Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
«___»_________2007г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно – методический комплекс дисциплины

для специальности
010701 –физика

Составитель: В.П. Нейман

Благовещенск
2007

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Нейман В.П.

Интегральные уравнения и вариационное исчисление. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010701 «Физика» – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 40 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ЕН.Ф.03 Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Однородное и неоднородное уравнение Фредгольма второго рода. Задача Штурма-Лиувилля. Принцип сжатых отображений. Уравнение Вольтера. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала. Задачи на условный экстремум. Задачи с закрепленными границами и с подвижной границей.

2.РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Интегральные уравнения и вариационное исчисление"**

для специальности 010701–"Физика"

Курс 3 Семестр 5

Лекции 36 час. Экзамен 5 семестр.

Практические (семинарские) занятия 18 час. Зачет (нет).

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 18 час.

Всего 72 часа.

1. 1. Цель преподавания дисциплины.

Теория интегральных уравнений и вариационное исчисление являются одними из фундаментальных математических дисциплин, понятия, методы исследования и результаты которых широко используются во многих современных математических дисциплинах и теоретической физике.

Целью преподавания дисциплины является обучение студентов основам теории интегральных уравнений и вариационного исчисления, практическим навыкам использования основных положений, методов, излагаемых в этом курсе для решения практических задач.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

Ознакомление студентов с базовыми понятиями теории интегральных уравнений, классификацией интегральных уравнений, методами их решения. Ознакомление с основными положениями вариационного исчисления, с классом задач, решаемых методами вариационного исчисления.

1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины.

Изучение данной дисциплины требует от студентов изучения курсов математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений в объеме государственного стандарта высшего профессионального образования.

1.4. Студенты должны:

а) знать основные понятия, положения теории интегральных уравнений и вариационного исчисления,

б) уметь классифицировать тип интегральных уравнений и определять соответствующий метод их решения,
в) уметь применять методы вариационного исчисления к решению практических задач.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

№	**Темы лекционных занятий (36 часов)**	Кол-во часов
1	Введение. Основные понятия функционального анализа. Метрическое, нормированное, гильбертово пространства, их основные свойства.	2
2	Операторы и функционалы в гильбертовом пространстве. Линейные операторы, их свойства. Обратные и симметричные операторы. Сопряженные и самосопряженные операторы. Линейные функционалы.	2
3	Основные классы интегральных уравнений. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям (задача Абеля, задача обращения интеграла, задача теории переноса)	2
4	Однородное и неоднородное уравнения Фредгольма 2-го рода. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.	2
5	Задача Штурма-Лиувилля. Принцип сжатых отображений. Теорема С. Банаха о неподвижной точке оператора.	2
6	Уравнения Вольтерра. Теорема о единственности решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.	2
7	Теоремы Фредгольма для общего случая уравнения Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.	2
8	Интегральные преобразования и интегральные уравнения. Преобразование Фурье. Преобразование Лапласа.	2
9	Метод Винера-Хопфа.	1
10	Интегральные уравнения с симметричным ядром. Классификация симметричных ядер. Функция Грина. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению.	3
11	Задачи, приводящие к вариационным проблемам. Задача Дидоны, задача о брахистохроне, задача о преломлении. Основные понятия теории вариационного исчисления.	3
12	Основные леммы вариационного исчисления (лемма Лагранжа, лемма Дюбуа-Реймона)	1
13	Вариационные задачи с фиксированными границами. Простейшая задача вариационного исчисления. Функционалы от нескольких функций. Канонический вид уравнений Эйлера.	3
14	Вариационные задачи с подвижными границами. Задача с по-	4

	движными концами. Экстремали с условными точками.	
15	Основные типы задач на условный экстремум. Необходимые условия в задаче Лагранжа. Задача Больца. Задача Майера (частный случай задачи Лагранжа)	2
16	Достаточные условия экстремума. Слабый экстремум. Сильный экстремум.	3
№	Темы практических занятий (18 часов)	Кол-во часов
1	Интегральные уравнения Фредгольма. Метод последовательных приближений и резольвента для уравнений Фредгольма 2-го рода. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.	2
2	Характеристические числа и собственные функции интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром.	2
3	Интегральные уравнения Вольтерра. Метод последовательных приближений применительно к линейному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Решение интегральных уравнений с помощью резольвенты.	2
4	Решение уравнений (Вольтерра 2-го рода) типа свертки с помощью преобразования Лапласа. Решение уравнения Вольтерра 1-го рода типа свертки с помощью преобразования Лапласа.	4
5	Вариационные задачи с фиксированными границами. Задачи об экстремуме функционала. Поиск экстремали функционала.	2
6	Вариационные задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности на правом (левом) конце в вариационных задачах.	2
7	Задачи на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа для решения изопериметрической задачи и задачи Лагранжа.	2
8	Слабый Экстремум. Сильный Экстремум.	2

3. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тема 1. Введение Основные понятия функционального анализа.

Функциональный анализ как самостоятельная наука оформился на рубеже XIX и XX вв., когда обнаружилась глубокая аналогия между понятиями алгебры, анализа и геометрии.

Функциональный анализ объединяет и обобщает идеи различных отделов классического анализа (вариационное исчисление, интегральное и дифференциальное исчисление, интегральные и дифференциальные уравнения, теории множеств, линейной алгебры и многомерной геометрии).

Наиболее важным понятием функционального анализа является общее понятие пространства. Для функционального анализа характерно рассмотрение бесконечномерных пространств, состоящих из функций, последовательностей или других общих объектов, а также операций над элементами таких пространств. Понятие n-мерного пространства необходимо было ввести уже при геометризации теории функций многих переменных. Пространства, точками которых являются функции или числовые последовательности, называются функциональными пространствами.

Гильбертово пространство в 1904-1910гг. построено Гильбертом как инструмент, средство, полезное в приложениях и не использовалось им как объект исследования. Это обобщение N-мерного Евклидова пространства на бесконечномерный случай. Элементом (вектором) гильбертова пространства является последовательность чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ такая, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится. Скалярное произведение двух векторов определяется формулой $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, причем этот ряд сходится, если сходятся ряды $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ - это пространство интегрируемых в квадрате функций, тогда скалярное произведение на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеем в виде $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$, при этом определяется норма $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Понятие нормы обобщает абсолютную величину числа, длину вектора.

Пространство, в котором определена норма, называется нормированным пространством.

Тема 2. Операторы и функционалы в гильбертовом пространстве.

Оператор в самом общем смысле – это соответствие между элементами двух множеств X и Y, относящее каждому элементу $x \in X$ некоторый элемент $y \in Y$. Эквивалентный смысл имеют термины: «отображение», «преобразование», при этом элемент y называют образом элемента x, а элемент x называют преобразованием элемента y.

Оператор, отображающий бесконечномерное пространство функций в числовое множество называется функционалом.

Операторное исчисление возникло в результате развития теории интегральных уравнений, при решении задач на нахождение собственных функций и собственных значений операторов в теории колебаний.

В связи с общностью понятия оператора установились связи между различными областями математики.

Наиболее разработанный класс операторов – это линейные операторы в линейных нормированных пространствах. Линейными операторами являются оператор дифференцирования функций, оператор определенного интегрирования на данном отрезке суммируемых функций, оператор линейного преобразования в пространстве , задаваемый матрицей.

Далее даются понятия линейных операторов, обратных операторов, симметричных операторов, самосопряженных операторов.

Тема 3. Основные классы интегральных уравнений. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям.

Задачей, приводящей к интегральным уравнениям исторически первой была задача обращения интеграла – это задача Фурье (1811г) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}f(y)dy$, где $g(x)$ - неизвестная функция, т.е. её решение дал Фурье в виде $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}g(x)dx$.

Другой задачей, приводящей к интегральным уравнениям, была задача Абеля (1823г), в которой Абель пришел к уравнению Вольтерра 1го рода, решая задачу о таутохроне.

Далее, в 1837г. Лиувилль обнаружил, что задача Коши приводит к интегральным уравнениям Вольтера 2го рода.

Определение: интегральные уравнения – это уравнения, в которых неизвестная функция стоит под знаком интеграла.

Основные классы интегральных уравнений – это линейные и нелинейные интегральные уравнения.

Линейными называют интегральные уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно.

Например, линейное неоднородное уравнение $\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds+f(t)$ - это уравнение Фредгольма 2го рода, где $\varphi(t)$ - искомая функция, $K(t,s)$ - ядро интегрального уравнения, $f(t)$ - известная функция (свободный член), λ - параметр.

Если $\varphi(t)\equiv 0$, то уравнение будет 1го рода, если $f(t)\equiv 0$, то интегральное уравнение называют однородным.

Нелинейными называют интегральные уравнения, в которые неизвестная функция входит нелинейно. Общая классификация таких уравнений затруднена.

Примерами нелинейных интегральных уравнений являются уравнения вида:

$\varphi(t)=\int_a^b K(t,s,\varphi(s))ds$ - уравнение Урысона,

$\varphi(t)=\int_a^b K(t,s)F(s,\varphi(s))ds$ - уравнение Гаммерштейна,

$\varphi(t)=\int_a^x F(x,s,\varphi(s))ds$ - нелинейное уравнение Вольтерра,

$\varphi(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds+f(t)$ - линейное неоднородное интегральное уравнение Вольтерра 2го рода. Уравнения Вольтерра имеют переменный предел интегрирования.

Уравнения Фредгольма – это интегральные линейные уравнения с постоянными пределами интегрирования.

Тема 4: Уравнения Фредгольма.

Теоремы существования и единственности решения.

А. При условиях, что ядро $K(x,s),\ -\infty \le a \le x,\ s \le b \le +\infty$, интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f.(x)$

есть кусочно-непрерывная функция переменных x и s такая, что

$\int_a^b K^2(x,s)ds < C$,

а функция f(x) – кусочно-непрерывная и имеет интегрируемый квадрат, существует, и притом единственное, кусочно-непрерывное решение вышеуказанного уравнения для всех λ , для которых $|\lambda| \le \dfrac{1}{B},\ B^2 = \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dxds$.

Число $B = \sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dxds}$ называют нормой ядра.

Б. При условиях, что ядро $K(x,s),\ a \le x,\ s \le b$ вышеуказанного уравнения квадратично-суммируемо и $|\lambda| < B^{-1}$, где

$B^2 = \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dxds,\ f(x) \in L^2[a,b],$

существует, и притом единственное, квадратично-суммируемое решение вышеуказанного уравнения.

Теоремы А и Б дают достаточные условия существования решения и получены методом последовательных приближений.

Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.

Ядро, которое является конечной суммой произведений функций от x на функцию от s

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s)$$

Называется вырожденным. Здесь функции $a_i(x)$, а также функции $b_i(s)$ можно считать линейно независимыми.

Пример: $K(x,s) = x + s,\ a_1 = x,\ b_1 = 1;\ a_2 = 1,\ b_2 = s.$

Решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению системы линейных уравнений.

Тема 5: Задача Штурма-Лиувилля.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P(x)\frac{du}{dx} + [Q(x) - \lambda R(x)]u = 0,$$

где P(x), Q(x), R(x) $\in C[a,b],\ \lambda$ - параметр. Требуется найти его решения, удовлетворяющие краевым условиям

$$R_1(u) \equiv \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) + \alpha_3 u(b) + \alpha_4 u'(b) = 0,$$
$$R_2(u) \equiv \beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) + \beta_3 u(b) + \beta_4 u'(b) = 0.$$

Подстановка

$$p = e^{\int Pdx},\ q = Qe^{\int Pdx},\ r = \mathrm{R}e^{\int Pdx}$$

приводит первое уравнение к виду

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u = \lambda r(x)u.$$

Отсюда следует, что $p(x) > 0$ и $p'(x) \in C[a,b]$. Введем (операторное) обозначение

$$Lu \equiv \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u.$$

Тогда имеем

$$Lu = \lambda ru$$

Задача Штурма-Лиувилля всегда имеет тривиальное решение u=0.

Те значения λ , при которых задача Штурма-Лиувилля имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями этой задачи, а соответствующие им решения – собственными функциями.

Тема 6: Уравнения Вольтерра.
Теоремы о существовании единственности.

А. При условиях, что ядро $K(x,s)$ уравнения Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f.(x)$$

ограничено по абсолютной величине в треугольной области $a \le x,\ s \le h,\ x \ge s$ и имеет лишь конечное число точек разрыва с одной и той же абсциссой x или с одной и той же ординатой s, $K(x,s) \equiv 0,$ при $s > x$, а свободный член f(x) – непрерывная функция, существует непрерывное и притом единственное решение вышеуказанного уравнения.

Б. При условиях, что ядро $K(x,s)$, $a \le x,\ s \le h,\ K(x,s) \equiv 0$ при $s > x$, квадратично-суммируемо и f(x) $\in L^2[a,h],$ существует, и притом единственное, квадратично-суммируемое решение вышеуказанного уравнения.

Единственность в данном случае понимается с точностью до функции, определенной на множестве меры нуль.

Тема 7: Теоремы Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.

Ниже будет рассматриваться неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f.(x),$$

соответствующее ему однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = 0$$

И союзное (или сопряженное) с первым уравнением уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

Если при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$ однородное уравнение Фредгольма имеет нетривиальные решения (не равные тождественно нулю), то

λ_0 называют характеристическим числом, а соответствующие ему решения $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ - собственными функциями ядра $K(x,s)$.

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ФРЕДГОЛЬМА.

Если $\lambda = \lambda_0$ не являются характеристическим числом ядра, то неоднородное интегральное уравнение однозначно разрешимо при любой правой части $f.(x)$.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ФРЕДГОЛЬМА.

Если $\lambda = \lambda_0$ является характеристическим числом однородного уравнения, то оно будет также характеристическим значением и для союзного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = 0$$

ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА ФРЕДГОЛЬМА.

Если однородное уравнение имеет ненулевое решение, то неоднородное уравнение, вообще говоря, разрешимо. Оно будет разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$(f,\psi_k) = 0, \qquad (k = 1,2,...,n)$$

где $\psi_k = \psi_k(x)\ \ (k = 1,2,...,n)$ суть собственные функции союзного ядра, принадлежащие данному характеристическому числу λ_0.

ЧЕТВЕРТАЯ ТЕОРЕМА ФРЕДГОЛЬМА.

Множество характеристических чисел неоднородного интегрального уравнения не имеет предельных точек на конечном расстоянии. Если множество характеристических значений бесконечно, то его предельная точка находится на бесконечности.

Содержание первой и третьей теорем составляют так называемую альтернативу Фредгольма.

Для интегральных уравнений с вырожденным ядром теоремы Фредгольма являются следствиями из свойств линейных систем уравнений.

Тема 8: Интегральные преобразования Фурье и Лапласа.

Преобразование Фурье.

Из интегральной формулы Фурье можно получить так называемые синус- и косинус-преобразования Фурье.

Так, считая f(t) нечетной на $(-\infty,+\infty)$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f.(t)\cos\omega t\cos\omega x dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f.(t)\cos\omega t\sin\omega x dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\ \sin\omega x\int_{-\infty}^{+\infty} f.(t)\sin\omega t dt.$$

Отсюда, обозначая

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f.(t)\sin\omega t dt,$$

получим

$$f.(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x d\omega.$$

Мы получили пару взаимных синус-преобразований Фурье.

Аналогично, если f(x) – четная функция на интервале $(-\infty,+\infty)$, получаются косинус-преобразования Фурье:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f.(t)\cos\omega t dt,$$

$$f.(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x d\omega \ .$$

Преобразование Лапласа.

В интегральной формуле Фурье положим

$$\cos\omega(t-x) = \frac{e^{iw(t-x)} + e^{-iw(t-x)}}{2}$$

Тогда, предполагая дополнительно, что f.(x)=0 при x<0, будем иметь

$$f.(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_0^\infty f.(t)e^{-it\omega} dt \qquad x > 0$$

Пусть f.(x) принадлежит к классу функций, для которых интеграл

$$\int_0^\infty |f.(t)| e^{-\eta t} dt$$

сходится, если η выбрано достаточно большим положительным.

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\eta - i\omega)x} d\omega \int_0^\infty f.(t)e^{-(\eta - i\omega)t} dt = f.(x).$$

Функция

$$\bar{f}.(p) = \int_0^\infty f.(t)e^{-pt} dt$$

носит название преобразования Лапласа функции $f.(t)$. Имеет место формула обращения (обратное преобразование Лапласа)

$$f.(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} \bar{f}.(p)e^{px} dp \ .$$

В последней формуле применяется интегрирование функции комплексной переменной $\bar{f}.(p)$.

Для пары взаимных преобразований составлены обширные таблицы, которые полезны при решении некоторых интегральных уравнений.

Тема 9: Интегральные уравнения с симметричным ядром. Функция Грина.

Симметричными интегральными уравнениями называются уравнения, ядра которых симметричны, т.е.

$$K(x,s) = K(s,x).$$

Интегрированные ядра симметричных уравнений симметричны. Например,

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)dt = \int_a^b K(s,t)K(t,x)dt = K_2(s,x).$$

Каждое симметричное ядро, не равное тождественно нулю, имеет по крайней мере одно характеристическое число.

Это утверждение справедливо как для непрерывных ядер, так и для квадратично суммируемых ядер.

Функция Грина.

Если $f(x) \in C[a,b]$, то

$$F(x) = \int_a^b G(x,s) f.(s) ds,$$

где $G(x,s)$ - функция Грина.

При этом функция Грина удовлетворяет условиям:

1) $G(x,s)$ непрерывна на [a,b].

2) Функция Грина имеет непрерывную вторую производную в [a,s), (s,b].

3) Функция $G(x,s)$ удовлетворяет уравнению LG=0.

4) При x=s функция $G(x,s)$ имеет скачок.

5) Функция $G(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям задачи.

Тема 10. Введение. Задачи, приводящие к вариационным проблемам. Задача Дидоны, задача о брахистохроне, задача о преломлении. Основные понятия вариационного исчисления.

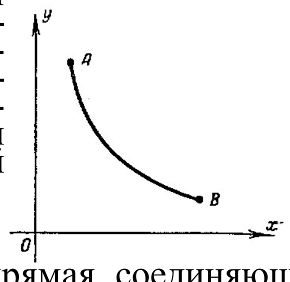
Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и_минимальные значения, функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются вариационными задачами.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название вариационных принципов механики или физики. К числу таких вариационных принципов или простейших следствий из них принадлежат: принцип наименьшего действия, закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения количества движения, закон сохранения момента количества движения, различные вариационные принципы классической и релятивистской теории доля, принцип Ферма в оптике, принцип Кастилиано в теории упругости и т. д.

Вариационное исчисление начало, развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ действительного члена Петербургской Академии наук Л. Эйлера (1707—1783г.), которого с полным основанием можно считать создателем вариационного исчисления.

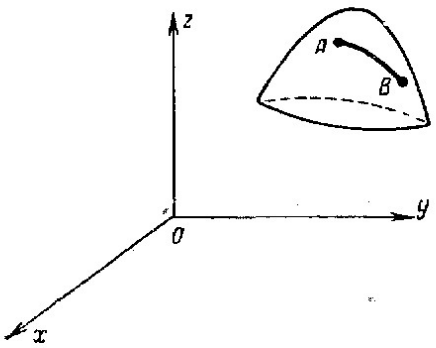
Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи:

З а д а ч а о б р а х и с т о х р о н е. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал вниманию математиков задачу о линии быстрейшего ската - брахистохроне. В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой , и обладающую тем свойством, что материальная точка скатится по этой линии из точки A в точку B и кратчайшее время.



Легко видеть, что линией быстрейшего ската не будет прямая, соединяющая точки *A* и *B,* хотя она и является кратчайшим расстоянием между точками *A* и *B,* так как при движений по прямой скорость движения будет нарастать сравнительно медленно; если же мы возьмем кривую, более круто спускающуюся около точки *A* вниз, то хотя путь и удлинится, но значительная часть пути будет пройдена с большей скоростью. Решение задачи о брахистохроне было дано И.Бернулли, Я.Бернулли, Г.Лейбницем, И.Ньютоном и Г.Лопиталем. Оказалось, что линией быстрейшего ската является циклоида.

Задача о геодезических линиях. Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки па некоторой поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$. Такие кратчайшие линии



называются геодезическими. Мы имеем типичную вариационную задачу на так называемый связанный или условный экстремум. Необходимо найти минимум функционала

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

причем функции *y(x)* и *z(x)* должны быть подчинены условию $\varphi(x, y, z) = 0$. Эта задача была решена в 1698 году Я.Бернулли, но общий метод решения задач такого типа был дан лишь в работах Л.Эйлера и Ж.Лагранжа.

Изопериметрическая задача. Требуется найти замкнутую линию заданной длины l, ограничивающую максимальную площадью S. Такой линией, как было известно еще в древней Греции, является окружность. В этой задаче требуется определить экстремум функционала S при наличии своеобразного дополнительного условия — длина кривой должна быть постоянна, т. е. функционал

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

сохраняет постоянное значение. Условия такого типа называются изопериметрическими. Общие методы решения задач с изопериметрическими условиями были разработаны Л.Эйлером.

Методы решения вариационных задач, т.е. задач на исследование функционалов на максимум и минимум, весьма сходны с методами исследования на максимум и минимум функций. Поэтому целесообразно напомнить кратко теорию максимума и минимума функций и параллельно ввести аналогичные понятия и доказать сходные теоремы для функционалов.

I.

1. Переменная величина *z* называется функцией переменной величины x, что обозначается так: z=f(x), если каждому значению x из некоторой области изменения x соответствует значение z, т. е. имеет место соответствие: числу x соответствует число z. Аналогично определяются и функции нескольких переменных.

2. Приращением Δx аргумента x функции f(x) называется разность между двумя значениями этой переменной Δx = x — x_1. Если x — независимое переменное, то дифференциал x совпадает с приращением $dx = \Delta x$.

3. Функция f(x) называется непрерывной, если малому изменению x соответствует малое изменение функции f(x).

II.

1. Переменная величина *v* называется функционалом, зависящим от функции *y(x)*, что обозначается так: *v = v[y(x)]*, если каждой функции *y(x)* из некоторого класса функций *y(x)* соответствует значение *v*, т. е. имеет место соответствие: функции *y (x)* соответствует число *v*. Аналогично определяются и

функционалы, зависящие от нескольких функций, и функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

2. Приращением или вариацией аргумента y(x) функционала $v[y(x)]$ называется разность, между двумя функциями $\delta y = y(x) - y_1(x)$. При этом предполагается, что y(x) меняется произвольно в некотором классе функций.

3. Функционал $v[y(x)]$ называется непрерывным, если малому изменению y(x) соответствует малое изменение функционала $v[y(x)]$.

Необходимо ввести следующие определения близости кривых $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности $y(x) - y_1(x)$ мал.

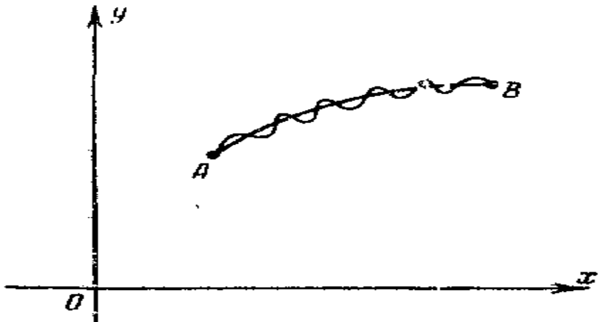
Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ близки в смысле близости первого порядка, если модули разностей $y(x) - y_1(x)$ и $y'(x) - y_1'(x)$ малы.

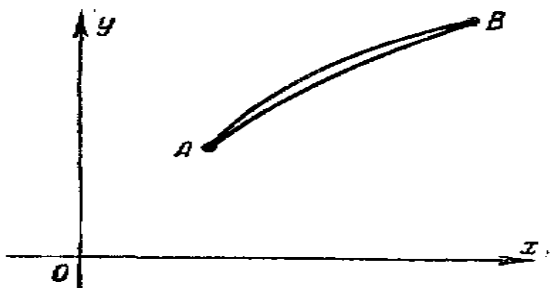
Кривые

y = y(x) а $y = y_1(x)$

близки в смысле близости k-го порядка, если модули разностей
$y(x) - y_1(x)$,
$y'(x) - y_1'(x)$,
. . . .
$y^{(k)}(x) - y^{(k)}{}_1(x)$
малы.

На первом рисунке изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка,





так как ординаты у них близки, а направления касательных не близки. На втором рисунке изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости k-го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

3'. Функционал $v[y(x)]$ непрерывен при $y = y_0(x)$ в смысле близости k-го порядка, если для любого положительного ε можно подобрать б > 0 такое, что $|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon$

$|y(x) - y_0(x)| < \delta$,
$|y'(x) - y_0'(x)| < \delta$,
. . . .
$|y^{(k)}(x) - y^{(k)}{}_0(x)| < \delta$.

При этом подразумевается, что функция y(x) берется из класса функций, на котором функционал $v[y(x)]$ определен.

4. Линейным функционалом L[y(x)], удовлетворяющий следующим условиям L[cy(x)]=cL[y(x)], где с – произвольная постоянная и
$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$.

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y')dx.$$

5. Ели приращение функционала $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$ можно представить в виде $\Delta v = L[y(x),\delta y] + \beta(y(x),\delta y)\max|\delta y|$, где $L[y(x),\delta y]$ - линейный по отношению к δy функционал, max | δy | — максимальное значение | δy | и р(у(х), δy) $\to$ 0 при

$\max|\delta y| \to 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т. е. L[y(x), δy], называется вариацией функционала и обозначается δv.

Определение. Функционал v[y(x)] достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума, если значения функционала v[y(x)] на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше, чем $v[y_0(x)]$, то есть $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \le 0$.

Если $\Delta v \le 0$, причем $\Delta v = 0$ только при $y(x) = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается строгий максимум. Аналогично определяется кривая $y = y_0(x)$, на которой реализуется минимум. В этом случае $\Delta v \ge 0$ для всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

Понятие экстремума функционала нуждается в уточнении. Говоря о максимуме или минимуме, точнее, об относительном максимуме или минимуме, мы имели в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значениям функционала на близких кривых. Но, как было указано выше, близость кривых может быть понимаема различно, поэтому в определении максимума или минимума надо указывать, какого порядка близость имеется в виду.

Если функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых модуль разности $y(x) - y_0(x)$ мал, т. е, по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка, то максимум или минимум называется сильным.

Если же функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума или минимума лишь по отношению к кривым $y = y(x)$, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, т, е. по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ не только по ординатам, но и по направлениям касательных, то максимум или минимум называется слабым.

Очевидно, что если на кривой $y = y_0(x)$ достигается сильный максимум (или минимум), то подавно достигается и слабый, так как если кривая близка к $y = y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, то она близка и в смысле близости нулевого порядка. Однако возможно, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается слабый максимум (минимум) и в то же время не достигается сильный максимум (минимум), т. е. среди кривых $y = y(x)$, близких к $y = y_1(x)$ как по ординатам, так и по направлению касательных, может не быть таких, для которых $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ (в случае минимума $v[y(x)] < v[y_0(x)]$), а среди кривых $y = y(x)$, близких только по ординатам, но уже не близких по направлению касательных, могут найтись и такие, для которых $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ (в случае минимума $v[y(x)] < v[y_0(x)]$). Различие между сильным и слабым экстремумом не будет иметь существенного значения при выводе основного необходимого условия экстремума, но оно будет весьма существенно при изучении достаточных условий экстремума.

Тема 11. Основные Леммы вариационного исчисления (Лемма Лагранжа, Лемма Дюбуа - Реймона).

Лемма Лагранжа.

Основная лемма вариационного исчисления. Если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = 0,$$

где функция Ф(x) непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$, то

$$\Phi(x) \equiv 0$$

на том же отрезке.

Замечание. Утверждение леммы и ее доказательство не изменяются, если на функции $\eta(x)$ наложить следующие ограничения: $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ имеет непрерывные производные до порядка $p, |\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon \quad (s = 0, 1, \dots q; q \le p)$.

Доказательство. Предположив, что в точке $x = \bar{x}$, лежащей на отрезке $x_0 \le x \le x_1$, $\Phi(x) \ne 0$, придем к противоречию. Действительно, из непрерывности функции Ф(x) следует, что если $\Phi(\bar{x}) \ne 0$, то Ф(x) сохраняет знак в некоторой окрестности точки $\bar{x}$; но тогда, выбрав функцию $\eta(x)$ также сохраняющей знак в этой окрестности, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0,$$

так как произведение $\Phi(x)\eta(x)$ сохраняет знак на отрезке $\bar{x}_0 \le x \le \bar{x}_1$ и обращается в нуль вне этого отрезка. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно $\Phi(x) \equiv 0$.

Лемма Дюбуа – Реймона.

Лемма Дюбуа – Реймона о том, что из соотношения ортогональности

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta'(x)dx = 0$$

где $M(x)$ - кусочно-непрерывная функция, $\eta(x)$ - произвольная кусочно-гладкая функция, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$ следует $M(x) \equiv const.$

Тема 12. Вариационные задачи с фиксированными границами. Простейшая задача вариационного исчисления. Функционалы от нескольких функций. Уравнения Эйлера.

Уравнение Эйлера.

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$$

причем граничные точки допустимых кривых закреплены: $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$. Функцию $F(x, y, y')$ будем считать трижды дифференцируемой.

Мы уже знаем, что необходимым условием экстремума является обращение в нуль вариации функционала. Покажем теперь, как применяется эта основная теорема к рассматриваемому функционалу, причем мы ещё раз повторим предыдущее рассуждение применительно к функционалу. Предположим, что экстремум достигается на дважды дифференцируемой кривой $y = y(x)$ (требуя лишь существования производных первого порядка у допустимых кривых, можно иным методом доказать, что у кривой, реализующей экстремум, существует и вторая производная).

Необходимое условие экстремума функционала v заключается в обращении в нуль его вариации: $\delta v = 0$. Для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$$

это условие имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y']dx = 0.$$

Интегрируем второе слагаемое по частям и, принимая во внимание, что $\delta y' = (\delta y)'$, получим

$$\delta v = [F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx.$$

Но

$$\delta y\big|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \text{ и } \delta y\big|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0,$$

потому что все допустимые кривые в рассматриваемой простейшей задаче проходят через фиксированные граничные точки, и следовательно,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx.$$

Итак, необходимое условие экстремума приобретает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx = 0,$$

причем первый множитель $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$ на кривой y=y(x), реализующей экстремум, является заданной непрерывной функцией, а второй множитель δy, ввиду произвола в выборе кривой сравнения $y = \bar{y}(x)$, является произвольной функцией, удовлетворяющей лишь некоторым весьма общим условиям, а именно: функция δy в граничных точках $x = x_0$ и $x = x_1$ обращается в нуль, непрерывна и дифференцируема один или несколько раз, δy или δy и $\delta y'$ малы по абсолютной величине.

Применим теперь основную лемму для упрощения полученного выше необходимого условия экстремума простейшего функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx = 0,$$

Все условия леммы выполнены: на кривой, реализующей экстремум, множитель $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$ является непрерывной функцией, а вариация δy является произвольной функцией, на которую наложены лишь предусмотренные в основной лемме ограничения общего характера, следовательно,
$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0$ на кривой y=y(x), реализующей экстремум рассматриваемого функционала, т.е. y=y(x) является решением дифференциального уравнения второго порядка $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ или в развернутом виде

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера (оно впервые было им опубликовано в 1744 году). Интегральные кривые уравнения Эйлера $y = y(x, C_1, C_2)$ называются экстремалями. Только на экстремалях может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$$

Для нахождения кривой, реализующей экстремум функционала, интегрируем уравнение Эйлера и определяем обе произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, из условий на границе $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Только на удовлетворяющих этим условиям экстремалях может реализоваться экстремум функционала. Однако для того, чтобы установить, реализуется ли на них в действительности экстремум, и притом максимум или минимум, надо воспользоваться достаточными условиями экстремума.

Для получения необходимых условий экстремума функционала v более общего вида

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx$$

при заданных граничных значениях всех функций

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ ...,\ y_n(x_0) = y_{n0},$$
$$y_1(x_1) = y_{11},\ y_2(x_1) = y_{21},\ ...,\ y_n(x_1) = y_{n1},$$

будем варьировать лишь одну из функций

$$y_j(x) \qquad (j = 1, 2, ..., n),$$

оставляя все остальные функции неизменными. При этом функционал $v[y_1, y_2, ..., y_n]$ превратился в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции, например от $y_j(x)$,

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \tilde{v}[y_j]$$

и, следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0$$

Так как это рассуждение применимо к любой функции $y_j(x)$, $(j = 1, 2, ..., n)$, то мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Тема 13. Вариационные задачи с подвижными границами. Задача с подвижными концами.

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

Предположим теперь, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется, - кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно уже брать и кривые со смещенными граничными точками.

Поэтому если на какой-нибудь кривой y = y(x) достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой y = y(x), и, следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижении экстремума в задаче с неподвижными границами условие — функция *y(x)* должна быть решением уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Итак, кривые y = y (x), на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, должны быть экстремалями. Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными граничными точками такими условиями были

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y(x_1) = y_1 .$$

В задаче с подвижными границами одно или оба эти условия отсутствуют, и недостающие условия для определения произвольных постоянных общего решения уравнения Эйлера должны быть получены из основного необходимого условия экстремума — равенства нулю вариации δv.

Так как в задаче с подвижными границами экстремум достигается лишь на решениях $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, то в дальнейшем можно рассматривать значение функционала лишь на функциях этого семейства. При этом функционал $v[y(x, C_1, C_2)]$ превращается в функцию параметров C_l *к* C_2 *и* пределов интеграции x_0 и x_1, а вариация функционала совпадает с дифференциалом этой функции. Для упрощения будем считать, что одна из граничных точек, например (x_0, y_0), закреплена, а другая (x_1, y_1) может перемещаться и переходит в точку $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$, или, как обычно обозначают в вариационном исчислении, $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$.

Допустимые кривые $y = y(x)$ и $y = y(x) + \delta y$ будем считать близкими, если модули вариаций δy и $\delta y'$ малы, и малы модули приращений δx_1 и δy_1 (приращения δx_1 и δy_1 обычно называют вариациями предельных значений x_1 и y_1 *)*.

Экстремали, проходящие через точку (x_0, y_0), образуют пучок экстремалей $y = y(x, C_1)$, Функционал $v[y(x, C_1)]$ на кривых этого пучка превращается в функцию C_1 и x_1 Если кривые пучка $y = y(x, C_1)$ в окрестности рассматриваемой экстремали не пересекаются, то $v[y(x, C_1)]$ можно рассматривать как однозначную функцию x_1 и y_1, так как задание x_1 и y_1 определяет экстремаль пучка и тем самым определяет значение функционала.

Вычислим вариацию функционала $v[y(x, C_1)]$ на экстремалях пучка $y = y(x, C_1)$ при перемещении граничной точки из положения (x_1, y_1) в положение $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Так как функционал *v* на кривых пучка превратился в функцию x_1 и y_1, то его вариация совпадает с дифференциалом этой функции.

Получим $v = \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F dx \approx F\big|_{x=x_1}\delta x_1$;

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}[F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y')]dx \approx F_{y'}\Big|_{x=x_1}\cdot(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1),$$

где приближенные равенства также справедливы с точностью до членов порядка выше первого относительно δx_1 и δy_1. Следовательно, получим $\delta v = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\cdot(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1) = (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1$,

или

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1,$$

где $\bar{v}(x_1, y_1)$ - функция, в которую превратился функционал v на экстремалях $y = y(x, C_1)$, а $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ - приращения координат граничной точки. Основное необходимое условие экстремума $\delta v = 0$ приобретает вид

$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1 = 0.$$

Если вариации δx_1 и δy_1 независимы, то отсюда следует, что

$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1} = 0 \text{ и } F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0.$$

Однако чаще приходится рассматривать случай, когда вариации δx_1 и δy_1 зависимы.

Пусть, например, правая граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по некоторой кривой $y_1 = \varphi(x_1)$

Тогда $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$ и, следовательно, получим $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]\delta x_1 = 0$ или, так как δx_1 изменяется произвольно, то $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_1} = 0$. Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами φ' *и* y' в граничной точке. Оно называется условием трансверсальности.

Условие трансверсальности совместно с условием $y_1 = \varphi(x_1)$ позволяет, вообще говоря, определить одну или несколько экстремалей пучка $y = y(x, C_1)$, на которых может достигаться экстремум. Если граничная точка (x_0, y_0) может перемещаться по некоторой кривой $y_0 = \psi(x_0)$, то совершенно так же обнаружим, что и в точке (x_0, y_0) должно удовлетворяться условие трансверсальности

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_0} = 0$$

Тема 14. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи Лагранжа, Майера, Больца.

Ниже приводятся основные сведения относительно вариационных задач на условный экстремум функционалов от функций одной переменной. К этим задачам относятся: изопериметрическая. Задача Лагранжа, задача Майера, задача Больца. Первые три задачи могут рассматриваться как частные случаи последней, что в известной мере будет использовано при изложении их.

Изопериметрическая задача.

Среди всех кусочно-гладких вектор-функций

$$y = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\},$$

принимающих заданные значения на концах интервала $[x_1, x_2]$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f.(x, y, y')dx$$

при связях

$$J_i(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_i(x, y, y')dx = L_i \qquad (i = 1,2,\dots,k).$$

Правило множителей.

Если кусочно-гладкая кривая $y = \bar{y}(x),$ лежащая внутри G, дает функционалу

$$J_0(y)$$

экстремум на связях

$$J_i(y) = L_i \qquad (i = 1,2,\dots,k),$$

то существует такие константы $\lambda_j(\lambda^2{}_0 + \lambda_1{}^2 + \dots + \lambda^2{}_k = 1)$, что кривая $y = \bar{y}(x)$ является для функционала

$$\int_{x_1}^{x2} \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k)dx$$

обычной (безусловной) экстремалью, т.е. экстремалью, отвечающей свободному, не стесненному каким-либо связями, варьированию.

Если исключить случаи когда множители λ_j обращаются в нуль, то из вышеуказанного правила множителей вытекает принцип взаимности: совокупность условных экстремалей не зависит от того, искать ли экстремум функционала J_0 при фиксированных $J_i(y)$ $(i = 1,2,\dots,k)$ или искать экстремум J_n при фиксированных $J_0 \, u \, J_n$ $(i \neq m, 1 \leq i \leq k)$.

Задача Лагранжа.

Среди всех кусочно-гладких вектор-функций у найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f._0(x, y, y')dx,$$

при связях

$$f_i(x, y, y') = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,m < n)$$

и условиях на концах

$$\psi_k(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0 \qquad (k = 1,2,\dots, p \leq 2n + 2).$$

Задача Майера.

Среди систем гладких функций $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)$, удовлетворяющих связям

$$\varphi_i(x, y, y') = 0 \qquad (i = 0,1,2,\dots,m < n)$$

и условиям на концах

$$y_0(x_1) = a_0, y_1(x_1) = a_1, \dots, y_n(x_1) = a_n,$$

$$y_1(x_2) = b_1, \dots, y_n(x_2) = b_n,$$

найти ту систему, в которой $y_0(x)$ имеет при $x = x_2$ экстремум.

Задача Майера может ставиться и как задача с подвижными концами, например, среди систем гладких функций $y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x)$, удовлетворяющих связям и условиям на концах

$$\varphi_i(x, y, y') = 0 \qquad (i = 0,1,2,...,m < n),$$
$$y_0(x_1) = a_0, y_1(x_1) = a_1, ..., y_n(x_1) = a_n,$$
$$\psi_\mu(x_2, y(x_2), ..., y_n(x_2)) = 0, \ \ 0 \le \mu < n+1,$$

найти ту систему, в которой $y_0(x_2)$ имеет максимум на правом конце.

Задача Больца.

Среди всех кусочно-гладких вектор-функций найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f.(x, y, y')dx + g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2))$$

при связях

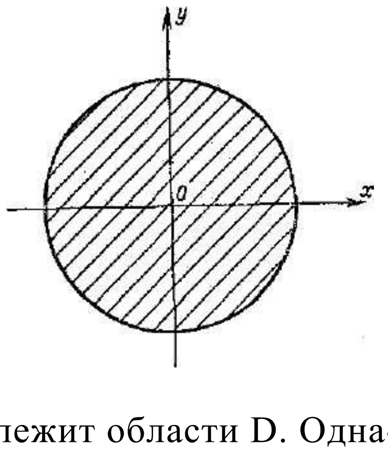
$$\varphi_\beta(x, y, y') = 0 \qquad (\beta = 1,2,...,m < n)$$

и условиях на концах

$$\psi_\mu(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0 \qquad (\mu = 1,2,..., p \le 2n+2).$$

Тема 15. Достаточные условия экстремума. Слабый экстремум. Сильный экстремум.

Если на плоскости (x, y) через каждую точку некоторой области D проходит одна и только одна кривая семейства $y = y(x, C)$, то говорят, что это семейство кривых в области D образует поле, или, точнее, собственное поле. Угловой коэффициент касательной $p(x, y)$ к кривой семейства $y = y(x, C)$, проходящей через точку (x, y), называется наклоном поля в точке (x, y).



Например, внутри круга $x^2 + y^2 \le 1$ параллельные прямые $y = x + C$ образуют поле, причем наклон этого поля $p(x, y) = 1$. Напротив, семейство парабол $y = (x - a)^2 - 1$ внутри того же круга поля не образует, так как внутри этого круга параболы рассматриваемого семейства пересекаются.

Если все кривые семейства $y = y(x, C)$ проходят через некоторую точку (x_0, y_0), т. е. образуют пучок кривых, то они заведомо не образуют собственного поля в области D, если центр пучка принадлежит области D. Однако если кривые пучка покрывают всю область D и нигде не пересекаются в этой области, кроме центра пучка, т. е. во всех точках, отличных от центра пучка, требования, налагаемые на поле, выполнены, то говорят, что семейство $y = y(x, C)$ тоже образует поле, но в отличие от собственного поля в рассматриваемом случае поле называется центральным.

Известно, что две бесконечно близкие кривые семейства $F(x,y,C)=0$ пересекаются в точках С-дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$F(x,y,C)=0;\quad \frac{\partial F}{\partial C}=0.$$

Напомним, что в состав С-дискриминантной кривой, в частности, входит огибающая семейства и геометрические места кратных точек кривых семейства. Если $F(x,y,C)=0$ является уравнением пучка кривых, то цёнтр пучка также принадлежит С-дискриминантной кривой. Поэтому если взять пучок экстремалей $y=y(x,C)$ проходящих через точку (x_0,y_0) определить его С-дискриминантную кривую $\Phi(x,y)=0$, то близкие кривые семейства $y=y(x,C)$ будут пересекаться вблизи кривой $\Phi(x,y)=0$ и, в частности, кривые этого семейства, близкие к рассматриваемой экстремали $y=y(x)$, проходящей через точки $A(x_0,y_0)$ и $B(x_1,y_1)$, будут пересекаться в точках, близких к точкам касания (или пересечения) кривой $y=y(x)$ с С-дискриминантной кривой. Если дуга AB экстремали $y=y(x)$ не имеет отличных от точки A общих точек с С-дискриминантной кривой пучка экстремалей, включающего данную экстремаль, то достаточно близкие к дуге AB экстремали пучка не пересекаются, т. е. образуют в окрестности дуги AB центральное поле, включающее эту дугу.

Если дуга АВ экстремали $y=y(x)$ имеет отличную от А общую точку А* с С-дискриминантной кривой пучка $y=y(x,C)$, то близкие к $y=y(x)$ кривые пучка могут пересекаться между собой и с кривой $y=y(x)$ вблизи точки А* и, вообще говоря, поля не образуют. Точка А* называется точкой, сопряженной с точкой А.

Полученный результат можно сформулировать так: для построения центрального поля экстремалей с центром в точке А, содержащего дугу экстремали АВ, достаточно, чтобы точка А*, сопряженная с точкой А не лежала на дуге АВ. Это условие возможности построения поля экстремалей, включающего данную экстремаль, носит название условия Якоби.

Нетрудно сформулировать это условие и аналитически. Пусть $y=y(x,C)$ - уравнение пучка экстремалей с центром в точке А, причем параметр С можно для определенности считать совпадающим с угловым коэффициентом y' экстремалей пучка в точке А. С-дйскриминантная кривая определяется уравнениями

$$y=y(x,C);\quad \frac{\partial y(x,C)}{\partial C}=0.$$

Вдоль каждой фиксированной кривой семейства производная $\frac{\partial y(x,C)}{\partial C}$ является функцией только *x*. Эту функцию кратко обозначим буквой $u: u=\frac{\partial y(x,C)}{\partial C}$, где С задано; отсюда $u'_x=\frac{\partial^2 y(x,C)}{\partial C\partial x}$. Функции $y=y(x,C)$ являются решениями уравнения Эйлера, поэтому

$$F_y(x,y(x,C),y'_x(x,C))-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y(x,C),y'_x(x,C))\equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по С и полагая $\frac{\partial y(x,C)}{\partial C} = u$, получим

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}(F_{yy'}u + F_{y'y'}u') = 0$$

или

$$(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'})u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0.$$

Здесь $F_{yy}(x,y,y'), F_{yy'}(x,y,y'), F_{y'y'}(x,y,y')$ являются известными функциями х, так как второй аргумент у равен решению уравнения Эйлера $y = y(x,C)$, взятому при значении $C = C_0$, соответствующем экстремали АВ. Это линейное однородное уравнение второго порядка относительно u называется уравнением Якоби.

Если решение этого уравнения $u = \frac{\partial y(x,C)}{\partial C}$ обращающееся в нуль в центре пучка при $x = x_0$ (центр пучка всегда принадлежит С-дискриминантной кривой), обращается в нуль еще в какой-нибудь точке интервала $x_0 < x < x_1$ то сопряженная с А точка, определяемая уравнениями

$$y = y(x, C_0) \text{ и } \frac{\partial y(x,C)}{\partial C} = 0 \text{ или } u = 0,$$

лежит на дуге экстремали *АВ*).* Если же существует решение уравнения Якоби, обращающееся в нуль при $x = x_0$ и более не обращающееся в нуль ни в одной точке отрезка $x_0 < x < x_1$, то точек, сопряженных с *A,* на дуге *АВ* нет, - условие Якоби выполнено, и дугу экстремали *АВ* можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке А. Даже в весьма простых примерах исследование знака функции *В* было сопряжено с некоторыми затруднениями, и поэтому желательно условие сохранения знака функцией *Е* заменить более легко проверяемым условием. Предположим, что функция $F(x,y,y')$ трижды дифференцируема по аргументу y'. По формуле Тейлора получим

$$F(x,y,y') = F(x,y,p) + (y'-p)F_p(x,y,p) + \frac{(y'-p)^2}{21}F_{y'y'}(x,y,q),$$

где q заключено между р и y'.

Функция

$$E(x,y,p,y') = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F_p(x,y,p)$$

после замены функции $F(x,y,y')$ её разложением по формуле Тейлора примет вид

$$E(x,y,p,y') = \frac{(y'-p)^2}{21}F_{y'y'}(x,y,q).$$

Отсюда видно, что функция Е сохраняет знак, если сохраняет знак $F_{y'y'}(x,y,q)$. При исследовании на слабый экстремум функция $F_{y'y'}(x,y,q)$ должна сохранять знак для значений х и у в точках близких к точкам исследуемой экстремали, и для значений q, близких к р. Если $F_{y'y'}(x,y,y') \neq 0$ в точках экстремали С, то в силу непрерывности эта вторая производная сохраняет знак и в точках близких к кривой С, и для значений y', близких к значениям y' на кривой C. Таким образом, при исследовании на слабый минимум условие $E \geq 0$ может быть заменено условием $F_{y'y'} > 0$ на экстремали C, а при исследовании на слабый максимум условие $E \leq 0$ может быть заменено условием $F_{y'y'} < 0$ на кривой C. Условие $F_{y'y'} > 0$ (или $F_{y'y'} < 0$) носит название условия Лежандра *).

При исследовании на сильный минимум условие $E \geq 0$ может быть заменено требованием $F_{y'y'}(x,y,q) \geq 0$ в точках (x,y), близких к точкам кривой C при произвольных значениях q. При этом, конечно, предполагается, что разложение по формуле Тейлора

$$F(x,y,y') = F(x,y,p) + (y' - p)F_p(x,y,p) + \frac{(y' - p)^2}{21}F_{y'y'}(x,y,q)$$

справедливо при любых y'. При исследовании на сильный максимум получим условие $F_{y'y'}(x,y,q) \leq 0$, при тех же предположениях относительно области изменения аргументов и разложимости функции $F(x,y,y')$ по формуле Тейлора.

Сводка достаточных условий минимума простейшего функционала *)

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

Слабый минимум	Сильный минимум	Слабый минимум	Сильный минимум	Слабый минимум	Сильный минимум
1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$
2. Условие Якоби	2. Условие Якоби	2. Условие Якоби	2. Условие Якоби	2. Существует поле экстремалей, включающее данную экстремаль	2. Существует поле экстремалей, включающее данную экстремаль
3. $F_{y'y'} > 0$ на исследуемой экстремали	3. $F_{y'y'}(x,y,y') \geqslant 0$ для точек (x, y), близких к точкам на исследуемой экстремали и для произвольных значений y'. При этом предполагается, что функция $F(x, y, y')$ трижды дифференцируема по y' для любых y'	3. $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ для точек (x, y), близких к точкам на исследуемой экстремали, и для y', *близких* к $p(x, y)$	3. $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ для точек (x, y), близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных y'	3. $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ для точек (x, y), близких к точкам на исследуемой экстремали, и для y', *близких* к $p(x, y)$	3. $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ для точек (x, y), близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных y'

*) Для получения достаточных условий *максимума* в этой сводке надо взять знаки неравенства противоположного смысла.

4. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ, УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ

3.1 Основная литература.

1. Ванько В.И., О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. Для вузов, - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 488 с.
2. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.-344 с.

3. Романко В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002.-256 с.
4. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – СПб.: изд. "Лань", 2005.-192 с.

3.2 Дополнительная литература

1. Антоневич А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1984.
2. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. – Л.: Изд-во Ленинград. Ун-та, 1980. – 288с.
3. Вольтера В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: Пер. с англ./ Под редакцией П.И. Кузнецова. – М.: Наука, 1982. – 304с.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения, – М.: Наука, 1975.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. Пособие/ Под ред. А.В. Ефимова. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1990. – 304с.

5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Основными задачами самостоятельной работы студентов являются:

- формирование интереса к познавательной деятельности и навыков самостоятельной работы в профессиональной сфере;

- развитие творческого мышления, способности принимать самостоятельное решение, находить выход из кризисной ситуации;

- применение теории к практике.

Самостоятельная работа студента состоит в подготовке к лекциям, практическим занятиям, коллоквиумам, контрольным точкам и экзаменам.

Согласно учебному плану предлагаются для самостоятельной работы некоторые, не рассматриваемые на занятиях частные вопросы, задачи, примеры, индивидуальные задания.

Задачи для самостоятельного решения:

Задание 1: Найти функции $y_1(x), y_2(x) \in C^1[a,b]$, на которых может достигаться экстремум заданного функционала при заданных краевых условиях:

$$I[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} (y_1' y_2' - y_1 y_2)dx,\ y_1(0) = 0,\ y_1(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_2(\frac{\pi}{2}) = -1.$$

Задание 2: Найти экстремали в вариационной задаче с правым подвижным концом:

$$\int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx \to extr,\ y(0)=0,\ y(b)=b-5.$$

Задание 3: Для следующих задач указать тип, к которому они относятся, и записать полную систему необходимых условий экстремума функционала

$$I[y]=\int f(x,y')dx+T[y(b)]\to extr,\ g_j(x,y)=0,\quad j=\overline{1,k}$$

$(k<n),\ y(a)=y^a,\ a,b,y^a=(y_1{}^a,y_2{}^a,...,y_n{}^a)$ фиксированы.

Задание 4: Исследовать на экстремум функционал, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям:

$$\int_0^b (y'^2+2yy'-16y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(a)=0,\ (a>0).$$

Задание 5: Составить интегральные уравнения или системы уравнений, соответствующие следующим задачам Коши:

а) $y'=-1+3x^2+y^2,\ y(1)=1;$

б) $y'''=\dfrac{3}{2}xy'^2,\ y(0)=-3,\ y'(0)=1,\ y'''(0)=-1.$

Задание 6: Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$y(x)=\frac{1}{1+x^2}+\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$$

Задание 7: Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+x-\int_0^x y(t)dt,\ y_0(x)=\frac{x^2}{2}+x.$$

Задание 8: Найти с помощью резольвенты решение интегрального уравнения:

$$y(x)=\sin x+2\int_0^x e^{x-t}y(t)dt.$$

Задание 9: С помощью преобразования Лапласа найти решение уравнения типа свертки:

$$y(x)=xe^{2x}-\int_0^x e^{2(x-t)}y(t)dt.$$

Задание 10: Решить уравнение Вольтерра 1-го рода, сводя его к уравнению 2-го рода:

$$\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt=1-\cos x.$$

Задание 11: Найти все решения или установить неразрешимость уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром:

$$y(x)-\frac{24}{7}\int_0^1 (1-x^2)(1-\frac{3}{2}t)y(t)dt=x.$$

Задание 12: Найти характеристические числа и собственные функции уравнения:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (xt - 2x^2) y(t) dt = 0.$$

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

6.1. Решить интегральное уравнение $\int\limits_0^\infty g(z)\sin zxdz = f(x), где\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sin x, 0 \le x \le \pi \\ 0,\ x \ge \pi \end{cases}$

Используем синус-преобразование Фурье. Запишем условие ввиде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}}g(z)\sin zxdz$$

тогда

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}g(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi f(x)\sin zxdx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^\pi \sin x\sin zxdx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}[\cos(x - xz) - \cos(x + zx)]dx => g(z) = \frac{\sin \pi z}{1 - z^2}$$

6.2. Решить интегральное уравнение $\int\limits_0^\infty g(y)\cos xydy = f(x), где\, f(x) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x \le a \\ 0,\ x > a \end{cases}$

Тогда имеем

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}}g(y)\cos xydy$$

Используя cos-преобразование:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x)\cos xydx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^a \cos xydx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left.\frac{\sin xy}{y}\right|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ay}{y}.$$

Тогда $g(y) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin ay}{y}.$

6.3. Решить уравнение Вольтера 2го рода $\varphi(t) = t + \int\limits_0^t \sin(t - s)\varphi(s)ds.$

Используем метод Лапласа. Тогда

$$\varphi(t) \xrightarrow{L} \Phi(p)$$

$$t \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2}$$

$$\sin t \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2 + 1}$$

Используя эти соотношения, получим формулу для изображений:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 + 1}\cdot\Phi(p),$$

т.е. интегральное уравнение преобразовано в алгебраическое. Решая его относительно $\Phi(p)$, получим:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}.$$

Обратное преобразование дает ответ: $\varphi(t) = t + \dfrac{t^3}{3!}$.

6.4. Решить уравнение Фредгольма 2го рода $\varphi(t) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sin xs\varphi(s)ds + f(x).$

Используем метод аппроксимации ядер. Заменим невырожденное ядро приближенным вырожденным, т.е. $\sin xs \approx xs$. Тогда имеем:

$$\varphi(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} xs\varphi(s)ds + f(x) \quad \text{или} \quad \varphi(t) = x\int_0^{\frac{1}{2}} s\varphi(s)ds + f(x).$$

Заменяя $\int_0^{\frac{1}{2}} s\varphi(s)ds = c$, получим $\varphi(x) = cx + f(x)$. Подставляя это в интегральное уравнение, имеем $cx + f(x) = x\int_0^{\frac{1}{2}} s[cs + f(x)]ds + f(x).$

Отсюда определяем: $c = \frac{24}{23}\int_0^{\frac{1}{2}} sf(s)ds$ и пишем ответ в виде

$$\varphi(x) = \frac{24}{23}\int_0^{\frac{1}{2}} sf(s)ds + f(x).$$

6.5. Решить уравнение Фредгольма 2го рода $\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi(s)ds.$

Используем алгебраический метод.

$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}t\int_0^1 s\varphi(s)ds,$ т.е. $\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}tc$, где $c = \int_0^1 s\varphi(s)ds.$

Тогда интегральное уравнение примет вид: $\frac{5}{6}t + \frac{1}{2}tc = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}t\int_0^1 s[\frac{5}{6}s + \frac{cs}{2}]ds.$

Отсюда $c = \int_0^1 s(\frac{5}{6}s + \frac{1}{2}sc)ds = \frac{1}{3},$ т.е. приходим к ответу

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}t \cdot \frac{1}{3} = t, т.е. \varphi(t) = t.$$

6.6. Решить уравнение Фредгольма 2го рода из пункта 6.5. методом последовательных приближений.

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi(s)ds.$$

Необходимые требования для применения этого метода выполнены:

1) ядро $|ts| \le 1 \cdot 1 = 1$.

2) $\lambda = \frac{1}{2} < \frac{1}{1(b-a)} = 1.$

Пусть $\varphi_0(t) = 0.$

Тогда

$$\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi_0(s)ds$$

$$\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t.$$

Тогда
$$\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi_1(s)ds$$
$$\varphi_2(t) = \frac{35}{36}t$$

Тогда
$$\varphi_3(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi_2(s)ds$$
, т.е.
$$\varphi_3(t) = \frac{5}{6}t(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2})$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{5}{6}t(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{6^n})$$

По правилам прогрессий $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-\frac{1}{6^n})}{1-\frac{1}{6}} => \frac{6}{5} при\, n \to \infty$.

Отсюда следует ответ $\varphi(t) = \frac{5}{6}t \cdot \frac{6}{5} = t$, но если взять $\varphi_0(t) = t$, то будет:

$$\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi_0(s)ds = t$$

$$\varphi_2(t) = t$$

$$\varphi_3(t) = t$$

....

$т.е.\ \varphi(t) = t.$

6.7. Задача: определить, на каких кривых может достигать экстремума функционал

$$V[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2 - y^2]dx \quad \text{при} \quad \begin{matrix} y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{matrix}$$

Используем уравнение Эйлера $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

$$F(x, y, y') = y'^2 - y^2$$

$$F_y = -2y$$

$$F_{y'} = 2y'$$

Подставим это в уравнение Эйлера, получим $y'' + y = 0.$

Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0$$

$$=> c_1 = 0$$

$$y(x) = c_2 \sin x$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = c_2 \sin\frac{\pi}{2} => c_2 = 1$$

Ответ: $y(x) = \sin x.$

6.8. Определить экстремали функционала $l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx.$

Используем уравнение Эйлера.

$F(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2}$

$F_y = 0$

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''\sqrt{1+y'^2} - y'\dfrac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}$$

Уравнение Эйлера примет вид: $y''(1+y'^2) - y'^2y'' = 0$ или $y'' = 0$

$y' = c_1$

$y = c_1x + c_2$

т.е. экстремали являются прямыми линиями.

6.9. Определить условие трансверсальности для функционала:

$$v = \int_{X_0}^{X_1} \text{B}(x_1y_1)\sqrt{1+y'^2}\,2x$$

Условие трансверсальности имеет общий вид

$F + F_{y_1}(\varphi' - y') = 0$,

т.е. в данном случае

$$\text{B}(x_1y)\sqrt{1+y'^1} + \frac{\text{B}(x_1y)y'}{\sqrt{1+y'^1}}(\varphi' - y') = 0$$

или

$$\frac{\text{B}(x_1y)(1+\varphi'y')}{\sqrt{1+y'^1}} = 0$$

т.е.. при В$\neq$ 0 имеем $1+\varphi'y' = 0$

или $y' = -\dfrac{1}{\varphi'}$. Это условие ортогональности.

6.10. Исследовать на экстремум функционал

$V = \int_0^a (y')^3 dx$ при

$y(0) = 0$

$y(a) = b$, $a \succ 0, b \succ 0.$

Использовать условие Лежандра. Ранее определена экстремаль $y = \dfrac{b}{a}x,$ на которой возможен экстремум.

$F = (y')^3$

$F_{y'} = 3y'^2$

$F_{y'y'} = 6y'.$

$$y = \frac{b}{a}x$$

т.е. $p = \frac{b}{a} \succ 0$

Это значит, что если $y' \sim p$, то $F_{y'y'} \succ 0$, но при любых значениях y' это не соблюдается. Значит выполнены условия только для слабого min.

Ответ: слабый min.

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Целью текущего контроля самостоятельной работы студентов является стремление упорядочить работу студентов в течение семестра, сделать ее более регулярной, организованной, ритмичной, чтобы разгрузить предэкзаменационный период, нормализовать получение зачетов, улучшить в конечном итоге качество знаний и экзаменационные показатели успеваемости.

В связи с этим подход к оценке на контрольных точках и на экзаменах должен в принципе отличаться: на экзаменах необходимо учитывать только объем и уровень знаний студентов, а на контрольных точках должны оценивать в первую очередь не качество знаний и способности студента, а объем и тщательность выполненной им работы, ее регулярность и даже посещаемость учебных занятий. Именно такой подход позволит организовать работу студентов в течение семестра должным образом.

8.ФОНД КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

№1

1) ВИ: Определить экстремаль функционала:

$$V[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)dx$$

при y(0)=0

y($\pi/2$)=1

2) ИУ: Метод аппроксимации ядер:

$$\varphi(x) = \int_0^{1/2} tgxt\varphi(t)dt + f(x)$$

№2

1) ВИ: Определить экстремаль функционала:

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)dx$$

при y(0)=0

y(1)=1

2) ИУ: Метод Лапласа:

$$\varphi(x) = t + \int_0^t \sin(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau$$

№3

1) ВИ: Определить экстремаль функционала:

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

2) ИУ: Метод последовательных приближений:

$$\varphi(x) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 tx\varphi(x)dx$$

№4

1) ВИ: Определить экстремаль функционала:

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x}dx$$

2) ИУ: Косинус-преобразование Фурье:

$$\int_0^\infty \varphi(y)\cos sydy = f(s)$$

где $f(s) = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; s > a \\ 1 \;\; при \;\; s \in (0, a) \end{cases}$

№5

1) ВИ: Определить экстремаль функционала:

$$V[y(x),z(x)]=\int_0^{\pi/2}(y'^2+z'^2+2yz)dx$$

при y(0)=0

y($\pi/2$)=1

z(0)=0

z($\pi/2$)=-1

2) ИУ: Алгебраический метод:

$$\varphi(x)=2t+\frac{1}{3}\int_0^1 tx\varphi(x)dx$$

№6

1) ВИ: Определить экстремаль функционала:

$$V[y(x)]=\int_0^1(1+y''^2)dx$$

при
$$\begin{aligned} y(0)&=0\\ y(1)&=1\\ y'(0)&=1\\ y'(1)&=1 \end{aligned}$$

2) ИУ: Синус-преобразование Фурье:

$$\int_0^\infty \varphi(s)\sin sxds=f(x)$$

где $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x>a\\ 2 & при\ \ x\in(0,a)\end{cases}$

9. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры	Кафедра: МАиМ
«_____» __________________200_г.	Факультет: МиИ
Заведующий кафедрой	Курс: III
Утверждаю: ______________ _____	Дисциплина: ИУВИ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Интегральные уравнения Фредгольма.
2. Вариационная задача с подвижными границами. Условия трансверсальности.
3. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)]=\int_0^2(xy'+y'^2)dx;\ \ y(0)=1,\ \ y(2)=0.$$

4. Решить интегральное уравнение алгебраическим методом
$$\varphi(t)=\frac{2}{3}t+\frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi(s)ds.$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры	Кафедра: МАиМ
«_____» _________________200_г.	Факультет: МиИ
Заведующий кафедрой	Курс: III
Утверждаю: _____________ _____	Дисциплина: ИУВИ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Интегральные уравнения Вольтерра.
2. Вариационные задачи на условный экстремум функционала.
3. Найти экстремали функционала $V[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)dx$.
4. Решить интегральное уравнение методом аппроксимации ядер
$$\varphi(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} tg(xs)\varphi(s)ds+f(x)\cdot$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры	Кафедра: МАиМ
«_____» _________________200_г.	Факультет: МиИ
Заведующий кафедрой	Курс: III
Утверждаю: _____________ _____	Дисциплина: ИУВИ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям.
2. Достаточные условия экстремума функционала. Функция Вейерштрасса. Условие Лежандра.
3. Определить условие трансверсальности для функционала
$$V[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx.$$
4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений $\varphi(x)=t-\int_0^t(t-s)\varphi(s)ds$.

10. **КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ**

Лекционные и практические занятия по дисциплине «интегральные уравнения и вариационное исчисление» для студентов специальности010701 – «Физика» проводит доцент кафедры МАиМ Нейман В.П.