МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное агенство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

(ГОУВПО «АМГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

Т.В. Труфанова

«___»_________2007г.

ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебно – методический комплекс дисциплины

для специальностей

010701 – «Физика»

Составитель: В.А. Кузьменко

Благовещенск 2007

ББК   *Печатается по решению*
Л   *редакционно-издательского совета*
факультета математики и
инфрорматики
Амурского государственного
университета

Кузьменко В.А.

Векторные и тензорный анализ. Учебно-методичесий комплекс дисциплин для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010701 «Физика». – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007.

Учебно – методический комплекс дисциплины «Векторные и тензорный анализ» содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, материал для проведения практических занятий, контролирующие материалы для промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе 4

2. Содержание дисциплины 4

2.1. Федеральный компонент. 4

2.2. Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий 4

2.3. Практические занятия, их содержание, объем в часах 5

2.4. Самостоятельная работа студентов 5

2.5. Вопросы к экзамену 6

2.6. Требования к оценке знаний студентов 7

3. Краткий курс лекций 7

4 Комплект экзаменационных билетов по дисциплине 25

5. Учебно-методические материалы по дисциплине 35

6. Необходимое техническое и программное обеспечение 35

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Программа курса «Векторный и тензорный анализ» составлена в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Цель дисциплины – изучения основных теоретических положений векторного и тензорного анализа и освоение способов их применение для решения задач физики.

Для усвоения материала дисциплины студентам необходимо знание в объёме университетского курса отдельных разделов классической математики и физики.

По завершении изучения дисциплины студент должен:

- владеть основными положениями векторного и тензорного анализа;
- иметь представление об элементах теории групп;
- уметь формулировать в терминах векторного и тензорного анализа задачи физики и строить соответствующие решения этих задач.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Федеральный компонент.

ЕН.Ф.03. Векторный и тензорный анализ.

тензоры и операции над ними. Скалярное и векторное поле. Основные операции векторного анализа. Формулы Грина, Гаусса-Остроградского, стокса. Элементы теории групп.

2.2. Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий

1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. 2ч.
2. Градиент скалярного поля. Интеграл по поверхности. Формула Гаусса-Остроградского. 3ч.
3. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность. 2ч.
4. Дивергенция векторного поля. Векторная формулировка теоремы Гаусса-Остроградского. 2ч.

5. Оператор набла ∇. Физический смысл $div\vec{A}$. Соленоидальное поле. 2ч.
6. Циркуляция векторного поля. Формула Грина. Теорема Стокса. 2ч.
7. Вихрь векторного поля. Векторная формулировка теоремы Стокса. 2ч.
8. Ковариантные и контравариантные координаты вектора. 4ч.
9. Преобразования координат. Ковариантная производная вектора. 3ч.
10. Алгебраические операции над геометрическими объектами. 2ч.
11. Определение тензора. Свойства тензоров. Обратный тензорный признак. 2ч.
12. Ковариантная производная для тензоров ранга ≥ 2. Абсолютный дифференциал тензора. 2ч.
13. Физические компоненты тензоров. 3ч.
14. Матричное представление тензорных операций. 3ч.
15. Элементы теории групп. 2ч.

ИТОГО: 36ч.

2.3. Практические занятия, их содержание, объем в часах

1. Поверхности и линии уровня скалярных полей. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. 2ч.
2. Дифференциальные уравнения векторных линий. Поток векторного поля. 3ч.
3. Поток вектора через замкнутую поверхность. Дивергенция векторного поля. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. 5ч.
4. Ковариантные и контравариантные координаты вектора. Локальный базис. Жонглирование индексами. 3ч.
5. Преобразование координат. Ковариантная производная вектора. 2ч.
6. Операции симметрирования, альтернирования, суммирования и свёртки. 3ч.

2.4. Самостоятельная работа студентов (18 часов)

1. Выполнение индивидуальных расчётно-графических работ из 15 заданий.
2. Выполнение заданий по практическим занятиям (5-8 задач).
3. Подготовка к лекциям и к экзамену.

2.5. Вопросы к экзамену

1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня.
2. Скалярное поле. Производная по направлению.
3. Градиент скалярного поля.
4. Интеграл по поверхности. Формула Гаусса-Остроградского.
5. Векторное поле. Векторные линии.
6. Поток векторного поля через поверхность.
7. Дивергенция векторного поля.
8. Векторная формулировка теоремы Гаусса-Остроградского.
9. Оператор Гамильтона ∇ набла.
10. Физический смысл оператора $div\vec{A}$.
11. Соленоидальное поле.
12. Циркуляция векторного поля.
13. Формула Грина.
14. Теорема Стокса.
15. Вихрь векторного поля.
16. Векторная формулировка теоремы Стокса.
17. Ковариантные и контрвариантные координаты вектора.
18. Немой и свободный индексы.
19. Локальный базис. Фундаментальная матрица.
20. Взаимный базис. Жонглирование индексами.
21. Преобразование векторов репера при переходе от одной системы координат к другой.
22. Преобразование координатных компонент любого вектора при смене системы координат.
23. Преобразование ковариантных компонент любого вектора.
24. Частные производные от векторов репера по координатам.
25. Ковариантная производная контрвариантных компонент любого вектора.
26. Ковариантная производная ковариантных компонент любого вектора.
27. Геометрический объект. Алгебраические операции с объектами.

28. Определение тензора. Линейная комбинация тензоров одного строения. Свёртка двух тензоров.
29. Обратный тензорный признак.
30. Ковариантная производная тензоров порядка ≥ 2.
31. Физические компоненты тензоров.
32. Матричное представление тензорных операций.
33. Элементы теории групп.

2.6. Требования к оценке знаний студентов

Экзамен сдается в 3-ем семестре. В билет входят два вопроса и задача.

Оценка "отлично" ставится при полном ответе на вопросы, правильном решении задачи и ответе на 1-2 дополнительных вопроса.

Оценка "хорошо" ставится, если один из вопросов раскрыт не полностью или задача решена не до конца при положительном ответе на 1-2 дополнительных вопроса.

Оценка "удовлетворительно" ставится при частичном ответе на один вопрос и полном ответе на другой с правильно решенной задачей, а также в случае ответа на оба вопроса с незначительными неточностями при отсутствии решения задачи и ответе на дополнительные вопросы. В остальных случаях ставится оценка "неудовлетворительно".

3. КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

Тема 1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению.

Повторении скалярного и векторного произведений. Смешанное или векторно-скалярное произведение трёх векторов. Двойное векторное произведение.

Опр. Векторным или скалярным полем называется область пространства любая точка которой отнесено значение некоторого вектора или скаляра.

Поверхности уровня (эквипотенциальные поверхности).

Задание формулы градиента в точке.

Тема 2. Градиент скалярного поля.

Градиент (от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий) — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. Например, если взять высоту поверхности Земли над уровнем моря (2-мерное пространство), то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «в горку».

Как видно из объяснения, градиент является векторной функцией, а величина, которую он характеризует — функцией скалярной.

Формально, для случая трёхмерного пространства, градиентом называется векторная функция с компонентами $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\phi}{\partial z}$, где φ — некоторая скалярная функция координат x, y, z.

Если φ — функция *n* переменных $x_1, \ldots, x_n$, то её градиентом будет n-мерный вектор

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right),$$

компоненты которого равны частным производным φ по всем её аргументам.

Градиент обозначается gradφ или, с использованием оператора набла, $\nabla\phi$.

Из определения градиента следует, что:

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

Свойства

Для любого постоянного числа $c \in \mathbb{R}$и скалярных полей $\vec{u}, \vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ справедливо следующее:

- $\mathrm{grad}\, c = \vec{0}$

Линейность

- $\mathrm{grad}\,(c \cdot \vec{u}) = c \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u}$
- $\mathrm{grad}\,(\vec{u} + \vec{v}) = \mathrm{grad}\, \vec{u} + \mathrm{grad}\, \vec{v}$

Правило Лейбница

- $\mathrm{grad}\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{v} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{u}$, где $\vec{u} \cdot \vec{v}$— скалярное произведение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Пример **Например, градиент функции φ(*x*,*y*,*z*) = 2*x* + 3*y*^{2} − *sin*(*z*) будет представлять собой:**

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \left(2, 6y, -cos(z)\right)$$

В физике

В различных отраслях физики используется понятие градиента различных физических полей.

Например, *градиент концентрации* — нарастание или уменьшение по какому-либо направлению концентрации растворённого вещества, *градиент температуры* - увеличение или уменьшение по направлению температуры среды и т.д.. Градиент может быть вызван различными причинами, например, механическим препятствием, действием электромагнитных, гравитационных или других полей или различием в растворяющей способности граничащих фаз, например, октанол/вода.

Геометрический смысл

Рассмотрим семейство линий уровня функции φ:

$$\gamma(h) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \phi(x_1, \ldots, x_n) = h\}.$$

Нетрудно показать, что градиент функции φ в точке $\vec{x}^0$ перпенидкулярен её линии уровня, проходящей через эту точку. Модуль градиента показывает максимальную скорость изменения функции в окрестности $\vec{x}^0$, то есть частоту линий уровня. Например, линии уровня высоты изображаются на топографических картах, при этом модуль градиента показывает крутизну спуска или подъема в данной точке.

Связь с производной по направлению

Используя правило дифференцирования сложной функции, нетрудно показать, что производная функции φ по направлению $\vec{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ равняется скалярному произведению градиента φ на вектор $\vec{e}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} e_1 + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} e_n = (\nabla \phi, \vec{e})$$

Таким образом, для вычисления производной по любому направлению достаточно знать градиент функции, то есть набор всех её частных производных.

Тема 3. Интеграл по поверхности. Формула Гаусса-Остроградского

Формула Остроградского — формула интегрального исчисления функций многих переменных, устанавливающая связь между n-кратным интегралом по области и $(n-1)$-кратным интегралом по её границе. Пусть $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ есть векторное поле на $\mathbb{R}^n$, такое что функции v_i вместе со своими частными производными $\partial v_i / \partial x_j$ интегрируемы по Лебегу в ограниченной области Ω, граница $\partial\Omega$ которой является объединением конечного множества кусочно гладких $(n-1)$-мерных гиперповерхностей, ориентированных с помощью внешней единичной нормали ν. Тогда формула Остроградского имеет вид

$$\int_\Omega \mathrm{div} V = \int_{\partial\Omega} \langle \nu, V \rangle$$

где

$$\mathrm{div} V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

есть дивергенция поля V.

Иначе говоря, интеграл дивергенции поля по области равен его потоку сквозь границу области.

История

Для гладких функций эта формула была впервые получена в трёхмерном случае Остроградским в 1828 (опубликована в 1831). На n-мерный случай была обобщена им же в 1834 (опублковано в 1838). С помощью этой формулы Остроградский нашёл выражение производной по параметру от n-кратного интеграла с переменными пределами и получил формулу для вариации n-кратного интеграла. При $n = 3$ для одного частного случая формула Остроградского была получена Гауссом в 1813 , поэтому иногда она называется также **формулой Остроградского — Гаусса**. Обобщением формулы Остроградского является формула Стокса для многообразий с краем.

Тема 4. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность.

Поток векторного поля через гиперповерхность - поток Ф векторного поля $\vec{A}$ через поверхность *S* - интеграл по поверхности

$\Phi = \int \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, при этом векторный элемент площади поверхности определяется как $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{n}$,

где $\vec{n}$- единичный вектор, нормальный к поверхности

Тема 4. **Дивергенция векторного поля**.

Дивергенция (расходимость) — скалярный дифференциальный оператор векторного поля, который показывает, насколько поле имеет тенденцию расходиться из данной точки.

Оператор дивергенции обозначается так: div F.

Допустим, что векторное поле дифференцируемо в некоторой области. Тогда в трёхмерном декартовом пространстве дивергенция будет определяться выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Это же выражение можно записать с использованием оператора набла

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

Физическая интерпретация

С точки зрения физики, дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или потребителем потока поля. То есть, альтернативное определение дивергенции выглядит:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{S \to 0} \frac{\Phi_{\mathbf{F}}}{V}$$

где *Ф* — поток векторного поля **F** через сферическую поверхность площадью *S*, ограничивающую объем *V*. Это определение применимо, в отличие от первого, не только к декартовым системам координат

$\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$точка поля является источником $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$точка поля является стоком $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга

Например, если в качестве векторного поля взять совокупность направлений наискорейшего спуска на земной поверхности, то дивергенция покажет местоположение вершин и впадин, причём на вершинах дивергенция будет положительна (направления спуска расходятся от вершин), а на впадинах отрицательная (ко впадинам направления спуска сходятся).

Свойства

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

- Линейность

$$\mathrm{div}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\,\mathrm{div}(\mathbf{F}) + b\,\mathrm{div}(\mathbf{G})$$

для любых векторных полей **F** и **G** и для всех действительных чисел *a* и *b*.

- Если φ — скалярное поле, а **F** — векторное, тогда:

$$\mathrm{div}(\varphi\mathbf{F}) = \mathrm{grad}(\varphi)\cdot\mathbf{F} + \varphi\,\mathrm{div}(\mathbf{F}),$$

или

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F} + \varphi\,(\nabla\cdot\mathbf{F}).$$

- Свойство, связывающее векторные поля **F** и **G**, заданные в трехмерном пространстве, с ротором:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{G}\ -\ \mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}(\mathbf{G}),$$

или

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}).$$

- Дивергенция от градиента есть лапласиан:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\varphi)) = \Delta\varphi$$

- Дивергенция от ротора:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathbf{F})) = 0$$

Тема 5. **Оператор набла ∇. Физический смысл $div\vec{A}$. Соленоидальное поле**.

Опера́тор на́бла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом ∇(набла).

Под этим оператором подразумевается вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в *n*-мерном пространстве.

Для трёхмерного декартового пространства оператор набла определяется следующим образом $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

Свойства оператора набла

Этот вектор приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, к которой он применяется.

Если умножить вектор ∇на скаляр φ, то получится вектор

$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$, который представляет собой градиент функции φ.

Если вектор ∇скалярно умножить на вектор $\vec{a}$, получится скаляр

$\nabla\vec{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, то есть дивергенция вектора $\vec{a}$.

Если ∇умножить на $\vec{a}$ векторно, то получится ротор вектора $\vec{a}$.

Также, произведение $\nabla\nabla = \nabla^2$есть оператор Лапласа, и обозначается Δ. В декартовых координатах оператор Лапласа определяется следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поскольку оператор набла является дифференциальным оператором, то при преобразовании выражений необходимо учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференцирования. Например:

$$\mathrm{grad}(\phi\psi) = \nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi = \psi\mathrm{grad}\phi + \phi\mathrm{grad}\psi$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = \nabla(\nabla\phi) = (\nabla\nabla)\phi = \Delta\phi$$

Тема 6. **Циркуляция векторного поля. Формула Грина.**

Теорема Грина

Если бы в электростатических задачах мы всегда имели дело с дискретным или непрерывным распределением заряда без всяких граничных поверхностей, то общее решение для скалярного потенциала

$$\Phi(x) = \int \frac{\varrho(x')}{|x - x'|}\, d^3x,$$

было бы самой удобной и непосредственной формой решения таких задач и не нуж нужны были бы ни уравнение Лапласа, ни уравнение Пуассона. Однако в действительности в целом ряде, если не в большинстве, задач электростатики мы имеем дело с конечными областями пространства (содержащими или не содержащими заряд), на граничных поверхностях которых заданы определенные граничные («краевые») условия. Эти граничные условия могут быть заменены некоторым соответственно подобранным распределением зарядов вне рассматриваемой области (в частности, в бесконечности), однако приведенное выше соотношение в этом случае уже непригодно для расчета потенциала, за исключением некоторых частных случаев (например, в методе изображений).

Для рассмотрения задач с граничными условиями необходимо расширить используемый нами математический аппарат, а именно вывести так называемые формулы, или теоремы Грина (1824 г.). Они получаются непосредственно из теоремы о дивергенции

$$\int_V \mathrm{div}\ A\, d^3x = \oint_S A \cdot n\, da,$$

которая справедлива для любого векторного поля A, определенного в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S. Пусть $A = \varphi \mathrm{grad}\ \psi$, где φ и ψ— произвольные скалярные функции. Тогда

$$\mathrm{div}\ (\varphi \mathrm{grad}\ \psi) = \varphi\nabla^2\psi + \mathrm{grad}\ \varphi \cdot \mathrm{grad}\ \psi (1)$$

и

$$\varphi \mathrm{grad}\ \psi \cdot n = \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} (2),$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная на поверхности S (по направлению внешней нормали по отношению к объему V). Подставляя (1) и (2) в теорему о дивергенции, мы придем к *первой формуле Грина*

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \mathrm{grad}\ \varphi \cdot \mathrm{grad}\ \psi)\, d^3x = \oint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, da (3).$$

Напишем такую же формулу, поменяв в ней местами φ и ψ, и вычтем ее из (3). Тогда члены с произведением $\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi$ сократятся и мы получим *вторую формулу Грина*, называемую иначе *теоремой Грина*:

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\,d^3x=\oint_S[\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}]\,da.$$

В физике и математике теорема Грина дает соотношение между линейным интегралом простой ограниченной кривой С и двойным интегралом по плоской поверхности D ограниченной кривой С. И в общем виде записывается следующим образом

$$\int_C L\,dx+M\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)\,dA.$$

В физике Теорема Грина в основном используется для решения двумерных потоковых интегралов, исходя из того, что сумма исходящих потоков в любой точки области равна результирующему потоку, суммируемому по всей ограничивающей поверхности.

Третье уравнение Грина получается из второго уравнения путем замены $\psi=\dfrac{1}{x-y}$ и замечания о том, что $\nabla^2\psi=-4\pi\delta\left(\mathbf{x}-y\right)$ в R^3. Если ϕ, дважды деференцируема на U.

$$\oint_{\partial U}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{y})-\phi(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right]\,dS_{\mathbf{y}}-\int_U\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\nabla^2\phi(\mathbf{y})\right]\,dV_{\mathbf{y}}=k$$

$k=4\pi\phi(x)$, если $\boldsymbol{x}$ внутренней части U, $2\pi\phi(x)$, если $\boldsymbol{x}$ ∂U и плоскость касания только в $\boldsymbol{x}$.

Тема 7. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса.

Ро́тор (Вихрь) — векторный оператор векторного поля, показывает насколько и в какую сторону закручено поле в каждой точке. Ротор обозначается значком **rot** или : $\nabla\times F$, где ∇векторный дифференциальный оператор набла, и F изучаемое векторное поле.

В декартовой системе координат $\nabla\times F$ вычисляется следующим образом:

$$\operatorname{rot}(\vec{i}F_x+\vec{j}F_y+\vec{k}F_z)=\vec{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Для простоты восприятия можно представлять ротор как

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times F$$

Или как детерминант следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

где **i**, **j** и **k** - единичные векторы для осей *x*, *y* и *z* соответственно.

Векторное поле, ротор которого равен нулю в любой точке, называется потенциальным (*безвихревым*).

Физическая интерпретация

Например, если в качестве векторного поля взять поле скоростей ветра на Земле, то для циклона, вращающегося по часовой стрелке, ротор будет направлен вниз, а для циклона, вращающегося против часовой стрелки - вверх. В тех местах, где ветры дуют равномерно и прямолинейно, ротор будет равен нулю.

Основные свойства

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

- Линейность

$$\operatorname{rot}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a \operatorname{rot} \mathbf{F} + b \operatorname{rot} \mathbf{G}$$

для любых векторных полей **F** и **G** и для всех действительных чисел *a* и *b*.

- Если φ — скалярное поле, а **F** — векторное, тогда:

$$\operatorname{rot} \varphi\mathbf{F} = \operatorname{grad} \varphi \ \times \mathbf{F} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{F},$$

или

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi\,(\nabla \times \mathbf{F}).$$

- Дивергенция ротора равна нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

или

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

- Если $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, то $\mathbf{F}$есть градиент скалярного поля φ:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = \operatorname{grad} \varphi$$

- Теорема Стокса: циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через этот контур:

$$\oint_C \mathbf{F}\,\mathbf{dl} = \int \operatorname{rot} \mathbf{F}\,\mathbf{dS}$$

Теорема Стокса — одна из основных теорем дифференциальной геометрии и математического анализа об интегрировании дифференциальных форм, которая обобщает несколько теорем анализа. Названа в честь Дж. Г. Стокса.

Общая формулировка

Пусть на ориентируемом многообразии *M* размерности *n* заданы ориентируемое *p*-мерное подмногообразие σ и дифференциальная форма ω степени *p*−1 класса C^1 ($1 \leq p \leq n$). Тогда если граница подмногообразия ∂σ положительно ориентирована, то

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega,$$

где $d\omega$ обозначает внешнюю производную формы ω.

Теорема распространяется на линейные комбинации подмногообразий одной размерности, так называемые цепи. В этом случае формула Стокса реализует двойственность между когомологией де Рама и гомологией циклов многообразия M.

Частные случаи

Формула Ньютона — Лейбница

Пусть дана кривая l, соединяющая две точки a и b (одномерная цепь) в многообразии произвольной размерности. Форма ω нулевой степени класса C^1 — это дифференцируемая функция f. Формула Стокса тогда записывается в виде

$$\int_l df = \int_l f'\,dx = \int_a^b f = f(b) - f(a).$$

Формула Грина

Пусть M — плоскость, а D — некоторая её ограниченная область с кусочно-гладкой жордановой границей. Форма первой степени, записанная в координатах x и y, — это выражение f_1dx+f_2dy, и для интеграла этой формы по границе области D верно

$$\int_{\partial D} f_1dx + f_2dy = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$

Формула Стокса (в узком смысле), или формула Кельвина-Стокса

Пусть Σ — кусочно-гладкая поверхность ($p = 2$) в трёхмерном евклидовом пространстве ($n = 3$), $\mathbf{F}$ — дифференцируемое векторное поле. Тогда циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура $\partial\Sigma$ равна потоку ротора (вихря) поля через поверхность Σ, ограниченную контуром:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\,\mathbf{d\Sigma} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\,d\mathbf{r},$$

или в координатной записи

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{d\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz$$

Формула Остроградского

Пусть теперь ∂V — кусочно-гладкая гиперповерхность ($p = n-1$), ограничивающая некоторую область V в n-мерном пространстве. Тогда интеграл дивергенции поля по области равна потоку поля через границу области ∂V:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \int_{\partial V} \mathbf{F}\,\mathbf{d\Sigma}.$$

Тема 8. Ковариантные и контравариантные координаты вектора.

В математике, **ковариантная производная** — обобщение понятия производной для тензорных полей на многообразиях. Ковариантную производную можно также определить как специальный способ задания связности на многообразии при помощи дифференциального оператора. Другой способ задания связности — через форму связности, здесь не рассматривается.

Формальное определение

Ковариантная производная ∇_c - это оператор, который отображает дифференцируемые тензорные поля типа *(p,q)* в множество тензорных полей типа *(p,q+1)* и обладает следующими свойствами (*A*,*B* - произвольные тензорные поля типа *(p,q)*, α и β - произвольные вещественные числа):

1. Линейность: $\nabla_c(\alpha A + \beta B) = \alpha\nabla_c(A) + \beta\nabla_c(B)$.
2. Правило Лейбница: $\nabla_c(A \otimes B) = \nabla_c(A) \otimes B + A \otimes \nabla_c(B)$.
3. Коммутативность относительно свёртки по двум индексам: $\nabla_c(A^{a_1 \ldots i \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots i \ldots b_q}) = \nabla_c A^{a_1 \ldots i \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots i \ldots b_q}$.
4. Согласованность с определением касательных векторов как операторов производных по направлению, действующих в пространстве скалярных функций: для любой скалярной функции *f* и вектора $\mathbf{v} = v^a$: $\mathbf{v}f = v^a\nabla_a f$.
5. Отсутствие *кручения*: для любой функции *f*, $\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$.

Пятое условие иногда опускается, в этом случае многообразие оказывается многообразием с кручением. В общей теории относительности оператор ковариантной производной не имеет кручения. В общем случае для тензоров ковариантные производные не коммутируют. Степень некоммутативности ковариантных производных тензорных полей выражается через тензор кривизны многообразия.

Ковариантная производная по направлению

Ковариантную производную можно ещё определить как оператор $\nabla_{\mathbf{v}}$(зависящий от векторного поля $\mathbf{v}$), который сопоставляет каждому дифференцируемому тензорному полю тензорное поле того же типа, и подчиняется определенным требованиям, обобщающим свойства обычной производной по направлению. В терминах предыдущего определения, если $\mathbf{v} = v^a$— векторное поле, а *A* — тензорное поле, то

$$\nabla_{\mathbf{v}}A = v^a\nabla_a A.$$

Функции

Для скалярной функции *f* ковариантная производная $\nabla_{\mathbf{v}}f$совпадает с обычной производной действительной функции по направлению векторного поля $\mathbf{v}$и обозначается $\partial_{\mathbf{v}}f$.

Векторные поля

Ковариантная производная ∇векторного поля $\mathbf{u}$по направлению векторного поля $\mathbf{v}$, обозначаемая $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ определяется по следующим свойствам, для любого вектора **v**, векторных полей **u, w** и скалярных функций *f* и *g*:

1. $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ линейно по отношению к $\mathbf{v}$, т.е. $\nabla_{f\mathbf{v}+g\mathbf{w}}\mathbf{u} = f\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + g\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u}$
2. $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ аддитивно относительно $\mathbf{u}$, т.е. $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$
3. $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ подчиняется правилу Лейбница, т.е. $\nabla_{\mathbf{v}}f\mathbf{u} = f\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla_{\mathbf{v}}f$ где $\nabla_{\mathbf{v}}f$ определено выше.

Заметим, что $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ в точке p зависит не только от значения **v** в точке p, но и от значений **u** в ее окрестности благодаря последнему свойству, правилу Лейбница. Это означает, что ковариантная производная не является тензором.

Ко-векторные поля

Если задано поле ко-векторов (или 1-форм) α, его ковариантная производная $\nabla_{\mathbf{v}}\alpha$ может быть определена используя следующее тождество, которое удовлетворяется для всех векторных полей **u**

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\alpha(\mathbf{u})) = (\nabla_{\mathbf{v}}\alpha)(\mathbf{u}) + \alpha(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}).$$

Ковариантная производная ковекторного поля вдоль векторного поля **v** — тоже ковекторное поле.

Тензорные поля

Как только ковариантная производная определена для векторных и ковекторных полей, ее легко обобщить на произвольные тензорные поля при помощи правила Лейбница (φ и ψ - произвольные тензоры):

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\varphi\otimes\psi) = (\nabla_{\mathbf{v}}\varphi)\otimes\psi + \varphi\otimes(\nabla_{\mathbf{v}}\psi),$$

Если φ и ψ - тензорные поля из одного и того же тензорного расслоения, их можно сложить:

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\varphi+\psi) = \nabla_{\mathbf{v}}\varphi + \nabla_{\mathbf{v}}\psi.$$

Выражение в координатах

Пусть тензорное поле типа *(p, q)* задано своими компонентами ${T^{i_1 i_2\ldots i_p}}_{j_1 j_2\ldots j_q}(\mathbf{x})$ в некоторой локальной системе координат x^k, причем компоненты - дифференцируемые функции. Тогда ковариантная производная тензорного поля представляет собой тензор типа *(p,q+1)*, который определяется по формуле:

$$\nabla_\ell {T^{i_1 i_2\ldots i_p}}_{j_1 j_2\ldots j_q} = \frac{\partial {T^{i_1 i_2\ldots i_p}}_{j_1 j_2\ldots j_q}}{\partial x^\ell} + \sum_{k=1}^{p} {T^{i_1\ldots k\ldots i_p}}_{j_1 j_2\ldots j_q}{\Gamma^{i_k}}_{\ell k} - \sum_{m=1}^{q} {T^{i_1 i_2\ldots i_p}}_{j_1\ldots m\ldots j_q}{\Gamma^{m}}_{\ell j_m}$$

где Γ^k_{ij} - символы Кристоффеля, выражающие связность искривленного многообразия.

Примеры для некоторых типов тензорных полей

Ковариантная производная векторного поля V^m имеет по сравнению с частной производной дополнительное слагаемое,

$$\nabla_\ell V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^\ell} + {\Gamma^m}_{k\ell}V^k.$$

Ковариантная производная скалярного поля φ совпадает с частной производной,

$$\nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

а ковариантная производная ковекторного поля ω_m-

$$\nabla_\ell\omega_m = \frac{\partial\omega_m}{\partial x^\ell} - {\Gamma^k}_{\ell m}\omega_k.$$

В пространстве без кручения символы Кристоффеля симметричны, и ковариантные производные скалярного поля коммутируют:

$$\nabla_i\nabla_j\varphi = \nabla_j\nabla_i\varphi$$

В общем случае ковариантные производные тензоров не коммутируют.

Ковариантная производная тензорного поля типа (2,0) A^{ik} равна

$$\nabla_\ell A^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i{}_{m\ell} A^{mk} + \Gamma^k{}_{m\ell} A^{im},$$

то есть,

$$A^{ik}{}_{;\ell} = A^{ik}{}_{,\ell} + A^{mk}\Gamma^i{}_{m\ell} + A^{im}\Gamma^k{}_{m\ell}.$$

Для тензорного поля с одним верхним, одним нижним индексом ковариантная производная равна

$$A^i{}_{k;\ell} = A^i{}_{k,\ell} + A^m{}_k\Gamma^i{}_{m\ell} - A^i{}_m\Gamma^m{}_{k\ell},$$

наконец, для дважды ковариантного тензорного поля, то есть поля типа (0,2),

$$A_{ik;\ell} = A_{ik,\ell} - A_{mk}\Gamma^m{}_{i\ell} - A_{im}\Gamma^m{}_{k\ell}.$$

Тема 9. Определение тензора. Свойства тензоров. Обратный тензорный признак.

Те́нзор — объект линейной алгебры. Частными случаями тензоров являются скаляры, векторы и билинейные формы. Изучением тензоров занимается тензорное исчисление.

Часто тензор представляют как многомерную таблицу $d \times d \times \cdots \times d$ (число сомножителей совпадает с валентностью тензора, а их величина — с размерностью основного пространства), заполненной числами (**компонентами тензора**). Такое представление возможно только после выбора базиса (или системы координат), при смене базиса компоненты тензора меняются определённым образом, при этом сам тензор от выбора базиса не зависит (это можно увидеть уже на примере вектора).

Определения

Современное определение

Тензор ранга $(n,\ m)$ над *d*-мерным векторным пространством *V* есть элемент тензорного произведения *m* пространств *V* и *n* сопряжённых пространств V^* (то есть пространств линейных функционалов (1-форм) на *V*)

$$\tau \in T^m_n(V) \ = \ \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m} \ \otimes \ \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{n}$$

Сумма чисел *n* + *m* называется **валентностью** тензора. Тензор ранга $(n,\ m)$ также называется *n* раз **ковариантным** и *m* раз **контравариантным**.

Тензор как полилинейная функция

Точно так же как ковариантный тензор ранга (1,0) можно представлять как линейный функционал, тензор T ранга (*n*,0) удобно представлять себе как функцию $\tau(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ от *n* векторных аргументов $v_i \in V$, которая линейна по каждому аргументу v_i (такие функции называются полилинейными), т. е. для любой константы *c* из поля **F** (над которым определено векторное пространство)

$$\tau(v_1, \ldots, cv_A, \ldots, v_n) = c\tau(v_1, \ldots, v_A, \ldots, v_n)$$

$$\tau(v_1, \ldots, v_A + v'_A, \ldots, v_n) = \tau(v_1, \ldots, v_A, \ldots, v_n) + \tau(v_1, \ldots, v'_A, \ldots, v_n).$$

В том же ключе, тензор T произвольного ранга (*n*,*m*) представляется полилинейным функционалом от *n* векторов и *m* ковекторов:

$$\tau(v_1, v_2, \ldots, v_n, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m) : V \otimes V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^* \to \mathbf{F}$$

Компоненты тензора

Выберем в пространстве V базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d\}$, и соответственно $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \ldots, \mathbf{f}^d\}$— дуальный базис в сопряженном пространстве V^* (то есть $(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{f}^b) = \delta_a^b$, где δ_a^b— символ Кронекера). Тогда в тензорном произведении $\mathrm{T}_n^m(V)$ пространств $(\otimes_{i=1}^n V) \otimes (\otimes_{i=1}^m V^*)$естественным образом возникает базис

$$\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \ldots \mathbf{e}_{i_n} \otimes \mathbf{f}^{j_1} \otimes \mathbf{f}^{j_2} \otimes \ldots \mathbf{f}^{j_m}\},$$
$$1 \le i_a,\ j_b \le d.$$

Если определить тензор как полилинейную функцию, то его компоненты определяются значениями этой функции на базисе $\mathrm{T}_n^m(V)$:

$$\tau_{j_1,j_2,\ldots,j_n}{}^{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \tau(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_n}, \mathbf{f}^{i_1}, \mathbf{f}^{i_2}, \ldots, \mathbf{f}^{i_m}),$$
$$1 \le i_a,\ j_b \le d.$$

После этого тензор можно записать как линейную комбинацию базисных тензорных произведений:

$$T = \sum_{j_1,j_2\ldots j_n} \sum_{i_1,i_2\ldots i_m} \tau_{j_1,j_2,\ldots,j_n}{}^{i_1,i_2,\ldots,i_m} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \otimes \mathbf{f}^{j_1} \otimes \mathbf{f}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{f}^{j_n}.$$

Нижние индексы *компонент* тензора называются ковариантными, а верхние - контравариантными. Например, разложение некоторого дважды ковариантного тензора h будет таким:

$$h = \sum_{j,k} h_{jk} \mathbf{f}^j \otimes \mathbf{f}^k$$

О классическом определении

Классический подход к определению тензора, более распространённый в физической литературе, начинает с представления тензоров в компонентах. Тензор определяется как геометрический объект, который описывается многомерным массивом. Вектор задается одномерным массивом, а такие объекты как линейный оператор и квадратичная форма — двумерной матрицей. Примером тензора с четырехмерным массивом является тензор кривизны Римана. Скаляры можно рассматривать как нульмерные массивы с единственным элементом.

Значения чисел в массиве, или **компоненты тензора**, зависят от системы координат, но при этом сам тензор, как *геометрическая сущность*, от них не зависит. Под геометрической сущностью можно понимать много вещей: различные скалярные инварианты, симметричность/антисимметричность индексов, соотношения между тензорами и другое. Например, скалярное произведение и длина векторов не меняется при поворотах осей, а метрический тензор всегда остается симметричным.

При замене системы координат компоненты тензора преобразуются по определенному (линейному) закону. Зная компоненты тензора в одной системе, всегда можно вычислить его компоненты в другой, если задана матрица преобразования системы. Таким образом, второй подход можно суммировать в виде формулы:

тензор = массив компонент + закон преобразования компонент при замене базиса

Примеры

- Тензор нулевого ранга — это скаляр;

- Один раз контравариантный тензор (ранга (0,1)) — это просто элемент пространства V, то есть вектор;
- Тензор ранга (1,0) есть ковектор (ковариантный вектор), то есть элемент пространства V^* (или линейный функционал на V, 1-форма);
- Тензор ранга (2,0) есть билинейная форма, например метрический тензор g_{ij}
- Тензор ранга (1,1) есть линейный оператор $A:\ V\to V$ или $A:\ V^*\to V^*$
- Форма объёма на n-мерном линейном пространстве есть пример антисимметрического тензора ранга (0,n) (или n раз ковариантного)

Тензорные операции

Тензоры допускают следующие алгебраические операции:

- Умножение на скаляр — как и любой вектор;
- Сложение тензоров одинаковой валентности и состава индексов — как векторов;
  - Умножение на скаляр и сложение тензоров превращают пространство тензоров одного и того же типа в линейное пространство.
- Свёртка тензора — специфическая тензорная операция, понижающая валентность тензора.
- Симметризация — конструирование симметричного тензора того же типа.
- Антисимметризация — конструирование антисимметричного тензора того же типа.
- Тензорное произведение — без ограничений. Произведением тензора ранга (m,n) на тензор ранга (m',n') является тензор суммарного ранга ($m + m'$,$n + n'$), т.е. если $\sigma\in T^m_n$ и $\tau\in T^{m'}_{n'}$ то их произведение

$$\sigma\otimes\tau\in T^{m+m'}_{n+n'}=T^m_n\otimes T^{m'}_{n'}$$

Симметрии

В различного рода приложениях часто возникают тензоры с определённым свойством симметрии.

Симметричным по двум ко-(контра-)вариантным индексам называется тензор, который удовлетворяет следующему требованию:

$$T(\underline{e^{j_1},e^{j_2}},...e^{j_n},e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_m})=T(\underline{e^{j_2},e^{j_1}},...e^{j_n},e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_m})$$
$$(T(e^{j_1},e^{j_2},...e^{j_n},\underline{e_{i_1},e_{i_2}},...,e_{i_m})=T(e^{j_1},e^{j_2},...e^{j_n},\underline{e_{i_2},e_{i_1}},...,e_{i_m}))$$

или в компонентах

$$T_{\underline{j_1,j_2},\dots,j_n}{}^{i_1,i_2,\dots,i_m}=T_{\underline{j_2,j_1},\dots,j_n}{}^{i_1,i_2,\dots,i_m},$$
$$\forall j_1,\ j_2=1,2,...,(dim(V)=dim(V^*))$$
$$(T_{j_1,j_2,\dots,j_n}{}^{\underline{i_1,i_2},\dots,i_m}=T_{j_1,j_2,\dots,j_n}{}^{\underline{i_2,i_1},\dots,i_m},$$
$$\forall i_1,\ i_2=1,2,...,(dim(V)=dim(V^*))).$$

Аналогично определяется косая симметрия (или антисимметричность):

$$T(\underline{e^{j_1},e^{j_2}},...e^{j_n},e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_m})=-T(\underline{e^{j_2},e^{j_1}},...e^{j_n},e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_m})$$
$$(T(e^{j_1},e^{j_2},...e^{j_n},\underline{e_{i_1},e_{i_2}},...,e_{i_m})=-T(e^{j_1},e^{j_2},...e^{j_n},\underline{e_{i_2},e_{i_1}},...,e_{i_m}))$$

или в компонентах

$$T_{\underline{j_1,j_2},\dots,j_n}{}^{i_1,i_2,\dots,i_m}=-T_{\underline{j_2,j_1},\dots,j_n}{}^{i_1,i_2,\dots,i_m},$$
$$\forall j_1,\ j_2=1,2,...,(dim(V)=dim(V^*))$$

$$(T_{j_1,j_2,\ldots,j_n}{}^{i_1,i_2,\ldots,i_m} = -T_{j_1,j_2,\ldots,j_n}{}^{i_2,i_1,\ldots,i_m},$$
$$\forall i_1,\ i_2 = 1, 2, ..., (dim(V) = dim(V^*))).$$

Симметрия или антисимметрия не обязательно должна охватывать только соседние индексы, она может включать в себя и индексы из разных мест тензора. Главным условием является то, что симметрия или антисимметрия может относиться только к индексам одного сорта: ко- или контравариантным. Симметрии между ко- и контравариантыми индексами тензоров не имеют смысла, так как, даже если они наблюдаются в компонентах, то разрушаются при переходе к другому базису отнесения.

Эти определения естественным образом обобщаются на случай более чем двух индексов. При этом при любой перестановке индексов, по которым тензор является симметричным, его действие не изменяется, а при антисимметрии по индексам знак действия тензора изменяется на противоположный для нечётных перестановок (получаемых из начального расположения индексов нечётным числом транспозиций — перестановок двух индексов) и сохраняется для чётных.

Тема 10. Ковариантная производная для тензоров ранга ≥ 2. Абсолютный дифференциал тензора.

Метрический тензор или **метрика** — это симметричное тензорное поле $g = g_{ij}$ ранга 2 на гладком многообразии.

Совокупность метрических тензоров g подразделяется на два класса — невырожденные метрики, когда $\det(g_{ij}) \neq 0$, и вырожденные, когда $\det(g_{ij}) = 0$ либо $\det(g^{ij}) = 0$. Многообразие M^n, метрика которого является вырожденной в любой точке, называется **изотропным** (например, световой конус в пространстве Минковского). Среди невырожденных метрических тензоров, в свою очередь, различаются

- **риманов метрический тензор** (или **риманова метрика**) для которого квадратичная форма является положительно определенной,
- **псевдориманов метрический тензор** (или **индефинитная метрика**), когда форма не является положительно определенной,
  - В частности метрика Лоренца.

Метрический тензор с положительно-определенной квадратичной формой превращает многообразие в метрическое пространство. Если квадратичная форма отрицательно определена, то многообразие не является метрическим пространством (относительно так заданной метрики), потому что в любой точке многообразия существуют векторы *мнимой* и *нулевой* длины. Вектор нулевой длины в пространстве с псевдоримановой метрикой называется **изотропным** (также нулевым или светоподобным) и задает определенное **изотропное направление** на многообразии; например, свет в пространственно-временном континууме путешествует вдоль изотропных направлений.

Обычно под метрическим тензором без специального на то указания понимается риманов метрический тензор; но если, рассматривая невырожденный метрический тензор, хотят подчеркнуть, что речь идет именно о римановом, а не псевдоримановом метрический тензоре, то о нём говорят как о **собственно римановом метрическом тензоре**.

Собственно риманов метрический тензор может быть введен на любом паракомпактном гладком многообразии. Это означает, что любое паракомпактное гладкое многообразие можно *в принципе* превратить в метрическое пространство. Однако, такая метрика не является естественной с точки зрения физики. Например, хотя в пространстве Минковского с псевдоримановой метрикой можно ввести метрику обычного четырехмерного эвклидова пространства, она не инвариантна относительно преобразований Лоренца, а повороты четырехмерного пространства с участием оси *t* лишены какого-либо физического смысла.

Измерение длин и углов при помощи метрики

В выбранной системе координат x^i метрический тензор можно записать в виде матрицы, обычно обозначаемой символом $\mathbf{g}$. Обозначение g_{ij} используется для компонентов метрического тензора, т.е. элементов матрицы. Заметьте, что дальше в формулах используется соглашение Эйнштейна.

На Римановом многообразии, длина сегмента кривой, заданной параметрически (как вектор-функция параметра *t*), от *a* до *b*, равна:

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

Угол θ между двумя векторами, $U = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $V = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ (в искривленном пространстве векторы существуют в касательном пространстве в точке многообразия), равен:

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} u^i v^j}{\sqrt{\left| g_{ij} u^i u^j \right| \left| g_{ij} v^i v^j \right|}}$$

Метрика, которая индуцируется гладким вложением многообразия в эвклидово пространство может быть посчитана по формуле:

$$\mathbf{g} = J^T J$$

где J означает якобиан вложения и J^T - его транспонирование.

Для псевдоримановой метрики, длина по формуле, которая приведена выше, не всегда определена, потому что выражение под корнем может быть отрицательным. В общем можно определить длину кривой только если знак выражения под корнем либо положительный, либо отрицательный по всей длине кривой. Для псевдоримановой метрики:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left| g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right|} dt \ .$$

Заметим, что хотя эти формулы используют координатное представление, результат не зависит от выбора системы координат; он зависит только от метрики и от кривой, вдоль которой происходит интегрирование.

Примеры

Метрика эвклидова пространства

Самый простой пример метрики - это метрика двумерной эвклидовой плоскости, которую изучают в школе. В координатах *x*-*y* она записывается

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Длина кривой сводится к известной формуле анализа:

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Эвклидова метрика в других распространенных системах координат:

Полярные координаты: (r, θ)

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$J = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Так что

$$g = J^T J = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -r\sin\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta \\ -r\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\sin\theta & r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

где использованы формулы тригонометрии.

Метрика на поверхности сферы

Сфера единичного радиуса $\mathbf{R}^3$ имеет естественную метрику, индуцированную эвклидовой метрикой вмещающего пространства. В стандартных сферических координатах (θ,φ) метрика принимает вид:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$ или, по-другому, $g = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2.$

Метрика Минковского (Лоренца) в теории относительности

Плоское пространство Минковского (специальная теория относительности) : $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Для кривой, все точки которой относятся к одному и тому же моменту времени, формула длины кривой сводится к обычной трехмерной форме. Для времениподобной кривой, формула длины дает собственное время вдоль кривой.

Изоморфизм между касательным и ко-касательным пространством

В тензорном анализе метрический тензор устанавливает канонический изоморфизм между касательным пространством и ко-касательным пространством: пусть $v \in T_pM$— вектор из касательного пространства, тогда для метрического тензора g на M , мы получаем, что $g(v,\cdot)$, то есть отображение, которое переводит другой вектор $w \in T_pM$в число $g(v,w)$, является элементом дуального пространства линейных функционалов (1-форм) T_p^*M . Невырожденность метрического тензора превращает это отображение в биекцию, а тот факт, что g сам по себе есть тензор, делает это отображение независимым от координат. В терминах компонентов тензоров, это означает, что можно отождествить ковариантные и контравариантные объекты, то есть «поднимать и опускать индексы».

4 Комплект экзаменационных билетов по дисциплине

Амурский государственный университет

Факультет МиИ	Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ	Курс 2
«__»____________200__г.	Семестр 3
Зав.кафедрой_____________	Векторный и тензорный анализ

Билет 1

1.Скалярное поле. Поверхности и линии уровня.

2.Метрический тензор.

3.Доказать, что если функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, то $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к кусочно гладкой замкнутой поверхности Σ.

4. Показать, что если φ – инвариантная функция, то $\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}$ есть ковариантный вектор.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ	Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ	Курс 2
«__»____________200__ г.	Семестр 3
Зав.кафедрой_____________	Векторный и тензорный анализ

Билет 2

1.Скалярное поле. Производная по направлению.

2.Угол между двумя направлениями.

3.Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}= x\ z\ \boldsymbol{i}$ через внешнюю сторону параболоида $z =1- x^2 - y^2$, ограниченного плоскостью $z = 0\ \ (z \geq 0)$.

4.Показать, что $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^r \partial x^s}$ есть ковариантный тензор второго порядка, если φ является инвариантной функцией от x^m.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200_г. | Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 3

1.Градиент скалярного поля.

2. Обратный тензорный признак.

3. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = x\,\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

4. Показать, что если имеется соотношение вида $a^r_{st} = b^r_s c_t$, связывающее тензоры a^r_{st}, b^r_s, c_t в некоторой системе переменных, то то же самое соотношение между составляющими имеет место в любой другой системе переменных.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200_г. | Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 4

1.Интеграл по поверхности. Формула Гаусса-Остроградского.

2.Определение тензора. Тензорное поле.

3. Найти производную скалярного поля $u=2xy+y^2$ в точке $(\sqrt{2}\,,1)$ эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

4. Показать, что символ Кронекера δ^r_s является тензором.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200_г. | Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 5

1.Векторное поле. Векторные линии.

2. Операции над тензорами: свертка тензоров.

3. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}= 3x\, \boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону параболоида $x^2+ y^2 =9-z$, расположенную в первом октанте.

4. Показать, что дифференциалы dx^r образуют контравариантный тензор первого порядка (вектор).

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200__г. | Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 6

1.Поток векторного поля через поверхность.

2.Операции над тензорами: сложение и умножение тензоров.

3. Найти производную скалярного поля $u=x^2-y^2$ в точке $(5, 4)$ гиперболы $x^2-y^2=9$ по направлению этой кривой.

4. Показать, что если a^r_{st}, b^p_q – тензоры третьего и второго порядков соответственно, то $a^r_{st}b^p_r$ есть тензор третьего порядка.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 7

1.Дивергенция векторного поля.

2.Операции над тензорами: симметрирование и альтернирование тензоров.

3. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}= x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4. Показать, что если φ – инвариантная функция, то $\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}$ есть ковариантный вектор.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 8

1.Векторная формулировка теоремы Гаусса-Остроградского.

2. Криволинейная система координат. Локальный базис.

3. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ в произвольной точке $M(x,y,z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки.

4.Показать, что $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^r\partial x^s}$ есть ковариантный тензор второго порядка, если φ является инвариантной функцией от x^m.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 9

1.Оператор Гамильтона ∇- набла.

2. Ковариантный и контравариантный законы преобразования компонент объекта.

3.Доказать, что если функция *u(x,y,z)* является многочленом второй степени и Σ – кусочно гладкая замкнутая поверхность, то интеграл $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ пропорционален объему, ограниченному поверхностью *Σ*.

4. Показать, что если имеется соотношение вида $a^r_{st} = b^r_s c_t$, связывающее тензоры a^r_{st}, b^r_s, c_t в некоторой системе переменных, то то же самое соотношение между составляющими имеет место в любой другой системе переменных.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 10

1.Соленоидальное поле.

2.Абсолютная и ковариантная производная вектора.

3.Найти поток радиуса вектора $\boldsymbol{r}$ через поверхность произвольной сферы радиуса *R*.

4. Показать, что символ Кронекера δ^r_s является тензором.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200__г. | Семестр 3
Зав.кафедрой______________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 11

1.Формула Грина.

2. Ковариантный и контравариантный законы преобразования компонент объекта.

3. Найти производную скалярного поля $u=ln(xy+yz+xz)$ в точке $M_0(0, 1, 1)$ по направлению окружности $x=cos\ t, y=sin\ t, z=1$.

4. Показать, что дифференциалы dx^r образуют контравариантный тензор первого порядка (вектор).

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200__г. | Семестр 3
Зав.кафедрой______________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 22

1.Теорема Стокса.

2.Абсолютная и ковариантная производная вектора.

3.Найти производную скалярного поля $u=x^2+ y^2+z^2$ в точке M_0, соответствующей значению параметра $t=\pi/2$ по направлению винтовой линии $x=Rcos\ t, y=Rsin\ t, z=at$.

4. Показать, что если a^r_{st}, b^p_q – тензоры третьего и второго порядков соответственно, то $a^r_{st}b^p_r$ есть тензор третьего порядка.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ	Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ	Курс 2
«__»____________200__г.	Семестр 3
Зав.кафедрой_____________	Векторный и тензорный анализ

Билет 12

1.Вихрь векторного поля. Вихрь поля скоростей точек твердого тела.
2.Операции над тензорами: симметрирование и альтернирование тензоров.
3. Доказать, что если Σ – кусочно гладкая замкнутая поверхность и $\boldsymbol{c}$ – ненулевой постоянный вектор, то интеграл $\oiint_{\Sigma} Cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{c})d\sigma = 0$, где $\boldsymbol{n}$ – вектор, нормальный к поверхности Σ.
4. Показать, что если φ – инвариантная функция, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$ есть ковариантный вектор.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ	Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ	Курс 2
«__»____________200__г.	Семестр 3
Зав.кафедрой_____________	Векторный и тензорный анализ

Билет 13

1.Векторная формулировка теоремы Стокса.
2.Операции над тензорами: сложение и умножение тензоров.
3. Найти производную скалярного поля $u=x^2-y^2$ в точке $(5, 4)$ гиперболы $x^2-y^2=9$ по направлению этой кривой.
4.Показать, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^r \partial x^s}$ есть ковариантный тензор второго порядка, если φ является инвариантной функцией от x^m.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200__г. | Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 14

1.Гармоническое векторное поле.

2.Метрический тензор.

3.Показать, что $\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}^0)d\sigma = V$, где V – объем, ограниченный замкнутой поверхностью Σ.

4. Показать, что если имеется соотношение вида $a^r_{st} = b^r_s c_t$, связывающее тензоры a^r_{st}, b^r_s, c_t в некоторой системе переменных, то то же самое соотношение между составляющими имеет место в любой другой системе переменных.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ | Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ | Курс 2
«__»____________200__г. | Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ | Векторный и тензорный анализ

Билет 15

1.Формула Грина.

2.Угол между двумя направлениями.

3. Найти производную скалярного поля $u=2xy+y^2$ в точке $(\sqrt{2},1)$ эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

4. Показать, что символ Кронекера δ^r_s является тензором.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 16

1.Скалярное поле. Поверхности и линии уровня.

2. Обратный тензорный признак.

3. Доказать формулу $\oiint\limits_{\Sigma}(\varphi\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}^0)d\sigma = \iiint\limits_{V}(\varphi div\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, grad\varphi))dV$, где $\varphi=\varphi(x,y,z)$, Σ – поверхность, ограничивающая объем V, а $\boldsymbol{n}^0$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности Σ. Установить условия применимости формулы.

4. Показать, что дифференциалы dx^r образуют контравариантный тензор первого порядка (вектор).

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 17

1.Скалярное поле. Производная по направлению.

2.Определение тензора. Тензорное поле.

3. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}= x\,\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через сферу $x^2+ y^2+z^2=R^2$.

4. Показать, что если a^r_{st}, b^p_q – тензоры третьего и второго порядков соответственно, то $a^r_{st}b^p_r$ есть тензор третьего порядка.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 18

1.Градиент скалярного поля.

2. Операции над тензорами: свертка тензоров.

3.Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}= x\ z\ \boldsymbol{i}$ через внешнюю сторону параболоида $z =1- x^2 - y^2$, ограниченного плоскостью $z = 0$ $(z \geq 0)$.

4. Показать, что если φ – инвариантная функция, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$ есть ковариантный вектор.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика

Кафедра МАиМ — Курс 2

«__»____________200__г. — Семестр 3

Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 19

1.Интеграл по поверхности. Формула Гаусса-Остроградского.

2.Операции над тензорами: сложение и умножение тензоров.

3. Найти производную скалярного поля $u=x^2- y^2$ в точке $(5, 4)$ гиперболы $x^2- y^2=9$ по направлению этой кривой.

4.Показать, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^r \partial x^s}$ есть ковариантный тензор второго порядка, если φ является инвариантной функцией от x^m.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ — Курс 2
«__»____________200__г. — Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 20

1.Векторное поле. Векторные линии.

2.Операции над тензорами: симметрирование и альтернирование тензоров.

3.Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}= x\ z\ \boldsymbol{i}$ через внешнюю сторону параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, ограниченного плоскостью $z = 0$ $(z \geq 0)$.

4. Показать, что если имеется соотношение вида $a^r_{st} = b^r_s c_t$, связывающее тензоры a^r_{st}, b^r_s, c_t в некоторой системе переменных, то то же самое соотношение между составляющими имеет место в любой другой системе переменных.

Амурский государственный университет

Факультет МиИ — Спец. 010400-Физика
Кафедра МАиМ — Курс 2
«__»____________200__г. — Семестр 3
Зав.кафедрой_____________ — Векторный и тензорный анализ

Билет 21

1.Поток векторного поля через поверхность.

2. Криволинейная система координат. Локальный базис.

3. Найти производную функции $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в произвольной точке $M(x,y,z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки.

4. Показать, что символ Кронекера δ^r_s является тензором.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Основная:

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Уч. для вузов. – М.: Физматлит, 2006 -312 с.
3. Ефимов Н.В., Розенберг Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Физматлит, 2004. -464 с.
4. Коренев Г.В. Тензорное исчисление. – М.: Изд. МФТИ, 2000. -240 с.
5. Мищенко А.С., Фоменко В.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Физматлит, 2004. -304 с.
6. Победря Б.Е.. Лекции по тензорному анализу. изд. 2-е, доп.– М.: Изд-во МГУ, 1979.

Дополнительная:

1. Борисенко А.И., И.Е. Тарапов. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – М.: Высшая школа, 1963.
2. Мак-Коннел А.Дж.. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. – М.: ГИФМЛ, 1963.
3. Маделунг Э.. Математический аппарат физики. – М.: Физматлит, 1961.
4. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965.

6. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.