Министерство образования и науки Российской Федерации
Амурский государственный университет

Н.Н. Максимова

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

2016

УДК 519.832

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензенты:

Бризицкий Р.В., ст. науч. сотр. ИПМ ДВО РАН, канд. физ.-мат. наук;

Субанакова Т.О., младший науч. сотр. Отдела региональных экономических исследований Бурятского научного центра СО РАН, канд. техн. наук.

Максимова, Н.Н.

Исследование операций. Модели линейного программирования: учебно-методическое пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2016. – 144 с.

Учебно-методическое пособие содержит теоретические сведения по разделу «Модели линейного программирования», являющегося важным разделом дисциплины «Исследование операций». По каждой тематике представлены примеры решения задач с подробными комментариями. В конце пособия приведены варианты заданий контрольной работы. Учебный материал позволяет выработать практические навыки решения задач линейного программирования и задач транспортного типа.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки 01.03.02–«Прикладная математика и информатика» в рамках освоения дисциплины «Теория игр и исследования операций», студентов направлений подготовки 09.03.01–«Информатика и вычислительная техника», 09.03.02–«Информационные системы и технологии», 09.03.03–«Прикладная информатика», 38.03.05–«Бизнес-информатика» при изучении дисциплины «Исследование операций», а также студентов направления подготовки 38.03.01–«Экономика» при изучении курса «Методы оптимальных решений».

В авторской редакции.

ВВЕДЕНИЕ

«Человек наделён сознанием,
существо свободное и обречено на выбор решений,
стараясь сделать всё наилучшим образом»

Теория принятия оптимальных решений в наиболее общем смысле представляет собой совокупность математических и численных методов, ориентированных на нахождение наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать их полного перебора.

В XVIII веке началом науки «Исследование операций» следует считать работу Жозефа Луи Лагранжа, смысл которой заключался в следующем:

сколько земли должен брать на лопату землекоп, чтобы его сменная производительность была наибольшей.

Оказалось, что утверждение «бери больше, кидай дальше» не верен.

Практическая потребность общества в научных основах принятия решений возникла с развитием науки и техники.

Бурный рост технического прогресса, особенно во время и после второй мировой войны, ставил все новые и новые задачи, для решения которых привлекались и разрабатывались новые научные методы.

Научно-техническими предпосылками становления дисциплины «Исследование» являются:

1) удорожание «цены ошибки»: чем сложнее, дороже, масштабнее планируемое мероприятие, тем менее допустимы в нем «волевые» решения и тем важнее становятся научные методы, позволяющие заранее оценить последствия каждого решения, заранее исключить недопустимые варианты и рекомендовать наиболее удачные;

2) ускорение научно-технической революции техники и технологии: жизненный цикл технического изделия сократился настолько, что «опыт» не успе-

вал накапливаться и требовалось применение более развитого математического аппарата в проектировании;

3) развитие ЭВМ: размерность и сложность реальных инженерных задач не позволяло использовать аналитические метода.

Экономика теснейшим образом связана с совокупностями объектов, которые принято называть сложными системами. Они характеризуются многочисленными и разнообразными по типу связями между отдельно существующими элементами системы и наличием у системы функции назначения, которой нет у составляющих ее частей.

Введем следующие определения.

Операцией называется всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Решение – всякий определенный выбор зависящих от нас параметров.

Оптимальным называется решение, по тем или другим признакам предпочтительнее перед другими.

Элементы решения – параметры, совокупность которых образует решение.

Множеством допустимых решений называются заданные условия, которые фиксированы и не могут быть нарушены.

Показатель эффективности – количественная мера, позволяющая сравнивать по эффективности разные решения.

Все решения принимаются всегда на основе информации, которой располагает *лицо принимающее решение* (*ЛПР*).

Каждая задача в своей постановке должна отражать структуру и динамику знаний ЛПР о множестве допустимых решений и о показателе эффективности.

Задача называется статической, если принятие решения происходит в наперед известном и не изменяющемся информационном состоянии.

Задача называется динамической, если информационные состояния в ходе принятия решения сменяют друг.

Информационные состояния ЛПР могут по-разному характеризовать его физическое состояние:

1) если информационное состояние состоит из единственного физического состояния, то задача называется *определенной*;

2) если информационное состояние содержит несколько физических состояний и ЛПР кроме их множества знает еще и вероятности каждого из этих физических состояний, то задача называется *стохастической* (частично неопределенной);

3) если информационное состояние содержит несколько физических состояний, но ЛПР кроме их множества ничего не знает о вероятности каждого из этих физических состояний, то задача называется *неопределенной*.

Успешное применение методов исследования операций в значительной мере зависит от профессиональной подготовки специалиста, который должен иметь четкое представление о специфических особенностях изучаемой системы и уметь корректно поставить задачу.

Искусство постановки задач постигается на примерах успешно реализованных разработок и основывается на четком представлении преимуществ, недостатков и специфики различных методов оптимизации.

В первом приближении можно сформулировать следующую *последовательность действий*, которые составляют содержание процесса постановки задачи исследования операций:

1) *выбор внутрисистемных независимых переменных и установление границы подлежащей оптимизации системы*, т.е. представление системы в виде некоторой изолированной части реального мира. Расширение границ системы повышает размерность и сложность многокомпонентной системы и, тем самым, затрудняет ее анализ;

2) *определение показателя эффективности*, на основе которого можно оценить характеристики системы или ее проекта с тем, чтобы выявить «наилучший» проект или множество «наилучших» условий функционирования системы. Обычно выбираются показатели экономического (издержки, прибыль и

т.д.) или технологического (производительность, энергоемкость, материалоемкость и т.д.) характера. «Наилучшему» варианту всегда соответствует экстремальное значение показателя эффективности функционирования системы;

3) *построение модели*, которая описывает взаимосвязи между переменными задачи и отражает влияние независимых переменных на значение показателя эффективности;

4) *нахождение решения и реализация этого решения*.

Эффективность управления зависит от комплексного применения многих факторов и не в последнюю очередь – от процедуры принимаемых решений и их практического воплощения в жизнь. Для того чтобы управленческое решение было действенным и эффективным, нужно соблюсти определенные методологические основы.

Метод – способ, прием выполнения тех или иных действий.

Все методы принятия управленческих решений можно объединить в три группы

– *Неформальные* (основанные на аналитических способностях и опыте руководителя) – совокупность логических приемов и методов выбора оптимальных решений руководителем путем теоретического (мыслительного) сравнения альтернатив с учетом накопительного опыта, базирующихся на интуиции. Преимущество заключается в том, что решения, как правило, принимаются оперативно. Недостаток заключается в том, что данный метод базируются, как правило, на интуиции, а отсюда – довольно высокая вероятность ошибок.

– *Коллективные* – метод «мозговой атаки», «мозговой штурм» – применяется, как правило, при необходимости принятия экстренного, сложного, многопланового решения, связанного с экстремальной ситуацией. Это требует от руководителей твердого мышления, умения излагать предложение конструктивно, коммуникабельно, компетентно. В ходе «мозговой атаки» предлагаются различные альтернативы, даже такие, которые выходят за рамки обычных приемов и способов реализации подобных ситуаций в обычных условиях.

– *Количественные*: в их основе лежит научно-практический подход, предполагающий выбор оптимальных решений путем обработки больших массивов информации.

В зависимости от типа математических функций, лежащих в основе моделей, различают:

– линейное моделирование (используются линейные зависимости);

– теорию игр (моделирование таких ситуаций, принятия решения в которых должно учитывать несовпадение интересов различных подразделений);

– динамическое программирование (позволяет вводить дополнительные переменные в процессе решения задач);

– вероятностные и статистические модели (реализуются в методах теории массового обслуживания);

– имитационные модели (позволяют экспериментально проверить реализацию решений, изменить исходные предпосылки.

В данном учебно-методическом пособии изложены основы методов и моделей линейного программирования (ЛП).

Издание состоит из введения, шести глав, заданий для самостоятельной работы, заключения, библиографического списка. В первой главе рассматривается общая постановка задач ЛП и приводятся примеры таких моделей. Во второй главе рассматривается графический метод решения задач ЛП. Третья глава посвящена исследованию линейных моделей с помощью симплекс-метода. В четвертой главе изложен метод Гомори решения целочисленных задач линейного программирования. В пятой главе рассматриваются вопросы двойственности в задачах ЛП. В шестой главе изложены модели транспортного типа и методы решения транспортных задач. В конце пособия представлены варианты заданий контрольной работы. Библиографический список содержит перечень литературы по данной дисциплине.

Окончание решения задач в пособии обозначено символом ■.

Данное пособие может быть использовано для организации и проведения лекционных, практических и лабораторных занятий, а также для самостоятельного изучения дисциплин «Теория игр и исследование операций», «Экономико-математические методы и модели» студентами очной формы обучения по направлению подготовки 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика», а также студентами очной и заочной формы обучения направлений подготовки 38.03.01 – «Экономика» в рамках изучения дисциплины «Методы оптимальных решений».

ГЛАВА 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Постановка задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования называется задача минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях.

Будем рассматривать *общую задачу* линейного программирования в форме

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max/\min, \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,k}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \ i = \overline{k+1,m}, \tag{1.3}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Ограничения типа (1.2) называются *ограничениями-равенствами*, ограничения типа (1.3) – *ограничениями-неравенствами*, ограничения типа (1.4) – *прямыми ограничениями*. Если в условии задачи линейного программирования не содержаться ограничения-неравенства, то есть в (1.3) $k = m$, что она называется задачей линейного программирования в *каноническом виде*. Любую задачу линейного программирования можно представить в каноническом виде.

Совокупность чисел $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, удовлетворяющих условиям задачи (1.1)-(1.4) называют *допустимым решением* и *множеством (областью) допустимых значений (решений)*, и обозначается

$$X = \left\{ x \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,k}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{k+1,m},\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \right\}.$$

Вектор, при котором целевая функция $f(x)$ достигает своего минимального или максимального значения на допустимом множестве X, называется *оптимальным*, и обозначается $x^{\max} = \left(x_1^{\max}, x_2^{\max}, ..., x_n^{\max}\right)$ или

$x^{\min} = \left(x_1^{\min}, x_2^{\min}, \ldots, x_n^{\min}\right)$, а соответствующее значение целевой функции на оптимальном векторе называется *оптимальным* (*максимальным* $f^{\max} = f\left(x^{\max}\right)$ или *минимальным* $f^{\min} = f\left(x^{\min}\right)$).

1.2. Примеры моделей линейного программирования

Рассмотрим классический пример – задачу о рационе.

Пример 1.1. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять белки, жиры, углеводы, минеральные соли. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг имеющихся продуктов питания, а также их стоимость и нормы суточной потребности питательных веществ изображены в виде матрицы (табл. 1.1).

Требуется составить дневной рацион продуктов питания, содержащий не менее суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах и обеспечивающий минимальную общую стоимость продуктов.

Таблица 1.1

Стоимость продуктов и нормы суточной потребности питательных веществ

Питательные вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг продуктов, г/кг							Норма в сутки, г
	Мясо	Рыба	Молоко	Масло	Сыр	Крупа	Картофель	
Белки, г	180	190	30	70	260	130	21	118
Жиры, г	20	3	40	865	310	30	2	56
Углеводы, г	0	0	50	6	20	650	200	500
Минеральные соли, г	9	10	7	12	60	20	70	8
Цена 1 кг продукта, руб./кг	1,9	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1	

Решение. Составим математическую модель задачи и введем переменные x_j, $j = 1,\ldots,7$, – вес соответствующего продукта в диете. Ограничениям в задачи связаны с суточной потребностью организма в питательных веществах, показатель эффективности – минимизация затрат на покупку продуктов. Получим следующую математическую модель:

найти минимум целевой функции (функция затрат)

$$f(x) = 1{,}9x_1 + 1{,}0x_2 + 0{,}28x_3 + 3{,}4x_4 + 2{,}9x_5 + 0{,}5x_6 + 0{,}1x_7 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 180x_1 + 190x_2 + 30x_3 + 70x_4 + 260x_5 + 130x_6 + 21x_7 \ge 118, \\ 20x_1 + 3x_2 + 40x_3 + 865x_4 + 310x_5 + 30x_6 + 2x_7 \ge 56, \\ 0x_1 + 0x_2 + 50x_3 + 6x_4 + 20x_5 + 650x_6 + 200x_7 \ge 500, \\ 9x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 60x_5 + 20x_6 + 70x_7 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,7. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Пример 1.2. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна *A* и строительного предприятия *B*. Чтобы уменьшить инвестиционные риски, акций концерна *A* должно быть приобретено не меньше, чем акций строительного предприятия *B*, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед. Дивиденды по акциям *A* составляют 8%, а по акциям *B* – 10% в год. Определить, какую максимальную прибыль может получить инвестор в первый год.

Решение. Построим экономико-математическую модель задачи. Введем обозначения: x_1 и x_2 – количество денежных средств (в тыс. ден. ед.), которые будут вложены в автомобильный концерн и в строительное предприятие соответственно. Критерий оптимальности в задачи – максимум прибыли от вложений.

Получаем следующую задачу: найти максимум целевой функции (функция прибыли)

$$f(x) = 0{,}08x_1 + 0{,}1x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 300, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_2 \le 100, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Пример 1.3. Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели А, В и С использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья на каждого вида на производство 1 т карамели данного вида, а также запасы сырья каждого вида и прибыль от реализации 1 т карамели каждого вида приведены в табл. 1.2.

Требуется составить план производства карамели, обеспечивающий максимум прибыли от ее реализации.

Таблица 1.2

Нормы расхода сырья, запасы сырья и прибыль от реализации

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т карамели, т			Запасы сырья, т
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	0	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции, тыс. руб.	108	112	126	

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим через $x_j, j = 1,2,3$, – количество карамели (в т) каждого вида. Цель задачи – максимизации прибыли от реализации при ограничениях на запасы сырья. Тогда получаем следующую задачу: найти максимум целевой функции (функция прибыли)

$$f(x) = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ 0x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120, \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3. \end{cases}. \blacksquare$$

1.3. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду

Все формы задач линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если существует способ решений одной из указанных задач, то, тем самым, может быть определено оптимальное решение другой задачи.

Очевидно, что задачи максимизации и минимизации связаны между собой. В самом деле, если требуется найти миниммум целевой функции

$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$, можно перейти к нахождению максимума функции $f_1(x)=-f(x)=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$, поскольку $\min f(x)=-\max(-f(x))$.

Далее рассмотрим общую задачу линейного программирования в следующем виде (вообще говоря, несколько отличной от записи (1.1)-(1.4))

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max/\min,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,k},$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=\overline{k+1,l},$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\ i=\overline{l+1,m},$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

При этом ограничения на переменные типа $x_j\ge b_j$ или $x_j\le b_j$, которые также естественно называть прямыми ограничениями, будем считать записанными в ограничениях-неравенствах. При этом коэффициенты b_i будем считать неотрицательными; если это не так, то соответствующее ограничение следует умножить на –1, при этом знак ограничений-неравенств следует менять на противоположный.

Для перехода общей задачи к эквивалентной канонической записи следует выполнить следующие действия.

1. К левой части ограничений-неравенств типа $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i$ следует прибавить неотрицательные переменные x_{n+i}, $i=\overline{1,l-k}$ и поставить знак равенства. Таким образом, получаем новое ограничение-равенство

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\ i=\overline{1,l-k},$$

и записываем соответствующие прямые ограничения для новых переменных

$$x_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{1, l-k}.$$

2. Из левой части ограничений-неравенств типа $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$ следует вычесть неотрицательные переменные x_{n+i}, $i = \overline{1, m-l}$ и поставить знак равенства. Таким образом, получаем новое ограничение-равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+l+i} = b_i,\ i = \overline{1, m-l},$$

и записываем соответствующие прямые ограничения для новых переменных

$$x_{n+l+i} \ge 0,\ i = \overline{1, m-l}.$$

3. Если для некоторой переменной x_q отсутствуют прямые ограничения $x_q \ge 0$, то в целевой функции и ограничениях эту переменную следует заменить на разность двух неотрицательных переменных:

$$x_q = x_q^{(1)} - x_q^{(2)},\ \text{где}\ x_q^{(1)},\ x_q^{(2)} \ge 0.$$

Полученная каноническая задача является эквивалентной исходной общей задаче в том смысле, что значения максимумов (минимумов) в обеих задачах совпадают, а компоненты вектора-решения исходной задачи определяются из компонент вектора-решения канонической задачи: дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{1, m-k}$ отбрасываются, а переменные, для которых нет прямых ограничений $x_q \ge 0$, вычисляются по формуле $x_q = x_q^{(1)} - x_q^{(2)}$.

Пример 1.3. Привести к каноническому виду следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \quad \blacksquare \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \\ x_j \ge 0, j = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

Решение. Умножим второе ограничение на (–1) с тем, чтобы правая часть неравенства стала неотрицательной. Далее к левым частям первого и третьего ограничения прибавим новые переменные, из левой части второго ограничения вычтем новую переменную и заменим все знаки неравенств на знаки равенств. Далее добавим ограничения неотрицательности на новые переменные. Окончательно получаем эквивалентную исходной задачу ЛП в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \\ x_j \ge 0, j = 1,\ldots,7. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Построить математическую модель задачи определения структуры блюд на предприятии общественного питания, обеспечивающую максимальный доход, на основе заданных нормативов затрат продуктов на первые и вторые блюда, представленных в следующей таблице.

Ресурсы	Нормативные затраты ресурсов, кг на 100 блюд					Плановый фонд ресурсов
	1-е блюда	2-е мясные	2-е рыбные	2-е молочные	2-е прочие	
Мясо, т	4,0	8,0	–	–	3,8	40
Рыба, т	2,5	–	10	–	–	25
Овощи, т	3,2	2,0	3,0	–	4,6	27
Мука, крупа, макаронные изделия, т	2,1	2,6	2,3	–	2,8	20
Молоко, л	6,5	–	–	21	–	50000
Доход, руб.	1,3	2,0	1,5	0,3	1,7	

Задание 2. Построить математическую модель по условиям задачи. Совхоз отвел два земельных массива размерами в 5000, 8000 и 9000 га под посевы ржи, пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по массивам указана в таблице.

Культура	Средняя урожайность массива, ц/га		
	1	2	3
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	15	22
Кукуруза	30	35	22

За один 1 ц. ржи совхоз получает 2 руб. прибыли, за 1 ц. пшеницы – 2,5 руб., за 1 ц. кукурузы – 1,4 руб. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану он обязан сдать не менее 1900 т. ржи, 15800 т. пшеницы и 30000 т. кукурузы?

Задание 3. Привести задачи линейного программирования к каноническому виду:

1) $f(x) = 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \to extr,$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 \le 2, \\ 20x_1 - 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 87, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_1, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3) $f(x) = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to extr,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 2, \\ 4x_1 + 15x_2 - 2x_3 \ge 27, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

4) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

ГЛАВА 2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть задача линейного программирования содержит только две переменные, и в ее условии нет ограничений равенств, то есть, имеем задачу вида

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max/\min, \tag{2.1}$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{2.2}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{2.3}$$

Допустимое множество X в задаче (2.1)-(2.3) является пересечением первого квадранта и полуплоскостей, соответствующих неравенствам (2.2). Чтобы построить каждую из полуплоскостей, соответствующую неравенствам (2.2), необходимо построить граничную прямую $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$, выбрать на плоскости любую точку, не лежащую на данной прямой и подставить в соответствующее неравенство $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i$. Если неравенство выполняется, то решением будет все множество точек координатной плоскости, лежащее по ту же сторону, что и выбранная точка, в неравенство не выполняется, то множество точек на противоположной стороне.

При этом множество допустимых значений X может представлять собой ограниченный многоугольник в координатной плоскости (в этом случае задача разрешима, и решений может быть одно или бесконечное количество), пустое множество (иначе – система ограничений несовместна, и задача не имеет решение), неограниченный многоугольник (решение может существовать или не существовать, если функция неограниченна сверху или снизу на допустимом множестве).

Для решения задачи (2.1)-(2.3) рассмотрим семейство линий уровня целевой функции из (2.1)

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = C,\ C = const, \tag{2.4}$$

которые являются параллельными прямыми. Градиент $f'(x) = (c_1, c_2)$ и антиградиент $-f'(x) = (-c_1, -c_2)$ перпендикулярны прямым (2.4) и указывают направление возрастания и убывания целевой функции. Если перемещать параллельно самой себе произвольную прямую (2.4), проходящую через допустимое множество X, в направлении градиента или антиградиента до тех пор, пока эта прямая будет иметь хотя бы одну общую точку с множеством X, то в своем крайнем положении указанная прямая пройдет через точку множества X, в которой целевая функция $f(x)$ принимает максимальное или минимальное на X значение.

Пример 2.1. Вернемся к примеру 1.2 и запишем математическую модель задачи:

$$f(x) = 0{,}08x_1 + 0{,}1x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 300, \\ &x_1 - x_2 \ge 0, \\ &x_2 \le 100, \\ &x_{1,2} \ge 0. \end{aligned}$$

Найдем решение данной задачи графическим методом.

Решение. Изобразим на координатной плоскости допустимое множество X. Проведем граничные прямые $x_1 + x_2 = 300$ (l_1), $x_1 - x_2 = 0$ (l_2), $x_2 = 100$ (l_3) и определим полуплоскости, соответствующие ограничениям-неравенствам. Для этого для каждого ограничения выберем точку (например, начало координат (0, 0)), не лежащую на соответствующей граничной прямой, и проверим выполнение неравенства. Например, для ограничения $x_1 + x_2 \le 300$ подставим координаты (0, 0) и получим, что неравенство выполняется, т.е. это ограничение описывает множество точек, лежащих ниже (левее) относительно прямой $x_1 + x_2 = 300$. В результате получаем следующее множество допустимых решений, изображенное на рис. 2.1.

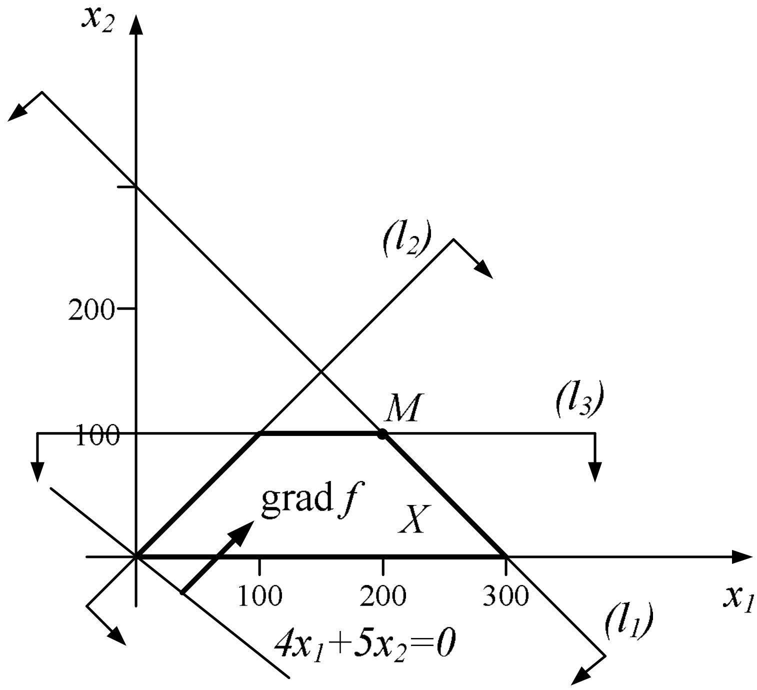


Рис. 2.1. Графическая иллюстрация к примеру 2.1

Построим линию уровня целевой функции $0{,}08x_1 + 0{,}1x_2 = 0$ и вычислим градиент *grad f* = (0,08, 0,1). Для удобства построений, можно умножить целевую функцию на 50,чтобы получить целые значения коэффициентов при переменных. Следует также отметить, что необязательно строить градиент согласно вычисленным значениям, достаточно лишь определить его направление.

Совершая параллельный перенос линии уровня в направлении вектора *grad f*, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая проходит через точку M – точку пересечения граничным прямых (l_1) и (l_3). Таким образом, целевая функция достигает максимум в точке $x^{\max}$ = (200, 100), и максимальное значение равное $f^{\max}$ = 26.

Это означает, что инвестору следует вложить 200 тыс. ден. ед. в автомобильный концерн и 100 тыс. ден. ед. в строительное предприятие, при этом максимальная прибыль в первый год составит 26 тыс. ден. ед. ■

Пример 2.2. Решить следующую задачу линейного программирования графически:

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 7,$$
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_2 \le 3,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Изобразим на координатной плоскости допустимое множество *X*. Проведем граничные прямые $x_1 + 2x_2 = 7$ (l_1), $2x_1 + x_2 = 8$ (l_2), $x_2 = 3$ (l_3) и определим полуплоскости, соответствующие ограничениям-неравенствам. Для этого для каждого ограничения выберем точку (например, начало координат (0, 0)), не лежащую на соответствующей граничной прямой, и проверим выполнение неравенства. Например, для ограничения $x_1 + 2x_2 \le 7$ подставим координаты (0, 0) и получим, что неравенство выполняется, т.е. это ограничение описывает множество точек, лежащих ниже (левее) относительно прямой $x_1 + 2x_2 = 7$. В результате получаем следующее множество допустимых решений (рис. 2.2).

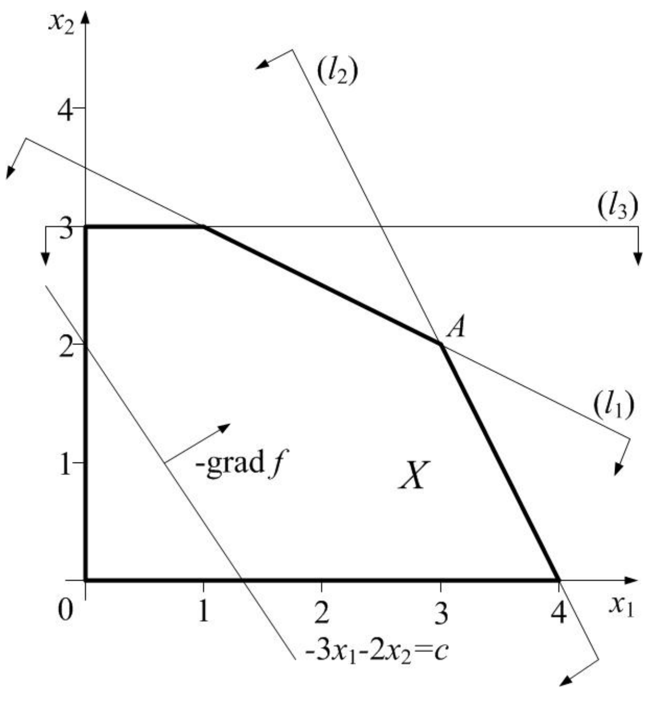


Рис. 2.2. Графическая иллюстрация к примеру 2.2

Построим линию уровня целевой функции $-3x_1 - 2x_2 = c$ и вычислим антиградиент $-grad\ f = (3, 2)$. Совершая параллельный перенос линии уровня в направлении вектора $-grad\ f$, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая проходит через точку $A(3, 2)$. Таким образом, целевая функция принимает минимальное значение $f^{min} = -13$ в точке $x^{min} = (3, 2)$. ■

Графический метод используют также и для решения задачи линейного программирования в каноническом виде с произвольным числом переменных, если число свободных переменных системы ограничений-равенств не превосходит двух. В этом случае, исходя из каких-либо соображений, одна или две переменные выбираются в качестве свободных, остальные переменные (базисные) и целевая функция выражаются через эти свободные переменные. Пользуясь свойством неотрицательности переменных из выражений для базисных переменных, получим систему ограничений неравенств, определяющих допустимое множество. А далее алгоритм решения повторяет метод, описанный выше.

Пример 2.3. Решить графически следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - x_4 \to extr,$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7,$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10,$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы ограничений и приведем ее к треугольному виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисных переменных выберем x_1, x_4 и выразим их через свободные переменные x_2, x_3. Имеем

$$x_1 = x_2 + 4x_3 - 1,\ \ x_4 = -2x_2 - 3x_3 + 4\,.$$

Из условия неотрицательности переменных получаем систему ограничений неравенств

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 4x_3 - 1 \geq 0, \\ x_4 = -2x_2 - 3x_3 + 4 \geq 0, \\ x_{2,3} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + 4x_3 \geq 1, & (l_1) \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 4, & (l_2) \\ x_{2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные и рассчитаем градиент и антиградиент:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 3(x_2 + 4x_3 - 1) + 4x_2 + 7x_3 - (-2x_2 - 3x_3 + 4),$$

$$f(x) = 9x_2 + 22x_3 - 7, \; gradf = (9,22), \; -gradf = (-9,-22).$$

Построим область допустимых значений и определим решение задачи.

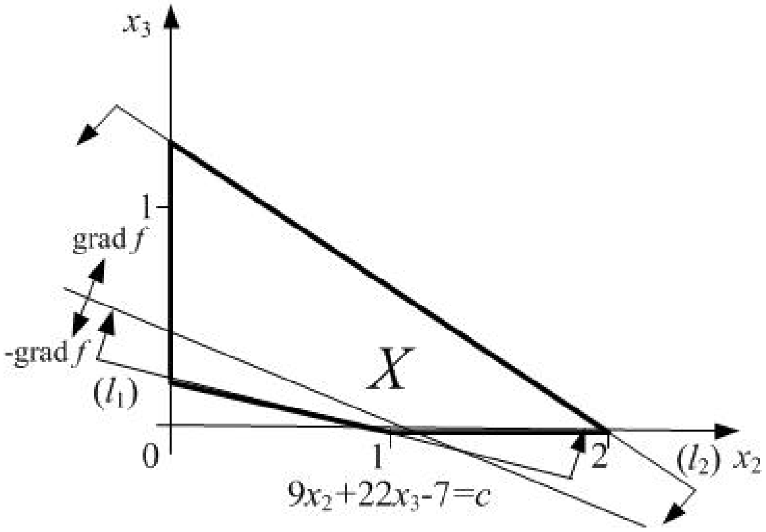


Рис 2.3. Графическая иллюстрация к примеру 2.3

Передвигая линию уровня $9x_2 + 22x_3 - 7 = c$ в направлении градиента, получаем, что максимум достигается в точке $(x_2, x_3) = (0, \frac{4}{3})$, откуда вычисляем $x_1 = x_2 + 4x_3 - 1 = \frac{13}{3}$, $x_4 = -2x_2 - 3x_3 + 4 = 0$, $f(x) = 9x_2 + 22x_3 - 7 = \frac{67}{3}$. Минимум достигается в точке $(x_2, x_3) = (0, \frac{1}{4})$, откуда вычисляем $x_1 = x_2 + 4x_3 - 1 = 0$, $x_4 = -2x_2 - 3x_3 + 4 = \frac{13}{4}$, $f(x) = 9x_2 + 22x_3 - 7 = -\frac{3}{2}$.

Окончательно получаем точки экстремума $x^{\max} = (\frac{13}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0)$, $f^{\max} = \frac{67}{3}$; $x^{\min} = (0, 0, \frac{1}{4}, \frac{13}{4})$, $f^{\min} = -\frac{3}{2}$. ■

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти графическим методом решения следующих задач ЛП:

1) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} 2x_1 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3) $f(x) = -x_1 + 4x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 4x_1 + x_2 \leq 20, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_1 - 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq -1, \\ x_2 \geq -1, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

5) $f(x) = -4x_1 + x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ -6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ x_2 \leq 8, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6) $f(x) = x_1 + 2x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq -3, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

Задание 2. Найти графическим методом решения следующих задач ЛП:

1) $f(x) = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to extr,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2) $f(x) = -x_1 + x_2 \to extr,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3) $f(x) = -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \rightarrow extr,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

4) $f(x) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \rightarrow extr,$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

5) $f(x) = 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4 \rightarrow extr,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 15, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 30, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 15, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 15x_4 \geq -9, \\ x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

6 $f(x) = 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow extr,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \leq 10, \\ x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

ГЛАВА 3. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Алгебраический симплексный метод

Для решения задач линейного программирования предложено немало различных алгоритмов. Наиболее эффективным среди них является алгоритм, известный под названием *симплексный метод,* или метод последовательного улучшения плана.

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцингом в 1949 г., однако еще в 1939 г идеи метода были разработаны российским математиком Л.В. Канторовичем.

Симплексный метод – это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.

Симплекс-метод применяется для решения задач линейного программирования в каноническом виде.

Допустимое множество базисных решений системы линейных уравнений образует в объеме многогранное тело, например тетраэдр, вершины которого – угловые точки. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план (допустимое базисное решение). Однако при большой размерности задачи перебор таких угловых точек является трудоемкой задачей.

Количество перебираемых допустимых базисных решений можно сократить и проводить не беспорядочный перебор, а последовательный по специальному алгоритму, улучшая значение целевой функции.

В тех случаях, когда модель содержит m уравнений, для построения опорных решений используются m переменных, принимающих некоторые положительные значения при нулевых значениях остальных свободных переменных. Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min/\max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Пусть ранг матрицы $A=(a_{ij})$ системы ограничений-равенств задачи линейного программирования в каноническом виде совпадает с рангом расширенной матрицы $(A \mid b)$. Для определенности будем считать, что ранг равен числу m уравнений системы ограничений-равенств, т.е. уравнения системы являются линейно независимыми. Разрешим систему уравнений относительно некоторых базисных переменных, например, $x_j,\ j=\overline{1,m}$, с помощью эквивалентных преобразований приведем ее к виду

$$\begin{aligned}
&x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + a_{1,n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)},\\
&\quad x_2 \qquad\quad + a_{2,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + a_{2,n}^{(0)} x_n = b_2^{(0)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + a_{m,n}^{(0)} x_n = b_m^{(0)}.
\end{aligned}$$

Тогда общее решение системы запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_1 = b_1^{(0)} - a_{1,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - a_{1,n}^{(0)} x_n,\\
&x_2 = b_2^{(0)} - a_{2,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - a_{2,n}^{(0)} x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_m = b_m^{(0)} - a_{m,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - a_{m,n}^{(0)} x_n.
\end{aligned}$$

где свободные переменные $x_{m+1},\ldots,x_n$ могут принимать произвольные значения.

Положив их равными нулю, получим частное решение

$$x_1 = b_1^{(0)},\ x_2 = b_2^{(0)},\ \ldots,\ x_m = b_m^{(0)},\ x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$$

или

$$x^{(0)} = (b_1^{(0)},\ b_2^{(0)},\ \ldots,\ b_m^{(0)},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

которое является *базисным решением* системы. Каждому выбору базисных переменных соответствует свое базисное решение системы.

Если все компоненты базисного решения удовлетворяют условию неотрицательности, т.е. если $b_i^{(0)} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$, то такое решение является *допустимым базисным решением* системы или *угловой точкой* допустимого множества X канонической задачи линейного программирования. Если среди неотрицательных чисел $b_i^{(0)}$ есть равные нулю, то допустимое базисное решение называют *вырожденным* (вырожденной угловой точкой), а соответствующая задача линейного программирования также называется *вырожденной*.

Однако при произвольном выборе базисных переменных, особенно при большом числе уравнений, нельзя заранее гарантировать, что полученное базисное решение будет допустимым. В этом случае используется специальный метод, называемый методом искусственного базиса. Алгоритм метода мы рассмотрим позже.

Вернемся к симплекс-методу решения задачи линейного программирования. Вычислительная процедура может быть представлена в виде следующей последовательности.

Итеративный переход от одного допустимого базисного решения проводится направленно от одной вершины области допустимых решении к другой, заключающегося в *обмене* базисных и свободных переменных: базисная переменная приравнивается к нулю и переходит в свободную, а соответственно свободная переменная переводится на место базисной. Если в столбце свободных членов все элементы положительны, то решение является допустимым. Если в строке целевой функции все элементы неотрицательные, то решение является оптимальным при решении задачи на максимум.

В соответствии с *симплексным методом* на первом шаге находят начальное опорное решение – допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям. Затем последовательно за определенное число итераций направленно осуществляется переход от одного опорного решения к другому вплоть до оптимального. Следует заметить, что на первом шаге в качестве базисных переменных следует выбрать такие m переменные, каждая из которых входит только один раз в одно из m уравнений системы, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит ни одна из этих переменных.

Для использования рассмотренного алгоритма симплексного метода к минимизации линейной функции связи $f(x)$ следует искать максимум функции $f_1(x) = -f(x)$, а затем полученное решение взять с обратным знаком.

Предложенный алгоритм приводит к оптимальному решению для любой модели линейного программирования за конечное число итераций, если система линейных уравнений задачи совместна.

Рассмотрим алгоритм симплексного метода на примере решения *задачи планирования товарооборота предприятия торговли*. Коммерческое предприятие реализует n товарных групп, располагая m ограниченными материально-денежными ресурсами $b_i > 0\,(i = \overline{1,m})$. Известны расходы ресурсов каждого i-вида на реализацию единицы товара по каждой группе, представленной в виде матрицы $A = (a_{ij})$, и прибыль (c_j) получаемая предприятием от реализации единицы товара j-группы. Необходимо определить объем и структуру товарооборота $x_j\,(j = \overline{1,n})$, при которых прибыль коммерческого предприятия была бы максимальной.

Математическая модель задачи имеет вид: определить вектор $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, который удовлетворяет ограничениям вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},$$

и обеспечивает максимальное значение целевой функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max .$$

Алгоритм симплексного метода включает следующие этапы.

1. Составление первого опорного плана. Система ограничений задачи, решаемой симплексным методом, задана в виде системы неравенств смысла, правые части которых положительны. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений путем введения неотрицательных дополнительных балансовых переменных:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.4}$$

где x_{n+i}, $i = \overline{1,m}$, – дополнительные переменные, которые, очевидно, являются базисными переменными для новой системы ограничений-равенств (3.4). Переменные x_j, $j = \overline{1,n}$, являются свободными переменными этой системы.

Решим эту систему относительно дополнительных переменных:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \; i = \overline{1,m},. \tag{3.5}$$

Следует отметить, что в самом общем *случае целевую функцию также следует выражать через свободные переменные*. В нашем случае функция $f(x)$ уже представлена через свободные переменные x_j, $j = \overline{1,n},$. Функцию цели перепишем в виде уравнения

$$f(x) = 0 - \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right) = 0 - \sum_{j=1}^{n} (-c_j)x_j \,. \tag{3.6}$$

Следует заметить, что опорным решением называется базисное неотрицательное решение. Полагая, что основные переменные $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, получим допустимое базисное решение – первый опорный план $x^{(1)} = (0, \; 0, \; ..., \; 0, b_1, \; b_2, \; ..., \; b_m)$, при котором значение целевой функции равно $f(x^{(1)}) = 0$.

Все вычисления в симплекс-методе удобно проводить с использованием симплекс-таблицы. Она состоит из коэффициентов системы ограничений и свободных членов. Последняя строка таблицы называется индексной и заполняется коэффициентами функции цели, взятыми с противоположным знаком, за исключением свободного коэффициента, в самом общем случае его следует вписывать в симплекс-таблицу с тем же знаком. Каждому базисному решению будет соответствовать своя симплекс-таблица. Составим симплекс-таблицу, соответствующую первому допустимому базисному решению (табл. 2.1). В симплекс-таблице приняты сокращения: БП – базисные переменные, СК – свободные коэффициенты. Последний столбец является вспомогательным, он заполняется в процессе решения задачи.

Таблица 3.1

Симплекс-таблица первого опорного плана

БП	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	СК, b_i	δ_i
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1	
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m	
$f(x)$	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0	0	

2. Проверка плана на оптимальность. Если значение базисных переменных неотрицательны, то решение является допустимым. Если все коэффициенты индексной строки симплексной таблицы при решении задачи на максимум неотрицательны, то план является оптимальным. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный, и его необходимо улучшить. При этом возможна следующая ситуация: если среди отрицательных коэффициентов индексной строки есть такой, что все коэффициенты соответствующего ему столбца симплекс-таблицы неположительны, то целевая функция $f(x)$ неограниченна сверху на допустимом множестве X и задача не имеет решений.

При решении задачи линейного программирования на минимум целевой функции признаком оптимальности плана являются *неположительные значения* всех коэффициентов индексной строки симплексной таблицы. При этом если среди положительных коэффициентов индексной строки есть такой, что все коэффициенты соответствующего ему столбца симплекс-таблицы неположительны, то целевая функция $f(x)$ неограниченна снизу на допустимом множестве X и задача не имеет решений.

Далее алгоритм улучшения опорного плана будем рассматривать на примере задачи максимизации. В случае задачи на минимум все действия будут аналогичны.

3. Определение ведущих столбца и строки. Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбираем наибольший по абсолютной величине, что и определяет ведущий (разрешающий) столбец, который показывает, какая переменная на следующей итерации перейдет из свободных в базисные.

Затем элементы столбца свободных членов симплексной таблицы делим на положительные элементы ведущего столбца. Результаты заносим во вспомогательный отдельный столбец δ_i, которые должны быть всегда положительны. Строка симплексной таблицы, соответствующая минимальному значению δ_i, является ведущей. Она и определяет переменную x_{n+i}, которая на следующей итерации выйдет из базиса и станет свободной (обмен).

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении ведущих столбца и строки, называют разрешающим и выделяют, например, кружком.

4. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса. Сначала заменим переменные в базисе, т.е. вместо x_{n+i} в базис войдет переменная x_j соответствующая ведущему столбцу (замена).

Разделим все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы на разрешающий элемент и результаты деления занесем в строку следующей симплексной таблицы, соответствующей введенной в базис переменной x_j. В результате этого на месте разрешающего элемента в следующей симплексной таблице запишем 1, а в остальных клетках у столбца, включая клетку столбца индексной строки, записываем нули.

Остальные новые элементы нового плана находятся по правилу прямоугольника:

$$\text{НЭ} = \frac{\text{СтЭ} \cdot \text{РЭ} - \text{А} \cdot \text{В}}{\text{РЭ}},$$

где СтЭ – элемент старого плана; РЭ – разрешающий элемент; А и В – элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СтЭ и РЭ.

Далее возвращаемся ко второму этапу алгоритма – проверке плана на оптимальность.

Замечание 1. Если в столбце δ_i симплексной таблицы содержатся два или несколько одинаковых наименьших значений, то новый опорный план будет вырожденным (одна или несколько базисных переменных станут равными нулю). Вырожденные планы могут привести к зацикливанию, т.е. к многократному повторению процесса вычислений, не позволяющему получить оптимальный план. В таких случаях для выбора ведущей строки используют *метод Креко*, который заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения δ_i, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

Например, таблица, содержащая три равных значения $\delta_i = 2$, имеет следующий вид (табл. 3.2).

Таблица 3.2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СК, b_i	δ_i
x_4	2	3	6	1	0	0	3	4	4/2=2
x_5	4	8	1	0	1	0	–2	8	8/4=2
x_6	5	12	–1	0	0	1	5	10	10/5=2
$f(x)$	–5	1	–2	0	0	0	2	4	

Допустим, разрешающим столбцом является x_1, тогда разрешающим элементом может быть 2, 4 или 5 этого столбца. Следуя указанному правилу, получим табл. 3.3.

Таблица 3.3

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	1	3/2	3	1/2	0	0	3/2
x_5	1	2	1/4	0	1/4	0	-1/2
x_6	1	12/5	-1/5	0	0	1/5	1

Сравниваем последовательно слева направо полученные частные по столбцам. В первом столбце все частные одинаковы, а во втором столбце наименьшее частное 3/2 в первой строке, следовательно, эта строка и будет разрешающей с разрешающим элементом 2.

Замечание 2. Если в оптимальный план вошла дополнительная переменная x_{n+i}, то при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы *i*-го вида в количестве, полученном в столбце свободных членов симплексной таблицы.

Замечание 3. Если в индексной строке симплексной таблицы оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, не вошедшей в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет множество оптимальных планов. Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 3.1. Вернемся к примеру 1.2 и запишем математическую модель задачи в следующем виде:

$$f(x) = 0{,}08x_1 + 0{,}1x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 300, \\ -x_1 + x_2 \le 0, \\ x_2 \le 100, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Найдем решение этой задачи симплекс-методом.

Решение. Приведем ограничения задачи к каноническому виду:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300,$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0,$$
$$x_2 + x_5 = 100,$$
$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,5}.$$

Очевидно, что дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 являются базисными в полученной системе ограничений-равенств, а исходные переменные задачи x_1, x_2 – свободными. Целевая функция выражена через свободные переменные. Для удобства вычислений умножим целевую функцию на 50: $f_1(x) = 50 \cdot f(x) = 4x_1 + 5x_2$. Очевидно, что решения задачи максимизации функций $f(x)$ и $f_1(x)$ при одних и тех же ограничениях эквивалентны в том смысле, что вектора-решения совпадают, а максимальное значение целевой функции $f(x)$ в 50 раз меньше максимального значения целевой функции $f_1(x)$. Функцию цели запишем в виде $f_1(x) = 0 - (-4x_1 - 5x_2)$.

Построим симплекс-таблицу, соответствующую первому опорному плану $x^{(1)} = (0, 0, 300, 0, 100)$ (табл. 3.4).

Таблица 3.4

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК, b_i	δ_i
x_3	1	1	1	0	0	300	300/1=300
x_4	–1	1	0	1	0	0	0/1=0
x_5	0	1	0	0	1	100	100/1=100
$f_1(x)$	–4	–5	0	0	0	0	

Очевидно, что опорный план, соответствующий таблице 3.4, не является оптимальным, поскольку в строке коэффициентов целевой функции имеются отрицательные. Выберем из них максимальный по модулю – коэффициент (–5), тогда столбец x_2 будет разрешающим. Далее для всех положительных элементов этого столбца составим соотношения δ_i и выберем среди них минимальный. Это элемент 0, стоящий в строке x_4. Следовательно, эта строка будет разрешающей, а элемент 1, стоящий на пересечении столбца x_2 и строки x_4, будет разрешающим элементом.

Построим новую симплекс-таблицу (табл. –.5). Для этого в столбце базисных переменных x_4 заменим на x_2, элементы разрешающей строки поделим на разрешающий элемент, в разрешающем столбце все элементы, кроме разрешающего, заменим на ноль. Остальные элементы пересчитаем по правилу прямоугольника. Например, элемент, стоящий на пересечении столбца x_1 и строки x_3, рассчитывается по формуле:

$$\text{НЭ} = \frac{\text{СтЭ} \cdot \text{РЭ} - \text{А} \cdot \text{В}}{\text{РЭ}} = \frac{1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{1} = 2,$$

где $\text{СтЭ} = 1$ – старый элемент, стоящий на пересечении столбца x_1 и строки x_3, $\text{РЭ} = 1$ – разрешающий элемент, $\text{А} = -1$ – элемент симплекс-таблицы 3.4, стоящий на пересечении столбца x_1 и строки x_4, $\text{В} = 1$ – элемент симплекс-таблицы 3.4, , стоящий на пересечении столбца x_2 и строки x_3

Остальные элементы пересчитываются аналогично. Следует отметить, что столбцы, соответствующие базисным переменным новой симплекс-таблицы, переписываются без изменений.

Таблица 3.5

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК, b_i	δ_i
x_3	2	0	1	–1	0	300	300/2=150
x_2	–1	1	0	1	0	0	
x_5	1	0	0	–1	1	100	100/1=100
$f_1(x)$	–9	0	0	5	0	0	

Очевидно, план не оптимален. Столбец x_1 выбираем разрешающим и составляем соотношения δ_i для положительных элементов разрешающего столбца. Минимальный среди них 100, стоящий в строке x_5; эта строка будет разрешающе, а элемент 1 – разрешающим. Строим новую симплекс-таблицу (табл. 3.6).

Таблица 3.6

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК, b_i	δ_i
x_3	0	0	1	1	–2	100	100/1=100
x_2	0	1	0	0	1	100	
x_1	1	0	0	–1	1	100	
$f_1(x)$	0	0	0	–4	9	900	

Полученный опорный план снова не оптимален. Выполняя аналогичные действия, строим новую симплексную таблицу (табл. 3.7).

Таблица 3.7

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК, b_i	δ_i
x_4	0	0	1	1	–2	100	
x_2	0	1	0	0	1	100	
x_1	1	0	1	0	–1	200	
$f_1(x)$	0	0	4	0	1	1300	

Опорный план, соответствующий последней симплекс-таблице, является оптимальным. Из табл. 3.7 записываем координаты полученного решения:

$$x_1 = 200,\ x_2 = 100,\ x_3 = 0,\ x_4 = 100,\ x_5 = 0,\ f_1^{\max} = 1300.$$

Тогда окончательный ответ задачи имеет вид:

$$x^{\max} = (200{,}100),\ f^{\max} = f_1^{\max} / 50 = 1300 / 50 = 26.$$

Этот ответ совпадает с ответом, полученным при решении этой задачи графическим методом (пример 2.1).■

Пример 3.2. Вернемся к примеру 1.3. Запишем математическую модель задачи:

$$f(x) = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ 0x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120, \\ x_{1,2,3} \ge 0. \end{cases}$$

Найдем решение этой задачи симплекс-методом.

Решение. Приведем ограничения задачи к каноническому виду:

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 + x_4 = 800,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + x_5 = 600,$$
$$0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + x_6 = 120,$$
$$x_{1,\ldots,6} \ge 0.$$

Функцию цели запишем в виде $f(x) = 0 - (-108x_1 - 112x_2 - 126x_2)$. Построим симплекс-таблицу, соответствующую первому опорному плану $x^{(1)} = (0,0,0,8000,6000,1200)$ (табл. 2.8).

Таблица 2.8

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК, b_i	δ_i
x_4	0,8	0,5	0,6	1	0	0	800	800/6=400/3
x_5	0,2	0,4	0,3	0	1	0	600	600/3=200
x_6	0	0,1	0,1	0	0	1	120	120/1=120
$f(x)$	–108	–112	–126	0	0	0	0	

Очевидно, что план $x^{(1)}$ не оптимален. Разрешающим выберем столбец x_3 и составим соотношения δ_i для положительных элементов этого столбца. Минимальным является $\delta_i = 120$, стоящий в строке x_6. Эта строка будет разрешающей, а элемент 0,1, стоящий на пересечении строки x_6 и столбца x_3 – разрешающим. Все последующие вычисления приведены в табл. 3.9-3.10.

Таблица 3.9

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК, b_i	δ_i
x_4	0,8	–0,1	0	1	0	–6	80	80/0,8=100
x_5	0,2	0,1	0	0	1	–3	240	240/0,2=1200
x_3	0	1	1	0	0	10	1200	
$f(x)$	–108	14	0	0	0	1260	151200	

Таблица 3.10

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК, b_i	δ_i
x_1	1	–1/8	0	5/4	0	–15/2	100	
x_5	0	1/8	0	–1/4	1	–3/2	220	
x_3	0	1	1	0	0	10	1200	
$f(x)$	0	1/2	0	135	0	450	162000	

Получаем, что план $x^* = (100, 0, 1200, 0, 220, 0)$, соответствующий последней симплекс-таблице (табл. 2.10), является оптимальным, максимальное значение функции равно $f^* = f(x^*) = 108 \cdot 100 + 126 \cdot 1200 = 162000$.

Таким образом, для получения максимальной прибыли кондитерской фабрике необходимо производить 100 т карамели вида А и 1200 т карамели вида С, карамель второго вида производить не следует. При этом максимальная прибыль от реализации продукции составит 162000 тыс. руб.

Поскольку переменные x_4 и x_6 принимают нулевые значения, то ресурсы первого и второго видов (сахарный песок и фруктовое пюре) используются полностью. Значение $x_5 = 220$ говорит о том, что второй ресурс (патока) используется не полностью, лишними остаются 220 т патоки. Такой же результат можно получить, если подставить координаты оптимального вектора $x^{\max} = (100, 0, 1200)$ в ограничения задачи. ■

Рассмотрим следующую задачу, которая также является задачей о рационе, только несколько проще, чем задача из примера 1.1.

Пример 3.3. При откорме животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества А, не менее 50 единиц вещества В и не менее 12 единиц вещества С. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в табл. 3.11.

Таблица 2.11

Содержание питательных веществ

Питательные вещества	Количество единиц питательного на 1 кг корма		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг корма I вида составляет 18 руб., корма II вида – 24 руб., корма III вида – 20 руб.

Решение. Составим математическую модель задачи. Переменные в задаче x_1, x_2, x_3 количество (в кг) корма, которое следует приобрести. Критерий оптимальности в задаче – минимизация затрат на приобретение корма, ограничения – на содержание питательных веществ в корме животных.

Тогда получаем следующую задачу: найти минимум целевой функции

$$f(x) = 18x_1 + 24x_2 + 20x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Приведем ограничения задачи к каноническому виду. Поскольку ограничения имеют вид «≥», то для получения равенств из левых частей следует вычитать дополнительные положительные переменные. Получаем

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 60,\\
&2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_5 = 50,\\
&x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_6 = 12,\\
&x_{1,\ldots,6} \ge 0.
\end{aligned}
$$

Видно, что в ограничениях задачи нельзя сразу выделить базисные переменные такие, что бы при нулевых значениях свободных переменных их значения были неотрицательны. Каждая из дополнительных переменных x_4, x_5, x_6 входить только в одно ограничение-равенство, однако при нулевых значения переменных x_1, x_2, x_3 получаем базисный вектор $x = (0,0,0,-60,-50,-12)$, который, очевидно, не является допустимым.

Поэтому схема симплекс-метода, рассмотренная выше, к решению данной задачи не применима. В этом случае применяется метод искусственного базиса, который мы рассмотрим в следующем пункте.

3.2. Метод искусственного базиса (М-метод)

Симплексный метод решения задач базируется на введении дополнительных переменных, позволяющих образовать единичную матрицу, в которую не допускаются отрицательные и другие числа, кроме нуля и единицы. Наличие единичной матрицы является необходимым условием при решении задач симплексным методом.

Если же ограничения задачи заданы в виде неравенств вида «$\ge$» или «=»

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \text{и (или)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,$$

то невозможно сразу получить начальное базисное решение, если матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы ограничений, не позволяет образовать единичную матрицу. Причем уравнения отражают жесткие условия ограничений по ресурсам, не допускающие никаких отклонений. Для соблюдения равенств вводятся искусственные переменные y_i, равные нулю. Викторы искусственных переменных образуют необходимую для решения единичную матрицу. Такой базис называется искусственным, а метод решения называется *методом искусственного базиса*. Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

За добавление таких искусственных переменных в целевую функцию вводится так называемый штраф в виде суммы таких искусственных переменных, умноженной на некоторый параметр $M \to \infty$. При этом, в случае задачи на максимум это выражение вычитается из целевой функции, в случае задачи на максимум – прибавляется к выражению функции цели.

Далее из соответствующих ограничений следует выразить искусственные переменные и подставить в целевую функцию; после таких преобразований функция цели будет зависеть только от свободных переменных, причем коэффициенты будут зависеть от параметра *M*. Затем следует применять алгоритм симплекс-метода, проводя вычисления с зависящими от *M* коэффициентами. При вычислениях следует исключать искусственные переменные из базиса. После того, как искусственная переменная была исключена из базиса, соответствующий ей столбец в симплекс-таблице можно удалить.

Следует также учесть, что если в системе ограничений-равенств некоторые из переменных являются базисными, то для упрощения расчетов к этому ограничению искусственную переменную можно не добавлять.

Решение задачи из примера 3.3. Рассмотрим задачу с каноническими ограничениями

$$f(x) = 18x_1 + 24x_2 + 20x_3 \to \min$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 60,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_5 = 50,$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_6 = 12,$$
$$x_{1,\dots,6} \ge 0.$$

Поскольку ни одна из переменных не является базисной, то к левым частям каждого ограничения прибавим искусственные переменные:

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + y_1 = 60,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_5 + y_2 = 50,$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_6 + y_3 = 12,$$
$$x_{1,\ldots,6} \ge 0,\ y_{1,2,3} \ge 0.$$

Поскольку исходная задача на минимум, то новая функция цели (с учетом штрафа) имеет вид:

$$f(x) = 18x_1 + 24x_2 + 20x_3 + M(y_1 + y_2 + y_3).$$

Выразим из новых ограничений искусственные переменные и подставим в выражение целевой функции. Получим

$$f(x) = 18x_1 + 24x_2 + 20x_3 + M(122 - 4x_1 - 11x_2 - 9x_3 + x_4 + x_5 + x_6) =$$
$$= 122M + (18 - 4M)x_1 + (24 - 11M)x_2 + (20 - 9M)x_3 + Mx_4 + Mx_5 + Mx_6.$$

Получим начальный опорный план, положив равными нулю свободные переменные $x_{1,\ldots,6}$. Реализуем алгоритм симплекс-метода, начиная с точки $x = (0,0,0,0,0,0,60,50,12)$ и построим первую симплекс-таблицу (табл. 3.12). Напомним, что коэффициенты целевой функции в симплекс-таблицу следует вписывать, как и ранее, с противоположным знаком, однако критерий оптимальности в случае задачи на минимум – неположительность элементов индексной строки.

Таблица 3.12

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	СК, b_i	δ_i
y_1	1	3	4	–1	0	0	1	0	0	60	20
y_2	2	4	2	0	–1	0	0	1	0	50	25/2
y_3	1	4	3	0	0	–1	0	0	1	12	3
$f(x)$	4M–18	11M–24	9M–20	–M	–M	–M	0	0	0	122M	

Поскольку $M \to \infty$, то критерий оптимальности не выполняется. Разрешающим выберем столбец x_2 с наибольшим положительным коэффициентом при *M*. Разрешающая строка y_3 с наименьшим δ_i. Выполним расчеты и получим табл. 3.13. Следует отметить, что в новой симплекс-таблице столбец y_3 удален, поскольку переменная y_3 выведена из состава базисных переменных.

Таблица 3.13

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	СК, b_i	δ_i
y_1	1/4	0	7/4	–1	0	3/4	1	0	51	68
y_2	1	0	–1	0	–1	1	0	1	38	38
x_2	1/4	1	3/4	0	0	–1/4	0	0	3	
$f(x)$	5/4M–12	0	3/4M–2	–M	–M	7/4M–6	0	0	89M+72	

В табл. 3.13 разрешающим выберем столбец x_6, разрешающей – строку y_2. Строим новую симплекс-таблицу (табл. 3.14), в которой отсутствует столбец y_2. Остальные вычисления проведем аналогично.

Таблица 3.14

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	СК, b_i	δ_i
y_1	–1/2	0	5/2	–1	3/4	0	1	45/2	9
x_6	1	0	–1	0	–1	1	0	38	
x_2	1/2	1	1/2	0	–1/4	0	0	25/2	25
$f(x)$	–1/2M–6	0	5/2M-14	–M	3/4M-6	0	0	45/2M +300	

Таблица 3.15

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК, b_i	δ_i
x_3	–1/5	0	1	–2/5	3/10	0	9	
x_6	4/5	0	0	–2/5	7/10	1	47	
x_2	3/5	1	0	1/5	–2/5	0	8	
$f(x)$	–38/5	0	0	–16/5	–18/5	0	372	

В последней симплекс-таблице (табл. 3.15) получили, что, во-первых, все искусственные переменные выведены из состава базисных переменных, во-вторых, все коэффициенты индексной строки неположительны. Следовательно, точка $x = (0, 8, 9, 0, 0, 47)$ является оптимальной для задачи.

Тем самым, для обеспечения животного всеми питательными веществами следует закупать (на одного животного) 8 кг корма второго вида и 9 кг корма третьего вида, корм первого вида закупать не стоит. При этом минимальные затраты составят $f^{\min} = f(x^{\min}) = 24 \cdot 8 + 20 \cdot 9 = 372$ руб.

Значение $x_6 = 47$ говорит о том, что указанном способе закупки корма животное будет получать на 47 единиц вещества С больше. ■

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.4. Найти максимальное и минимальное значение функции $f(x) = 2x_1 + 5x_2$ при следующих смешанных ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 \ge 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Перепишем ограничения задачи в каноническом виде, для чего введем дополнительные переменные x_3, x_4: для второго и третьего ограничений соответственно:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 = 3, \\ &4x_1 + 7x_2 - x_3 = 8, \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ &x_{1,\ldots,4} \ge 0. \end{aligned}$$

Видно, что только переменная x_4 является базисной (в третьем ограничении). Поэтому для первого и второго ограничений введем искусственные переменные; получим

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ &4x_1 + 7x_2 - x_3 + y_2 = 8, \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ &x_{1,\ldots,4} \ge 0,\ y_{1,2} \ge 0. \end{aligned}$$

Запишем целевую функцию с учетом штрафа и выразим ее через свободные переменные: для задачи на максимум

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 - M(y_1 + y_2) = 2x_1 + 5x_2 - M(11 - 6x_1 - 8x_2 + x_3) =$$
$$= -11M + (2 + 6M)x_1 + (5 + 8M)x_2 - Mx_3;$$

для задачи на минимум

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 + M(y_1 + y_2) = 2x_1 + 5x_2 + M(11 - 6x_1 - 8x_2 + x_3) =$$
$$= 11M + (2 - 6M)x_1 + (5 - 8M)x_2 + Mx_3;$$

Найдем решение задачи максимизации симплекс-методом (табл. 3.16-3.18).

Таблица 3.16

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	СК, b_i	δ_i
y_1	2	1	0	0	1	0	3	3
y_2	4	7	–1	0	0	1	8	8/7
x_4	1	2	0	1	0	0	6	3
$f(x)$	–2–6M	–5–8M	M	0	0	0	–11M	

Таблица 3.17

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	СК, b_i	δ_i
y_1	10/7	0	1/7	0	1	13/7	13/10
x_2	4/7	1	–1/7	0	0	8/7	2
x_4	–1/7	0	2/7	1	0	26/7	
$f(x)$	–10/7M+ 6/7	0	–1/7M– 5/7	0	0	–13/7M +40/7	

Таблица 3.18

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	СК, b_i	δ_i
x_1	1	0	1/10	0	13/10	13
x_2	0	1	–1/5	0	2/5	
x_4	0	0	3/10	1	39/10	13
$f(x)$	0	0	–4/5	0	23/5	

В последней симплекс-таблице все искусственные переменные выведены из базиса, однако, план не является оптимальным, поэтому делаем еще один шаг для улучшения плана. При выборе разрешающего элемента в столбце x_3 получили, что обе строки – x_1 и x_4 – могут быть разрешающими. Согласно замечанию 1 предыдущего пункта строим вспомогательную табл. 3.19

Таблица 3.19

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	СК, b_i
x_1	10	0	1	0	13
x_4	0	0	1	10/3	13

При чтении таблицы слева направо в строке x_4 раньше встречается наименьшее частное. Поэтому строка x_4 будет разрешающей. Проведем вычисления (табл. 3.20).

Таблица 3.20

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	СК, b_i	δ_i
x_1	1	0	0	–1/3	0	
x_2	0	1	0	2/3	3	
x_3	0	0	1	10/3	13	
$f(x)$	0	0	0	8/3	15	

Очевидно, что план, соответствующий последней симплекс-таблице, является оптимальным. Нетрудно проверить, что, если в табл. 3.18 в качестве разрешающего выбрать элемент, стоящий в строке x_1, то решение получится такое же.

Окончательно получаем ответ: $x^{\max} = (0,3)$, $f^{\max} = f(x^{\max}) = 15$.

Найдем симплекс-методом решение задачи минимизации (табл. 3.21-3.23).

Таблица 3.21

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	СК, b_i	δ_i
y_1	2	1	0	0	1	0	3	3
y_2	4	7	–1	0	0	1	8	8/7
x_4	1	2	0	1	0	0	6	3
$f(x)$	–2+6M	–5+8M	–M	0	0	0	11M	

Таблица 3.22

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	СК, b_i	δ_i
y_1	10/7	0	1/7	0	1	13/7	13/10
x_2	4/7	1	–1/7	0	0	8/7	2
x_4	–1/7	0	2/7	1	0	26/7	
$f(x)$	10/7M+6/7	0	1/7M–5/7	0	0	13/7M+40/7	

Таблица 3.23

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	СК, b_i	δ_i
x_1	1	0	1/10	0	13/10	
x_2	0	1	–1/5	0	2/5	
x_4	0	0	3/10	1	39/10	
$f(x)$	0	0	–4/5	0	23/5	

Поскольку критерий оптимальности в задаче минимизации – неположительность коэффициентов индексной строки, то план, соответствующий последней симплекс-таблице, является оптимальным.

Получаем ответ: $x^{\min} = (13/10, 2/5)$, $f^{\min} = f(x^{\min}) = 23/5$. ■

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти решения следующих задач ЛП с использованием симплекс-метода:

1) $f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 6x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 1, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2) $f(x) = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 10, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3) $f(x) = -2x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \ge 2, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

4) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \le 5, \\ x_2 + x_5 \le 3, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

5) $f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_2 + x_5 = 3, \\ -x_3 + x_6 = 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

6) $f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

ГЛАВА 4. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. Задачи целочисленного линейного программирования. Графический метод решения

Во многих случаях на допустимое множество задачи линейного программирования накладывается дополнительное ограничение целочисленности переменных x_j. Если этому требованию должны удовлетворять все переменные, то получаем *полностью целочисленную задачу линейного программирования*, которая в каноническом виде записывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

при ограничениях $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m},\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\ x_j \in \mathrm{Z},\ j = \overline{1,n}$.

Полностью целочисленную задачу с двумя переменными можно решить *графически*, учитывая, что допустимое множество $\widetilde{X}$ этой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих допустимому множеству X задачи линейного программирования, описываемого соотношениями (1.2), (1.4).

Пример 4.1. Решить полностью целочисленную задачу графически

$$f(x) = -x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 2, \\ x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых значений, соответствующую ограничениям-неравенствам, без требования целочисленности координат. В построенной области отметим точки с целочисленными координатами. Это и есть область допустимых значений задачи. Далее, следуя алгоритму решения задачи графическим методом, построим линию уровня целевой функции $-x_1 - x_2 = c$ и антиградиент $-grad\ f = (1,1)$.

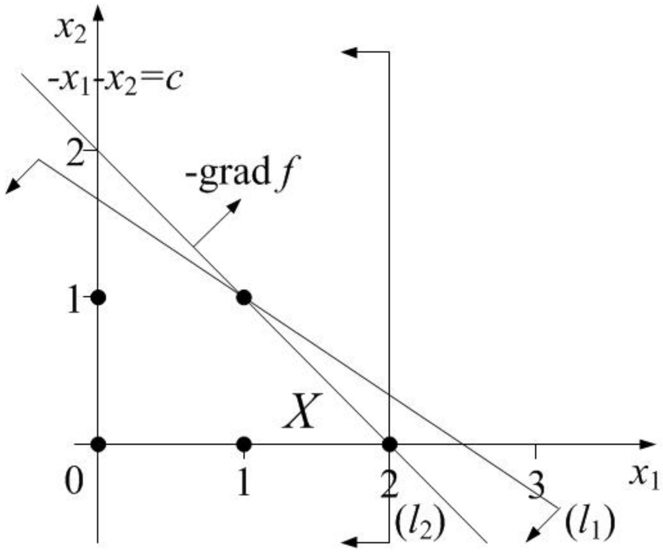


Рис. 4.1. Графическая иллюстрация к примеру 4.1

Как видно из рис. 4.1, своего минимального значения $f^{\min} = -2$ функция достигает в двух точках $x^{\min} = (2,0)$ и $x^{\min} = (1,1)$. ■

4.2. Метод отсечений Гомори

Для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с произвольным числом переменных используется *метод Гомори*. Он состоит в последовательном отсечении от допустимого множества X нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целочисленными координатами. Эти отсечения производятся введением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j.

Запишем алгоритм метода Гомори, использующий симплекс-метод.

1. С помощью симплекс-метода находится решение x^* задачи линейного программирования без учета требования целочисленности. Если для точки x^* требование целочисленности выполняется, то задача решена. В противном слу-

чае среди чисел b_i последнего столбца симплекс-таблицы, определяющей решение x^*, есть такие, что $\{b_i\} > 0$, где $\{\cdot\} \in [0,\ 1)$ – дробная часть числа.

2. Среди нецелых элементов b_i выбираем произвольный элемент b_r (например, с наибольшей дробной частью). По r-й строке симплекс-таблицы составляется дополнительное ограничение вида $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \{a_{rj}\} x_j \geq \{b_r\}$ (здесь, как и ранее, для определенности считаем, что свободными переменными являются переменные x_j, $j = \overline{m+1, n}$). С помощью вспомогательной переменной x_{n+1} представляем это ограничение в виде $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \{a_{rj}\} x_j - x_{n+1} = \{b_r\}$ и вводим его дополнительной строкой в симплекс-таблицу (таблица 4.1).

3. В качестве разрешающей строки выбирается новая строка. Номер l разрешающего столбца находится из условия:

$$\Delta_l = \frac{c_l}{\{a_{rl}\}} = \min_{j:\{a_{lj}\}>0} \{\Delta_j\} = \min_{j:\{a_{lj}\}>0} \left\{ \frac{c_j}{\{a_{lj}\}} \right\}.$$

Таблица 4.1

Расчетная симплекс-таблица метода Гомори

БП	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	СК, b_i
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	0	b_1
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	b_m
	$\{a_{r1}\}$	$\{a_{r2}\}$	…	$\{a_{rn}\}$	–1	$\{b_r\}$
$f(x)$	c_1	c_2	…	c_n	0	$-c$
Δ_j						

Совершается преобразование симплекс-таблицы с разрешающим элементом $\{a_{rl}\}$.

Отметим, что выбор разрешающего элемента гарантирует неотрицательность коэффициентов c_j новой симплекс-таблицы, и может оказаться, что какой-то из свободных коэффициентов (например b_q) отрицателен; тогда преобразования продолжаются. В качестве разрешающей строки выбирается строка, соответствующая свободному коэффициенту b_q. Номер разрешающего столбца находится из условия

$$\Delta_l = \frac{c_l}{\left|a_{ql}\right|} = \min_{j:a_{qj}<0} \left\{\Delta_j\right\} = \min_{i:a_{qj}<0} \left\{\frac{c_l}{\left|a_{qj}\right|}\right\}.$$

Преобразования продолжаются до тех пор, пока все из свободных коэффициентов b_j не станут неотрицательными.

Если же все коэффициенты b_i симплекс-таблицы неотрицательны, то допустимое базисное решение найдено и это решение является оптимальным.

В случае решения задачи на минимум, выбор разрешающего столбца следует выполнять исходя из условия

$$\Delta_l = \frac{-c_l}{\left|a_{ql}\right|} = \min_{j:a_{qj}<0} \left\{\Delta_j\right\} = \min_{i:a_{qj}<0} \left\{\frac{-c_l}{\left|a_{qj}\right|}\right\}$$

4. Если найденное новое оптимальное решение задачи линейного программирования удовлетворяет условию оптимальности, то вычисления завершаются, если нет, то продолжаются переходом к пункту 2 описанного алгоритма.

Описанный алгоритм позволяет найти решение целочисленной задачи линейного программирования или установить отсутствие решений (а это возможно, если нельзя выбрать разрешающий элемент в пункте 3 алгоритма) за конечное число шагов.

Отметим, что переход к каноническому виду в полностью целочисленной задаче линейного программирования, содержащей ограничения-неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$) не приводит, вообще говоря, к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$ ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+l+i} = b_i$) вспомогательные переменные не подчинены требованию целочисленности.

Однако если все коэффициенты a_{ij}, b_i в ограничениях являются целыми числами, то условие целочисленности можно распространить и на вспомогательные переменные. Полностью целочисленную задачу в каноническом виде можно получить также, если коэффициенты a_{ij}, b_i – рациональные числа. Для этого ограничения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$) следует умножить на общее кратное знаменателей (т.е. перейти к целым коэффициентам) и после этого ввести дополнительные переменные.

Пример 4.2. Решить полностью целочисленную задачу линейного программирования методом Гомори.

$$f(x) = -x_1 + x_4 \to extr,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решение. Применим симплекс-метод для решения задачи. Очевидно, что переменные x_5, x_2 и x_3 можно принять за базисные переменные. Целевая функция выражена через свободные переменные. Тогда начальной угловой точкой будет точка $x^{(0)}$=(0, 2, 3, 0, 1). Решим задачу минимизации. Составим симплекс-таблицу (табл. 4.2).

Таблица 4.2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_5	–2	0	0	1	1	1	
x_2	1	1	0	–2	0	2	2/1=2
x_3	1	0	1	3	0	3	3/1=3
f	1	0	0	–1	0	0	

После выбора разрешающего элемента, пересчитываем коэффициенты симплекс-таблицы (табл. 4.3-4.4).

Таблица 4.3

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_5	0	2	0	–3	1	5
x_1	1	1	0	–2	0	2
x_3	0	–1	1	5	0	1
f	0	–1	0	1	0	–2

Таблица 4.4

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_5	0	7/5	3/5	0	1	28/5
x_1	1	3/5	2/5	0	0	12/5
x_4	0	–1/5	1/5	1	0	1/5
f	0	–4/5	–1/5	0	0	–11/5

Решение, соответствующее последней симплекс-таблице, оптимальное, но нецелочисленное. Вычислим дробные части от нецелочисленных координат полученного решения и выберем из них максимальное значение:

$$\max\{\{28/5\},\{12/5\},\{1/5\}\} = \max\{3/5, 2/5, 1/5\} = 3/5.$$

Составим дополнительное ограничение по первой строке:

$$\{7/5\}x_2 + \{3/5\}x_3 \geq \{28/5\},$$

$$2/5x_2 + 3/5x_3 \geq 3/5,$$

приведем его к каноническому виду, вычтя из левой части новую переменную x_6, и добавим новой строкой в симплекс-таблицу (табл. 4.5).

Разрешающей является новая строка. Разрешающий элемент выбирается как минимальный из соотношений коэффициентов целевой функции к положительным коэффициентам разрешающей строки. Таким образом, элемент 3/5 является разрешающий. Рассчитываем элементы новой симплекс-таблицы (табл. 4.6).

Таблица 4.5

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_5	0	7/5	3/5	0	1	0	28/5
x_1	1	3/5	2/5	0	0	0	12/5
x_4	0	–1/5	1/5	1	0	0	1/5
	0	2/5	3/5	0	0	–1	3/5
f	0	–4/5	–1/5	0	0	0	–11/5
Δ_j		$\frac{4/5}{2/5}=2$	$\frac{1/5}{3/5}=1/3$				

Таблица 4.6

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК
x_5	0	1	0	0	1	1	5
x_1	1	1/3	0	0	0	2/3	2
x_4	0	–1/3	0	1	0	1/3	0
x_3	0	2/3	1	0	0	–5/3	1
f	0	–2/3	0	0	0	–1/3	–2

Полученное решение является оптимальным и целочисленным: $x^{\min}=(2,0,1,0,5)$, $f^{\min}=-2$.

Решим задачу максимизации. Составим расчетные симплекс-таблицы (табл. 4.7-4.9).

Таблица 4.7

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК	δ_i
x_5	–2	0	0	1	1	1	1/1=1
x_2	1	1	0	–2	0	2	
x_3	1	0	1	3	0	3	3/3=1
f	1	0	0	–1	0	0	

Таблица 4.8

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_4	–2	0	0	1	1	1
x_2	–3	1	0	0	2	4
x_3	7	0	1	0	–3	0
f	–1	0	0	0	1	1

Таблица 4.9

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СК
x_4	0	0	2/7	1	1/7	1
x_2	0	1	3/7	0	5/7	4
x_1	1	0	1/7	0	–3/7	0
f	0	0	1/7	0	4/7	1

Получили оптимальное решение задачи максимизации. Оно целочисленное, поэтому записываем ответ $x^{\max} = (0,4,0,1,0)$, $f^{\max} = 1$. ■

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Решить полностью целочисленные задачи ЛП графическим методом:

1) $f(x) = -x_1 - x_2 \to extr,$
$2x_1 + 3x_2 \le 36,$
$x_1 \le 13,$
$3x_1 + x_2 \ge -6,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}.$

2) $f(x) = -9x_1 - 11x_2 \to extr,$
$4x_1 + 3x_2 \le 10,$
$x_1 \le 5,$
$x_1 + 2x_2 \le 8,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}.$

3) $f(x) = x_2 - x_3 \to extr,$
$3x_2 + x_3 + x_4 = 3,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

4) $f(x) = -x_2 \to extr,$
$3x_1 + x_2 + x_3 = 12,$
$-8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

Задание 2. Решить полностью целочисленную задачу ЛП методом Гомори:

1) $f(x) = -x_1 - x_2 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 5,$
$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$

2) $f(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min,$
$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$
$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$
$3x_2 + x_4 + x_5 = 4,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,5}.$

2) $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \max,$
$4x_1 + x_2 \leq 44,$
$x_1 \leq 22,$
$x_2 \leq 18,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}.$

3) $f(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 \to extr,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16,$
$x_1 + x_2 \leq 7,$
$3x_1 + 2x_3 \geq 18,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}.$

4) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$
$1/3x_1 + 1/3x_2 + 2/3x_3 \geq 1,$
$2x_1 + x_2 \geq 1,$
$1/2x_2 + 3/4x_3 \geq 1,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}.$

5) $f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \max,$
$x_1 + 2/3x_2 + 1/2x_3 \leq 25/6,$
$x_1 + 3/5x_2 + 2/5x_3 \leq 3,$
$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}.$

ГЛАВА 5. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Двойственность в линейном программировании – принцип, заключающийся в том, что для каждой задачи линейного программирования можно сформулировать двойственную задачу.

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу линейного программирования, называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Связь исходной и двойственной задач заключается главным образом в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Теория математического линейного программирования позволяет не только получать оптимальные планы с помощью эффективных вычислительных процедур, но и делать ряд экономически содержательных выводов, основанных на свойствах задачи, которая является двойственной по отношению к исходной задаче ЛП.

В литературе по линейному программированию в большинстве случаев рассматриваются формулировки двойственной задачи, соответствующие различным формам прямой задачи, которые, в свою очередь, определяются типом ограничений, знаками переменных и направлением оптимизации (максимизация или минимизация).

Мы рассмотрим обобщенную формулировку двойственной задачи линейного программирования, которая применима к любой форме представления прямой задачи. В основу такой формулировки положен тот факт, что использование симплекс-метода требует приведения любой задачи линейного программирования к стандартной форме. Так как все методы вычислений, основанные на соотношениях двойственности, предполагают непосредственное использование симплекс-таблиц, формулировка двойственной задачи в соответствии со стандартной формой прямой задачи представляется достаточно логичной. Следует, однако, помнить, что приводимая ниже формулировка двойственной задачи является обобщенной в том смысле, что она применима ко всем формам прямой задачи.

5.1. Формулировка двойственной задачи

Рассмотрим задачу планирования товарооборота предприятия торговли. Напомним, что математическая модель данной задачи имеет вид: определить вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который доставляет максимум целевой функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{5.1}$$

и удовлетворяет ограничениям вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}. \tag{5.3}$$

Построим *функцию Лагранжа* имеет вид для задачи (5.1)-(5.3)

$$L(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right),$$

которая определена для всех $x \in R_n{}^+$ и всех $y \in R_m{}^+$.

Переменная $x \in R_n{}^+$ называется *прямой*, переменная $y \in R_m{}^+$ – *двойственной*.

Точка $(x^*, y^*) \in R_n{}^+ \times R_m{}^+$ называется *седловой точкой функции Лагранжа*, если выполнено двойное неравенство

$$L(x, y^*) \le L(x^*, y^*) \le L(x^*, y)\ \ \forall x \in R_n{}^+,\ \ \forall y \in R_m{}^+. \tag{5.4}$$

Неравенство (5.4) означает, что при фиксированном $y^* \in R_m{}^+$ функция $L(x, y^*)$ достигает максимума в точке $x^* \in R_n{}^+$, а при фиксированном $x^* \in R_n{}^+$ функция $L(x^*, y)$ достигает минимума в точке $y^* \in R_m{}^+$. Известно, кроме того, что вектор $x^* \in R_n{}^+$ является решением задачи (5.1)-(5.3).

Преобразуем функцию Лагранжа следующим образом

$$L(x,y)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}y_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}y_ib_i-\sum_{i=1}^{m}y_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{j=1}^{n}c_jx_j-\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{j=1}^{n}x_j\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\right).$$

Далее, очевидно, что y^* является решением задачи $\min\limits_{y\in R_m^+}L\left(x^*,y\right)$, а, следовательно, и решением задачи $\max\limits_{y\in R_m^+}\left(-L\left(x^*,y\right)\right)$. Тогда рассмотрим

$$-L(x,y)=-\sum_{i=1}^{m}b_iy_i-\sum_{j=1}^{n}x_j\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(-b_i\right)y_i+\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i-c_j\right).$$

Теперь, рассматривая переменную y как прямую переменную, а переменную x – как двойственную, построим задачу линейного программирования, для которой данная функция $\left(-L(x,y)\right)$ является функцией Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(-b_i\right)y_i\to\max,$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i-c_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n},$$

$$y_i\ge 0,\ \ i=\overline{1,m}.$$

Или, иначе, найти минимум целевой функции

$$g(y)=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\to\min, \tag{5.5}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j,\ \ j=\overline{1,n}, \tag{5.6}$$

$$y_i\ge 0,\ \ i=\overline{1,m}. \tag{5.7}$$

Задача (5.5)-(5.7) называется *двойственной задачей* к задаче (5.1)-(5.3), а задачи (5.1)-(5.3) и (5.5)-(5.7) – *парой взаимодвойственных задач*. Нетрудно убедится в том, что задача (5.1)-(5.3) является двойственной к (5.5)-(5.7). Очевидно, что y^* является решением двойственной задачи.

Нетрудно убедится в том, что если в исходной задаче линейного программирования присутствует ограничение равенство, то ему в двойственной задаче соответствует переменная неограниченная по знаку, и, наоборот, если в исходной задаче линейного программирования присутствует переменная неограниченная по знаку, то в двойственной задаче ей соответствует ограничение-равенство.

Если ввести обозначения

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},,$$

то в матричном виде пару двойственных задач можно записать следующим образом:

Прямая задача		**Двойственная задача**	
$f(x)=c^T x \to \max$		$g(y)=b^T x \to \min$	
$Ax \le b$	(I)	$A^T y \ge c$	(II)
$x \ge 0$		$y \ge 0$	

Соответствующие им матрицы задач можно представить в виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_n & f_{\max} \end{array}\right) \ (\mathrm{I}) \quad \text{и} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & c_n \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_m & g_{\min} \end{array}\right) \ (\mathrm{II})$$

В целом двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам.

1. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в прямой задаче.

2. Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений прямой задачи путем транспонирования.

3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.

4. Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты функции цели прямой задачи.

5. Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи задается на максимум, и наоборот.

6. Коэффициентами функции цели двойственной задачи служат свободные члены системы ограничений прямой задачи.

7. Если переменная прямой задачи $x_j \geq 0$, то *j*-е условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством, если x_j – любое число, то *j*-е условие двойственной задачи представляет собой уравнение.

8. Если *i*-е соотношение прямой задачи является неравенством, то соответствующая оценка *i*-го ресурса – переменная $y_i \geq 0$, если *i*-е соотношение представляет собой уравнение, то переменная двойственной задачи y_i — любое число.

Решение прямой задачи дает оптимальные объемы в структуре товарооборота торгового предприятия, а решение двойственной – оптимальную систему оценок ресурсов, используемых для реализации товаров.

С экономической точки зрения двойственная задача (5.5)-(5.7) означает следующее: найти такой набор цен $y = (y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m)$ на ресурсы, при котором общие затраты на ресурсы $g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ будут минимальны при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли (выручки) от реализации этой продукции: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n}$.

Цены $y_1, y_2, ..., y_m$ ресурсов в экономической литературе получили различные названия: *учётные*, *неявные*, *теневые*. Смысл этих названий состоит в том, что это условные, «ненастоящие» цены. В отличие от «внешних» цен $c_1, c_2, ..., c_n$ на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов $y_1, y_2, ..., y_m$ являются внутренними, ибо задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи.

Установим соответствие между переменными прямой и двойственной задач. Приведем обе задачи к каноническому виду. Задача (5.1)-(5.3) преобразуется к виду:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, n+m}.$$

Задача (5.5)-(5.7) – к виду:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \ j = \overline{1, n},$$

$$y_i \ge 0, \ i = \overline{1, m+n}.$$

Связь между переменными задач показана в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Переменные прямой задачи	основные				дополнительные			
	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$
Переменные двойственной задачи	y_{m+1}	y_{m+2}	…	y_{m+n}	y_1	y_2	…	y_m
	дополнительные				основные			

5.2. Теоремы двойственности

Каждая из пары двойственных задач может быть решена самостоятельно. Однако при определении оптимального плана прямой задачи находится их решение двойственно.

Для пары двойственных задач справедливы следующие теоремы двойственности.

Первая теорема двойственности. Взаимодвойственные задачи разрешимы или не разрешимы одновременны. Пусть задачи разрешимы. Тогда имеет место равенство

$$f^{\min} = g^{\max}.$$

Для задачи о планировании производства это означает, что максимально возможный доход от продажи товаров (или производства продукции), который может быть получен при имеющихся запасах ресурсов, равен оценке этих ресурсов.

Согласно сопряженным парам (табл. 3.1) из решения прямой задачи можно получить решение двойственной, не решая ее, и наоборот, из решения двойственной задачи – решение прямой.

Вторая теорема двойственности. Пусть взаимодвойственные задачи разрешимы, x^* и y^* – их решения. Тогда справедливы следующие равенства

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0, \; i = \overline{1,m}, \tag{5.8}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0, \; j = \overline{1,n}. \tag{5.9}$$

Условия (5.8), (5.9) называются *условиями дополняющей нежесткости*.

Вторая теорема двойственности, математически записанная системами уравнений (5.8), (5.9), может быть интерпретирована следующим образом. Если в оптимальном плане некоторый i-й ресурс использован не полностью, т.е. если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, то соответствующая оценка i-го ресурса $y_i^* = 0$. Таким образом, положительную двойственную оценку y_i^* имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются в оптимальном плане, т.е. когда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$. Это следует из первого соотношения двойственности (5.8).

Тем самым, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий, т.е. двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием сырья. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, насколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 единицу.

Второе соотношение двойственности (5.9) свидетельствует о том, что продаже в оптимальном плане подлежат только те виды товаров $x_j^* > 0$, для которых оценка затраченных на их реализацию ресурсов равна доходу от их продажи, т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$. Нецелесообразно продавать те виды товаров, для которых $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$. В этом случае в оптимальном плане объем реализации данного товара $x_j^* = 0$.

Однако следует учитывать, что в случае вырожденности задачи в некоторых случаях могут иметь место нестрогие неравенства.

Пример 5.1. Вернемся к примеру 1.3.

Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A, B и C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья на каждого вида на производство 1 т карамели данного вида, а также запасы сырья каждого вида и прибыль от реализации 1 т карамели каждого вида приведены в табл. 5.2.

Требуется составить план производства карамели, обеспечивающий максимум прибыли от ее реализации. Построим двойственную задачу к ней и найдем решение двойственной задачи согласно теоремам двойственности.

Таблица 5.2

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т карамели, т			Запасы сырья, т
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	0	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции, тыс. руб.	108	112	126	

Решение. Пара двойственных задач представлена в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Прямая задача	Двойственная задача
$f(x)=108x_1+112x_2+126x_3 \to \max$	$g(y)=800y_1+600y_2+120y_3 \to \min$
$\begin{cases} 0{,}8x_1+0{,}5x_2+0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}2x_1+0{,}4x_2+0{,}3x_3 \le 600, \\ 0{,}1x_2+0{,}1x_3 \le 120, \\ x_{1,2,3} \ge 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}8y_1+0{,}2y_2 \ge 108, \\ 0{,}5y_1+0{,}4y_2+0{,}1y_3 \ge 126, \\ 0{,}6y_1+0{,}3y_2+0{,}1y_3 \ge 126, \\ y_{1,2,3} \ge 0. \end{cases}$

Соответствующая каноническая прямая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} &f(x)=108x_1+112x_2+126x_3 \to \max \\ &0{,}8x_1+0{,}5x_2+0{,}6x_3+x_4=800, \\ &0{,}2x_1+0{,}4x_2+0{,}3x_3+x_5=600, \\ &0{,}1x_2+0{,}1x_3+x_6=120, \\ &x_{1,\ldots,6} \ge 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Запишем здесь последнюю симплекс-таблицу примера 3.2, соответствующую оптимальному решению (табл. 5.4).

Таблица 5.4

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СК, b_i
x_1	1	–1/8	0	5/4	0	–15/2	100
x_5	0	1/8	0	–1/4	1	–3/2	220
x_3	0	1	1	0	0	10	1200
$f(x)$	0	1/2	0	135	0	450	162000

Решение прямой задачи имеет вид: $x^{\max}=(100,0,1200)$, $f^{\max}=162000$.

Найдем решение двойственной задачи. Согласно первой теореме, получаем

$$g^{\min} = f^{\max} = 162000.$$

Согласно соотношениям (5.8) второй теоремы двойственности, получаем:

1) при $i = 1$ (первое ограничение) имеет место равенство

$$0{,}8 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 1200 - 800 = 0,$$

следовательно, соответствующая двойственная переменная $y_1^* > 0$;

2) при $i = 2$ (второе ограничение) имеет место равенство

$$0{,}2 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 1200 - 600 = 380 - 600 = -220 \neq 0,$$

следовательно, соответствующая двойственная переменная $y_2^* = 0$;

3) при $i = 3$ (третье ограничение) имеет место равенство

$$0{,}1 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 1200 - 1200 = 0,$$

следовательно, соответствующая двойственная переменная $y_3^* > 0$.

Перейдем к соотношениям (5.9). Поскольку прямая переменная $x_2^* = 0$, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи принимает вид строгого неравенства:

$$0{,}5 y_1 + 0{,}4 y_2 + 0{,}1 y_3 > 126.$$

Так как переменные $x_1^* > 0$ и $x_3^* > 0$, то соответствующие им ограничения двойственной задачи принимают вид равенств:

$$0{,}8 y_1 + 0{,}2 y_2 = 108,$$
$$0{,}6 y_1 + 0{,}3 y_2 + 0{,}1 y_3 = 126.$$

Учитывая, что $y_2^* = 0$, находим решение полученной системы:

$$\begin{cases} 0{,}8 y_1 = 108, \\ 0{,}6 y_1 + 0{,}1 y_3 = 126, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 135, \\ y_3 = 450. \end{cases}$$

Окончательно получаем решение двойственной задачи: $y^{\min} = (135, 0, 450)$, $g^{\min} = 800 \cdot 135 + 600 \cdot 0 + 120 \cdot 450 = 162000.$

Несложно увидеть, что коэффициенты полученного решения $y^{\min}$ совпадают с коэффициентами индексной строки (целевой функции) при переменных x_4, x_5, x_6 соответственно (табл. 5.4). Это обусловлено наличием связи между переменными прямой и двойственной задач (табл. 5.1). В свою очередь, и табл. 5.3 также можно получить значения для дополнительных переменных двойственной задачи $y_4 = 0,\ y_5 = 1/2,\ y_6 = 0$; это коэффициенты индексной строки при переменных x_1, x_2, x_3 соответственно.

Проанализируем полученные решения прямой и двойственной задач. Поскольку на оптимальном решении первое и третье ограничения прямой задачи выполняются как равенства, это означает, что первый и третий ресурс используются полностью, т.е. являются дефицитными. Выпишем каноническую форму записи прямой задачи, соответствующую оптимальному решению (табл. 5.3.):

$$\begin{aligned}
&f(x) = 162000 - (1/2x_2 + 135x_4 + 450x_6) \to \max\\
&x_1 - 1/8x_2 + 5/4x_4 - 15/2x_6 = 100,\\
&1/8x_2 - 1/4x_4 + x_5 - 3/2x_6 = 220,\\
&x_2 + x_3 + 10x_6 = 1200,\\
&x_{1,\dots,6} \ge 0.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Эта задача аналогична задаче (5.10), только разрешенная относительно другого набора базисных переменных. Увеличение дефицитного ресурса на 1 единицу (на 1 т запасов сахарного песка) повлечет увеличение значения дополнительной переменной x_4 на 1 единицу, тогда из задачи (5.11) получаем, что значение целевой функции увеличится на 135 единиц, значение переменной x_1 увеличится на 5/4 единиц, значение переменной x_3 останется неизменным, в свою очередь остаток второго ресурса (переменная x_5) уменьшится на 1/4 единиц.

Аналогично для третьего ресурса: увеличение переменной x_6 на 1 (на 1 т запасов фруктового пюре) повлечет увеличение значение целевой функции на

450, уменьшение на 15/2 переменной x_1, увеличение на 10 переменной x_3, уменьшение остатков второго ресурса (переменная x_5) на 3/2.

С другой стороны, включение в план невыгодной группы товаров повлечет уменьшение дохода. Так, если включить в план $x_2 = 1$, то доход уменьшится на 1/2, переменная x_1 увеличится на 1/8, переменная x_3 уменьшится на 1, а остаток второго ресурса уменьшится на 1/8. ■

Таким образом, двойственные оценки тесным образом связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи может оказать влияние как на ее оптимальный план, так и на систему двойственных оптимальных оценок. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости.

3.3. Анализ устойчивости двойственных оценок

Продолжим рассмотрение основной задачи линейного программирования (5.1)-(5.3) и двойственной к ней (5.5)-(5.7). Предположим, что задачи невырождены и имеют оптимальные решения.

Максимальное значение целевой функции (5.1) будем рассматривать как функцию свободных членов системы линейных неравенств (5.2) при известных оптимальных значениях y_i^*, $i = \overline{1,m}$:

$$f^{\max}(b_1, b_2, ..., b_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* .$$

Утверждение. В оптимальном плане двойственной задачи (5.5)-(5.7) значение переменной y_i^* численно равно частной производной функции $f^{\max}(b_1, b_2, ..., b_m)$ по соответствующему аргументу, т.е.

$$\frac{\partial f^{\max}}{\partial b_i} = y_i^*, \; i = \overline{1,m}. \tag{5.12}$$

Последнее утверждение означает, что изменение значений величины b_i приводит к изменению значения $f^{\max}(b_1, b_2, ..., b_m)$. Это изменение $f^{\max}(b_1, b_2, ..., b_m)$ определяется величиной $\left|y_i^*\right|$ и может быть охарактеризовано лишь тогда, когда при изменении величины b_i значения переменных y_i^* в оптимальном плане двойственной задачи (5.5)-(5.7) остаются неизменными. Поэтому интересным представляется определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений равенств задачи (5.10), в которых оптимальный план двойственной задачи (5.5)-(5.7) не изменяется. Это имеет место для всех значений $b_i + \Delta b_i$, при которых столбец вектора свободных коэффициентов ограничений последней симплекс-таблицы не содержит отрицательных членов, т.е. когда среди компонент вектора

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ ... \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix}$$

нет отрицательных. Здесь B^{-1} – это матрица, обратная к матрице B, составленной из коэффициентов исходной матрицы задачи при переменных, вошедших в оптимальный план.

Таким образом, если получено оптимальное решение задачи линейного программирования, то можно провести анализ устойчивости двойственных оценок относительно изменений b_i, т.е. проанализировать устойчивость оптимального плана относительно изменений свободных членов системы линейных уравнений, оценить степень влияния изменения b_i на значение целевой функции и определить наиболее целесообразный вариант изменений b_i.

При конкретных значениях Δb_i приращение значения целевой функции можно определить по формуле:

$$\Delta f^* = \sum_{i=1}^{m} \Delta b_i y_i^* . \tag{5.13}$$

Пример 5.2. Проведем анализ устойчивости двойственных оценок для задачи из примера 5.1.

Определим матрицу B. Поскольку в оптимальный план решения задачи вошли переменные x_1, x_5, x_3, то в столбцы матрицы выпишем коэффициенты при этих переменных (в том же порядке) в системе ограничений равенств канонической задачи (5.10). Получаем

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_5 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица имеет вид

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/4 & 0 & -15/2 \\ -1/4 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Несложно увидеть, что коэффициенты данной матрицы в точности совпадают с коэффициентами при переменных x_4, x_5, x_6 соответственно внутренней части последней симплекс-таблицы (табл. 5.3).

Определим компоненты вектора

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 0 & -15/2 \\ -1/4 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 + \Delta b_1 \\ 600 + \Delta b_2 \\ 120 + \Delta b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 + 5/4 \Delta b_1 - 15/2 \Delta b_3 \\ 220 - 1/4 \Delta b_1 + \Delta b_2 - 3/2 \Delta b_3 \\ 1200 + 10 \Delta b_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку компоненты этого вектора должны быть неотрицательны, получаем систему линейных неравенств относительно неизвестных $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$:

$$\begin{cases} 100 + 5/4\Delta b_1 - 15/2\Delta b_3 \ge 0, \\ 220 - 1/4\Delta b_1 + \Delta b_2 - 3/2\Delta b_3 \ge 0, \\ 1200 + 10\Delta b_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (5.14)$$

Очевидно, что система неравенств (3.14) имеет бесконечное множество решений. Мы рассмотрим частные случаи решения этой системы.

1. $\Delta b_1 \ne 0, \Delta b_2 = \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{cases} 100 + 5/4\Delta b_1 \ge 0, \\ 220 - 1/4\Delta b_1 \ge 0, \\ 1200 \ge 0, \end{cases}$$

откуда $-80 \le \Delta b_1 \le 880$ и интервал устойчивости имеет вид $800 - 80 \le b_1 + \Delta b_1 \le 800 + 880$ или $720 \le b_1 + \Delta b_1 \le 1680$. При таких значениях запасов первого ресурса решение двойственной задачи будет оставаться неизменным. Очевидно, что решение прямой задачи будет изменяться.

Например, уменьшим запас первого ресурса (переменную x_4) на 80 единиц, тогда из задачи (5.11) получим, что значение целевой функции уменьшится на $135 \cdot 80 = 10800$ у.ед. и станет равным 151200 у.ед., значение переменной x_1 уменьшится на $5/4 \cdot 80 = 100$ единиц и станет равным 0, значение переменной x_3 останется неизменным, остаток второго ресурса (переменная x_5) увеличится на $1/4 \cdot 80 = 20$ единиц и станет равным 240. Оптимальный ответ будет иметь вид:

$$x^{\max} = (0, 0, 1200),\ f^{\max} = 151200,\ (x_4, x_5, x_6) = (0, 240, 0).$$

При увеличении запаса первого ресурса (переменную x_4) на 880 единиц из задачи (5.11) получим, что значение целевой функции увеличится на $135 \cdot 880 = 118800$ у.ед. и станет равным 280800 у.ед., значение переменной x_1 увеличится на $5/4 \cdot 880 = 1100$ единиц и станет равным 1200, значение переменной x_3 останется неизменным, остаток второго ресурса (переменная x_5) уменьшится на $1/4 \cdot 880 = 220$ единиц и станет равным 0. Оптимальный ответ будет иметь вид:

$$x^{\max} = (1200, 0, 1200),\ f^{\max} = 280800,\ (x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0).$$

2. $\Delta b_2 \neq 0, \Delta b_1 = \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{cases} 100 \geq 0, \\ 220 + \Delta b_2 \geq 0, \\ 1200 \geq 0. \end{cases}$$

откуда $\Delta b_2 \geq -220$ и интервал устойчивости имеет вид $b_2 + \Delta b_2 \geq 600 - 220$ или $b_2 + \Delta b_2 \geq 380$. При таких значениях запасов второго ресурса решение двойственной задачи будет оставаться неизменным. Рассмотрим, как может изменяться решение прямой задачи.

При уменьшении запаса второго ресурса (переменную x_5) на 220 единиц из задачи (5.11) получим, что значение целевой функции, значение переменных x_1 и x_3 останутся неизменными, только лишь уменьшится на эту же величину остаток второго ресурса (переменная x_5). Очевидно, что нет смысла увеличивать запасы второго ресурса, поскольку на оптимальные решения прямой и двойственной задач нисколько не изменится, только будет увеличиваться остаток второго ресурса.

3. $\Delta b_3 \neq 0, \Delta b_1 = \Delta b_2 = 0$:

$$\begin{cases} 100 - 15/2\Delta b_3 \geq 0, \\ 220 - 3/2\Delta b_3 \geq 0, \\ 1200 + 10\Delta b_3 \geq 0. \end{cases}$$

откуда $-120 \leq \Delta b_3 \leq 40/3$ и интервал устойчивости имеет вид $120 - 120 \leq b_3 + \Delta b_3 \leq 120 + 40/3$ или $0 \leq b_3 + \Delta b_3 \leq 400/3$. При таких значениях запасов первого ресурса решение двойственной задачи будет оставаться неизменным. Определим, как будет изменяться решение прямой задачи.

Уменьшим запас третьего ресурса (переменную x_6) на 120 единиц, тогда из задачи (3.11) получим, что значение целевой функции уменьшится на $450 \cdot 120 = 54000$ у.ед. и станет равным 108000 у.ед., значение переменной x_1 увеличится на $15/2 \cdot 120 = 900$ единиц и станет равным 1000, значение переменной x_3 уменьшится на $10\cdot 120=1200$ и станет равным 0, остаток второго ресурса (переменная x_5) увеличится на $3/2\cdot 120=180$ единиц и станет равным 400. Оптимальный ответ будет иметь вид:

$$x^{\max}=(1000{,}0{,}0),\ f^{\max}=108000,\ (x_4,x_5,x_6)=(0{,}400{,}0).$$

Увеличим запас третьего ресурса (переменную x_6) на 40/3 единиц, тогда из задачи (5.11) получим, что значение целевой функции увеличится на $450\cdot 40/3=6000$ у.ед. и станет равным 168000 у.ед., значение переменной x_1 уменьшится на $15/2\cdot 40/3=100$ единиц и станет равным 0, значение переменной x_3 увеличится на $10\cdot 40/3=400/3$ и станет равным 4000/3, остаток второго ресурса (переменная x_5) уменьшится на $3/2\cdot 40/3=20$ единиц и станет равным 200. Оптимальный ответ будет иметь вид:

$$x^{\max}=(0{,}0{,}4000/3),\ f^{\max}=168000,\ (x_4,x_5,x_6)=(0{,}200{,}0).\blacksquare$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Для производства двух видов продукции А и В используются три вида ресурсов. На изготовление единицы изделия А расходуется $a_1=20$, $a_2=15$ и $a_1=14$ кг ресурсов соответствующего вида, на изготовление единицы изделия В расходуется $b_1=28$, $b_2=9$ и $b_3=1$ кг ресурсов. На складе фирмы наличные объемы ресурсов соответствующего вида составляют $c_1=758$, $c_2=526$ и $c_3=541$ кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фирма имеет прибыль в размере $\alpha=10$ рублей, а от единицы продукции вида В – $\beta=2$ рубля. Требуется найти такие объемы производства продукции А и В, при которых достигается максимум суммарной прибыли от реализации. При этом количество используемых ресурсов на производство продукции не должно превосходить их наличного количества.

1. Записать соответствующую вашему варианту числовую модель задачи линейного программирования

2. Найти решение задачи симплекс-методом.

3. Записать двойственную задачу и найдите ее решение из соотношений двойственности.

4. Пояснить экономический смысл полученного решения сопряженной задачи.

5. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся прибыль и план выпуска продукции при увеличении запасов ресурса I и III вида на 100 и 70 единиц соответственно и уменьшении на 90 единиц запасов сырья II вида.

ГЛАВА 6. ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, затратами на бензин, техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов в коммерческой деятельности из пунктов отправления (баз, станций, фабрик, совхозов, заводов) в пункты назначения (магазины, склады) методами, позволяющими оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например, финансовых затрат или времени на перевозку грузов.

Для решения подобного рода задач в линейном программировании существуют специально разработанные методы, а задачи такого рода называются транспортными задачами.

6.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи

Пусть имеется т пунктов отправления (поставщиков) грузов $A_1, A_2, ..., A_m$, на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$. Величины a_i определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$.

Кроме того, имеется n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$, которые подали заявки на поставку грузов в объемах соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$. Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j обозначим через c_{ij} (транспортный тариф), образующих матрицу транспортных издержек $C = \{c_{ij}\}$. В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные издержки по перевозке грузов.

Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план, т.е. найти такие значения объема перевозок грузов $X = \{x_{ij}\}$ от поставщиков A_i к потребителям B_j, чтобы вывести все грузы от поставщиков; удовлетворить заявки каждого потребителя и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

Все исходные данные транспортной задачи можно записать в виде табл. 6.1, которая называется *транспортной*. Матрица $X = \{x_{ij}\}$, определяющая решение задачи, называется *матрицей перевозок*. Очевидно, что элементы x_{ij}, определяющие объем перевозимого от поставщиков A_i к потребителям B_j груза, должны быть неотрицательны. Столбец u_i и строка v_j в табл. 6.1 являются вспомогательными при решении задачи. О правилах их заполнения будет сказано ниже.

Таблица 6.1

$a_i \setminus b_j$	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	u_i
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}	
…	…	…	…	…	…	…	
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	
v_j							

Задача заключается в определении плана перевозок – матрицы $X = \{x_{ij}\}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$), которая удовлетворяет следующим условиям: обеспечивает минимальное значение целевой функции

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{6.1}$$

и удовлетворяет следующим условиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n}, \tag{6.3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}. \tag{6.4}$$

В таком виде экономико-математическая постановка транспортной задачи считается законченной.

Целевая функция задачи $f(X)$ выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов. Первая группа из уравнений ограничений, записанных в общем виде (6.2), выражает требование, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью, а вторая группа из уравнений ограничений, записанных в общем виде (6.3) означает, полностью должны удовлетворятся запросы всех n потребителей. Последнее неравенство (6.4) является условием неотрицательности всех переменных.

В рассмотренной математической модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \, . \tag{6.5}$$

Такая задача называется *сбалансированной*, а её модель *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *несбалансированной* (с неправильным балансом), а её модель – *открытой*.

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей, т.е. задача должна быть сбалансированной.

В случае превышения запаса над потребностями, т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и равными нулю тарифами перевозок $c_{i(n+1)} = 0 \ (i = \overline{1,m})$.

Аналогично при превышении потребностей над запасами, т.е. при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(m+1)$-й поставщик с запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми тарифами перевозок $c_{(m+1)j} = 0 \ (j = \overline{1,n})$.

Число переменных x_{ij} в транспортной задачу с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно mn, а число уравнений в системе (6.2), (6.3) равно $(m+n)$. Так как предполагается выполненным условие (6.5), то число линейно независимых уравнений равно $(m+n-1)$. Следовательно, опорный план транспортной задачи должен иметь $(m+n-1)$ отличных от нуля неизвестных (число базисных переменных).

Если в опорном плане транспортной задачи число отличных от нуля компонент равно $(m+n-1)$, то план называется *невырожденным*, если меньше – то *вырожденным*.

Для определения первого опорного плана в транспортной задаче существует несколько методов. Некоторые из них – метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод аппроксимации Фогеля – будут рассмотрены ниже.

6.2. Построение опорного плана транспортной задачи

6.2.1. Метод северо-западного угла

В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Назначение перевозок и перемещение по транспортной таблице происходит из левого верхнего угла в правый нижний. Осуществляется это таким образом.

Изначально полагаем, что все перевозки равны нулю. На первом шаге:

1) если $a_1 < b_1$, то назначается объем перевозок $x_{11} = a_1$ и из рассмотрения исключается первый перевозчик, как исчерпавший свой ресурс, при этом остальные перевозки от первого поставщика равны нулю, т.е. $x_{1j} = 0,\ j = \overline{2,n}$ (причем эти нули в транспортную таблицу ставить не следует), для назначения следующей перевозки следует переместиться на одну клетку вниз;

2) если $a_1 > b_1$, то назначается объем перевозок $x_{11} = b_1$ и из рассмотрения исключается первый потребитель, как удовлетворивший свои потребности, при этом остальные перевозки к первому потребителю равны нулю, т.е. $x_{i1} = 0,\ i = \overline{2,m}$ (эти нули в транспортную таблицу ставить также не следует), для назначения следующей перевозки следует переместиться на одну клетку вправо;

3) если $a_1 = b_1$, то назначается объем перевозок $x_{11} = a_1 = b_1$ и из рассмотрения исключается либо первый поставщик (см. п. 1), либо первый потребитель (см. п. 2).

Далее перевозка x_{ij} в произвольную клетку $(i, j),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, ставится исходя из следующих соображений:

1) если $a_i - \sum_{l=1}^{j-1} x_{il} < b_j - \sum_{k=1}^{i-1} x_{kj}$, то назначается объем перевозок $x_{ij} = a_i - \sum_{l=1}^{j-1} x_{il}$ и из рассмотрения исключается i-й перевозчик, как исчерпавший свой ресурс, при этом следующие перевозки от этого поставщика равны нулю, т.е. $x_{il} = 0,\ l = \overline{j+1, n}$ (эти нули в транспортную таблицу ставить не следует), для назначения следующей перевозки следует переместиться на одну клетку вниз;

2) если $a_i - \sum_{l=1}^{j-1} x_{il} > b_j - \sum_{k=1}^{i-1} x_{kj}$, то назначается объем перевозок $x_{ij} = b_j - \sum_{k=1}^{i-1} x_{kj}$ и из рассмотрения исключается j-й потребитель, как удовлетворивший свои потребности, при этом следующие перевозки к этому потребителю равны нулю, т.е. $x_{kj} = 0,\ k = \overline{i+1, m}$ (эти нули в транспортную таблицу ставить не следует), для назначения следующей перевозки следует переместиться на одну клетку вправо;

3) если $a_i - \sum_{l=1}^{j-1} x_{il} = b_j - \sum_{k=1}^{i-1} x_{kj}$, то назначается объем перевозок $x_{ij} = a_i - \sum_{l=1}^{j-1} x_{il} = b_j - \sum_{k=1}^{i-1} x_{kj}$ и из рассмотрения исключается либо первый поставщик (см. п. 1), либо первый потребитель (см. п. 2).

В последней клетке должно выполниться равенство $a_m - \sum_{l=1}^{n-1} x_{ml} = b_n - \sum_{k=1}^{m-1} x_{kn}$.

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i, j), подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i, j) требуется поставить перевозку, а i-й поставщик или j-й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель. Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно (m+n–1) и условия (6.2), (6.3) выполнены.

6.2.2. Метод минимального элемента (наименьшей стоимости)

Метод минимальной стоимости прост, он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C = \{c_{ij}\}$. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min\{c_{ij}\}$, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель).

Очередную клетку, соответствующую $\min\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы использованы полностью. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик, еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от данного поставщика требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль, и лишь затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично с потребителем.

Если клеток с минимальной стоимостью несколько, то произвольно выбирается любая из них.

6.2.3. Метод аппроксимации Фогеля

При определении опорного плана транспортной методом Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записываются в специально отведенных для этого строки и столбца в транспортной таблице. Среди найденных разностей (их еще называют штрафами) выбирают максимальную. В строке (или столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, выбирают для заполнения, т.е. назначения перевозки по правилам, указанным выше.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующей наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

Метод Фогеля, несмотря на трудоемкость, находит опорный план, очень близкий к оптимальному, либо сразу дает оптимальное решение.

Клетки, в которые были назначены перевозки, в том числе и нулевые, назовем *базисными*, остальные клетки – *свободными*.

После того, как первый опорный план найден, происходит проверка плана на оптимальность и, в случае не оптимальности, улучшение этого плана *методом потенциалов*.

6.3. Двойственная транспортная задача

Построим к задаче (6.1)-(6.4), как к задаче линейного программирования, двойственную. Для каждого ограничения (6.2) введем двойственную переменную u_i, $i=\overline{1,m}$, для каждого ограничения (6.3) – двойственную переменную v_j, $j=\overline{1,n}$. Поскольку (6.2), (6.3) являются ограничениями-равенствами, то двойственные переменные не будут ограничены по знаку, т.е. могут принимать значения любых знаков. Каждая из прямых переменных x_{ij} входит только в одно из ограничений (6.2) и только в одно из ограничений (6.3), причем с коэффициентами, равными 1; в целевую функцию переменная x_{ij} входит с коэффициентом c_{ij}. Поскольку прямая задача является задачей минимизации, то двойственная задача будет задачей максимизации с ограничениями типа «$\le$».

Окончательно получаем двойственную к (6.1)-(6.4) задачу: найти вектора $u=(u_1,u_2,...,u_m)$ и $v=(v_1,v_2,...,v_n)$, которые доставляют максимум целевой функции

$$f(X)=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max \tag{6.6}$$

и удовлетворяют условиям

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}. \tag{6.7}$$

Известно, что задачи (6.1)-(6.4) и (6.6)-(6.7) разрешимы или неразрешимы одновременно, кроме того, на оптимальных решениях прямой задачи x^* и двойственной задачи u^*, v^* выполняются соотношения (5.8), (5.9) второй теоремы двойственности, которые в данном случае записываются в виде:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}{}^* - a_i\right) u_i{}^* = 0,\ i=\overline{1,m},\quad \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}{}^* - b_j\right) v_j{}^* = 0,\ \ j=\overline{1,n}, \tag{6.8}$$

$$\left(u_i{}^* + v_j{}^* - c_{ij}\right) x_{ij}{}^* = 0,\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}. \tag{6.9}$$

Очевидно, что соотношения (6.8) будут выполнены при любых значениях $u_i{}^*$, $v_j{}^*$ при $x_{ij}{}^*$, удовлетворяющих условиям (6.2), (6.3). Что касается соотношений (4.9), то при $x_{ij}{}^* > 0$ имеет место равенство $u_i{}^* + v_j{}^* - c_{ij} = 0$, при $x_{ij}{}^* = 0$ получаем $u_i{}^* + v_j{}^* - c_{ij} \le 0$.

Последние рассуждения дают основу для метода решения задачи транспортного типа – *метода потенциалов*.

6.4. Метод потенциалов

Как отмечалось выше, процесс решения транспортной задачи разбивается на два этапа: подбор первого опорного плана (п. 6.2) и проверка этого плана на оптимальность.

Для каждого опорного плана *X* следует построить соответствующий ему опорный план двойственной задача следующим образом:

1) для всех базисных клеток создать систему уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$;

2) задать произвольно какое-либо значение двойственной переменной, например, $u_1 = 0$ или $u_1 = \max\{c_{ij}\}$;

3) рассчитать остальные значения двойственных переменных из составленной в п. 1 системе уравнений.

Полученные значения записываются в столбец u_i и строку v_j в табл. 6.1.

Условия оптимальности имеют вид: для свободных клеток должны выполнятся неравенства $u_i^* + v_j^* - c_{ij} \le 0$ (или величина $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i^* - v_j^* \ge 0$). Если хотя бы для одной из свободных клеток это условие не выполняется, то построенный опорный план не является оптимальным.

Двойственные переменные u_i и v_j называются *потенциалами*.

Для улучшения опорного плана следует пользоваться следующим алгоритмом. Начиная с клетки с наименьшим отрицательным Δ_{ij}, строим цикл (или многоугольник) перераспределения. Цикл перераспределения – это замкнутая ломанная линия, одна вершина которой расположена в клетке с наименьшим отрицательным Δ_{ij}, остальные – в базисных клетках, а звенья параллельны строкам и столбцам таблицы. При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить только один цикл, причем число вершин цикла четно.

Далее каждой вершине цикла приписывается определенный знак: в свободной клетке ставится знак «+», в следующей – знак «–», далее знаки чередуются. Среди элементов x_{ij}, находящихся в базисных клетках цикла со знаком «–», находим наименьший; эту величину назовем шагом перераспределения и обозначим *h*. Затем к элементам x_{ij}, расположенных в клетках со знаком «+», прибавляем *h* (в свободной клетке цикла проставляем число *h*), от элементов x_{ij}, расположенных в клетках со знаком «–», вычитаем *h*.

В результате получаем новый опорный план, который также следует проверить на оптимальность, как было указано выше.

Следует отметить, что после пересчета новый опорный план может оказаться вырожденным. Это возможно, если при в базисных клетках со знаком «–» имеется два или более одинаковых минимальных числа x_{ij}. В этом случае следует освобождать только одну клетку, в остальных клетках оставить нули и считать их базисными.

Кроме того, если в циклах для всех свободных клеток с отрицательными Δ_{ij} получаем шаг перераспределения *h*, равный нулю, то план улучшить нельзя, т.е. построенный план является оптимальным.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 6.1. На трех базы A_1, A_2, A_3 имеется однородный груз в количествах, соответственно равных 60, 80, 100 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно в количествах 40, 60, 90, 70 ед. Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов (тыс. руб. за ед. груза):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными издержками.

Решение. Составим математическую модель задачи. Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 80 + 100 = 240,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 60 + 90 + 70 = 260.$$

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на трех базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу A_4 с запасом груза, равным $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 260 - 240 = 20$ ед. Тарифы перевозки единицы груза из базы A_4 во все магазины полагаем равны нулю, т.е. $c_{4j} = 0,\ j = \overline{1,4}$.

Решение будем искать в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix},$$

где x_{ij} – количество ед. груза, перевозимого с i-го склада в j-й магазин.

Математическая модель задачи имеет вид: найти минимум суммарной стоимости перевозок

$$\begin{aligned} f(X) = 1x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} + 8x_{23} + 5x_{24} + \\ +4x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} + 2x_{34} + 0x_{41} + 0x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} \to \min \end{aligned}$$

при условии вывоза всего груза со складов

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 80, \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100, \\ &x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 20, \end{aligned}$$

при удовлетворении потребностей всех магазинов

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 40, \\ &x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 60, \\ &x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 90, \\ &x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 70, \end{aligned}$$

и при условиях неотрицательности переменных

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,4}.$$

Соответствующая двойственная транспортная задача формулируется следующим образом: найти максимум целевой функции

$$g(u,v) = 60u_1 + 80u_2 + 100u_3 + 20u_4 + 40v_1 + 60v_2 + 90v_3 + 70v_4 \to \max$$

при условиях

$$u_1+v_1\le 1,\quad u_1+v_2\le 2,\ u_1+v_3\le 4,\ u_1+v_4\le 3,$$
$$u_2+v_1\le 6,\ u_2+v_2\le 3,\ u_2+v_3\le 8,\ u_2+v_4\le 5,$$
$$u_3+v_1\le 4,\ u_3+v_2\le 7,\ u_3+v_3\le 6,\ u_3+v_4\le 2,$$
$$u_4+v_1\le 0,\ u_4+v_2\le 0,\ u_4+v_3\le 0,\ u_4+v_4\le 0.$$

Найдем решение транспортной задачи методом потенциалов, находя первый опорный план тремя описанными алгоритмами.

1. Метод северо-западного угла

Проставим перевозку в клетку (1, 1): $x_{11}=\min\{a_1,b_1\}=\min\{60,40\}=40$. Поскольку потребности первого потребителя удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения и передвигаемся на одну клетку вправо.

Ставим перевозку в клетку (1, 2): $x_{12}=\min\{a_1-x_{11},b_2\}=\min\{20,60\}=20$. Поскольку весь груз из первого склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вниз.

Ставим перевозку в клетку (2, 2): $x_{22}=\min\{a_2,b_2-x_{12}\}=\min\{80,40\}=40$. Поскольку все потребности второго магазина удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вправо.

Ставим перевозку в клетку (2, 3): $x_{23}=\min\{a_2-x_{22},b_3\}=\min\{40,90\}=40$. Поскольку весь груз из второго склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вниз.

Ставим перевозку в клетку (3, 3): $x_{33}=\min\{a_3,b_3-x_{23}\}=$ $=\min\{100,50\}=50$. Поскольку все потребности третьего магазина удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вправо.

Ставим перевозку в клетку (3, 4): $x_{34}=\min\{a_3-x_{33},b_4\}=\min\{50,70\}=50$. Поскольку весь груз из третьего склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вниз.

Ставим перевозку в клетку (4, 4): $x_{44}=\min\{a_4,b_4-x_{34}\}=\min\{20,20\}=20$. Все потребности четвертого магазина удовлетворены и весь груз из четвертого склада вывезен.

Таким образом, построен первый опорный план (табл. 6.2).

Рассчитаем стоимость такого плана перевозок:

$F = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 8 \cdot 40 + 6 \cdot 50 + 2 \cdot 50 + 0 \cdot 20 = 920$.

Количество базисных клеток равно 7 и равно $m+n-1$=4+4-1=7, следовательно, план не вырожден.

Проверим план на оптимальность. Для базисных клеток построим следующую систему для расчета потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1, \quad u_1 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_2 = 3, \quad u_2 + v_3 = 8, \\ u_3 + v_3 = 6, \quad u_3 + v_4 = 2, \\ u_4 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Зададим значение $u_1 = 0$ и из построенной системы рассчитаем:

$$\begin{cases} v_1 = 1 - u_1 = 1, \\ v_2 = 2 - u_1 = 2, \\ u_2 = 3 - v_2 = 1, \\ v_3 = 8 - u_2 = 7, \\ u_3 = 6 - v_3 = -1, \\ v_4 = 2 - u_3 = 3, \\ u_4 = 0 - v_4 = -3. \end{cases}$$

Все вычисления удобно проводить в транспортной таблице (табл. 4.2).

Таблица 6.2

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2 **20**	4	3	0
80	6	3 **40**	8 **40**	5	1
100	4	7	6 – **50**	2 + **50**	–1
20	0	0	0 +	0 – **20**	–3
v_j	1	2	7	3	

Для свободных клеток вычислим разности:

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 3 = 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{32} = 7 + 1 - 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 3 - 1 = 2 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 3 - 2 = 1 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 3 - 7 = -4 < 0$.

Поскольку среди Δ_{ij} есть отрицательные, то план не оптимален. Для клетки (4, 3) с наименьшей отрицательной разностью строим цикл перераспределения: это четырехугольник с вершинами в клетках (4, 3), (4, 4), (3, 4), (3, 3). Расставим, чередуя, знаки «+» и «–», начиная с клетки (4, 3). Далее вычислим шаг пересчета $h = \min\{50, 20\} = 20$ и строим новый план перевозок (табл. 6.3).

Таблица 6.3

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2 – **20**	4 +	3	0
80	6	3 + **40**	8 – **40**	5	1
100	4	7	6 **30**	2 **70**	–1
20	0	0	0 **20**	0	–7
v_j	1	2	7	3	

Рассчитаем стоимость нового плана перевозок:

$F = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 8 \cdot 40 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 20 = 840$.

Видно, что на новом плане значение стоимости перевозок уменьшилось.

Число базисных клеток равно 7, следовательно, план не вырожден. Аналогично рассчитаем потенциалы и проверим план на оптимальность:

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 3 = 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{32} = 7 + 1 - 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 7 - 1 = 6 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 7 - 3 = 4 > 0$.

Поскольку среди $\Delta_{13} < 0$, то план не оптимален. Для клетки (1, 3) строим цикл перераспределения: это четырехугольник с вершинами в клетках (1, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 2). Расставим, чередуя, знаки «+» и «–», начиная с клетки (1, 3). Далее вычислим шаг пересчета $h = \min\{40, 20\} = 20$ и строим новый план перевозок (табл. 6.4).

Таблица 6.4

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2	4 **20**	3	0
80	6	3 **60**	8 **20**	5	4
100	4	7	6 **30**	2 **70**	2
20	0	0	0 **20**	0	–4
v_j	1	–1	4	0	

Число базисных клеток равно 7, следовательно, план не вырожден. Рассчитаем потенциалы и проверим план на оптимальность:

$\Delta_{12} = 2 - 0 + 1 = 3 > 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 0 = 3 > 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 4 - 1 = 1 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 4 - 0 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 - 2 - 1 = 1 > 0$, $\Delta_{32} = 7 - 2 + 1 = 6 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 4 + 1 = 5 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 4 - 0 = 4 > 0$.

Поскольку все разности Δ_{ij} неотрицательны, то построенный план является оптимальным.

2. Метод минимального элемента

Среди всех стоимостей перевозок выберем минимальную. Это будут нули, расположенные в четвертой, фиктивной, строке. Остановимся на первом столбце и поставим перевозку в клетку (4, 1): $x_{41} = \min\{a_4, b_1\} = \min\{20, 40\} = 20$. Поскольку весь груз из четвертого склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения.

Среди оставшихся клеток выбираем клетку (1, 1) с наименьшей стоимостью и назначаем перевозку $x_{11} = \min\{a_1, b_1 - x_{41}\} = \min\{60, 20\} = 20$. Поскольку все потребности первого магазина удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения.

Далее аналогично ставим следующие перевозки:

$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}, b_2\} = \min\{40, 60\} = 40$, исключаем из рассмотрения первую строку;

$x_{34} = \min\{a_3, b_4\} = \min\{100, 70\} = 70$, исключаем из рассмотрения четвертый столбец;

$x_{22} = \min\{a_2, b_2 - x_{12}\} = \min\{80, 20\} = 20$, исключаем из рассмотрения второй столбец;

$x_{33} = \min\{a_3 - x_{34}, b_3\} = \min\{30, 90\} = 30$, исключаем из рассмотрения третью строку;

$x_{23} = \min\{a_2 - x_{22}, b_3 - x_{33}\} = \min\{60, 60\} = 60$.

Весь груз вывезен со складов, потребности всех магазинов удовлетворены. Получили первый опорный план (табл. 6.5), который является невырожденным, поскольку число базисных клеток равно 7.

Таблица 6.5

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 + **20**	2 – **40**	4	3	0
80	6	3 + **20**	8 – **60**	5	1
100	4	7	6 **30**	2 **70**	–1
20	0 – **20**	0	0 +	0	–1
v_j	1	2	7	3	

Рассчитаем стоимость такого плана перевозок:

$F = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 8 \cdot 60 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 20 = 900$.

Рассчитаем потенциалы и проверим план на оптимальность:

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 3 = 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{32} = 7 + 1 - 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{42} = 0 + 1 - 2 = -1 < 0$, $\Delta_{43} = 0 + 1 - 7 = -6 < 0$,

$\Delta_{44} = 0 + 1 - 3 = -2 < 0$.

Поскольку среди Δ_{ij} есть отрицательные, то план не оптимален. Для клетки (4, 3) с наименьшей отрицательной разностью строим цикл перераспределения: это шестиугольник с вершинами в клетках (4, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 2), (1, 1), (4, 1). Расставим, чередуя, знаки «+» и «–», начиная с клетки (4, 3). Далее вычислим шаг пересчета $h = \min\{20, 40, 60\} = 20$ и строим новый план перевозок (табл. 6.6).

Таблица 6.6

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2 **20**	4	3	
80	6	3 **40**	8 **40**	5	
100	4	7	6 **30**	2 **70**	
20	0	0	0 **20**	0	
v_j					

План, соответствующий табл. 6.6, совпадает с планом табл. 4.3, который не является оптимальным. Дальнейший процесс решения полностью совпадает с описанным выше (в случае метода северо-западного угла). В итоге получаем такое же решение.

3. Метод аппроксимации Фогеля

Для определения первого опорного плана методом Фогеля составим табл. 6.7.

Для каждой строки и каждого столбца вычислим разность между двумя записанными в них минимальными тарифами и среди них выберем максимальную. Это 4, соответствующая третьему столбцу. В этом столбце определяем минимальный тариф – 0, стоящий в четвертой строке. Назначаем перевозку $x_{43} = \min\{a_4, b_3\} = \min\{20, 90\} = 20$ и исключаем из рассмотрения четвертую строку.

Таблица 6.7

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	Разность по строкам			
60	1 **40**	2	4 **20**	3	2–1=1	2–1=1	3–2=1	4–2=2
80	6	3 **60**	8 **20**	5	5–3=2	5–3=2	5–3=2	8–3=5
100	4	7	6 **30**	2 **70**	4–2=2	4–2=2	6–2=4	7–6=1
20	0	0	0 **20**	0				
Разность по столбцам	1–0=1	2–0=2	4–0=4	2–0=2				
	4–1=3	3–2=1	6–4=2	3–2=1				
		3–2=1	6–4=2	3–2=1				
		3–2=1	6–4=2					

Далее вычисляем разности для оставшихся элементов таблицы и среди них выбираем наибольшую. Это 3, стоящая в первом столбце; минимальный элемент в этом столбце – 1, расположенная в первой строке. Назначаем перевозку $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{60, 40\} = 40$ и исключаем из рассмотрения первый столбец.

Далее, наибольшая из разностей – 4, расположенная в третьей строке, и минимальный элемент в этой строке – 2, расположенная в четвертом столбце. Назначаем перевозку $x_{34} = \min\{a_3, b_4\} = \min\{100, 70\} = 70$ и исключаем из рассмотрения четвертый столбец.

Далее, аналогично выбирая клетки для назначения перевозок, получаем следующие перевозки:

назначаем перевозку $x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{80, 60\} = 60$ и исключаем из рассмотрения второй столбец;

назначаем перевозку $x_{13} = \min\{a_1 - x_{11}, b_3 - x_{43}\} = \min\{20, 70\} = 20$ и исключаем из рассмотрения первую строку;

назначаем перевозку $x_{33} = \min\{a_3 - x_{34}, b_3 - x_{13} - x_{43}\} = \min\{30, 50\} = 30$ и исключаем из рассмотрения третью строку;

назначаем перевозку

$$x_{23} = \min\{a_2 - x_{22}, b_3 - x_{13} - x_{33} - x_{43}\} = \min\{20, 20\} = 20.$$

Очевидно, что построенный план является оптимальным (см. табл. 6.4).

Таким образом, в данной задаче метод Фогеля сразу дает оптимальное решение. При нахождении первого опорного плана методом северо-западного угла и методом минимального элемента для получения оптимального решения понадобилось еще 2 шага метода потенциалов.

Окончательно получаем оптимальный план перевозок

$$X = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix},$$

состоящий в перевозке 40 ед. груза с первого склада в первый магазин, 20 ед. груза с первого склада в третий магазин, 60 ед. груза со второго склада во второй магазин, 20 ед. груза со второго склада в третий магазин, 30 ед. груза с третьего склада в третий магазин, 70 ед. груза с третьего склада в четвертый магазин, в третий магазин не довезут 20 ед. груза. Стоимость такого плана перевозок составит

$$F = 1 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 60 + 8 \cdot 20 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 20 = 780 \text{ тыс. руб.} \blacksquare$$

6.5. Транспортные задачи с усложнениями в постановке

При нахождении решения ряда конкретных транспортных задач часто бывает необходимо учитывать дополнительные ограничения. Остановимся подробнее на некоторых усложнениях в постановках транспортных задач.

1. При некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта отправления A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач полагают, что тариф на перевозки из пункта A_i в пункт B_j является сколь угодно большой величиной M, и при этом условии описанными выше методами находят решение транспортной задачи. При таком предположении исключается возможность при оптимальном плане транспортной задачи перевозить груз из пункта A_i в пункт B_j. Такой подход к нахождению решения транспортной задачи называют *запрещением перевозок* или *блокированием* соответствующей клетки таблицы данных задач.

2. В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j требуется обязательно перевезти d_{ij} единиц груза. Тогда в клетку таблицы данных транспортной задачи, находящуюся на пересечении i-й строки и j-го столбца записывается указанное число d_{ij} и в дальнейшем эту клетку считают свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок M. Для полученной таким образом новой транспортной задачи находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.

3. Иногда требуется найти решение транспортной задачи, при котором из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j должно быть перевезено не менее заданного количества груза d_{ij}. Для определения оптимального плана такой задачи считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j меньше факти-

ческих на d_{ij} единиц. После чего находят оптимальный план новой транспортной задачи, на основании которого и определяют решение исходной задачи.

4. В некоторых транспортных задачах требуется найти оптимальный план перевозок при условии, что из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j может быть перевезено не более чем d_{ij} единиц груза. В этом случае можно поступить следующим образом. В таблице данных исходной задачи для такого *j*-го ограничения предусматривают дополнительный столбец, т.е. вводят дополнительный пункт назначения. В данном столбце записывают те же тарифы, что и в *j*-м столбце, за исключением тарифа, находящегося в *i*-й строке, его считают равным сколь угодно большому тарифу *M*. При этом потребности пункта B_j считают равными d_{ij}, а потребности вновь введенного пункта назначения полагают равными $b_j - d_{ij}$. Далее решают полученную транспортную задачу методом потенциалов.

Следует отметить, что исходная транспортная задача разрешима лишь в том случае, если для нее существует хотя бы один опорный план.

Рассмотрим некоторые модификации задачи из примера 6.1.

Пример 6.2. Найти решение задачи примера 6.1 при дополнительных условиях: перевозки из пункта A_2 в пункт B_2 запрещены, из пункта A_3 в пункт B_1 должно быть завезено 20 ед. груза.

Решение. Как и в примере 6.1. вводим фиктивного поставщика A_4 с запасами 20 ед. груза и нулевыми тарифами на перевозки. Далее, поскольку перевозки из пункта A_2 в пункт B_2 запрещены, то полагаем тариф на эти перевозки равным сколь угодно большому числу *M*. Далее, поскольку по условиям задачи из пункта A_3 в пункт B_1 должно быть завезено 20 ед. груза, то в клетку (3, 1) ставим перевозку в 20 ед. и далее считаем эту клетку свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок *M*. Чтобы избежать путаницы в дальнейшем, эту перевозку можно выделить, например в кружок.

После, опуская подробности, методом минимального элемента находим опорный план перевозок (табл. 6.8). Следует отметить, что при назначении перевозки, равной 20 ед., в клетку (4, 1) запасы четвертого поставщика будут исчерпаны и потребности первого магазина будут удовлетворены, поэтому, чтобы план не был вырожден, исключаем из рассмотрения четвертого поставщика. После этого искусственно ставим нулевую перевозку в клетку (1, 1), считая ее в дальнейшем базисной. Аналогично с перевозкой в клетке (1, 2).

Таблица 6.8

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 + **0**	2 **60**	4 – **0**	3	0
80	6	M	8 **80**	5	4
100	M **20**	7	6 **10**	2 **70**	2
20	0 – **20**	0	0 +	0	–1
v_j	1	2	4	0	

В итоге получим 7 базисных клеток, не считая перевозки в клетке (3, 1). По этим базисным клеткам рассчитаем потенциалы и проверим условие оптимальности ($M > 0$ – сколь угодно большое):

$\Delta_{14} = 3 - 0 - 0 = 3 > 0$, $\Delta_{21} = 6 - 4 - 1 = 1 > 0$,

$\Delta_{22} = M - 4 - 2 = M - 6 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 4 - 0 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = M - 2 - 1 = M - 3 > 0$, $\Delta_{32} = 7 - 2 - 2 = 3 > 0$,

$\Delta_{42} = 0 + 1 - 2 = -1 < 0$, $\Delta_{43} = 0 + 1 - 4 = -3 < 0$, $\Delta_{44} = 0 + 1 - 0 = 1 > 0$.

Среди Δ_{ij} есть отрицательные. Начиная с клетки (4, 3) строим четырехугольник перераспределения. Шаг перераспределения равен $h = \min\{20, 0\} = 0$, следовательно, план улучшить нельзя.

Окончательно получаем решение

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 70 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

состоящее в перевозке 60 ед. груза с первого склада во второй магазин, 80 ед. груза со второго склада в третий магазин, 20 ед. груза с третьего склада в первый магазин, 10 ед. груза с третьего склада в третий магазин, 70 ед. груза с третьего склада в четвертый магазин, в первый магазин не довезут 20 ед. груза. Стоимость такого плана перевозок составит

$F = 2 \cdot 60 + 8 \cdot 80 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 70 = 1040$ тыс. руб. ■

Пример 6.3. Найти решение задачи примера 6.1 при дополнительных условиях: перевозки из пункта A_1 в пункт B_1 запрещены, из пункта A_3 в пункт B_1 должно быть завезено не менее 20 ед. груза.

Решение. Поскольку перевозки из пункта A_1 в пункт B_1 запрещены, то полагаем тариф на эти перевозки равным сколь угодно большому числу *M*. Далее, поскольку по условиям задачи из пункта A_3 в пункт B_1 должно быть завезено не менее 20 ед. груза, то полагаем, что запасы пункта A_3 и потребности пункта B_1 на 20 ед. меньше. Далее находим опорный план методом минимального элемента (табл. 6.9).

Таблица 6.9

$a_i \setminus b_j$	20	60	90	70	u_i
60	*M*	2 – **60**	4 +	3	0
80	6	3 + **0**	8 – **80**	5	1
80	4 **0**	7	6 **10**	2 **70**	–1
20	0 **20**	0	0	0	–5
v_j	5	2	7	3	

В транспортной таблице также потребуется искусственно поставить нулевую перевозку, полагая соответствующую ей клетку базисной.

Стоимость такого плана перевозок составит (с учетом 20 ед. груза, перевозимых из пункта A_3 в пункт B_1)

$F = 2\cdot 60 + 8\cdot 80 + 4\cdot 20 + 6\cdot 10 + 2\cdot 70 + 0\cdot 20 = 1040$ тыс. руб.

Рассчитываем потенциалы по базисным клеткам и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 5 = M - 5 > 0$, $\Delta_{13} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$,

$\Delta_{14} = 3 - 0 - 3 = 0$, $\Delta_{21} = 6 - 1 - 5 = 0$,

$\Delta_{24} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$, $\Delta_{32} = 7 + 1 - 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{42} = 0 + 5 - 2 = 3 > 0$, $\Delta_{43} = 0 + 5 - 7 = -2 < 0$, $\Delta_{44} = 0 + 5 - 3 = 2 > 0$.

Среди Δ_{ij} есть отрицательные. Начиная с клетки (1, 3), строим четырехугольник перераспределения с шагом перераспределения $h = \min\{60, 80\} = 60$. Строим новый опорный план (табл. 6.10).

Таблица 6.10

$a_i \setminus b_j$	20	60	90	70	u_i
60	M	2	4 **60**	3	0
80	6	3 **60**	8 **20**	5	4
80	4 + **0**	7	6 – **10**	2 **70**	2
20	0 – **20**	0	0 +	0	–2
v_j	2	–1	4	0	

Стоимость такого плана перевозок составит (с учетом 20 ед. груза, перевозимых из пункта A_3 в пункт B_1)

$F = 4\cdot 60 + 3\cdot 60 + 8\cdot 20 + 4\cdot 20 + 6\cdot 10 + 2\cdot 70 + 0\cdot 20 = 860 < 1040$ тыс. руб.

По базисным клеткам нового опорного плана рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 2 = M - 2 > 0$, $\Delta_{12} = 2 - 0 + 1 = 3 > 0$,

$\Delta_{14} = 3 - 0 - 0 = 3 > 0$, $\Delta_{21} = 6 - 4 - 2 = 0$,

$\Delta_{24} = 5 - 4 - 0 = 1 > 0$, $\Delta_{32} = 7 - 2 + 1 = 6 > 0$,

$\Delta_{42} = 0 + 2 + 1 = 3 > 0$, $\Delta_{43} = 0 + 2 - 4 = -2 < 0$,

$\Delta_{44} = 0 + 2 - 0 = 2 > 0$.

Среди Δ_{ij} есть отрицательные. Начиная с клетки (4, 3), строим четырехугольник перераспределения с шагом перераспределения $h = \min\{10, 20\} = 10$. Строим новый опорный план (табл. 6.11).

Таблица 6.11

$a_i \setminus b_j$	20	60	90	70	u_i
60	M	2	4 **60**	3	0
80	6 +	3 **60**	8 – **20**	5	4
80	4 **10**	7	6	2 **70**	0
20	0 – **10**	0	0 + **10**	0	–4
v_j	4	–1	4	2	

Стоимость такого плана перевозок составит (с учетом 20 ед. груза, перевозимых из пункта A_3 в пункт B_1)

$$F = 4 \cdot 60 + 3 \cdot 60 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 = 840 < 860 \text{ тыс. руб.}$$

По базисным клеткам нового опорного плана рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 4 = M - 4 > 0$, $\Delta_{12} = 2 - 0 + 1 = 3 > 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 2 = 1 > 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 4 - 4 = -2 < 0$, $\Delta_{24} = 5 - 4 - 2 = -1 < 0$, $\Delta_{32} = 7 - 0 + 1 = 8 > 0$,

$\Delta_{33} = 6 - 0 - 4 = 2 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 4 + 1 = 5 > 0$,

$\Delta_{44} = 0 + 4 - 2 = 2 > 0$.

Среди Δ_{ij} есть отрицательные. Начиная с клетки (2, 1), строим четырехугольник перераспределения с шагом перераспределения $h = \min\{10, 20\} = 10$. Строим новый опорный план (табл. 6.12).

Таблица 6.12

$a_i \setminus b_j$	20	60	90	70	u_i
60	M	2	4 **60**	3	0
80	6 **10**	3 **60**	8 **10**	5	4
80	4 **10**	7	6	2 **70**	2
20	0	0	0 **20**	0	–4
v_j	2	–1	4	0	

Рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 2 = M - 2 > 0$, $\Delta_{12} = 2 - 0 + 1 = 3 > 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 0 = 3 > 0$,

$\Delta_{24} = 5 - 4 - 0 = 1 > 0$, $\Delta_{32} = 7 - 2 + 1 = 6 > 0$, $\Delta_{33} = 6 - 2 - 4 = 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 4 - 2 = 2 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 4 + 1 = 5 > 0$,

$\Delta_{44} = 0 + 4 - 0 = 4 > 0$.

Все Δ_{ij} неотрицательны, следовательно, опорный план, соответствующий табл. 6.12, является оптимальным.

Получаем решение

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 0 \\ 10 & 60 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix},$$

состоящее в перевозке 60 ед. груза с первого склада в третий магазин, 10 ед. груза со второго склада в первый магазин, 60 ед. груза со второго склада во второй магазин, 10 ед. груза со второго склада в третий магазин, 30 ед. груза с третьего склада в первый магазин, 70 ед. груза с третьего склада в четвертый магазин, в третий магазин не довезут 20 ед. груза. Стоимость такого плана перевозок составит

$$F = 4\cdot 60 + 6\cdot 10 + 3\cdot 60 + 8\cdot 10 + 4\cdot 30 + 2\cdot 70 + 0\cdot 20 = 820 \text{ тыс. руб.} \ \blacksquare$$

Пример 6.4. Найти решение задачи примера 4.1 при дополнительных условиях: перевозки из пункта A_1 в пункт B_1 и из пункта A_3 в пункт B_4 запрещены, из пункта A_3 в пункт B_3 должно быть перевезено не более 20 ед. груза.

Решение. Как и в примере 6.1. вводим фиктивного поставщика A_4 с запасами 20 ед. груза и нулевыми тарифами на перевозки. Поскольку перевозки из пункта A_1 в пункт B_1 и из пункта A_3 в пункт B_4 запрещены, то полагаем тариф на эти перевозки равным сколь угодно большому числу *M*. Далее, поскольку по условиям задачи из пункта A_3 в пункт B_3 должно быть перевезено не более 20 ед. груза, то для третьего ограничения вводим дополнительный столбец с такими же тарифами, кроме тарифа, находящегося в третьей строке, его полагаем равным сколь угодно большому *M*. Потребность пункта B_3 полагаем равной 20, а потребность введенного пункта назначения полагаем равной 70.

Далее находим опорный план методом минимального элемента (табл. 6.13).

Таблица 6.13

$a_i \setminus b_j$	40	60	20	70	70	u_i
60	*M*	2 – **60**	4	3	4 +	0
80	6	3 + **0**	8	5 **70**	8 – **10**	1
100	4 **20**	7	6 **20**	*M*	*M* **60**	*M*–7
20	0 **20**	0	0	0	0	*M*–11
v_j	11–*M*	2	13–*M*	4	7	

Число базисных клеток в опорном плане должно быть равно 8. В транспортной таблице также потребуется искусственно поставить нулевые перевозки, полагая соответствующие им клетки базисными. Следует отметить, что при составлении опорного плана назначается положительная перевозка в заблокированную клетку (3, 5).

Стоимость такого плана перевозок составит $F = 60M + 750$.

Рассчитываем потенциалы (видим, что они зависят от параметра *M*) и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 11 + M = 2M - 11 > 0$, $\Delta_{13} = 4 - 0 - 13 + M = M - 9 > 0$,

$\Delta_{14} = 3 - 0 - 4 = -1 < 0$, $\Delta_{15} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 1 - 11 + M = M - 6 > 0$, $\Delta_{23} = 8 - 1 - 13 + M = M - 6 > 0$,

$\Delta_{32} = 7 - M + 7 - 2 = 12 - M < 0$, $\Delta_{34} = M - M + 7 - 4 = 3 > 0$,

$\Delta_{42} = 0 - M + 11 - 2 = 9 - M < 0$, $\Delta_{43} = 0 - M + 11 - 13 + M = -2 < 0$,

$\Delta_{44} = 0 - M + 11 - 4 = 7 - M < 0$, $\Delta_{45} = 0 - M + 11 - 7 = 4 - M < 0$.

Большинство из Δ_{ij} отрицательны. Начиная с клетки (1, 5), строим многоугольник перераспределения с шагом пересчета $h = \min\{10, 60\} = 10$. Строим новый опорный план (табл. 6.14).

Таблица 6.14

$a_i \setminus b_j$	40	60	20	70	70	u_i
60	*M*	2 – **50**	4	3	4 + **10**	0
80	6	3 + **10**	8	5 – **70**	8	1
100	4 + **20**	7	6 **20**	*M*	*M* – **60**	*M*–4
20	0 – **20**	0	0	0 +	0	*M*–8
v_j	8–*M*	2	10–*M*	4	4	

Стоимость такого плана перевозок составит $F = 60M + 720$.

Рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 8 + M = 2M - 8 > 0$, $\Delta_{13} = 4 - 0 - 10 + M = M - 6 > 0$,

$\Delta_{14} = 3 - 0 - 4 = -1 < 0$, $\Delta_{21} = 6 - 1 - 8 + M = M - 3 > 0$,

$\Delta_{23} = 8 - 1 - 10 + M = M - 3 > 0$, $\Delta_{25} = 8 - 1 - 4 = 3 > 0$,

$\Delta_{32} = 7 - M + 4 - 2 = 9 - M < 0$, $\Delta_{34} = M - M + 4 - 4 = 0$,

$\Delta_{42} = 0 - M + 8 - 2 = 6 - M < 0$, $\Delta_{43} = 0 - M + 8 - 10 + M = -2 < 0$,

$\Delta_{44} = 0 - M + 8 - 4 = 4 - M < 0$, $\Delta_{45} = 0 - M + 8 - 4 = 4 - M < 0$.

Среди Δ_{ij} есть отрицательные. Начиная с клетки (4, 3), строим многоугольник перераспределения с шагом пересчета $h = \min\{20, 60, 50, 70\} = 20$. Строим новый опорный план (табл. 6.15).

Таблица 6.15

$a_i \setminus b_j$	40	60	20	70	70	u_i
60	M	2 – **30**	4	3 +	4 **30**	0
80	6	3 + **30**	8	5 – **50**	8	1
100	4 **40**	7	6 **20**	M	M **40**	M–4
20	0	0	0	0 **20**	0	–4
v_j	8–M	2	10–M	4	4	

Стоимость такого плана перевозок составит $F = 40M + 800$.

Рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 8 + M = 2M - 8 > 0$, $\Delta_{13} = 4 - 0 - 10 + M = M - 6 > 0$,

$\Delta_{14} = 3 - 0 - 4 = -1 < 0$, $\Delta_{21} = 6 - 1 - 8 + M = M - 3 > 0$,

$\Delta_{23} = 8 - 1 - 10 + M = M - 3 > 0$, $\Delta_{25} = 8 - 1 - 4 = 3 > 0$,

$\Delta_{32} = 7 - M + 4 - 2 = 9 - M < 0$, $\Delta_{34} = M - M + 4 - 4 = 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 4 - 8 + M = M - 4 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 4 - 2 = 2 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 4 - 10 + M = M - 6 > 0$, $\Delta_{45} = 0 + 4 - 4 = 0$.

Среди Δ_{ij} есть отрицательные. Начиная с клетки (1, 4), строим многоугольник перераспределения с шагом пересчета $h = \min\{30, 50\} = 30$. Строим новый опорный план (табл. 6.16).

Таблица 6.16

$a_i \setminus b_j$	40	60	20	70	70	u_i
60	M	2	4	3 + **30**	4 – **30**	0
80	6	3 **60**	8	5 **20**	8	2
100	4 **40**	7	6 **20**	M	M **40**	M–4
20	0	0	0	0 – **20**	0 +	–3
v_j	8–M	1	10–M	3	4	

Стоимость такого плана перевозок составит $F = 40M + 770$.

Рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 8 + M = 2M - 8 > 0$, $\Delta_{12} = 2 - 0 - 1 = 1 > 0$,

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 10 + M = M - 6 > 0$, $\Delta_{21} = 6 - 2 - 8 + M = M - 4 > 0$,

$\Delta_{23} = 8 - 2 - 10 + M = M - 4 > 0$, $\Delta_{25} = 8 - 2 - 4 = 2 > 0$,

$\Delta_{32} = 7 - M + 4 - 1 = 10 - M < 0$, $\Delta_{34} = M - M + 4 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 3 - 8 + M = M - 5 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 3 - 1 = 2 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 3 - 10 + M = M - 7 > 0$, $\Delta_{45} = 0 + 3 - 4 = -1 < 0$.

Среди Δ_{ij} есть два отрицательных. Начиная с клетки (4, 5), строим многоугольник перераспределения с шагом пересчета $h = \min\{30, 20\} = 20$. Строим новый опорный план (табл. 6.17).

Стоимость такого плана перевозок составит $F = 40M + 750$.

Рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 - 8 + M = 2M - 8 > 0$, $\Delta_{12} = 2 - 0 - 1 = 1 > 0$,

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 10 + M = M - 6 > 0$, $\Delta_{21} = 6 - 2 - 8 + M = M - 4 > 0$,

$\Delta_{23} = 8 - 2 - 10 + M = M - 4 > 0$, $\Delta_{25} = 8 - 2 - 4 = 2 > 0$,

$\Delta_{32} = 7 - M + 4 - 1 = 10 - M < 0$, $\Delta_{34} = M - M + 4 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 4 - 8 + M = M - 4 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 4 - 1 = 3 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 4 - 10 + M = M - 6 > 0$, $\Delta_{44} = 0 + 4 - 3 = 1 > 0$.

Таблица 6.17

$a_i \setminus b_j$	40	60	20	70	70	u_i
60	M	2	4	3 – **50**	4 + **10**	0
80	6	3 – **60**	8	5 + **20**	8	2
100	4 **40**	7 +	6 **20**	M	M – **40**	M–4
20	0	0	0	0	0 **20**	–4
v_j	8–M	1	10–M	3	4	

Среди Δ_{ij} есть отрицательный. Начиная с клетки (3, 2), строим многоугольник перераспределения с шагом пересчета $h = \min\{50, 60, 40\} = 40$. Строим новый опорный план (табл. 6.18).

Таблица 6.18

$a_i \setminus b_j$	40	60	20	70	70	u_i
60	M	2	4	3 **10**	4 **50**	0
80	6	3 **20**	8	5 **60**	8	2
100	4 **40**	7 **40**	6 **20**	M	M	6
20	0	0	0	0	0 **20**	–4
v_j	–2	1	0	3	4	

Рассчитываем потенциалы и проверяем план на оптимальность:

$\Delta_{11} = M - 0 + 2 = M + 2 > 0$, $\Delta_{12} = 2 - 0 - 1 = 1 > 0$,

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 0 = 4 > 0$, $\Delta_{21} = 6 - 2 + 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{23} = 8 - 2 - 0 = 6 > 0$, $\quad \Delta_{25} = 8 - 2 - 4 = 2 > 0$,

$\Delta_{34} = M - 6 - 3 = M - 9 > 0$, $\quad \Delta_{35} = M - 6 - 4 = M - 10 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 4 + 2 = 6 > 0$, $\quad \Delta_{42} = 0 + 4 - 1 = 3 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 4 - 0 = 4 > 0$, $\quad \Delta_{44} = 0 + 4 - 3 = 1 > 0$.

Все Δ_{ij} неотрицательный, следовательно, план является оптимальным. В окончательной матрице перевозок к элементам третьего столбца прибавляем элементы пятого, дополнительного столбца табл. 6.18. Получаем решение

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 60 \\ 40 & 40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix},$$

состоящее в перевозке с первого склада 50 ед. груза в третий магазин и 10 ед. груза в четвертый магазин, со второго склада 20 ед. груза во второй магазин и 60 ед. груза в четвертый магазин, с третьего склада 40 ед. груза в первый магазин, 40 ед. груза во второй магазин и 20 ед. груза в третий магазин, в третий магазин не довезут 20 ед. груза. Стоимость такого плана перевозок составит

$F = 1150$ тыс. руб. ■

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. На складах A, B, C и D имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 и 60 т. соответственно. Потребители М, Н, К должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т. соответственно. Расходы по перевозке 1 т. продукции заданы матрицей (у.е.)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1) найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной;

2) найти решение данной задачи при условии, что из склада А необходимо перевести потребителю Н ровно 50 т. груза;

3) найти решение данной задачи при условии, что из склада D перевозка потребителю К запрещена, а от поставщика В потребителю К необходимо привезти не менее 100 т. груза;

4) найти решение данной задачи при условии, что из склада С необходимо перевести потребителю М не более 90 т. груза.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Построить графически решение системы линейных алгебраических неравенств. Определить координаты всех угловых точек.

№ варианта	Задача	**№ варианта**	Задача
1	$\begin{cases} -x_1+4x_2 \le 7, \\ 2x_1+x_2 \le 8, \\ x_1-2x_2 \le 0, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \ge 12, \\ 2x_1+4x_2 \le 10, \\ -4x_1+2x_2 \le 7, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1-3x_2 \le 6, \\ x_1-2x_2 \ge -4, \\ 7x_1+x_2 \le 14, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**4**	$\begin{cases} 2x_1-3x_2 \le 6, \\ x_1+2x_2 \ge 4, \\ 4x_1+x_2 \ge 1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 10, \\ x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_1-x_2 \le 1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} x_1+3x_2 \le 12, \\ x_1+x_2 \ge 2, \\ 2x_1-x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 7, \\ x_1+2x_2 \ge 4, \\ 4x_1+x_2 \ge 1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} 3x_1-2x_2 \le 6, \\ x_1-2x_2 \ge -5, \\ 6x_1+x_2 \le 12, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 8, \\ -2x_1+x_2 \le 6, \\ 2x_1+x_2 \ge 6, \\ x_1+2x_2 \ge 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} 5x_1+2x_2 \ge 10, \\ 4x_1+x_2 \le 20, \\ -3x_1+2x_2 \le 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 7, \\ 2x_1-x_2 \le 5, \\ 2x_1+x_2 \ge 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} x_1 \le 2, \\ x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1+x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$

13	$\begin{cases} x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 13, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 52, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} x_1 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
17	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 53, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Задание 2. Найти решение задачи линейного программирования графическим методом.

№ варианта	Задача	**№ варианта**	Задача
1	$f(x) = -x_1 - 4x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**2**	$f(x) = -2x_1 - 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$

3	$f(x) = -2x_1 - x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**4**	$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
5	$f(x) = x_1 + x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 53, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**6**	$f(x) = 3x_1 - x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 13, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 52, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
7	$f(x) = -2x_1 + 5x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**8**	$f(x) = 2x_1 - 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
9	$f(x) = -4x_1 + 2x_2 \to extr,$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**10**	$f(x) = -3x_1 + 2x_2 \to extr,$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
11	$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ 7x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**12**	$f(x) = -x_1 + 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \ge -5, \\ 6x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
13	$f(x) = -x_1 + 4x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 + x_2 \le 20, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**14**	$f(x) = x_1 - 2x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 10, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

15	$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**16**	$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
17	$f(x) = 4x_1 - 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**18**	$f(x) = 2x_1 - 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
19	$f(x) = 3x_1 + 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ -2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**20**	$f(x) = x_1 + 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Задание 3. По условиям задачи построить математическую модель и найти решение графическим методом.

№ варианта	Задача
1	Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа В – 2 чел.-ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства деталей типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг листового материала, а для производства одной детали типа В – 4 кг полимерного материала и 4 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала – соответственно 10 и 12 т. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук. Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 110 и 150 руб.
2	Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500

туристов в месяц и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатели	Судно	
	I	II
Пассажировместимость, чел.	2000	1000
Горючее, т	12000	7000
Экипаж, чел.	125	100

В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 600 человек. Определите количество судов I и II типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов I типа 20 млн руб., а II типа — 10 млн руб. в месяц.

3

Фирма производит и продает столы и шкафы из древесины хвойных и лиственных пород. Расход каждого вида в кубометрах на каждое изделие задан в таблице.

	Расход древесины, $м^3$		Цена изделия, тыс. руб.
	хвойные	лиственные	
Стол	0,15	0,2	0,8
Шкаф	0,3	0,1	1,5
Запасы древесины, $м^3$	80	40	

Определите оптимальное количество столов и шкафов, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

4

С Курского вокзала Москвы ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Пассажировместимость и количество вагонов железнодорожного депо станции отправления указаны в таблице.

Тип вагона		Багажный	Почтовый	Жесткий	Купейный	Мягкий
Количество вагонов в поезде	скорый	1	1	8	4	1
	пассажирский	1	0	5	6	3
Пассажировместимость, чел.				58	40	32

Парк вагонов	14	8	90	80	30

Определите оптимальное количество пассажирских и скорых поездов, обеспечивающих максимальное количество ежедневно отправляемых пассажиров с вокзала.

5

Малое предприятие арендовало мини-пекарню для производства чебуреков и беляшей. Мощность пекарни позволяет выпускать в день не более 50 кг продукции. Ежедневный спрос на чебуреки не превышает 260 шт., а на беляши — 240 шт. Суточные запасы теста и мяса и расходы на производство каждой единицы продукции приведены в таблице.

	Расход на производство, кг/шт.		Суточные запасы сырья, кг
	чебурек	беляш	
Мясо	0,035	0,06	21
Тесто	0,065	0,03	22
Цена, руб./шт.	25	24	

Определить оптимальный план ежедневного производства чебуреков и беляшей, обеспечивающих максимальную выручку от продажи.

6

Издательский дом «Геоцентр-Медиа» издает два журнала: «Автомеханик» и «Инструмент», которые печатаются в трех типографиях: «Алмаз-Пресс», «Карелия-Принт» и Hansaprint (Финляндия), где общее количество часов, отведенное для печати, и производительность печати одной тысячи экземпляров ограничены и представлены в следующей таблице.

Типография	Время печати 1 тыс. экземпляров		Ресурс времени, отведенной типографии, ч
	«Автомеханик»	«Инструмент»	
Алмаз-Пресс	2	14	112
Карелия-Принт	4	6	70
Hansaprint	6	4	80
Оптовая цена, руб./шт.	16	12	

Спрос на журнал «Автомеханик» составляет 12 тыс. экземпляров, а на журнал «Инструмент» — не более 7,5 тыс. экземпляров в месяц. Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которые обеспечат максимальную выручку от продажи.

7

Фирма решила открыть на основе технологии производства чешского стекла, фарфора и хрусталя линию по изготовлению ваз и графинов и их декорированию. Затраты сырья на производство этой продукции представлены в таблице.

Сырье	Расход на производство, гр		Поставки сырья в неделю, кг
	ваза	графин	
Кобальт	20	15	30
Сусальное 24-каратное золото	20	10	25
Оптовая цена, руб./шт.	1400	1000	

Определите оптимальный объем выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продаж, если спрос на вазы не превышает 800 шт. в неделю.

8

Фирма производит одежду для охотников, туристов и охранных структур. Дополнительно фирма решила изготавливать шапки и подстежки из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице. Спрос на шапки составляет не более 300 шт. в месяц, а подстежек – не более 400 шт. в месяц.

Сырье	Расход сырья на производство, дм		Средний запас в месяц, дм
	шапки	подстежки	
Мех	22	140	61600
Ткань	1,5	30	15000
Оптовая цена, руб./шт.	400	800	

Определите объемы производства этих изделий, обеспечивающих максимальный доход от продажи.

9

Коммерческие расчеты, проведенные студентами в деревне, привели к более выгодному использованию яблок и груш путем их засушки и последующей продажи зимой в виде смеси сухофруктов, варианты которых представлены в таблице.

Плоды	Вес 1 кг в составе фруктов		Сбор плодов, кг/день
	смесь 1	смесь 2	
Анис (яблоки)	0,25	0,25	75

Штрейфлинг (яблоки)	0,75	0,25	125
Груши	0	0,5	80
Оптовая цена, руб./кг	40	50	

Из 1 кг плодов получается 200 г сушеных яблок, а груш – 250 г.

Определите оптимальное количество упаковок сухофруктов по 1 кг смесей первого и второго вида, которое необходимо заготавливать в деревне ежедневно для обеспечения максимального дохода от продажи в день.

10

Кондитерская фабрика в Покрове освоила выпуск новых видов шоколада «Лунная начинка» и «Малиновый дождик», спрос на которые составляет соответственно не более 12 и 7 т в месяц. По причине занятости трех цехов выпуском традиционных видов шоколада каждый цех может выделить только ограниченный ресурс времени в месяц. В силу специфики технологического оборудования затраты времени на производство шоколада разные, данные представлены в таблице.

Номер цеха	Время на производство 1 т шоколада, ч		Время, отведенное цехами под производство, ч/мес
	«Лунная начинка»	«Малиновый дождик»	
I	1	7	56
II	2	3	36
III	3	2	42
Оптовая цена, руб./кг	80	60	

Определите оптимальный объем выпуска шоколада (в кг), обеспечивающий максимальную выручку от продажи.

11

Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется, по меньшей мере, 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед.

Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

12

На имеющихся у фермера 400 га земли он планирует посеять

	кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требуют на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей, – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако согласно этому договору фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров. Сколько гектаров нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль?
13	Финансовый консультант фирмы «ABC» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25 000 долл.) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси». Анализируются акции «Дикси - Е» и «Дикси - В». Цены на акции: «Дикси - Е» – 5 долл. за акцию; «Дикси - В» – 3 долл. за акцию. Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук. По оценкам «ABC», прибыль от инвестиций в эти акции в следующем году составит: «Дикси - Е» – 1,1 долл.; «Дикси - В» – 0,9 долл. Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.
14	Завод – производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей – *X и Y.* Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа *Y* – 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа *X* и 1750 деталей типа У в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа *Y* необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10 000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа *X* своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук. Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства *одной* детали типа X составляет 30 ден. ед,, а от производства одной детали типа *Y* — 40 ден. ед.?

15

Фирма производит два широко популярных безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник». Фирма может продать всю продукцию, которая будет произведена. Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника».

Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?

16

На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден. ед. и помещение площадью в 45 м^2. Участок может быть оснащен машинами трех типов, характеристики которых приведены в таблице.

Машина	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Занимаемая площадь, м^2	Производительность за смену, тыс. ед.
M_1	6	9	8
M_2	3	4	4
M_3	2	3	3

Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

17

В опытном хозяйстве установлено, что откорм крупного рогатого скота выгоден только тогда, когда каждое животное получает в суточном рационе не менее 20 кормовых единиц, не менее 2000 г белка и не менее 100 г кальция. Для кормления животных используется сено и силос. Содержание указанных питательных веществ 1 кг корма каждого вида, а также себестоимость 1 кг корма приведены в таблице.

Корм	Содержание в 1 кг			Себестоимость 1 кг корма, ден. ед.
	кормовых единиц	белка, г	кальция, г	
Сено	0,5	40	5	2
Силос	0,2	10	4	1

Возможности хозяйства позволяют включать в суточный рацион не более 20 кг сена, не более 25 кг силоса.

Составить кормовой рацион минимальной стоимости, учитывающий минимальные суточные нормы потребления питательных веществ и возможности хозяйства по ресурсам.

18

Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас, и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице.

Стройматериалы	Расход стройматериалов (м^3) на один дом		Запас стройматериалов, м^3
	I	II	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, м^2	60	50	

Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

19

Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден. ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

20

Для изготовления шкафов и буфетов мебельная фабрика применяет древесину четырёх видов, запасы которой ограничены и составляют соответственно: 12, 16, 12, 8 единиц. Количество единиц древесины для изготовления 1 шкафа и 1 буфета даны в таблице.

Ресурсы	Расход		Запасы
	1 шкаф	1 буфет	
1	0	0,4	12
2	0,4	0	16
3	0,2	0,2	12
4	0,1	0,2	8
Доход, ден. ед.	2	3	

	Требуется составить такой план выпуска продукции, который обеспечивает наибольший доход, если от реализации шкафов получено 2 д. ед. дохода, а буфетов – 3 д. ед. дохода.

Задание 4. По условиям задачи построить математическую модель и найти решение симплекс-методом.

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th>Задача</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Для реализации трех групп товаров коммерческое предприятие располагает тремя видами ограниченных материально-денежных ресурсов в количестве 850, 1120, 1060 единиц. При этом для продажи первой группы товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется ресурса первого вида в количестве 17 единиц, ресурса второго вида – в количестве 8 единиц, ресурса третьего вида – в количестве 4 единиц. Для продажи второй и третьей групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется соответственно ресурса первого вида в количестве 5 и 5 единиц, ресурсов второго вида – в количестве 6 и 6 единиц, ресурсов третьего вида – в количестве 2 и 4 единиц. Доход от продажи трех групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота составляет соответственно8, 7, 4 (тыс. руб.).
Определить плановый объем и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимальным.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Предприятие выпускает три вида изделий, причем суточный выпуск изделий составляет 90 ед. 1 вида, 70 ед. 2 вида и 60 ед. 3 вида. Суточные ресурсы следующие: производственное оборудование – 780 станко-ч, сырье – 850 кг, электроэнергия – 800 кВт. ч. Нормативы затрат оборудования, сырья и электроэнергии на ед. изделия представлены в таблице.
<table>
<tr><td rowspan="2">Ресурсы</td><td colspan="3">Изделие</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Оборудование</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Сырье</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Эл. энергия</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr>
</table>
Цена единицы изделий равна: 1 вида – 8 руб.; 2 вида – 7 руб.; 3 вида – 6 руб. Сколько нужно произвести изделий каждого вида, чтобы получить максимальный доход от выпуска изделий сверх плана?</td></tr>
</table>

3

Производство трех видов продукции должно пройти две операции. Затраты времени на каждой операции на единицу продукции, прибыль от реализации единицы продукции, фонд времени на каждой операции даны в таблице.

Продукция	Затраты на единицу продукции		Прибыль, руб.
	Операция 1	Операция 2	
A	10	4	2
B	5	6	4
C	5	8	3
Фонд времени	500	720	

Сколько продукции каждого вида должно произвести предприятие, чтобы получить максимум прибыли, исходя из указанного в таблице фонда времени, если продукции A должно быть не менее 20 единиц.

4

Цех выпускает три вида деталей – A, B, C. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется следующей таблицей.

Станок	Длительность обработки детали, мин.			Фонд времени, час.
	A	B	C	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Отпускная цена за одну деталь	30	32	30	

Определить план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

5

Нормы затрат на производство разных видов пиццы, объемы ресурсов и стоимость приведены в таблице.

Продукты	Нормы затрат на изготовление 100 шт. пиццы, кг			Запасы продуктов, кг
	ассорти	грибная	салями	
Грибы	6	7	2	20
Колбаса	5	2	8	18
Тесто	10	8	6	25
Цена за	320	240	200	

1 шт., руб.				

Определить оптимальное количество пиццы, обеспечивающее максимальный доход от продаж.

6

На кондитерскую фабрику г. Покров перед Новым годом поступили заказы на подарочные наборы конфет из магазинов. Возможные варианты наборов, их стоимость и товарные запасы представлены в таблице.

Наименование конфет	Вес конфет в наборе, кг			Запасы конфет, кг
	A	B	C	
Сникерс	0,3	0,2	0,4	600
Марс	0,2	0,3	0,2	700
Баунти	0,2	0,1	0,2	500
Цена, руб.	72	62	76	

Определить оптимальное количество подарочных наборов, обеспечивающее максимальный доход от продажи.

7

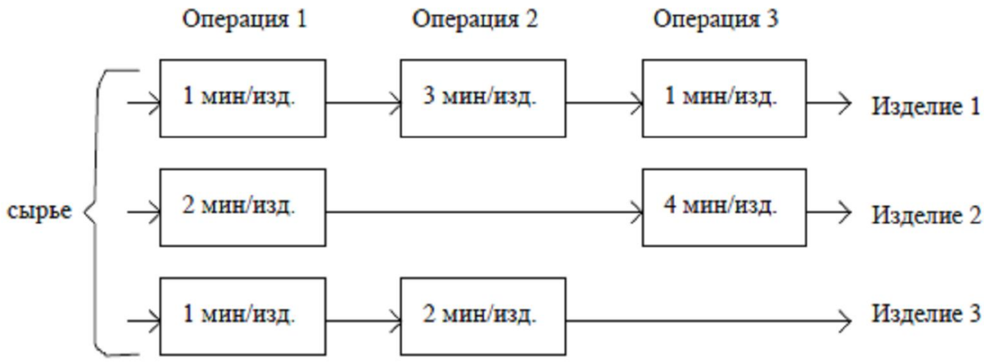
Металлургический цех выпускает три вида продукции: А, Б, В. Прибыль от тонны произведенной продукции каждого вида составляет соответственно 35, 25 и 40 руб. Цех располагает необходимым оборудованием, каждый тип которого имеет свой фонд рабочего времени и производительность.

Тип оборудования	Фонд времени, ч	Производительность по видам продукции, т/ч		
		А	Б	В
Печь обжига	3766	3	2	1
Травильный агрегат	324	0,08	0,08	0,1
Прокатный стан	316	0,1	0,1	0,08

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли.

8

Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции.



Фонд рабочего времени ограничен следующими предельными значениями: для первой операции – 430 мин; для второй операции – 460 мин; для третьей операции – 420 мин. Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 рублей соответственно.

Построить наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции?

9

Для реализации трех групп товаров коммерческое предприятие располагает тремя видами ограниченных материально-денежных ресурсов в количестве 180, 50, 40 единиц. При этом для продажи первой группы товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется ресурса первого вида в количестве 3 единиц, ресурса второго вида – в количестве 2 единиц, ресурса третьего вида – в количестве 2 единиц. Для продажи второй и третьей групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется соответственно ресурса первого вида в количестве 6 и 4 единиц, ресурсов второго вида – в количестве 1 и 2 единиц, ресурсов третьего вида – в количестве 3 и 1 единиц. Доход от продажи трех групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота составляет соответственно 6, 5, 5 (тыс. руб.).

Определить плановый объем и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимальным.

10

Предприятие должно произвести три вида изделий (А, В, С) на двух видах оборудования, предназначенных соответственно для различных операций. Затраты времени (ч) на производство единицы изделий каждого вида, мощность оборудования и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице.

Изделие	Оборудование		Прибыль (руб.)
	1	2	
А	4	6	4
В	5	8	2
С	1	3	3
Мощность (маш.* ч.)	600	450	

	Сколько единиц изделий каждого вида надо произвести, чтобы получить максимум прибыли, если за простой единицы оборудования 1 вида берется штраф в количестве 1 руб./ч, а 2 вида – 0,5 руб./ч.
11	Предприниматель арендовал технологическую линию деревообрабатывающих станков для изготовления вагонки. Магазин «Стройматериалы» заказал комплекты из трех элементов: две вагонки длиной 2 м и одной вагонки длиной 1,25 м. Поставщик завозит на грузовом автомобиле доски толщиной 20 мм, шириной 100 мм, длиной по 6,5 м — 200 шт. и длиной по 4 м — 50 шт. Как распилить доски, чтобы продать максимальное количество комплектов?
12	Составить самый дешевый вариант 1 т кормовой смеси в соответствии с требованиями, представленными в следующей таблице.

Питательные вещества	Требования, % от веса	Содержание питательных веществ, %			
		люцерновая мука	сухая барда	рыбная мука	соевый шрот
Белок	Не менее 35	17	25	60	45
Жиры	Не менее 1,5	2	5	7	0,5
Клетчатка	Не более 8	25	3	1	6,5
Вес	1 т	1	1	1	1
Стоимость, руб. за 1 т		700	900	1500	1000

13	По предписанию врача пациенту необходимо перейти на диету и за сезон употребить питательных веществ, содержащихся во фруктах, в количествах, указанных в таблице.

Вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг фруктов			Нормы потребления, г
	клубника	яблоки	смородина	
p_1	3	2	1	30
p_2	1	3	4	70
p_3	0	0	5	40
p_4	1	0	1	50
Цена, руб. за 1 кг	50	40	30	

<table>
<tr><td></td><td>Определить, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить, чтобы выполнить предписание врача с минимальными расходами.</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Брокеру биржи клиент поручил разместить 100 000 долл. США на фондовом рынке. Необходимо сформировать такой портфель с ценными бумагами, чтобы получить максимальные проценты с вложенного капитала. Выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций-акций А, В, С, Д, которые позволяют получить доход в размерах соответственно 6, 8, 10 и 9% годовых от вложенной суммы. При этом клиент поручил не менее половины инвестиций вложить в акции А и В. С целью обеспечения ликвидности не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в акции Д. Учитывая прогноз на изменение ситуации в будущем, в акции С можно вложить не более 20% капитала. Специфика налогообложения указывает на необходимость вложения в акции А не менее 30% капитала.
Определить распределение инвестиций капитала, обеспечивающее максимальный годовой доход.</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны 5 типов проектов. По каждому из проектов известны длительность закладки фундаментов и строительства остальной части здания, а также жилая площадь дома (табл.). Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий.
<table>
<tr><td rowspan="2">Вид работы</td><td colspan="5">Длительность выполнения (дней) для типового проекта</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Закладка фундамента</td><td>20</td><td>30</td><td>35</td><td>30</td><td>40</td></tr>
<tr><td>Остальные работы</td><td>40</td><td>20</td><td>60</td><td>35</td><td>25</td></tr>
<tr><td>Жилая площадь (кв. м)</td><td>3000</td><td>2000</td><td>5000</td><td>4000</td><td>6000</td></tr>
</table>
Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течение года (300 раб. дней) при условии, что домов типа 2 должно быть построено не менее 10.</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Полосы листового проката длинной 200 см необходимо разрезать на заготовки трех типов: А, Б и В соответственно 57, 82 и 101 см для производства 50 изделий. На каждое изделие требуется по 4 заготовки типов А и Б и 5 заготовок типа В. Можно указать пять</td></tr>
</table>

	способов раскроя одной полосы. Количество заготовок, нарезаемых из одной полосы при каждом способе раскроя, приведено в табл.

Способ	Количество заготовок типа		
	А	Б	В
1	3	–	–
2	2	1	–
3	1	–	1
4	–	2	–
5	–	–	1

Определить, какое количество полос проката нужно разрезать каждым способом для изготовления 50 изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими.

17

Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности приведены в таблице.

Культура	Урожайность, ц/га	
	1	2
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

По плану должно быть собрано не менее 1500ц пшеницы и 4500ц кукурузы. Цена 1ц пшеницы 6 руб, кукурузы – 4 руб.

Критерий оптимальности - максимум валовой продукции в денежном выражении.

18

В сплав может входить не менее 4% никеля и не более 80% железа. Для составления сплава используются три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. Стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нем соответствующих компонентов сплава представлены в табл.

Компоненты	Содержание компонентов для видов сырья, в %		
	1	2	3
Железо Никель Прочие	70 5 25	90 2 8	85 7 8
Стоимость, коп/кг	6	4	5

Определить состав сплава таким образом, чтобы стоимость

<table>
<tr><td></td><td>1кг была минимальной.</td></tr>
<tr><td>19</td><td>
Совхоз отвел два земельных массива размерами в 5000, 9000 га под посевы ржи, пшеницы. Средняя урожайность по массивам указана в табл.
<table>
<tr><th rowspan="2">Культура</th><th colspan="2">Средняя урожайность, ц/га</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>Рожь</td><td>12</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Пшеница</td><td>14</td><td>22</td></tr>
</table>
За один 1 ц. ржи совхоз получает 2 руб. прибыли, за 1 ц. пшеницы – 2,5 руб.
Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану он обязан сдать не менее 1900 т. ржи и 15800 т. пшеницы?
</td></tr>
<tr><td>20</td><td>
Нормы затрат на производство разных видов пирожков, объемы ресурсов и стоимость приведены в таблице.
<table>
<tr><th rowspan="2">Продукты</th><th colspan="3">Нормы затрат на изготовление 100 шт. пирожков, кг</th><th rowspan="2">Запасы продуктов, кг</th></tr>
<tr><th>мясной</th><th>капустный</th><th>казначейский</th></tr>
<tr><td>Капуста</td><td>0</td><td>3</td><td>1,5</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Мясо</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Тесто</td><td>5</td><td>4,5</td><td>5,5</td><td>35</td></tr>
<tr><td>Цена за 1 шт., руб.</td><td>18</td><td>13</td><td>15</td><td></td></tr>
</table>
Определить оптимальное количество пирожков, обеспечивающее максимальный доход от продаж.
</td></tr>
</table>

Задание 5. Составить диету включающие белки, жиры и углеводы в количестве не менее b_i (i = 1, 2, 3). Для составления смеси можно использовать три вида продуктов B_j (j = 1, 2, 3), содержащую белки жиры и углеводы в количестве a_{ij}. Цена продуктов C_j. Необходимо определить такой набор продуктов, который обеспечил бы необходимое содержание питательных веществ, и полная стоимость его при этом была бы наименьшей.

Требуется:

1) составить математическую модель прямой и двойственной задач; раскрыть экономический смысл всех переменных, принятых в задаче;

2) симплекс-методом решить двойственную задачу;

3) найти решение исходной задачи с использование теорем двойственности.

Параметр	**Номер варианта**									
	1, 11	**2, 12**	**3, 13**	**4, 14**	**5, 15**	**6, 16**	**7, 17**	**8, 18**	**9, 19**	**10, 20**
b_1	10	8	22	19	1	1	2	17	14	22
b_2	3	5	0	9	14	13	9	3	6	13
b_3	13	15	9	15	12	0	14	6	17	6
a_{11}	3	2	0	1	5	6	10	3	6	1
a_{12}	2	2	1	1	7	5	5	9	3	5
a_{13}	7	9	5	4	7	4	6	4	4	6
a_{21}	9	5	8	0	7	5	2	4	7	3
a_{22}	4	7	9	5	6	8	10	0	0	4
a_{23}	8	6	0	2	6	8	4	7	1	10
a_{31}	3	5	7	3	7	18	1	3	2	10
a_{32}	9	14	9	8	12	11	6	9	12	0
a_{33}	8	11	0	11	10	3	20	9	2	4
C_1	29	20	26	18	16	23	29	26	26	11
C_2	28	25	27	25	15	10	30	20	16	25
C_3	25	13	20	15	19	22	10	26	13	24

Задание 6. Использовать аппарат теории двойственности для экономико-математического анализа оптимального плана задачи линейного программирования.

Вариант 1, 11

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и II видов на 4 и 3 единицы соответственно и уменьшении на 3 единицы сырья III вида.

Вариант 2, 12

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена изделия	9	6	4	7	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья II и III видов на 120 и 160 единиц соответственно и уменьшении на 60 единиц запасов сырья I вида.

Вариант 3, 13

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	2	1	3	2	200
II	1	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
Цена изделия	5	7	3	6	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и II видов на 80 и 100 единиц соответственно и уменьшении на 50 единиц запасов сырья III вида.

Вариант 4, 14

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I II III	4 3 1	2 1 2	1 2 3	1 3 2	180 210 244
Цена изделия	10	14	12	13	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и III видов на 80 и 90 единиц соответственно и уменьшении на 60 единиц запасов сырья II вида.

Вариант 5, 15

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	4	3	2	200
II	1	1	2	2	80
III	1	1	2	2	140
Цена изделия	40	60	80	70	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья каждого вида на 18 единиц.

Вариант 6, 16

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	18	15	2	9	360
II	6	4	8	4	192
III	5	3	3	6	180
Цена изделия	9	10	16	11	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I вида на 45 единиц и уменьшении на 9 единиц запасов сырья II вида.

Вариант 7, 17

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	2	1	1	3	300
II	1	0	2	1	70
III	1	2	1	0	340
Цена изделия	8	3	2	1	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья III вида на 24 единицы и уменьшении на 15 единиц запасов сырья I вида.

Вариант 8, 18

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	2	430
II	3	0	2	4	460
III	1	4	0	3	420
Цена изделия	3	2	5	7	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции, если запас сырья I вида увеличить на 50 единиц, а II — уменьшить на 50 единиц;

Вариант 9, 19

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I II III	2 1 3	1 5 0	1 3 6	4 0 1	2400 1200 3000
Цена изделия	7	3	6	12	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I вида на 100 единиц и уменьшении на 150 единиц запасов сырья II вида.

Вариант 10, 20

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	3	6	4	8	2000
II	10	15	20	4	7400
III	0	3	5	6	1500
Цена изделия	6	10	9	11	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

– проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

– определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запаса ресурса I вида на 240 единиц и уменьшении на 350 единиц запасов сырья II вида.

Задание 7. Найти решение транспортной задачи методом потенциалов.

В пунктах A_i (i = 1, 2, 3) производится однородная продукция в количестве a_i единиц. Себестоимость единицы продукции в *i-м* пункте равна C_i. Готовая продукция поставляется в пункты B_j (j = 1, 2, 3, 4), потребности которых составляют b_j ед. стоимость перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j задана матрицей C_{ij}.

Требуется:

1) написать математическую модель прямой и двойственной задач с указанием экономического смысла всех переменных;

2) составить план перевозки продукции, при котором минимизируются суммарные затраты по ее изготовлению и доставке потребителям для условия

что продукция произведенная в пункте A_i, где себестоимость её производства наименьшая, распределяется полностью;

3) вычислить суммарные минимальные затраты Z_{min};

4) узнать в какие пункты развозится продукция от поставщиков;

4) установить пункты, в которых останется нераспределенная продукция, и указать её объем.

Параметр	**Номер варианта**									
	1, 11	**2,12**	**3, 13**	**4, 14**	**5, 15**	**6, 16**	**7, 17**	**8, 18**	**9, 19**	**10, 20**
a_1	449	152	492	283	393	461	320	476	115	420
a_2	230	401	472	442	369	113	198	469	470	388
a_3	439	358	232	118	136	300	305	185	373	342
C_1	2	1	5	2	3	1	6	2	4	4
C_2	3	1	5	5	5	4	2	2	3	2
C_3	5	1	4	1	1	3	1	5	4	3
b_1	122	211	164	195	296	279	146	144	187	291
b_2	188	200	166	232	270	110	131	196	147	175
b_3	135	144	103	131	140	162	201	123	161	196
b_4	294	279	211	163	114	298	178	170	220	114
C_{11}	4	3	10	8	9	7	2	6	9	4
C_{12}	4	8	2	2	4	10	9	6	6	9
C_{13}	3	6	9	7	4	9	2	1	4	1
C_{14}	2	7	9	8	9	3	3	4	3	7
C_{21}	2	6	4	6	10	5	9	9	2	2
C_{22}	8	3	5	2	10	2	10	3	3	2
C_{23}	7	9	5	7	8	7	1	6	5	6
C_{24}	2	6	7	2	8	7	2	7	8	9
C_{31}	4	10	6	10	3	3	10	2	9	4
C_{32}	2	8	3	4	6	7	6	8	10	3
C_{33}	2	5	7	4	7	4	3	9	6	9
C_{34}	10	3	5	6	8	7	4	10	2	3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебно-методическом пособии рассмотрены краткие теоретические сведения по разделу «Модели линейного программирования», являющейся одной из ключевых тем дисциплины «Исследование операций».

В основной части пособия отражен основной материал: понятие и постановка задач линейного программирования, методы исследования основных типов линейных моделей. В первой главе рассматривается общая постановка задач ЛП и приводятся примеры таких моделей. Во второй главе рассматривается графический метод решения задач ЛП. Третья глава посвящена исследованию линейных задач с использованием симплекс-метода и М-метода. В четвертой главе изложены вопросы решения целочисленных задач линейного программирования. В пятой главе рассматриваются вопросы двойственных задач линейного программирования, методы решения их задач, а так вопросы устойчивости двойственных оценок. В шестой главе изложены модели транспортного типа и методы решения транспортных задач.

По каждой тематике представлены примеры решения задач с подробными комментариями. В конце пособия приведены варианты заданий контрольной работы.

Учебно-методическое пособие будет полезно студентам направления подготовки «Прикладная математика и информатика» в рамках освоения дисциплины «Теория игр и исследования операций», студентам направлений подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии», «Прикладная информатика», «Бизнес-информатика» при изучении дисциплины «Исследование операций», а также студентами направления подготовки «Экономика» при изучении курса «Методы оптимальных решений».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Балдин, К.В. Математическое программирование: учеб. / К.В. Балдин, Н.А. Брызгалов, А.В. Рукосуев; под ред. К.В. Балдина. – М.: Дашков и К, 2009. – 219 с.

2. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие: рек. УМО вузов / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2001, 2002, 2003, 2005. – 368 с.

3. Васин, А.А. Исследование операций: учеб. пособие: рек. НМС / А.А. Васин, П.С. Краснощеков, В.В. Морозов. – М.: Академия, 2008. – 464 с.

4. Волков, И.К. Исследование операций: Учеб для вузов / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко, под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. М.Э. Баумана, 2000. – 436 с.

5. Загребаев, А.М. Методы математического программирования в задачах оптимизации сложных технических систем: учебное пособие: рек. УМО «Ядерные физика и технологии» / А.М. Загребаев, Н.А. Крицына, Ю.П. Кулябичев, Ю.Ю. Шумилов. – М.: МИФИ, 2007. – 332 с.

6. Исследование операций в экономике: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Маркет ДС, 2007. – 408 с.

7. Киреев, А.П. Микроэкономика для продвинутых: задачи и решения: учеб. пособие / А.П. Киреев, П.А. Киреев. – М.: Вуз. учебник: ИНФРА-М, 2013. – 160 с.

8. Красс, М.С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании: учеб.: рек. Мин. обр. РФ / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 2- изд., испр., 4-е изд., испр.3-е изд., испр. . – М.: Дело, 2001, 2003, 2002. – 688 с.

9. Морозов, В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ / В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Федоров. – 2-е изд., испр. – М.: Либроком, 2009. – 287 с.

10. Тарасов, Л.В. Закономерности окружающего мира: в 3 кн. / Л.В. Тарасов. – М.: Физматлит, 2004. – Кн. 2 : Вероятность в современном обществе. – 2004. – 360 с.

11. Таха, Х.А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

12. Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник: рек. Мин. обр. РФ / Г.П. Фомин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Надежда Николаевна Максимова,
доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ,
кандидат физико-математических наук

Исследование операций. Модели линейного программирования. Учебно-методическое пособие

Заказ 698.