины асимметрия и эксцесс равны 0. Поэтому, если соответствующие эмпирические величины достаточно малы, можно предположить, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Лекция 16.

Корреляционный анализ.Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции.

Рассмотрим выборку объема n, извлеченную из нормально распределенной двумерной генеральной совокупности (X, Y). Вычислим выборочный коэффициент корреляции $r_B = \dfrac{\sum_i (x_i - \bar{x})*(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 * \sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$

где x_i – значения, переменных принимаемые переменной x,

y_i - значения, переменных принимаемые переменной y,

$\bar{x}$ – средняя по x,

$\bar{y}$ - средняя по y.

Пусть он оказался не равным нулю. Это еще не означает, что и коэффициент корреляции генеральной совокупности не равен нулю. Поэтому при заданном уровне значимости α возникает необходимость проверки нулевой гипотезы H_0: $r_B = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $r_B \neq 0$. Таким образом, при принятии нулевой гипотезы X и Y некоррелированы, то есть не связаны линейной зависимостью, а при отклонении H_0 они коррелированы.

В качестве критерия примем случайную величину

$$T = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}, \qquad (16.1)$$

которая при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы. Из вида конкурирующей гипотезы следует, что критическая область двусторонняя с границами $\pm t_{кр}$, где значение $t_{кр}(\alpha, k)$ находится из таблиц для двусторонней критической области.

Вычислив наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$$

и сравнив его с $t_{кр}$, делаем вывод:

- если $|T_{набл}| < t_{кр}$ – нулевая гипотеза принимается (корреляции нет);

- если $|T_{набл}| > t_{кр}$ – нулевая гипотеза отвергается (корреляция есть).

Ранговая корреляция.

Пусть объекты генеральной совокупности обладают двумя качественными признаками (то есть признаками, которые невозможно измерить точно, но которые позволяют сравнивать объекты между собой и располагать их в порядке убывания или возрастания качества). Договоримся для определенности располагать объекты в порядке ухудшения качества.

Пусть выборка объема n содержит независимые объекты, обладающие двумя качествен-ными признаками: A и B. Требуется выяснить степень их связи между собой, то есть установить наличие или отсутствие ранговой корреляции.

Расположим объекты выборки в порядке ухудшения качества по признаку A, предполагая, что все они имеют различное качество по обоим признакам. Назовем место, занимаемое в этом ряду некоторым объектом, его рангом x_i: $x_1 = 1, x_2 = 2,\ldots, x_n = n$.

Теперь расположим объекты в порядке ухудшения качества по признаку B, присвоив им ранги y_i , где номер i равен порядковому номеру объекта по признаку A, а само значение ранга равно порядковому номеру объекта по признаку B. Таким образом, получены две последовательности рангов:

по признаку A … $x_1, x_2,\ldots, x_n$

по признаку B … $y_1, y_2,\ldots, y_n$.

При этом, если, например, $y_3 = 6$, то это означает, что данный объект занимает в ряду по признаку A третье место, а в ряду по признаку B – шестое.

Сравним полученные последовательности рангов.

1. Если $x_i = y_i$ при всех значениях i, то ухудшение качества по признаку A влечет за собой ухудшение качества по признаку B, то есть имеется «полная ранговая зависимость».
2. Если ранги противоположны, то есть $x_1 = 1, y_1 = n; x_2 = 2, y_2 = n - 1;\ldots, x_n = n, y_n = 1$, то признаки тоже связаны: ухудшение качества по одному из них приводит к улучшению качества по другому («противоположная зависимость»).

3. На практике чаще всего встречается промежуточный случай, когда ряд y_i не монотонен. Для оценки связи между признаками будем считать ранги $x_1, x_2,\ldots, x_n$ возможными значениями случайной величины X, а $y_1, y_2,\ldots, y_n$ – возможными значениями случайной величины Y. Теперь можно исследовать связь между X и Y, вычислив для них выборочный коэффициент корреляции

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}, \qquad (16.2)$$

где $u_i = x_i - \bar{x},\ v_i = y_i - \bar{y}$ (условные варианты). Поскольку каждому рангу x_i соответствует только одно значение y_i, то частота любой пары условных вариант с одинаковыми индексами равна 1, а с разными индексами – нулю. Кроме того, из выбора условных вариант следует, что $\bar{u} = \bar{v} = 0$, поэтому формула (16.2) приобретает более простой вид:

$$r_B = \frac{\sum u_i v_i}{n\sigma_u\sigma_v}. \qquad (16.3)$$

Итак, требуется найти $\sum u_i v_i,\ \sigma_u$ и σ_v.

Можно показать, что $\sum u_i^2 = \sum v_i^2 = \frac{n^3 - n}{12}$. Учитывая, что $\bar{x} = \bar{y}$, можно выразить $\sum u_i v_i$ через разности рангов $d_i = x_i - y_i = u_i - v_i$. После преобразований получим: $\sum u_i v_i = \frac{n^3 - n}{12} - \sum \frac{d_i^2}{2}$, $\sigma_u = \sigma_v = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$, откуда $n\sigma_u\sigma_v = \frac{n^3 - n}{12}$. Подставив эти результаты в (16.3), получим выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена:

$$\rho_B = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}. \qquad (16.4)$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции Спирмена.

1. Если между A и B имеется «полная прямая зависимость», то есть ранги совпадают при всех i, то $\rho_B = 1$. Действительно, при этом $d_i = 0$, и из формулы (16.4) следует справедливость свойства 1.

2. Если между A и B имеется «противоположная зависимость», то ρ_B = -1. В этом случае, преобразуя $d_i = (2i - 1) - n$, найдем, что $\sum d_i^2 = \frac{n^3 - n}{3}$, тогда из (21.4) $\rho_B = 1 - \frac{6(n^3 - n)}{3(n^3 - n)} = 1 - 2 = -1.$

3. В остальных случаях $-1 < \rho_B < 1$, причем зависимость между A и B тем меньше, чем ближе $|\rho_B|$ к нулю.

Итак, требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена $\rho_г$ при конку-рирующей гипотезе H_1: $\rho_г \neq 0$. Для этого найдем критическую точку:

$$T_{kp} = t_{kp}(\alpha, k)\sqrt{\frac{1 - \rho_B^2}{n - 2}}, \tag{16.5}$$

где n – объем выборки, ρ_B – выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, $t_{кр}$ (α, k) – критическая точка двусторонней критической области, найденная по таблице критических точек распределения Стьюдента, число степеней свободы $k = n - 2$.

Тогда, если $|\rho_B| < T_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, то есть ранговая корреляционная связь между признаками незначима.

Если $|\rho_B| > T_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, и между признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Можно использовать и другой коэффициент – коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Рассмотрим ряд рангов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, введенный так же, как и ранее, и зададим величины R_i следующим образом: пусть правее y_1 имеется R_1 рангов, больших y_1; правее y_2 – R_2 рангов, больших y_2 и т.д. Тогда, если обозначить $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}$, то выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла определяется формулой

$$\tau_B = \frac{4R}{n(n-1)} - 1, \tag{16.6}$$

где n – объем выборки.

Замечание. Легко убедиться, что коэффициент Кендалла обладает теми же свойствами, что и коэффициент Спирмена.

Для проверки нулевой гипотезы H_0: $\tau_г = 0$ (генеральный коэффициент ранговой корреляции Кендалла равен нулю) при альтернативной гипотезе H_1: $\tau_г \neq 0$ необходимо найти критическую точку:

$$T_{кр} = z_{kp}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}, \qquad (16.7)$$

где n – объем выборки, а $z_{кр}$ – критическая точка двусторонней критической области, определяемая из условия $\Phi(z_{kp}) = \frac{1-\alpha}{2}$ по таблицам для функции Лапласа.

Если $|\tau_В| < T_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается (ранговая корреляционная связь между признаками незначима).

Если $|\tau_В| > T_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается (между признаками существует значимая ранговая корреляционная связь).

Лекция 17.

Регрессионный анализ.

Рассмотрим выборку двумерной случайной величины (X, Y). Примем в качестве оценок условных математических ожиданий компонент их условные средние значения, а именно: условным средним $\bar{y}_x$ назовем среднее арифметическое наблюдавшихся значений Y, соответствующих $X = x$. Аналогично условное среднее $\bar{x}_y$ - среднее арифметическое наблюдавшихся значений X, соответствующих $Y = y$. Уравнения регрессии Y на X и X на Y:

$$M(Y/x) = f(x), \quad M(X/y) = \varphi(y).$$

Условные средние $\bar{y}_x$ и $\bar{x}_y$ являются оценками условных математических ожиданий и, следовательно, тоже функциями от x и y, то есть

$$\bar{y}_x = f^*(x) - \qquad (17.1)$$

- выборочное уравнение регрессии Y на X,

$$\bar{x}_y = \varphi^*(y) - \qquad (17.2)$$

- выборочное уравнение регрессии X на Y.

Соответственно функции $f^*(x)$ и $\varphi^*(y)$ называются выборочной регрессией Y на X и X на Y, а их графики – выборочными линиями регрессии. Выясним, как определять параметры выборочных уравнений регрессии, если сам вид этих уравнений известен.

Пусть изучается двумерная случайная величина (X, Y), и получена выборка из n пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_n, y_n). Будем искать параметры прямой линии среднеквадратической регрессии Y на X вида $Y = \rho_{yx}x + b$, (17.3)

Подбирая параметры ρ_{yx} и b так, чтобы точки на плоскости с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) лежали как можно ближе к прямой (22.3). Используем для этого метод наименьших квадратов и найдем минимум функции

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2 . \qquad (17.4)$$

Приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho} &= 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned} .$$

В результате получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b:

$$\begin{cases} \left(\sum x^2\right)\rho + \left(\sum x\right)b = \sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho + nb = \sum y \end{cases} . \qquad (17.5)$$

Ее решение позволяет найти искомые параметры в виде:

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}; \quad b = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} . \qquad (17.6)$$

При этом предполагалось, что все значения X и Y наблюдались по одному разу.

Теперь рассмотрим случай, когда имеется достаточно большая выборка (не менее 50 значений), и данные сгруппированы в виде *корреляционной таблицы*:

Y	X				
	x_1	x_2	…	x_k	n_y
y_1	n_{11}	n_{21}	…	n_{k1}	$n_{11}+n_{21}+\ldots+n_{k1}$

y_2	n_{12}	n_{22}	…	n_{k2}	$n_{12}+n_{22}+…+n_{k2}$
…	…	…	…	…	……………..
y_m	n_{1m}	n_{2m}	…	n_{km}	$n_{1m}+n_{2m}+…+n_{km}$
n_x	$n_{11}+n_{12}+…$ $+n_{1m}$	$n_{21}+n_{22}+…$ $+n_{2m}$	…	$n_{k1}+n_{k2}+…+n_{km}$	$n=\sum n_x = \sum n_y$

Здесь n_{ij} – число появлений в выборке пары чисел (x_i, y_j).

Поскольку $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$, $\bar{y} = \dfrac{\sum y}{n}$, $\overline{x^2} = \dfrac{\sum x^2}{n}$, заменим в системе (17.5) $\sum x = n\bar{x}$, $\sum y = n\bar{y}$, $\sum x^2 = n\overline{x^2}$, $\sum xy = \sum n_{xy}xy$, где n_{xy} – число появлений пары чисел (x, y). Тогда система (17.5) примет вид:

$$\begin{cases} (n\overline{x^2})\rho_{yx} + (n\bar{x})b = \sum n_{xy}xy \\ (\bar{x})\rho_{yx} + b = \bar{y} \end{cases}. \qquad (17.7)$$

Можно решить эту систему и найти параметры ρ_{yx} и b, определяющие выборочное уравнение прямой линии регрессии:

$$\bar{y}_x = \rho_{yx}\bar{x} + b.$$

Но чаще уравнение регрессии записывают в ином виде, вводя выборочный коэффициент корреляции. Выразим b из второго уравнения системы (17.7):

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}.$$

Подставим это выражение в уравнение регрессии: $\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x})$. Из (17.7)

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n(\overline{x^2} - (\bar{x})^2)} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x^2}, \qquad (17.8)$$

где $\tilde{\sigma}_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$. Введем понятие выборочного коэффициента корреляции

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}$$

и умножим равенство (17.8) на $\dfrac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}$: $\rho_{yx}\dfrac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = r_B$, откуда $\rho_{yx} = r_B\dfrac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}$. Используя это соотношение, получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}(x - \bar{x}) \ . \qquad (17.9)$$

Лекция 18.

Однофакторный дисперсионный анализ.

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2,\ldots, X_p$ распределены нормально и имеют одинаковую дисперсию, значение которой неизвестно. Найдем выборочные средние по выборкам из этих генеральных совокупностей и проверим при заданном уровне значимо-сти нулевую гипотезу H_0: $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_p)$ о равенстве всех математических ожиданий. Для решения этой задачи применяется метод, основанный на сравнении дисперсий и названный поэтому дисперсионным анализом.

Будем считать, что на случайную величину X воздействует некоторый качественный фактор F, имеющий p уровней: $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Требуется сравнить «факторную дисперсию», то есть рассеяние, порождаемое изменением уровня фактора, и «остаточную дисперсию», обусловленную случайными причинами. Если их различие значимо, то фактор существенно влияет на X и при изменении его уровня групповые средние различаются значимо.

Будем считать, что количество наблюдений на каждом уровне фактора одинаково и равно q. Оформим результаты наблюдений в виде таблицы:

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	…	F_p
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2p}
…	…	…	…	…
q	x_{q1}	x_{q2}	…	x_{qp}
Групповое среднее	$\bar{x}_{гр1}$	$\bar{x}_{гр2}$	…	$\bar{x}_{грp}$

Определим общую, факторную и остаточную суммы квадратов отклонений от среднего:

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij} - \bar{x})^2 - \qquad (18.1)$$

- общая сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от общего среднего $\bar{x}$;

$$S_{факт} = q\sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_{грj} - \bar{x})^2 \; - \qquad (18.2)$$

- факторная сумма отклонений групповых средних от общей средней, характеризующая рассеяние между группами;

$$S_{ост} = \sum_{i=1}^{q} (x_{i1} - \bar{x}_{гр1})^2 + \sum_{i=1}^{q} (x_{i2} - \bar{x}_{гр2})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q} (x_{ip} - \bar{x}_{грp})^2 \; - \qquad (18.3)$$

- остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своего группового среднего, характеризующая рассеяние внутри групп.

Замечание. Остаточную сумму можно найти из равенства

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} .$$

Вводя обозначения $R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$, $P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$, получим формулы, более удобные для расчетов:

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} R_j\right)^2}{pq}, \qquad (18.1`)$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{p} R_j^2}{q} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} R_j\right)^2}{pq} . \qquad (18.2`)$$

Разделив суммы квадратов на соответствующее число степеней свободы, получим общую, факторную и остаточную дисперсии:

$$s_{общ}^2 = \frac{S_{общ}}{pq - 1}, \; s_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{p - 1}, \; s_{ост}^2 = \frac{S_{ост}}{p(q - 1)} . \qquad (18.4)$$

Если справедлива гипотеза H_0, то все эти дисперсии являются несмещенными оценками генеральной дисперсии. Покажем, что проверка нулевой гипотезы сводится к сравнению факторной и остаточной дисперсии по критерию Фишера-Снедекора.

1. Пусть гипотеза H_0 правильна. Тогда факторная и остаточная дисперсии являются несмещенными оценками неизвестной генеральной дисперсии и, сле-

довательно, различаются незначимо. Поэтому результат оценки по критерию Фишера-Снедекора F покажет, что нулевая гипотеза принимается. Таким образом, если верна гипотеза о равенстве математических ожиданий генеральных совокупностей, то верна и гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

2. Если нулевая гипотеза неверна, то с возрастанием расхождения между математическими ожиданиями увеличивается и факторная дисперсия, а вместе с ней и отношение $F_{набл} = \frac{s^2_{факт}}{s^2_{ост}}$. Поэтому в результате $F_{\text{набл}}$ окажется больше $F_{\text{кр}}$, и гипотеза о равенстве дисперсий будет отвергнута. Следовательно, если гипотеза о равенстве математических ожиданий генеральных совокупностей ложна, то ложна и гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

Итак, метод дисперсионного анализа состоит в *проверке по критерию F нулевой гипотезы о равенстве факторной и остаточной дисперсий.*

Замечание. Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то гипотеза о равенстве математических ожиданий генеральных совокупностей верна. При этом нет необходимости использовать критерий F.

Если число испытаний на разных уровнях различно (q_1 испытаний на уровне F_1, q_2 – на уровне F_2, …, q_p - на уровне F_p), то

$$S_{общ} = (P_1 + P_2 + \ldots + P_p) - (R_1 + R_2 + \ldots + R_p),$$

где $P_j = \sum_{i=1}^{q_j} x_{ij}^2$ - сумма квадратов наблюдавшихся значений признака на уровне F_j,

$R_j = \sum_{i=1}^{q_j} x_{ij}$ - сумма наблюдавшихся значений признака на уровне F_j. При этом объем выборки, или общее число испытаний, равен $n = q_1 + q_2 + \ldots + q_p$.

Факторная сумма квадратов отклонений вычисляется по формуле

$$S_{факт} = \left(\frac{R_1^2}{q_1} + \frac{R_2^2}{q_2} + \ldots + \frac{R_p^2}{q_p} \right) - \frac{(R_1 + R_2 + \ldots + R_p)^2}{n} .$$

Остальные вычисления проводятся так же, как в случае одинакового числа испытаний:

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт}, \quad s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1}, \quad s^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{n-p}.$$

3.2 Методические указания для подготовки к практическим и лабораторным занятиям

При подготовке к практическим и лабораторнам занятиям целесообразно пользоваться планом, представленным в учебно-методической карте дисциплины «Математика».

Тщательно проработать лекционный материал и соответствующие учебные пособия по теме каждого практического занятия. Прорешать типовые задачи домашнего задания и при необходимости обратиться к преподавателю за консультацией.

Выполнение лабораторной работы целесообразно разделить на несколько этапов:

- Формулировка и обоснование цели работы;
- Определение теоретического аппарата, применительного к данной теме;
- Выполнение заданий;
- Анализ результата;
- Выводы.

3.3 Методические указания по выполнению РГР

Прежде чем приступать к выполнению РГР, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги.   Все листы заполняются только с одной стороны. Номера листов проставляются в верхнем правом углу. Текст на листе ограничивается рамкой: сверху и снизу — 2 — 2,5 см., слева и справа — 2 — 2.5 см.

Каждая РГР начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа укалывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть здана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

3.4 Методические указания по выполнению контрольной работы заочникам

Основной формой обучения студентов заочников является самостоятельная работа: она включает в себя изучение теоретического материала, решение задач, выполнение контрольной работы.

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работа, выполненная без соблюдения этих правил, не зачитывается и возвращается студенту для переработки.

1. Контрольную работу выполнять в тетради пастой или чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, название дисциплины.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольная работа, содержащая не все задания, а также содержащая задачи не своего варианта, не зачитывается.

4. Вариант контрольной работы студент выбирает по последней цифре номера зачетной книжки.

5. Решение задач надо располагать в порядке, указанном в заданиях, сохраняя номера задач.

6. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. Если несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

7. После получения прорецензированной работы (как зачтенной, так и не зачтенной) студент должен исправить в ней отмеченные ошибки и недочеты. В связи с этим следует оставлять в конце тетради чистые листы для работы над ошибками. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

8. В конце работы следует указать литературу, которую изучал студент, выполняя данную работу.

9. Зачтенная контрольная работа с рецензиями обязательно предъявляете на зачете и экзамене.

4. ОРГАНИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

4.1 Комплект заданий для конторольных работ

Ниже приведены примерные варианты контрольных работ для студентов дневного отделения.

Тема: Аналитическая геометрия

Вариант 0

1. Записать уравнение прямой, проходящей точки M_1 (—1,2) и M_2(—3, —2). Найти значения параметров k и b для этой прямой.

2. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x — 12y — 65 = 0$ и $5x — 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь.

3. Дана кривая $25x^2 + 16y^2 – 150x - 32y - 159 == 0$.

3.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.

3.2. Найти координаты центра его симметрии.

3.3. Найти его большую и малую полуоси.

3.4. Записать уравнение фокальной оси.

3.5. Построить данную кривую.

4. Дана кривая x^2 -10x + 2y + 25 = 0.

4.1. Доказать, что данная кривая — парабола.

4.2. Найти координаты её вершины.

4.3. Найти значение её параметра р.

4.4. Записать уравнение её оси симметрии.

4.5. Построить данную параболу.

Литература

1. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.

2. Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк.,2003г.

3. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и

задачах". Москва - наука, 2002г.

Тема. Интегральное исчисление

Вариант 0

1. $\boxed{\int (\sin 7x + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^3)dx}$.   4. $\boxed{\int x^2 \cos 3x dx}$.

2. $\boxed{\int \frac{dx}{\sin^2 5x}}$.   5. $\boxed{\int x arctg 4x dx}$.

3. $\boxed{\int (\sqrt{1-4x} - \sqrt[3]{2x+1})dx}$.   6. $\boxed{\int \frac{x^2+3x}{(x+1)(x-2)}dx}$.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2, y = 2 - x^2$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Литература

1. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.

2. . Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк.,2003г.

3. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г.

Тема. Элементы дискретной математики

Вопросы к коллоквиуму

1.Множества, подмножества, операции над множествами.

2.Отношения, свойства отношений.

3.Соответствия.

4.Алгебраические структуры. Изоморфизм и гомоморфизм алгебраических структур.

5.Алгебра высказываний. Логические операции и их свойства.

6.Функции алгебры логики.

7.Минимизация булевых функций.

8.Графы. Матрица инцидентности.

9. Пути и циклы графа.

10.Взвешенный граф. Проблема коммивояжера.

Задачи для самостоятельного решения

1. Верно ли, что $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?

2. Какие из перечисленных множеств равны: A=$\{1, 3, 5, 7\}$; B=$\{3, 5, 5, 7, 1, 1\}$; O$\{\{3, 5, 7\}, 1\}$; B=$\{\{3, 5\}, \{1, 7\}\}$; E=$\{\{1, 3, 5, 7\}\}$?

3. Верно ли равенство $\{x \in R \mid x^2 - 8x + 3 = 0\} = \varnothing$?

4. Множество M содержит 5 элементов. Сколько подмножеств содержит множество (булеан множества M)?

5. Из 105 студентов одного потока 72 изучают английский язык, 47 — немецкий, 36 — оба языка, остальные изучают французский. Сколько студентов изучают французский язык? Постройте диаграмму Венна.

6. Верно ли равенство: $\{x \in R | x^2 - 4x + 5 = 0\} = \varnothing$?

7. Пусть A — множество всех трапеций, B — множество всех параллелограммов. Верно ли утверждение, что B = A?

8. Отряд из 92 школьников собрался в поход, 47 из них приготовили бутерброды с колбасой, 38 — с сыром, 42 — с маслом, 28 — с колбасой и сыром, 31 — с колбасой и маслом, 26 — с сыром и маслом, 25 школьников взяли с собой бутерброды всех сортов. Некоторые взяли только по бутылке молока. Сколько их было?

Вариант 0

1. Пути и циклы графа.
2. Логические операции и их свойства.
3. Отношения, свойства отношений.
4. Составить таблицу истинности для формулы $x \wedge y \vee z \Leftrightarrow \bar{x}$.
5. Даны множества: A=$\{-1, -2, -3, 4, 5\}$ и B=$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Найти $A \cup B, A \cap B, B'_A$.

Литература

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, 2001г.

2. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы: Учеб. пособие, 2001г.

Тема. Вариационные ряды

Вариант 0

1. Дан вариационный ряд. Построить полигон распределения частот и кумуляту. Найти числовые характеристики.

x_i	-1	0	2	5	7
m_i	6	8	9	4	2

2. Найти числовые характеристики интервального ряда. Построить гистограмму и кумуляту.

x_i	(15 – 20)	(20 – 25)	(25 –30)	(30 – 35)	(35 –40)	(40 – 45)
m_i	1	3	5	4	2	2

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учеб. Пособие: Рек. УМО вузов/А. И. Кибзун и др. – М.: Физматлит, 2002г.

3. Ермолов О. Ю. Математическая статистика для психологов.,2003 г.

Тема. Непараметрические критерии

Вариант 0

4. По данным анкетного обследования получены два ряда групп работников, упорядоченных в соответствии с интересом к выполняемой работе ($У_1$) и по соответствию образования и работе ($У_2$). Определить есть ли корреляция между этими переменными.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$У_1$	3	3	3	3	3	6,5	6,5	8	9	10	11	12	13	14
$У_2$	1	5,5	9	10	11,5	3	8	4	2	7	5,5	11,5	13	14

2. Психолог решает задачу: будет ли удовлетворенность работой на данном предприятии распределена равномерно по следующим альтернативам (градациям):1 - Работой вполне доволен; 2 - Скорее доволен, чем не доволен; 3-Трудно сказать, не знаю, безразлично; 4-Скорее недоволен, чем доволен; 5 - Совершенно недоволен работой. Для решения этой задачи производится опрос случайной выборки из 65 респондентов (испытуемых) об удовлетворенности работой: «В какой степени Вас устраивает Ваша теперешняя работа?», причем ответы должны даваться согласно вышеозначенным альтернативам. Полученные ответы представлены в таблице.

Альтернативы	1	2	3	4	5
Частота выбора	8	22	14	9	12

4.2 Комплект заданий для РГР

Ниже приведены примерные варианты РГР для студентов дневного отделения, а также теоретические вопросы для защиты РГР.

РГР №1. Элементы линейной и векторной алгебры

Вариант 0

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$

Найти матрицу D = (3A - 4B)C.

2. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

3. Решить матричное уравнение $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}.$

4. Найти такие значения параметров p и q , если они существуют, при

которых ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & p & -1 \\ 0 & -5 & 6 & q \end{bmatrix}$ равен двум.

5.Относительно канонического базиса в R_3 дано четыре вектора $f_1(1,-1,-1)$, $f_2(1,1,-1)$, $f_3(1,1,1)$, x(4,0,-2). Доказать, что векторы f_1,f_2,f_3 можно принять за новый базис в R_3. Найти координаты вектора x в базисе f_1.

6.Доказать, что система $\begin{cases} x1 + x2 - 7x3 - x4 = 6, \\ 4x1 + x2 + 2x3 - x4 = 0, \\ 3x1 - 4x3 - x4 = 6, \\ x1 + x2 + 3x4 = 3 \end{cases}$ имеет единственное

решение. Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. Решить систему методом Гаусса.

7.Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x1 + 5x2 - x3 + x4 + x5 = -3, \\ 3x1 + x2 + 3x3 + 3x4 - 3x5 = -3, \\ -x1 + x3 - x4 + 3x5 = 2, \\ -x1 + 2x2 - 2x3 - x4 + 2x5 = 0. \end{cases}$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. Найти частное решение, если $x_4 = -8$, $x_5 = -4$.

8. Вычислить |[a,b|], если a = 3p + r, b= p – 3r, |p| = 7, |r| $=\sqrt{2}$, $(\widehat{p,r})$= 45°.

9. Вычислить объём пирамиды, заданной координатами своих вершин: A(-4,2,2); B(2,-1,-1); C(2,0,-2); D(0,-3,0).

10. Линейный оператор *A* действует в $\to$R3 R3 по закону Ax = ($4x_1 - 5x_2 + 2x_3, 5x_1 - 7x_2 + 3x_3, 6x_1 - 9x_2 + 4x_3$). Найти матрицу *A* этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор x(1,1,1) является собственным для матрицы *A*. Найти собственное число λ_o, соответствующее вектору x. Найти другие собственные числа, отличные от λ_o. Найти все собственные векторы матрицы *A*.

Вопросы для защиты РГР

1. Определители второго, третьего, четвертого и n - го порядка. Способы их вычисления.

2. Свойства определителей (с доказательством).
3. Решение систем линейных уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера.
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Матрицы, основные понятия, действия над матрицами.
6. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений с помощью матриц.
7. Векторы, основные понятия, линейные операции над векторами.
8. Проекция вектора на ось, свойства проекции.
9. Модуль вектора, расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении, направляющие косинусы, координаты единичного вектора.
10. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства, физический смысл, вычисление.
11. Нахождение угла между векторами. Условия перпендикулярности и параллельности векторов.
12. Векторное произведение векторов. Определения, свойства, физический смысл, вычисление. Геометрический смысл.
13. Понятие линейного пространства.
14. Линейный оператор. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Литература

1. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.

2. . Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк.,2003г.

3. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г..

4. Юрьева Т.А. Методические указания к РГР «Элементы линейной и векторной алгебры».

РГР № 2. Введение в анализ. Дифференцирование.

Вариант 0

1. Найти область определения функции $\int(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$.

2. Дана функция *f(x)* $= \dfrac{1+x}{1-x}$. Найдите *f[f(x)].*Вычислите 2*f*(*f*(2)).

3. Найти пределы последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^4 - n + 5}{2n^4 + 5n - 1}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n} - n^2)n^2}{3n+4}.$$

4. Найти пределы функций

$$\lim_{x\to\infty}(3x+1)\sin\frac{5}{x+1}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{3^{1/x}-1}{4^{1/x}-1}; \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{3x+1};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{5^x - 5}{(x^2-1)\ln 5}$$

5. Найти производные от данных функций:

а) $y = 3\left(\dfrac{2-x}{x^2} + 4\sqrt{5x+4}\right)$, y'(1);

б) $y = \sqrt{15}ark\cos\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{ctg^2 5x}{10} + \dfrac{ctg10}{\sin^2 10}x, y'(2);$

в) $y = 3\left[e^{3x}\ln(4x+6) + tg8x - (3\ln 6)\cdot x\right], y'(0).$

6. Доказать, что функция *z= sin (z + ay)* удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

7. К графику функции $y = \sqrt{\ } x$ в точке с абсциссой *x= 7* проведена касательная. Найти абсциссу точки пересечения касательной с осью *OX.*

6. Найти *dy* , если $y = \dfrac{x + 3\sqrt{5+x^2}}{2}$. Вычислить значение *dy,*

если $x = 2$ $\Delta x = 0{,}02$.

7. Дана функция $z = x^2+xy+y^2$ и точки $M_o(1; 2)$ и $M_1(l,02; 1,96)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки Мо в точку M_1 (ответы округлить до сотых).

10. Дана функция $y = x^{2+\frac{16}{x}-16}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [1;4].

11. Дана функция $z = (x — y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном кривыми $y^2 = x, x = 2.$

12.Провести полное исследование функции $y = \frac{12}{x^2-4}$ и начертить ее график.

Вопросы для защиты РГР

1.Последовательность. Предел последовательности.

2.Элементарные функции их свойства и графики.

3.Предел функции.

4.Бесконечно малые функции и основные теоремы и них.

5.Эквивалентные бесконечно малые, их применение к вычислению пределов.

6.Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.

7.Определение производной, геометрический смысл производной.

8.Основные правила дифференцирования функций.

9.Производные высших порядков функций заданных явно. Физический смысл второй производной.

10.Производные высших порядков функций заданных неявно, параметрически.

11.Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.

12.Дифференциалы различных порядков.

13.Необходимые условия возрастания и убывания функции.

14.Достаточные условия возрастания и убывания функции.

15.Экстремум функции. Необходимые условия экстремума функции.

16.Достаточные условия существования экстремума функции.

17.Выпуклость, вогнутость, точка перегиба графика функции.

Достаточный признак выпуклости графика функции.

18.Асимптоты графика функции.

19.Частные производные и их геометрический смысл.

20.Частные производные высших порядков.

21.Частные дифференциалы и полный дифференциал.

22.Определение экстремума. Необходимое и достаточное условия существования экстремума.

Литература

1. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.

2. . Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк.,2003г.

3. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г.

РГР № 3 Случайные события

Вариант 0

1. Легкий диск, по краю которого нанесена равномерная шкала от 0 до 1, сильно ся, а затем, спустя некоторое время, резко тормозится. Какова вероятность того, что отсчет, снятый со шкалы с помощью визира, окажется в интервале от 0,3 до 0,7?

2. Из полной колоды карт (52 карты) вынули три карты. С какой вероятностью будет вынута I, семерка, туз?

3. Три стрелка стреляют в одну мишень, при этом известно, что вероятность попадания с одного выстрела: 0,8 - у первого стрелка, 0,7 - у второго и 0,6 - у третьего стрелка. Найти вероятность появление в мишени пробоины в результате одновременного выстрела всех троих стрелков.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,3. Стрельба ведется тельно до первого попадания. Определить вероятность того, что придется стрелять третий раз.

5. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012, 0,010, 0,006, 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта может произойти хотя бы одно из этих событий.

6. Цель состоит из четырех частей и может быть поражена при попадании снаряда в одну из частей. При попадании снаряда в первую часть вероятность поражения цели равна 0,2, во вторую - 0,4, в третью - 0,5, в четвертую - 0,3. Известны также вероятности попадания снаряда в каждую часть, они соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,1; 0,2. Определить вероятность поражения цели при одном выстреле.

7. В библиотеке имеются книги только по технике 10 и математике 12 книг. Вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

8. Известно, что 3/5 всего числа изготавливаемых фабрикой изделий является продукция первого сорта. Чему равна вероятность того, что партия из 200 изделий окажется наивернейшее число изделий первого сорта?

9. Доля коротких волокон в партии хлопка 1/10. Случайным образом отобрано 100 волокон. Найти вероятность того, что число коротких волокон окажется от 20 до 30.

10. При условии предыдущей задачи установить величину наибольшего отклонения частости коротких волокон, от вероятности 0,1, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

11. Обезьяне позволили 7 раз ударить по клавишам пишущей машинки (для простоты считаем, что на клавиатуре машинки 33 буквы русского алфавита и 10 цифр). Какова вероятность того, что она напечатает слово: а) «приматы»; б) «человек».

12. Магазин приобретает чай у двух фабрик, при этом первая из них составляет 2/3 всего товара. Продукция высшего сорта для первой фабрики составляет 90%, а для второй 80%. Какова вероятность того, что купленная наугад пачка чая будет высшего сорта изготовленная на второй фабрике.

13.Завод отправил на базу 4000 доброкачественных изделий. Вероятность что в пути изделие повредится равно 0.0005. Найти вероятность того, что на базу прейду 4 поврежденные детали.

14. В кошельке лежат 8 монет достоинством в 5 копеек и 2 монеты достоинством в 3 копейки. Наудачу выбирается монета и бросается 5 раз. Какова вероятность того, что в сумме будет 15 очков, если герб принимается за «0»?

15. Менеджер рассматривает кандидатуру 8 человек, подавших заявление о приеме на работу. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в случайном порядке? Какова вероятность того, что они случайно будут приглашены на собеседование в зависимости от времени их прихода в офис?

16. Директор компании имеет 2 списка с фамилиями претендентов на работу. В 1-м списке - фамилии 6 женщин и 3 мужчин. Во 2-м списке оказались 4 женщины и 7 мужчин. Фамилия одного из претендентов случайно переносится из 1-го списка во 2-й. Затем фамилия одного из претендентов случайно выбирается из 2-го списка. Если предположить, что эта фамилия принадлежит мужчине, чему равна вероятность того, что из 1-го списка была перенесена фамилия женщины.

17. Судоходная компания организует средиземноморские круизы в течение летнего времени и проводит несколько круизов в сезон. Поскольку в этом виде бизнеса очень высокая конкуренция, то важно, чтобы все каюты зафрахтованного под круизы корабля были полностью заняты туристами, тогда компания получит прибыль. Эксперт по туризму, нанятый компанией, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, будет равна 0,92, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и с вероятностью — 0,75, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в

течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,23. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

Вопросы для защиты РГР

1. Случайные события. Основные определения.

2. Алгебра событий.

5.Различные подходы к введению понятия вероятности.

6.Практически невозможное и практически достоверное событие.

7.Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

8.Теорема умножения вероятностей, зависимых событий.

9.Сложение совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из событий.

10.Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

11.Формула Бернулли, Пуассона.

12.Локальная теорема Лапласа.

13.Интегральная теорема Лапласа.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учеб. Пособие: Рек. УМО вузов/А. И. Кибзун и др. – М.: Физматлит, 2002г.

3. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Теория вероятностей: Практикум.

РГР № 4 Случайные величины

ВАРИАНТ 0

1. Задан ряд распределения случайной величины *X*. Найдите: а) M(X); б) D(X) и σ(x); в) F(x) и постройте ее график.

x	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

2. Задана F(x) - функция распределения случайной величины *X.* Найдите: а) f(x); б) M(X), D(X), σ(x); в) постройте графики F(x) и f(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, \text{при } 0 < x \le 5, \\ 1, \text{при } x > 5. \end{cases}$$

3. Задана f(x) – плотность вероятности случайной величины *X.* Найдите: а) F(x); б) M(X), D(X), σ(x); в) постройте графики F(x) и f(x).

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{18}, \text{при } 0 < x \le 6, \\ 0, \text{при } x > 6. \end{cases}$$

4. Из 10 телевизоров 4 оказались фирмы "Сони". Наугад для осмотра выбрано 3. Составьте закон распределения числа телевизоров фирмы "Сони" среди 3 отобранных. Найдите числовые характеристики.

5. Случайная величина *X,* сосредоточенная в интервале *[-1, 4],* задана квадратичной функцией F(x)= $ax^2 + bx + c$, имеющий максимум при $x = 4$. Найдите параметры *a, b, c,* плотность вероятностей f*(x)* и вычислите вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (0; 2). Постройте графики функций f(x) и F*(x)*.

6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X* соответственно равны *M(X)=9, D(x)=0,8.* Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) 3x - 2, б) 6x, в) 3x+2.

7. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали равна 25*,* среднее квадратическое отклонение 2. Найдите: а) вероятность, что диаметр наудачу взятой детали будет больше 20 и меньше 27; б) вероятность, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не больше, чем на 1.

8. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 10мм. Найдите вероятность

того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

9. Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1мин., равно двум. Найдите вероятность того, что за 4 мин. поступит: а) три вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов. Предполагается, что поток вызовов простейший.

10. Систематическая ошибка измерения дальности радиолокатором равна 20м. а случайная ошибка имеет среднее квадратическое отклонение 75 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?

11. Дано $P(|X - M(x)| < \varepsilon) > 0,95$ и D(X)=0,04. Пользуясь неравенством Чебышева, найди ε.

12. Сколько надо провести испытаний, чтобы имело место неравенство

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0,1\right) > 0,97$ если p=0,7.

13. Принимая вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками равной 3/4, оцените вероятность того, что среди 3000 стеблей число таких стеблей будет от 2190 до 2310.

14. Квантиль уровня 0,25 нормально распределенной случайной величины X равен 35, а квантиль уровня 0,8 равен 70. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

15. Пусть T (час) - время, необходимое для ремонта грузового автомобиля, удовлетворяет экспоненциальному распределению с параметром λ= 0,16. Какова вероятность того, что время ремонта одного автомобиля не превышает 7 часов, и сколько часов в среднем затрачивается на ремонт одного автомобиля?

17. Дневная добыча угля в шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 725 тонн и стандартным отклонением 55 тонн. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней

мере, 760 тонн угля. Определите долю рабочих дней, в которых будет добыто от 780 до 800 тонн угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 740 тонн.

Вопросы для защиты РГР

14. Определение дискретной и непрерывной случайных величин. Ряд распределения, многоугольник распределения.
15. Функция распределения, свойства.
16. Плотность распределения, свойства.
17. Математическое ожидание. Математическое ожидание как среднее значение случайной величины. Свойства.
18. Дисперсия и ее свойства.
19. Биномиальное распределение.
20. Распределение Пуассона.
21. Равномерное распределение.
22. Нормальное распределение.
23. Вероятность заданного отклонения.
24. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок.
25. Системы случайных величин. Распределение системы случайных величин.
26. Функция распределения системы и ее свойства.
27. Плотность распределения системы и ее свойства.
28. Оценка отклонения распределения случайной величины от нормального.
29. Т- распределение Стьюдента.
30. Распределение χ^2.
31. Теорема Чебышева.
32. Неравенство Чебышева.
33. Теорема Бернулли.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учеб. Пособие: Рек. УМО вузов/А. И. Кибзун и др. – М.: Физматлит, 2002г.

3. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Теория вероятностей: Практикум.

Комплект заданий для лабораторных работ

Тема. Точечные оценки. Ошибки выборки. Определение объема выборки.

Выполняется лабораторная работа из пособия в списке литературы под номером 2.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике. Благовещенск, 2006.

Тема. Интервальное оценивание

Выполняется лабораторная работа из пособия в списке литературы под номером 2.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике. Благовещенск, 2006.

Тема. Однофакторный дисперсионный анализ

Выполняется лабораторная работа из пособия в списке литературы под номером 2.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике. Благовещенск, 2006.

Тема. Метод наименьших квадратов.

Выполняется лабораторная работа из пособия в списке литературы под номером 2.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике. Благовещенск, 2006.

Тема. Корреляционный анализ

Выполняется лабораторная работа из пособия в списке литературы под номером 2.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа, 2003г.

2. Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н., Шевченко И.Н. Лабораторные работы по математической статистике. Благовещенск, 2006.

4.3 Тесты для самоконтроля

Линейная алгебра

Тест1

ЗАДАНИЕ N 1.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда сумма элементов, расположенных на главной диагонали этой матрицы, равна…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) 5 2) 13 3) –7 4) –5

ЗАДАНИЕ N 2.

Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$. Тогда матричная форма записи этой системы имеет вид…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ N 3.

Если (x_0 ; y_0) решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$, тогда x_0+y_0 равно…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) –0,5 2) 3,5 3) 0,5 4) –3,5

ЗАДАНИЕ N 4.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда алгебраическим дополнением элемента a_{21} является… ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) 5 2) 4 3) 1 4) –4

Тест 2

№	Задание	Ответ
1	Найти $X=AB-3C^2$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. В ответ записать сумму элементов главной диагонали матрицы X	
2	Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = 42 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. В ответ записать сумму элементов главной диагонали матрицы X.	
3	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 16 \end{vmatrix}$.	

4	Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16. \end{cases}$ В ответ записать сумму x+y+z.	
5	Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. В ответ записать сумму элементов главной диагонали матрицы A^{-1}.	
6	Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.	
7	Найти сумму алгебраических дополнений элементов второй строки матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.	
8	Определить число линейно независимых строк матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix}$.	
9	Решить матричное уравнение XA=B, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.	
10	Найти общее решение системы $\begin{cases} x+y-z-2t-f=0, \\ x+y+3z+4t-f=0, \\ x+y-5z-8t-f=0. \end{cases}$	

Векторна алгебра

Тест 1

1. Даны точки A(0, –2, 3); B(2, 4, –1). Найти расстояние между ними.

1) 7;   2) $2\sqrt{2}$;   3) 12;   4) $2\sqrt{14}$;   5) 8.

2. Выяснить, при каком значении α векторы ортогональны: $\vec{a} = (-2, 3, \alpha)$; $\vec{в} = (4, -6, -8)$.

1) $3\frac{1}{4}$;   2) –2;   3) 0;   4) –4;   5) 1.

3. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = (-1, 0, 3)$; $\vec{в} = (2, 1, -2)$.

1) 6;   2) $\sqrt{35}$;   3) $2\sqrt{14}$;   4) 3;   5) –8.

4. Выяснить, при каком значении α векторы коллинеарны: $\bar{a} = (-2, 3, \alpha)$; $\bar{в} = (4, -6, -8)$.

1) 3;   2) –2;   3) 0;   4) 1;   5) 4.

5. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 3, 1)$.

1) $\sqrt{19}$;   2) 4;   3) $2\sqrt{10}$;   4) 11;

5) 8.

6. Вычислить смешанное произведение векторов $\bar{a} = (1, 0, 1)$; $\bar{в} = (0, -1, 2)$; $\bar{c} = (3, -2, 0)$.

1) –5;   2) 7;   3) 1;   4) –7;   5) 8.

7. Найти косинус угла между векторами $\bar{a} = (-1, 0, 2)$; $\bar{в} = (-2, 1, 0)$.

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{2}{5}$; 5) –1.

8. Определить, при каком значении α векторы компланарны: $\bar{a} = (1, 2, 4)$; $\bar{в} = (0, -3, \alpha)$; $\bar{c} = (0, -1, -2)$.

1) 3;   2) –6;   3) 0;   4) –4;   5) 1.

9. Вычислить векторное произведение векторов $\bar{a} = (1, 0, 2)$; $\bar{в} = (0, -3, -1)$. В ответе указать длину полученного вектора.

1) $\sqrt{3}$;   2) 2;   3) $\sqrt{33}$;   4) $\sqrt{46}$;   5) 5.

10. Найти длину вектора $\bar{a} + \bar{b}$, если $\bar{a} = (1, 0, 3)$; $\bar{b} = (-1, 1, -2)$.

1) 6;   2) $2\sqrt{2}$;   3) 2;   4) $\sqrt{2}$;   5) 1.

11. Определить, при каком значении $|\alpha|$ длина вектора $\bar{a} = (0, \alpha, 3)$ в 2 раза меньше длины вектора $\vec{в} = (-6, 0, 8)$.

1) $3\frac{1}{2}$;   2) 0;   3) $\frac{1}{4}$;   4) 1;   5) 4.

12. Определить, при каком значении $|\alpha|$ длины векторов $\bar{a} = (3, -1, \alpha)$ и $\bar{в} = (5, 6, 7)$ равны.

1) 3;   2) 9;   3) 0;   4) 4;   5) 10.

13. Даны точка $A(-1, 2, 1)$ и вектор $\overrightarrow{BA} = (-2, 1, -3)$. Найти координаты точки B. В ответе указать сумму координат точки B.

1) $2\sqrt{2}$;   2) 1;   3) 0;   4) –5;   5) 6.

Тест 2

1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$\bar{a} = (5, 0, -1)$; $\bar{b} = (0, 2, 1)$.

2. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах

$\bar{a} = (1, 1, 1)$; $\bar{b} = (2, 0, -1)$; $\bar{c} = (-3, 0, -2)$.

3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах

$\bar{a} = (-1, 5, 0)$; $\bar{b} = (2, -2, 0)$.

4. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах

$\bar{a} = (-3, 1, -1)$; $\bar{b} = (2, 0, -2)$; $\bar{c} = (1, 0, 4)$.

5. Образуют ли векторы базис?

$\bar{a} = (1, 1, 1)$; $\bar{b} = (2, 0, -1)$; $\bar{c} = (-3, 0, -2)$.

Аналитическая геометрия

Тест 1

1. Определить центр окружности $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

1) (1, –3);   2) (0, 3);   3) (3, 0);

4) (–1, 3);   5) (0, 4).

2. Определить тип линии $y^2 = 2x - 4$.

1) эллипс;   2) гипербола;

3) окружность;   4) парабола;

5) пересекающиеся прямые.

3. Определить тип линии $4(x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 1$.

1) окружность;   2) эллипс;

3) парабола; 4) гипербола;

5) пересекающиеся прямые.

4. Определить большую полуось эллипса $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$

1) 4; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) 9; 5) 3.

5. Определить координаты центра эллипса $\frac{(x-2)^2}{3}+(y+3)^2=1.$

1) (0, 2); 2) (2, –3); 3) (1, 3);

4) (2, 1); 5) (1, 1).

6. Точка B(1, –2, 3) является серединой отрезка AC, где A(–3, 2, 7). Найти координаты точки C. В ответе указать сумму ее координат.

1) 6; 2) 2; 3) – 11; 4) –2; 5) 8.

7. Определить тип линии $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{3}=1.$

1) парабола; 2) гипербола;

3) окружность; 4) эллипс;

5) пересекающиеся прямые.

8. Найти координаты точки C, если точка

B(0, 2, 3) середина отрезка AC, где A(1, –2, 0).

В ответе указать сумму координат точки C.

1) 0; 2) –2; 3) 11; 4) 2; 5) –6.

9. Определить тип линии $y^2=2x-4.$

1) эллипс; 2) гипербола;

3) окружность; 4) парабола;

5) пересекающиеся прямые.

Дифференциальное и интегральное исчисление

Тест 1

1. Найти угол наклона касательной к кривой $y=2x^2-3x+1$ в точке с абсциссой

$x = 1$ к оси Ox.

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 0; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $-\frac{\pi}{3}$.

2. Найти наименьшее целое значение x из промежутка убывания функции $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-1$.

1) 1; 2) 0; 3) 3; 4) –1; 5) 2.

3. Вычислить $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $y=\sin^2 x$.

1) 0; 2) –4; 3) –8; 4) 1; 5) 8.

4. Вычислить $\frac{\partial^3 u(-1;-1;0)}{\partial x\partial y\partial z}$, если $u=x\ln(yz)+x^3y^2z$.

1) 12; 2) –6; 3) 0; 4) –2; 5) 5.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x+1}$.

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) e; 4) ∞; 5) 2.

6. Вычислить $y'(0)$, если $y=\frac{x^2-1}{e^x}$.

1) e^{-1}; 2) 2; 3) 0; 4) 1; 5) $-e$.

7. Определить, при каком значении α ($\alpha = const$) касательная к графику функции $y=x^2+\alpha\cdot x+4$ в точке $x=-2$ параллельна оси Ox.

1) 2; 2) $\frac{3}{4}$; 3) 3; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 4.

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}$.

1) –1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) ∞; 5) $-\frac{1}{2}$.

9. Вычислить $y'(0)$, если $y=\frac{tg(2x)}{x+2}$.

1) 1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) 2; 5) $\frac{1}{2}$.

10. Найти наибольшее значение функции $f(x)=3x-x^3$ на отрезке [–2; 3].

1) –18; 2) 0; 3) 2; 4) –2; 5) 3.

11. Вычислить $y^{(4)}(0)$, если $y=ch2x$.

1) 2;   2) 16;   3) 0;   4) $\frac{1}{2}$;   5) 6.

12. Вычислить $\frac{\partial^3 u(-1,\ 1)}{\partial x \partial y^2}$, если $u = y^3 + y^2 \ln(2x + 3)$.

1) 2;   2) $\frac{1}{4}$;   3) $\frac{9}{4}$;   4) 6;   5) 4.

13. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 - x^2}$.

1) 0;   2) –2;   3) $\sqrt{2}$;   4) $-\infty$;   5) 1.

14. Найти угол наклона касательной к кривой

$y = x^3 - 3x + 1$ в точке с абсциссой $x = 1$ к оси Ox.

1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$;   3) $\frac{\pi}{4}$;   4) $\frac{\pi}{6}$;   5) $-\frac{\pi}{4}$.

15. Найти наименьшее целое значение x из промежутка возрастания функции

$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.

1) 2;   2) –3;   3) 3;   4) 0;   5) –1.

16. Вычислить $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $y = \cos^2 x$.

1) –8;   2) 0;   3) –1;   4)16;   5) 4.

17. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 20}$.

1) $arctg(x + 2) + C$;   2) $\ln(x^2 + 2)$; 3) $\frac{1}{4(x + 2)^2} + C$;   4) $\frac{1}{4} arctg\left(\frac{x + 2}{4}\right) + C$;

5) $\frac{1}{16} arctg\left(\frac{x + 2}{16}\right) + C$.

18. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$.

1) $-\frac{\pi}{2}$;   2) $\frac{\pi}{4}$;   3) π;   4) $\frac{\pi}{2}$;   5) $-\frac{\pi}{4}$.

19. Вычислить $\int \frac{(2x - 1)dx}{3x - 3x^2 + 8}$.

1) $-\frac{\ln\left|3x - 3x^2 + 8\right|}{3} + C$;   2) $\sin\left(\frac{x^2 + 8}{3}\right)$;

3) $arctg\frac{x^2-8}{3}$; 4) $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+8}{3}\right)+C$;

5) $\sqrt{3(x-1)^2+5}+C$.

20. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^4}$.

1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $-\frac{1}{3}$.

21. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

1) $\sqrt{8+2x-x^2}+C$; 2) $\frac{1}{3}\arcsin(x-1)$;

3) $\arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$; 4) $\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)$;

5) $\ln\left|x-1+\sqrt{8+2x-x^2}\right|+C$.

22. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$.

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi}{3}$.

Дискретная математика

Тест 1

ЗАДАНИЕ N 1.

Укажите правильную запись высказывания: “всякое рациональное число равно самому себе”

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\forall x\in Q, (x=x)$ 2) $\exists x\in Q, (x=x)$ 3) $\forall x\in Z, (x=x)$ 4) $\forall x\in Q, \exists x, (x=x)$

ЗАДАНИЕ N 2.

Объединением множеств {f,d,c,b,g,m,j} и {f,d,c,l,p,t,r} является множество…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) {f,d,c,b,g,m,j, l,p,t,r} 2) {f,d,c,b} 3){f,d,c,d,g,m,j} 4) {f,d,c,l,p,t,r}

ЗАДАНИЕ N 3.

В классе 35 учеников, из которых 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в кружке «Умелые руки», а 10 не ходят в эти кружки. Сколько «математиков» занимаются в кружке «Умелые руки»?

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

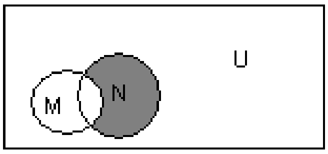
1) 6 2) 25 3) 11 4) 9

ЗАДАНИЕ N 4.

Какое из множеств {1, 4, 9, 16, 25}; {4, 9, 16, 25}; {1, 4} и {4, 9, 16} равно множеству $\{x^2 | x \in Z^+ \text{ и } 1 < x < 5\}$?

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:
1) {1, 4, 9, 16, 25} 2) {4, 9, 16, 25} 3) {1, 4} 4) {4, 9, 16}

ЗАДАНИЕ N 5.

Какому соотношению между множествами M и N соответствует диаграмма Венна: 

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:
1) MUN 2) M/N 3) N/M 4) U/M

ЗАДАНИЕ N 6.

Вы задали респонденту 8 вопросов, на каждый из которых он может ответить *«да»* или «*нет*». Определите число всех возможных ответов.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:
1) 16 2) 8 3) 2^8 4) 8^2

Случайные события

Тест 1

1. В задаче: « Производится два выстрела по мишени. Найти вероятность того, что мишень будет поражена один раз» сформулируйте испытание, событие, элементарные исходы, составной исход.

2. Бросают монету. Событие: А – выпадет герб. Сформулировать событие, противоположное данному.

3. Подбрасывается игральный кубик. Обозначим события: А — «выпадение 6 очков», В — «выпадение 4 очков», D — «выпадение 2 очков», С — «выпадение четного числа очков». Тогда событие С равно …

4. Студент должен сдать два экзамена. Событие А — « студент сдал первый экзамен», событие В — «студент сдал второй экзамен», событие С — «студент сдал оба экзамена». Тогда событие С равно …

5. Из букв слова «ЗАДАЧА» наугад выбирается одна буква. Событие — «выбрана буква К» является...

6. Из букв слова «МИР» наугад выбирается одна буква. Событие — «выбрана буква М» является …

7. Событие — «из урны, содержащей только белые шары, извлекают белый шар» является …

8. Два студента сдают экзамен. События: A — «экзамен сдаст первый студент», B — «экзамен сдаст второй студент» являются …

9. Равновозможные события — это события …

10. Испытание — бросают две монеты. Событие — «на одной из монет выпадет герб». Сколько элементарных исходов благоприятствуют событию?

11. В урне 12 шаров, ничем, кроме цвета, не отличающихся. Среди этих шаров 5 черных и 7 белых. Событие — «случайным образом извлекают белый шар». Для этого события число благоприятствующих исходов равно …, число всех исходов равно …

12. Вероятность события принимает любое значение из промежутка …

13. Вероятностью события A в данном испытании, называется …

14. Классическое определение вероятности применяется в случае, когда элементарные исходы …

15. Абонент забыл две последних цифры телефонного номера и, зная, лишь, что они различны, набрал их наудачу. Сколькими способами он это может сделать?

16. Сколькими способами можно пересадить 5 человек?

17. В студенческой группе, состоящей из 10 человек, нужно выбрать двух человек на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

18. Дана задача: «В круг вписан треугольник. В круг наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в треугольник?» Для решения этой задачи необходимо использовать …

19. Вероятность для студента сдать первый экзамен равна 0,6, второй — 0,4. Какова вероятность сдать либо первый, либо второй экзамен?

20. Вероятность для студента сдать первый экзамен равна 0,6, второй — 0,4. Какова вероятность сдать оба экзамена?

21. В урне 2 белых, 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

22. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,7 и 0,3 соответственно. Вероятность брака для первого станка равна 0,3, для второго равна 0,1. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь бракованная. Задача решается с использованием теоремы …

23. Формула полной вероятности используется в том случае, если событие А может произойти лишь при условии, что произойдет одно из …

24. Задача «Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,7 и 0,3 соответственно. Вероятность брака для первого станка равна 0,3, для второго равна 0,1. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь бракованная» решается с использованием формулы полной вероятности. Сколько гипотез можно сформулировать в данной задаче?

25. Задача «Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,7 и 0,3 соответственно. Вероятность брака для первого станка равна 0,3, для второго равна 0,1. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь бракованная» решается с использованием формулы полной вероятности. Гипотеза B_1 — заготовка обработана на первом станке. Чему равна вероятность $P(B_1)$?

26. Задача «Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,7 и 0,3 соответственно. Вероятность брака для пер-

вого станка равна 0,3, для второго равна 0,1. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь бракованная» решается с использованием формулы полной вероятности. Событие А — наугад взятая деталь бракованная. Гипотеза B_1 — заготовка обработана на первом станке. Чему равна вероятность $P_A(B_1)$?

27. Задача «В магазин вошло 5 покупателей. Найти вероятность того, что 4 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого из них равна 0,7» решается с использованием формулы…

28. Задача «В магазин вошло 5 покупателей. Найти вероятность того, что 4 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого из них равна 0,7» решается с использованием формулы Бернулли, где $n = \cdots$, $k = \ldots$, $p = \cdots$, $q = \cdots$

29. Задача «В магазин вошло 500 покупателей. Найти вероятность того, что 44 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого из них равна 0,7» решается с использованием …

30. Задача «В магазин вошло 500 покупателей. Найти вероятность того, что 44 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого из них равна 0,7» решается с использованием локальной теоремы Лапласа, где $n = \cdots$, $k = \ldots$, $p = \cdots$, $q = \cdots$

31. Задача «В магазин вошло 500 покупателей. Найти вероятность того, что 44 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого из них равна 0,7» решается с использованием локальной теоремы Лапласа, где $x = \cdots$

32. Для нахождения вероятности того, что при 200 бросаниях игральной кости три очка появятся от 100 до 150 раз, используется …

33. Наивероятнейшее число m наступлений события в n повторных независимых испытаниях удовлетворяет неравенствам: $n \cdot p - q \leq m \leq np + p$, где p — вероятность появления события в одном испытании. При $n = 8$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$ число m равно …

34. Значение функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ при $x=-5$ равно …

35. Значение функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ при $x=-10$ равно …

Случайные величины

Тест 1

1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0,2	0,4	0,6	0,8
p	0,1	0,2	p_3	0,5

Чему равна вероятность p_3?

2. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	0	1	2
p	0,3	0,4	0,3

Определить значение функции распределения этой случайной величины на интервале $2< x$.

3. Игральный кубик бросают 4 раза. Случайная величина X — число выпадений 5 очков. Указать возможные значения данной случайной величины.

4. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	-1	0	2
p	0,1	0,6	0,3

Определить математическое ожидание.

5. Определить математическое ожидание случайной величины $Y=5X-3$, если известно, что $M(X)=2$.

6. Определить дисперсию случайной величины $Z=X-Y$, если известно, что $D(X)=6$, $D(Y)=5$.

7. Определить дисперсию случайной величины $Z=3X-2$, если известно, что $D(X)=4$.

8. Двумерная дискретная величина (X,Y) задана законом распределения:

Y / X	1	2
0	0,1	0,3

	1	0,4	$p(x_2, y_2)$

Чему равна вероятность $p(x_2, y_2)$?

9. Двумерная дискретная величина (X, Y) задана законом распределения:

$X \backslash Y$	1	3
2	0,2	0,15
3	0,35	0,3

Определить одномерный закон распределения компоненты X.

10. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 5; \\ \dfrac{x}{5} - 1, & при \quad 5 < x \le 10; \\ 1, & при \quad x > 10. \end{cases}$$

Определить плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

11. Дана функция распределения случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 5; \\ \dfrac{x}{5} - 1, & при \quad 5 < x \le 10; \\ 1, & при \quad x > 10. \end{cases}$$

Определить вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(6; 7)$.

12. График функции распределения случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 5; \\ \dfrac{x}{5} - 1, & при \quad 5 < x \le 10; \\ 1, & при \quad x > 10. \end{cases}$$ имеет вид …

13. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 5; \\ \dfrac{1}{5}, & при \quad 5 < x < 10; \\ 0, & при \quad x > 10. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины X определяется по формуле …

14. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<5;\\ \dfrac{1}{5}, & при \quad 5<x<10;\\ 0, & при \quad x>10.\end{cases}$$

Дисперсия случайной величины X определяется по формуле …

15. Степень разброса значений случайной величины вокруг ее математического ожидания определяет…

16. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $(a;b)$ через $F(x)$ вычисляется по формуле …

17. Характеристикой среднего значения случайной величины служит …

18. Случайная величина X называется распределенной по биномиальному закону, если …

19. Случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона, если …

20. Случайная величина X называется равномерно распределенной на интервале $(a;b)$, если …

21. Математическое ожидание, дисперсия непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону $f(x)=\begin{cases}10e^{-10x}, & при \quad x\geq 0;\\ 0, & при \quad x<0\end{cases}$ равны …

22. Случайная величина X имеет показательное распределение, если …

23. Случайная величина X имеет нормальное распределение, если …

24. Случайная величина подчинена закону равномерного распределения на интервале $(0;4)$. Тогда ее математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение равны …

25. Случайная величина подчинена закону равномерного распределения на интервале $(0;4)$. Тогда ее плотность распределения равна …

26. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(0;4)$. Дифференциальной функции $f(x)$ распределения случайной величины X соответствует график …

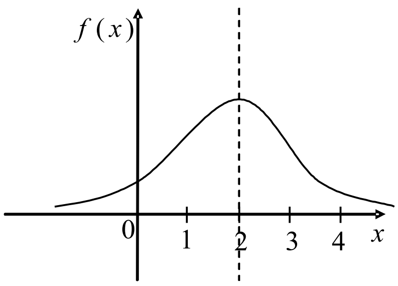
27. Математическое ожидание, дисперсия непрерывной случайной величины X, биномиально распределенной случайной величины равны …

28. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $a = 20$, $\sigma = 5$. Тогда $P(16 < X < 25)$ равна ...

29. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $a = 2$, $\sigma = 1$. Тогда $P(|X - 10| < 3)$ равна …

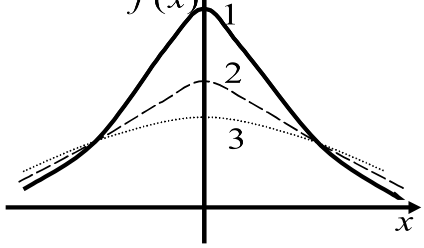
30. Дифференциальная функция нормально распределенной случайной величины X равна $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$, тогда математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны …

31. На графике изображена кривая нормального распределения вероятностей:

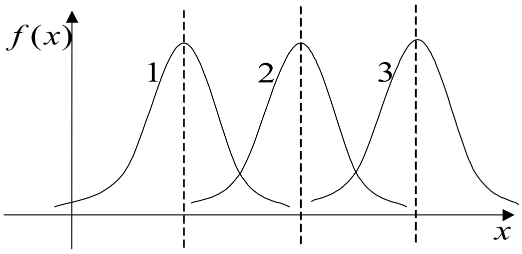


Математическое ожидание равно …

32. На рисунке изображены три нормальные кривые. Какой из нормальных кривых соответствует большее значение σ ?



33. На рисунке изображены три нормальные кривые. Большему значению a соответствует нормальная кривая …



Математическа статистика

Тест 1

1. Критическая область для проверки гипотезы H_0 имеет вид: $(K_{кр};+\infty)$. Гипотеза будет отвергнута, если …

2. Критическая область для проверки гипотезы H_0 имеет вид: $(-\infty;K_{кр})$. Гипотеза будет отвергнута, если …

3. Критическая область для проверки гипотезы H_0 имеет вид: $(-K_{кр};K_{кр})$. Гипотеза H_0 будет отвергнута, если …

4. Для того, чтобы к последовательности случайных величин была применима теорема Чебышева, достаточно чтобы они …

5. Даны значения признака X: 10, 5, 7, 4, 15. Чему равен ранг «10»?

6. Даны значения признака X: 13, 20, 15, 14, 21. Чему равна разность рангов «20» и «21»?

7. Даны значения признаков:

X	2	13	20
Y	7	9	8

Чему равно произведение рангов $X=20$ и $Y=8$?

8. Если X и Y качественные признаки, то взаимосвязь между ними можно оценить с помощью …

9. Найти внутригрупповую дисперсию по данным:

Первая группа		Вторая группа	
x_i	n_i	x_i	n_i
2	1	3	2
4	7	8	3
5	2		
$n_1=10$; $\overline{X_1}=4$; $D_{1гр}=0{,}6$		$n_2=5$; $\overline{X_2}=6$; $D_{2гр}=6$	

10. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних, если $F_{набл.} = 5{,}1$, $F_{кр.} = (0{,}05;3;12) = 3{,}49$.

11. Результаты испытаний представлены в таблице:

номер испытания	уровни факторов		
	F_1	F_2	F_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	56

Общая дисперсия равна 266, факторная дисперсия 152. Найти остаточную, исправленную факторную, остаточную исправленную дисперсии.

12. Дисперсия признака вычисляется по формуле …

13. Вся совокупность объектов, характеризующая изучаемый признак, называется …

14. Часть генеральной совокупности называется …

15. Если элементы после выбора возвращаются обратно, то выборка …

16. Если выбранные элементы не возвращаются, то выборка …

17. Число n отобранных значений выборки называется …

18. Наибольшей вариантой, наибольшей частотой вариационного ряда являются …

X	- 1	0	1	6
n_i	15	22	13	27

19. Статистическая оценка, которая определяется одним числом, называется …

20. Точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру, называется…

21. Объем выборки, представленной вариационным рядом равен …

X	- 1	0	2
n_i	10	20	15

22. Вариационный ряд:

X	$(10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$
n_i	10	20	30

Является вариационным рядом …

23. Ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), …, (x_k, n_k), где x_i — варианты выборки, n_i — соответствующие им частоты, называется …

24. Точечная оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, называется …

25. Выборочная средняя $\overline{X_в}$ является …

26. Выборочная дисперсия $D_в$ является …

27. Выборочное среднее квадратическое отклонение является …

28. Для вариационного ряда выборочное среднее $\overline{X_в}$, выборочная дисперсия $D_в$ равны …

X	- 1	0	1
n_i	5	2	3

29. Доверительный интервал для оценки математического ожидания при выборочной средней $\overline{X_в} = 14$ и точности оценки $\delta = 1{,}5$ имеет вид …

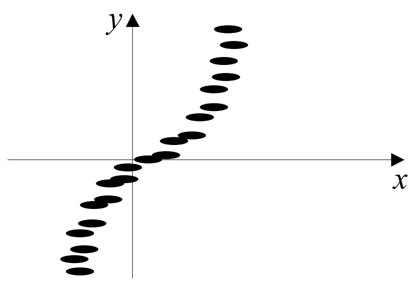
30. Метод произведений для расчета числовых характеристик вариационного ряда применяется, если варианты …

31. Точечной оценкой не является …

32. Интервальной оценкой математического ожидания является …

33. В формуле для вычисления коэффициента линейной корреляции $r = \dfrac{\overline{xy} - ?\,\overline{y}}{?\cdot \overline{S}_y}$ вместо «?» надо поставить …

34. Результаты измерений признаков X и Y изображены в виде точек (x_i, y_j) на корреляционном поле в виде рисунка.



Тогда связь между признаками является …, зависимость между признаками определяется уравнением …

35. Если признаки X, Y независимы, то коэффициент корреляции r_{xy} равен …

36. Коэффициент корреляции $r_{xy} = -1$, тогда связь между признаками …

37. Если признаки X и Y линейно зависимы, причем наблюдается обратная зависимость, то …

38. Пусть в результате измерения величины M получено значение X, и пусть на процесс измерения влияют случайные независимые факторы A и B. Тогда для оценки значимости факторов A и B применяют …

39. Пусть в результате измерения величины M получено значение X, и пусть на процесс измерения влияют случайные независимые факторы A и B. Пусть $D(A)$ — дисперсия A, $D(B)$ — дисперсия B, $D(C)$ — остаточная дисперсия. Тогда для оценки значимости факторов A и B сравнивают …

4.4 Контрольная работа для заочников

Задание №1

Решить систему линейных уравнений

а) методом Гаусса;

б) по формулам Крамера;

в) средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 4x - 3y + 5z = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}.$$

Задание №2

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнение сторон AB и AC и их угловые коэффициенты; 3) уравнение медианы, проведенной из вершины A; 4) угол A в радианах с точностью до двух знаков; 5) уравнение высоты, проведенной из вершины B; 6) уравнение прямой, прходящей параллельно AC; 7) площадь треугольника ABC.

A(7;1), B(-5;-4), C(-9;-1)

Задание №3

Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, изобразить их на чертеже:

1) $3x^2-y-6x+1=0$; 2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Задание №4

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и построить ее график $y=xe^{-x}$.

Задание №5

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

1) $\boxed{\int (e^{-x}+\frac{1}{\sin^2 x}+x\sqrt{x})dx}$; 2) $\boxed{\int \arcsin^3 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}}$;

3) $\boxed{\int x^2 e^x dx}$; 4) $\boxed{\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+9)}}$.

Задание №6

Сколько существует способов составления в случайном порядке списка из 7 кандидатов? Какова вероятность того, что кандидаты будут расставлены в списке по возрасту?

Задание №7

Среди студентов института – 30% первокурсники, 35% студентов учатся на втором курсе, на третьем и четвертом их 20% и 15% соответственно. По данным деканатов известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию на отличные оценки, на втором-30%, на третьем – 35%, на четвертом – 40%

отличников. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент сдал сессию на отлично. Наудачу вызванный студент оказался отлиником, какова вероятность того, что он (или она) – третьекурсник?

Задание №8

Задана F(x) – функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \frac{x}{2}, \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1, \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: 1) f(x); 2) M(X), D(x), σ(x); 3) построить график F(x) и f(x).

Задание №9

По данным выборочного исследования получено следующее распределение семей по среднедушевому доходу.

Среднедушевой доход семьи в месяц, у.е.	До 25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150 и выше
Количество обследованных семей	46	236	250	176	102	78	12

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднедушевой доход семьи в выборке, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

Задание №10

Врач исследователь выясняет зависимость площади пораженной части легкого у людей, заболевших эмфиземой легких, от числа лет курения. Статистические данные, собранные им в некоторой области, имеют следующий вид:

Чыило лет курения	25	36	22	15	48	39	42	31	28	33
Площадь пораженной части легкого, %	55	60	50	30	75	70	70	55	30	35

Постройте график исходных данных и определите по нему характер зависимости. Рассчитайте выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона, проверьте его значимость при α=0,05. Постройте уравнение регрессии и дайте интерпретацию полученных результатов. Если человек курил 30 лет, то сделайте прогноз о степени пораения легких у случайно выбранного пациента.

4.5 Комплект экзаменационных билетов

Билеты к зачету

Билет №1

1. Определители второго, третьего, четвертого порядка. Способы их вычисления.
2. Интегрирование по частям.
3. Экстремум функции. Необходимые условия экстремума функции.
4. Найти промежутки убывания и возрастания функции $y = 3x^3 - 9x$.
5. Написать уравнения прямой проходящей через точки A(2;5) и B(-1;2).
6. Составить таблицу истинности для формулы $x \wedge y \vee z \Leftrightarrow \bar{x}$.
7. Даны множества: A=$\{1,2,3,4,5\}$ и B=$\{-2,-1,0,1,2\}$. Найти $A \cup B, A \cap B, A_B'$.
8. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1,4,-4)$ и $\vec{b} = (3,1,2)$.
9. Выполнить действия над матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
10. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt[5]{5-x}dx$.

Билет №2

1. Решение системы линейных уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера.
2. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Геометрический смысл неопределенного интеграла.
3. Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами.
4. Найти угол между прямыми y=3x-4 и y=x+7.

5. Найти точки экстремума функции $y = x^4 - 16x$.

6. Даны множества: А=$\{1,3,5,7,9\}$ и В=$\{-2,-1,0,1,2\}$. Найти $A \cup B, A \cap B, A_B'$.

7. Построить таблицу истинности для формулы $x \Rightarrow (x \vee y) \vee \bar{x}$.

8. Вычислить интеграл $\int x \cdot \cos 4x dx$.

9. Найти частное производные функции $z = x^2 + 2xy - 3\cos y$.

10. Решить систему уравнений по формулам Крамера $\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ x - y = -1 \\ 2x + 3y + 7z = 8 \end{cases}$.

Экзаменационные билеты

Экзаменационный билет № 1

1. Нормальное распределение, его числовые характеристики.

2. Понятие статистических гипотез. Классификация гипотез.

3. Дан вариационный ряд. Построить полигон распределения частот и кумуляту. Найти числовые характеристики.

x_i	-1	0	2	5	7
m_i	6	8	9	4	2

4. Зависимость между величинами выражается в виде экспериментально полученной таблицы. Определить коэффициент корреляции Пирсона. Сделать выводы.

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3
У	0,01	0,11	0,35	0,6	1,58	2,31

5. В одном из ящиков находится 7 деталей, из которых 3 нестандартные; в другом — 5 деталей, из них 2 нестандартные. Из первого ящика наугад перекладывают деталь во второй ящик, потом из него берут деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется нестандартной.

Экзаменационный билет № 2

1. Равномерное распределение, его числовые характеристики.

2. Алгоритм проверки статистических гипотез.

3. Построить гистограмму и кумуляту для интервального ряда. Найти числовые характеристики.

x_i	(15 – 20)	(20 – 25)	(25 –30)	(30 – 35)	(35 –40)	(40 – 45)
m_i	1	3	5	4	2	2

4. Зависимость между величинами выражается в виде экспериментально полученной таблицы. Определить уравнение регрессии. Сделать выводы.

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3
У	0,01	0,11	0,35	0,6	1,58	2,31

5. При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго — 0,45. Вероятность признания бездефектного изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго — 0,98. Бездефектное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

Экзаменационный билет № **3**

1. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок.
2. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости. Мощность критерия.
3. Дан вариационный ряд. Построить полигон распределения частот и кумуляту. Найти числовые характеристики.

x_i	-1	0	2	5	7
m_i	6	8	9	4	2

4. Используя критерий критерий χ^2 проверить отличаются ли распределения

1	3	8	17	26	7	5	2	1
0	1	2	19	20	13	10	4	1

5. В одном из ящиков находится 7 деталей, из которых 3 нестандартные; в другом — 5 деталей, из них 2 нестандартные. Из первого ящика наугад пе-

рекладывают деталь во второй ящик, потом из него берут деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется нестандартной.

***Экзаменационный билет №* 4**

1. Определение дискретной и непрерывной случайных величин. Способы их задания.

2. Дисперсионный анализ. Суть метода.

3. Построить гистограмму и кумуляту для интервального ряда. Найти числовые характеристики.

x_i	(15 – 20)	(20 – 25)	(25 –30)	(30 – 35)	(35 –40)	(40 – 45)
m_i	1	3	5	4	2	2

4. Используя критерий χ^2 проверить гипотезу о равномерном распределении.

8	22	14	9	12

5. При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго — 0,45. Вероятность признания бездефектного изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго — 0,98. Бездефектное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

5. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКИМ СОСТАВОМ

Ф.И.О. должность	Вид занятия	Специальность
Юрьева Т. А., ст.преподаватель	Лекция	030301 - Психология
Юрьева Т. А., ст.преподаватель	Практическое занятие	030301 - Психология