Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АМГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
_______ Т.В. Труфанова
«___»__________ 2007г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

для специальности 010101 – Математика

Составители: Т.В. Труфанова, Е.М. Салмашова

Благовещенск
2007

ББК
Т 80

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики
и информатики
Амурского государственного
университета

Труфанова Т.В., Салмашова Е.М.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Интегральные преобразования и операционное исчисление» для студентов очной формы обучения специальности 010101 – «Математика». – Благовещенск. Изд-во Амурский гос. ун-та, 2007. – 82 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине: спецкурс и спецсеминар "Интегральные преобразования и операционное исчисление"
для специальности 010101 – Математика

Курс 3	Семестр 5
Лекции 36 (час.)	Экзамен 5 семестр
	Зачет (нет).

Практические (семинарские) занятия 36 (час.)
Лабораторные занятия (нет).
Самостоятельная работа 72 (час.)
Всего 144 (час.)

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Специальный курс "Интегральные преобразования и операционное исчисление" посвящен изучению различных интегральных преобразований, которые применяются к решению дифференциальных и интегральных уравнений, изучению специальных функций, вычислению интегралов. Этот курс связан с дисциплинами: Математический анализ, Дифференциальные уравнения, Теория функций комплексного переменного, Уравнения в частных производных, Алгебра.

Целью дисциплины "Интегральные преобразования и операционное исчисление" является знакомство с наиболее распространенными интегральными преобразованиями и применение этих преобразований для решения задач математической физики, в теории специальных функций, решению дифференциальных и интегральных уравнений.

Методы операционного исчисления позволяют решать сложные задачи в различных областях современного естествознания. Особенно важное значение они имеют в современных отраслях науки и техники, такие как автоматика и телемеханика, теория следящих систем, теория регулирования, электротехники, радиотехники.

2. Содержание дисциплины

2.1. Наименование тем, их содержание, объем в часах.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

	Наименование темы	Кол-во часов
1	Введение. Возникновение операционного исчисления как самостоятельной дисциплины. Сущность операционного исчисления. Этапы развития	1
2	Преобразования Фурье. Некоторые сведения из теории рядов Фурье. Интегральная формула Фурье. Основные свойства преобразований Фурье. Кратные преобразования Фурье. Некоторые приложения преобразований Фурье.	6
3	Преобразования Лапласа. Оригиналы и изображения. Существование изображений. Примеры вычислений изображений. Дифференцирование и интегрирование изображений.	2
4	Основные теоремы операционного исчисления. Изображения периодических оригиналов. Теорема запаздывания. Теорема смещения. Теорема умножения.	2
5	Дифференцирование и интегрирование оригиналов. Приложение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Интегрирование систем дифференциальных уравнений. Интеграл Дюамеля.	3
6	Теорема разложения. Первая и вторая теоремы.	2
7	Изображение некоторых специальных функций. Импульсивные функции Дирака. Гамма-функция и изображения дробных степеней. Функции Бесселя	2
8	Общий способ определения оригинала по изображению. Интеграл Бромвича. Формулы обращение Римана-Меллина. Нахождение оригинала в случае, когда его изображение является мероморфной функцией. Нахождение оригинала путем непосредственного применения. Формула обращения. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа.	4
9	Преобразование Бесселя. Преобразование Ханкеля. Преобразование Мейера. Преобразование Контаровича-Лебедева. Преобразование Меллина.	4
10	Преобразование Мелера-Фока	2

11	Преобразование Лагерра. Преобразования Гильберта.	2
12	Операционное исчисление: основные понятия и определения. Рациональные операторы. Операторы, преобразуемые по Лапласу. Обобщённое преобразование Лапласа. Операторные функции. Предел последовательности операторов. Предел операторной функции. Непрерывная производная операторной функции. Интеграл от операторной функции. Ступенчатые функции. Разностные уравнения. Преобразования Эфроса. Операторные дифференциальные уравнения.	6
ИТОГО		36

2.2. Программа практических занятий.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

	Наименование темы	Кол-во часов
1	Ряды Фурье. Разложение в ряд Фурье	2
2	Интеграл Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье. Решение методом Фурье некоторых задач для уравнений с частными производными.	2
3	Вычисление изображений. Дифференцирование и интегрирование изображений	2
4	Основные теоремы операционного исчисления	2
5	Изображение периодических оригиналов	2
6	Дифференцирование и интегрирование оригиналов	2
7	Интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	2
8	Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений. Решение интегральных уравнений.	2
9	Нахождение оригиналов по изображениям. Первая и вторая теорема разложения.	2
10	Импульсивные функции Дирака. Гамма-функция и изображения дробных степеней. Функции Бесселя	4
11	Интеграл Бромвича. Формулы обращения Римана-Меллина.	2
12	Нахождение оригинала путем непосредственного применения формул обращения.	2
13	Решения уравнений в частных производных, пользуясь интегральными преобразованиями Лапласа	2
14	Преобразования Лапласа-Марсена	2
15	Преобразование Меллина	2
16	Преобразование Бесселя. Преобразования Ханкеля.	2
17	Контрольная работа	2
ИТОГО		36

2.3. Самостоятельная работа студентов.

Для студентов специальности 010101 – «Математика» на самостоятельную работу по рабочей программе отводиться 28 часов.

В качестве самостоятельной работы по дисциплине «Интегральные преобразования и операционное исчисление» студентам предлагается рассмотреть и изучить следующие вопросы:

1. Знакомство с периодическими изданиями.
2. Знакомство с научно-популярной литературой.
3. Подготовка реферата.

Примерные темы реферативных работ:

1. Преобразование Ханкеля.
2. Преобразование Мейера.
3. Преобразование Контаровича-Лебедева.
4. Преобразование Мелера-Фока.
5. Преобразование Гильберта.
6. Преобразование Лагерра.

2.4. Перечень и темы промежуточной формы контроля.

1. Контрольная работа – 2 часа.
2. Решение дифференциальных уравнений с применением преобразований Фурье и Лапласа – 2 часа.
3. Расчетно-графическая работа – 6 часов.
4. Домашние задания по всем темам – 9 часов.
5. Подготовка к экзаменам – 27 часов.

2.5. Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене.

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех практических и расчетных работ. В билет входят один вопрос и две задачи. Студент должен дать развернутый ответ на основные вопросы и краткий – на дополнительные, решить обе задачи.

Оценка «отлично» ставиться при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, при ответах на дополнительные вопросы, подтверждающие знание материала, и при правильном решении обеих задач.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом материала (в пределах конспектов лекций), при решении задач допущены небольшие недочеты и ошибки вычислительного характера.

Оценка «удовлетворительно» ставиться, если правильно решена только одна из задач и на теоретические вопросы даны неполные ответы, показывающие поверхностное знание излагаемого материала.

Оценка «неудовлетворительно» ставиться, если не решены обе задачи и студент дал ответ без доказательства теорем.

2.6. Вопросы к экзамену.

1. Основные понятия и определения.
2. Единичная функция Хевисайда.
3. Дифференцирование и интегрирование изображения.
4. Существование изображения.
5. Гамма функция.
6. Основные теоремы операционного исчисления.
7. Теорема о изображении периодических оригиналов.
8. Дифференцирование оригиналов.
9. Интегрирование оригиналов.
10. Интегрирование обыкновенных дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
11. Интегрирование систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
12. Интеграл Дюамеля.
13. Теоремы разложения.
14. Уравнение Бесселя.

15. Цилиндрические функции первого рода.
16. Цилиндрические функции второго рода.
17. Цилиндрические функции третьего рода.
18. Модифицированные цилиндрические функции.
19. Некоторые сведения из теории рядов Фурье.
20. Четные и нечетные функции.
21. Интегральная формула Фурье.
22. Основные свойства преобразования Фурье.
23. Дельта-функция. Ее свойства.
24. Изображение дельта-функция Дирака.
25. Свойства преобразования Фурье.
26. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа.
27. Применение преобразования Фурье при решении краевых задач математической физики.
28. Применение преобразования Фурье. Уравнение колебания струны с ненулевыми начальными условиями на бесконечной прямой.
29. Применение преобразования Фурье. Неоднородное волновое уравнение с нулевыми начальными условиями.
30. Применение преобразования Фурье. Однородное уравнение теплопроводности с ненулевым начальным условием на бесконечной прямой.
31. Применение преобразования Фурье. Неоднородное уравнение теплопроводности с нулевым начальным условием для бесконечной прямой.
32. Применение преобразования Фурье. Однородное уравнение теплопроводности с нулевым начальным условием с заданными граничными условиями первого рода.
33. Применение преобразования Фурье. Однородное уравнение теплопроводности с нулевым начальным условием с заданными граничными условиями второго рода.

34. Применение преобразования Фурье. Неоднородное уравнение теплопроводности с нулевым начальным условием с заданными граничными условиями первого рода.
35. Применение преобразования Фурье. Однородное уравнение распределения тепла на плоскости с заданными ненулевыми начальными условиями.
36. Применение преобразования Фурье. Неоднородное уравнение распределения тепла на плоскости с заданными нулевыми начальными условиями.
37. Применение преобразования Фурье. Однородное уравнение распределения тепла на плоскости с заданными ненулевыми начальными и граничными условиями.
38. Антона задача.
39. Интегральное уравнение типа свертки.
40. Интегральные уравнение второго рода.
41. Интегральные уравнение первого рода.
42. Особые интегральные уравнения. Интегральные уравнения Абеля.

3. Учебно-методические материалы по дисциплине

3.1. Перечень обязательной (основной) литературы

1. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учебное пособие. - М.:Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана,1998. - 228 с.
2. Мартыненко В.С. Операционное исчисление: Учеб. пособие.-4-е изд., перераб.и доп.- К.:Высш. шк.,1998.- 359 с.
3. Пантелеев А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. -М.: Высш. шк., 2001.- 445 с.

3.2. Перечень дополнительной литературы

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.,"Высшая школа",1975.- 407 с.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961.- 524 с.
3. Диткин В.А., Кармарена Л.Н. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М., "Наука", 1979.- 800 с..
4. Жевержев В.Ф., Кольпицкий Л. А., Сапогов Н. А. Специальный курс высшей математики для втузов. М.," Высшая школа” 1970.- 416 с.
5. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М., "Наука" ,1980.- 336 с.

3.3. Перечень методических пособий

1. Труфанова Т.В., Салмашова Е.М. Методы интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд. АмГУ, 2006.

2. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тема 1. Введение. Возникновение операционного исчисления как самостоятельной дисциплины. Сущность операционного исчисления. Этапы развития.

Метод, который получил название операционного, или символического, исчисления, применяется для решения линейных дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных, а также линейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки. С этими классами уравнений связаны задачи электротехники, радиотехники, теории автоматического регулирования, а также и ряда других областей науки и техники.

С помощью метода операционного исчисления линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами сводятся к алгебраическим уравнениям.

Операционное исчисление начали развивать в своих работах Г.В. Лейбниц (1646 - 1716), Л. Эйлер (1707 – 1783), Ж.Л. Лагранж (1736 – 1813), П.С. Лаплас (1749 – 1827), Ж.Б. Фурье (1768 – 1830), О.Л. Коши (1789 – 1857).

Создание операционного исчисления связано с именем О. Хевисайда (1850 – 1925), английского инженера–электрика. Он вводит в операционное исчисление правило действия с оператором дифференцирования и функциями этого оператора. Применяемое в его трудах операционное исчисление не было математически обосновано. Строгое обоснование и развитие операционное исчисление получило в трудах Дж. Нарсена (1926), Т. Броневича (1916), В. Ван дер-Поля (1929 – 1932) и др.

Преобразование

$$F(p) = \int_a^b f(t)k(t,p)dt ,$$

где $k(t,p)$ – ядро преобразования, называется интегральным; его вид и характер задач, к которым оно применимо, зависят от выбора ядра и пределов интегрирования. Если $k(t,p)=e^{-pt}$, $a=-\infty$ и $b=\infty$ то получим преобразование Лапласа

$$F(p)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

которое преобразовывает определенный класс функций-оригиналов $f(t)$ действительного переменного t в функцию-изображения $F(p)$ комплексного переменного p. Широко используются интегральные преобразования Бесселя, Меллина, синус-, косинус-преобразования, ядро $k(t,p)$ представляемые соответственно функциями $J_\nu(pt)$, t^{p-1}, $Sin\ pt$, $Cos\ pt$.

Тема 2. Преобразования Фурье. Некоторые сведения из теории рядов Фурье. Интегральная формула Фурье. Основные свойства преобразований Фурье. Кратные преобразования Фурье. Некоторые приложения преобразований Фурье.

1. Ряды Фурье

1.1. Ортогональные системы функций

Система функций

$$\varphi_0(t),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t),\ldots \tag{1.1}$$

(обозначается: $\{\varphi_n(t),\ n\in N_0\}$), непрерывных и не равных нулю при $t\in[a,b]$, называется *ортогональной* на отрезке $[a,b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt=\begin{cases}0,\ n\neq m,\\ \|\varphi_n\|^2>0,\ n=m,\ m\in N_0\end{cases} \tag{1.2}$$

Примеры.

1. Система тригонометрических функций $\left\{\frac{1}{2},\cos\frac{n\pi}{l}t,\ \sin\frac{n\pi}{l}t,\ n\in N,\ l\in R^+\right\}$ ортогональна на отрезке $[-l;l]$.

По определению получаем

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{m\pi}{l}tdt=0$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}t\cos\frac{m\pi}{l}tdt=\begin{cases}0, n\neq m\\ l, n=m\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{m\pi}{l}tdt=\begin{cases}0, n\neq m\\ l, n=m\end{cases}$$

2. Система экспоненциальных функций $\left\{e^{i\frac{n\pi}{l}t}, n\in Z, l\in R^{+}\right\}$ ортогональна на отрезке $[-l;l]$.

Имеем $\int_{-l}^{l}e^{i\frac{n\pi}{l}t}e^{-i\frac{m\pi}{l}t}dt=\begin{cases}0, \mathrm{m}\neq \mathrm{n}\\ 2\mathrm{l}, \mathrm{m}=\mathrm{n}\end{cases}$

Ортогональная система (1.1) называется *ортонормированной*, если $\int_{a}^{b}\varphi_n^2(t)dt=1$, в противном случае ее можно нормировать:

$$\mu_0\varphi_0(t), \mu_1\varphi_1(t), \ldots,\mu_n\varphi_n(t), \mu\in R, n\in N_0, \mu_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|},$$

где

$$\|\varphi_n\|=\left(\int_{a}^{b}\varphi_n^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

и называется она нормой функции $\varphi_n(t)$. Система функций (1.1) нормирована, если $\|\varphi_n(t)\|=1, n\in N_0$.

Система функций (1.1) именуется ортонормированной на отрезке, если она на этом отрезке ортогональна и нормирована $\left(\|\varphi_n\|=1, n\in N_0\right)$.

Примеры ортонормированных систем.

1. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{int}}, n\in Z\right\}$ $u\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos nt,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin nt, n\in N\right\}$, $t\in[-\pi,\pi]$.

2. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\frac{n\pi}{l}t}, n\in Z\right\}$ $u\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\frac{n\pi}{l}t,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{n\pi}{l}t, n\in N\right\}$, $t\in[-l;l]$.

1.2. Ряд Фурье по данной ортогональной системе

Пусть функция $f(t)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и представляется суммой ряда по ортогональной системе (1.1). Имеем:

$$f(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t) + \ldots, \tag{1.4}$$

где $a_k \in R, k \in N_0$. Полагаем, что функция $f(t)\varphi_n(t)$ есть сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(t)\varphi_n(t)$, $t \in [a;b]$, тогда его можно почленно интегрировать на отрезке $[a;b]$. В силу (1.2) имеем:

$$\int_a^b f(t)\varphi_n t(dt) = a_n\int_a^b \varphi_n^2(t)dt,\ n \in N_0.$$

Отсюда, учитывая равенство (1.3), получаем

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n(t)\|^2}\int_a^b \varphi_n(t)f(t)dt, n \in N_0. \tag{1.5}$$

Коэффициенты a_n, $n \in N_0$, вычисляемые по формуле (1.5), называются коэффициентами Фурье, а ряд (1.4) – рядом Фурье функции $f(t)$ по ортогональной системе.

1.3. Тригонометрические ряды Фурье

Рассмотрим ортогональную систему

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi n}{l}t, \sin\frac{\pi n}{l}t, n \in N\right\},\ t \in [-l;l] \tag{1.6}$$

Имеем

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{m\pi}{l}tdt = 0,$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi}{l}t\cos\frac{m\pi}{l}tdt = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ l,\ m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{m\pi}{l}tdt = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ l,\ m = n. \end{cases}$$

Тогда ряд Фурье (1.4) по ортогональной системе (1.6) на отрезке $[-l;l]$ для любой интегрируемой функции $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l} t + b_n \sin\frac{n\pi}{l} t. \qquad (1.7)$$

Ряд (1.7) называется *тригонометрическим рядом Фурье*. Его коэффициенты, учитывая равенство (1.5) и то, что $\|\varphi_n(t)\|^2 = l$, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l} t dt,\ n\in N_0, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l} t dt,\ n\in N. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

1.4. Ряд Фурье в комплексной форме

Рассмотрим ряд Фурье функции $f(t)$ по ортогональной системе $\{e^{\mathrm{int}}, n\in Z\}, t\in[-\pi;\pi]$.

Имеем

$$\int_{\pi}^{-\pi} e^{\mathrm{int}} e^{-\mathrm{int}} dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n-m}\sin(n-m)\pi = 0, & n\neq m, \\ 2\pi, & m = n. \end{cases}$$

Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{int}}. \qquad (1.9)$$

Согласно равенствам (1.5), (1.3) и учитывая, что

$$\|\varphi_n(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^2(t)dt = 2\pi ,$$

получим формулу коэффициентов Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{int}} f(t)dt, n\in Z. \qquad (1.10)$$

Аналогично находим ряд Фурье в комплексной форме функции $f(t)$ по ортогональной системе $\left\{e^{\frac{in\pi t}{T/2}}, n\in Z\right\}, t\in\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Обозначим $\frac{1}{T} = v_1, n\frac{1}{T} = v_n,$ тогда $v_n = nv_1$. Получаем

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(v_n) e^{i2\pi v_n t}, \tag{1.11}$$

$$c(v_n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i2\pi v_n t} f(t) dt. \tag{1.12}$$

1.5. Признак поточечной сходимости ряда Фурье

В формулах (1.8) функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-l;l]$ или имеет на нем конечное число особых точек $-l = t_0 < \ldots < t_n = l.$ Функция $f(t)$ интегрируема на любом отрезке $[\xi_i; \eta_i] \subset [t_{i-1}; t_i], i \in \overline{1,n},$ и если интеграл $\int_{-l}^{l} |f(t)| dt$ абсолютно сходится, то сходится и интеграл $\int_{-l}^{l} f(t) dt.$

Сформулируем наиболее используемый признак поточечной сходимости ряда Фурье к его функции: если функция $f(t)$ является кусочно-гладкой на отрезке $[-l;l]$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке $t_0 \in [-l;l]$ к сумме $\dfrac{f(t_0+0) - f_0(t_0-0)}{2}$, $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = f(t_0+0),$ $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = f(t_0-0)$.

Если $t_0 \in [-l;l]$ – точка непрерывности $f(t)$, то $(f(t_0+0) + f(t_0-0))/2 = f(t_0)$. Этот признак выполняется и для кусочно-гладкой функции, являющейся продолжением $f(t)$ с отрезка $[-l;l]$ на всю ось. Если $f(-l) \neq f(l)$, то полученная функция имеет точки разрыва $t_k = (2k+1)l$, $k \in Z$, в которых ряд сходится к сумме $(f(t_k+0) - f(t_k-0))/2$.

Напомним определение кусочно-гладких функций, имеющих важное значение в математической физике.

Функция $f(t)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна всюду на этом отрезке, кроме конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Кусочно-непрерывная функция имеет в каждой точке $t_0 \in [a;b]$ и на концах отрезка $[a;b]$ конечные правое и левое предельные значения: $f(t_0+0), f(t_0-0)$ и $f(a+0), f(b-0)$.

Функция называется *кусочно-гладкой на отрезке* $[a;b]$, если она и ее производная на этом отрезке кусочно-непрерывны.

Если функция $f(t)$ кусочно-гладкая на отрезке $[a;b]$, то его можно разделить точками $a=t_0<\ldots<t_n=b$ на конечное число таких отрезков $[t_{i-1};t_i], i=\overline{1,n}$, что внутри каждого из них функций $f(t)$ и $f'(t)$ непрерывны и имеют конечные значения $f(t_i+0)$, $f'(t_i+0)$ и $f(t_{i-1}-0)$ $f'(t_{i-1}-0)$. Поскольку $f(t)$ и $f'(t)$ ограниченны на $[t_{i-1};t_i], i=\overline{1,n}$, то они ограниченны и на $[a;b]$.

2. Интеграл Фурье

2.1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Из равенств (1.8), учитывая, что косинус – четная, а синус – нечетная функции, имеем $a_n=a_{-n}$, $b_n=b_{-n}$, $n\in N$. Тогда ряд (1.7) запишется в виде

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t. \tag{2.1}$$

Подставляя значения a_n и b_n из (1.8) в (2.1), получаем

$$f(t)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-\tau)dt. \tag{2.2}$$

Пусть кусочно-гладкая периодическая функция $f(t)=f(t+2l)$ абсолютно интегрируема на всей оси t. Обозначим $\frac{n\pi}{l}=\omega_n$, $\Delta\omega_n=\omega_{n+1}$, $\omega_n=n\Delta\omega_n$. Тогда равенство (2.2) будет иметь вид

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{n\pi}{l}(t-\tau)dt. \tag{2.3}$$

Заменим в (2.3) интеграл на отрезке $[-l;l]$ несобственным интегралом с бесконечными пределами. При этом каждое слагаемое изменится на $\alpha_n\to 0$

при $l \to \infty$, а сумма – на величину $\alpha \to 0$ при $l \to \infty$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots = \alpha$ есть сумма счетного бесконечного множества бесконечно малых). Тогда (2.3) запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)dt + \alpha \; . \tag{2.4}$$

Обозначим $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)dt = F(\omega_n, t)$, тогда (2.4) запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n, t)\Delta\omega_n + \alpha_0 \tag{2.5}$$

Переходя в (2.5) к пределу при $\Delta\omega_n \to 0$, $\alpha \to 0$, получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, t)d\omega \; , \tag{2.6}$$

$$F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \tag{2.7}$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \; . \tag{2.8}$$

Из равенства (2.8) в силу того, что косинус – четная функция относительно переменной ω, имеем

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (\cos\omega t \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau + \sin\omega t \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau)d\omega \tag{2.9}$$

Обозначим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau = a(\omega), \; \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau = b(\omega), \tag{2.10}$$

тогда (2.9) запишется в виде

$$f(t) = \int_{0}^{\infty} (a(\omega)\cos\omega t + (b(\omega)\sin\omega t)d\omega \; . \tag{2.11}$$

Формула (2.8), или (2.11) называется интегралом Фурье функции $f(t)$.

2.2. Интеграл Фурье в комплексной форме

Имеем $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = 0$ как интеграл от нечетной функции по переменной ω с симметричными пределами. Запишем (2.8) в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau + i\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau ,$$

или

$$f(t)= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(\cos\omega(t-\tau)+ i\sin\omega(t-\tau))dv .$$

Сделав замену $\cos\omega(t-\tau)+ i\sin\omega(t-\tau) = e^{i\omega(t-\tau)}$, получаем интеграл Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} f(\tau)d\tau ,$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau)d(\tau) . \qquad (2.12)$$

Обозначим

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(t)dt. \qquad (2.13)$$

Тогда интеграл Фурье запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} F(\omega)d\omega . \qquad (2.14)$$

Функция F(ω) называется преобразованием Фурье.

3. Преобразование Фурье

3.1. Нормирование преобразования Фурье

Преобразование Фурье (2.13) и интеграл Фурье (2.14) функции f(t) являются континуальными аналогами коэффициентов Фурье (1.10) и ряда Фурье (1.9) кусочно-гладкой периодической функции $f(t)$ в неортонормированной системе $\{e^{int},\ n\in Z\}$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\text{int}}, n \in Z \right\}$ является ортонормированной, и в ней ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\text{int}}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\text{int}} f(t) dt.$$

В континуальном случае аналог ряда Фурье функции f(t) в ортонормированной системе рассматривается в симметричных формулах преобразования Фурье.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\text{int}} f(t) dt \tag{3.1}$$

и интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega \tag{3.2}$$

Преобразование и интеграл Фурье определены на множестве функций, где интегралы (3.1) и (3.2) существуют в смысле главного значения. Это множество содержит, в частности, подмножество абсолютно интегрируемых функций на всей действительной оси, где интегралы в смысле главного значения рассматриваются как обычные несобственные интегралы.

Комплексная функция $F(\omega)$ действительного аргумента ω, определяемая равенством (3.1), называемая *прямым преобразованием Фурье*.

Интеграл Фурье (3.2) называется *обратным преобразованием Фурье*. В равенствах (3.1) и (3.2) функции $f(t)$ и $F(\omega)$ называются соответственно оригиналом и изображением.

Формулы (3.1) и (3.2) для краткости станем записывать в виде $f(t) \to F(\omega)$ и $F(\omega) \to f(t)$. В дальнейшем будем обозначать оригинал малой буквой, а его изображение – соответствующей большой буквой, например: $\phi(t) \to \Phi(\omega)$ и т.д.

3.2. Синус- и косинус- преобразования Фурье

Если функция $f(t)$ нечетная ($f(-t) = -f(t)$) или четная ($f(-t) = f(t)$), то из (2.9) получаем соответственно

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\omega t d\omega\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t dt, \tag{3.3}$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega t d\omega\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t dt. \tag{3.4}$$

Из этих равенств определяем прямое и обратное синус- и косинус-преобразования Фурье (обозначается $F_s(\omega)$ и $F_c(\omega)$):

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t dt, \quad F_s(\omega)\to f(t), \tag{3.5}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(\omega)\sin\omega t d\omega, \quad f(t)\to F_s(\omega), \tag{3.6}$$

и

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)cos\omega t dt, \quad F_c(\omega)\to f(t), \tag{3.7}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega t d\omega, \quad f(t)\to F_c(\omega). \tag{3.8}$$

Из равенства (3.1) следует, что $F_s(\omega)=\operatorname{Re}F(\omega)$ и $F_c(\omega)=\operatorname{Re}F(\omega)$.

Примеры.

1. Для функции $f(t)=e^{-\beta t}$ (β >0, t ≥0) найдем косинус преобразования Фурье.

Решение. Продлим график функции $f(t)$ в интервале t<0 четным образом, тогда $F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}cos\omega t dt$.

$\int_0^{\infty}e^{-\beta t}cos\omega t dt$ берем два раза по частям. Получаем:

$\int_0^{\infty}e^{-\beta t}cos\omega t dt = \frac{e^{-\beta t}}{\omega}(\sin\omega t-\frac{\beta}{\omega}\cos\omega t)-\frac{\beta^2}{t^2}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t dt$. Отсюда следует, что

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\omega^2}\right)\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t dt=\frac{e^{-\beta t}}{\omega}(\sin\omega t-\frac{\beta}{\omega}\cos\omega t).$$

Отсюда находим

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\omega\, dt = \frac{e^{-\beta t}}{\omega^2+\beta^2}(\omega\sin\omega t - \beta\cos\omega t).$$

Следовательно: $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{e^{-\beta t}}{\omega^2+\beta^2}(\omega\sin\omega t - \beta\cos\omega t)\Big|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\omega^2+\beta^2}$.

Таким образом: $f_c(t) = e^{-\beta t} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\omega^2+\beta^2}$.

2. Найти обратное косинус- преобразование Фурье, если $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\omega^2+\beta^2}$.

Решение. $F_c(\omega) \to f_c(t)$

$$f_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega t d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega =$$

$$\frac{2\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega = \frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega .$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся вычислением вспомогательного интеграла: $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+\beta^2}d\omega$; т.к. $\omega = \pm i\beta$ – простые полюсы, то $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+\beta^2}d\omega . = 2\pi i \operatorname*{res}_{\omega=i\beta}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega - i\beta)(\omega+i\beta)} =$

$$=2\pi i\lim_{\omega\to i\beta}\left[(\omega - i\beta)\frac{e^{i\omega t}}{(\omega - i\beta)(\omega+i\beta)}\right] = 2\pi i\lim_{\omega\to i\beta}\frac{e^{i\omega t}}{\omega+i\beta} = 2\pi i\frac{e^{-\beta t}}{2i\beta} = \frac{\pi}{\beta}e^{-\beta t} + i0.$$

Таким образом:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+\beta^2}d\omega = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\omega t + i\sin\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega + i\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega =$$

$$\frac{\pi}{\beta}e^{-\beta t} + i0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega = \frac{\pi}{\beta}e^{-\beta t},\ f_c(t)=\frac{\beta}{\pi}\frac{\pi}{\beta}e^{-\beta t} = e^{-\beta t} \text{ при } t\geq 0,\ \ \beta>0.$$

3. Найти синус-преобразование Фурье для функции $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

Решение.: $F_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\omega\, tdt=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}\sin\omega\, tdt$.

Для вычисления этого интеграла вычисляют вспомогательный интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{it}}{t}\sin\omega\, tdt=\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t}\sin\omega\, tdt - i\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\sin\omega\, tdt.$$

Обозначим $I(\omega)=\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-it}}{t}\sin\omega\, tdt$, интеграл зависящий от параметра ω_0.

Найдем производную от этого интеграла по $\omega: I'(\omega)=\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-it}}{t}\cos\omega\, t\cdot tdt=$

$\int_0^{\infty}e^{-it}\cos\omega\, tdt$. Беря этот интеграл по частям два раза, получаем

$$\int_0^{\infty}e^{-it}\cos\omega\, tdt=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\int_0^{\infty}e^{-it}\cos\omega\, tdt.$$

Отсюда следует, что $\int_0^{\infty}e^{-it}\cos\omega\, tdt=\dfrac{i}{\omega^2-1}$.

Таким образом, имеем:

$$I(\omega)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-it}}{t}\sin\omega\, tdt,\ I'(\omega)=\frac{i}{\omega^2-1}.$$

Отсюда $dI(\omega)=\dfrac{i}{\omega^2-1}d\omega$ или $I(\omega)=-\dfrac{i}{2}\ln\left|\dfrac{1+\omega}{1-\omega}\right|+C$.

Определим С: $J(0)=0;\ -\dfrac{i}{2}\ln\left|\dfrac{1+0}{1-0}\right|+C=0$. Отсюда $C=0$.

$$I(\omega)=-\frac{i}{2}\ln\left|\frac{1+\omega}{1-\omega}\right|.$$

Следовательно: $$I(\omega) = \int_0^\infty \frac{e^{-it}}{t}\sin\omega t dt = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t}\sin\omega t dt - i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\sin\omega t dt = 0$$

$$-\frac{i}{2}\ln\left|\frac{1+\omega}{1-\omega}\right|,$$ отсюда $$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\sin\omega t dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\omega}{1-\omega}\right|, \quad F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\omega}{1-\omega}\right| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left|\frac{1+\omega}{1-\omega}\right|.$$

4. Найти преобразование Фурье $F(\omega)$ для функции $f(t) = e^{-\alpha(t)}$.

Решение. $$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}\cdot e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\cdot e^{-i\omega t}dt + \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cdot e^{-i\omega t}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\omega)}dt + \int_0^\infty e^{-(\alpha + i\omega)t}dt\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\alpha - i\omega}\cdot e^{(\alpha - i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\alpha + i\omega}e^{-(\alpha + i\omega)t}\Big|_0^\infty\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

5. Найти обратное преобразование Фурье для $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Решение.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}e^{i\omega t}d\omega = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2 + \omega^2}d\omega = \frac{\alpha}{\pi}2\pi i \operatorname*{res}_{\omega = i\alpha}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \alpha i)(\omega + \alpha i)} =$$

$$= 2\alpha i \lim_{\omega \to i\alpha}\left[\frac{(\omega - \alpha_i)e^{i\omega t}}{(\omega - \alpha i)(\omega + \alpha i)}\right] = 2\alpha i\frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha i} = e^{-\alpha t},$$ это для $t > 0$.

Для любого t $f(t) = e^{-\alpha t}$.

3.3. Конечное преобразование Фурье

Кусочно-гладкую функцию $f(t)$ на отрезке $[0;\pi]$ можно разложить в ряд Фурье по синусу и по косинусу:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin ntdt, \quad n \in N,$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ntdt, \quad n \in N_0.$$

Подставляя в полученные ряды значения коэффициентов Фурье b_n и a_n, имеем

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} f(\tau)\sin ntdt\right)\sin nt$$

и

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\tau)dt + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} f(\tau)\cos n\tau d\tau\right)\cos nt.$$

Введем обозначение

$$F_s(n) = \int_0^{\pi} f(t)\sin ntdt,\ F_s(n) \to f(t). \tag{3.9}$$

Тогда

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin nt,\ f(t) \to F_s(n). \tag{3.10}$$

Вводя обозначения

$$F_c(n) = \int_0^{\pi} f(\tau)\cos ntdt,\ F_c(0) = \int_0^{\pi} f(\tau)dt,\ F_c(n) \to f(t), \tag{3.11}$$

имеем

$$f(t) = \frac{1}{\pi}F_c(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\cos nt. \tag{3.12}$$

Функции (3.9), (3.10), (3.11) называются соответственно прямым и обратным синус- и косинус-преобразованиями Фурье на конечном отрезке $[0;\pi]$.

С помощью замены $\tau = \dfrac{a}{\pi}t$ можно рассматривать эти преобразования на любом конечном отрезке $[0;a]$.

При решении краевых задач выбор преобразований (3.9), (3.10), (3.11) определяется видом граничных условий. Если известны значения $u(x,t)\big|_{x=0}$ и $u(x,t)\big|_{x=\pi}$ то пользуемся синус-преобразованием, а если $u_x(x,t)\big|_{x=0}$ и $u_x(x,t)\big|_{x=\pi}$ – то косинус-преобразованием Фурье.

3.4. Преобразование Фурье функции двух переменных

Для функции $f(t,\tau)$, абсолютно интегрируемой в области $D=\{f(t,\tau): t,\tau\in R\}$ по переменным t и τ, применимо преобразование Фурье.

По определению имеем

$$F(\omega,\sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega t+\sigma t)}f(t,\tau)dtd\tau, \tag{3.13}$$

$$f(t,\tau)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega t+\sigma t)}F(\omega,\sigma)d\omega\, d\sigma. \tag{3.14}$$

Функция $F(\omega,\sigma)$ и $f(t,\tau)$ называется прямым и обратным преобразованием Фурье.

3.5. Преобразованием Фурье функции n переменных

Для функции $f(x_1,....,x_n)$ интегрируемой в области $D=\{f(x_1,....,x_n): x_i\in R, i=\overline{1,n}\}$, применимо n-мерное преобразование Фурье по переменным $x_1,x_2,....,x_n$. Прямое и обратное преобразования соответственно запишем в виде

$$F(\omega_1,\omega_2,....,\omega_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega_1x_1,\omega_2x_2+....+\omega_nx_n)}\times f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n$$

и

$$f(x_1,x_2,....,x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_1x_1,\omega_2x_2+....+\omega_nx_n)}\times F(\omega_1,...,\omega_n)d\omega_1...d\omega_n.$$

4. Основные свойства преобразования Фурье

Теорема. Если функция $f(t)$ – оригинал, $f(t)\to F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}f(t)dt$, то функция $F(\omega)$ непрерывна на оси $\omega\in R$ и $\lim\limits_{\omega\to\infty}F(\omega)=0$.

4.1. Линейность

Теорема. Если $f_1(t)\to F_1(\omega)$, $f_2(t)\to F_2(\omega)$, $\alpha_1,\alpha_2\in R$ – числа, то $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\to \alpha_1F_1(\omega)+\alpha_2F_2(\omega)$.

4.2. Сопряженность изображения

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$, то $f(-t) \to \overline{F(\omega)}$.

4.3. Смещение оригинала

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и $t_0 \in R$ то $f(t \pm t_0) \to e^{\pm i t_0 \omega} F(\omega)$.

4.4. Смещение изображения

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и $\omega_0 \in R$, то $f(t)e^{\pm i t_0 \omega} \to F(\omega \pm \omega_0)$.

4.5. Подобие

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и $\alpha \in R$, то $f(\alpha t) \to \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$.

4.6. Дифференцирование оригинала

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и функции $f^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,n}$, абсолютно интегрируемы, то

$f'(t) \to i\omega F(\omega)$,

$f''(t) \to (i\omega)^2 F(\omega)$,

…………………

$f^{(n)}(t) \to (i\omega)^n F(\omega)$.

4.7. Интегрирование оригинала

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$, то $\int\limits_{-\infty}^{1} f(\tau)d\tau = \dfrac{F(\omega)}{i\omega}$.

4.8. Дифференцирование изображения

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и функции $tf(t)$, $t^2 f(t)$, …, $t^n f(t)$ абсолютно интегрируемы на всей оси t, то $F^{(n)}(\omega) \to (-it)^n f(t)$.

4.9. Равенство Ляпунова

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и $\varphi(t) \to \Phi(\omega)$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{\Phi(\omega)}d\omega$, или

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\overline{F(\omega)}d\omega .$$

4.10. Равенство Парсеваля

Теорема. В равенстве Ляпунова полагаем, что $f(t) = \varphi(t)$, тогда $F(\omega) = \Phi(\omega)$ и $\overline{F(\omega)} = \overline{\Phi(\omega)}$.

Определение: *Сверткой* двух функций $f(t)$ и $\varphi(t)$, $t \in R$, называется функция $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = f(t)*\varphi(t)$.

4.11. Умножение изображений

Теорема. Если $f(t) \to F(\omega)$ и $\varphi(t) \to \Phi(\omega)$, то $f(t)*\varphi(t) \to F(\omega)\Phi(\omega)$.

4.12. Умножение оригиналов

Теорема. Если $F(\omega) \to f(t)$ и $\Phi(\omega) \to \varphi(t)$, то $F(\omega)*\Phi(\omega) \to f(t)\varphi(t)$.

5. Приложения преобразований Фурье

Краевые задачи математической физики. Дифференциальные уравнения обыкновенные и с частными производными в основном описывают математические модели физических и технических задач реальных процессов. Многие задачи приводятся к решению линейных уравнений с частными производными второго порядка. Примерами являются классические уравнения математической физики с неизвестными функциями (например, давления, температуры, электромагнитного потенциала и др.), зависящими от пространственно-временных координат x, y, z, $t>0$.

Один из эффективных методов решения краевых задач математической физики – интегральное преобразование Фурье, с помощью которого краевая задача сводится к задаче с операторным уравнением относительно изображениея функции искомого решения. Решение такого операторного уравнения получаем значительно проще, чем решение уравнения заданной краевой задачи. В рассматриваемых ниже основных задачах исследуются математические модели, в которых искомые функции заданы в различных пространственно-временных областях с разными начальными и краевыми условиями.

Примеры.

1. $u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ D = \{(x,t): -\infty < x < \infty, t > 0\},$

(5.1)

начальные условия $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$.

(5.2)

Функция $u(x,t)$ по переменной x удовлетворяет условиям преобразования Фурье $u(x,t)\to U(\omega,t)$. Имеем $f(x,t)\to F(\omega,t)$, $u(x,0)\to U(\omega,0)$, $u_t(x,0)\to U_t(\omega,0)$. Дифференцируя дважды по переменой t преобразование $u(x,t)\to U(\omega,t)$, получаем $u_{tt}(x,t)\to U_{tt}(\omega,t)$. По свойству дифференцирования оригинала при условии, что $u(\pm\infty,t)=0$ и $u_x(\pm\infty,t)=0$, находим $u_{xx}(x,t)\to -\omega^2 U(\omega,t)$.

Тогда задача (5.1), (5.2) в пространстве изображений приобретает вид

$$U_{tt}(\omega,t)+a^2\omega^2 U(\omega,t)=F(\omega,t),$$

(5.3)

$$U(\omega,0)=0,\ U_t(\omega,0)=0.$$

(5.4)

Уравнение (5.3) относительно переменой t — линейное неоднородное уравнение 2-го порядка, его решение

$$U(\omega,t)=\overline{U}(\omega,t)+U^*(\omega,t).$$

(5.5)

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\overline{U}(\omega,t)=c_1(\omega)e^{-ia\omega t}+c_2(\omega)e^{ia\omega t}.$$

(5.6)

Частное решение уравнения (5.3) имеет вид

$$U^*(\omega,t)=c_1(\omega,t)e^{-ia\omega t}+c_2(\omega,t)e^{ia\omega t}.$$

Произвольные функции $c_1(\omega,t)$ и $c_2(\omega,t)$ согласно методу Лагранжа находим из системы

$$\begin{cases} c_1'(\omega,t)e^{-ia\omega t}+c_2'(\omega,t)e^{ia\omega t}=0, \\ -c_1'(\omega,t)e^{-ia\omega t}+c_2'(\omega,t)e^{ia\omega t}=-\dfrac{i}{a\omega}F(\omega,t). \end{cases}$$

Отсюда

$$c_1(\omega,t)=\frac{i}{2a\omega}\int_0^t e^{ia\omega\tau}F(\omega,\tau)d\tau,$$

$$c_2(\omega,t)=-\frac{i}{2a\omega}\int_0^t e^{-ia\omega\tau}F(\omega,\tau)d\tau.$$

Тогда частное решение

$$U^*(\omega,t)=\frac{i}{2a\omega}\int_0^t e^{ia\omega(t-\tau)}F(\omega,\tau)d\tau-\frac{i}{2a\omega}\int_0^t e^{ia\omega(t-\tau)}F(\omega,\tau)d\tau$$

или

$$U^*(\omega,t)=\frac{1}{a\omega}\int_0^t \sin a\omega(t-\tau)F(\omega,\tau)d\tau\ .$$

(5.7)

Подставляя (5.6) и (5.7) в (5.5), получаем общее решение уравнения (5.3):

$$U(\omega,t)=c_1(\omega)e^{-ia\omega t}+c_2(\omega)e^{ia\omega t}+\frac{1}{a\omega}\int_0^t \sin a\omega(t-\tau)F(\omega,\tau)d\tau\ .$$

(5.8)

Отсюда решение задачи (5.3), (5.4) имеет вид

$$U(\omega,t)=\frac{1}{a\omega}\int_0^t \sin a\omega(t-\tau)F(\omega,\tau)d\tau\ .$$

(5.9)

С помощью обратного преобразования Фурье получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left(\frac{1}{a\omega}\int_0^t \sin a\omega(t-\tau)F(\omega,\tau)\right)d\omega\, d\tau$$

(5.10)

или

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega(x+a(t-\tau))}-e^{i\omega(x-a(t-\tau))}\right)F(\omega,\tau)d\omega\ .$$

(5.11)

Рассмотрим интеграл

$$\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} e^{i\omega\xi}\,d\xi=\frac{1}{i\omega}e^{i\omega\xi}\Big|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}=\frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega(x+a(t-\tau))}-e^{i\omega(x-a(t-\tau))}\right).$$

(5.12)

Подставляя (5.12) в (5.11), получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\xi}F(\omega,\tau)d\omega\right).$$

(5.13)

Поскольку $F(\omega,\tau)\to f(\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\xi}F(\omega,\tau)d\omega$, то решение задачи (5.1) ,(5.2) имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \; .$$

2. $u_t = a^2u_{xx}, \quad D=\{(x,t):-\infty < x<\infty ,t>0\},$

(5.14)

начальное условие $u(x,0)=\varphi(x)$.

(5.15)

Применяем к функции $u(x,t)$ по переменной x преобразование Фурье $u(x,t)\to U(\omega,t)$. Пользуясь свойством дифференцирования оригинала при условии, что $u(\pm\infty,t)=0$ и $u_x(\pm\infty,t)=0$, получаем $u_{xx}(x,t)=\to -\omega^2U(\omega,t)$. Имеем $u_t(x,t)\to U_t(\omega,t)$, $u(x,0)=\varphi(x)\to \Phi(\omega)$. Задача (5.14), (5.15) в пространстве изображений преобразования Фурье сводится к задаче

$$U_t(\omega,t)+\omega^2a^2U(\omega,t)=0,$$

(5.16)

$$U(\omega,0)=\Phi(\omega).$$

(5.17)

Уравнение (5.16) имеет решение $U(\omega,t)=c_1(\omega)e^{-a^2\omega^2t}$.

Произвольную функцию $c_1(\omega)$ определяем из начального условия (5.17): $c_1(\omega)=\Phi(\omega)$. Тогда $U(\omega,t)=\Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2t}$.

Применяем обратное преобразование Фурье: $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2t}d\omega$.

Пользуясь тем, что $\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\varphi(\omega)dx$, получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{a^2\omega^2t}e^{i\omega x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)d\omega$$

или

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}e^{i\omega(\xi-x)}d\omega\ .$$

Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}\sin\omega(\xi-x)d\omega=0$, то $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}\cos\omega(\xi-x)d\omega$

,

внутренний интеграл здесь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}\cos\omega(\xi-x)d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\ .$$

Тогда решение задачи (5.14), (5.15) имеет вид: $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi$.

3. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$, $D=\{(x,t):-\infty<x<\infty,t>0\}$, (5.18)

начальное условие $u(x,0)=0$. (5.19)

Пользуясь преобразованием Фурье $u(x,t)\to U(\omega,t)$ функции $u(x,t)$ по переменной x, имеем $u_t(x,t)\to U_t(\omega,t)$, $u(x,0)\to U(\omega,0)$, $f(x,t)\to F(\omega,t)$.

Учитывая, что $u(\pm\infty,t)=0$, $u_x(\pm\infty,t)=0$, по свойству дифференцирования оригинала находим $u_{xx}(x,t)\to-\omega^2U(\omega,t)$.

Задача (5.18), (5.19) в пространстве изображений преобразования Фурье запишется в виде:

$$U_t(\omega,t)+a^2\omega^2U(\omega,t)=F(\omega,t), \tag{5.20}$$

$$U(\omega,0)=0 \tag{5.21}$$

Решение уравнения (5.20) имеет вид

$$U(\omega,t)=e^{-a^2\omega^2t}\left(\int\limits_0^t e^{a^2\omega^2\tau}F(\omega,\tau)d\tau+c(\omega)\right).$$

Пользуясь (5.21), получаем, что $c(\omega)=0$.

Следовательно:

$$U(\omega,t)=e^{-a^2\omega^2t}\int\limits_0^t e^{a^2\omega^2\tau}F(\omega,\tau)d\tau \tag{5.22}$$

Обратным преобразованием Фурье находим

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\left(e^{-a^2\omega^2 t}\int_0^t e^{a^2\omega^2\tau}F(\omega,\tau)d\tau\right)d\omega .$$

Поскольку $F(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(x,t)dx$, то

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x-a^2\omega^2(t-\tau)}d\omega\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(\xi,t)d\xi\right)$$

или $u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2(t-\tau)+i\omega(x-\xi)}d\omega$. (5.23)

Сделав преобразование

$$-a^2\omega^2(t-\tau)+i\omega(x-\xi)=-\left(a\omega\sqrt{t-\tau}-\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)^2-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}$$

и вводя замену

$$a\omega\sqrt{t-\tau}-i\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}=\mu,\quad d\omega=\frac{1}{a\sqrt{t-\tau}}d\mu ,$$

найдем внутренний интеграл в (5.23):

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2(t-\tau)+i\omega(x-\xi)}d\omega=e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{1}{a\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2}d\mu=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \qquad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в (5.23), получаем решение задачи (5.18), (5.19):

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\xi .$$

Тема 3. Преобразования Лапласа. Оригиналы и изображения. Существование изображений. Примеры вычислений изображений. Дифференцирование и интегрирование изображений.

1.1. Определение оригинала

Функция $f(t)$ действительного переменного t, которая может принимать и комплексные значения, называется *оригиналом*, если выполнены три условия:

1) f – непрерывна или кусочно-непрерывна вместе со своими производными до n-го порядка на всей числовой прямой;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) существуют такие постоянные M > 0 и S > 0, что для всех $t > 0$ справедлива оценка $|f(t)| \le Me^{S_0 t}$.

Число $S_0 \ge 0$, для которого неравенство в третьем условии выполняется при любом $S = S_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и не выполняется при $S = S_0 - \varepsilon$ (S_0 – точная нижняя граница чисел S), называется показателем роста функции $f(t)$. Это условие означает, что найдется такая показательная функция $Me^{S_0 t}$, которая растет быстрее, чем модуль $|f(t)|$.

Условия первое и третье выполнены для большинства функций f, описывающих физические процессы. С физической точки зрения второе условие выполнено, поскольку для физики безразлично, как ведут себя рассматриваемые функции до некоторого начального момента, который можно принять за $t = 0$.

Простейшей функцией-оригиналом является функция Хевисайда $\eta(t)$,

где $\eta(t) = \begin{cases} 0, \text{если } t < 0 \\ 1, \text{если } t \ge 0 \end{cases}$.

Если функция $f(t)$ удовлетворяет первому и третьему условиям, то функция $f(t)\eta(t) = \begin{cases} f(t), \text{если } t \ge 0 \\ 0, \text{если } t < 0 \end{cases}$ удовлетворяет всем условиям оригинала.

Для сокращения записи будем вместо $f(t)\eta(t)$ писать $f(t)$, условившись, что все функции, удовлетворяющие первому и третьему условиям оригинала, равны нулю при $t < 0$. Например, $f(t) = t^2$, тогда $f(t)\eta(t) = \begin{cases} t^2, \ t \ge 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$ является оригиналом.

1.2. Определение изображения

Изображением функции оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = S + i\tau$, определяемая интегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt . \tag{1.1}$$

Связь между функциями f и F символически обозначается $\to$,т.е. $f(t) \to F(p)$. Смысл этого обозначения: оригиналу f сопоставлено изображение F, а изображение F имеет своим оригиналом f.

Примеры.

1. Найти изображение единичной функции Хевисайда.

Согласно формуле (1.1) имеем

$$F(p) = \int_0^\infty \eta(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Следовательно, $1 \to \dfrac{1}{p}$, Re p > 0.

2. Найти изображение функции e^{at}.

По формуле (1.1) имеем $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt = -\left.\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right|_0^\infty = \frac{1}{p-a}$.

Таким образом: $e^{at} \to \dfrac{1}{p-a}$, Re p > Re a.

1.3. Дифференцирование изображения

Теорема. Если $F(p) \to f(t)$, Re p > S_0 то

$F'(p) \to -tf(t)$,

$F''(p) \to (-1)^2 t^2 f(t)$,

………………………

$F^{(n)}(p) \to (-1)^n t^n f(t)$, Re p > $S_1 > S_0$.

Примеры. Пользуясь равенствами

$\sin\alpha t \to \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, $\cos\alpha t \to \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$

$$sh\alpha t \to \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},\ ch\alpha t \to \frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

и теоремой дифференцирования изображения, найдем изображения функций:

1. $-t\sin\alpha t \to \left(\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)',\ t\sin\alpha t \to \dfrac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$.

2. $-t\cos\alpha t \to \left(\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}\right)',\ t\cos\alpha t \to \dfrac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$.

3. $-tsh\alpha t \to \left(\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\right)',\ tsh\alpha t \to \dfrac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2}$.

4. $-tch\alpha t \to \left(\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}\right)',\ tch\alpha t \to \dfrac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)^2}$.

1.4. Интегрирование изображения

Теорема. Если $f(t) \to F(p)$, Re p $> S_0$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)dp$ сходится в полуплоскости Re p $> s_1 > s_0$, то $\int\limits_p^\infty F(p)dp \to \dfrac{f(t)}{t}$, Re p $> s_1 > s_0$.

Таким образом, интегрирование изображения $F(p)$ сводится в пространстве оригинала к делению на t функции $f(t)$.

Тема 4: Основные теоремы операционного исчисления. Изображения периодических оригиналов. Теорема запаздывания. Теорема смещения. Теорема умножения.

2. Основные свойства преобразования Лапласа

2.1. Линейность

Теорема. Если $f_1(t) \to F_1(p)$, $f_2(t) \to F_2(p)$, $\ldots, f_n(t) \to F_n(p)$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числа, то

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \ldots + \alpha_n f_n(t) \to \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) + \ldots + \alpha_n F_n(p).$$

Доказательство. Справедливость свойства следует из линейных свойств интеграла.

Примеры. Пользуясь свойством линейности, найдем изображения функций:

1. $\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right)$, $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$.

2. $sht = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$, $sht \to \frac{1}{p^2-1}$.

3. $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right)$, $\cos t \to \frac{p}{p^2+1}$.

4. $cht = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right)$, $cht \to \frac{p}{p^2-1}$.

2.2. Подобие

Теорема. Если $f(t) \to F(p)$ и α – число, то $f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Полагая в этом равенстве $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$, получаем $F(\beta p) \to \frac{1}{\beta}f\left(\frac{t}{\beta}\right)$.

Примеры. Пользуясь теоремой подобия, найдем изображения функций:

1. $\sin\alpha t \to \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1}$, $\sin\alpha t \to \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$.

2. $ish\alpha t = \sin i\alpha t \to \frac{i\alpha}{p^2+\left(i\alpha^2\right)}$, $sh\alpha t \to \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$.

3. $\cos\alpha t \to \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1}$, $\cos\alpha t \to \frac{p}{p^2+\alpha^2}$.

4. $ch\alpha t = \cos i\alpha t \to \frac{p}{p^2+\left(i\alpha^2\right)^2}$, $ch\alpha t \to \frac{p}{p^2-\alpha^2}$.

2.3. Запаздывание

Теорема. Если $f(t) \to F(p)$ и $t_0 > 0$ то $f(t-t_0) \to e^{-t_0 p}F(p)$.

Применяя теоремы подобия и запаздывания, можно найти изображение для оригинала $f(\alpha t - t_0)$, где $t_0 > 0$, $\alpha > 0$. Имеем $f(t) \to F(p)$, тогда по теореме подобия $f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$. По теореме запаздывания находим

$$f(\alpha t - t_0) = f\left(\alpha\left(t - \frac{t_0}{\alpha}\right)\right) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) e^{-\frac{t_0}{\alpha} p}. \qquad (2.1)$$

Функция

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

называется *обобщенной единичной функцией*; ее изображение имеет вид

$$\eta(t - t_0) \to \frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Примеры. Пользуясь равенством (2.1), найдем изображения функций $(\omega, \varphi_0, a, b > 0, \alpha \in R)$:

1. $\sin(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

2. $sh(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$.

3. $\cos(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

4. $ch(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$.

Пользуясь теоремой запаздывания, удобно находить изображения кусочно-непрерывных функций.

Примеры. Найти изображения кусочно-непрерывных функций $(a, b > 0)$:

1. $f(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < \tau \\ 0, & t < 0 \quad и \quad t > \tau \end{cases}$ (рис. 1).

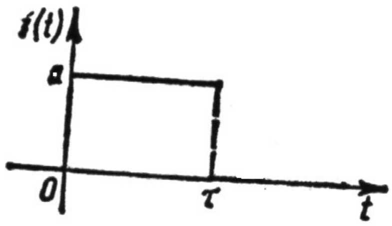

Рис. 1.

Функцию $f(t)$ с помощью обобщенной единичной функции можно записать формулой

$$f(t) = (\eta(t) - \eta(t-\tau))a.$$

Изображение оригинала $f(t)$ имеет вид $f(t) \to a\dfrac{1-e^{-p\tau}}{p}$, так как

$\eta(t) \to \dfrac{1}{p}$ и $\eta(t-\tau) \to e^{-p\tau}\dfrac{1}{p}$.

2. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < a, \\ 2a - t, & a < t < 2a, \\ 0, & t > 2a \quad и \quad t < 0 \end{cases}$ (рис. 2).

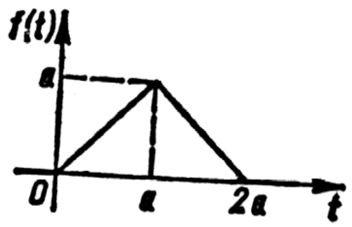

Рис. 2.

Оригинал $f(t)$ можно записать формулой

$$f(t) = t\eta(t) - t\eta(t-a) + (2a-t)\eta(t-a) + (t-2a)\eta(t-2a)$$

или $f(t) = t\eta(t) - 2(t-a)\eta(t-a) + (t-2a)\eta(t-2a)$.

Изображение функции $f(t)$ имеет вид $f(t) \to \dfrac{1}{p^2} - 2\dfrac{1}{p^2}e^{-ap} + \dfrac{1}{p^2}e^{-2ap}$,

или $f(t) \to \dfrac{1}{p^2}(1-e^{-ap})^2$.

2.4. Опережение

Теорема. Если $f(t) \to F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t+t_0) \to e^{t_0 p}\left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)dt\right).$$

Теорему опережения применяют при решении разностных уравнений, в которые входят $f(t)$, $f(t+t_0)$, …, $f(t+nt_0)$.

2.5. Изображение периодического оригинала

Теорема. Если $f(t)$ – периодическая функция с периодом T,

$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T \end{cases}$ и $f_0(t) \to F_0(p)$, то изображение функции $f(t)$ имеет вид

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}. \tag{2.2}$$

Примеры. Пользуясь формулой (2.2), найти изображение периодических функций $(n \in N_0, a > 0)$:

1. $f(t) = f(t+2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ 0, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi \end{cases}$ (рис. 3)

Имеем

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin t dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\cdot\frac{e^{-pt}}{p^2+1}(-p\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi}$$

или $\sin t\eta(\sin t) \to \dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}$.

2. $f(t) = f\left(t+\dfrac{\pi}{a}\right) = |\sin at|$ (рис. 4).

Имеем $|\sin at| \to \dfrac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-pt}\sin atdt = \dfrac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\cdot\dfrac{e^{-pt}}{p^2+a^2}\left(-p\sin at - a\cos at\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{a}}$.

Итак: $|\sin at| \to \dfrac{a}{p^2+a^2}cth\dfrac{\pi p}{2a}$.

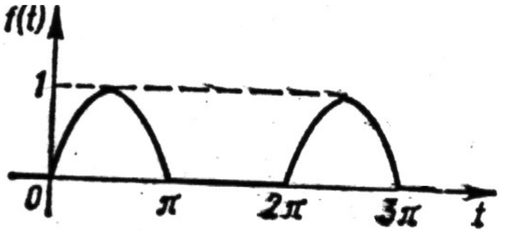

Рис. 3.

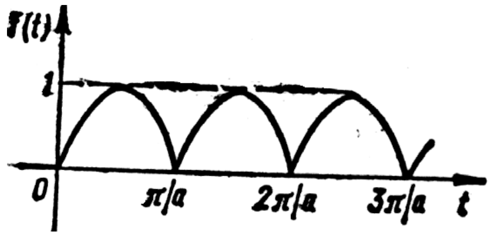

Рис. 4.

2.6. Смещение

Теорема. Если $f(t) \to F(p)$, p_0 — число, то $e^{-p_0 t} f(t) \to F(p+p_0)$.

Примеры. Пользуясь теоремой смещения, найдем изображения следующих функций:

1. $e^{-\alpha t}\sin\omega t$, $\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $e^{-\alpha t}\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$.

2. $e^{-\alpha t} sh\omega t$, $sh\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $e^{-\alpha t} sh\omega t \to \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$.

3. $e^{-\alpha t}\cos\omega t$, $\cos\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $e^{-\alpha t}\cos\omega t \to \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$.

Тема 5. Дифференцирование и интегрирование оригиналов. Приложение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Интегрирование систем дифференциальных уравнений. Интеграл Дюамеля.

Дифференцирование оригинала

Теорема. Если $f(t) \to F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

…………………………………..

$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to 0+0} f^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Пример. Найти изображение дифференциального выражения

$$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8$$

при условиях $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$, $x'''(0) = 2$.

Введем обозначение $x(t) \to X(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала

$$x'(t) \to pX(p) - 5,$$

$$x''(t) \to p^2 X(p) - 5p,$$

$$x'''(t) \to p^3 X(p) - 5p^2 + 1,$$

$$x^{IV}(t) \to p^4 X(p) - 5p^3 + p - 2.$$

Отсюда по свойству линейности получим

$$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8 \to$$
$$\to p^4 X(p) - 5p^3 + p - 2 - 5\left(p^3 X(p) - 5p^2 + 1\right) -$$
$$- 4\left(p^2 X(p) - 5p\right) + 2\left(pX(p) - 5\right) - X(p) + \frac{8}{p} =$$
$$= \left(p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1\right)X(p) - 5p^3 + 25p^2 + 21p - 17 + \frac{8}{p}.$$

Интегрирование оригинала

Теорема. Если $f(t) \to F(p)$, Re p > s_0, то $\int\limits_0^1 f(\tau)d\tau \to \dfrac{F(p)}{p}$, Re p > s_0.

5.1. Интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Ly = a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = f(t) \tag{5.1}$$

и начальные условия

$$y(0) = y_0,\ y_0'(0) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}{}_0, \tag{5.2}$$

Считаем, что $a_0 \neq 0$ и функция f, а также решение $y(t)$ вместе с его производными до n–го порядка являются оригиналами. Обозначим $Y(p) \to y(t)$, $F(p) \to f(t)$.

По правилу дифференцирования и свойству линейности вместо дифференциального уравнения (5.1) с начальными условиями (5.2) получаем операторное уравнение

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) Y(p) = F(p) + y_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) +$$
$$+ y_0'\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) + \ldots + y_0^{(n-1)} a_0,$$

или

$$A(p)Y(p) = F(p) + B(p), \tag{5.3}$$

где $A(p)$ и $B(p)$ - известные многочлены. Решая это уравнение, найдем операторное решение

$$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \tag{5.4}$$

Если уравнение (5.1) при начальных условиях (5.2) допускает решение $y(t)$, удовлетворяющее условиям, наложенным на оригиналы, то это решение является оригиналом для $Y(p)$.

Примеры. Решить следующие дифференциальные задачи:

1. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Перейдем к изображениям:

$$y \to Y,\ y' \to pY + 1,\ y'' \to p^2 Y + p - 1,\ \cos t + 2\sin t \to \frac{p+2}{p^2+1}.$$

По теореме смещения получим $e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \to \dfrac{p+4}{(p+2)^2+1}$.

Дифференциальной задаче соответствует операторное уравнение

$$p^2 Y + p - 1 + 4pY + 4 + 4Y = \frac{p+4}{(p+2)^2+1},$$

решение которого имеет вид $Y(p) = -\dfrac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{\left((p+2)^2+1\right)(p+2)^2}$.

Разлагая правую часть этого равенства на простые дроби, находим:

$$Y(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Перейдем к оригиналу, воспользовавшись свойством линейности, теоремой смещения и таблицей изображений. Имеем

$$y(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t).$$

2. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Пусть $y(t) \to Y(p)$. Переходя к изображениям, получим операторное уравнение, соответствующее дифференциальной задаче:

$$(p+1)^3 Y = \frac{1}{p}.$$

Его решение - $Y(p) = \dfrac{1}{p(p+1)^3} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{(p+1)^2} - \dfrac{1}{(p+1)^3}$.

Оригинал изображения Y находим по таблице изображений:

$$y(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right).$$

3. $y''' + y = 1$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Дифференциальной задаче соответствует операторное уравнение, решением которого является функция $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^3+1)}.$$

Оригинал найдем с помощью второй теоремы разложения: $y(t) = \sum\limits_j \operatorname*{res}\limits_{p_j}\left(e^{pt}Y(p)\right)$. Функция Y имеет простые полюсы в точках $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, $p_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. Вычисляя вычеты функции $p \mapsto e^{pt}Y(p)$ в указанных точках, находим:

$$\operatorname*{res}_{p_1} e^{pt}\frac{1}{p(p^3+1)} = \lim_{p\to 0} e^{pt}\frac{1}{p^3+1} = 1,\ \operatorname*{res}_{p_2} e^{pt}Y(p) = \lim_{p\to -1} e^{pt}\frac{1}{p(p^2 - p + 1)} = -\frac{e^{-t}}{3},$$

$$\operatorname*{res}_{p_3} e^{pt}Y(p) + \operatorname*{res}_{p_4} e^{pt}Y(p) = 2\operatorname{Re}\frac{\exp\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{-3} = -\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Окончательно имеем

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{3} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

5.2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Аналогично применяется операционный метод к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть требуется решить систему n дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}\frac{d^2y_k}{dt^2} + b_{\nu k}\frac{dy_k}{dt} + c_{\nu k}y_k\right) = f_\nu(t) \quad \left(\nu = \overline{1,n}\right) \tag{5.5}$$

с начальными условиями

$$y_k(0) = \alpha_k, \ \frac{dy_k(0)}{dt} = \beta_k. \tag{5.6}$$

Если $y_k(t)$ и $f_\nu(t)$ – оригиналы, а $Y_k(p)$ и $F_\nu(p)$ – их изображения, то система (5.5) с начальными условиями (5.6) заменится операторной системой

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}p^2 + b_{\nu k}p + c_{\nu k}\right)Y_k(p) = F_\nu(p) + \sum_{k=1}^{n}\left(\left(a_{\nu k}p + b_{\nu k}\right)\alpha_k + a_{\nu k}\beta_k\right). \tag{5.7}$$

Решая ее как алгебраическую линейную систему уравнений, найдем $Y_k(p)$, а потом и их оригиналы $y_k(t)$.

Примеры. Решим системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. $$\begin{cases}(2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0\\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0\\ x(0) = x'(0) = 1, \ y(0) = y'(0) = 0.\end{cases}$$

Операторная система, соответствующая поставленной задаче, имеет вид

$$\begin{cases}(2p^2 - p + 9)X - (p^2 + p + 3)Y = 2p + 1,\\ (2p^2 + p + 7)X - (p^2 - p + 5)Y = 2p + 3,\end{cases}$$

где $X(p)\to x(t)$, $Y(p)\to y(t)$. Взяв сумму и разность этих уравнений, получим $2X-Y=2\frac{p+1}{p^2+4}$, $X+Y=\frac{1}{p-1}$,

откуда $X=\frac{1}{3(p-1)}+\frac{2p}{3(p^2+4)}+\frac{2}{3(p^2+4)}$, $Y=\frac{2}{3(p-1)}-\frac{2p}{3(p^2+4)}-\frac{2}{3(p^2+4)}$.

Перейдем к оригиналам. Имеем

$$x(t)=\frac{1}{3}\left(e^t+2\cos 2t+\sin 2t\right),\ y(t)=\frac{1}{3}\left(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t\right).$$

2. $$\begin{cases} x''+x'+y''-y=e^t, \\ x'+2x-y'+y=e^{-t}, \\ x(0)=y(0)=y'(0)=0, x'(0)=1. \end{cases}$$

Пусть $x(t)\to X(p)$, $y(t)\to Y(p)$. Поскольку выполняются соотношения $x'(t)\to pX$, $x''(t)\to p^2X-1$, $e^t\to\frac{1}{p-1}$, $y'(t)\to pY$, $y''(t)\to p^2Y$, $e^{-t}\to\frac{1}{p+1}$, то операторная система, соответствующая дифференциальной, имеет вид

$$\begin{cases} p^2X-1+pX+p^2Y-Y=\frac{1}{p-1} \\ pX+2X-pY+Y=\frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$X(p)=\frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2}=\frac{1}{8(p-1)}+\frac{3}{4(p+1)^2}-\frac{1}{8(p+1)},\ Y(p)=\frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Из соотношений $\frac{1}{p+1}\to e^t$, $\frac{1}{p^2-1}\to sht$ по теореме дифференцирования изображений находим

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)'\to -te^{-t} \text{ и } \left(\frac{1}{p^2-1}\right)'\to -t\,sht,$$

или $\frac{1}{(p+1)^2}\to te^{-t}$ и $\frac{2p}{(p^2-1)^2}\to -t\,sht$.

Окончательно получаем

$$x(t) = \frac{1}{4}sht + \frac{3}{4}te^{-t}, \ y(t) = \frac{3}{4}t\,sht.$$

5.3. Решение уравнений с нулевыми начальными условиями при помощи интеграла Дюамеля

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения

$$Ly = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t) \tag{5.8}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{5.9}$$

Рассмотрим задачу

$$Ly = 1; \ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0, \tag{5.10}$$

где Ly – левая часть уравнения (5.8). Поскольку операторные уравнения, соответствующие задачам (5.8), (5.9) и (5.10), имеют вид

$$A(p)Y(p) = F(p), \ A(p)Y_1(p) = \frac{1}{p},$$

где $F \to f$, то $Y(p) = pY_1(p)F(p)$.

Таким образом, если известно решение задачи (5.10), то согласно формуле Дюамеля имеем

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau)d\tau \tag{5.11}$$

(взяли во внимание, что $y_1(0) = 0$ согласно начальным условиям). Формула (5.11) принимает вид

$$y(t) = y_1(t)f(0) + \int_0^t y(t)f'(t-\tau)d\tau. \tag{5.12}$$

Примеры. Решить следующие дифференциальные задачи:

1. $y^{IV} + 2y'' + y = \cos t; \ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$

Найдем решение y_1 задачи $y^{IV}+2y''+y=1$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$. Имеем $y_1(t)\to Y_1(p)$, $y_1^{IV}(t)\to p^4Y_1(p)$, $y_1''(t)\to p^2Y_1(p)$, $1\to\dfrac{1}{p}$. Получаем операторное уравнение

$$p^4Y_1+2p^2Y_1+Y_1=\frac{1}{p},$$

решив которое, находим $Y_1(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

Оригинал функции Y_1 находим с помощью второй теоремы разложения. Функция Y_1 имеет простой полюс $p=0$ и комплексно сопряженные полюсы 2-го порядка $p=\pm i$. По второй теореме разложения имеем

$$y_1(t)=\left.\frac{1}{(p^2+1)^2}\right|_{p=0}+2\operatorname{Re}\left(\frac{d}{dp}\left((p-i)^2\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)^2}\right)\right)_{p=i}=$$

$$=1+2\operatorname{Re}\left(\frac{tp^2-3p+(tp-1)i}{p^2(p+i)^3}e^{pt}\right)_{p=i}=1-\cos t-\frac{t}{2}\sin t.$$

Согласно формуле (5.11), решение исходной задачи имеет вид

$$y(t)=\int_0^t\cos\tau\cdot\frac{1}{2}(\sin(t-\tau)-(t-\tau)\cos(t-\tau))d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\tau\sin t+\frac{\cos(t-2\tau)}{2}-(t-\tau)\left(r\cos t-\frac{\sin(t-2\tau)}{2}\right)-\frac{\tau^2}{2}\cos t+\frac{\cos(t-2\tau)}{4}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}=$$

$$=\frac{1}{8}t(\sin t-t\cos t).$$

2. $y''+3y'+2y=e^t$; $y(0)=y'(0)=0$.

Действуем по той же схеме, что и в предыдущем примере. Имеем

$$y(t)=\int_0^t e^\tau y_1'(t-\tau)d\tau,$$

где y_1 - решение задачи

$$y''+3y'+2y=1,\ y(0)=y'(0)=0. \tag{5.13}$$

Составим операторное уравнение, соответствующее задачи (5.13). Получим:

$$y_1(t) \to Y_1(p),\ y_1''(t) \to p^2 Y_1(p),\ y_1'(t) \to pY_1(p),\ 1 \to \frac{1}{p},$$

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}.$$

Функция Y_1 имеет простые полюсы в точках $p_0 = 0$, $p_1 = -1$, $p_2 = -2$. По второй теореме разложения

$$y_1(t) = \left.\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right|_{p=0} + \left.\frac{e^{pt}}{p(p+2)}\right|_{p=-1} + \left.\frac{e^{pt}}{p(p+1)}\right|_{p=-2} = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}.$$

Поскольку $y_1'(t-\tau) = e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}$, то

$$y(t) = \int_0^t e^{\tau}\left(e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau = \int_0^t \left(e^{-t+2\tau} - e^{-2t+3\tau}\right)d\tau =$$

$$= \left.\left(\frac{1}{2}e^{-t+2\tau} - \frac{1}{3}e^{-2t+3\tau}\right)\right|_0^t = sht - \frac{1}{3}\left(e^{t} - e^{-2t}\right).$$

Тема 6: Теорема разложения. Первая и вторая теоремы.

Теоремы разложения

При восстановлении функций-оригиналов по изображению обычно применяют таблицу оригиналов и изображений. Использование формулы обращения – дело трудное. Однако с ее помощью можно получить несколько практических результатов, которые называют теоремами разложения и которые могут помочь в задаче восстановления оригиналов.

Теорема (1-я теорема разложения). Если изображение F допускает в окрестности точки $p_0 = 0$ разложение в сходящийся ряд по степеням $\frac{1}{p}$

$$F(p) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}} \tag{6.2}$$

то ему соответствует функция-оригинал

$$\eta(t)f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^k}{k!}. \qquad (6.3)$$

<u>**Теорема (2-я теорема разложения).**</u> Если изображение F есть мероморфная функция на комплексной плоскости p и аналитическая на полуплоскости $\operatorname{Re}p>\alpha$ и если существует последовательность окружностей $C_n=\{p\in C:|p|=R_n\}$, $R_1<R_2<\ldots$, $R_n\to+\infty$, на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$, а также $\forall a>\alpha$ интеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)dp$ абсолютно сходится, то оригиналом изображения $F(p)$ является функция

$$\eta(t)f(t)=\sum_j \operatorname*{res}_{p_j}\left(e^{pt}F(p)\right). \qquad (6.4)$$

Примеры.

1. $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$.

Поскольку $(p-2)(p^2-p-20)=(p-2)(p+4)(p-5)$, то функция F имеет простые полюсы в точках $p_1=2$, $p_2=-4$, $p_3=5$. Эти же полюсы имеет и функция $e^{pt}F(p)$. Для нахождения оригинала функции F воспользуемся формулой (6.4). Найдем вычеты функции $p\mapsto e^{pt}F(p)$:

$$\operatorname*{res}_{p=2}e^{pt}F(p)=\left.\frac{e^{pt}(p^2+p-1)}{3(p^2-2p-6)}\right|_{p=2}=-\frac{5e^{2t}}{18},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-4}e^{pt}F(p)=\left.\frac{e^{pt}(p^2+p-1)}{3(p^2-2p-6)}\right|_{p=-4}=\frac{11}{54}e^{-4t},$$

$$\operatorname*{res}_{p=5}e^{pt}F(p)=\left.\frac{e^{pt}(p^2+p-1)}{3(p^2-2p-6)}\right|_{p=5}=\frac{29}{27}e^{5t}.$$

Подставив полученное в формулу (6.4), находим:

$$f(t)=\frac{1}{54}\left(11e^{-4t}+58e^{5t}-15e^{2t}\right).$$

2. $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

Функция $e^{pt}F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p=\pm 2i$ и $p=\pm i$. Находим

$$\underset{p=i}{res}\, e^{pt}F(p)=\left.\frac{e^{pt}\left(p^2-p+2\right)}{2p\left(2p^2+5\right)}\right|_{p=i}=-\frac{(1+i)}{6}e^{it},$$

$$\underset{p=2i}{res}\, e^{pt}F(p)=\left.\frac{e^{pt}\left(p^2-p+2\right)}{2p\left(2p^2+5\right)}\right|_{p=2i}=\frac{(1-i)}{6}e^{2it}.$$

В точках $p=-i$ и $p=-2i$ получим комплексно сопряженные выражения. Следовательно,

$$f(t)=2\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{6}e^{2it}-\frac{1+i}{6}e^{it}\right)=\frac{1}{3}\left(\cos 2t+\sin 2t-\cos t+\sin t\right).$$

3. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^3\left(p^2+1\right)(p-2)}$.

Функция $e^{pt}F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p=2$, $p=\pm i$ и полюс 3-го порядка в точке $p=1$. Имеем

$$f(t)=\underset{p=2}{res}\, e^{pt}F(p)+\underset{p=i}{res}\, e^{pt}F(p)+\underset{p=-i}{res}\, e^{pt}F(p)+\underset{p=1}{res}\, e^{pt}F(p).$$

Вычисляя вычеты, получим:

$$\underset{p=2}{res}\, e^{pt}F(p)=\left.\frac{e^{pt}}{(p-1)^3\left(p^2+1\right)}\right|_{p=2}=\frac{1}{5}e^{2t},$$

$$\underset{p=i}{res}\, e^{pt}F(p)+\underset{p=-i}{res}\, e^{pt}F(p)=2\operatorname{Re}\left(\underset{p=i}{res}\, e^{pt}F(p)\right)=2\operatorname{Re}\left(\left.\frac{e^{pt}}{(p-1)^3\left(p^2+i\right)(p-2)}\right|\right)_{p-i}=$$

$$=\frac{1}{20}(\cos t-3\sin t),$$

$$\underset{p=1}{res}\, e^{pt}F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)(p-2)}\right)''_{p=1}=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\left(6p^4 - 16p^3 + 15p^2 - 3\right)}{\left(p^2+1\right)^3\left(p-2\right)^3} e^{pt} - 2\frac{3p^2 - 4p + 1}{\left(p+1\right)^2\left(p-2\right)^3} te^{pt} + \frac{t^2 e^{pt}}{\left(p^2+1\right)\left(p-2\right)} \right)_{p=1} =$$

$$= -\frac{e^t}{4}\left(t^2 + 5\right).$$

Таким образом: $f(t) = \frac{e^{2t}}{5} + \frac{1}{20}\left(\cos t - 3\sin t\right) - \frac{e^t}{4}\left(t^2 + 1\right)$.

Тема 7. Формулы обращение Римана-Меллина. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа

7.1. Формула обращения Римана - Меллина

Теорема. Если функция f является оригиналом, а F служит ее изображением, то в любой точке непрерывности функции f выполняется равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \qquad (7.1)$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\left\{p \in C \,\middle|\, \operatorname{Re} p = a > \alpha\right\}$ и понимается в смысле главного значения по Коши. В точках разрыва функции f вместо $f(t)$ в левой части формулы (8.1) следует взять $\frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right)$.

Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа

Пользуясь заменой $p = i\omega$, можно перейти от изображения $F(p) \to f(t)$ преобразования Лапласа к изображению $F(\omega) \to f(t)$ преобразования Фурье ($p = s + i\omega$, $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ s\to 0}} F(p) = \lim\limits_{\omega\to\infty} F(\omega) = 0$), когда $F(p)$ справа от мнимой оси и на ней самой нет особых точек.

Примеры. Найдем изображение преобразования Фурье по изображению преобразования Лапласа для функций:

1. $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}$

Имеем $f(t)\to F(p)=\dfrac{1}{p+\alpha}$, $\operatorname{Re}\alpha>0$. Функция $F(p)$ имеет полюс в точке $p=-\alpha$, она на мнимой оси и справа от нее аналитическая. Поэтому

$$F(\omega)=\frac{1}{i\omega+\alpha}=\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}-i\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2}.$$

При $f(t)=0$, $t<0$, $\operatorname{Re}F(\omega)=F_c(\omega)$ и $\operatorname{Re}iF(\omega)=F_s(\omega)$. Получаем косинус- и синус-преобразования Фурье:

$$F_c(\omega)=\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2},\ F_s(\omega)=\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2}.$$

2. $f(t)=\sin\alpha t$.

Получаем $\sin\alpha t\to F(p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$.

Функция $F(p)$ имеет полюсы $p=\pm i\alpha$ на мнимой оси. Поэтому функция $\sin\alpha t$ не является оригиналом преобразования Фурье, она абсолютна не интегрируема в пределах от 0 до ∞.

3. $f(t)=e^{\beta t}\sin\alpha t$, $\beta>0$, $\alpha>0$.

Имеем $f(t)\to F(p)=\dfrac{\alpha}{(p-\beta)^2+\alpha^2}$.

Полюсы $p=b\pm\alpha i$ функции $F(p)$ лежат справа от мнимой оси. Следовательно, $f(t)$ не является оригиналом преобразования Фурье.

4. Найти преобразование Фурье для четного и нечетного продолжений функции $f(t)=e^{-at}$, $a>0$, $t\geq 0$ на всю ось t.

1) Для четной функции: $f(-t)=f(t)$, пользуясь косинус-преобразованием Фурье, получаем

$$e^{-at}\to F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}(-a\cos\omega t+\omega\sin\omega t)\Big|_0^\infty=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2},$$

или $e^{-at} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega t d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega$.

Отсюда $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2a}e^{-at}$, $t \geq 0$.

2) Для нечетной функции $f(-t) = -f(t)$, пользуясь синус-преобразованием Фурье, находим

$$e^{-at} \to F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-at}\sin\omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}(-a\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\Big|_0^\infty =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Тогда $e^{-at} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega t d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\sin\omega t d\omega$.

Отсюда $\int\limits_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-at}$, $t > 0$.

3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1. Материалы аудиторных контрольных работ

Вариант №1.

1. Найти изображение функции:

$f(t) = \sin^3 t.$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p+1)(p-2)}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

4. Решить интегральное уравнение:

$$f(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau .$$

Вариант№2.

1. Найти изображение функции:

$f(t) = 7 + 5\cos 4t.$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{p^2 + 14}{(p^2+4)(p+9)}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$y''(t) + 3y'(t) = e^t, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1.$

4. Решить интегральное уравнение:

$$f(t) = e^{-2t} + 3\int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) d\tau .$$

Вариант№3.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = \cos^2 3t.$$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$$y''(t) - 2y'(t) = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

4. Проинтегрировать уравнение Вольтера первого рода:

$$1 - \cos t = \int_0^t sh(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Вариант№4.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = \int_0^t \sin 3t dt.$$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p(p-1)(p-2)}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

4. Решить интегральное уравнение:

$$\sin t = \int_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Вариант№5.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = \frac{\sin 2t}{t}.$$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+p}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$$y''(t)-4y'(t)=4t,\quad y(0)=1, y'(0)=0.$$

4. Решить интегральное уравнение второго рода:

$$f(t)=\sin 2t-\frac{8}{3}\int_0^t sh3(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Вариант№6.

1. Найти изображение функции:

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}.$$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+8}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$$y''(t)+4y(t)=2\cos 2t,\quad y(0)=0, y'(0)=4.$$

4. Решить интегральное уравнение второго рода:

$$f(t)=\sin t+\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau.$$

Вариант№7.

1. Найти интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt.$$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p)=\frac{3}{p}+\frac{5}{p^2+9}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=\sin t,\quad y(0)=0, y'(0)=-1.$$

4. Проинтегрировать уравнение Вольтера первого рода:

$$1-\cos t=\int_0^t ch(t-\tau)f(\tau)d\tau .$$

Вариант №8.

1. Найти изображение производной:

$$f^{(n)}(t),\quad если\quad f(t)=e^{\alpha t} .$$

2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p)=\frac{3}{p^2+2p+17}.$$

3. Решить операционным методом дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях:

$$y''(t)+y'(t)=\cos t,\quad y(0)=2, y'(0)=0.$$

4. Решить интегральное уравнение:

$$t^3=\int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau .$$

3.2. Материалы расчетно-графических работ

Задание №1. Найти изображения функций:

1. $sh\alpha t\, ch\beta t$, $ch\alpha t-\cos\alpha t$, $e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$;
2. $\cos\alpha t\cos\beta t$, $sh\alpha t+\sin\alpha t$, $e^{3t}\cos 3t\cos 4t$;
3. $ch\alpha t\, ch\beta t$, $sh\alpha t-\sin\alpha t$, $sht\cos 2t\sin 3t$;
4. $\sin\alpha t\sin\beta t$, $\cos\alpha t+ch\beta t$, $cht\sin 2t\sin 3t$;
5. $sh\alpha t\, sh\beta t$, $ch\alpha t+\cos\alpha t$, $ch3t\sin^2 t$;
6. $\cos^2\alpha t+ch^2\alpha t$, $\sin(\omega t-\varphi_0)$, $e^{-\alpha t}\sin\omega t$;
7. $\sin\alpha t+ch^2\alpha t$, $sh(\omega t-\varphi_0)$, $e^{-\alpha t}sh\omega t$;

8. $\cos^2\alpha t + sh^2\alpha t$, $\cos(\omega t - \varphi_0)$, $e^{-\alpha t}\cos\omega t$;

9. $\sin^2\alpha t + ch^2\alpha t$, $ch(\omega t - \varphi_0)$, $e^{-\alpha t} ch\omega t$;

10. $\cos\alpha t + sh^2\alpha t$, $cht\sin 2t\sin 3t$, $e^{-6t} sh3t + \cos tsht$;

11. $\sin^2\alpha t + sh^2\alpha t$, $ch3t\sin^2 t$, $e^{2t} sht - \sin tch3te^t$;

12. $ch\alpha t - \cos\alpha t$, $sh4t\cos^2 3t$, $e^t ch2t - \frac{1}{2} sh3t\cos t$;

13. $sh\alpha t + \sin\alpha t$, $\cos\alpha t\, ch\beta t$, $e^{-t} sh3t + ch2t\sin t$;

14. $\cos^6\frac{t}{2}$, $\sin\alpha\, tsh\beta t$, $e^{-t} ch2t + \sin 2tsh3t$;

15. $\cos^4 2t$, $\cos\alpha t\cos\beta t$, $e^{2t}\sin 3t - 2e^{-t} sh2t$;

16. $\sin^4 3t$, $\sin\alpha t\sin\beta t$, $t^2 e^t - tsh2t\cos 2t$;

17. $\sin^6 2t$, $sh\alpha t\, ch\beta t$, $\sin t\sin 3t + e^{2t}\cos 2t$;

18. $\cos^3 2t$, $ch\alpha t\, ch\beta t$, $e^{3t} sh2t + ch3t\cos t$;

19. $\sin^3 2t$, $sh\alpha t\, sh\beta t$, $2tsht + \cos tsh3t$;

20. $\sin^4\frac{t}{4}$; $2t^3 e^{-t} + tch2t$; $ch3t\sin^2 t$.

Задание №2. Пользуясь теоремой запаздывания, найти изображения кусочно-непрерывных функций:

1. $f(t) = \begin{cases} t - 2a, & 2a < t < a + b, \\ 2b - t, & a + b < t < 2b, \\ 0, & t > 2b \text{ и } t < 2a. \end{cases}$ (рис 1.1)

2. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n, & n < t < n + 1, \end{cases}$ $n \in N_0$, где $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (рис 1.2)

3. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ t - a, & a < t < b, \\ b - a, & t > b. \end{cases}$ (рис 1.3)

4. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2a \text{ и } t > 2b, \\ 1, & 2a < t < a + b, \\ -1, & a + b < t < 2b. \end{cases}$ (рис 1.4)

5. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ и } t > 2a, \\ 1, & 0 < t < a, \\ -1, & a < t < 2a. \end{cases}$ (рис 1.5)

6. $f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1-e^{-b(t-a)}, & t>a.\end{cases}$ (рис 1.6)

7. $f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ e^{-b(t-a)}, & t>a.\end{cases}$ (рис 1.7)

8. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{t}, & 0<t<a,\\ a, & t>a.\end{cases}$ (рис 1.8)

9. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ n, & na<t<(n+1)a,\end{cases}$ (рис 1.9)

10. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ n\left(t-\dfrac{(n+1)a}{2}\right), & na<t<(n+1)a,\end{cases}$ (рис 1.10)

11. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ n+1, & n<t<n+1,\end{cases}$ (рис 1.11)

12. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ и } t>a+b,\\ 1, & 0<t<a,\\ -\dfrac{1}{b}t+1+\dfrac{a}{b}, & a<t<a+b,\end{cases}$ (рис 1.12)

13. $f(t)=\begin{cases}t, & 0<\mathrm{t}<\mathrm{a},\\ 2a-t, & \mathrm{a}<t<2a,\\ 0, & t>2\mathrm{a} \text{ и } \mathrm{t}<0\end{cases}$ (рис 1.13)

14. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ n, & n<t<n+1,\end{cases}$, $n\in N_0$, где $N_0=\{0,1,2,...\}$ (рис 1.14)

15. $f(t)=\begin{cases}0, & t<2a \text{ и } t>2b,\\ 1, & 2a<t<a+b,\\ -1, & a+b<t<2b.\end{cases}$ (рис 1.15)

16. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{t}, & 0<t<a,\\ a, & t>a.\end{cases}$ (рис 1.16)

17. $f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ t-a, & a<t<b,\\ b-a, & t>b.\end{cases}$ (рис 1.17)

18. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, & t > a. \end{cases}$ (рис 1.18)

19. $f(t) = \begin{cases} t, \ 0 < \mathrm{t} < \mathrm{a}, \\ 2a - t, \ \mathrm{a} < t < 2a, \\ 0, \ t > 2\mathrm{a} \text{ и } \mathrm{t} < 0 \end{cases}$ (рис 1.19)

20. $f(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0, \\ n, \ na < t < (n+1)a, \end{cases}$ (рис 1.20)

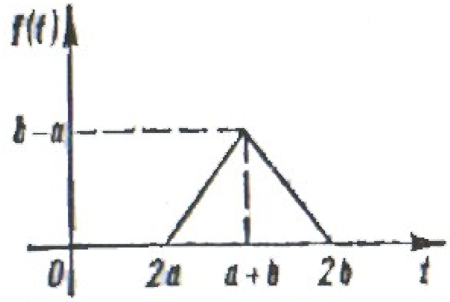

Рис. 1.1

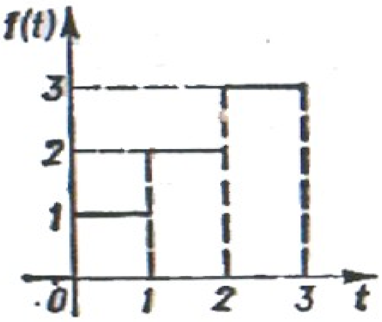

Рис. 1.2

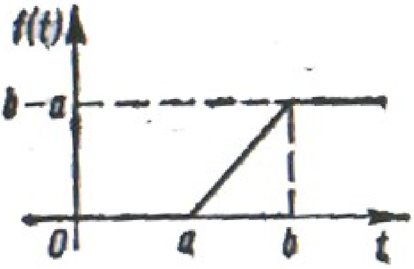

Рис. 1.3

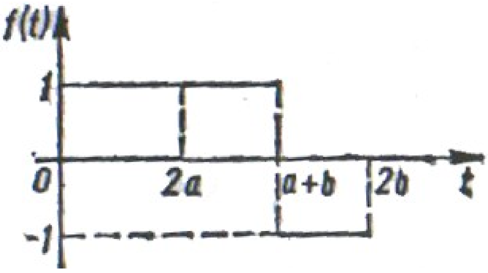

Рис. 1.4

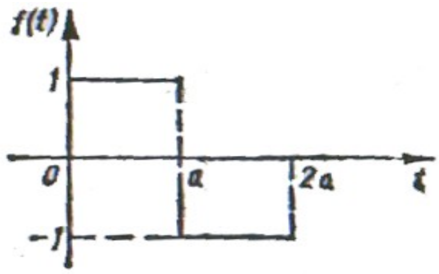

Рис. 1.5

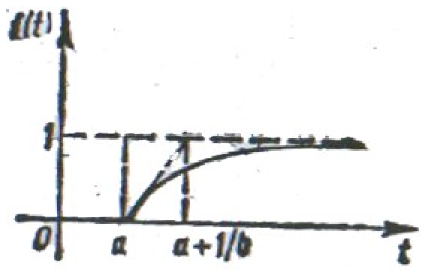

Рис. 1.6

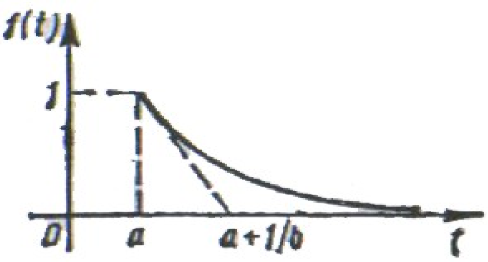

Рис. 1.7

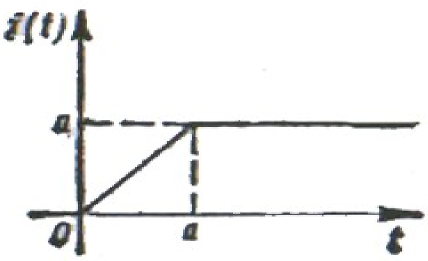

Рис. 1.8

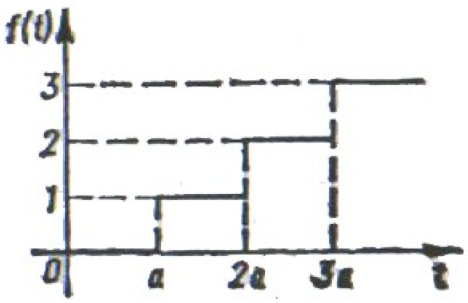

Рис. 1.9

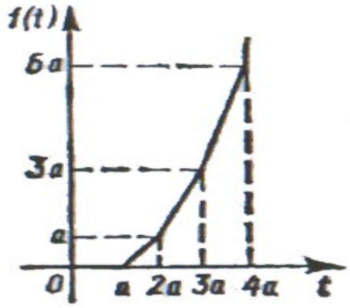

Рис. 1.10

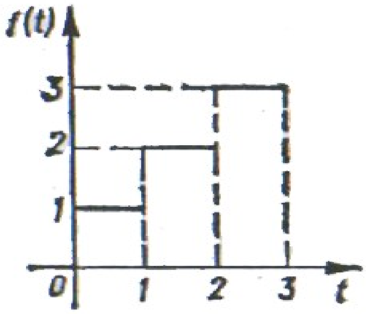

Рис. 1.11

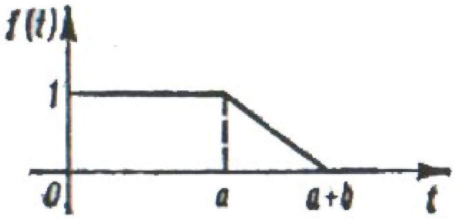

Рис. 1.12

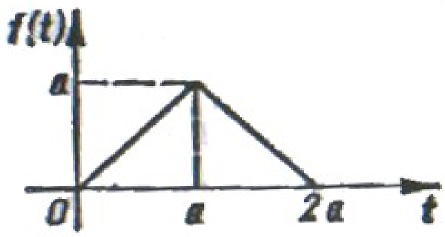

Рис. 1.13

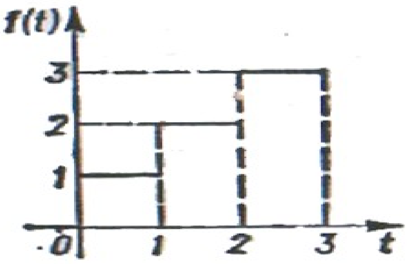

Рис. 1.14

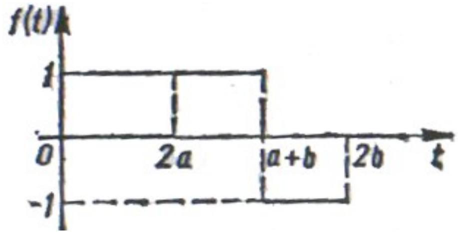

Рис. 1.15

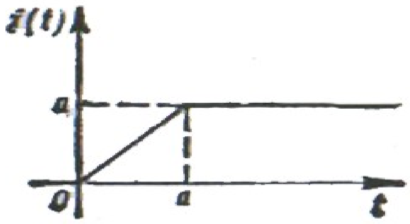

Рис. 1.16

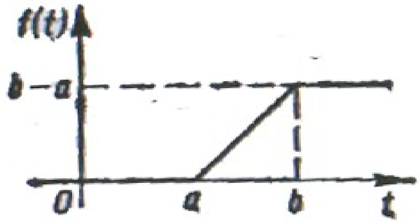

Рис. 1.17

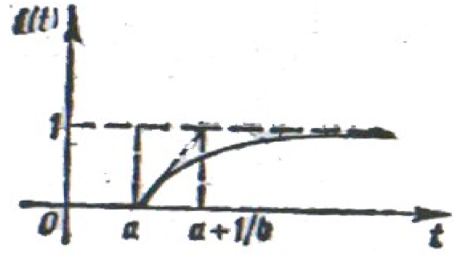

Рис. 1.18

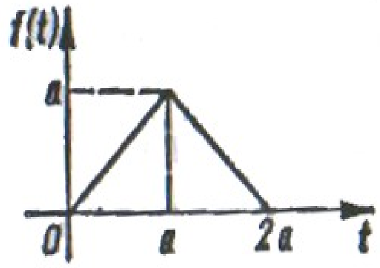

Рис. 1.19

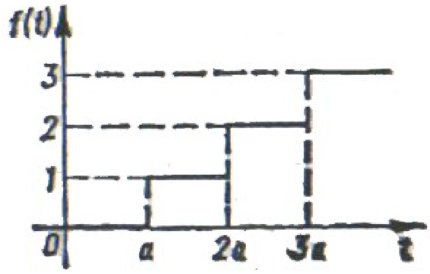

Рис. 1.20

Задание №3. Найти изображения периодических функций

$\left(n \in N; m > 1, k > 1, a > 0\right)$**:**

1. $f(t) = \left|\sin at\right|$ (рис. 2.1)

2. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{\left|\sin t\right|} = \begin{cases} 1, \text{ если } 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -1, \text{ если } (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \end{cases} \quad n \in Z_0 \\ 0, \text{ если } t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.2)

3. $f(t) = f(t+4a) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - 4n, & \text{если } 4na < t \le (4n+1)a, \\ -\dfrac{t}{a} + 4n + 2, & \text{если } (4n+1)a < t \le (4n+2)a, \\ 0, & \text{если } (4n+2)a < t \le (4n+4)a, t < 0, \end{cases} \quad n \in Z_0$ (рис. 2.3)

4. $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} 1, & 2na < t < (2n+1)a, \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, t < 0, \end{cases}$ (рис. 2.4)

5. $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} 1, & 2na < t < (2n+1)a, \\ -1, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, t < 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.5)

6. $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - 2n, & 2na < t < (2n+1)a, \\ -\dfrac{t}{a} + 2(n+1), & (2n+1)a < t < (2n+2)a, t < 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.6)

7. $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\dfrac{2t}{a}-(4n+1), & 2na<t<(2n+1)a,\\ -\dfrac{2t}{a}+4n+3, & (2n+1)a<t<(2n+2)a, t<0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ (рис. 2.7)

8. $f(t)=f(t+a)=\begin{cases}\dfrac{2t}{a}-(2n+1), & na<t<(n+1)a,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ (рис. 2.8)

9. $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\dfrac{t}{a}-2n, & 2na<t<(2n+1)a,\\ 0, & (2n+1)a<t<(2n+2)a,\ \ t<0.\end{cases}$ (рис. 2.9)

10. $f(t)=f(t+a)=\begin{cases}\dfrac{t}{a}-n, & na<t<(n+1)a,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ (рис. 2.10)

11. $f(t)=f(t+4a)=\begin{cases}0, & 2na<t<(2n+1)a,\ \ t<0,\\ 1, & (4n+1)a<t<(4n+2)a,\\ -1, & (4n+3)a<t<(4n+4)a.\end{cases}$ (рис. 2.11)

12. $f(t)=f\left(t+\dfrac{2\pi}{a}\right)=\begin{cases}0, & \dfrac{2\pi n}{a}<t<\dfrac{(2n+1)\pi}{a},\ t<0,\\ -\sin at, & \dfrac{(2n+1)\pi}{a}<t<\dfrac{(2n+2)\pi}{a}.\end{cases}$ (рис. 2.12)

13. $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}0, & 2na<t<(2n+1)a,\ t<0,\\ 1, & (2n+1)a<t<(2n+2)a.\end{cases}$ (рис. 2.13)

14. $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\dfrac{t}{a}-2n, & 2na<t<\left(2n+\dfrac{1}{m}\right)a,\\ \dfrac{1}{m}, & \left(2n+\dfrac{1}{m}\right)a<t<(2n+1)a,\\ 0, & (2n+1)a<t<(2n+2)a,\ \ t<0.\end{cases}$ (рис. 2.14)

15. $f(t)=f(t+a)=\begin{cases}\dfrac{m}{a}t-mn, & na<t<\left(n+\dfrac{1}{m}\right)a,\\ 0, & \left(n+\dfrac{1}{m}\right)a<t<(n+1)a,\ t<0.\end{cases}$ (рис. 2.15)

16. $f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \dfrac{k}{a}t - kn, & na < t < \left(n + \dfrac{1}{mk}\right)a, \\ \dfrac{1}{m}, & \left(n + \dfrac{1}{mk}\right)a < t < \left(n + \dfrac{1}{k}\right)a, \\ 0, & \left(n + \dfrac{1}{k}\right)a < t < (n+1)a, \quad t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.16)

17. $f(t) = f(t+a) = \begin{cases} -\dfrac{1}{m}, & na < t < \left(n + \dfrac{m-1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{2}{a}t - (2n+1), & \left(n + \dfrac{m-1}{2m}\right)a < t < \left(n + \dfrac{m+1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{1}{\mathrm{m}}, & \left(n + \dfrac{m+1}{2m}\right)a < t < (n+1)a, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.17)

18. $f(t) = f(t+a) = \begin{cases} -\dfrac{1}{m}, & 2na < t < \left(2n + \dfrac{m-1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{2}{a}t - (4n+1), & \left(2n + \dfrac{m-1}{2m}\right)a < t < \left(2n + \dfrac{m+1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{1}{\mathrm{m}}, & \left(2n + \dfrac{m+1}{2m}\right)a < t < \left(2n + \dfrac{3m-1}{2m}\right)a, \\ -\dfrac{2}{a}t + 4n + 3, & \left(2n + \dfrac{3m-1}{2m}\right)a < t < \left(2n + \dfrac{3m+1}{2m}\right)a, \\ -\dfrac{1}{\mathrm{m}}, & \left(2n + \dfrac{3m+1}{2m}\right)a < t < (2n+2)a, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.18)

19. $f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \dfrac{2k}{a}t - 2kn, & na < t < \left(n + \dfrac{1}{2mk}\right)a, \\ \dfrac{1}{\mathrm{m}}, & \left(n + \dfrac{1}{2mk}\right)a < t < \left(n + \dfrac{2m-1}{2mk}\right)a, \\ -\dfrac{2k}{a}t + 2kn + 2, & \left(n + \dfrac{2m-1}{2mk}\right)a < t < \left(n + \dfrac{1}{k}\right)a, \\ 0, & \left(n + \dfrac{1}{k}\right)a < t < (n+1)a, \quad t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.19)

20. $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} \dfrac{2t}{a} - (4n+1), & 2na < t < (2n+1)a, \\ -\dfrac{2t}{a} + 4n + 3, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, t < 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ (рис. 2.20)

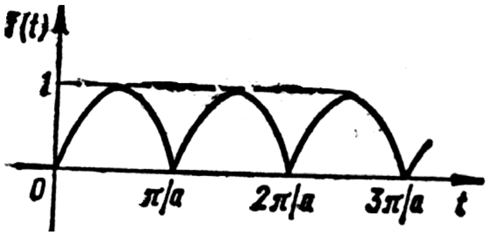

Рис. 2.1

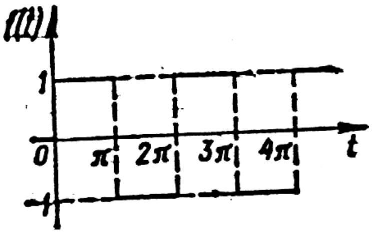

Рис. 2.2

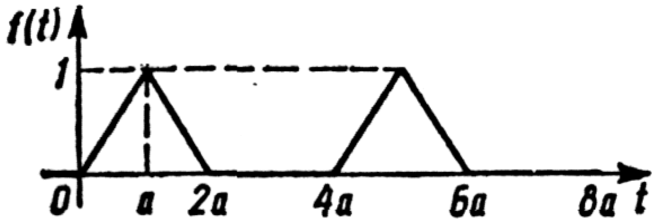

Рис. 2.3

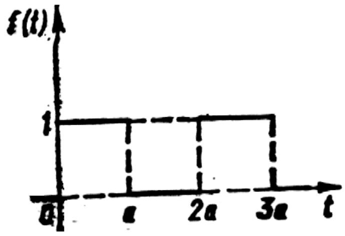

Рис. 2.4

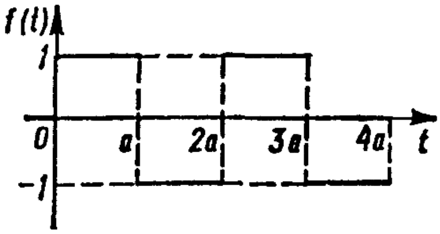

Рис.2.5

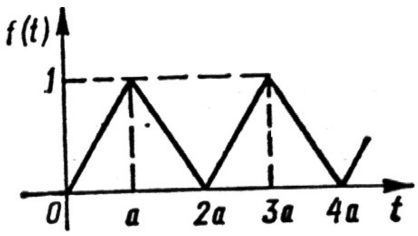

Рис. 2.6

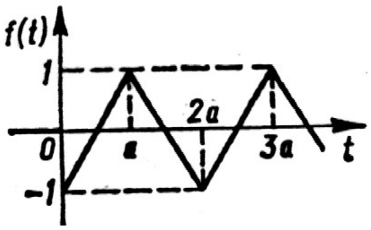

Рис. 2.7

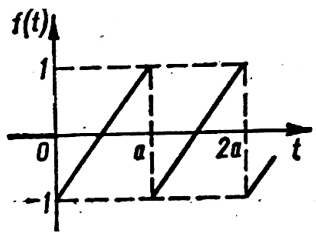

Рис. 2.8

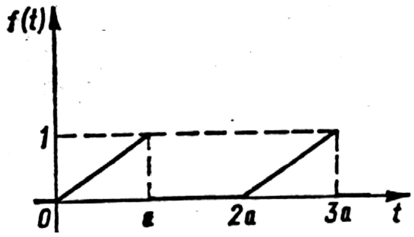

Рис. 2.9

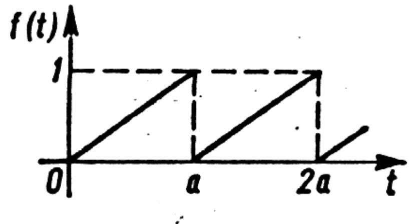

Рис. 2.10

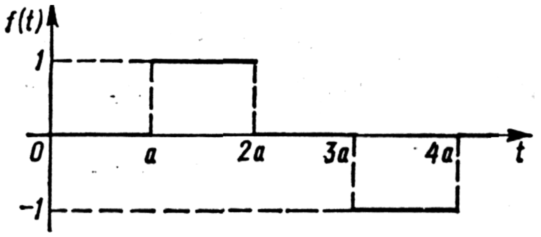

Рис. 2.11

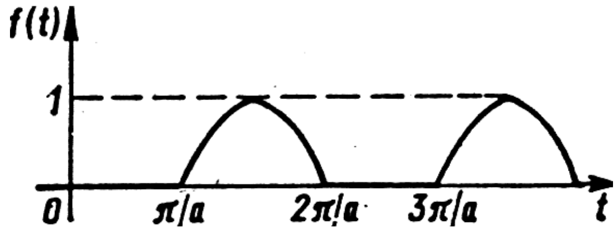

Рис. 2.12

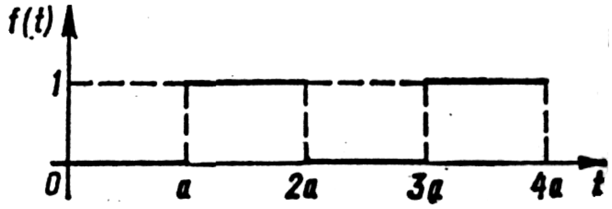

Рис. 2.13

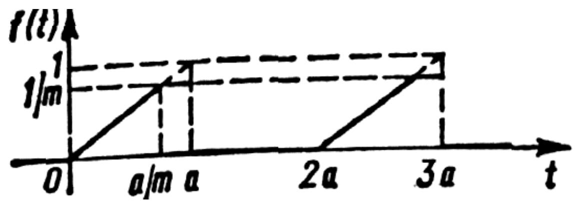

Рис. 2.14

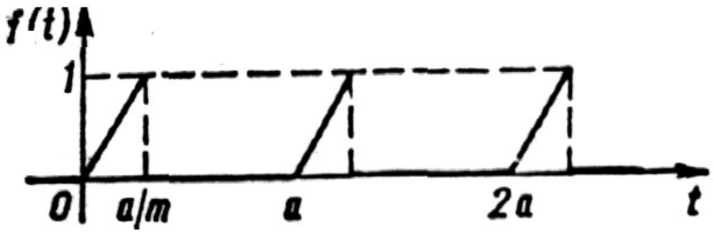

Рис. 2.15

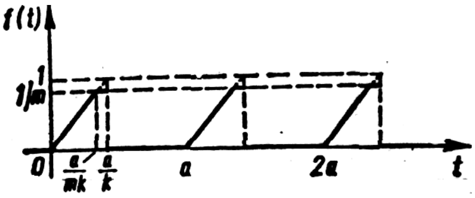

Рис. 2.16

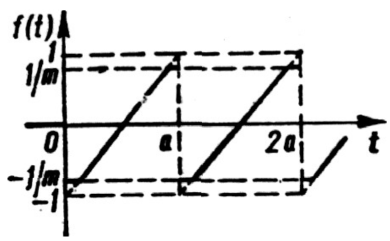

Рис. 2.17

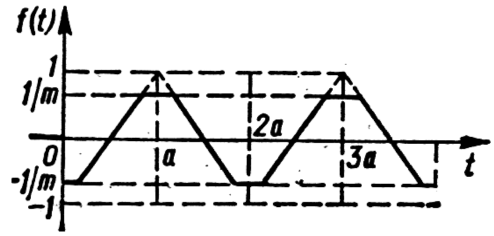

Рис. 2.18

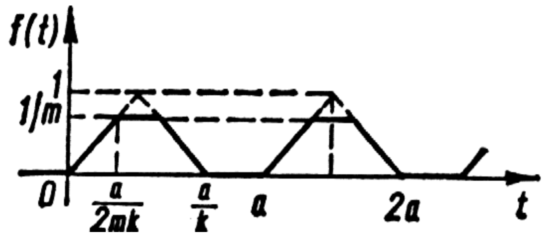

Рис. 2.19

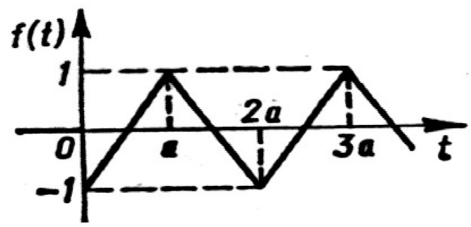

Рис. 2.20

Задание №4. Пользуясь теоремой умножения, найти оригиналы для функций:

1. $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$;

2. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$;

3. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$;

4. $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)^3(p+3)}$;

5. $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p+1)^4}$;

6. $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)^3(p-1)^2}$;

7. $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$;

8. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$;

9. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$;

10. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+6p+13)(p^2-6p+10)}$;

11. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$;

12. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$;

13. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-1)}$;

14. $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$;

15. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$;

16. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$;

17. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+6p+13)(p^2-6p+10)}$;

18. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$;

19. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$;

20. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-1)}$.

Задание №5. Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

1. $4y''+12y'+9y=144e^{-\frac{3}{2}t}$; $y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$;

2. $y''-2y'=e^t(t^2+t-3)$; $y(0)=2$, $y'(0)=2$;

3. $y''+4y'+3y=sht\sin t$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

4. $y''+2y'+y=e^{-t}(\cos t+t)$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$;

5. $y'''-3y'+2y=8te^{-t}$; $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=1$;

6. $y^{IV}-y=2\cos^3 t(\sec^2 t-1)$; $y(0)=y'(0)=y'''(0)=0$, $y''(0)=1$;

7. $y^{V} - 6y''' + 9y'' = 54t + 18$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = y^{IV}(0) = 1$;

8. $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}\sin t$; $y(0) = y'(0) = 1$;

9. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 5e^{-t}\sin t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;

10. $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2t} = 0$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;

11. $y''' - y' = 3(2 - t^2)$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;

12. $y^{IV} + 4y'' + 4y = t\sin t$; $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$;

13. $y^{IV} + 10y'' + 9y = 96\sin 2t\cos t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$;

14. $y'' + 3y' + 2y = e^{t}$; $y(0) = y'(0) = 0$;

15. $y'' - 4y' + 4y = 8(t^2 + e^{2t} + \sin 2t)$; $y(0) = y'(0) = 0$;

16. $y^{IV} - 2y'' + y = 24t\cos t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$;

17. $y''' - 6y'' + 11y' + 6y = 1$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;

18. $y^{IV} + 2y'' + y = t\sin t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$;

19. $y''' + y = \dfrac{1}{2}t^2e^{t}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;

20. $y'' - 3y' + 2y = e^{t}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

Задание №6. Решить системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2. $\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, \\ x + y'' - y + z = 0, \\ x + y + z'' - z = 0, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0$.

3. $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t, \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

4. $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = \dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y'' - x - 3y = -t, \end{cases}$, $x(0) = y(0) = x'(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. $\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \\ z' = z - x, \end{cases}$ $x(0) = z(0) = 0$, $y(0) = 0{,}5$.

6. $\begin{cases} 3tx' - 2x - y + z = 0, \\ 2ty' - x - 3y - z = 0, \\ 6tz' + x - 7y - 5z = 0, \end{cases}$, $x(1) = y(1) = z(1) = 1$.

7. $\begin{cases} x'' + 2x' + x + y'' + y' + 2y = 0, \\ x'' + x' + 2x + y'' + 3y = 0, \end{cases}$, $x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^{t} \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{cases}$; $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$; $x'(0) = 1$.

9. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$; $x(0) = 1$; $y(0) = 1$.

10. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$; $x(0) = 0$; $y(0) = 2$.

11. $\begin{cases} x' - 3x - 7y = 7e^{3t} \\ y' + 7x - 3y = 0 \end{cases}$; $x(0) = 0$; $y(0) = 1$.

12. $\begin{cases} x'' = x - y - z, \\ y'' = -x + y - z, \\ z'' = -x - y + z, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0$

13. . $\begin{cases} x' + 4e^{t} = x - 4y \\ y' = y + 4x \end{cases}$; $x(0) = 0$; $y(0) = 1$.

14. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

15. $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t, \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

16. $\begin{cases} x'' + 2x' + x + y'' + y' + 2y = 0, \\ x'' + x' + 2x + y'' + 3y = 0, \end{cases}$, $x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

17. $\begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

18. $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = \dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y'' - x - 3y = -t, \end{cases}$, $x(0) = y(0) = x'(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

19. $\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^{t} \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{cases}$; $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$; $x'(0) = 1$.

20. $\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \\ z' = z - x, \end{cases}$ $x(0) = z(0) = 0$, $y(0) = 0{,}5$.

Задание №7. Решить интегральные уравнения:

1. $f(t) = \sin t + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$;

2. $f(t) = t + \int\limits_0^t (t - \tau)f(\tau)d\tau$;

3. $f(t) = t + 2 - 2\cos t - \int\limits_0^t (t - \tau)f(\tau)d\tau$;

4. $f(t) = t^2 + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$;

5. $f(t) = \cos t + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$;

6. $f(t) = 1 + \int\limits_0^t e^{t-\tau} f(\tau)d\tau$;

7. $f(t) = 1 + \int\limits_0^t e^{t-\tau} f(\tau)d\tau$

8. $f(t) = e^{3t} + \frac{9}{4}\int\limits_0^t sh4(t - \tau)f(\tau)d\tau$;

9. $f(t) = e^{2t} + \cos 3t + \int\limits_0^t \sin(t - \tau)f(\tau)d\tau$;

10. $\sin^2 t = \int\limits_0^t \sin(t - \tau)f(\tau)d\tau$;

11. $t^4 = \int\limits_0^t \left(2t^3 - 3t^2\tau + \tau^3\right)f(\tau)d\tau$;

12. $f(t) = e^{-2t} + 3\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)d\tau$;

13. $f(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t - \tau)^2 f(\tau)d\tau$;

14. $f(t)=\sin 2t-\dfrac{8}{3}\int\limits_0^t sh(3t-\tau)f(\tau)d\tau$;

15. $f(t)=t^3+\int\limits_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$;

16. $1-\cos t=\int\limits_0^t sh(t-\tau)f(\tau)d\tau$;

17. $f(t)=t+2-2\cos t-\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$;

18. $f(t)=t+\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$

19. $f(t)=e^{2t}+\cos 3t+\int\limits_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$

20. $f(t)=\sin t+\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$

Задание №8. Найти изображения $F_C(\omega)$ косинус-преобразования Фурье для функций $f(t)$:

1. $f(t)=\begin{cases}1,\ 0<x<a\\ 0,\ x>a\end{cases}$;

2. $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$;

3. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$;

4. $f(t)=\dfrac{1}{a^2-t^2}$,

5. $f(t)=e^{-at}$;

6. $f(t)=\dfrac{y^{-bt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}}{\mathrm{t}}$;

7. $f(t)=\dfrac{\sin(at)}{t}$;

8. $f(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$,

9. $f(t)=e^{-a(t)}\cos\ bt,\ c>0$;

10. $f(t)=\mathrm{a}^{-\mathrm{t}},\ \mathrm{t}\le 0,\ \mathrm{a}>0$,

11. $f(t)=\begin{cases}4^{t-1},0\le t\le \dfrac{1}{4}\\ 0,t>\dfrac{1}{4}\end{cases}$;

12. $f(t)=\begin{cases}1,0\le t<a\\ \dfrac{1}{2},t=0\\ 0,t>a\end{cases}$;

13. $f(t)=\begin{cases}2t-3,\ 0\le x\le \dfrac{3}{2}\\ 0,\ t>\dfrac{3}{2}\end{cases}$;

14. $f(t)=\begin{cases}\cos \mathrm{t},\ 0\le \mathrm{t}\le \pi\\ 0,\qquad \mathrm{t}>\pi\end{cases}$,

15. $f(t)=\begin{cases}\sin t, 0 \le t \le \pi \\ 0, t > \pi\end{cases}$; 16. $f(t) = 2^{-t}$;

17. $f(t) = \dfrac{1}{1+t^4}$; 18. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$;

19. $f(t)=\dfrac{1-e^{-\beta t}}{t}$; 20. $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Задание №9. Найти изображения $F_S(\omega)$ синус-преобразования Фурье для функций $f(t)$, если $t \in (0,\infty)$:

1. $f(t)=e^{-\beta t}, \beta > 0 - const$; 2. $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}$;

3. $f(t)=\begin{cases}\sin t, t > a \\ 0, t \ge a, a > 0 - const\end{cases}$; 4. $f(t)=\begin{cases}1, 0 < t < a, \\ 0, t > a\end{cases}$;

5. $f(t)=\begin{cases}t, 0 < t < 1 \\ 2\text{-}t, 1 < t < 2 \\ 0, t > 2\end{cases}$; 6. $f(t)=\dfrac{1}{t}$;

7. $f(t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^3$; 8. $f(t)=\dfrac{t}{a^2+t^2}$;

9. $f(t)=\dfrac{t}{a^2-t^2}$; 10. $f(t)=\dfrac{t}{t(a^2-t^2)}$;

11. $f(t)=\dfrac{t}{t(a^2+t^2)}$; 12. $f(t)=\dfrac{e^{-at}}{t}$;

13. $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$; 14. $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$;

15. $f(t)=\sin\left(\dfrac{a+t}{a-t}\right)$; 16. $f(t)=\dfrac{e^{-t}}{t}$;

17. $f(t)=t\cdot e^{-t^2}$; 18. $f(t)=\dfrac{1}{e^{2\pi t}+1}$;

19. $f(t)=\dfrac{1}{t(a^2+t^2)^2}$; 20. $f(t)=\begin{cases}4t-1, 0 \le t \le \dfrac{1}{4} \\ 0, t > \dfrac{1}{4}\end{cases}$;

Задание №10. Найти решения краевых задач методом преобразования Фурье:

1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $D = \{(x,t): x \ge 0,\ t \ge 0\}$,

начальные условия: $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$;

краевое условие: $u(0,t) = \sin\omega t$.

2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $D = \{(x,y): x \ge 0,\ 0 \le y \le a\}$,

краевые условия: $u_x(0,y) = 0,\ u_y(x,0) = u_0$, $u_y(x,a) = 0$.

3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $D = \{(x,y): x \ge 0,\ y \ge 0\}$,

краевые условия: $u(x,0) = 0$, $u_x(0,y) = \begin{cases} -\dfrac{q}{k}, & 0 \le y \le b, \\ 0, & y > b. \end{cases}$.

4. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + xt$, $D = \{(x,t): t \ge 0, x \in R\}$,

начальные условия: $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

5. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $D = \{(x,t): x \ge 0,\ t \ge 0\}$,

начальные условия: $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$;

краевое условие: $u(0,t) = t^2$.

6. $u_t = a^2 u_{xx}$, $D = \{(x,t):\ 0 < x < \infty,\ t > 0\}$,

начальное условие: $u(x,0) = 0$;

краевое условие: $u(0,t) = f(t)$.

7. $u_t = a^2 u_{xx}$, $D = \{(x,t):\ 0 < x < \infty,\ t > 0\}$,

начальное условие: $u(x,0) = 0$;

краевое условие: $u_x(0,t) = \varphi(t)$.

8. $u_t = a^2 u_{xx} - f(x,t)$, $D = \{(x,t):\ 0 < x < \infty,\ t > 0\}$,

начальное условие: $u(x,0) = 0$;

краевое условие: $u(0,t) = 0$.

9. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $D = \{(x,y,t):\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0\}$,

начальное условие: $u(x,y,0) = \varphi(x,y)$.

10. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $D = \{(x,y,t):\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,\ t > 0\}$,

начальное условие: $u(x,y,0) = f(x,y)$;

краевое условие: $u_y(x,0,t) = 0$.

11. $u_{xx}+u_{yy}=0$, $D=\{(x,y): 0\le x\le\infty,\ 0\le y\le b\}$,

краевые условия: $u(0,y)=0,\ u(x,0)=0$, $u(x,b)=T_0$.

12. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$, $D=\{(x,y,z): 0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a\}$,

краевые условия: $u(0,y,z)=0,\ u(a,y,z)=0$;

$u(x,0,z)=0$, $u(x,a,z)=u_0$;

$u(x,y,0)=0$, $u(x,y,a)=0$.

13. $u_t=a^2u_{xx}$, $D=\{(x,t):\ 0\le x\le b,\ t>0\}$,

начальное условие: $u(x,0)=f(x)$;

краевое условие: $u_x(0,t)=0$, $u_x(b,t)=0$.

14. $u_{xx}+u_{yy}=0$, $D=\{(x,y): 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\}$,

краевые условия: $u(0,y)=0,\ u(a,y)=0$;

$u(x,0)=0$, $u(x,a)=u_0$.

15. $u_t=k^2u_{xx}$, $D=\{(x,t):\ 0\le x\le a,\ t>0\}$,

начальное условие: $u(x,0)=u_0$;

краевые условия: $u_x(0,t)=0$, $u_x(a,t)+hu(a,t)=0$, $h\in R$.

16. $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)$, $D=\{(x,y,t):-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty,t>0\}$

начальное условие: $u(x,y,0)=0$.

17. $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})$, $D=\{(x,y,t):-\infty<x<\infty,\ 0\le y<\infty,\ t>0\}$,

начальное условие: $u(x,y,0)=f(x,y)$.

краевое условие $u(x,0,t)=0.$

18. $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})$, $D=\{(x,y,t):-\infty<x<\infty,\ 0\le y<\infty,\ t>0\}$,

начальное условие: $u(x,y,0)=0$.

краевое условие $u(x,y,t)=f(x,t).$

19. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $D=\{(x,t):-\infty<x<\infty,\ t>0\}$,

начальные условия: $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$.

20. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $D=\{(x,t): x\ge 0,\ t\ge 0\}$,

начальные условия: $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$;

краевое условие: $u(0,t)=t^2$.

3.3. Комплект экзаменационных билетов по дисциплине

Для студентов специальности 010101 – Математика предусмотрен экзамен в V учебном семестре.

В экзаменационном билете предусмотрен вопрос на проверку знаний теоретического материала и два практических задания для проверки практических навыков решения задач.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 1

1. Основные понятия и определения интегральных преобразований и операционного исчисления.

2. Основные свойства преобразования Фурье. Свойства смещения изображения, подобия и дифференцирования оригинала.

3. Найти решение уравнения
$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^3 e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 2

1. Единичная функция Хевисайда. Изображения функции Хевисайда, e^{at}, C, t.

2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_t(x,t) = a^2\left(U_{xx}(x,y,t) + U_{yy}(x,y,t)\right)$, в области $D = \left\{(x,y,t) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty, t > 0\right\}$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} U(x,y,0) = 0 \\ U(x,0,t) = f(x,t) \end{cases}.$$

3. Решите интегральное уравнение

$$3\int sh(t-\tau)x(\tau)d\tau = x(t) - e^{-t}.$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 3

1. Основные свойства преобразования Лапласа. Свойства линейности, подобия и запаздывания.
2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_t(x,y,t) = a^2\left(U_{xx}(x,y,t) + U_{yy}(x,y,t)\right)$, в области $D = \left\{(x,y,t) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, t > 0\right\}$, удовлетворяющую условиям: $U(x,y,t) = \varphi(x,y)$.
3. С помощью формулы Дюамеля решить уравнение с заданными начальными условиями

$$x'' - x' = \frac{1}{1+e^t},\ x(0) - x'(0) = 0.$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 4

1. Основные свойства преобразования Лапласа. Свойства опережения, изображения периодических оригиналов и смещения.
2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_{tt}(x,t) = a^2 U_{xx}(x,t) + f(x,t)$, в области $D = \{(x,t): -\infty < x < +\infty, t > 0\}$, удовлетворяющую условиям: $\begin{cases} U(x,0) = 0 \\ U_x(x,0) = 0 \end{cases}$.
3. Найти решение уравнения, удовлетворяющего условиям: $x'' + x = \sin t + \int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 5

1. Основные свойства преобразования Лапласа. Дифференцирование и интегрирование оригиналов.
2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_t(x,t) = a^2 U_{xx}(x,t) + f(x,t)$, в области $D = \{(x,t): -\infty < x < +\infty, t > 0\}$, удовлетворяющую условиям: $U(x,t) = 0$.
3. Найти оригинал функции используя теорему умножения (теорему о свёртке)

$$\frac{1}{(p^2+7)(p^2+2)}$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 6

1. Основные свойства преобразования Лапласа. Дифференцирование и интегрирование изображений.
2. Интегральная формула Фурье.
3. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}+2x+2y=10e^{2t} \\ &\dot{y}-2x+y=7e^{2t} \end{aligned}\right\}$$, начальные условия $x(0)=1$, $y(0)=3$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 7

1. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_t(x,t)=a^2U_{xx}(x,t)$, в области $D=\{(x,t):0<x<+\infty, t>0\}$, удовлетворяющую условиям: $\begin{cases} U(x,0)=0 \\ U(0,t)=U_0 \end{cases}$.
3. Найти решение уравнения:

$x^{IV}+2x''+x=\sin t$, $\ddot{x}(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=\dddot{x}(0)=0$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 8

1. Теорема Бореля. Свертка функции. Свойства свертки.
2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_{tt}(x,t) = a^2 U_{xx}(x,t)$, в области $D = \{(x,t): -\infty < x < +\infty, t > 0\}$, удовлетворяющую условиям: $\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$.
3. Найти решение уравнения:
$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия и операционное исчисление

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Экзаменационный билет № 9

1. Свертка функции. Интеграл Дюамеля.
2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_t(x,t) = a^2 U_{xx}(x,t)$, в области $D = \{(x,t): 0 < x < +\infty, t > 0\}$, удовлетворяющую условиям: $\begin{cases} U(x,0) = 0 \\ U(0,t) = f(t) \end{cases}$.
3. Найти общее решение уравнения:
$x'' - 2x' + x = te^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия
и операционное исчисление

Экзаменационный билет № 10

1. Решение уравнений с нулевыми начальными условиями при помощи интеграла Дюамеля.
2. Преобразование Фурье одной переменной. Синус и косинус преобразования Фурье.
3. Найти косинус преобразование Фурье функции заданной на полуоси $(0,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases}5, x<7n\\0, x>7n\end{cases}.$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«___»_______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Утверждаю:____________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс III
Дисциплина Интегр-ые преобр-ия
и операционное исчисление

Экзаменационный билет № 11

1. Интегральные уравнения типа свертки. Особые интегральные уравнения. Интегральные уравнения Абеля.
2. Используя интегральное преобразование Фурье решить краевую задачу: $U_t(x,t)=a^2U_{xx}(x,t)$, в области $D=\{(x,t):-\infty<x<+\infty, t>0\}$, удовлетворяющую условиям: $U(x,0)=\varphi(x)$.
3. Найти оригинал функции F, где

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}.$$

4. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

5. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Лекционные занятия по дисциплине "Интегральные преобразования и операционное исчисление" для специальности 010101 – Математика проводит доцент кафедры математического анализа и моделирования, к.т.н. Труфанова Т.В. Практические занятия проводят доцент кафедры математического анализа и моделирования, к.т.н. Труфанова Т.В. и старший преподаватель кафедры математического анализа и моделирования Салмашова Е.М.