

Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО "АмГУ"

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

_____ Т. В. Труфанова

« ____ » _____ 2007 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методический комплекс по дисциплине

для специальности 010101 – "Математика",

010501 – "Прикладная математика"

Составитель: Н. А. Грек

Благовещенск

2007 г.

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета*

Грек Н. А.

Дифференциальная геометрия: Учебно-методический комплекс по дисциплине для студентов очной формы обучения специальности 010101 "Математика", 010501 – "Прикладная математика". – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007. – 31 с.

Учебно-методический комплекс по дисциплине предназначен для студентов специальности 010101 – "Математика", 010501 – "Прикладная математика" очной формы обучения, и призван помочь студентам в организации процесса изучения дисциплины "Дифференциальная геометрия".

© Грек Н.А., 2007

© Амурский государственный университет, 2007

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа по дисциплине "Дифференциальная геометрия" для специальности 010101 – "Математика", 010501 – "Прикладная математика".

Курс 3. Семестр 5. Лекции 18 час. Экзамен 5 семестр. Практические занятия 18 час. Зачет (нет). Лабораторные занятия (нет) . Самостоятельная работа 18 час. Всего часов 54 час.

Составитель Н. А. Грек, ассистент. Факультет математики и информатики. Кафедра математического анализа и моделирования. Благовещенск, 2006 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1. Цели и задачи дисциплины

Дифференциальная геометрия – это часть математики, которая изучает геометрические образы, в первую очередь кривые и поверхности, а также семейства кривых и поверхностей методами анализа бесконечно малых.

Целью курса «Дифференциальная геометрия» является ознакомление студентов с методами исследования математических моделей геометрических объектов, изучение основных методов решения при этом возникающих математических задач, выяснение смысла полученного решения.

1.2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения курса студенты должны: иметь представление об основных задачах дифференциальной геометрии, основных методах решения возникающих при этом математических задач; свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины: теории кривых и теории поверхностей; уметь решать задачи и выяснять смысл полученного решения.

1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины

Изучение данной дисциплины требует от студентов предварительного усвоения таких дисциплин как «Математический анализ» и «Аналитическая геометрия» в объеме государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Федеральный компонент

Дисциплина «Дифференциальная геометрия» является дисциплиной, входящей в блок специальных дисциплин федерального компонента для специальности 010101 «Математика», 010501 «Прикладная математика» Государственный стандарт – ОПД.Ф.08.

Геометрические объекты: кривые, способы задания. Кривизна плоских кривых, пространственные кривые, репер Френе, кривизна и кручение пространственных кривых, формулы Френе, натуральное уравнение кривой, Эволюта и эвольвента. Поверхности способы задания поверхностей, координаты на поверхности, касательная плоскость, первая квадратичная форма поверхности, площадь поверхности, кривизна кривых на поверхности, вторая квадратичная форма и ее свойства, инварианты пары квадратичных форм; средняя и гауссова кривизна поверхности; деривационные формулы, символы Кристоффеля поверхности, геодезическая кривизна, геодезические и их свойства. Многомерные геометрические объекты: проективное пространство, аффинная карта проективного пространства, модели проективных пространств малой размерности, метрические группы.

2.2. Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Понятие кривой.	1
2 Вопросы теории кривых, связанные с понятием соприкосновения.	2
3. Вопросы теории кривых, связанные с понятием кривизны и кручения.	3
4. Понятие поверхности	1
5. Основные понятия для поверхностей, связанные с понятием соприкосновения.	1
6. Первая квадратичная форма поверхности и связанные с ней вопросы теории поверхностей.	1
7. Вторая квадратичная форма поверхности и связанные с ней вопросы теории поверхностей.	3
8. Основные уравнения теории поверхностей.	1
9. Внутренняя геометрия поверхностей.	3
10. Многомерные геометрические объекты	2
ИТОГО	18

Тема 1. Понятие кривой.

Элементарная кривая. Простая кривая. Общая кривая. Гладкая кривая класса C^k . Способы аналитического задания кривой. Векторная функция скалярного аргумента. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой.

Тема 2. Вопросы теории кривых, связанные с понятием соприкосновения.

Касательная кривой. Соприкасающаяся плоскость кривой. Соприкосновение кривых. Огибающая семейства кривых, зависящих от параметра. Репер Френе.

Тема 3. Вопросы теории кривых, связанные с понятием кривизны и кручения.

Кривизна кривой. Кручение кривой. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой. Эволюта и эвольвента плоских кривых.

Тема 4. Понятие поверхности.

Элементарная поверхность. Простая поверхность. Общая поверхность. Гладкая поверхность класса C^k . Способы задания поверхности. Координатные линии на поверхности.

Тема 5. Основные понятия для поверхностей, связанные с понятием соприкосновения.

Касательная плоскость поверхности. Нормаль к поверхности. Соприкасающийся параболоид. Классификация точек поверхности.

Тема 6. Первая квадратичная форма поверхности и связанные с ней вопросы теории поверхностей.

Первая квадратичная форма поверхности. Длина кривой на поверхности. Угол между кривыми на поверхности. Площадь поверхности. Изометричные поверхности. Изгибание поверхностей.

Тема 7. Вторая квадратичная форма поверхности и связанные с ней вопросы теории поверхностей.

Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье. Индикатриса Дюпена. Асимптотические линии. Сопряжённые сети на поверхности. Главные направления на поверхности. Линии кривизны. Формула Эйлера. Средняя и гауссова кривизна поверхности.

Тема 8. Основные уравнения теории поверхностей.

Деривационные формулы. Формулы Гаусса – Петерсона – Кодацци. Теорема Бонне.

Тема 9. Внутренняя геометрия поверхностей.

Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезические линии на поверхности. Полугеодезическая параметризация на поверхности. Теорема Гаусса – Бонне. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

Тема 10. Многомерные геометрические объекты.

Проективное пространство. Аффинная карта проективного пространства. Модели проективных пространств малой размерности. Метрические группы.

2.3. Практические занятия, их содержание и объем в часах.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1.Кривые и их способы задания. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой.	2
2.Сопровождающий трёхгранник кривой.	2
3.Кривизна и кручение кривой. Натуральные уравнения кривой.	2
4.Поверхности – способы задания. Касательная и нормаль к поверхности.	2
5.Первая квадратичная форма поверхности.	2
6. Вторая квадратичная форма поверхности.	2
7.Средняя и гауссова кривизны поверхности.	2
8. Линии кривизны. Геодезические линии.	2
9.Контрольная работа «Кривая и поверхность в пространстве».	2
ИТОГО	18

2.4. Самостоятельная работа студентов (18 часов).

1. Решение задач домашнего задания.
2. Самостоятельное изучение некоторых теоретических вопросов.

2.5. Вопросы к экзамену

1. Кривые и их способы задания.
2. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой.
3. Касательная кривой.
4. Соприкасающаяся плоскость кривой.
5. Сопровождающий трёхгранник кривой.
6. Кривизна кривой.
7. Кручение кривой.
8. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой.
9. Эволюта и эвольвента плоской кривой.
10. Поверхности и их способы задания.
11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
12. Первая квадратичная форма поверхности и связанные с ней вопросы.
13. Вторая квадратичная форма поверхности.
14. Кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье.
15. Индикатриса Дюпена. Соприкасающийся параболоид. Классификация точек поверхности.
16. Асимптотические линии на поверхности. Сопряжённые сети на поверхности.
17. Главные направления на поверхности. Линии кривизны.
18. Формула Эйлера. Средняя и гауссова кривизны поверхности.
19. Деривационные формулы.

20. Формулы Гаусса – Петерсона – Кодацци.
21. Теорема Бонне.
22. Геодезическая кривизна кривой на поверхности.
23. Геодезические линии на поверхности.
24. Полугеодезическая параметризация поверхности.
25. Теорема Гаусса – Бонне. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.
26. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.
27. Проективное пространство.
28. Аффинная карта проективного пространства.
29. Модели проективных пространств малой размерности.
30. Метрические группы.

2.6 Виды контроля.

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучающихся осуществляется во время проведения аудиторных занятий посредством устного опроса, проведения самостоятельных работ, контрольной работы или осуществления лекции в форме диалога. Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде анализа итоговых отчетов на аттестационные вопросы. Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде устного или письменного экзамена при ответах экзаменуемого на два вопроса в билете, дополнительные вопросы по желанию экзаменатора и решения одной задачи.

2.7. Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Студент, сдающий экзамен по данному предмету, должен показать знания в соответствии с п.1.2.

Знания студента оцениваются как отличные при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета и ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках.

Оценка “хорошо” ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса, но в пределах конспекта лекций и обязательных заданий по самостоятельной работе с литературой.

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет ответы на наводящие вопросы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса. Студент не дает полные ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии; наводящие вопросы остаются без ответа.

Для допуска к экзамену студент должен сдать все самостоятельные работы и решить контрольную работу.

3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1. Перечень обязательной (основной) литературы

1. Фоменко А.Т., Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – Факториал Пресс: Университ. учебник, 2000.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – УТСС, 2003. – 428 с.
3. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия. Ч.II. Учебное пособие для физико-математических факультетов пед. институтов. – СПб.: ”Специальная Литература”, 1997. – 320 с.
4. Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Элементы топологии и дифференциальной геометрии: Учебное пособие для студентов-зоочников IV – V

- курсов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1985. – 112 с.
5. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
 6. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: Физматгиз, 1958. – 244 с.
 7. Сборник задач по геометрии / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев, В.П. Иваницкая и др.: Под ред. В. Т. Базылева. – М.: Просвещение, 1980. – 240 с.
 8. Сборник задач по геометрии, ч. II / Л.С. Атанасян, М.В. Васильева, Е.Е. Вересова, Г. Б. Гуревич и др. – М.: Просвещение, 1985. – 176 с.
 9. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И.Б. Белько, В.И. Ведерников, В.Т. Воднев и др.: Под ред. А.С. Феденко. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

3.2. Перечень дополнительной литературы

1. Фоменко А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. Изд. МГУ, 1983. – 216 с.
2. Егоров Д.Ф. Работы по дифгеометрии. Под ред. Финикова С.П. М.: Наука, 1970. – 380 с.
3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Сем.3. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987. – 480 с.
4. Бакельман И.Я. и др. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». – М.: Наука, 1973. – 440 с.
5. Моденов П.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. М.: Учпедгиз, 1949. – 239 с.
6. Розендорн Э.Г. Задачи по дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1971. – 64с.

3.3. Перечень методических пособий

1. Тайманов И. А. Лекции по дифференциальной геометрии. I. Кривые и поверхности: учебное пособие. – Новосибирск 2005. – 47 с.

2. Методические рекомендации к практическим занятиям по дифференциальной геометрии, часть I – линии в евклидовом пространстве. – Благовещенск: БГПИ им. Калинина, 1987. – 33 с.

3. Методические рекомендации к практическим занятиям по дифференциальной геометрии, часть II – поверхности в евклидовом пространстве. – Благовещенск: БГПИ им. М.И. Калинина, 1987. – 34 с.

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Номер недели	Темы, изучаемые на лекции	Темы, изучаемые на практическом занятии	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Задачи для самостоятельной работы, используемая лит-ра	часы	
1	1-2				См.р
2		1	[8] №№ 939-950, [9] №№ 418-432, [7] 1625, 1628, 1629	2	
3	2-3				
4		2	[9] №№ 450-462	2	
5	3				
6		3	[9] №№ 482, 490, 491, 492, 514-516; [8] №№ 1023-1025	2	

7	4-5				См.р
8		4	[9] №№529,531-533, 536, 547, 555; 573, 579, 581,594; [7] №№ 1688, 1689; [8] №№1040, 1050	2	
9	6-7				
10		5	[9] №№ 640, 642, 644, 682, 685, 691	2	
11	7				
12		6	[9] №№ 716-726, 732, 733, 739, 740.	2	См.р.
13	8-9				
14		7	[9] №№756, 759, 767, 774,779	2	
15	9				
16		8	[9] №№ 819, 823, 827,828, 829,841, 845, 856,857, 864	4	
17	10				
18		9			
					К.р.

Условные обозначения:

к.р. – контрольная работа

см.р. – самостоятельная работа

II. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ НА КАЖДЫЙ СЕМЕСТР С УКАЗА-

НИЕМ ЕЕ СОДЕРЖАНИЯ, ОБЪЕМА В ЧАСАХ, СРОКОВ И ФОРМ КОНТРОЛЯ

График самостоятельной учебной работы студентов по дисциплине (с указанием ее содержания, объема в часах, сроков и форм контроля) приведен в рабочей программе дисциплины.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ (РЕКОМЕНДУЕМАЯ ТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ, ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ), САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Форма проведения практического занятия: а) приветствие студентов, 1 мин.; б) определение личного состава студенческой группы, 2 мин.; в) проверка выполнения заданий для самостоятельной работы, 5 мин.; г) объявление тематики и основных типовых задач, 1 мин.; д) решение задач, 60 мин.; е) выдача заданий для самостоятельной работы студентов, 5 мин.; ж) подведение итогов практического занятия, 5 мин.; з) прощание со студентами, 1 мин.

Форма проведения самостоятельной работы студентов: выдача упражнений и задач по вариантам; пояснение к условиям и форме выполнения задач; самостоятельное решение; проверка решений; подведение итогов самостоятельной работы.

Тематика практических занятий, задачи для самостоятельной работы студентов приведены в рабочей программе.

Перечень типовых задач приведен в приложении А.

IV. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ, ДЕЛОВЫХ ИГР, РАЗБОРУ СИТУА-

ЦИЙ И Т. П. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ (ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ)

Проведение лабораторных занятий, деловых игр, разбор ситуаций и т. п. рабочей программой дисциплины не предусмотрены.

Список рекомендуемой литературы (основной и дополнительной) приведен в рабочей программе.

V. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (ПО КАЖДОЙ ТЕМЕ) ИЛИ ПЛАН-КОНСПЕКТ

Используемые обозначения: Т. – тема.

Лекция №1 (Т1, Т2): Элементарная кривая. Простая кривая. Общая кривая. Гладкая кривая класса C^k . Способы аналитического задания кривой. Векторная функция скалярного аргумента. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой. Касательная кривой.

Лекция №2 (Т2, Т3): Соприкасающаяся плоскость кривой. Соприкосновение кривых. Огибающая семейства кривых, зависящих от параметра. Репер Френе. Кривизна кривой.

Лекция №3 (Т3): Кручение кривой. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой. Эволюта и эвольвента плоских кривых.

Лекция №4 (Т4, Т5): Элементарная поверхность. Простая поверхность. Общая поверхность. Гладкая поверхность класса C^k . Способы задания поверхности. Координатные линии на поверхности. Касательная плоскость поверхности. Нормаль к поверхности. Соприкасающийся параболоид. Классификация точек поверхности.

Лекция №5 (Т6, Т7): Первая квадратичная форма поверхности. Длина кривой на поверхности. Угол между кривыми на поверхности. Площадь поверхности. Изометричные поверхности. Изгибание поверхностей. Вторая квадратичная форма поверхности.

Лекция №6 (T7): Кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье. Индикатриса Дюпена. Асимптотические линии. Сопряжённые сети на поверхности. Главные направления на поверхности. Линии кривизны. Формула Эйлера. Средняя и гауссова кривизна поверхности.

Лекция №7 (T8, T9): Деривационные формулы. Формулы Гаусса – Петерсона – Кодацци. Теорема Бонне. Геодезическая кривизна кривой на поверхности.

Лекция №8 (T9): Геодезические линии на поверхности. Полугеодезическая параметризация на поверхности. Теорема Гаусса – Бонне. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

Лекция №9 (T10): Проективное пространство. Аффинная карта проективного пространства. Модели проективных пространств малой размерности. Метрические группы.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ (РАБОТ)

Курсовой проект (работа) рабочей программой дисциплины не предусмотрен.

VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ (ПРАКТИКУМОВ)

Лабораторные занятия рабочей программой дисциплины не предусмотрены.

VIII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ) ЗАНЯТИЯМ

Для выполнения практических заданий студент должен изучить соответствующий теоретический материал, разобрать примеры решения типовых задач, самостоятельно решить предложенные упражнения и теоретические задания.

IX. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Для выполнения домашних заданий и контрольных работ необходимо изучить лекцию и соответствующую дополнительную литературу, разобрать решения задач на практическом занятии.

При выполнении контрольных работ конспект лекций и примеры решения задач не использовать.

X. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (В Т. Ч. РАЗРАБОТАННЫЕ ВЕДУЩИМИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ ФИЛИАЛА)

Применение современных информационных технологий для преподавания данной учебной дисциплины не требуется.

XI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПРОФЕССОРСКО - ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО И ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ (МАТЕРИАЛЫ ПО КОНТРОЛЮ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ)

Преподаватель готовит контролирующие материалы в виде упражнений, математического диктанта, расчетно-графических работ и в другой форме. Во время проведения контроля знаний студентов преподаватель объясняет студентам правила работы с контролируемыми материалами и выдаёт эти материалы студентам. После истечения установленного времени контролирующие материалы собираются и обрабатываются.

XII. КОМПЛЕКТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ, ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Задания и примеры решения типовых задач для практических работ приведены в приложении Б, задачи для домашней работы – в учебно-методической карте рабочей программы.

ХІІІ. ФОНД КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Контрольные задания для оценки качества знаний по дисциплине составляются в соответствии с перечнем типовых задач, приведённых в приложении А.

Примеры вариантов контрольных работ:

Вариант №1

- Покажите, что уравнения
$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, \\ y &= b \sin \theta \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x &= a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y &= b \cdot \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$
 являются параметризациями одной и той же линии.

- Составьте уравнения касательной прямой, главной нормали и бинормали к кривой $\gamma : \begin{cases} x = t^3 - 2t, \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ в точке $t_0 = 1$.

- Найдите кривизну и кручение кривой, заданной параметрическими уравнениями:
$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ z = \cos 2t. \end{cases}$$

- Вычислите главные кривизны поверхности $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ в точке $(0,0,0)$.

Вариант №2

1. Докажите, что образ кривой, заданной векторной функцией

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1 + t^2\vec{r}_2$, где $t \in R$, $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ - постоянные векторы, есть парабола, если векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ не коллинеарны.

2. Составьте уравнения соприкасающейся плоскости, нормальной плос-

кости и спрямляющей плоскости к кривой $\gamma : \begin{cases} x = t^3 - 2t, \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ в точке $t_0=1$.

3. Составьте натуральные уравнения кривой, заданной параметриче-

скими уравнениями: $\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = a \cdot \operatorname{sh} t, \\ z = a \cdot t. \end{cases}$

4. Найти площадь четырёхугольника на поверхности $\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \\ z = a \cdot v \end{cases}$, ограниченного линиями $u = 0, u = a, v = 0, v = 1$.

Вариант №3

1. Постройте образ кривой $\gamma : \begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^2 - 2t + 1. \end{cases}$

2. Найдите тройку базисных векторов к кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ z = \cos 2t. \end{cases}$$

3. Доказать, что кривая $\gamma : \begin{cases} x = \frac{1+t}{1-t}, \\ y = \frac{1}{1-t^2}, \\ z = \frac{1}{1+t} \end{cases}$, плоская.
4. Найдите угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$ на поверхности, имеющей первую квадратичную форму $I = du^2 + dv^2$

Вариант №4

1. Докажите, что векторы τ, ν, β кривой, заданной уравнениями:
 $x = t, y = t^2, z = t^3$ в точке $O(0,0,0)$ совпадают с единичными векторами координатных осей.

2. Найдите длину одной арки циклоиды: $\begin{cases} x = (t - \sin t)a, \\ y = (1 - \cos t)a. \end{cases}$

3. Найдите кривизну и кручение кривой $\gamma : \begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2, \\ z = 3t + t^3. \end{cases}$

4. Найти угол между координатными линиями на поверхности

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$$

Вариант №5

1. Составьте уравнения касательной прямой, главной нормали и бинормали к кривой γ :

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ z = \cos 2t. \end{cases} \text{ в произвольной точке .}$$

2. Найдите тройку базисных векторов к кривой, заданной уравнениями

$$\gamma : \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4 \sin \frac{t}{2}. \end{cases} \text{ в произвольной точке.}$$

3. Доказать, что кривая является плоской тогда и только тогда, когда кручение её в каждой точке равно нулю (теорема о геометрическом смысле кручения).
4. Найти нормальную кривизну линии $u - v^3 = 0$ в точке $A(u = 1, v = 1)$ по-

$$\text{верхности: } \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Вариант №6

1. Докажите, что образ кривой, заданной векторной функцией

$\vec{r} = \vec{r}_0 + cht \cdot \vec{r}_1 + sht \cdot \vec{r}_2$, где $t \in \mathbb{R}$, $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ - постоянные векторы, есть ветвь гиперболы, если векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ не коллинеарны.

2. Составьте уравнения соприкасающейся плоскости, нормальной плос-

$$\text{кости и спрямляющей плоскости к кривой } \gamma : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = t^3 \end{cases} \text{ в точке } t_0=1.$$

Какая линия получается в пересечении касательных с плоскостью XOY .

3. Доказать, что кривая является прямой тогда и только тогда, когда кривизна её в каждой точке равна нулю (геометрический смысл кривизны).
4. Доказать, что каждая точка сферы является эллиптической.

Вариант №7

1. Гладкая кривая задана в естественной параметризации $\vec{r} = \vec{r}(s), \vec{r}''(s) \neq 0$. Докажите, что векторы $\vec{r}'(s)$, $\vec{r}''(s)$ и $\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)$ образуют прямоугольный базис в каждой точке кривой. Справедливо ли это утверждение, если кривая задана произвольной параметризацией?

2. Найдите кривизну и кручение кривой $\gamma : \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4 \sin \frac{t}{2}. \end{cases}$ в произвольной точке.

3. Найдите длину дуги кривой $\begin{cases} x^3 = 3a^2y, \\ 2xz = a^2 \end{cases}$ между плоскостями $y = \frac{a}{3}$,

$$y = 9a.$$

4. Вычислить единичный вектор нормали в точке $M(1, 3, 4)$ поверхности $x = u, y = u^2 - 2uv, z = u^3 - 3u^2v$.

XIV. КОМПЛЕКТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ДЛЯ КАЖДОГО ИЗ ПРЕДУСМОТРЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

Комплекты экзаменационных билетов составляются на основе перечня вопросов, приведенного в рабочей программе, по следующей форме.

ГОУВПО «Амурский государственный университет»

Утверждено на заседании кафедр- Кафедра *математического анализа и*
ры *моделирования*

«___» _____ 200 г.

Факультет *математики и*

Заведующий кафедрой

информатики

Утверждаю: _____

Курс *третий*

Дисциплина *"Дифференциальная
геометрия"*

Экзаменационный билет 1

1. Сопровождающий трёхгранник кривой.

2. Вторая квадратичная форма поверхности.

3. Вычислить кривизну кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 2t, \\ y = \ln t, \\ z = t^2 \end{cases}$ в точке $(2,0,1)$.

**XV. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ
ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА**

Дисциплину в полном объёме ведёт:

1. Фамилия, имя, отчество: Грек Надежда Анатольевна
2. Учёное звание: нет
3. Учёная степень: нет

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Перечень основных типовых задач

1. Переход от одного способа задания кривой к другому.
2. Составление уравнений кривой по определяющим её условиям.
3. Вычисление длины дуги при различных способах задания кривой.
4. Переход от произвольной параметризации кривой к естественной.
5. Составление уравнений элементов трёхгранника Френе.
6. Нахождение базисных векторов трёхгранника Френе.
7. Вычисление кривизны произвольной кривой для различных случаев задания этой кривой.
8. Вычисление радиуса кривизны кривой.
9. Вычисление кручения произвольной кривой для различных случаев задания этой кривой.
10. Составление натуральных уравнений кривой.
11. Составление уравнений поверхности.
12. Составление координатных линий на поверхности.

13. Составление уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности.
14. Нахождение первой квадратичной формы поверхности.
15. Вычисление длины дуги на поверхности.
16. Вычисление угла между кривыми на поверхности.
17. Вычисление компактной области на поверхности.
18. Вычисление коэффициентов второй квадратичной формы для различных способов задания поверхности.
19. Вычисление нормальных кривизн поверхности.
20. Нахождение главных направлений поверхности в данной точке.
21. Вычисление главных нормальных кривизн поверхности.
22. Вычисление полной и средней кривизн поверхности.
23. Определение типа точки на поверхности.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Практическое занятие №1.

Тема: Способы задания кривой в пространстве.

Длина дуги кривой. Естественная параметризация.

Задача 1. Кривая задана пересечением цилиндрической поверхности

$x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $x + y + z = 1$. Написать параметрические уравнения кривой.

Решение. Перейдём от неявного задания кривой $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ к заданию параметрическими уравнениями. Введём параметр t , положив $x = \cos t, y = \sin t$, где $0 \leq t \leq 2\pi$. Тогда $z = 1 - \cos t - \sin t$. Параметрические уравнения кривой

имеют вид: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1 - \cos t - \sin t \end{cases}$ где $0 \leq t \leq 2\pi$.

Задача 2. Показать, что кривая $x = 1 + \cos t, y = \sin t, z = 2 \sin(t/2)$, $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ гладкая и лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 2 и на цилиндрической поверхности.

Решение. Найдём первые производные функций, определяющих кривую: $x' = -\sin t, y' = \cos t, z' = \cos(t/2)$. В промежутке $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ выполняется условие $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + \cos^2 t / 2 \neq 0$. Следовательно, кривая гладкая.

Перейдём от параметрических уравнений кривой к неявному её заданию, исключив параметр t из уравнений, определяющих кривую.

Имеем: $(x-1)^2 = \cos^2 t$, $y^2 = \sin^2 t$, $z^2 = 4\sin^2 t/2$.

Складывая левые и правые части первых двух уравнений системы, получим уравнение цилиндрической поверхности: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Из данных параметрических уравнений имеем следующую систему:

$x^2 = 1 + 2 \cos t + \cos^2 t$, $y^2 = \sin^2 t$, $z^2 = 4 \sin^2 t$. Отсюда получаем $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Таким образом, данная кривая лежит на сфере и цилиндрической поверхности.

Задача 3. Точка М движется в пространстве так, что её проекция на плоскость ОХУ равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$ с угловой скоростью ω , а проекция на ось Oz движется равномерно со скоростью v . Кривая, которую описывает точка М называется винтовой линией. Составьте параметрические уравнения винтовой линии.

Решение. Пусть точка М (x, y, z) – произвольная точка винтовой линии. Примем за параметр время t и выразим координаты точки М через t . Допустим, что в начальный момент $t = 0$ точка М имела координаты $M_0 = (a, 0, 0)$. Точка $M_1(x, y, 0)$, проекция точки М на плоскость ОХУ, движется равномерно по окружности с угловой скоростью ω , значит, угол $\angle OM_0M_1 = \omega t$. Из прямоугольного треугольника OM_0M_1 запишем $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$. Так как проекция точки на ось Oz движется равномерно со скоростью v , то $z = vt$.

Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид: $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = vt$.

Задача 4. Запишите в естественной параметризации уравнения кривой, заданной уравнениями: $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$.

Решение. Выразим натуральный параметр s через произвольный t .

Векторное уравнение данной кривой имеет вид $\vec{r} = e^t \cos t \cdot \vec{i} + e^t \sin t \cdot \vec{j} + e^t \cdot \vec{k}$.

Найдём производную $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t) \cdot \vec{i} + (e^t \cos t + e^t \sin t) \cdot \vec{j} + (e^t) \cdot \vec{k}.$$

Тогда

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \cos t + e^t \sin t)^2 + (e^t)^2} = e^t \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t + 1} = \sqrt{3} \cdot e^t$$

Примем за начальную точку $t_0 = 0$ и вычислим длину переменной дуги $s(t)$:

$$s = \int_0^t \sqrt{3} \cdot e^t dt = \sqrt{3} \cdot e^t \Big|_0^t = \sqrt{3}(e^t - 1). \text{ Отсюда } \frac{s}{\sqrt{3}} = e^t - 1, \quad t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right).$$

Данные уравнения в естественной параметризации запишутся в виде:

$$x = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \cdot \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right),$$

$$y = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \cdot \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right),$$

$$z = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1.$$

Практическое занятие №2

Тема: Касательная прямая. Сопровождающий трёхгранник кривой.

Задача 1. Написать уравнения касательной прямой к линии, заданной урав-

нениями
$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \\ z = t \end{cases} \text{ в точке } t = -1.$$

Задача 2. Написать уравнения касательной прямой к винтовой линии

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t, \\ z = b \cdot t \end{cases} \text{ в произвольной точке } t \text{ и угол, образуемый ею с осью } OZ.$$

Задача 3. Написать уравнения касательной прямой к линии, заданной урав-

нениями
$$\begin{cases} y = x, \\ z = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Задача 4. Составить уравнения элементов сопровождающего трёхгранника

кривой, заданной уравнениями
$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = \ln t, \\ z = t^2 \end{cases} \text{ в точке } t = 1.$$

Задача 5. Найти базисные векторы трёхгранника Френе к кривой, задан-

ной уравнениями $\begin{cases} x = y^2, \\ z = x^2 \end{cases}$ в точке (1,1,1).

Практическое занятие №3

Тема: Кривизна кривой. Кручение кривой.

Натуральные уравнения кривой.

Задача 1. Доказать, что кривизна винтовой линии постоянна.

Задача 2. Вычислить кривизну кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 2t, \\ y = \ln t, \\ z = t^2 \end{cases}$ в точке (2,0,1).

Задача 3. Найти радиус кривизны эллипса : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ в одной из его вершин.

Задача 4. Найти кривизну кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4 \sin \frac{t}{2} \end{cases}$ в произвольной точке.

Задача 4. Доказать, что линия является прямой тогда и только тогда, когда кривизна её в каждой точке равна нулю (теорема о геометрическом смысле кривизны).

Задача 5. Вычислить кручение винтовой линии.

Задача 6. Вычислить кручение кривой $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + \sqrt{2} t \vec{k}$ и точке $t_0=2$.

Задача 7. Доказать, что кривая $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j} + t^3 \vec{k}$ плоская.

Задача 8. Составить натуральные уравнения кривой $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$

$t \in [0, 2\pi]$.

Практическое занятие №4

Тема: Поверхности – способы задания.

Касательная и нормаль к поверхности.

Задача 1. Образующие цилиндрической поверхности параллельны вектору $\vec{a} = (-1, 3, -2)$, а направляющей является линия $\vec{r}(u) = \cos u \cdot \vec{i} + \sin u \cdot \vec{j}$. Написать параметрические уравнения поверхности и неявное уравнение поверхности.

Задача 2. Написать уравнения координатных линий на прямом геликоиде $x = u \cdot \cos v, y = u \cdot \sin v, z = b \cdot v (b > 0)$.

Задача 3. Показать, что функция

$r(u) = \cos u \cdot \sin v \cdot \vec{i} + \sin u \cdot \sin v \cdot \vec{j} + \cos v \cdot \vec{k}, (0 \leq u < 2\pi; 0 \leq v \leq \pi)$ является параметризацией сферы радиуса $R=1$, однако она не является гладкой. Изменить область определения так, чтобы параметризация сферы оказалась C^∞ -гладкой.

Задача 4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

$$1) x = u \cdot \cos v, y = u \cdot \sin v, z = u, M_0(u = 2, v = \frac{\pi}{4});$$

$$2) z = x^3 + y^3, M_0(1, 2, 9).$$

Задача 5. Показать, что нормали поверхности

$$x = \varphi(u) \cdot \cos v, y = \varphi(u) \cdot \sin v, z = \psi(u)$$

пересекают ось Oz.

Задача 6. Вычислить единичный вектор нормали в точке $M(1, 3, 4)$ поверхности $x = u, y = u^2 - 2uv, z = u^3 - 3u^2v$.

Практическое занятие №5

Тема: Первая квадратичная форма поверхности

и связанные с ней вопросы.

Задача 1. Доказать, что координатная сеть на поверхности ортогональна тогда и только тогда, когда коэффициент F первой квадратичной формы поверхности равен нулю.

Задача 2. Найти первую квадратичную форму кругового цилиндра.

Задача 3. Дана поверхность $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = u \cdot v \end{cases}$. Вычислить длину дуги линии

$\gamma : v = a \cdot u$ между точками её пересечения с линиями $u = 1, u = 2$.

Задача 4. Найти угол между координатными линиями на поверхности

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$$

Задача 5. Найти площадь четырёхугольника на поверхности $\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \\ z = a \cdot v \end{cases}$

ограниченного линиями $u = 0, u = a, v = 0, v = 1$.

Практическое занятие №6

Тема: Вторая квадратичная форма поверхности

и связанные с ней вопросы. Задача 1. Доказать, что если вторая квадратичная форма поверхности $z = f(x, y)$ тождественно равна нулю, то поверхность является плоскостью или её частью.

Задача 2. Найти вторую квадратичную форму прямого геликоида.

Задача 3. Найти нормальную кривизну линии $u - v^3 = 0$ в точке $A(u = 1, v = 1)$

поверхности: $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$.

Задача 4. Найти главные направления прямого геликоида.

Задача 5. Вычислить главные кривизны поверхности $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ в точке $M(0, 0, 0)$

Практическое занятие №7

Тема: Средняя и гауссова кривизны поверхности.

Задача 1. Доказать, что плоскость является поверхностью постоянной нулевой полной кривизны.

Задача 2. Записать формулы для вычисления полной и средней кривизн поверхности, заданной явным уравнением $z=f(x,y)$.

Задача 3. Вычислить полную и среднюю кривизны эллиптического параболоида

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad \text{в точке } A(1,1).$$

Задача 4. Доказать, что каждая точка сферы является эллиптической.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Рабочая программа дисциплины	3
1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе	3
1.1. Цели и задачи дисциплины	3
1.2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины	3
1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины	4
2. Содержание дисциплины	4
2.1. Федеральный компонент	4
2.2. Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах	5
2.3. Практические и семинарские занятия, их содержание и объем в часах	7
2.4. Самостоятельная работа студентов	8
2.5. Вопросы к экзамену	8
2.6. Виды контроля	9
2.7. Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене	10
3. Учебно-методические материалы по дисциплине	10
3.1. Перечень обязательной (основной) литературы	10
3.2. Перечень дополнительной литературы	11

	33
3.3. Перечень методических пособий	12
4. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины	12
II. График самостоятельной учебной работы студентов по дисциплине на каждый семестр с указанием ее содержания, объема в часах, сроков и форм контроля	14
III. Методические рекомендации по проведению семинарских и практических занятий (рекомендуемая тематика и вопросы, формы проведения), самостоятельной работы студентов	14
IV. Методические рекомендации по проведению лабораторных занятий, деловых игр, разбору ситуаций и т. п. список рекомендуемой литературы (основной и дополнительной)	15
V. Краткий конспект лекций (по каждой теме) или план-конспект	15
VI. Методические указания по выполнению курсовых проектов (работ)	16
VII. Методические указания по выполнению лабораторных работ (практикумов)	16
VIII. Методические указания к практическим (семинарским) занятиям	16
IX. Методические указания по выполнению домашних заданий и контрольных работ	17
X. Методические указания по применению современных информационных технологий для преподавания учебной дисциплины (в т. ч. разработанные ведущими преподавателями филиала)	17
XI. Методические указания профессорско - преподавательскому составу по организации межсессионного и экзаменационного контроля знаний студентов (материалы по контролю качества образования)	17
XII. Комплекты заданий для лабораторных работ, контрольных работ, домашних заданий	18
XIII. Фонд тестовых и контрольных заданий для оценки качества знаний по дисциплине	18
XIV. Комплекты экзаменационных билетов для каждого из предусмотренных экзаменов по дисциплине и контрольные вопросы к зачету	22
XV. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-пре-	23

	34
подавательского состава	
Приложение А	24
Приложение Б	26