Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

________Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно – методический

комплекс дисциплины

для специальности

010101 – математика

Составитель: **доцент В.В.Сельвинский**

Благовещенск

2007

ББК
С

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

В.В.Сельвинский

Вариационное исчисление и методы оптимизации. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010101 «Математика».– Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 30 с.

Учебно – методический комплекс дисциплины " Вариационное исчисление и методы оптимизации" содержит рабочую программу дисциплины, план-конспект лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список. Предназначен ведущим преподавателям и студентам, изучающим данную дисциплину.

1. ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010101 – «Математика»

Квалификация – Математик

ОД.17 **Вариационное исчисление и методы оптимизации**: 110
элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа; гладкие задачи с равенствами и неравенствами; правило множителей Лагранжа; задачи линейного программирования и проблемы экономики; теорема двойственности; классическое вариационное исчисление; уравнение Эйлера; условия второго порядка Лежандра и Якоби; задачи классического вариационного исчисления с ограничениями; необходимые условия в изопериметрической задаче и задаче со старшими производными; классическое вариационное исчисление и естествознание; оптимальное управление; принцип максимума Понтрягина; оптимальное управление и задачи техники; методы решения задач линейного программирования; симплекс-метод; методы решения задач без ограничения; градиентные методы; метод Ньютона; методы сопряженных направлений; численные методы решения задач вариационного исчисления и оптимального управления.

2.РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Вариационное исчисление и методы оптимизации"**

для специальности 010101–"Математика"

Курс 4 Семестр 7

Лекции 48 час. Экзамен 7 семестр.
Практические (семинарские) занятия 32 час. Зачет (нет).

Лабораторные занятия (нет). Курсовая работа 7 семестр.

Самостоятельная работа 30 час.

Всего 110 час.

Составитель В.В.Сельвинский, зам. зав. кафедрой, доцент.
Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

2006 г.

Цели и задачи дисциплины, её место в учебном процессе

1. Цель преподавания учебной дисциплины

Дисциплина "Вариационное исчисление и методы оптимизации" изучает математические модели естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам отыскания экстремальных значений функционалов при заданных ограничениях на множестве допустимых решений.

Целью дисциплины является знакомство с методами исследования математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов решения возникающих при этом математических задач, выяснение смысла полученного решения.

2.Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины.

Дисциплина "Вариационное исчисление и методы оптимизации" излагается на базе математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, в тесной связи с теорией функций комплексного переменного и с основами функционального анализа. В связи с тем, что по утвержденному кафедрой учебному плану предусмотрено чтение предварительного спецкурса "Выпуклый анализ и математическое программирование" аналогичные вопросы настоящего курса рассматриваются по мере необходимости их использования для решения новых задач.

3. Перечень основных умений и навыков, приобретаемых при изучении дисциплины.

Дисциплина "Вариационное исчисление и методы оптимизации" вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает:

- классическое вариационное исчисление, уравнение Эйлера, условия второго порядка - Лежандра, Якоби; оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, методы решения задач линейного программирования, симплекс-метод, градиентные методы, метод Ньютона, методы сопряженных направлений.

Содержание дисциплины

1. Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

1. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства. Уравнения Эйлера - 2 часа

2. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами - 2 часа

3. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка - 2 часа

4. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Вариационные задачи в параметрической форме - 2 часа

5. Вариационные задачи с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами - 2 часа

6. Экстремали с угловыми точками - 2 часа

7. Односторонние вариации - 2 часа

8. Достаточные условия экстремума. Поле экстремалей - 2 часа

9. Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y')- 2 часа.

10. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду- 2 часа.

11. Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида f(x,y1,...,yn) = 0- 2 часа.

12. Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида f(x,y1,...,yn,y1',...,yn') = 0- 2 часа.

13. Изопериметрические задачи- 2 часа.

14. Прямые методы в вариационных задачах. Конечно-разностный метод Эйлера- 2 часа.

15. Метод Ритца. Метод Канторовича- 2 часа.

16. Зависимость функции и множества, на котором она максимизируется, от параметра. Оптимизация процессов, линейных относительно управления, без ограничений на управление- 2 часа.

17. Задачи с ограничениями на управление- 2 часа.

18. Необходимые условия оптимального управления в форме Лагранжа-Понтрягина- 2 часа.

19. Непрерывные процессы. Многошаговые процессы (без ограничений на управление, с ограничениями на управление) - 2 часа.

20. Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана (динамическое программирование). Непрерывные процессы. Многошаговые процессы- 4 часа.

2. Практические занятия, их содержание и объем в часах

1. Простейшая задача вариационного исчисления - 2 часа.

2. Уравнение Эйлера. Граничные условия. Экстремали - 2 часа.

3. Различные случаи интегрируемости уравнений Эйлера - 2 часа.

4. Примеры физических и геометрических экстремальных задач - 2 часа.

5. Задача на экстремум функционала, зависящего от производных высших порядков неизвестной функции - 2 часа

6. Задача об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций - 2 часа.

7. Задачи с подвижными границами - 2 часа.

8. Слабый экстремум. Условия трансверсальности - 2 часа.

9. Задача Больца - 2 часа.

10. Задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Множители Лагранжа - 2 часа.

11. Изопериметрическая задача - 2 часа.

12. Прямые методы вариационного исчисления: метод Ритца - 2 часа

13. Метод Канторовича - 2 часа,

14. Метод Галеркина. Координатные функции - 2 часа.

3. Темы для курсовых работ

1. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами.
2. Вариационные задачи в параметрической форме.
3. Вариационные задачи с подвижными границами.
4. Экстремали с угловыми точками. Односторонние вариации.
5. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.
6. Вариационные задачи на условный экстремум.
7. Изопериметрические задачи.
8. Прямые методы в вариационных задачах.
9. Задачи оптимального управления.

Рекомендации по выполнению курсовой работы

Курсовая работа представляет собой теоретическое исследование или реферат по конкретной проблеме. Выполнение курсовой работы должно способствовать углубленному усвоению лекционного курса и приобретению навыков научного исследования. Курсовая работа базируется на изучении учебно-методических материалов, научной литературы.

Цель курсовой работы:

- приобрести навыки самостоятельной работы с литературой;
- научиться планировать свою работу и время, уметь анализировать полученные результаты и правильно оформлять отчет по выполненной работе;
- приобрести умение кратко и четко докладывать результаты проделанной работы на отчетных студенческих научно-исследовательских конференциях, семинарах, заседаниях кафедры.

Написание курсовой работы осуществляется под руководством преподавателя- руководителя работы. Студент совместно с руководителем уточняет круг вопросов, подлежащих изучению, составляет план исследования, структуру работы, сроки выполнения ее этапов, определяет необходимую литературу и другие материалы (статистические отчеты, результаты экспериментов на предприятиях и т.п.).

Курсовая работа может иметь исследовательский или реферативный характер и должна включать в себя: обоснование актуальности темы и постановку задачи; краткий обзор литературы по изучаемому вопросу; описание метода решения задачи и полученные результаты, если таковые имеются; выводы и рекомендации по использованию полученных результатов, если таковые имеются.

Курсовая работа оформляется в соответствии со стандартом АмГУ (СТП АмГУ–05-97) и должна иметь следующую структуру:

- титульный лист;
- задание на выполнение работы;
- реферат;
- содержание;
- введение;
- основная часть;
- заключение;
- список использованных источников;
- приложения.

Объем курсовой работы зависит от предложенной темы и должен составлять не более 30 страниц, не включая приложения. Изложение должно достаточно подробно освещать самостоятельную работу студента. В связи с этим необходимо каждый раз делать ссылки на соответствующую литературу, в которой получен представленный в курсовой работе качественный вывод или результат. В заключении необходимо выделить самостоятельную часть работы.

При оценке работы учитываются содержание работы, ее актуальность, степень самостоятельности, оригинальность выводов и предложений, качество используемого материала, а также уровень грамотности (общий и специальный).

Курсовая работа должна быть защищена до сдачи экзамена. На защите студент должен кратко изложить содержание работы, дать исчерпывающие ответы на замечания рецензента и вопросы членов комиссии. Окончательная оценка курсовой работы выставляется комиссией по итогам защиты и качеству выполненной работы.

Самостоятельная работа (30 час.)

В самостоятельную работу студентов входит курсовая работа, подготовка к текущим занятиям и подготовка к экзамену.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное уравнение. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999.-488 с.

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариацаонное исчисление. Изд. 2-е.-М.: МГУ, 1998.- 424 с.

3. Сборник задач по математике для втузов, ч. 4.Под ред. А.В.Ефимова. -М.: Наука, 1990.-304 с.

Дополнительная литература

1. Алексеев В.М. и др. Оптимальное управление. Уч. пособие для студ. мат. спец. вузов. -М.: Наука,1979.- 430 с.

2. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Уч. пособие для студ. физ.-мат. спец. вузов. -Л.: ЛГУ, 1980.- 287 с.

3. Волков Е.А., Лизоркин П.И. Дифференциальные уравнения и элементы вариационного исчисления. Учебн. пособие. -М.: МИФИ,1978.- 90 с.

4. Гриффитс Ф.А. Внешние дифференциальные формы и вариационное исчисление. Пер. с англ. С.К.Ландо; под ред. В.И.Арнольда. -М.: Мир, 1986.- 359 с.

5. Кабанов Н.И. Элементарное введение в вариационное исчисление. Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1978. - 303 с.

6. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. -М.: Наука, 1986. - 272 с.

7. Краснов М.Л. и др. Вариационное исчисление. -М.: Наука, 1973.- 197 с.

8. Лагоша Б.А., Дегтярева Т.Д. Методы и задачи теории оптимального управления. -М.: Моск. гос. ун-т экономики, статистики и информатики, 1997.- 79 с.

9. Ланцош К. Вариационные принципы механики.- М., 1965.

10. Эльсгольц .Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Для студ. физ. спец. университетов. -М.: Наука, 1969.- 424 с.

11. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. -М., 1974.

2. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В самостоятельную работу студентов входит курсовая работа, подготовка к текущим занятиям и подготовка к экзамену. Тематика и требования к содержанию и оформлению курсовой работы приведены в рабочей программе.

3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

Введение

Принцип выбора лучшего варианта из многих является основой жизнедеятельности человека. Существенную роль здесь играет критерий, по которому оценивается лучший вариант. Один и тот же вариант может быть лучшим по одному критерию и не быть таковым по другому критерию. Выбор критерия оценки варианта – проявление уровня интеллекта и жизненного опыта человека.

Совокупность критерия и множества возможных вариантов составляют структуру любой задачи оптимизации. Математическая модель такой задачи включает в себя целевую функцию (или функционал), выражающую критерий оценки, а также систему уравнений или неравенств относительно переменных, определяющих вариант выбора. Методы решения таких задач существенно зависят от вида целевой функции (функционала), характера ограничений и составляют содержание таких математических дисциплин как математическое программирование, вариационное исчисление, оптимальное управление, методы оптимизации и т.п.

Основы вариационного исчисления были сформированы еще в 17-18 веках и связаны с именами таких великих ученых как братья Якоб и Иоганн Бернулли, Исаак Ньютон, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж. В терминах вариационного исчисления были впервые сформулированы многие фундаментальные принципы классической механики, оптики, электродинамики, квантовой механики. Вариационные методы широко используются в современных научных исследованиях.

1. **Функциональные пространства** $C^k(D)$

Множество функций $f(x)$, определенных на некотором отрезке $[a,b]\subset R$ и имеющих на этом отрезке непрерывные производные порядка k образуют линейное пространство $C^k[a,b]$. Например: пространство непрерывных функций $C^0[a,b]$; пространство функций, имеющих непрерывную первую производную $C^1[a,b]$ и так далее. Элементы этого пространства часто обозначают $f(\cdot)$ или просто f. Здесь точка в круглых скобках указывает на наличие аргумента, но его несущественную роль в обозначении элемента. Если в этих пространствах определить следующие нормы:

в $C^0[a,b]$– норму

$$\|f\|_0 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

в $C^k[a,b]$ – норму

$$\|f\|_k = \max_i\left\{\|f\|_0, \|f'\|_0, \dots, \|f^{(k)}\|_0\right\} = \max_i\left\{\|f^{(i)}\|_0\right\} \qquad (i = 0,1,\dots,k),$$

то эти пространства будет полными нормированными, или банаховыми. На основе указанной нормы можно определить расстояние между «точками» этого пространства – некоторыми функциями $f(x)$ и $g(x)$

$$\rho_k(f, g) = \|f-g\|_k.$$

Пусть $y_0(x)\in C^k[a,b]$ – некоторая функция. Множество функций $y(x)\in C^k[a,b]$, для которых $\rho_k(y, y_0) < \delta$ называют δ – окрестностью функции $y_0(x)$. Так как имеет место последовательное включение пространств $C^0[a,b]\supset C^1[a,b]\supset\dots\supset C^k[a,b]$, в пространстве $C^k[a,b]$ можно использовать нормы более широких пространств $C^m[a,b]$ $(m<k)$. В этом случае δ – окрестность будет содержать функции более широкого класса; принято δ – окрестность по норме $\|\cdot\|_0$ называть сильной δ – окрестностью, а по норме $\|\cdot\|_1$ – слабой δ – окрестностью. Согласно определению, слабая δ – окрестность всегда содержится в сильной δ – окрестности. Заметим, что пространство $C^k[a,b]$ по отношению к норме $\|\cdot\|_m$ $(m < k)$ перестает быть банаховым. Это следует, например, из того факта, что не всякая непрерывная функция, являющаяся предельной для последовательности дифференцируемых функций, будет обязательно дифференцируемой.

Отображение $I{:}D\to R$ множества $D\subset C^k[a,b]$ на множество действительных чисел R называют функционалом и обозначают $I[y(\cdot)]$; множество D называют множеством допустимых функций для функционала I. Функционал $I[y(\cdot)]$ называется непрерывным по норме $\|\cdot\|_k$ в «точке» $y_0(\cdot)\in D$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta = \delta(y_0,\varepsilon) >0$, такое что, как только $\rho_k(y, y_0) < \delta$ и $y(\cdot)\in D$, то $|\, I[y(\cdot)] - I[y_0(\cdot)]| < \varepsilon$. Для любой $y_0(\cdot)\in D$ разность $\delta y = y - y_0$ называют вариацией функции $y_0(\cdot)$; здесь $y = y(\cdot)\in D$. Таким образом, вариация функции сама является функцией из того же пространства, то есть $\delta y = \delta y(\cdot) \in C^k[a,b]$. Будем говорить, что «точка» $y(\cdot)$ является внутренней для множества D, если она входит в него вместе с некоторой своей δ – окрестностью.

Рассмотрим приращение функционала в произвольной внутренней «точке» $y(\cdot)\in D$

$$\Delta I = \Delta I[y(\cdot), \delta y] = I[y(\cdot)+\delta y] - I[y(\cdot)].$$

Если в приращении функционала можно выделить линейную часть по отношению к вариации δy, то есть представить

$$\Delta I = L\,[y(\cdot), \delta y] + o\,(\|\delta y\|_k),$$

где $L\,[y(\cdot), \delta y]$ – линейный функционал относительно δy, а $o(\|\delta y\|_k)$, – величина, имеющая более высокий порядок малости, чем δy при $\|\delta y\|_k\to 0$, то линейная часть $L\,[y(\cdot), \delta y]$ называется дифференциалом функционала $I[y(\cdot)]$, а функционал считается дифференцируемым по Фреше (Фреше́ Морис Рене – французский математик).

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\,\delta y,$$

где $\alpha\in R$ – параметр, $y(\cdot)\in D$ – внутренняя «точка». Первой вариацией $\delta I[y(\cdot),\delta y]$ функционала I в «точке» $y(\cdot)$ называют предел

$$\delta I[y,\delta y]=\lim_{\alpha\to 0}\frac{I[y+\alpha\delta y]-I[y]}{\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}I[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

Первую вариацию также называют дифференциалом Гато (Гато́ Рене Эжен – французский математик). Заметим, что из дифференцируемости по Фреше функционала I следует существование его первой вариации, которая в этом случае совпадает с дифференциалом, то есть $\delta I[y,\delta y]=L\,[y,\delta y]$. Однако существование первой вариации функционала I еще не означает его дифференцируемости в соответствующей «точке» $y(\cdot)$, подобно тому, как существование производной по любому направлению в данной точке для функции многих переменных еще не означает ее дифференцируемости в этой точке.

Вариации функционала I более высокого порядка можно определить как коэффициенты в разложении в ряд Тейлора в окрестности $\alpha=0$ функции $\varphi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$, в которую превращается функционал на семействе функций $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y$:

$$\Delta\varphi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]-I[y]=\alpha\delta I+\frac{\alpha^2}{2!}\delta^2 I+\ldots+\frac{\alpha^k}{k!}\delta^k I+\ldots;$$

здесь $\delta^k I=\dfrac{d^k\varphi(\alpha)}{d\alpha^k}\Big|_{\alpha=0}=\dfrac{\partial^k I[y+\alpha\delta y]}{\partial\alpha^k}\Big|_{\alpha=0}$ – вариация функционала порядка k.

Конечно, здесь функция $\varphi(\alpha)$ должна быть дифференцируема соответствующее число раз.

Говорят, что функционал $I[y]$, определенный на линейном пространстве $C^1[a,b]$, достигает сильного минимума в «точке» $y^*(\cdot)\in C^1[a,b]$, если найдется такая сильная ε – окрестность функции $y_*(x)$, что для любой функции $y(x)$ из этой окрестности выполняется неравенство $I[y^*(\cdot)]\le I[y(\cdot)]$. Минимум называется слабым, если все функции $y(x)$ берутся только из слабой ε – окрестности. Аналогично определяются сильный и слабый максимумы. Все максимумы и минимумы объединяются общим названием экстремумы.

Поскольку всякая функция, принадлежащая слабой ε – окрестности функции $y^*(x)$, заведомо входит в ее же сильную ε – окрестность, то всякий сильный экстремум одновременно является и слабым.

Говорят, что функционал $I[y(\cdot)]$, определенный на множестве D кривых $y(x)$, достигает на кривой $y^*(x)$ глобального минимума, если

$$I[y^*(x)]\le I[y(x)]\quad\forall y(x)\in D;$$

аналогично определяется глобальный максимум.

Методы решения вариационных задач основаны на следующем утверждении.

Теорема (Необходимое условие экстремума функционала). Если функционал $I[y]$, достигает экстремума во внутренней точке $y^*(x)$ своей области определения и в этой точке существует первая вариация $\delta I[y^*(\cdot),\delta y]$, то $\delta I[y^*(\cdot),\delta y]=0$.

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема.

Теорема (Основная лемма вариационного исчисления). Если для каждой непрерывной функции $\delta y(x)$

$$\int_a^b A(x)\delta y(x)dx = 0,$$

где функция $A(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $A(x) \equiv 0$ на том же отрезке.

Замечания. 1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления не изменится, если на функцию $\delta y(x)$ наложить следующее ограничение $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

2. Все изложенное в этом разделе без существенных изменений переносится на функционалы $I[y(x)]= I[y_1(x),\dots, y_n(x)]$, зависящие от вектор-функции $y(x)= (y_1(x),\dots, y_n(x))^T$ одной переменной, а также на функционалы, зависящие от функций нескольких переменных.

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих свойства функционалов и функциональных пространств.

Пример 1. Показать, что функционал

$$I[y(\cdot)] = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \qquad (1)$$

определенный на множестве функций $y = y(x)$, непрерывных вместе с первой производной на отрезке $[a, b]$, непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$, но не является непрерывным в $C^0[a,b]$.

Решение. Вначале покажем, что функционал (1) непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$. Действительно, имеем соотношения

$$\left|I[y]-I[y_0]\right| = \left|\int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2}-\sqrt{1+y_0'^2}\right)dx\right| \le \int_a^b \frac{|y'+y_0'|\,|y'-y_0'|}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_0'^2}}\,dx.$$

Из непрерывности производных y' и y_0' следует, что

$$\frac{|y'+y_0'|}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_0'^2}} \le M.$$

Далее, из определения нормы в пространстве $C^1[a,b]$ заключаем, что

$$\max_{x\in[a,b]}|y'-y_0'| = \|y'-y_0'\|_0 \le \|y-y_0\|_1.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/(M(b-a))$. Тогда для всех $y(\cdot)\in C^1[a,b]$ и таких, что $\|y-y_0\|_1<\delta$, имеем

$$\left|I[y]-I[y_0]\right| \le M\max_{x\in[a,b]}|y'-y_0'|\,(b-a) \le M(b-a)\|y-y_0\|_1 < \varepsilon,$$

а это означает, что функционал (1) непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$.

Функционал (1) не будет непрерывным в пространстве $C^0[a,b]$, так как он не ограничен в любой сильной δ - окрестности любой «точки» $y(\cdot)\in$

$C^1[a,b]$ ввиду неограниченности всей совокупности значений производных функций $y(x)\in C^1[a,b]$.

Пример 2. Показать, что функционал

$$L(f)=\int_a^b \alpha(x)f(x)dx, \qquad (2)$$

где $\alpha(x)$ - непрерывная фиксированная функция, является линейным в пространстве $C^0[a,b]$.

Решение. Аддитивность этого функционала очевидна. Покажем его непрерывность. Учитывая, что функция $\alpha(x)$ ограничена $(|\alpha(x)|<M)$, оценим модуль разности; имеем

$$|L(f)-L(f_1)|\le\int_a^b|\alpha(x)||f(x)-f_1(x)|dx\le$$

$$\le M\max_{x\in[a,b]}|f(x)-f_1(x)|(b-a)\le M\|f-f_1\|_0(b-a)<\varepsilon,$$

как только норма $\|f-f_1\|_0<\dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$. А это означает, что функционал (2) непрерывен.

Функционал (1) не является линейным в пространстве $C^0[a,b]$, ибо для него не выполнены условия непрерывности и аддитивности. Этот же функционал не будет линейным и в пространстве $C^1[a,b]$; хотя он и непрерывен, но не является аддитивным.

Пример 3. Найти расстояния $\|y-y_0\|_0$,$\|y-y_0\|_1$ между кривыми $y(x)=x^2$ и $y_0(x)=x^3$ в пространствах $C^0[0,1]$ и $C^1[0,1]$.

Решение. Найдем расстояние в пространстве $C^0[0,1]$:

$$\rho_0(x,y)=\|y-y_0\|_0=\max_{x\in[0,1]}|x^2-x^3|.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-x^3$. Из необходимого условия экстремума $f'(x)=0$ получаем $2x-3x^2=0$, или $x_1=0$, $x_2=2/3$. Сравнивая значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка $[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, устанавливаем искомое расстояние:

$$\rho_0(x,y)=|f(x)|_{x=2/3}=4/27.$$

Найдем расстояние в пространстве $C^1[0,1]$:

$$\rho_1(x,y)=\|y-y_0\|_1=\max\{\|f\|_0,\|f'\|_0\}=\max\{\|x^2-x^3\|_0,\|2x-3x^2\|_0\}.$$

Исследуя дополнительно функцию $g(x)=2x-3x^2$ на экстремум, из условия $g'(x)=0$ получаем $2-6x=0$, или $x_3=1/3$ – стационарная точка. Сравнивая значения функции $g(x)$ в стационарной точке и на концах отрезка $[0,1]$, $g(0)=0$, $g(1/3)=1/3$, $g(1)=-1$, устанавливаем

$$\|g\|_0=\|2x-3x^2\|_0=|2x-3x^2|_{x=1}=1,$$

то есть

$$\rho_1(x,y)=\max\{4/27,1\}=1.$$

Пример 4. Найти первую вариацию функционала

$$I[y(\cdot)]=\int_a^b y^2(x)\,dx.$$

Решение. Сначала найдем вариацию функционала как линейную часть его приращения

$$\Delta I = \int_a^b [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int_a^b y^2(x)\,dx = \int_a^b 2y(x)\cdot\delta y(x)dx + \int_a^b [\delta y(x)]^2\,dx.$$

Заметим, что первое слагаемое линейно относительно вариации $\delta y(x)$; второе слагаемое имеет более высокий порядок малости при $\|\delta y\|_0 \to 0$. Действительно

$$\int_a^b [\delta y(x)]^2\,dx \le \int_a^b [\max_{x\in[a,b]}|\delta y(x)|]^2\,dx = [\max_{x\in[a,b]}|\delta y(x)|]^2(b-a) = (b-a)\|\delta y\|_0^2.$$

Таким образом

$$\delta I = \int_a^b 2y(x)\cdot\delta y(x)dx.$$

Найдем вариацию функционала другим способом. Рассмотрим изменение функционала на семействе функций $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\,\delta y(x)$:

$$I[y(x)+\alpha\delta y(x)] = \int_a^b [y(x)+\alpha\delta y(x)]^2 dx.$$

Тогда

$$\delta I = \left.\frac{\partial I[y(x)+\alpha\delta y(x)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\int_a^b 2[y(x)+\alpha\delta y(x)]\delta y(x)dx\right|_{\alpha=0} = \int_a^b 2y(x)\delta y(x)dx.$$

Конечно, оба способа приводят к одному результату.

Пример 5. Доказать, что на кривой $y^*(x)=x$ функционал

$$I[y(\cdot)] = \int_0^1 y'^2(x)\,dx;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1$$

достигает глобального минимума.

Решение. Очевидно, функция $y^*(x)=x\in C^1[0,1]$. Рассмотрим вариации $\delta y(x)\in C^1[0,1]$, удовлетворяющие условиям $\delta y(0)=\delta y(1)=0$. Исследуем приращение функционала:

$$I[y^*(x)+\delta y(x)] - I[y^*(x)] = \int_0^1 [y^{*\prime}(x)+\delta y'(x)]^2 dx - \int_0^1 [y^{*\prime}(x)]^2 dx =$$

$$= 2\int_0^1 y^{*\prime}(x)\delta y'(x)dx + \int_0^1 [\delta y'(x)]^2 dx = 2\delta y(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 [\delta y'(x)]^2 dx \ge 0,$$

так как $y^{*\prime}(x)=1$. Поскольку кривая $y(x)=y^*(x)+\delta y(x)\in C^1[0,1]$ произвольна и $I[y(x)]=I[y^*(x)+\delta y(x)]\ge I[y^*(x)]$, то на функции $y^*(x)=x$ достигается глобальный минимум.

Пример 6. Доказать, что на кривой $y^*(x)=0$ функционал

$$I[y(\cdot)] = \int_0^\pi y^2(x)[3-y'^2(x)]dx;\ \ y(0)=y(\pi)=0$$

достигает слабого минимума.

Решение. Так как $I[y^*(x)]=0$, то согласно определению требуется доказать, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех $y(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_1 = \max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)-y^*(x)\|_0, \|y'(x)-y^{*\prime}(x)\|_0\right\} =$$
$$= \max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)\|_0, \|y'(x)\|_0\right\} < \varepsilon\ ,$$

справедливо неравенство $I[y(x)] \geq I[y^*(x)]=0$.

Пусть $\varepsilon=1$, тогда для всех кривых из ε – окрестности первого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ выполняются условия:

$$\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)| < \varepsilon = 1,\ \max_{x\in[0,\pi]}|y'(x)| < \varepsilon = 1.$$

Поэтому $0 \leq y^2(x) < 1$, $3 - y'^2(x) > 0$ и

$$I[y(\cdot)] = \int_0^\pi y^2(x)[3-y'^2(x)]dx \geq 0,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал достигает слабого минимума.

Исследуем функционал на наличие сильного минимума. При $\varepsilon=1$ ε – окрестность нулевого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ образуют кривые, удовлетворяющие условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_0 = \max_{x\in[0,\pi]}|y(x)-y^*(x)| = \max_{x\in[0,\pi]}|y(x)| < \varepsilon = 1\ .$$

Рассмотрим последовательность функций $y_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^n$ из этой ε – окрестности. Нетрудно заметить, что функционал на этих функциях принимает следующие значения

$$I[y_n(\cdot)] = \int_0^\pi y_n^2(x)[3-y_n'^2(x)]dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n}[3-\frac{n^2}{4\pi^2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n-2}]dx =$$
$$= \frac{48\pi^2 n - 2n^3 - n^2 - 12\pi^2}{16\pi(2n+1)(4n-1)},$$

которые становятся отрицательными, начиная уже с $n > n_0 = 15$. Аналогичные рассуждения справедливы при других значениях ε. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал не достигает сильного минимума.

2.1. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Пусть функция $F(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам. Требуется среди всех функций $y(x)\in C^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a)=y_0,\ y(b)=y_1, \tag{1}$$

найти ту функцию, на которой достигается слабый экстремум функционала

$$I[y(\cdot)] = \int_a^b F(x,y,y')dx\ . \tag{2}$$

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании на множестве всех гладких кривых, проходящих через точки $M_0(a, y_0)$ и $M_1(b, y_1)$, той кривой, на которой функционал (2) достигает слабого экстремума (рис.1).

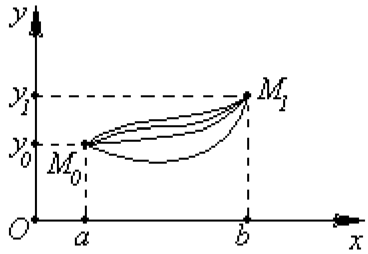

Рис. 1. Схема графиков семейства допустимых функций.

При решении простейшей задачи вариационного исчисления используется теорема, которая следует из необходимого условия экстремума, $\delta I=0$.

Теорема 1. Для того чтобы функционал (2) достигал на функции $y(x)\in C^1[a,b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 . \tag{3}$$

Решения (интегральные кривые) уравнения (3) называются экстремалями функционала (2).

Уравнение (3) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0 .$$

Если $F_{y'y'} \neq 0$, то оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которые находятся с помощью граничных условий (1).

Отметим что, так как всякий сильный экстремум функционала является и слабым, то теорема 1 дает необходимое условие и сильного экстремума функционала (2). Кроме того, так как абсолютный экстремум функционала (2) на множестве

$$G = \{ y(x)\in C_1[a,b] \mid y(a) = y_0, y(b) = y_1 \} \tag{4}$$

является и локальным экстремумом (сильным и слабым), то теорема 1 определяет необходимое условие абсолютного экстремума функционала (2) на множестве (4).

Таким образом, решение краевой задачи

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,\ y(a) = y_0,\ y(b) = y_1, \qquad (5)$$

позволяет найти все кривые возможного экстремума функционала (2) на множестве функций (4).

В отличие от задачи с начальными условиями, $y(a) = y_0,\ y'(a) = y'_0$ (задача Коши), задача с граничными условиями (1) может не иметь решение или иметь множество решений, даже если в окрестности точки $x= a$ выполняется теорема существования и единственности задачи Коши. Кроме этого, само уравнение Эйлера (3) может вырождаться в дифференциальное уравнение первого порядка ($F_{y'y'} \neq 0$) или даже вообще не быть дифференциальным ($F_{y'} = f(x)$).

Рассмотрим частные случаи интегрирования уравнения Эйлера.

1. $F = F(x,y)$, то есть подынтегральная функция в функционале (2) не зависит от y'. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$F_y(x,y) = 0\,.$$

Это конечное (не дифференциальное) уравнение, его решение $y=y(x)$ не содержит произвольных постоянных и, следовательно, удовлетворяет условиям (1) только в исключительных случаях. В остальных случаях задача отыскания экстремума функционала (2) не имеет решения в классе функций $y(x)\in C^1[a,b]$.

Пример. Найти функцию $y(x)\in C^1[0,b]$, на которой достигается экстремум функционала

$$I[y] = \int_0^b y(y - 2x^2)dx\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0,\ y(b)=y_1$.

Решение. Уравнение Эйлера принимает вид $2y-2x^2=0$, отсюда $y=x^2$. Граничные условия удовлетворяются только, если $y_1=b^2$. В противном случае задача не имеет решения в пространстве $C^1[a,b]$.

2. $F(x,y) = M(x,y)+y'{\cdot}N(x,y)$, то есть подынтегральная функция в функционале (2) линейно зависит от y'. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$M_y(x,y)-N_x(x,y)=0. \qquad (6)$$

Это уравнение не является дифференциальным, а его решение может не удовлетворять граничным условиям. Это означает, что в пространстве $C^1[a,b]$ экстремали функционала (2) отсутствуют, и исходная задача имеет решение в исключительных случаях. Заметим, что если условие (6) выполняется в некоторой области, имеющей граничные точки (a,y_0) и (b,y_1), то значение функционала не зависит от вида кривой $y(x)\in C^1[a,b]$. В этом случае функционал (2) можно рассматривать как криволинейный интеграл от дифференциальной формы

$$M(x,y)dx+ N(x,y)dy,$$

для которой (6) является условием полного дифференциала. Исходная задача на отыскание экстремалей теряет смысл.

3. Функция F зависит только от y': $F=F(y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_{y'y'}\cdot y''=0$, а его решение $y(x)=C_1x+C_2$. Таким образом, в данном случае экстремалями функционала $I[y(x)]$ являются всевозможные прямые.

Пример. Найти функцию $y(x)\in C^1[0,1]$, на которой достигается экстремум функционала,

$$I[y]=\int_0^1 (y')^2 e^{\cos y'}dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0,\ y(1)=-4$.

Решение. Подынтегральная функция зависит только от y', $F(y')=(y')^2e^{\cos y'}$. Поэтому семейство экстремалей представляет собой двухпараметрическое семейство прямых, $y(x)=C_1x+C_2$. Используя граничные условия, получаем $C_1=-4,\ C_2=0$. Таким образом, искомой экстремалью является функция $y(x)=-4x$.

4. Функция F не зависит от y, т.е. $F=F(x,y')$. Тогда уравнение (3) записывается в виде $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F_{y'}(x,y')=C_1$, т.е. дифференциальное уравнение первого порядка, решив которое, найдем экстремали функционала.

Пример. Материальная точка перемещается из точки $A(1,0)$ в точку $B(2,1)$ со скоростью $v=x$. Найти кривую, по которой время движения будет минимальным.

Решение: Используя известное кинематическое выражение $v=\frac{ds}{dt}$, где $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ – длина элемента дуги траектории точки, получаем дифференциальное соотношение для t: $dt=\frac{ds}{x}$. Поэтому время, затраченное на прохождение дуги кривой $y=y(x)\ (1\le x\le 2)$, определяется с помощью интеграла

$$t[y]=\int_1^2\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx,$$

представляющего собой функционал, в котором рассматриваемые кривые $y(x)$ удовлетворяют условиям $y(1)=0,\ y(2)=1$. Подынтегральная функция $F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$ не зависит от y, поэтому из $F_{y'}=C_1=const$ имеем равенство

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{C_1}.$$

Определяя отсюда y':

$$y' = \pm \frac{x}{\sqrt{C_1^2 - x^2}}$$

и интегрируя, находим экстремали

$$y = C_2 \pm \sqrt{C_1^2 - x^2} \text{, или } (y - C_2)^2 + x^2 = C_1^2 .$$

Из граничных условий $y(1)=0$ и $y(2)=1$ для определения C_1 и C_2 получаем систему

$$C_2^2 + 1 = C_1^2, \quad (1 - C_2)^2 + 4 = C_1^2 .$$

Отсюда находим, что $C_1=\sqrt{5}$, $C_2=2$ и уравнение искомой экстремали есть окружность $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ с центром в точке $(0,2)$ радиуса $\sqrt{5}$.

Из физических соображений ясно, что максимума для времени движения по различным кривым не существует и функция $y = 2 - \sqrt{-5 - x^2}$ дает минимум функционалу $t[y]$.

5. Функция F не зависит явно от x, т.е. $F = F(y, y')$. Уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \ ,$$

или (после умножения обеих частей этого равенства на y')

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0 ,$$

откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера

$$F - y'F_{y'} = C_1 .$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка можно проинтегрировать, разрешив его относительно y' и разделив переменные, или путем введения параметра. [17, Еф-Сб-4, стр. 115]

Пример. Среди кривых, соединяющих две точки $M_0(a,y_0)$ и $M_1(b,y_1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

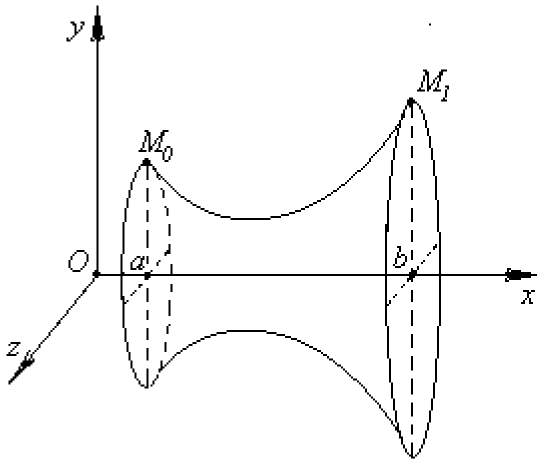

Рис. 2. Форма поверхности вращения наименьшей площади.

Решение: Площадь поверхности вращения вокруг оси Ox задается функционалом

$$I[y] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

причем допустимые кривые $y(x)$ удовлетворяют условию $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$. Подынтегральная функция не зависит от x, поэтому можем воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера $F - y'F_{y'} = C_1$, который в данном случае принимает вид

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \quad \text{, или } y = C_1\sqrt{1+y'^2} \text{ .}$$

После элементарных преобразований получаем отсюда уравнение

$$C_1 dy / \sqrt{y^2 - C_1^2} = dx,$$

интегрируя которое, имеем

$$\ln\left|\frac{y}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1}\right| = \frac{x}{C_1} + C_2.$$

Разрешая полученное равенство относительно y, придем к уравнению цепной линии

$$y=C_1 Ch(x/C_1+C_2).$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из системы

$$y_0=C_1 Ch(a/C_1+C_2),\ \ y_1=C_1 Ch(b/C_1+C_2), \qquad (5)$$

которая может иметь одно, два или ни одного решения. Дальнейшие исследования показывают, что если система (5) не имеет решения, а также при достаточно малых отношениях $y_i/(b-a)$ $(i=0,1)$, множество значений площади фигур вращения имеют инфимум, равный

$$\pi(a^2+b^2),$$

который не достигается в пространстве функций $C^1[a,b]$. При достаточно больших отношениях $y_i/(b-a)$ $(i=0,1)$ и когда система (5) имеет два решения, на ближней к оси x кривой достигается локальный максимум, а на дальней кривой – абсолютный минимум.

В общем случае приходится привлекать известные методы решения из теории дифференциальных уравнений.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал

$$I[y] = \int_1^2 (x^2y'^2 + 12y^2)dx, \quad y(1) = 1, y(2) = 8.$$

Решение: Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$x^2y'' + 2xy' - 12y = 0.$$

Линейные уравнения такого типа в теории дифференциальных уравнений называются также уравнениями Эйлера. Его решение ищем в виде $y = x^\lambda$.

Найдем производные $y' = \lambda x^{\lambda-1}, y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$; подставив их в уравнение Эйлера, получим

$$x^{\lambda}(\lambda^2 + \lambda - 12) = 0.$$

Для определения λ имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -4$. Общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^{-4}.$$

Из граничных условий $y(1) = 1, y(2) = 8$ для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 8C_1 + C_2/16 = 8.$$

Отсюда находим $C_1=1$, $C_2=0$. Следовательно, $y=x^3$ есть экстремаль данного функционала. В этом примере экстремаль $y = x^3$ реализует минимум функционала.

2.2. **Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка**

Одним из обобщений простейшей задачи вариационного исчисления является задача на экстремум функционала $J[y(\cdot)]$, зависящего от производных высших порядков функции $y(x)$:

$$J[y(\cdot)] = \int_a^b F(x, y, \ldots, y^{(n)})dx, \tag{7}$$

где функция $F(x, y, ..., y^{(n)})$ имеет непрерывные частные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка по всем аргументам, а $y(x) \in C^n[a,b]$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} &y(a) = y_0, \quad y^{(1)}(a) = y_0^{(1)}, ..., y^{(n)}(a) = y_0^{(n)}, \\ &y(b) = y_1, \quad y^{(1)}(b) = y_1^{(1)}, ..., y^{(n)}(b) = y_1^{(n)}. \end{aligned} \tag{8}$$

В рассматриваемой задаче теорема 1 обобщается следующей теоремой.

Теорема 2. Для того чтобы функционал (7) достигал на функции $y(x) \in C^n[a,b]$ локального экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y^{(1)}} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(2)}} - ...(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{9}$$

Подобно случаю простейшей задачи вариационного исчисления, решения уравнения (9) (экстремали функционала (7)), удовлетворяющие граничным условиям (8), являются кривыми возможного абсолютного экстремума этого функционала на множестве

$$G = \left\{ y(x) \in C^n[a,b] \;\middle|\; y(a) = y_0, ..., y^{(n)}(a) = y_0^{(n)},\ y(b) = y_1, ..., y^{(n)}(b) = y_1^{(n)} \right\}.$$

2.3. **Функционалы, зависящие от нескольких функций одной переменной**

Другим обобщением простейшей задачи вариационного исчисления является задача отыскания экстремума функционала, зависящего от нескольких функций. Здесь требуется найти совокупность функций $y_1(x),\ldots, y_n(x)\in C^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y_k(a)= y_{k0},\ y_k(b)= y_{k1}\ \ (k=1,\ldots,n)$$

и доставляющих экстремум функционалу

$$I[y_1(x),...,y_n(x)] = \int_a^b F(x,y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x))dx\,, \tag{10}$$

где функция $F(x,y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам.

В этом случае необходимое условие экстремума функционала (10) приводит к следующей теореме.

Теорема 3. Для того чтобы набор функций $y_1(x),\ldots, y_n(x)\in C^1[a,b]$ доставлял слабый экстремум функционалу (10), необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли системе уравнений Эйлера

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx}F_{y_k'} = 0, \quad k = 1,...,n \tag{12}$$

Уравнения (12) представляют собой систему n дифференциальных уравнений второго порядка. Общее решение системы в общем случае содержит $2n$ произвольных постоянных, которые однозначно определяются из граничных условий.

3.1. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности

В задачах вариационного исчисления с подвижными границами в отличие от ранее рассмотренных задач граничные условия на функцию $y(x),\ x\in [a,b]$ на концах отрезка $[a,b]$ не зафиксированы.

Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами состоит в определении функции $y(x)\in C^1[a,b]$ и точек $x_0,\ x_1\in[a,b],\ x_0<x_1$, для которых функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \tag{13}$$

достигает слабого экстремума при условиях

$$y(x_0)=\varphi_0(x_0),\ \ y(x_1)=\varphi_1(x_1). \tag{14}$$

Здесь $\varphi_0(x),\varphi_1(x)\in C^1[a,b]$, $F(x,y,z)$ - заданные функции и $F(x,y,z)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно по всем аргументам.

Замечание. Напомним, что слабым называется локальный экстремум в пространстве $C^1[a,b]$. В задаче с подвижными границами на кривой $y^*(x)$ с абсциссами концов x_0^* и x_1^* функционал (13) достигает локального экстремума в $C^1[a,b]$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех кривых $y(x) \in C^1[a,b]$ и точек x_0 и x_1, удовлетворяющих неравенствам $\|y^* - y\|_1 < \varepsilon$, $|x_0^* - x_0| < \varepsilon$, $|x_1^* - x_1| < \varepsilon$, справедливо $J[y^*(x)] \le J[y(x)]$ (локальный минимум) или $J[y^*(x)] \ge J[y(x)]$ (локальный максимум).

Задачу (13)-(14) можно сформулировать и следующим образом. Пусть на плоскости заданы гладкие кривые γ_0: $y=\varphi_0(x)$ и γ_1: $y=\varphi_1(x)$, $x \in [a,b]$. Требуется найти такую гладкую кривую $y=y(x)$, которая соединяет какую – либо точку кривой γ_0 с какой – либо точкой кривой γ_1 и доставляет слабый экстремум функционалу (13).

Приведем обобщение теоремы 1 для простейшей задачи вариационного исчисления с подвижными границами.

Т е о р е м а 4. Для того чтобы функционал (13) достигал на функции $y(x) \in C^1[a,b]$ слабого экстремума при условиях (14), необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

и условию трансверсальности

$$\left[F + (\varphi_0' - y')F_{y'}\right]_{x=x_0} = 0, \left[F + (\varphi_1' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 \,. \tag{15}$$

Таким образом, для определения экстремалей в простейшей задаче с подвижными границами необходимо найти общее решение $y(x,C_1,C_2)$ уравнения Эйлера, после чего из условий (15) и уравнений

$$y(x_0,C_1,C_2)=\varphi_0(x_0), \;\; y(x_1,C_1,C_2)=\varphi_1(x_1) \tag{16}$$

определить постоянные C_1 и C_2 и концы отрезка $[x_0,x_1]$.

Если на одном из концов кривой $y(x)$ задано обычное граничное условие ($y(a)=y_0$ или $y(b)=y_1$), то условие трансверсальности (15) следует записать только для другого конца кривой.

Частным случаем задачи с подвижными границами является задача, в которой задана абсцисса одного из концов кривой $y(x)$, например $x_2=b$, но граничное условие для $x=b$ отсутствует. Это означает, что граничная точка $(b,y(b))$ кривой $y(x)$ может перемещаться по вертикальной прямой $x=b$, и вместо второго условия трансверсальности (15) следует записать естественное граничное условие

$$\left[F_{y'}\right]_{x=b} = 0. \tag{17}$$

К задачам вариационного исчисления с подвижными границами относится и задача Больца, состоящая в определении функции $y(x) \in C^1[a,b]$, доставляющей слабый экстремум функционалу

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')dx + f(y(a),y(b)), \tag{19}$$

где $f(u,v)$ - заданная функция, имеющая непрерывные производные по u и v.

Необходимое условие экстремума функционала (19) формулируется следующим образом.

Теорема 5. Для того чтобы функционал (19) достигал на функции $y(x) \in C^1[a,b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и условию трансверсальности для задачи Больца

$$\left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)} \right]_{x=a} = 0, \quad \left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(b)} \right]_{x=b} = 0. \tag{20}$$

Условия (20) используются для определения постоянных C_1 и C_2 из общего решения $y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера.

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int_0^{\pi} (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx$$

при условии, что левый конец закреплен $(y(0)=0)$, а правый перемещается по прямой $x=\pi$.

Решение: На значение экстремали $y(x)$ в правом конце $x=\pi$ не накладывается никаких условий, поэтому для отыскания экстремали следует найти решение уравнения Эйлера $y'' + y = \sin x$ при естественном граничном условии $F_{y'}\big|_{x=\pi} = y'\big|_{x=\pi} = 0$. Общее решение уравнение Эйлера записывается в виде

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

Тогда из условия $y(0)=0$ находим $C_1 = 0$, а из условия $y'(\pi) = 0$ получаем уравнение

$$y'\big|_{x=\pi} = \left(C_2 \cos x - \frac{\cos x}{2} + \frac{x \sin x}{2} \right)\Bigg|_{x=\pi} = -C_2 + \frac{1}{2} = 0,$$

откуда $C_2=1/2$. Следовательно, экстремалью является кривая

$$y = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x).$$

Экстремали с угловыми точками.

Односторонние вариации.

Достаточные условия экстремума. Поле экстремалей.

Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y').

Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.

Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида $f(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$.

Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида $f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0$.

Изопериметрические задачи.

Прямые методы в вариационных задачах. Конечно-разностный метод Эйлера.

Метод Ритца. Метод Канторовича.

Зависимость функции и множества, на котором она максимизируется, от параметра. Оптимизация процессов, линейных относительно управления, без ограничений на управление.

Задачи с ограничениями на управление.

Необходимые условия оптимального управления в форме Лагранжа-Понтрягина.

Непрерывные процессы. Многошаговые процессы (без ограничений на управление, с ограничениями на управление).

Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана (динамическое программирование). Непрерывные процессы. Многошаговые процессы.

5. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

Экзаменационные билеты

Билет 1

1. Вариация функционала и ее свойства.
2. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей.
3. Исследовать на экстремум функционал:

$$v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')dx; \ y(1) = 3, \ y(2) = 5.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи:

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi} y \, Sin\, x \, dx; \ \int_0^{\pi} y'^2 dx = 3\pi / 2; \ y(0) = 0, \ y(\pi) = \pi .$$

Билет 2

1. Необходимое условие экстремума функционала.
2. Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y'). Условие сильного и слабого экстремума для функционала.
3. Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$.

Указание: решение удобно искать в цилиндрических координатах r, φ, z .

4. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами:

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} y'^2 dx; \ y(0) = 0, \ y(x_1) = -x_1 - 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)= x^3$ по норме пространства: а) $C^0[0,1]$; б) $C^1[0,1]$.

2.Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=xe^{-x}$, $y_2(x)=0$ по норме пространства: $C^0[0,2]$; б) $C^1[0,2]$.

3.Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x$, $y_2(x)=\ln x$ по норме пространства: $C^0[e^{-1},e]$; б) $C^1[e^{-1},e]$.

4.Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 (y-y')dx$, определенный на $C^1[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_1$, является непрерывным на функции $y_0(x)=x^3$.

5.Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 (y')^2 dx$, определенный на $C^1[0,1]$, разрывен на функции $y_0(x)\equiv 0$ в случае нормы $\|\cdot\|_0$, но непрерывен на этой функции в случае нормы $\|\cdot\|_1$.

6.Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+y^2}\,dx$, определенный на пространстве $C[0,1]$, непрерывен на функции $y_0(x)=x^2$ по норме $\|\cdot\|_0$.

7.Докажите, что любой линейный непрерывный функционал в нормированном пространстве является дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

8.Докажите, что функционал $I[y]=\int_a^b y^2 dx$, определенный в $C^0[a,b]$, является всюду дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

9.Проверьте, являются ли дифференцируемыми следующие функционалы: а) $I[y]=y(a)$ в $C^0[a,b]$; б) $I[y]=y(a)$ в $C^1[a,b]$; в) $I[y]=|y(a)|$ в $C^0[a,b]$; г) $I[y]=\sqrt{1+y'(a)}$, в $C^1[a,b]$.

10.Найдите первую вариацию функционала, определенного на нормированном пространстве непрерывно дифференцируемых функций: а) $I[y]=\int_0^1 x^2\sqrt{1+y^2}\,dx$; б) $I[y]=\int_{-1}^1 (y'e^y+xy^2)dx$; в) $I[y]=\int_0^\pi y'\,Siny\,dx$; г) $I[y]=y^2(0)+\int_0^1 (xy+(y')^2)dx$.

11.Найти приращение и вариацию следующих функционалов:
а) $I[y]=\int_{-1}^e (yy'+xy'^2)dx$, если $y=\ln x,\ \delta y=\dfrac{\alpha(x-1)}{e-1}$;
б) $I[y]=\int_0^\pi y'^2\,Sinx\,dx$, если $y=Sinx$, $\delta y=\alpha Cosx$.

Найдите все экстремали функционала $I[y]$, удовлетворяющие заданным краевым условиям (№№12-20):

12.$I[y]=\int_0^{\pi/2} ((y')^2-y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=1$. Отв. $y(x)=Sinx$.

13.$I[y]=\int_0^1 ((y')^2+12xy)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$. Отв. $y(x)=x^3$.

14.$I[y]=\int\limits_{\pi}^{2\pi}(4(y')^2-7yy'-y^2)dx,\ y(\pi)=0,\ y(2\pi)=0$. Отв. $y(x)=0$

15.$I[y]=\int\limits_{0}^{\pi/8}(16y^2+(y')^2+2y(Sin2x+16x))dx,\ y(0)=0,\ y(\pi/8)=-\pi/8$.

Отв. $y(x)=\dfrac{\sqrt{2}Sh4x}{40Sh(\pi/2)}-\dfrac{1}{20}Sin2x-x$.

16.$I[y]=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(3x^2y^2+Cos\,y+y'(2x^3y-xSin\,y))dx,\quad y(\pi/4)=0,\ y(\pi/2)=1$. Отв. $y(x)\in C^1[\pi/4,\pi/2]$

17.$I[y]=\int\limits_{2}^{4}(x(y')^4-2y(y')^3)dx,\ y(2)=4,\ y(4)=5$. Отв. $y(x)=0.5x+3$

18.$I[y]=\int\limits_{0}^{1}((y')^2-2x^6y'-2xy)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-1/6$. Отв. $y(x)=2\cdot x^7/7-x^3/3-5x/42$

19.$I[y]=\int\limits_{0}^{1}tg\,y'dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2$. Отв. $y(x)=2x$

20.$I[y]=\int\limits_{0}^{1}((y')^2+\dfrac{2xy}{1+x^2})dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-1$. Отв. $y(x)=05xln(x^2+1)-x+arctgx-0.25(2ln2-\pi)$

21.Покажите, что функционал

$$I[y]=\int\limits_{a}^{b}(p(x)y'+q(x)y+r(x))\,dx,$$

где $p(x)\in C^1[a,b]$, $q(x)$, $r(x)\in C[a,b]$, не имеет экстремумов.

22.Покажите, что для всякого дифференциального уравнения

$$y''=\varphi(x,y,y')$$

с дважды непрерывно дифференцируемой правой частью $\varphi(x,y,y')$ можно найти такую функцию $f(x,y,y')$, что решения этого уравнения будут экстремалями функционала $\int\limits_{a}^{b}f(x,y,y')dx$.

Найдите все экстремали заданного функционала, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

а) $I[y]=\int\limits_{0}^{1}(120\,xy-(y'')^2)\,dx$, $y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=0,\ y'(1)=6;$

г) $I[y]=\int\limits_{0}^{1}((y'')^2+y^2-2yx^2)\,dx$, $y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=0,\ y'(1)=2;$

23.Среди всех функций класса $C^2[0,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0,\ y'(0)=y'(\pi)=1$, найти такую, которая реализует экстремум функционала $I[y]=\int\limits_{0}^{\pi}(16y^2-(y'')^2+x^2)\,dx$.

24.Найти экстремали заданных функционалов:

$$I[y]=\int_0^1 ((y'')^2+2(y')^2+y^2)\,dx, \quad y(0)=y(1)=0,\ y'(0)=1,\ y'(1)=-Sh1.$$

25. Найти все экстремали функционала $J[y]$,удовлетворяющие граничным условиям.

26. $J(y)=\int_0^1 y''^2dx;\quad y(0)=y(1)=y'(1)=0,\ y'(0)=1.$

27. $J(y)=\int_0^1 (48y-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1, y'(1)=4.$

28. $J(y)=\int_0^1 (y''^2-24xy)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1/5, y'(1)=1.$

29.

$J(y)=\int_0^{\pi/2} (y''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2,\ y'(\pi/2)=0.$

30. $J(y)=\int_0^b (y''^2+y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y(b)=y'(b)=0.$

31. $J(y)=\int_0^1 e^{-x}y''^2dx;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$

32.

$J(y)=\int_0^1 (x+1)^3y''^2dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y(1)=1/2,\ y'(1)=-1/4.$

33.

$J(y)=\int_0^{\pi/2} (y''^2-y^2+x^2)dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=y(\pi/2)=0,\ y'(\pi/2)=-1.$

34.

$J(y)=\int_0^1 y'''^2dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=1, y'(1)=4, y''(1)=12.$

35.

$J(y)=\int_0^1 (y'''^2+y''^2)dx;\quad y(0)=y''(0)=0,\ y'(0)=1, y(1)=y''(1)=Sh1,$

$y'(1)=Ch1.$

36. $J(y)=\int_0^{\pi} (y'''^2-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(\pi)=\pi, y'(\pi)=2,$

$y''(\pi)=0.$

37. $J(y)=\int_0^{\pi} (y'''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0, y(\pi)=y''(\pi)=Sh\pi,$

$y'(\pi)=Ch\pi+1.$

6. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекторы: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В.

Практические занятия: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В.

ОГЛАВЛЕНИЕ