

Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
«___» _____ 2008г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методическое пособие

Составитель: Д.Л. Харичева

Благовещенск

2008

ББК
Х

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета*

Харичева Д.Л.

Моделирование теплофизических задач. Методические материалы для студентов очной формы обучения специальности 010101 «Математика».
– Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2008. – с.

Рецензенты: доктор физ. – мат. наук, профессор С.В. Ланкин
кандидат техн. наук А.В. Козырь

© Амурский государственный университет, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

I. Общие сведения.....	4
II. Рекомендации по написанию работы.....	4
III. Основные подходы к моделированию теплофизических задач.....	6
3.1. Аналитические методы расчета тепловых полей в материалах.....	7
3.2. Численные методы решения тепловых задач	8
3.2.1. Постановки задач для уравнений параболического типа.....	10
3.2.2. Разностные схемы для численного решения нелинейного уравнения теплопроводности	14
3.2.3. Разностные схемы для численного решения многомерного уравнения теплопроводности	18
3.2.4. Исследование сходимости разностных схем для многомерного уравнения теплопроводности	21
3.3. Процессы излучения и конвекции в задачах теплообмена...	24
3.4. Модельные представления неидеального контакта многослойных конструкций.....	25
IV. Построение теплофизических моделей.....	28
4.1. Тепловая модель конусного многослойного металлокерамического соединения с нелинейными краевыми условиями III-го и IV-го рода.....	28
4.2. Моделирование задач плавления	43
4.3. Метод независимых потоков для численного решения многомерного уравнения теплопроводности	50
4.3.1. Двумерное уравнение теплопроводности в декартовых координатах	51

4.3.2. Аппроксимация и устойчивость метода.....	56
4.3.3. Монотонность (положительность).....	61
4.3.4. Трехмерный случай (декартовы координаты).....	64
4.3.5. Переменные коэффициенты. Неоднородность. Система уравнений.....	69
4.3.6. Полярная система координат.....	73
4.3.7. Верификация и численные эксперименты	76
V. Теплофизические задачи	81
5.1. Задачи для практических занятий	81
5.2. Задачи для лабораторных работ	85
VI. Рекомендуемая литература.....	91
Приложения	93

I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика» занимающимся проблемами теплообмена и численными методами решения задач теплообмена.

В процессе написания курсовых и дипломных работ студенты должны четко понимать структуру, методы решения таких задач и особенности полученных результатов.

Студенты должны пользоваться полученными ранее знаниями и умениями по решению обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, а также систем дифференциальных уравнений численными методами. Материалы курсовых работ рекомендуется использовать при написании дипломных проектов.

II. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО НАПИСАНИЮ КУРСОВЫХ И ДИПЛОМНЫХ РАБОТ

1. Титульный лист – 1 стр.
2. Содержание – 1-2 стр.
3. Введение – 1-3 стр.

Обосновывается актуальность, новизна, практическая значимость проблемы.

4. Глава 1 – до 25% от всего объема работы.

Литературный обзор, посвященный анализу существующих методов решения задач. В выводах должен быть определен и обоснован применяемый в работе метод решения

5. Глава 2 – до 40% от всего объема работы.

Описание задачи исследования. Полная схема численного решения конкретной задачи теплообмена состоит из следующих этапов:

Этап 1. Сформулировать физическую задачу.

Этап 2. Записать основные (интегро-) дифференциальные уравнения, а также соответствующие начальные и граничные условия.

Этап 3. Провести дискретизацию этих (интегро-) дифференциальных уравнений, получив в результате систему соответствующих алгебраических уравнений.

Этап 4. Проанализировать численные свойства схемы дискретизации, такие как устойчивость, аппроксимация, сходимость и границы погрешности.

Этап 5. Если выбранная схема удовлетворяет поставленным требованиям, с помощью какого-либо матричного метода или итерационной процедуры решить полученную систему алгебраических уравнений. Если этого сделать не удастся, вернуться к этапу 3 и воспользоваться другой схемой дискретизации.

6. Глава 3 – до 35% от всего объема работы.

В данной главе должны содержаться основные результаты полученных расчетов, их анализ и конкретные выводы с возможными рекомендациями.

7. Заключение – 1 стр.

Указываются основополагающие выводы, составляющие основную цель работы.

8. Список использованной литературы – 1-2 стр.

Описания литературы в списке располагают и нумеруют по ходу ссылок на них в тексте. Ссылки на источник в тексте приводят в квадратных скобках с указанием его номера, например [1].

9. Приложения

Приложения могут содержать алгоритмы поиска решений, листинги программ, дополнительные иллюстрации промежуточных решений и т.д.

Текст работы должен быть оформлен в соответствии с ГОСТом 7.32–2001.

III. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Теоретическую сторону вопроса удобно изучать на конкретных и достаточно хорошо изученных примерах. Необходимо заметить, что большинство исследователей независимо от того, чему они отдают предпочтение — конечным элементам или конечным разностям для решения задач теплообмена, так или иначе всегда имеют дело с конечным числом физических переменных, связанных с конечным числом подобластей, на которые разбивается исходная пространственно-временная область.

Таким образом, все конечно-разностные и конечно-элементные подходы можно в принципе рассматривать как различные варианты метода конечных областей. При этом, варианты метода конечных областей различаются между собой по 1) форме подобластей; 2) виду базисных функций; 3) числу неизвестных в узлах, входящих в соответствующее алгебраическое уравнение; 4) виду коэффициентов в алгебраическом уравнении (если число неизвестных в узлах одинаково); 5) способу получения алгебраического уравнения и 6) виду схемы решения линейных и нелинейных алгебраических уравнений.

Стационарный процесс распространения тепла в изотропной среде при отсутствии внутренних источников описывается уравнением Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{c\rho}}$$

где a - коэффициент температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности, c - теплоемкость, ρ - плотность вещества. Для неограниченной пластины толщиной h уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (0, h).$$

Решением уравнения с граничными условиями $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=h} = Q, \quad T \Big|_{x=0} = 0$

является функция:

$$v(x,t) = \frac{hQ}{KL} \left(1 + L \left(1 - \frac{x}{h} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(\alpha_n^2 + L^2)}{\alpha_n^2(L + L^2 + \alpha_n^2)} e^{-\alpha_n^2 t} \right),$$

где α_n - положительные корни уравнения $\alpha \operatorname{tg} \alpha = L$.

В цилиндрических координатах уравнение теплопроводности будет выглядеть:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

3.1. Аналитические методы расчета тепловых полей в материалах

При построении систем, описывающих явления теплопереноса, уравнение теплопроводности дополняют граничными условиями I, II, III и IV рода. Условия I рода - заданы температуры поверхностей (T_n); II рода - тепловые потоки на поверхностях (q); III рода - тепловые потоки, записанные в виде закона Ньютона $q = \alpha(T_n - T_c)$, где T_c - температура среды; IV рода - заданы условия сопряжения двух сред.

При решении задач теплопроводности ограниченных тел применяется метод разделения переменных, который лежит в основе почти всех аналитических методов решения краевых задач данной области (метода интегральных преобразований, метода функций Грина, метода продолжений, источников и др.).

Метод предполагает разделение переменных и разбиение системы дифференциальных уравнений в частных производных по теореме:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(x) dx,$$

на подсистемы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данное соотношение применимо без доказательства сходимости ряда только для полного набора ортогональных функций.

Для задач теплопроводности неограниченных или полуограниченных тел применяется метод источников.

В нецилиндрических областях для решения нестационарных задач с движущимися границами этот способ рассмотрел Э.М. Карташов.

Обоснование Био своего вариационного принципа уравнения Лапласа применительно к теории теплопроводности стало началом многочисленных работ по вариационным методам. Возможно также применение вариационного метода Био к расчету температурных полей в однородных и составных пластинах с использованием граничного условия III рода..

Приближенное решение нелинейной задачи нестационарной теплопроводности для пластины при теплообмене излучением методом Канторовича было получено М.Г. Коганом.

Решение нестационарных нелинейных задач теплопроводности аналитическими методами затруднено. Получаемые решения (как правило, приближенными методами) либо громоздки, либо система оказывается неразрешимой. Получение качественной оценки решения достигается путем значительных допущений в модели, что является типичным недостатком аналитических методов.

3.2. Численные методы решения тепловых задач

Выбор численного метода для решения той или иной задачи делают исходя из ее постановки. Как правило, на алгоритм численного решения накладываются требования по точности, трудоемкости алгоритма, времени сходимости.

Для линейных систем дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) для тел простейших форм рекомендуется использовать метод прогонки. Выбор шаблона разностной схемы не влияет на трудоемкость алгоритма, но может значительно повысить точность решения, особенно для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для уравнений в частных производных изоморфных тел или тел, теплофизические свойства которых незначительно отличаются от направления, можно использовать схемы расщепления.

В системах для неоднородных материалов, например, многослойных, в которых теплофизические свойства слоев сильно различаются, применение схем расщепления приводит к значительным погрешностям. Для таких систем принято применять методы конечных элементов, метод разбиения с взвешенными невязками, вариационные методы и др. Можно варьировать шаг сетки в зависимости от материала слоя.

Для сложных форм конструкций часто используется метод взвешенных невязок, с помощью которых «сшиваются» подсистемы уравнений отдельных частей конструкции. Минимизация невязок позволяет свести к минимуму ошибку найденного решения. Метод часто используется совместно с методом расщепления сетки, в котором осуществляется сгущение или разрежение сетки на стыке элементов конструкции. Последний метод применим для стыкуемых элементов сходных форм, в которых одна часть плавно переходит в другую.

Нелинейные системы дифференциальных уравнений, как правило, не имеют точного решения. Для их вычисления используются приближенные методы: методы минимизации или оптимизации. Для систем с заданной функцией минимизации или с заданной областью экстремума проще всего применить метод итераций (последовательных приближений), который часто применяют совместно с методом расщепления по переменным.

Для многопараметрического поиска решения или для решения систем с неявной функцией минимизации используют методы конечных элементов или различного рода вариационные методы.

Для задач со свободной границей систему координат преобразуют в подвижную, которая двигается вместе с линией фронта плавления. Этот метод позволяет в ряде случаев получить более простое решение в новой системе координат.

Можно использовать неравномерные сетки, линии которых являются линиями уровня поля распределения температур. Этот метод позволяет уменьшить размер матриц и объем вычисления, сохраняя заданную точность, т.к. убирает “лишние” линии сетки. Метод часто применяется для систем с большими градиентами температур, например, для моделирования процессов лазерной обработки материалов.

3.2.1. Постановки задач для уравнений параболического типа

Рассмотрим численные методы решения уравнений параболического типа.

Одномерное линейное уравнение теплопроводности (диффузии). Напомним постановку соответствующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, X]. \quad (1)$$

Здесь $a = a(x, t) > 0$. Для того чтобы задача была поставлена корректно, необходимо задать начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad t = 0,$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} -A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 u &= \varphi_1(t), \quad x = 0, \\ A_2 \frac{\partial u}{\partial x} - B_2 u &= \varphi_2(t), \quad x = X, \end{aligned}$$

Одномерное *квазилинейное уравнение теплопроводности* (диффузии):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(u), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, X]. \quad (2)$$

Уравнения такого вида встречаются в теории горения, астрофизике, физике плазмы, теории сверхпроводимости Гинзбурга - Ландау, динамике популяций и других приложениях. Здесь $a(u) > 0$ при любых значениях u ,

кроме того, $\int_0^u a(z)dz < +\infty$. Для глобальной ограниченности решения также требуется выполнение условия

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{f(z)} = \infty$$

Для корректной постановки задачи необходимо задать одно начальное и два граничных условия.

Двухмерное линейное уравнение теплопроводности (диффузии):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, X], \quad y \in [0, Y]. \quad (3)$$

Для численного решения уравнения (1), по - видимому, наиболее известной является параметрическая двухслойная шеститочечная разностная схема вида

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \left[\xi \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \xi) \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} \right], \quad (4)$$

где $\xi \in [0, 1]$.

При $\xi = 0$ имеем явную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2},$$

устойчивую при

$$\sigma = \frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

с порядком аппроксимации $O(\tau, h^2)$.

При $\xi = 1$ имеем неявную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2},$$

устойчивую при любых τ, h , с порядком аппроксимации $O(\tau, h^2)$.

При $\xi = 1/2$ разностный метод называется схемой Кранка - Никольсона:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{a}{2} \left(\frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} \right).$$

Схема устойчива при любых шагах τ , h и имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$. Эта схема, в отличие от двух предыдущих, не является монотонной, т.е. она может давать осцилляции разностного происхождения на решениях, имеющих большие градиенты.

Схема, имеющая второй порядок точности по τ и четвертый по h , получается на расширенном шаблоне с учетом разностной аппроксимации главного члена невязки. При исследовании аппроксимации явной двухслойной схемы получим

$$\Lambda_T U_T = \Lambda u + \frac{\tau}{2} u'' - \frac{ah^2}{12} u_x^{(t)} + O(\tau^2, h^4).$$

Произведя аппроксимацию первого и второго слагаемого в правой части (в невязке) рассматриваемого равенства и учитывая следствия исходного уравнения теплопроводности

$$u_t' = au''_{xx}, \quad u''_{tt} = a(u_t')''_{xx}, \\ u''_{tt} = a^2 u_x^{(t)},$$

получим новую схему повышенного порядка точности:

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} - \\ \frac{a^2 \tau}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{h^2}{a\tau}\right) \frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n}{h^4} = 0.$$

Трехслойная параметрическая схема для численного решения одномерного линейного уравнения теплопроводности имеет вид

$$\frac{(1-\eta)(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} - \eta \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} - \\ - a \left[(1-\xi) \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + \xi \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} \right] = 0;$$

при $\eta = 0, 5$, $\xi = 1$ ее порядок аппроксимации равен $O(\tau^2, h^2)$. Недостатком схемы является трехслойность и, следовательно, необходимость ставить дополнительное условие на $u_t'(0, x)$.

Соответствующий шаблон имеет вид, рис.1:

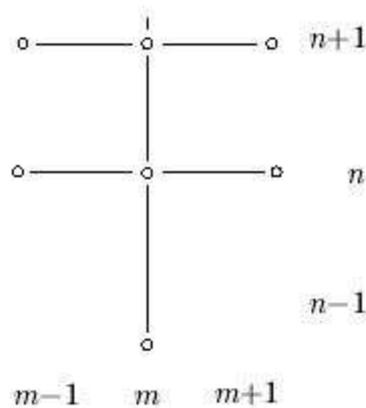


Рис. 1.

В случае если коэффициент теплопроводности a зависит от времени и координат, консервативную схему можно получить, используя *интегро - интерполяционный метод* (положим, для простоты $f(t, x) = 0$). Напомним, что разностная схема называется *консервативной*, если выполняются следующие условия: в дифференциальной задаче выполняется некий закон сохранения; соответствующий закон сохранения выполняется и на сеточном уровне. Если же в дифференциальной задаче имеется несколько законов сохранения, а при переходе к сеточному описанию все они получаются как следствие нашей разностной схемы в результате алгебраических преобразований, то схема называется полностью *консервативной*.

Как правило, при записи уравнений в частных производных законам сохранения соответствует дивергентная форма записи. Для уравнения теплопроводности роль такого закона сохранения играет непрерывность теплового потока.

Для этого запишем уравнение в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \text{ где } W = -a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} - \text{тепловой поток,}$$

$$\text{или } \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\Gamma} u dx - W dt = 0.$$

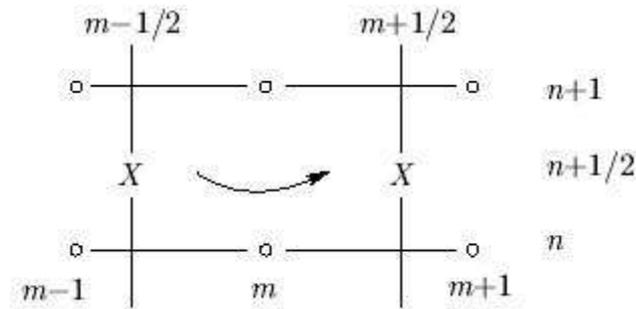


Рис. 2.

Произведем аппроксимацию последнего интеграла по прямоугольному контуру с узловыми точками $(n, m - 1/2)$, $(n, m + 1/2)$, $(n + 1, m + 1/2)$, $(n + 1, m - 1/2)$ (рис.2):

$$u_m^n h - W_{m+1/2}^{n+1/2} \tau - u_m^{n+1} \cdot h + W_{m-1/2}^{n+1/2} \tau = 0,$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{W_{m+1/2}^{n+1/2} - W_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0.$$

Отсюда, учитывая вид $W_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$:

$$W_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(a_{m+1/2}^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + a_{m+1/2}^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} \right),$$

$$W_{m-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(a_{m-1/2}^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + a_{m-1/2}^{n+1} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} \right),$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{2h} \left(a_{m+1/2}^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - a_{m-1/2}^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2h} \left(a_{m+1/2}^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - a_{m-1/2}^{n+1} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} \right) = 0$$

3.2.2. Разностные схемы для численного решения нелинейного уравнения теплопроводности

1) Неявная схема с нелинейностью на нижнем слое.

$$\frac{(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - a_{n-1} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} \right] + f_m^n,$$

где $a_{m+1/2}$ вычисляется следующим образом:

$$1. a_{m+1/2} = \frac{1}{2}(a(u_m^n) + a(u_{m+1}^n)),$$

$$2. a_{m+1/2} = a\left(\frac{u_m^n + u_{m+1}^n}{2}\right),$$

$$3. a_{m+1/2} = a\left(\frac{2u_m^n u_{m+1}^n}{u_m^n + u_{m+1}^n}\right),$$

$$4. a_{m+1/2} = \frac{2a(u_m^n)a(u_{m+1}^n)}{a(u_m^n) + a(u_{m+1}^n)},$$

На верхнем слое по времени решение находится с помощью метода прогонки. Недостаток схемы заключается в необходимости выполнения условия, ограничивающего шаг по времени: $\tau \|f'_u\| \ll 1$.

2) Схема с нелинейностью на верхнем слое.

Необходимость ее реализации появляется, когда условие $\tau \|f'_u\| \ll 1$ оказывается трудновыполнимым):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{m+1/2}^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - a_{m-1/2}^{n+1} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + f_m^{n+1}$$

Для реализации алгоритма прогонки проведем линеаризацию функции в правой части, то есть используем итерационный метод Ньютона в функциональных пространствах (метод квазилинеаризации). Пусть u_m^{n+1} есть i приближение к u_m^{n+1} ; необходимо вычислить u_m^{n+1} . Тогда

$$f(u_m^{i+1}) = f[u_m^i + (u_m^{i+1} - u_m^i)] \approx f(u_m^i) + f'_u(u_m^i)(u_m^{i+1} - u_m^i),$$

$$a(u_m^{i+1}) = a[u_m^i + (u_m^{i+1} - u_m^i)] \approx a(u_m^i) + a'_u(u_m^i)(u_m^{i+1} - u_m^i).$$

Для вычисления значений сеточной функции на следующем временном слое имеем систему линейных однородных уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\frac{u_m^{i+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{m+1/2}^i \frac{u_{m+1}^{i+1} - u_m^{i+1}}{h} - a_{m-1/2}^i \frac{u_m^{i+1} - u_{m-1}^{i+1}}{h} \right) + f(u_m^i) + f'_u(u_m^i)(u_m^{i+1} - u_m^i).$$

Итерации продолжаются до выполнения условия

$$\|u_m^{i+1} - u_m^i\| \leq \varepsilon.$$

При реализации шеститочечной схемы с переменным коэффициентом теплопроводности и нелинейной правой частью $f(u)$ итерационный процесс может иметь следующий вид:

$$\frac{u_m^{i+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2h} \left(a_{i+1/2}^n \frac{u_{m+1}^{i+1} - u_m^{i+1}}{h} - a_{i-1/2}^n \frac{u_m^{i+1} - u_{m-1}^{i+1}}{h} \right) - \frac{1}{2h} \left(a_{i+1/2}^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - a_{i-1/2}^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} \right) = f(u_m^i) + f'_u(u_m^i)(u_m^{i+1} - u_m^i).$$

Здесь также была применена линеаризация функции $f(u)$.

Отдельно рассмотрим важный частный случай $a = u^k$. В довольно грубом приближении уравнение описывает тепловые волны, образующиеся в высокотемпературной плазме и при образовании сверхновых звезд.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^k \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Начальное условие для этой задачи $u(x, 0) = 0$, граничные условия —

$$u(0, t) = Ct^{\frac{1}{k}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0.$$

Будем искать автомодельное решение задачи, т.е. решение, зависящее не от двух переменных t и x , а от одной, являющейся их комбинацией:

$$\eta = x - Dt, \quad D = \text{const.}$$

Часто под автомодельными понимают решения, зависящие от безразмерных комбинаций независимых переменных. Введенную переменную иногда называют переменной бегущей волны. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -D \frac{du}{d\eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\eta},$$

и тогда рассматриваемое уравнение приобретает вид

$$- Du' = (u^k u')'.$$

Штрихом здесь обозначено дифференцирование по новой переменной η . Скорость распространения волны, обозначенная здесь через D , будет определена ниже. После интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения получим

$$- Du = u^k \cdot u'_{\eta}.$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю, так как должно выполняться условие непрерывности теплового потока на фронте тепловой волны. Далее

$$- Du = u^{k-1} \cdot u',$$

или $(u^k)'_{\eta} = -kD$, откуда $u^k(\eta) = -kD \eta$ или $u(\eta) = \sqrt[k]{kD} \cdot (-\eta)^{1/k}$.

Интересуют только положительные решения при $\eta \geq 0$, т.е. при $x \leq Dt$. При $\eta > 0$ положим $u(\eta) = 0$. В таком случае обобщенное решение (так как в точке $\eta = 0$ получается разрыв первой производной) рассматриваемой задачи будет иметь вид

$$u(\eta) = \begin{cases} \sqrt[k]{kD(-\eta)}, & \eta < 0 \\ 0, & \eta > 0. \end{cases}$$

Скорость фронта тепловой волны легко определяется из граничного условия:

$$D = \sqrt{C^k / k}.$$

Квазилинейное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_0 u^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q_0 u'$$

имеет качественно различные решения при разных параметрах k и l . Но в окрестности теплового фронта при распространении тепла по нулевому фону все эти решения имеют одинаковую асимптотику, решения в окрестности фронта устроены так же, как и у рассмотренной выше задачи о распространении тепловой волны.

3.2.3. Разностные схемы для численного решения многомерного уравнения теплопроводности

Численное решение даже простейших уравнений параболического типа сильно усложняется, если в задаче имеется в наличии более одного пространственного измерения. Условие устойчивости для многомерных схем накладывает столь жесткие ограничения на шаги по времени, что расчет по ним практически невозможен. Необходимо применять *неявные схемы*. Представим разностную схему для численного решения двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в виде

$$\frac{u_{mi}^{n+1} - u_{mi}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{mi}^{n+1} + \Lambda_2 u_{mi}^{n+1},$$

здесь

$$\Lambda_1 u_{ml}^{n+1} = \frac{u_{m-1,l}^{n+1} - 2u_{m,l}^{n+1} + u_{m+1,l}^{n+1}}{h_x^2}, \quad \Lambda_2 u_{ml}^{n+1} = \frac{u_{m,l-1}^{n+1} - 2u_{m,l}^{n+1} + u_{m,l+1}^{n+1}}{h_y^2}.$$

Получена линейная система с разреженной (блочной) матрицей. Однако вид этой матрицы таков, что алгоритм пятиточечной прогонки в данном случае не применим.

Можно предложить схему расщепления по направлениям, или локально - одномерную схему (метод дробных шагов, Н.Н.Яненко):

$$\frac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{ml}, \quad \frac{u_{ml}^{n+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}.$$

Соответствующий пространственный шаблон схемы представлен на рис. 3.

Для аналогичной трехмерной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

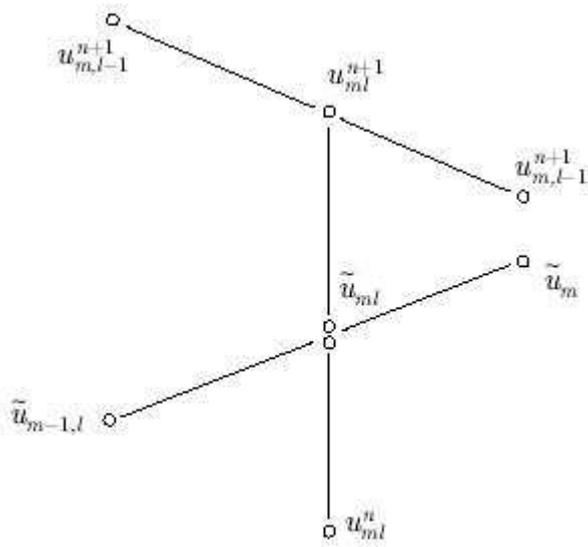


Рис. 3.

можно предложить локально - одномерную схему дробных шагов

$$\frac{u_{mlp}^{n+1/3} - u_{mlp}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{mlp}^{n+1/3}, \quad \frac{u_{mlp}^{n+2/3} - u_{mlp}^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 u_{mlp}^{n+2/3},$$

$$\frac{u_{mlp}^{n+1} - u_{mlp}^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 u_{mlp}^{n+1}.$$

Порядок аппроксимации этих схем: $O(\tau, h_x^2, h_y^2)$ — в двумерном случае и $O(\tau, h_x^2, h_y^2, h_z^2)$ — в трехмерном.

Порядок аппроксимации этой схемы по времени можно увеличить до второго, если провести усреднение операторов $\Lambda_i u_{mlp}^n (i = 1 \div 3)$, аппроксимирующих вторые производные по координатам $x_i (i = 1 \div 3)$:

$$\frac{u_{mlp}^{n+1/3} - u_{mlp}^n}{\tau} = \Lambda_1 [\xi u_{mlp}^{n+1/3} + (1 - \xi) u_{mlp}^n],$$

$$\frac{u_{mlp}^{n+2/3} - u_{mlp}^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 [\xi u_{mlp}^{n+2/3} + (1 - \xi) u_{mlp}^{n+1/3}],$$

$$\frac{u_{mlp}^{n+1} - u_{mlp}^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 [\xi u_{mlp}^{n+1} + (1 - \xi) u_{mlp}^{n+2/3}],$$

где $0 \leq \xi \leq 1$ причем при $\xi = 1/2$ порядок аппроксимации схемы будет $O(\tau, h_x^2, h_y^2, h_z^2)$.

Эта схема Кранка - Никольсона устойчива при любых τ, h_x, h_y, h_z ; ее шаблон для двумерной задачи представлен на рис. 4.

$$\frac{u_{ml}^{n+1/2} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 [\xi u_{ml}^{n+1/2} + (1 - \xi) u_{ml}^n],$$

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 [\xi u_{ml}^{n+1} + (1 - \xi) u_{ml}^{n+1/2}]$$

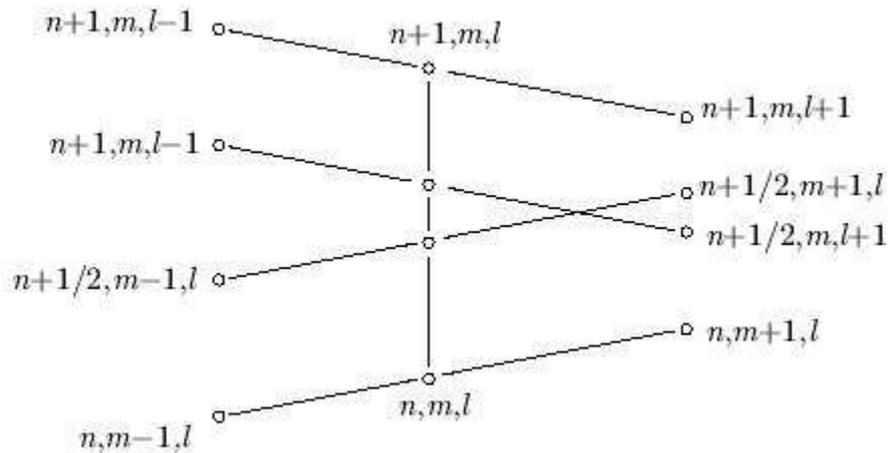


Рис. 4.

Приведем еще одну схему, имеющую второй порядок аппроксимации по τ и h :

$$\frac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^n}{\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_1 \tilde{u}_{ml} + \Lambda_2 u_{ml}^n), \quad \frac{u_{ml}^{n+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_1 \tilde{u}_{ml} + \Lambda_2 u_{ml}^{n+1})$$

ее пространственный шаблон показан на рис. 5.

Схема Дугласа - Ганна — это общий метод построения *неявных разностных схем переменных направлений* для трехмерного уравнения теплопроводности, имеющих второй порядок точности и безусловно устойчивых:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

получается путем замены производных конечными разностями

$$\frac{u_{m,l}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \frac{u_{m-1,l}^n - 2u_{m,l}^n + u_{m+1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{m,l-1}^n - 2u_{m,l}^n + u_{m,l+1}^n}{h_y^2}$$

или, в операторной форме,

$$\frac{u_{m,l}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{m,l}^n + \Lambda_2 u_{m,l}^n.$$

Исследование спектральной устойчивости этой схемы ($u_{me}^n = \lambda^n e^{i\alpha m + i\beta l}$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$) приводит к следующему результату для спектра оператора послойного перехода:

$$\lambda(\alpha, \beta, \tau, h_x, h_y) = 1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

откуда получаем условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{2(h_x^{-2} + h_y^{-2})}.$$

Для неявной схемы

$$\frac{u_{m,l}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{m,l}^{n+1} + \Lambda_2 u_{m,l}^{n+1}.$$

исследование на устойчивость по спектральному признаку дает

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}},$$

т.е. схема устойчива при любых α, β .

Приведем исследование спектральной устойчивости для схемы переменных направлений.

Рассмотрим переход с нижнего на верхний временный слой. В таком случае можно положить $u_{me}^n = e^{i\alpha m + i\beta l}$; множитель λ^n опускаем, так как рассматривается один переход с n -го на $(n+1)$ -й слой в предположении,

что известно решение на n - ом слое (можно было бы написать, $u_{me}^n = Ce^{i\alpha m + i\beta l}$; где $C = \lambda^n$, но в этом нет смысла, так как C в дальнейших выкладках сократится).

Тогда на первом этапе получим $\tilde{u}_{ml} = \lambda_1 u_{ml}^n$, а на втором — $u_{ml}^{n+1} = \lambda_2 \tilde{u}_{ml} = (\lambda_1 \lambda_2) u_{ml}^n$

Вычисление λ_1 и λ_2 дает

$$\lambda_1 = \frac{1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

Окончательно спектр оператора послойного перехода представим в виде произведения спектров на каждом промежуточном этапе.

$$\lambda(\alpha, \beta, \tau, h_x, h_y) = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\left(1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)}{\left(1 - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)},$$

Схема безусловно устойчива.

Исследование схемы расщепления на аппроксимацию проведем на примере локально - одномерной схемы для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{ml}, \quad \frac{u_{ml}^{n+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}.$$

Запишем эти уравнения в операторной форме

$$(E - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{ml} = u_{ml}^n, \quad (E - \tau \Lambda_2) u_{ml}^{n+1} = \tilde{u}_{ml}.$$

Поддействуем на обе части второго уравнения оператором $(E - \tau \Lambda_1)$:

$$(E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) u_{ml}^{n+1} = (E - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{ml}.$$

Так как

$$(E - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{ml} = u_{ml}^n, \text{ то } (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) u_{ml}^{n+1} = u_{ml}^n.$$

Это уравнение приводится к виду

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{ml}^{n+1} + \Lambda_2 u_{ml}^{n+1} - \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}.$$

Последнее слагаемое в правой части является величиной порядка $O(\tau)$ и определяет погрешность аппроксимации.

Если правая часть $f(t, x, y)$ не нулевая, то схему можно переписать, например:

$$\frac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{ml} + \frac{1}{2} f_{ml}^n \frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_2 u_{ml}^{n+1} + \frac{1}{2} \tilde{f}_{ml}.$$

3.3. Процессы излучения и конвекции в задачах теплообмена

При отсутствии поддува, уравнение конвективного теплопереноса записываются в виде граничного условия III рода:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_n = \alpha(T_n - T_c),$$

где λ - коэффициент удельной теплопроводности вещества, α - коэффициент конвекции, T_n - температура поверхности, T_c - температура среды (константа или слабоменяющаяся функция). Равномерный поддув обычно учитывают коррекцией коэффициента конвекции.

Теплоперенос излучением описывают законом Стефана-Больцмана. С учетом температуры среды он принимает вид:

$$E = \sigma \varepsilon (T_n^4 - T_c^4),$$

где E - поток интегрального излучения, σ - постоянная Стефана-Больцмана, ε - степень черноты материала, T_n - температура поверхности, T_c - температура среды.

При решении задачи методом итераций (последовательных приближений) или численными методами, выражение $(T_n^4 - T_c^4)$, как правило, преобразуют к линеаризованному виду:

$$T_n^4 - T_c^4 = (T_n - T_c)(T_n^3 + T_n^2 T_c + T_n T_c^2 + T_c^3),$$

где второй множитель $T_n^3 + T_n^2 T_c + T_n T_c^2 + T_c^3$ принимается за константу. Его значение берется из предыдущего временного шага (итерации). Относительная погрешность линеаризации при $T_n \gg T_c$, $T_n \gg \Delta T$ примерно равна

$$\varepsilon \approx \frac{3\Delta T}{T_n},$$

где ΔT - максимальное изменение температуры за 1 шаг (итерацию).

3.4. Модельные представления неидеального контакта многослойных конструкций

Влияние неидеального контакта на распределение теплового поля в материале было рассмотрено Оттом в 1906 г, предложившим для учета термического сопротивления внести поправку в коэффициент теплопроводности:

$$\lambda_{cp} = \frac{\Delta}{\sum_1^n (\delta_i / \lambda_i)},$$

где Δ - толщина пакета, δ_i и λ_i – толщина и коэффициент теплопроводности отдельных слоев пакета.

Термическое сопротивление зависит от газа, заполняющего микропустоты между контактирующими поверхностями. Попытки моделирования распространения тепла в неидеальном контакте были призваны оценить вклад того или иного фактора в термическое сопротивление стыка.

Как правило, одно из первых допущений при расчете термического сопротивления является замена реального профиля микровыступа на ступенчатый с линией поверхности по средней линии шероховатости образца.

Расчетная формула для расчета коэффициента термического сопротивления, дающая хорошее согласование с экспериментальными данными выражена в :

$$R' = \frac{\delta'}{\pi r_0^2 \lambda_1}, \text{ где } \delta' = \delta \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

При учете влияние на величину контактного термического сопротивления процессов лучистого теплообмена, конвекции и образования окисной пленки на поверхности микропустот можно использовать зависимости:

$$\frac{1}{R_C} = \frac{1}{\frac{\delta_T}{\lambda_C} + \sum \frac{\delta_{II}}{\lambda_{II}} + R_{CBM}} + 0,04\sigma\epsilon_{IP} \left(\frac{T}{100} \right)^3,$$

$$\frac{1}{R_{CBM}} = \xi_{IP} p \sqrt{\frac{2R}{\pi T}}, \quad \xi_{IP} = \frac{1}{\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} - 1}, \quad \epsilon_{IP} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

где R_C – термическое сопротивление контакта, δ_T – тепловая толщина контакта (в случае равномерного теплового потока равна геометрической толщине контакта, которая определяется толщиной плоского зазора с объемом, равным объему реальной прослойки), λ_C – , δ_{II} – , λ_{II} – , $1/R_{CBM}$ – проводимость газа в свободномолекулярном состоянии p – давление газа, R – универсальная газовая постоянная, – приведенный коэффициент аккомодации), σ – ширина воздушного зазора, ϵ_{IP} – приведенная степень черноты материала, , T – температура.

IV. ПОСТРОЕНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Построение теплофизических моделей будет рассмотрено на примере процесса лазерной пайки диэлектрика с металлом. Наиболее сложный случай представляет конусное охватывающее металлокерамическое соединение, представленное ниже.

4.1. Тепловая модель конусного многослойного металлокерамического соединения с нелинейными краевыми условиями III-го и IV-го рода

Построение физической модели. Кратко рассмотрим теплофизические составляющие лазерного нагрева при пайке металлокерамического соединения и охарактеризуем систему уравнений, позволяющую рассматривать в динамике распределение тепловых полей в соединяемых материалах. Необходимо отметить, что в данном теплофизическом процессе осуществляется воздействие сосредоточенного источника тепла на многослойный материал.

Основное уравнение передачи тепла в общей тензорной форме – уравнение теплопроводности отражает закон Фурье и задает перенос энергии от более нагретых участков тела, к менее нагретым в результате теплового движения и взаимодействия составляющих его частиц. Обычно количество переносимой энергии, определяемое как плотность теплового потока, пропорционально градиенту температуры.

В силу конструктивных особенностей узла математическое описание будем вести в цилиндрической системе координат (рис.б.).

Рассмотрим квазистационарную тепловую задачу и отдельно, решая уравнение теплопроводности, находим температурные поля и поля градиентов в многослойном узле.

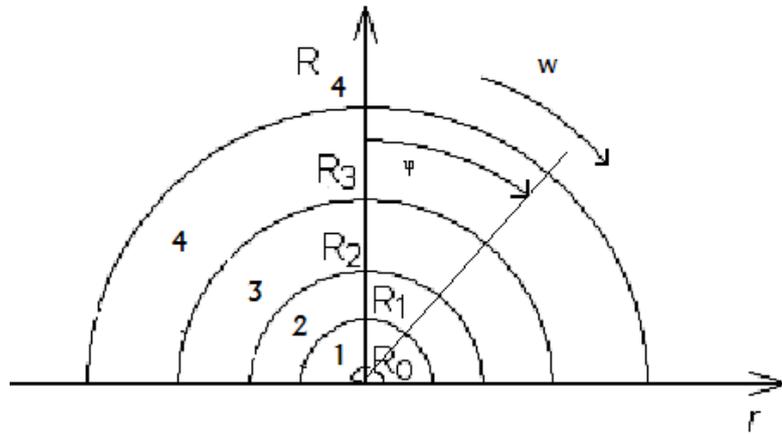


Рис. 6. Цилиндрическая система координат для многослойного материала: 1-керамика, 2 –титан (тонкий слой), 3- медь и 4- металл

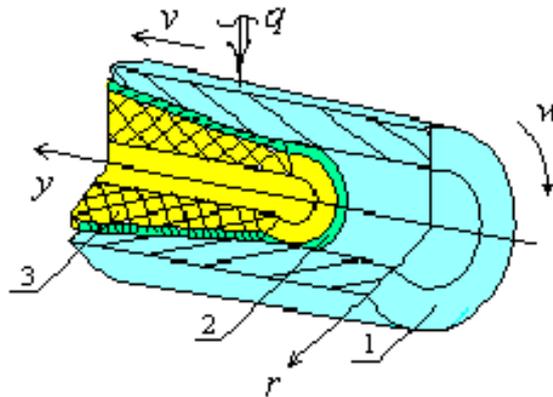


Рис. 7. Схема относительных перемещений детали и пятна нагрева лазерным излучением ($v = 0,05$ мм/с; $w = 1,2$ мм/с): 1 — металл; 2 — медный припой; 3 — керамика; 4 — отверстие

Для каждого слоя моделируемого конусного соединения уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат можно записать в виде:

$$c_i \rho_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_i(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\lambda_i(T)}{r} \frac{\partial T_i}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i(T) \frac{\partial T_i}{\partial z} \right)$$

где $T_i = T_i(r, \varphi, z, t)$, $R_i < r < R_{i+1}$

где i - номер слоя, c_i – теплоемкость, ρ_i – плотность, λ_i – теплопроводность i –того слоя.

Если не учитывать зависимость параметров уравнения от температуры, то уравнение приводится к виду

$$c_i \rho_i \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_i (T) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Пятно лазерного источника могло перемещаться по поверхности образца в двух направлениях (рис. 7): по образующей, параллельно оси (скорость перемещения обозначена как v) и по кругу без смещения по образующей (скорость обозначена w). Возможность перемещаться в двух направлениях существенна при пайке плоских соединений. При пайке конусных узлов (в случае широко сфокусированного луча) рассматривается случай только при вращающемся вокруг своей оси узла.

Изначально отметим, что по принципу суперпозиции все тепловые потоки учитывались в соответствии со знаками относительно основного закона теплопроводности (потоки 1, 3), считавшегося за положительное направление. Для наглядности на рис. 8 представлены направления тепловых потоков, возникающих на поверхности металла.

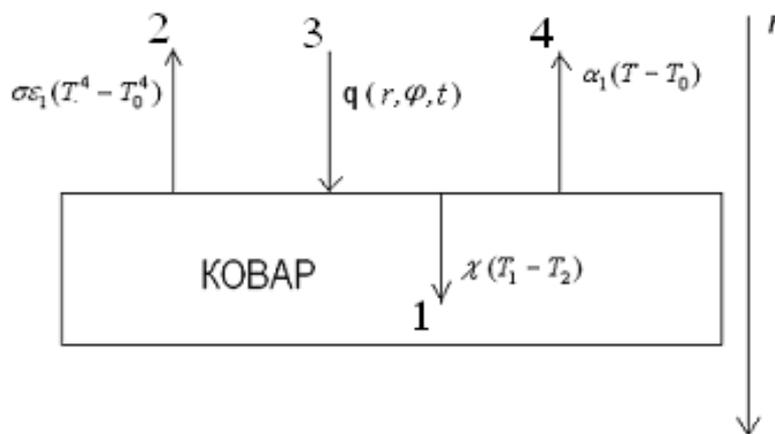


Рис. 8. Направление тепловых потоков при лазерном воздействии на поверхность металла

Все уравнения математической модели лазерной пайки как конструктор должны собираться в соответствии с указанными направлениями и физическими законами данных граничных условий.

Для учета количественного соотношения между полной излучательной способности и температурой нагретого тела, в граничные условия на поверхности, а также между слоями при неидеальном контакте в соответствии с законом Стефана–Больцмана, был добавлен член $\varepsilon_n \sigma_n (T_c^4(t) - T_n^4(t))$ (поток 2), пропорциональный T^4 и учитывающий излучение при лазерном нагреве:

$$\left(-\chi \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_n \sigma_n (T_c^4(t) - T_n^4(t)) - \alpha \delta_\varphi T \right) \Big|_{r=R_4} = q(r, \varphi, t)$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана, ε – излучательная способность поверхностей, α – коэффициент конвекции, χ – коэффициент удельной теплопроводности вещества; индекс n – соответствует параметрам поверхности; индекс c – параметрам среды.

Выражение для $q(r, \varphi, t)$ задавалось нормально-круговым источником, в котором распределение плотности мощности в пятне нагрева осуществлялось в соответствии с законом нормального распределения $q(r, \varphi, t) = A \cdot \cos \varphi \cdot q_0 \cdot e^{-kr^2}$, где q_0 - максимальная плотность мощности в центре пятна нагрева; k - коэффициент сосредоточенности плотности мощности источника; r, φ - радиальное расстояние и телесный угол от рассматриваемой точки в пятне нагрева до оси, соответственно.

Вследствие возникающей при нагревании разности температур между поверхностью металла и внешней средой (воздухом), учитывался конвективный теплоперенос в виде закона Ньютона (поток 4):

$$-\chi \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_4} = \alpha (T_n - T_c)$$

Для построения модели многослойного образца на границе между металлом и медью при $r=R_4$ учитывался неидеальный контакта слоев (рис. 9), который характеризуется следующими физическими процессами:

– в точках соприкосновения материалов должен выполняться закон сохранения энергии, т.е, условие равенства тепловых потоков:

$$-\chi_i \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=h_i, -0} + \chi_{i+1} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=h_i, +0} = 0.$$

где i – номер соответствующего слоя

– в точках, где материалы не соприкасаются, обязательно:

а) процесс передачи тепла вглубь слоя – тепловой поток $\chi_i \frac{\partial T}{\partial r}$ будет направлен в соответствии с теплофизической задачей как поток 1 (рис. 8);

2) будет осуществляться процесс теплопереноса излучением от нагретого слоя в воздух, находящийся в пространстве между слоями;

3) возникающий вследствие неравномерного прогревания образца вглубь процесс теплопередачи между слоями вследствие разности их температур, учитывался выражением $R_{i,i+1}^{-1}(T_i - T_{i+1})$, характеризующим термическое сопротивление $R_{1,2}$.

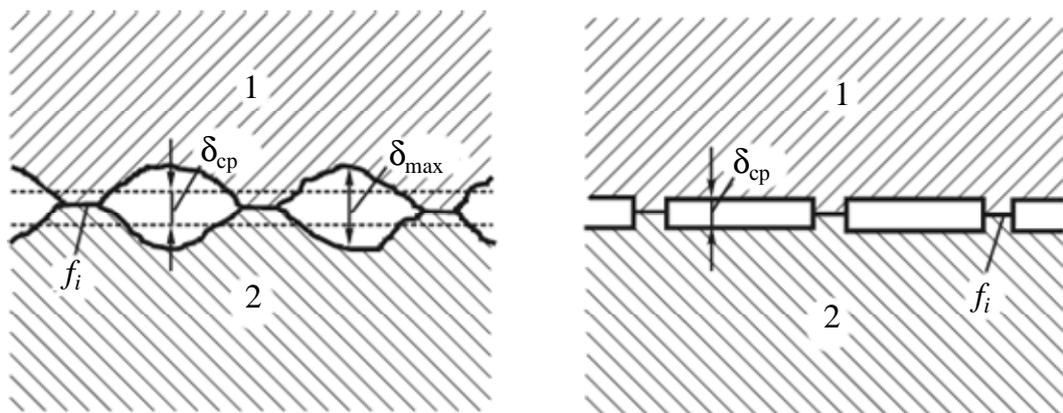


Рис. 9. Контакт шероховатых поверхностей: а — реальный контакт;
б — модель контакта

Иногда вводят безразмерные комплексы: a/r_0 и $r_0\lambda_1/\delta\lambda_2$, где a – средний радиус контактируемого пятна, r_0 – среднее расстояние между контактирующими площадками, λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности верхней и нижней детали, δ – ширина зазора (расстояние между средними линиями шероховатости образцов) для оценки их влияния на термическое сопротивление.

С учетом вышесказанного, условие на границе металл–медь сформулировано в следующем виде:

$$\left(-\chi_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_{1n} \sigma_n (T_c^4(t) - T_n^4(t)) - R_{1,2}^{-1} \delta_r T \right) \Big|_{r=R_3} = 0,$$

На остальных границах керамика-титан ($r=R_1$) и титан-медь ($r=R_2$) контакт считался идеальным, т.к. с технологической точки зрения титановый слой, при напылении внедряясь в поверхность керамики, образует с ней плотный контакт. Подслой меди, нанесенный в вакууме на титановое покрытие, также образует идеальное прилегание к титановому слою. Поэтому на этих границах должно выполняться соотношение сопряженного теплообмена, предусматривающее существование температурного и теплового баланса:

$$T(R_i|_{-0}, t) = T(R_i|_{+0}, t)$$

$$-\chi_i \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_i-0} + \chi_{i+1} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_i+0} = 0,$$

где $i=1, 2$.

На внутренней границе тела при $r = R_0$ отсутствуют внешние источники тепла, поэтому

$$\left(-\chi \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_n \sigma_n (T_c^4(t) - T_n^4(t)) - \alpha \delta_\varphi T \right) \Big|_{r=R_0} = 0$$

Считалось, что на поверхности при $r = R_4$ известно распределение температуры в любой момент времени t :

$$T(r, t) \Big|_{r=R_B} = T(R, t).$$

Из физической постановки задачи к этим условиям добавляются еще значения поверхностных сил или значение тензора напряжений на границах тела. В нашем случае необходимо задать тензор напряжений и поверхностную силу на границе металл-медь. Однако сложность решения совместных задач теплопроводности и термоупругости при движущемся источнике тепла выделяет подобные задачи в отдельную область исследований. Поэтому здесь они не рассматриваются. Ниже последовательно приведена математическая формулировка теплофизической задачи, а также предложено численное решение.

Из всего вышесказанного, основные уравнения для тепловой модели пайки конусного металлокерамического соединения в соответствии с расположением слоев, представленных на рисунке 3 запишутся в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных с учетом конвективных тепловых потерь и потерь на излучение:

$$T = T(x, \varphi, r, t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$r \in [0, H], \quad H = \sum_{i=1}^4 h_i,$$

$$\left(-\lambda_i(T) \frac{\partial T}{\partial r} + \sigma \varepsilon_i (T^4 - T_0^4) - \alpha_i \Delta T \right) \Big|_{r=H} = q(x, y, t),$$

$$-\lambda_i(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=h_i-0} + \lambda_{i+1}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=h_i+0} = 0,$$

$$\left(\lambda_i(T) \frac{\partial T}{\partial r} - \sigma \varepsilon_i (T_i^4 - T_{i+1}^4) + R_{i,i+1}^{-1} (T_i - T_{i+1}) = 0 \right) \Big|_{r=h_i}$$

$$\left(\lambda_4(T) \frac{\partial T}{\partial r} - \sigma \varepsilon_4 (T^4 - T_0^4) + \alpha_4 \Delta T \right) \Big|_{r=h_0} = 0$$

где i — номер слоя (1-металл, 2-медь, 3-титан, 4-керамика), $T(x, r, \varphi, t)$ — температура; q — тепловой поток на поверхности; c_i — объемная теплоемкость i -го слоя; λ_i — теплопроводность; σ — постоянная Стефана—Больцмана; ε — излучательная способность поверхностей; ρ_i — плотность i -го слоя; α_i — коэффициент конвективных теплотерь; $R_{i, i+1}$ — тепловое сопротивление; h_i — толщина i -го слоя; h_0 — диаметр внутреннего отверстия.

Метод решения и оценки. В течение последних десятилетий метод конечных разностей является одним из наиболее широко используемых численных методов. Его популярность объясняется прежде всего относительной простотой математической идеи дискретизации. Под дискретизацией понимается некая аппроксимационная процедура, при которой непрерывная область заменяется сеткой из отдельных точек и неизвестные физические переменные отыскиваются не в произвольных точках области, а именно в этих конкретных точках. Частные производные при таком подходе могут аппроксимироваться с помощью конечных разностей многими способами; некоторые из этих аппроксимаций представлены в таблице. Все они получены путем разложения соответствующих функций в ряд Тейлора. В зависимости от ошибок, возникающих при усечении ряда, все конечно-разностные схемы подразделяются на две основные категории: схемы второго порядка точности и схемы более высокого порядка (см. табл.).

Таблица. Конечно-разностные аппроксимации первой и второй производных

Производная	Разностная аппроксимация	Порядок точности
$\frac{dT}{dx}$	$\frac{T_{j+1} - T_j}{h}$ (вперед)	$O(h)$
	$\frac{T_j - T_{j-1}}{h}$ (назад)	$O(h)$
	$\frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2h}$ (центральная)	$O(h^3)$
	$\frac{T_{j-2} - 8T_{j-1} + 8T_{j+1} - T_{j+2}}{2h}$ (центральная)	$O(h^4)$
$\frac{d^2T}{dx^2}$	$\frac{T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}}{h^2}$	$O(h^2)$
	$\frac{T_{j-2} + 16T_{j-1} - 30T_j + 16T_{j+1} - T_{j+2}}{12h^2}$	$O(h^4)$

В соответствии с заданным методом применительно к теплофизической задаче лазерной пайки конусного соединения система уравнений может решаться методом прогонки с погрешностью $O(h^2)$.

В качестве примера считалось, что непрерывное лазерное излучение (диаметр пятна $d_{\text{л}} = 1...2$ мм, плотность мощности $P = 15...20$ Вт/мм², $\lambda = 1,06$ мкм) распределено по нормальному закону, падает на поверхность металла. Всего четыре слоя: толщина металлической детали — 0,5 мм, медного припоя — 0,3 мм, титанового покрытия — 0,002 мм и высокоглиноземистой керамики ГБ-7 — 2,4 мм.

Для учета угла конусности образца и разной толщины слоев строилась неравномерная сетка (рис. 10).

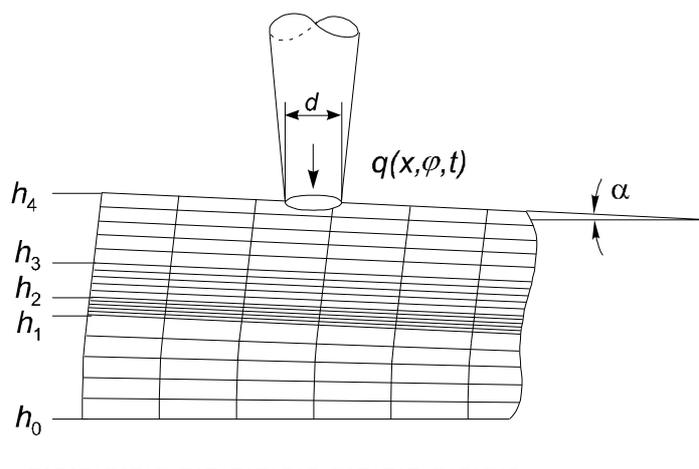


Рис. 10. Разностная сетка по толщине образца:

$h_0 - h_1$ соответствует керамическому слою; $h_1 - h_2$ соответствует слою титана; $h_2 - h_3$ медный припой; $h_3 - h_4$ металл

Шаг по каждой из координат для каждого узла сетки вычислялся исходя из геометрии образца (рис. 11).

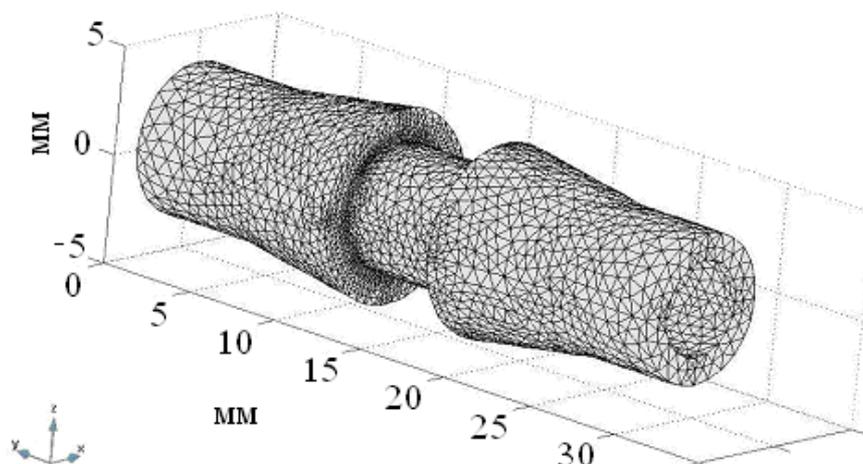


Рис. 11. 3-D модель конусного охватывающего металлокерамического соединения

Исходя из технологических требований лазерной пайки при расчете режимов учитывались следующие ограничения: температура на поверхности

металла не должна превышать линии солидуса¹ (1750 К), на границе титан—медь — быть меньше температуры плавления титана (1933 К), на границе медь—металл — достигать температуры плавления меди (1350...1370 К).

Термическую толщину слоев можно сравнить, заменив параметр l на толщину h слоя в выражении определения безразмерного времени:

$$Fo_i = \frac{\lambda_i t}{c_i \rho_i h_i^2}.$$

Так, $Fo_1 = 8,25 \cdot 10^{-3} t$, $Fo_2 = 0,33 t$, $Fo_3 = 3,11 t$, $Fo_4 = 1,08 \cdot 10^{-3} t$, а значит, слои титана и меди являются термически тонкими по отношению к слоям керамики и металла; следовательно, при решении одномерной задачи ими можно было бы пренебречь. Однако в трехмерной задаче они способствуют горизонтальному распространению теплоты, что существенно влияет на распределение теплового поля в толще образца. Скорости движения теплового фронта внутри слоев можно сравнить по выражению безразмерного времени для каждого слоя:

$$Fo_i = \frac{\lambda_i t}{c_i \rho_i l^2}.$$

В рассматриваемом случае, $Fo_1 = 4,33 \cdot 10^{-6} t/l^2$, $Fo_2 = 1,01 \cdot 10^{-4} t/l^2$, $Fo_3 = 6,21 \cdot 10^{-6} t/l^2$, $Fo_4 = 2,60 \cdot 10^{-6} t/l^2$, из чего следует, что медь является очень хорошим проводником теплоты и будет вносить максимальную погрешность в результаты расчетов. Пренебречь слоем меди нельзя, так как его толщина значительна и в основном именно она будет расширять тепловое поле в горизонтальных направлениях. Подобные оценки часто используются в задачах теплообмена.

При построении модели учитывались процессы излучения и конвекции с поверхностей, а также термическое сопротивление между слоями ($R^1 = 0,1 \dots 0,5 \text{ К} \cdot \text{мм}^2/\text{Вт}$).

¹ Линия плавления для сплавов

Система дифференциальных уравнений решалась методом прогонки по схеме центральных разностей в среде Matlab 7.0. Выражение $T^4 - T_0^4$ заменялось разложением с ошибкой: $\varepsilon \approx 3\Delta T/T$: $(T - T_0)(T^3 + T^2T_0 + TT_0^2 + T_0^3)$, где второй множитель вычисляется на предыдущем шаге. Ошибка становится меньше с ростом температуры поверхности. На каждый из слоев наносилась сетка. Шаг по каждой координате и слою рассчитывался как L_i/h_i . Основной вклад в погрешность линеаризации вносит величина шага по времени $O(h)$. Порядок точности сеточного метода по координатам составляет $O(h^2)$.

Результаты численного счета. Тепловые расчеты представлены на рисунках 12-19. За счет кривизны поверхности конусного образца интенсивность лазерного воздействия будет концентрироваться вдоль образующей в направлении малых углов φ и малых радиусов R .

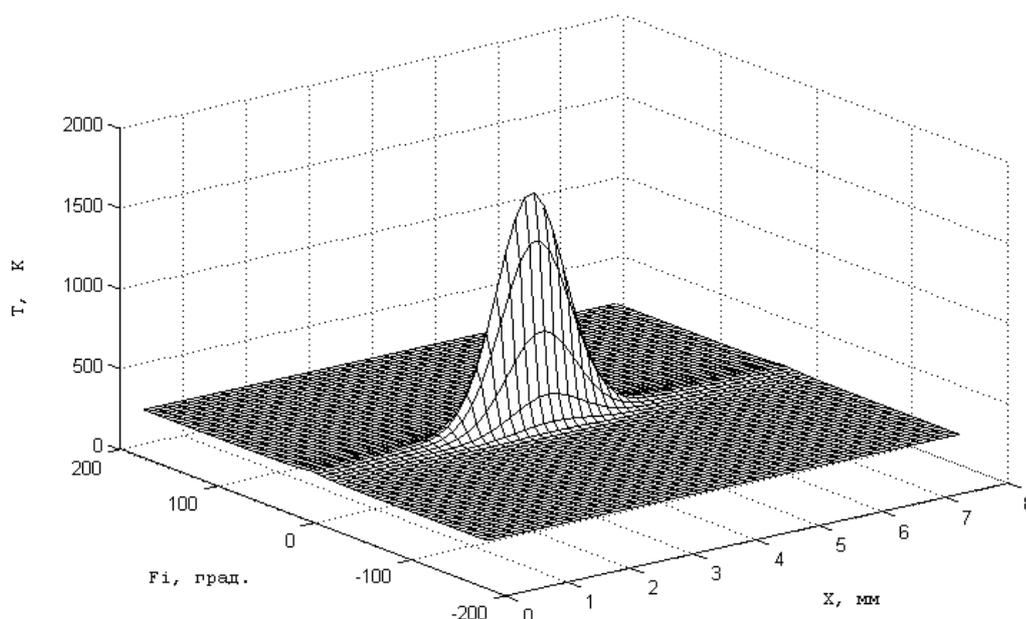


Рис. 12. Распределение температуры на поверхности конусного металлокерамического соединения

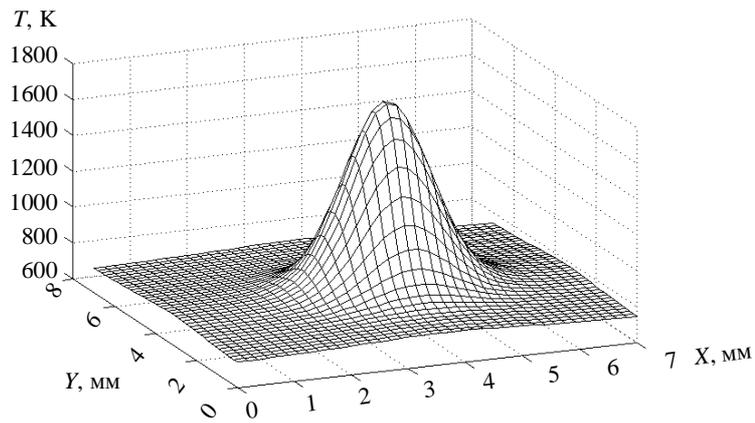


Рис. 13. Распределение температуры на поверхности металла для плоского металлокерамического соединения

Распределение температуры на поверхности металла представлено на рис. 8. При больших R ($R \gg 50$ мм) и малых диаметрах пятна ($d = 0,5 \dots 2$ мм) распределение теплового потока на поверхности соединения можно рассматривать в рамках плоской модели. Для сравнения на рис. 13 представлено распределение температуры на поверхности плоского образца.

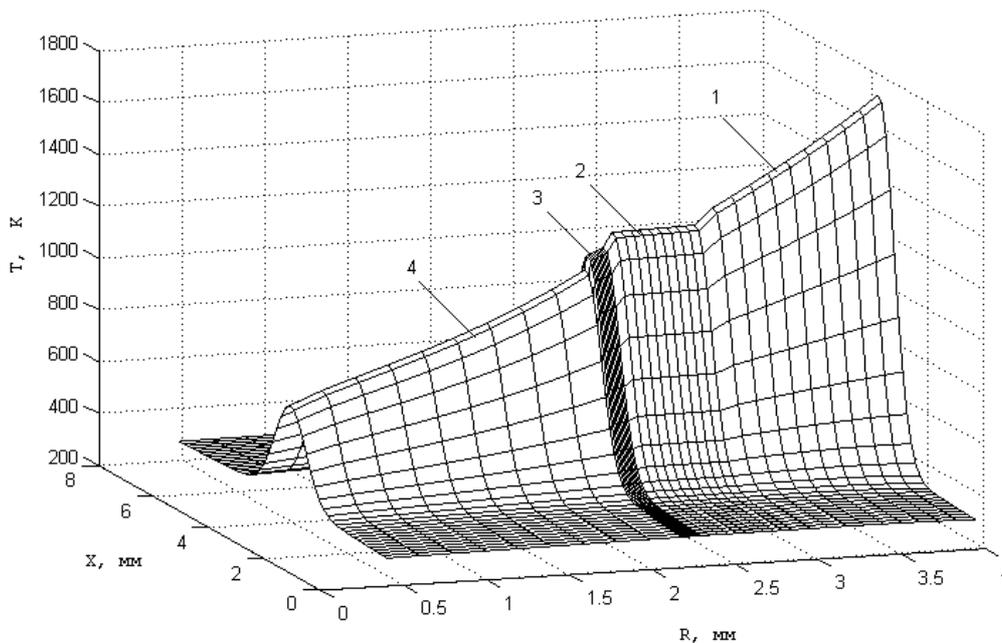


Рис.14. Распределение температуры в глубину конусного металлокерамического соединения: 1 — металл; 2 — медь; 3 — титановое покрытие; 4 — керамика

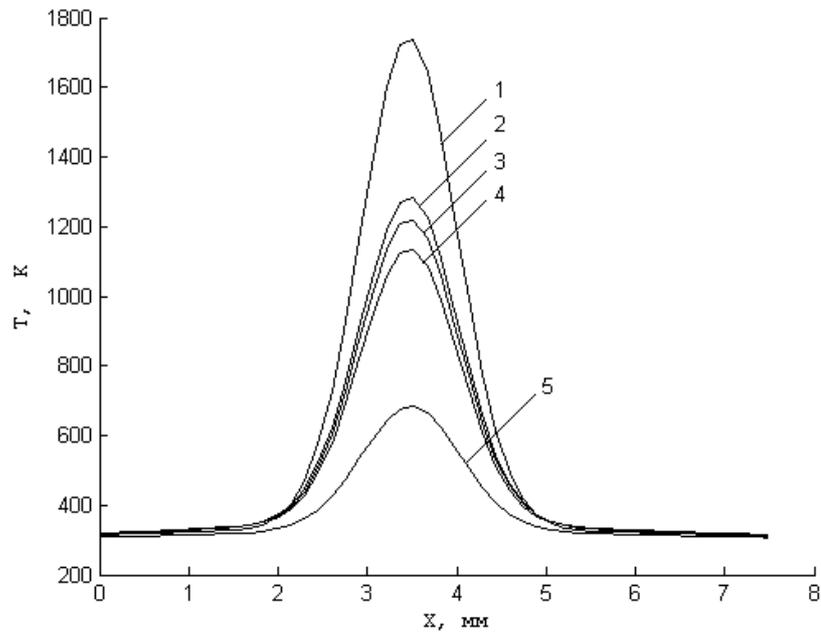


Рис. 15. Распределение температуры на границах слоев металлокерамического соединения: 1 — поверхность металла; 2 — граница металл—медь; 3 — граница медь—титан; 4 — граница титан—керамика; 5 — внутренняя поверхность керамики

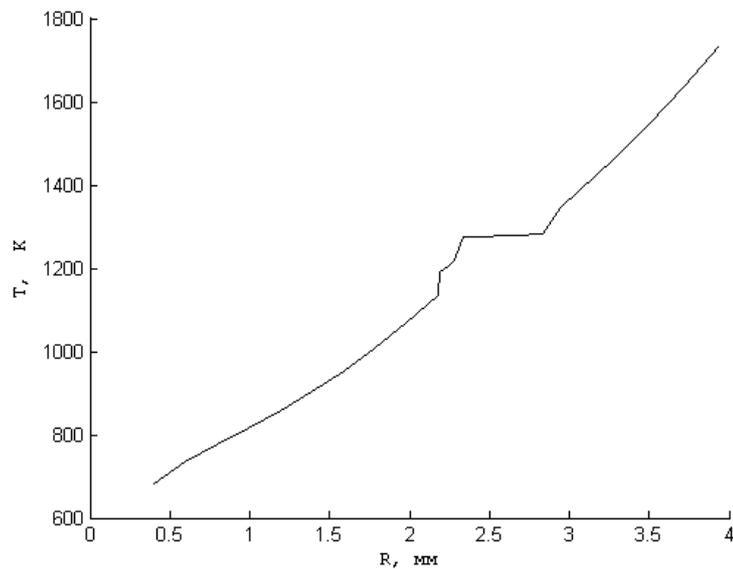


Рис. 16. Распределение температуры по толщине металлокерамического соединения в точке максимума плотности поверхностного потока тепла в фиксированный момент времени

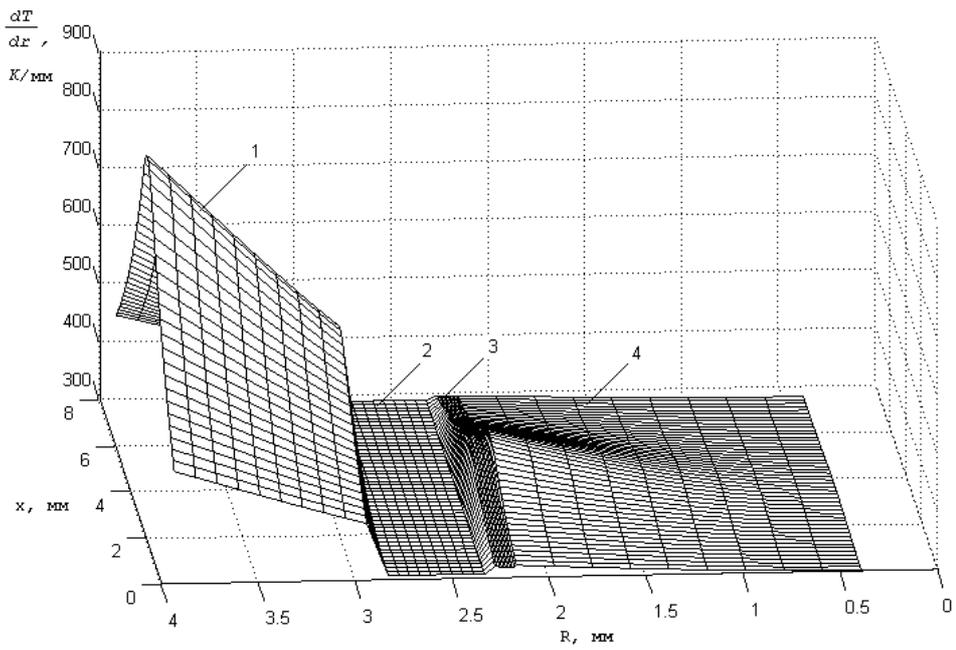


Рис. 17. Частная производная температуры по толщине образца: 1 — металл; 2 — медь; 3 — титан; 4 — керамика

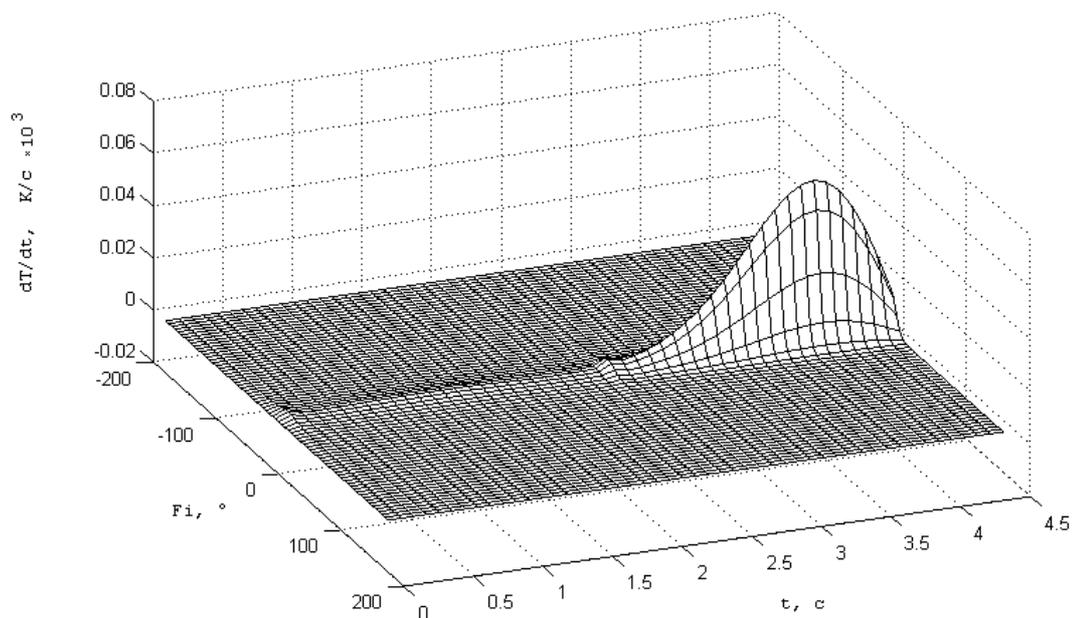


Рис.18. Зависимость скорости нагрева от времени по охватывающей линии зоны керамика—титан, Fi - азимутальный угол в градусах

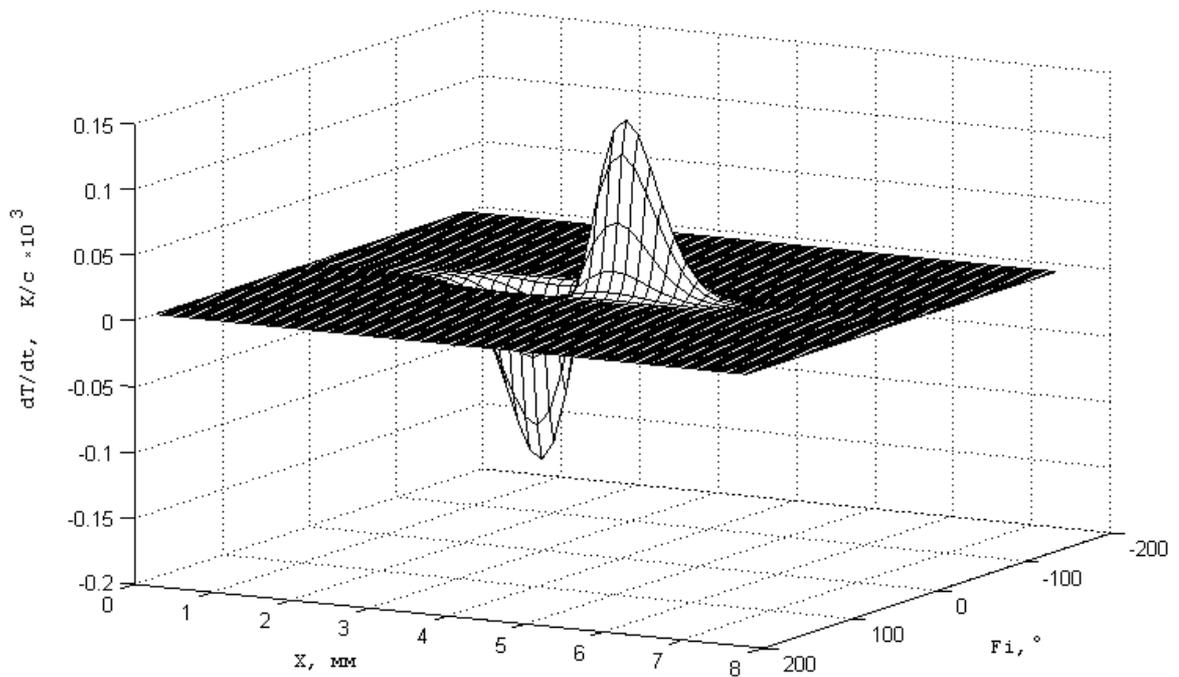


Рис. 19. Скорость изменения температуры в максимальной точке поверхности металла, φ - азимутальный угол в градусах

4.2. Моделирование задач плавления

Нахождение границ плавления соединяемых материалов является важной задачей для получения качественных соединений.

Разработанный алгоритм решения многофронтной задачи Стефана с учетом зависимости теплофизических параметров соединяемых материалов от температуры представлен ниже.

Коротко напомним, что внесение условия Стефана:

$$\lambda_1(T) \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=r(t)} = \lambda_2(T) \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=r(t)} - L_i \rho_i \frac{dr}{dt} ,$$

где ρ_i — плотность i -го слоя при температуре плавления, λ — коэффициент теплопроводности жидкой (1) и твердой (2) фазы соответственно; L_i — удельная теплота плавления материалов; dr — вектор

нормали к поверхности плавления

в систему дифференциальных уравнений приводит ее к нелинейному виду, решение которого в точной аналитической форме получить невозможно. Это связано со сложностью согласования решения уравнения теплопроводности и закона движения фазового фронта как функции времени.

При решении данной задачи плавления также используется метод центральных разностей. При нахождении решения многофронтной задачи Стефана поиск реализовывался следующим образом:

Расчет точки зарождения первого фазового фронта производился по температуре плавления с последующим циклом оптимизации существующих точек. Если температура оптимизации находилась выше температуры плавления, то осуществлялся поиск следующего фазового фронта. Задавалось максимальное отклонение $\delta_T = T_{\text{фронта}} - T_{\text{пл}}$. Исходя из предыдущего шага производилась очередная оптимизация фронта и вычислялось его новое местоположение. При выполнении условия $T_{\text{пл}} < T^*$ (T^* — вычисленная температура фронта плавления) дальнейший поиск производился с переменным шагом в зависимости от положения источника теплоты.

Цикл оптимизации проводился до приращения $\delta_z/2$ при вырождении фронтов, а также при встрече двух или нескольких фронтов плавления. В этом случае координата точки поиска исключалась, так как считалось, что в окрестности этой точки в зависимости от полученной температуры находится однородная либо жидкая, либо твердая фаза.

Зарождение фронтов плавления (затвердевания) в многомерной задаче Стефана рассчитывалось одновременно по всем координатам по схеме расщепления с погрешностью h . Допустимая погрешность по температуре не превосходила 1 К, погрешность по координате — 10^{-8} мм.

Для простоты изложения целесообразно привести схему расчета по одному из направлений, например x .

Разностная схема на границе плавления выглядит следующим образом:

$$\lambda_1 \frac{T_i - T_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \lambda_2 \frac{T_{i+1} - T_i}{x_{i+1} - x_i} - L\rho \frac{r - r^*}{\Delta t},$$

где λ_1, λ_2 — теплопроводности жидкой и твердой фаз соответственно; i — точка фронта; L — удельная теплота плавления; ρ — плотность вещества; r^* — положение фронта на предыдущем шаге; r — положение фронта на текущем шаге.

Точка плавления находится между узлами основной сетки, поэтому расстояния между ней, левой и правой точками основной сетки различны, кроме случая, когда она подменяет основную точку сетки. Или

$$\frac{\lambda_1}{x_i - x_{i-1}} T_{i-1} - \left(\frac{\lambda_1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{\lambda_2}{x_{i+1} - x_i} \right) T_i + \frac{\lambda_2}{x_{i+1} - x_i} T_{i+1} = L\rho \frac{r - r^*}{\Delta t}.$$

Термическое сопротивление между слоями, возникающее из-за неидеальности контакта, рассчитывалось как величина, состоящая из излучательной и кондуктивной частей с учетом параметра шероховатости R_a .

Для этого на место стыка накладывались два условия: первое — равенство входящего и выходящего с границы сред тепловых потоков, что соответствует закону сохранения энергии, второе — определение температурного скачка на границе двух сред:

$$l_1(T) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = l_2(T) \frac{\partial T_2}{\partial x_2}$$

или в виде разностной схемы:

$$\frac{\lambda_1}{x_2 - x_1} T_1 - \frac{\lambda_1}{x_2 - x_1} T_2 - \frac{\lambda_2}{x_4 - x_2} T_3 + \frac{\lambda_2}{x_4 - x_2} T_4 = 0,$$

где индексы "1", "2" — последняя и предпоследняя точки первого слоя; "3", "4" — первая и вторая точки второго слоя.

$$\left(-l_{i+1}(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \sigma \varepsilon_i (T_i^4 - T_{i+1}^4) + R_{i,i+1}^{-1} (T_i - T_{i+1}) \right) \Big|_{z=h_i} = 0$$

При теплопередаче только контактирующими неровностями между слоями тепловой поток, передаваемый излучением, не учитывался, а расчет температурного скачка на границах материалов определялся соотношением:

$$\left(-\lambda_{i+1}(T) \frac{\partial T}{\partial x} + R_{i,i+1}^{-1}(T_i - T_{i+1}) \right) \Big|_{z=h_i} = 0$$

или в виде разностной схемы:

$$\frac{1}{R} T_1 - \left(\frac{1}{R} + \frac{\lambda_2}{x_3 - x_2} \right) T_2 + \frac{\lambda_2}{x_3 - x_2} T_3 = 0,$$

где индекс "1" — последняя точка первого слоя; "2" и "3" — первая и вторая точки второго слоя; T_1 , T_2 , T_3 — температура в точках 1, 2, 3 соответственно.

При разработке алгоритма было определено условие, когда система уравнений имеет единственное решение, при котором выполнялись все выше перечисленные допущения.

Из разностной схемы для слоя плавления :

$$-\frac{\lambda_1}{dz} \cdot (T_3 - T_4) + \sigma \varepsilon (T_2^4 - T_3^4) + R \cdot (T_2 - T_3) = 0$$

следует: для $T_3 > T_4$ при $T_4 > 0$ выразив T_4 из предыдущего уравнения получаем:

$$\frac{\lambda_1}{dz} \cdot T_3 > \sigma \varepsilon (T_2^4 - T_3^4) + R \cdot (T_2 - T_3)$$

Раскрыв скобки предыдущего уравнения окончательно запишется:

$$\frac{\lambda_1}{dz} \cdot T_3 + \sigma \varepsilon T_3^4 - R T_3 > \sigma \varepsilon T_2^4 + R T_2$$

Последнее условие свидетельствует о том, что при больших температурах необходимо уменьшать шаг dz , используя неравномерную сетку по координатам.

Учет температурных зависимостей теплофизических характеристик материалов позволяет получить более точное распределение температур при зарождении фазового фронта, представленных на рис. 20-25.

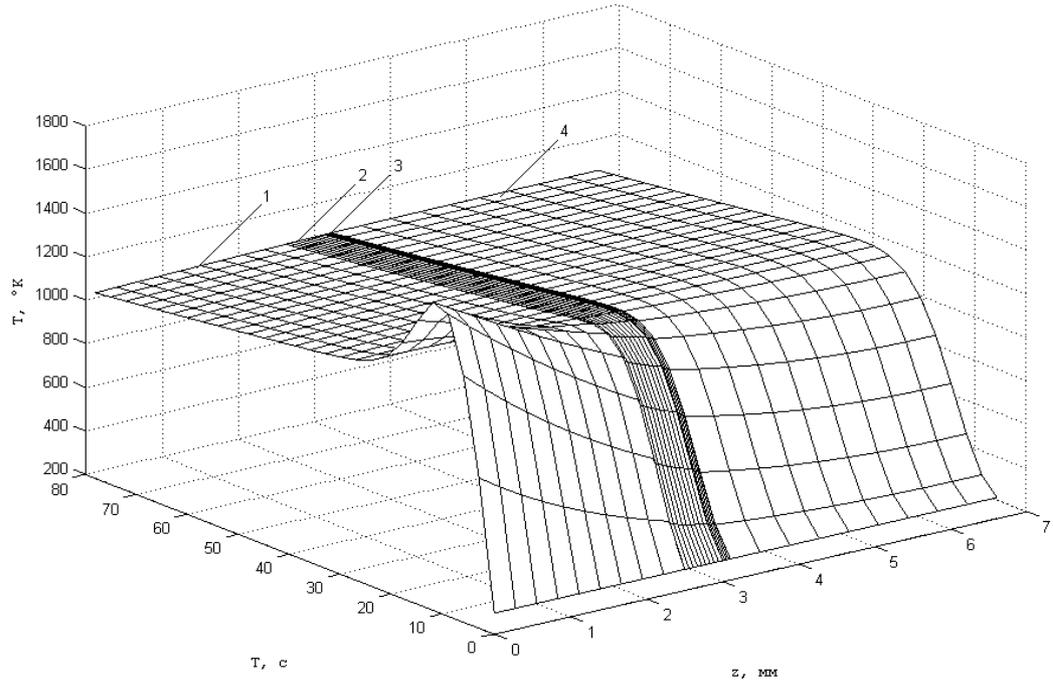


Рис. 20. Распределение температуры в металлокерамическом соединении:

1 — металл; 2 — медь; 3 — титан; 4 — керамика

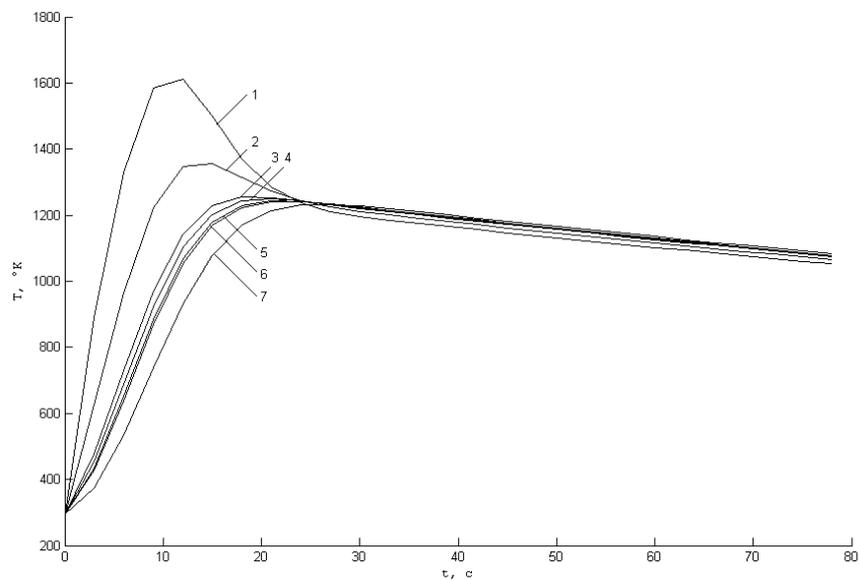


Рис. 21. Зависимость температуры между слоями в конечный момент времени:

1 - поверхность металла; 2- нижняя граница слоя металла;
 3 - поверхность меди; 4 - нижняя граница слоя меди; 5 - слой титана;
 6 - верхняя граница слоя керамики; 7 - нижняя граница слоя керамики;

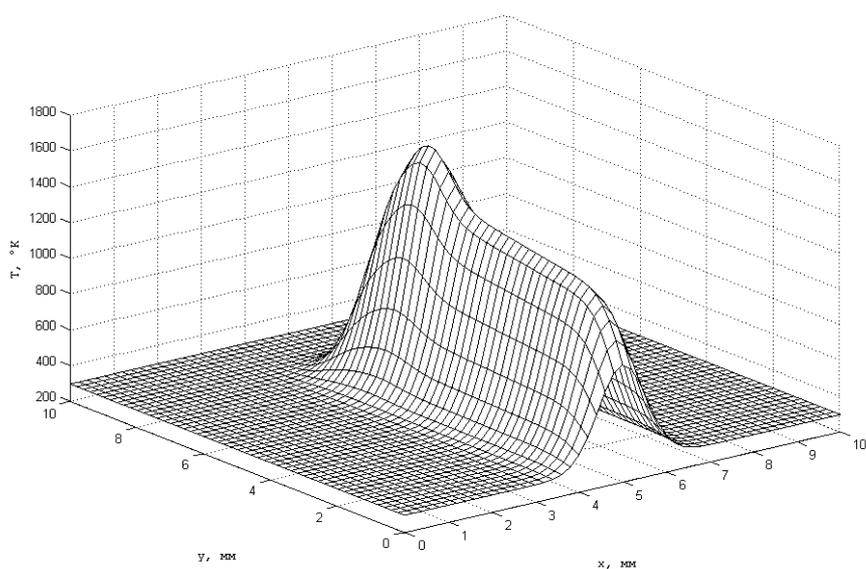


Рис. 22. Распределение температуры на поверхности металлокерамического соединения при движущемся лазерном источнике

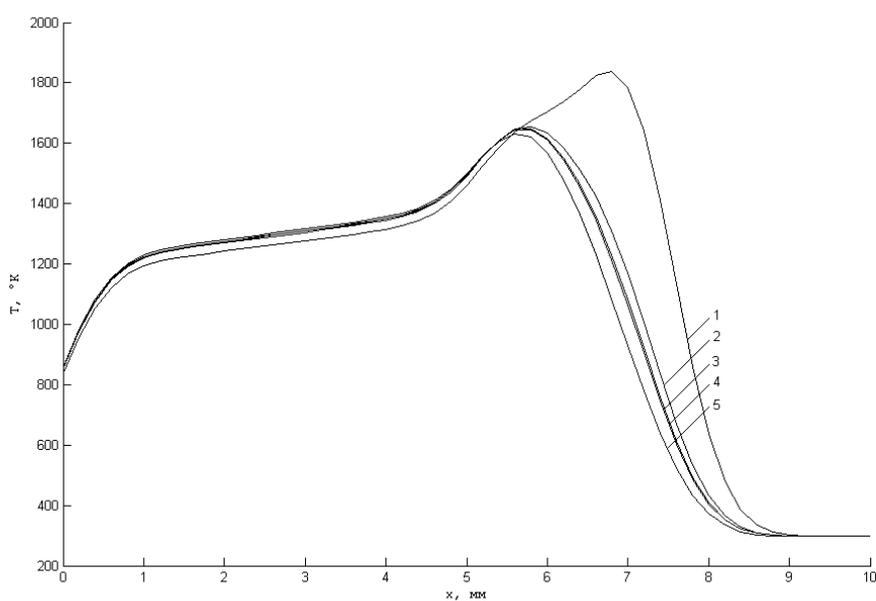


Рис. 23. Зависимость температуры между слоями от координаты: 1 — поверхность металла; 2 — граница металл—медь; 3 — граница медь—титан; 4 — граница титан—керамика; 5 — внутренняя поверхность керамики

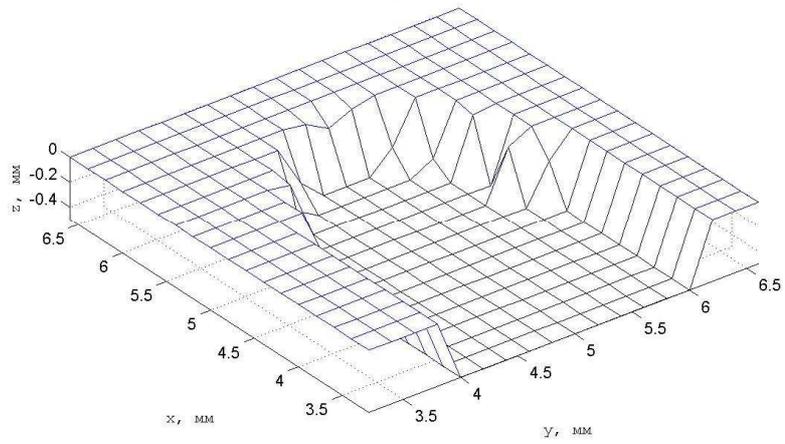


Рис. 24. Образование фронта плавления в меди

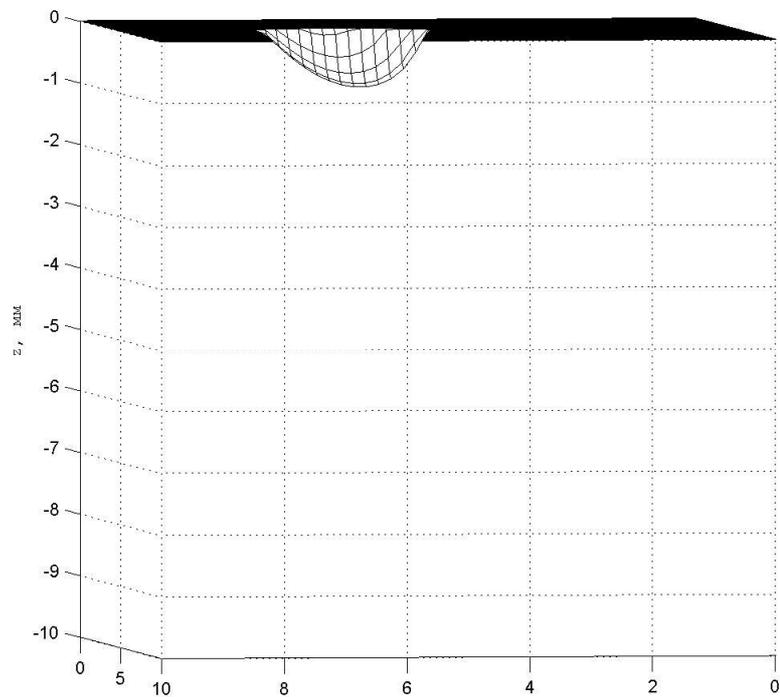


Рис. 25. Форма изотермы плавления при движущемся лазерном источнике после 6 секунд лазерного воздействия
($P=75$ Вт, $v=7$ мм/с)

Результаты расчета были получены при указанных выше режимах. Рисунки 8-21 позволяют оценить динамику развития тепловых полей в материалах при движущемся лазерном источнике.

4.3. Метод независимых потоков для численного решения многомерного уравнения теплопроводности

Основной особенностью является новый класс численных алгоритмов решения смешанной задачи для многомерного уравнения теплопроводности.^{2[1]} Этот класс содержит как схемы первого порядка аппроксимации (остаточный член $r = O(\tau) + O(h^2)$), так и второго — $r = O(\tau^2) + O(h^2)$). Все предлагаемые схемы безусловно устойчивы. Основным преимуществом данных методов является их абсолютная экономичность: число операций, необходимых для перехода на следующий временной слой равно CV , где V — объём разностной сетки, а C — константа, не зависящая от V . (Для не слишком сложного вида коэффициентов $C \approx 100 - 200$.)

Экономичность алгоритмов, как правило, достигается двумя путями. Первый — наиболее популярный — основан на редукции к одномерным разностным задачам. Именно этот подход лежит в основе метода переменных направлений или, в более общем плане, методе расщепления [2]. Второй подход состоит в использовании тех или иных итерационных процедур, самые удачные из которых требуют $CV \ln V$ операций [3].

Предлагаемый метод, так же, как и метод расщепления, в своей основе содержит решение одномерных задач. Однако он принципиально отличен от метода расщепления. Во-первых, здесь нет никакой факторизации оператора $E - \tau A$, которая и составляет суть метода расщепления. И, во-вторых, данные

^{2[1]} Краткое изложение основных элементов данного подхода см. [1].

схемы по построению являются консервативными, что автоматически гарантирует выполнение дискретного аналога соответствующего закона сохранения. Основная идея алгоритма состоит в способе расчета потоков. Именно неявная разностная схема расчета потоков допускает редукцию к одномерным задачам, что и обеспечивает как безусловную устойчивость, так и экономичность.

Следует подчеркнуть, что расчет потоков по каждому из пространственных направлений выполняется независимо, что позволяет легко распараллеливать алгоритм. Именно по этой причине метод можно назвать методом независимых потоков (МНП).^{3[2]}

Данный метод предназначен для решения задач в ортогональных координатах. В качестве таковых в работе рассмотрены две основные координатные системы — декартова (для 2D и 3D задач) и полярная (для 2D уравнения). Эффективность алгоритма иллюстрируется численными примерами для различных областей, в том числе, двухсвязных. Наличие δ -образных источников не является осложняющим обстоятельством, что позволяет использовать предлагаемый подход для решения задач с различными сингулярностями.

4.3.1. Двумерное уравнение теплопроводности в декартовых координатах.

Для того, чтобы выделить основные конструкции схемы и исследовать ее свойства, рассмотрим вначале простейшую двумерную задачу с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} a \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} b \frac{\partial P}{\partial y}, \quad a, b > 0$$

в области $G : \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$. Граничные условия

^{3[2]} Использование потоков в качестве искомым величин в краевой разностной задаче было предложено в [4] ("метод потоковой прогонки").

$$\frac{\partial P}{\partial n} = g(x, y, t),$$

где n — нормаль к ∂G . (Для постоянных a, b эти коэффициенты, конечно, можно считать равными, но в общем случае это не обязательно.)

Разобьем G на прямоугольные ячейки $\omega_{m,k}$ со сторонами $h_x = X/M$ и $h_y = Y/K$. Обозначим через $\Omega_{m,k}^{n+1/2}$ пространственно-временную ячейку $\omega_{m,k} \times [t^n, t^n + \tau]$, (рис. 26).

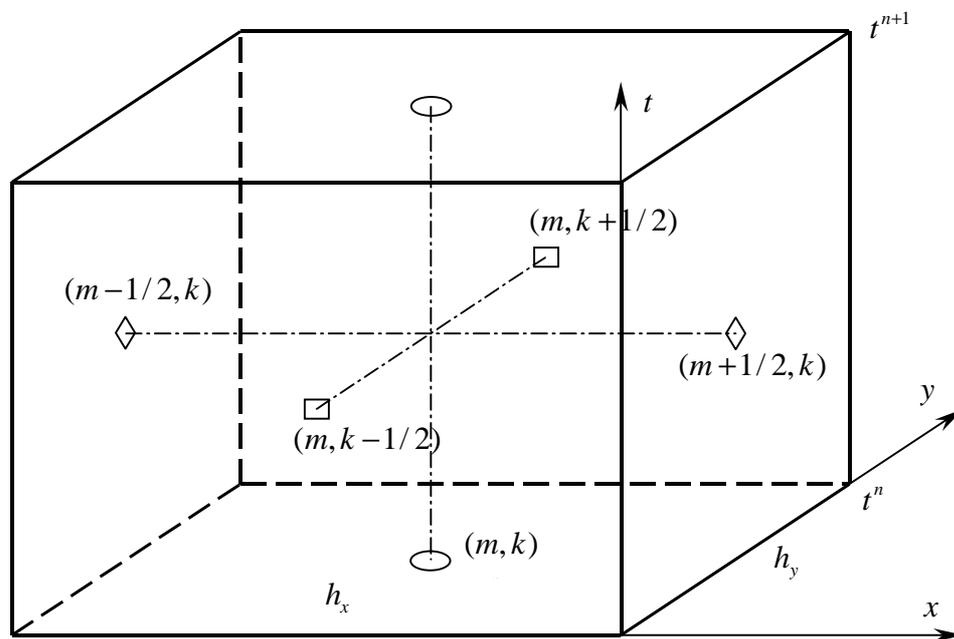


Рис. 26.

Введем три набора точек и, соответственно, три набора сеточных функций:

а) целые точки — (m, k) — центры ячеек $\omega_{m,k}$; к этим точкам будем относить $P_{m,k}^n = P(x_m, y_k, t^n)$;

б) x -полуцелые — $(m+1/2, k)$ — и y -полуцелые — $(m, k+1/2)$ — точки; этим точкам сопоставляются потоки $U_{m+1/2, k}^{n+1/2}$ и

$$V_{m, k+1/2}^{n+1/2} : U = a \frac{\partial P}{\partial x}, \quad V = b \frac{\partial P}{\partial y}.$$

С использованием потоков уравнение принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Поскольку имеет дивергентный вид, воспользуемся стандартной концепцией конечных объемов с тем, чтобы решение разностного уравнения точно удовлетворяло бы некоторому дискретному аналогу закона сохранения, соответствующему выбранной форме записи уравнения. Поэтому заключительным этапом разностной схемы является т.н. дивергентное замыкание (дивергентный пересчет):

$$P_{m,k}^{n+1} = P_{m,k}^n + \kappa_x \Delta_x U_{m,k} + \kappa_y \Delta_y V_{m,k},$$

где $\Delta_x U_{m,k} = U_{m+1/2,k} - U_{m-1/2,k}$, $\Delta_y V_{m,k} = V_{m,k+1/2} - V_{m,k-1/2}$; $\kappa_x = \tau / h_x$, $\kappa_y = \tau / h_y$.

Здесь и далее для упрощения записи в дальнейшем верхние дробные индексы опущены.

Таким образом, любая реализация разностной схемы, базирующаяся на дивергентном замыкании, полностью определяется способом вычисления потоков.

Напомним об одном важном обстоятельстве. Для получения разностной схемы P -го порядка аппроксимации ($P=1$ или 2) достаточно вычислять потоки по схеме пониженного, $(P-1)$ -го порядка. Повышение порядка до требуемого осуществляется за счет дивергентного пересчета. Этот факт является общим и не связан с конкретным типом уравнения (параболические, гиперболические и т.д.).

Начнем с простейшей схемы расчета потоков. Заметим, что U и V удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned}$$

Учитывая сделанное выше замечание о порядке аппроксимации потоков, в качестве схемы нулевого порядка для расчетов U и V возьмем простейшую неявную схему для усеченных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = b \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

обозначая искомые потоки через \tilde{U} , \tilde{V} . А именно,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k}, \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$U_{m+1/2,k}^n = a \frac{P_{m+1,k}^n - P_{m,k}^n}{h_x}, \quad V_{m,k+1/2}^n = b \frac{P_{m,k+1}^n - P_{m,k}^n}{h_y},$$

$$\Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k} = \tilde{U}_{m+3/2,k} - 2\tilde{U}_{m+1/2,k} + \tilde{U}_{m-1/2,k},$$

$$\Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2} = \tilde{V}_{m,k+3/2} - 2\tilde{V}_{m,k+1/2} + \tilde{V}_{m,k-1/2},$$

$$a q_x = a\tau / h_x^2, \quad q_y = b\tau / h_y^2.$$

Параметер σ характеризует тот промежуточный слой $t^n + \sigma\tau/2$, для которого аппроксимирует. Значению $\sigma=1$ соответствует срединный слой, значению $\sigma=2$ — верхний: $t = t^{n+1}$.

Система состоит из двух независимых подсистем, каждая из которых замыкается граничным условием, порожденным :

$$U = ag, \quad V = bg.$$

Остается лишь выполнить дивергентный пересчет .

Для построения более точной схемы уточненные значения U и V будем находить уже из полной системы . Таким образом, искомый алгоритм перехода на следующий слой распадается на три этапа:

1) Нахождение предварительных, «грубых» значений потоков — \tilde{U} и \tilde{V} путем решения краевых задач для разностных систем:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k}; \quad m=0, \dots, M-1; \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2}; \quad k=0, \dots, K-1.\end{aligned}$$

Граничные условия — заданные (по) значения $\tilde{U}_{1/2,k}$, $\tilde{U}_{M+1/2,k}$, $\tilde{V}_{m,1/2}$ и $\tilde{V}_{m,K+1/2}$.

2) Отыскание окончательных (уточненных) значения потоков U и V из системы разностных уравнений, аппроксимирующей :

$$\begin{aligned}U_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\theta}{2} q_x \Delta_{xx} U_{m+1/2,k} + \frac{\theta}{2} q_{xy} \Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k}, \\ V_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\theta}{2} q_y \Delta_{yy} V_{m,k+1/2} + \frac{\theta}{2} q_{yx} \Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2},\end{aligned}$$

где $q_{xy} = a\tau/h_x h_y$, $q_{yx} = b\tau/h_x h_y$, а

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k} &= \tilde{V}_{m+1,k+1/2} - \tilde{V}_{m+1,k-1/2} - \tilde{V}_{m,k+1/2} + \tilde{V}_{m,k-1/2}; \\ \Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2} &= \tilde{U}_{m+1/2,k+1} - \tilde{U}_{m-1/2,k+1} - \tilde{U}_{m+1/2,k} + \tilde{U}_{m-1/2,k}.\end{aligned}$$

Граничные условия — те же, что и на этапе 1.

Подчеркнем, что второй этап характеризуется своим параметром θ , который не обязан совпадать с σ .

3) Дивергентное замыкание по U , V .

Данный алгоритм решает также и задачу с граничным условием Дирихле:

$$P = g(x, y, t).$$

Действительно, пусть нормаль к рассматриваемому элементу границы направлена вдоль оси x . Дифференцируя по t , получаем $P_t = g_t(x, y, t)$. То есть

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = g_t.$$

Но $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} a \frac{\partial P}{\partial y}$ — известная на данном граничном элементе функция.

Поэтому эквивалентно заданию $\frac{\partial U}{\partial x}$, что тривиальным образом формирует

граничное условие, замыкающее разностную краевую задачу.

Легко видеть, что ни форма области G , ни даже ее связность не имеют значения. Важно лишь, чтобы любой элемент границы ∂G являлся стороной приграничной ячейки ω . На рис. 27 изображен пример достаточно вычурной области, которая, тем не менее, подвластна обоим (как упрощенному, так и полному) алгоритмам. Единственным усложнением при обработке таких областей является переменность длины каждого луча.

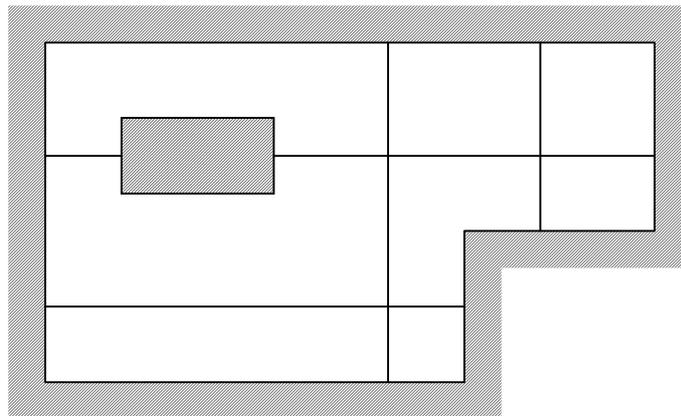


Рис. 27.

Следует также добавить, что алгоритм очевидным образом обладает параллельностью, поскольку потоки на каждом луче обоих направлений рассчитываются независимо.

4.3.2. Аппроксимация и устойчивость метода

Обычная процедура определения порядка и аппроксимации с помощью соответствующих тейлоровских разложений точного решения в узлах шаблона разностной сетки здесь неосуществима ввиду отсутствия самого конечного шаблона. Специфика алгоритма не позволяет исключить значения потоков и получить непосредственную связь между $P_{m,k}^n$ и $P_{m,k}^{n+1}$ в конечном числе точек. Поэтому для установления порядка аппроксимации

воспользуемся той же стандартной техникой, с помощью которой исследуется устойчивость схемы.

Положим

$$P_{m,k}^n = e^{i(m\alpha+k\beta)} = E.$$

Тогда $P_{m,k}^{n+1} = \lambda(\alpha, \beta)E$. Для нахождения собственного значения λ оператора послыоного перехода для полной схемы удобно ввести промежуточные величины λ_x , λ_y , $\tilde{\lambda}_x$ и $\tilde{\lambda}_y$:

$$\tilde{U}_{m+1/2,k} = \tilde{\lambda}_x E, \quad \tilde{V}_{m,k+1/2} = \tilde{\lambda}_y E,$$

$$U_{m+1/2,k} = \lambda_x E, \quad V_{m,k+1/2} = \lambda_y E.$$

Подставив в , получим

$$\tilde{\lambda}_x \left[1 + \sigma q_x (1 - \cos \alpha) \right] = \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x},$$

$$\tilde{\lambda}_y \left[1 + \sigma q_y (1 - \cos \beta) \right] = \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y}.$$

Подставив в , получим

$$\lambda_x \left[1 + \theta q_x (1 - \cos \alpha) \right] = \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} + \frac{\theta}{2} \tilde{\lambda}_y q_{xy} (e^{i\alpha} - 1) (1 - e^{-i\beta}),$$

$$\lambda_y \left[1 + \theta q_y (1 - \cos \beta) \right] = \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} + \frac{\theta}{2} \tilde{\lambda}_x q_{yx} (e^{i\beta} - 1) (1 - e^{-i\alpha}).$$

И, наконец, из следует

$$\lambda = 1 + \kappa_x \lambda_x (e^{i\alpha} - 1) + \kappa_y \lambda_y (e^{i\beta} - 1).$$

Для укороченной схемы (без этапа 2) имеем просто

$$\lambda_x \left[1 + \sigma q_x (1 - \cos \alpha) \right] = \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x},$$

$$\lambda_y \left[1 + \sigma q_y (1 - \cos \beta) \right] = \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y}.$$

Введем обозначения

$$\xi = q_x (1 - \cos \alpha), \quad \eta = q_y (1 - \cos \beta),$$

$$R_x^\sigma = \xi / (1 + \sigma\xi), \quad R_y^\sigma = \eta / (1 + \sigma\eta),$$

$$R_x^\theta = \xi / (1 + \theta\xi), \quad R_y^\theta = \eta / (1 + \theta\eta).$$

Тогда

$$\lambda = 1 - 2R,$$

где для укороченной схемы

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma,$$

а для полной

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma - \theta (R_x^\theta R_y^\sigma + R_y^\theta R_x^\sigma).$$

Начнем с порядка аппроксимации. Сопоставим собственные функции $e^{i(k_x x + k_y y)}$ исходного дифференциального оператора, рассматриваемые в узлах разностной сетки, т.е. сеточные функции $e^{i(k_x m h_x + k_y k h_y)}$, с собственными функциями разностного оператора перехода $e^{i(m\alpha + k\beta)}$. Ясно, что $\alpha = k_x h_x$, $\beta = k_y h_y$. Обозначим через λ^{ex} множитель перехода со слоя t^n на слой t^{n+1} для точной собственной функции. Тогда порядок аппроксимации определяется по степени совпадения тейлоровских разложений по τ функций λ^{ex} и λ .

Применительно к для λ^{ex} имеем

$$\lambda^{ex} = e^{-\tau(ak_x^2 + bk_y^2)}.$$

То есть,

$$\lambda^{ex} = 1 - \tau(ak_x^2 + bk_y^2) + \frac{\tau^2}{2}(ak_x^2 + bk_y^2)^2 + o(\tau^2).$$

Найдем соответствующие разложения для обеих разностных схем.

Имеем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a\tau}{h_x^2} (1 - \cos \alpha) \approx \frac{a\tau}{h_x^2} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \dots \right) = \\ &= \frac{a\tau}{h_x^2} \left(\frac{k_x^2 h_x^2}{2} - \frac{k_x^4 h_x^4}{24} + \dots \right) = \frac{k_x^2 a\tau}{2} - \frac{a\tau k_x^4 h_x^2}{24} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку речь идет лишь о первом или втором порядке аппроксимации, то второе слагаемое в разложении ξ может быть отброшено. Выполнив аналогичное разложение для η , окончательно получим

$$\xi \approx \frac{k_x^2 a \tau}{2}, \quad \eta \approx \frac{k_y^2 b \tau}{2},$$

$$R_x^\sigma \approx \frac{k_x^2 a \tau}{2} - \sigma \frac{k_x^4 a^2 \tau^2}{4}, \quad R_y^\sigma \approx \frac{k_y^2 b \tau}{2} - \sigma \frac{k_y^4 b^2 \tau^2}{4},$$

$$R_x^\theta \approx \frac{k_x^2 a \tau}{2} - \theta \frac{k_x^4 a^2 \tau^2}{4}, \quad R_y^\theta \approx \frac{k_y^2 b \tau}{2} - \theta \frac{k_y^4 b^2 \tau^2}{4}.$$

Рассмотрим укороченную схему. Для нее

$$\lambda = 1 - 2(R_x^\sigma + R_y^\sigma) = 1 - \tau(ak_x^2 + bk_y^2) + \frac{\tau^2}{2}\sigma(a^2k_x^4 + b^2k_y^4) + \dots$$

Сравнение с позволяет заключить, что

- (i) (i) при любом σ укороченная схема является схемой первого порядка аппроксимации;
- (ii) (ii) ни при каком значении σ второй порядок не достигается.

Поэтому в дальнейшем будем называть эту схему просто схемой первого порядка, или схемой 1.

Перейдем к полной схеме. Подставляя и в , найдем, что

$$2R \approx \tau(ak_x^2 + bk_y^2) - \frac{\tau^2}{2}\theta(a^2k_x^4 + b^2k_y^4) -$$

$$- 2\theta \left[\left(\frac{ak_x^2 \tau}{2} - \theta \frac{a^2k_x^4 \tau^2}{4} \right) \left(\frac{bk_y^2 \tau}{2} - \sigma \frac{b^2k_y^4 \tau^2}{4} \right) + \left(\frac{bk_y^2 \tau}{2} - \theta \frac{b^2k_y^4 \tau^2}{4} \right) \left(\frac{ak_x^2 \tau}{2} - \sigma \frac{a^2k_x^4 \tau^2}{4} \right) \right].$$

Оставляя лишь члены порядка τ и τ^2 , получим

$$2R \approx \tau(ak_x^2 + bk_y^2) - \frac{\tau^2}{2}\theta(a^2k_x^4 + b^2k_y^4) - \theta ak_x^2 bk_y^2 \tau^2 =$$

$$= \tau(ak_x^2 + bk_y^2) - \tau^2 \frac{\theta}{2} (ak_x^2 + bk_y^2)^2.$$

То есть,

$$\lambda = 1 - (ak_x^2 + bk_y^2)\tau + \frac{\theta}{2}(ak_x^2 + bk_y^2)^2 \tau^2 + \dots$$

Из сравнения с следует, что

- (i) (i) полная схема реализует второй порядок аппроксимации лишь при $\theta = 1$;
- (ii) (ii) параметр σ не влияет на порядок аппроксимации.

Таким образом, далее эта схема будет рассматриваться лишь при $\theta = 1$ и называться схемой 2.

Перейдем к исследованию устойчивости. Из предыдущих рассуждений следует, что необходимым условием устойчивости является выполнение неравенства

$$0 \leq R \leq 1.$$

В дальнейшем под устойчивостью будет пониматься безусловная устойчивость, т.е. устойчивость при всех значениях q_x и q_y .

Начнем со схемы первого порядка (схемы 1). Поскольку $0 \leq R_x^\sigma, R_y^\sigma \leq 1/\sigma$, то $0 \leq R \leq 2/\sigma$ и, следовательно, для устойчивости этой схемы необходимо, чтобы

$$\sigma \geq 2$$

(т.е. «промежуточный» слой должен располагаться не ниже верхнего).

Для схемы 2, с учетом выбора $\theta = 1$,

$$R = R_x + R_y - (R_x R_y^\sigma + R_y R_x^\sigma),$$

где

$$R_x = R_x^1 = \xi / (1 + \xi), \quad R_y = R_y^1 = \eta / (1 + \eta).$$

Так как речь идет о безусловной устойчивости, то неравенство должно выполняться при всех q_x, q_y и, в частности, при $q_x = q_y = +\infty$. Для этих предельных значений $\xi, \eta = +\infty$, что дает $R_x = R_y = 1$ и $R_x^\sigma = R_y^\sigma = 1/\sigma$. Таким образом, $R = 2 - 2/\sigma$. Следовательно, для выполнения необходимо, чтобы $1 \leq \sigma \leq 2$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.

Для всех $\sigma \in [1, 2]$ необходимое условие устойчивости схемы 2 выполнено.

Доказательство.

Очевидно, что

$$0 \leq R_x, R_y \leq 1.$$

Поэтому:

$$R = R_x(1 - R_y) + R_y(1 - R_x) \geq 0.$$

Для доказательства неравенства $R \leq 1$ введем

$$Q = R_x + R_y - R_x R_y.$$

Разность $Q - R$ можно представить в виде

$$Q - R = \frac{1}{2} R_x R_y \frac{1 - (\sigma - 1) R_y}{1 + (\sigma - 1) R_y} + \frac{1}{2} R_y R_x \frac{1 - (\sigma - 1) R_x}{1 + (\sigma - 1) R_x}.$$

Следовательно, при $1 \leq \sigma \leq 2$, т.е. при $0 \leq \sigma - 1 \leq 1$, обе дроби в неотрицательны в силу . Поэтому $R \leq Q$. Но $1 - Q = (1 - R_x)(1 - R_y) \geq 0$, что дает $Q \leq 1$, а, значит и искомую оценку $R \leq 1$.

4.3.3. Монотонность (положительность)

Одним из важных свойств разностной схемы является ее монотонность. Впрочем, это понятие применимо лишь к одномерным задачам. В многомерном случае речь идет о положительности. Схема называется положительной, если из неотрицательности всех $u_{m,k}^n$ следует неотрицательность $u_{m,k}^{n+1}$.

Начнем с анализа схемы 1 и рассмотрим задачу Коши на всей плоскости. Ясно, что для доказательства положительности схемы достаточно проверить положительность для начальных данных вида

$$u_{m,k}^n = \delta_{m,k} = \begin{cases} 1, & m = k = 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Так как при этих начальных данных

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m+1/2,k} &= 0 \quad \text{при } k \neq 0, \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} &= 0 \quad \text{при } m \neq 0, \end{aligned}$$

то $u_{m,k}^{n+1} = 0$ для всех «лучей», не проходящих через точку $m = k = 0$. Поэтому остается проверить положительность лишь величин $u_{0,k}^{n+1}$ и $u_{m,0}^{n+1}$.

Рассмотрим \tilde{U} . Поскольку $U_{m+1/2,k}^n = a(P_{m+1,k} - P_{m,k})/h_x$, то $\tilde{U}_{m+1/2,0}$ удовлетворяет разностному уравнению:

$$\tilde{U}_{m+1/2,0} - \frac{\tau}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,0} = \begin{cases} 0, & m \notin \{-1, 0\}, \\ -a/h_x, & m = 0, \\ a/h_x, & m = -1. \end{cases}$$

Так как при $m < -1$ и $m > 0$ это уравнение является однородным

$$-\frac{\sigma}{2} q_x \tilde{U}_{m-1/2,0} + (1 + \sigma q_x) \tilde{U}_{m+1/2,0} - \frac{\sigma}{2} q_x \tilde{U}_{m+3/2,0} = 0,$$

то его ограниченное решение имеет вид

$$\tilde{U}_{m+1/2,0} = \begin{cases} A_x \mu_x^{m+1}, & m \leq -1, \\ B_x \left(\frac{1}{\mu_x} \right)^m, & m \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $\mu_x = 1 + (1 + \sqrt{1 + 2\sigma q_x}) / (\sigma q_x) > 1$ — корень характеристического уравнения

$$-\frac{\sigma}{2} q_x \mu_x^2 + (1 + \sigma q_x) \mu_x - \frac{\sigma}{2} q_x = 0.$$

Константы A_x и B_x определяются из двух неоднородных уравнений для $m = 0$ и $m = -1$.

Согласно

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{-3/2,0} &= A_x \mu_x^{-1}, & \tilde{U}_{-1/2,0} &= A_x, \\ \tilde{U}_{1/2,0} &= B_x, & \tilde{U}_{3/2,0} &= B_x \mu_x^{-1}. \end{aligned}$$

Подставив в , получим

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma}{2}q_x A_x \mu_x^{-1} + (1 + \sigma q_x) A_x - \frac{\sigma}{2}q_x B_x &= \frac{a}{h_x}, \\ -\frac{\sigma}{2}q_x A_x + (1 + \sigma q_x) B_x - \frac{\sigma}{2}q_x B_x \mu_x^{-1} &= -\frac{a}{h_x}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $B_x = A_x$ и

$$A_x = \frac{2a}{h_x} \left(1 + 2\sigma q_x + \sqrt{1 + 2\sigma q_x}\right)^{-1}.$$

Заметим, что обе ветви последовательности $\tilde{U}_{m+1/2,0}$ — возрастающие, т.е. $\Delta_x \tilde{U}_{m+1/2,0} > 0$. Но поскольку $\tilde{V}_{m,\pm 1/2} = 0$ при $m \neq 0$, то вне точки $(0,0)$

$$u_{m,0}^{n+1} = \kappa_x \Delta_x \tilde{U}_{m,0} + \kappa_y \Delta_y \tilde{V}_{m,0} > 0.$$

Аналогичные формулы для $\tilde{V}_{0,k+1/2}$ имеют вид:

$$\tilde{V}_{0,k+1/2} = \begin{cases} A_y \mu_y^{k+1}, & k \leq -1, \\ B_y \left(\frac{1}{\mu_y}\right)^k, & k \geq 0. \end{cases}$$

$$A_y = \frac{2b}{h_y} \left(1 + 2\sigma q_y + \sqrt{1 + 2\sigma q_y}\right)^{-1}; \quad B_y = -A_y;$$

$$u_{0,k}^{n+1} = \kappa_x \Delta_x \tilde{U}_{0,k} + \kappa_y \Delta_y \tilde{V}_{0,k} > 0.$$

Осталось проверить положительность $u_{0,0}^{n+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{n+1} - 1 &= \kappa_x (\tilde{U}_{1/2,0} - \tilde{U}_{-1/2,0}) + \kappa_y (\tilde{V}_{0,1/2} - \tilde{V}_{0,-1/2}) = \\ &= \kappa_x (B_x - A_x) + \kappa_y (B_y - A_y) = \\ &= -2(\kappa_x A_x + \kappa_y A_y). \end{aligned}$$

Таким образом, условие положительности эквивалентно неравенству

$$2(\kappa_x A_x + \kappa_y A_y) \leq 1.$$

Подставляя явный вид A_x A_y в , получим

$$\frac{2\sigma q_x}{1 + 2\sigma q_x + \sqrt{1 + 2\sigma q_x}} + \frac{2\sigma q_y}{1 + 2\sigma q_y + \sqrt{1 + 2\sigma q_y}} \leq \frac{\sigma}{2}.$$

Несложные выкладки дают более удобную форму этого условия:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_y}} \geq \frac{4-\sigma}{2}.$$

Отсюда следует, что при $\sigma \geq 4$ схема положительна при любых q_x, q_y .

В частном случае $q_x = q_y = q$ получаем простое условие положительности (для $\sigma < 4$)

$$q \leq \frac{8-\sigma}{2(4-\sigma)^2}.$$

Что касается схемы второго порядка (схема 2), то вопрос об ее монотонности может быть решен аналогичным образом. Однако интуитивно ответ и так ясен: за повышение порядка аппроксимации приходится расплачиваться отсутствием положительности — полная аналогия с теоремой Годунова [5] о монотонности схем второго порядка для решения уравнения переноса $u_t + au_x = 0$. И действительно, непосредственная проверка схемы 2 (т.е. вычисление одного шага с δ -образными начальными данными) для различных значений q_x, q_y и σ подтвердила ее неположительность.

Этот факт, впрочем, не препятствует использованию схемы. Просто следует иметь в виду, что расчет сингулярных решений требует особого внимания и все зависит от того, какой результат более предпочтителен: визуально гладкий или более точный. Стандартный способ «улучшения» результата состоит в той или иной процедуре сглаживания — только для визуализации.

4.3.4. Трехмерный случай (декартовы координаты)

Трехмерный аналог имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} a \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} b \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} c \frac{\partial P}{\partial z}, \quad a, b, c > 0.$$

Соответственно теперь $G: \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq z \leq Z\}$, а $h_z = Z/L$.

Уравнение переходит в

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z},$$

где $W = c \frac{\partial P}{\partial z}$. Потoki U , V и W отнесены к x -полуцелым, y -полуцелым и z -полуцелым точкам: $U_{m+1/2,k,l}$, $V_{m,k+1/2,l}$ и $W_{m,k,l+1/2}$. В соответствии с дивергентное замыкание имеет вид

$$P_{m,k,l}^{n+1} = P_{m,k,l}^n + \kappa_x \Delta_x U_{m,k,l} + \kappa_y \Delta_y V_{m,k,l} + \kappa_z \Delta_z W_{m,k,l}.$$

Здесь, как обычно, $\Delta_z W_{m,k,l} = W_{m,k,l+1/2} - W_{m,k,l-1/2}$, а $\kappa_z = \tau/h_z$.

Первый этап схемы 1 — решение независимых краевых задач для разностных уравнений

$$\tilde{U}_{m+1/2,k,l} - U_{m+1/2,k,l}^n = \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} \tilde{U}_{m+1/2,k,l},$$

$$\tilde{V}_{m,k+1/2,l} - V_{m,k+1/2,l}^n = \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} \tilde{V}_{m,k+1/2,l},$$

$$\tilde{W}_{m,k,l+1/2} - W_{m,k,l+1/2}^n = \frac{\sigma}{2} q_z \Delta_{zz} \tilde{W}_{m,k,l+1/2},$$

где $W_{m,k,l+1/2}^n = c(P_{m,k,l+1}^n - P_{m,k,l}^n)/h_z$, $q_z = c\tau/h_z^2$, а

$$\Delta_{zz} W_{m,k,l+1/2} = W_{m,k,l+3/2} - 2W_{m,k,l+1/2} + W_{m,k,l-1/2}.$$

Второй этап — дивергентное замыкание по \tilde{U} , \tilde{V} , \tilde{W} .

Схема 2 состоит из тех же этапов, что и в двумерном случае. Первый этап — определение $\tilde{U}_{m+1/2,k,l}$, $\tilde{V}_{m,k+1/2,l}$, $\tilde{W}_{m,k,l+1/2}$ из одномерных разностных уравнений.

На втором этапе уточненные значения U , V , W больших величин отыскиваются путем решения краевых разностных задач, аппроксимирующие смешанные задачи для системы дифференциальных уравнений вида (ср. с):

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right), \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= c \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right).\end{aligned}$$

Соответствующим аналогом теперь является система

$$\begin{aligned}U_{m+1/2,k,l} - U_{m+1/2,k,l}^n &= \frac{\sigma}{2} q_x \Delta_{xx} U_{m+1/2,k,l} + \frac{1}{2} q_{xy} \Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k,l} + \frac{1}{2} q_{xz} \Delta_{xz} \tilde{W}_{m+1/2,k,l}; \\ V_{m,k+1/2,l} - V_{m,k+1/2,l}^n &= \frac{\sigma}{2} q_y \Delta_{yy} V_{m,k+1/2,l} + \frac{1}{2} q_{yx} \Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2,l} + \frac{1}{2} q_{yz} \Delta_{yz} \tilde{W}_{m,k+1/2,l}; \\ W_{m,k,l+1/2} - W_{m,k,l+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} q_z \Delta_{zz} W_{m,k,l+1/2} + \frac{1}{2} q_{zx} \Delta_{zx} \tilde{U}_{m,k,l+1/2} + \frac{1}{2} q_{zy} \Delta_{zy} \tilde{V}_{m,k,l+1/2}.\end{aligned}$$

Здесь Δ_{xy} , Δ_{xz} , Δ_{yx} , Δ_{yz} , Δ_{zx} и Δ_{zy} — смешанные разности

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} \tilde{V}_{m+1/2,k,l} &= \tilde{V}_{m+1,k+1/2,l} - \tilde{V}_{m+1,k-1/2,l} - \tilde{V}_{m,k+1/2,l} + \tilde{V}_{m,k-1/2,l}, \\ \Delta_{xz} \tilde{W}_{m+1/2,k,l} &= \tilde{W}_{m+1,k,l+1/2} - \tilde{W}_{m+1,k,l-1/2} - \tilde{W}_{m,k,l+1/2} + \tilde{W}_{m,k,l-1/2}, \\ \Delta_{yx} \tilde{U}_{m,k+1/2,l} &= \tilde{U}_{m+1/2,k+1,l} - \tilde{U}_{m-1/2,k+1,l} - \tilde{U}_{m+1/2,k,l} + \tilde{U}_{m-1/2,k,l}, \\ \Delta_{yz} \tilde{W}_{m,k+1/2,l} &= \tilde{W}_{m,k+1,l+1/2} - \tilde{W}_{m,k+1,l-1/2} - \tilde{W}_{m,k,l+1/2} + \tilde{W}_{m,k,l-1/2}, \\ \Delta_{zx} \tilde{U}_{m,k,l+1/2} &= \tilde{U}_{m+1/2,k,l+1} - \tilde{U}_{m-1/2,k,l+1} - \tilde{U}_{m+1/2,k,l} + \tilde{U}_{m-1/2,k,l}, \\ \Delta_{zy} \tilde{V}_{m,k,l+1/2} &= \tilde{V}_{m,k+1/2,l+1} - \tilde{V}_{m,k-1/2,l+1} - \tilde{V}_{m,k+1/2,l} + \tilde{V}_{m,k-1/2,l}.\end{aligned}$$

Подчеркнем, что на этом этапе, аналогично двумерному случаю, $\theta = 1$.

Повторяя все вычисления двумерного случая применительно к $P_{m,k,l}^n = e^{i(m\alpha+k\beta+l\gamma)} = E$, легко убедиться в том, что снова $\lambda = 1 - 2R$, но теперь для схемы 1

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma + R_z^\sigma,$$

Здесь R_x^σ , R_y^σ — см. —, а $R_z^\sigma = \zeta / (1 + \sigma\zeta)$, где $\zeta = q_z(1 - \cos \gamma)$.

Для схемы 2 выражение для R несколько более сложное, чем . А именно:

$$R = R_x + R_y + R_z - (R_x^\sigma R_y + R_x^\sigma R_z + R_y^\sigma R_x + R_y^\sigma R_z + R_z^\sigma R_x + R_z^\sigma R_y),$$

где $R_z = R_z^1 = \zeta / (1 + \xi) \zeta$.

Непосредственной проверкой, повторяя все преобразования двумерного случая, несложно убедиться в том, что и для трехмерного уравнения теплопроводности схема 1 является схемой первого порядка при любом σ , а схема 2 имеет второй порядок аппроксимации.

Осталось получить условия устойчивости.

Схема 1: Поскольку, как и в двумерном случае, здесь $0 \leq R_x^\sigma, R_y^\sigma, R_z^\sigma \leq 1/\sigma$, то $0 \leq R \leq 3/\sigma$ и, следовательно, для устойчивости этой схемы необходимо, чтобы $\sigma \geq 3$.

Этот результат выглядит парадоксально, т.к. означает, что «промежуточный» слой должен располагаться выше верхнего, но это свидетельствует лишь об условности чисто геометрических интерпретаций.

Перейдём к *схеме 2*, где ситуация сложнее. Возьмем предельный набор $q_x = q_y = q_z = +\infty$. Тогда $R_x = R_y = R_z = 1$, а $R_x^\sigma = R_y^\sigma = R_z^\sigma = 1/\sigma$. Поэтому $R = 3 - 6/\sigma$ (см.) и неравенство $0 \leq R \leq 1$ порождает ограничение

$$2 \leq \sigma \leq 3.$$

С другой стороны, полагая, например, $q_x = q_y = +\infty$, $q_z = 0$, получим $R_x = R_y = 1$, $R_x^\sigma = R_y^\sigma = 1/\sigma$, $R_z = R_z^\sigma = 0$. Тогда $R = 2 - 2/\sigma$, что приводит к неравенству:

$$1 \leq \sigma \leq 2.$$

Сопоставляя и , получаем, что единственным значением параметра схемы может быть лишь $\sigma = 2$. Поэтому в дальнейшем под трёхмерной схемой 2 будет пониматься только схема с $\sigma = 2$.

Используя это конкретное значение, представим R в двух эквивалентных формах

$$R = R_x + R_y + R_z - R_x \left(\frac{R_y}{1+R_y} + \frac{R_z}{1+R_z} \right) - R_y \left(\frac{R_x}{1+R_x} + \frac{R_z}{1+R_z} \right) - R_z \left(\frac{R_y}{1+R_y} + \frac{R_x}{1+R_x} \right);$$

$$R = \frac{1}{2} R_x \left(\frac{1-R_y}{1+R_y} + \frac{1-R_z}{1+R_z} \right) + \frac{1}{2} R_y \left(\frac{1-R_x}{1+R_x} + \frac{1-R_z}{1+R_z} \right) + \frac{1}{2} R_z \left(\frac{1-R_y}{1+R_y} + \frac{1-R_x}{1+R_x} \right).$$

Теорема 2.

Для трёхмерной схемы 2 необходимое условие устойчивости выполнено.

Доказательство.

Из представления R в виде следует, что $R \geq 0$. Что касается неравенства $R \leq 1$, то его проверка повторяет соответствующее доказательство для двумерной схемы 2. Введем теперь

$$Q = R_x + R_y + R_z - R_x R_y - R_x R_z - R_z R_y.$$

Из очевидного неравенства $(1 - R_x)(1 - R_y)(1 - R_z) \geq 0$, т.е. из неравенства $1 - Q - R_x R_y R_z \geq 0$ следует, что $Q \leq 1$. Осталось доказать, что $R \leq Q$. Взяв R в форме, получим:

$$\begin{aligned} Q - R = & R_x \left(\frac{R_y}{1 + R_y} + \frac{R_z}{1 + R_z} - \frac{R_y}{2} - \frac{R_z}{2} \right) + R_y \left(\frac{R_x}{1 + R_x} + \frac{R_z}{1 + R_z} - \frac{R_x}{2} - \frac{R_z}{2} \right) + \\ & + R_z \left(\frac{R_y}{1 + R_y} + \frac{R_x}{1 + R_x} - \frac{R_y}{2} - \frac{R_x}{2} \right) \end{aligned}$$

То есть:

$$\begin{aligned} Q - R = & R_x \left(R_y \frac{1 - R_y}{1 + R_y} + R_z \frac{1 - R_z}{1 + R_z} \right) + R_y \left(R_x \frac{1 - R_x}{1 + R_x} + R_z \frac{1 - R_z}{1 + R_z} \right) + \\ & + R_z \left(R_x \frac{1 - R_x}{1 + R_x} + R_y \frac{1 - R_y}{1 + R_y} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $Q - R \geq 0$, что и дает $R \leq 1$.

Прежде чем переходить к уравнению с переменными коэффициентами, рассмотрим — из чистого любопытства — случай высокой размерности: $D > 3$.

Обе схемы очевидным образом реализуются для уравнений любой размерности. Однако при $D > 3$ схема 1 безусловно устойчива лишь при $\sigma \geq D$,

в то время, как схема 2 ни при каких значениях σ не является безусловно устойчивой. Этот факт доказывается тем же способом, с помощью которого была установлена единственность параметра σ ($\sigma = 2$) для трехмерного случая.

Коснемся вопроса положительности трехмерной схемы 1. Повторяя знакомые выкладки, получим условие положительности

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_y}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\sigma q_z}} \geq \frac{6-\sigma}{2}.$$

Следовательно, схема 1 является положительной лишь при $\sigma \geq 6$.

Положив, как и в двумерном случае $q_x = q_y = q_z = q$ получим условие положительности (для $\sigma < 6$) в виде

$$q \leq \frac{12-\sigma}{2(6-\sigma)^2}.$$

4.3.5. Переменные коэффициенты. Неоднородность.

Система уравнений

Представленный алгоритм естественным образом обобщается и на более общие случаи. Для примера рассмотрим двумерную задачу

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} a(x, y) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \frac{\partial P}{\partial y} + J(x, y, t).$$

Снова введём $U = a \frac{\partial P}{\partial x}$, $V = b \frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + J(x, y, t).$$

Для U и V имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + a \frac{\partial J}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) + b \frac{\partial J}{\partial y}.$$

В соответствии со структурой алгоритма, в схеме 1 отыскиваются U и V из «укороченной» системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= b \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},\end{aligned}$$

а для схемы 2 используется дивергентный пересчет, т.е. имеет вид

$$P_{m,k}^{n+1} = P_{m,k}^n + \kappa_x \Delta_x U_{m,k} + \kappa_y \Delta_y V_{m,k} + \tau J_{m,k}.$$

Для схемы 1 слагаемое J можно вычислять при любом t (на нижнем слое, на верхнем, на промежуточном). Для схемы 2 обязательно $J_{m,k} = J_{m,k}^{n+1/2}$.

Зависимость коэффициентов a и b также и от t принципиально не меняет алгоритм. Просто добавляются слагаемые вида

$$a_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + J \right), \quad b_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + J \right).$$

Соответствующим образом модифицируется и разностные уравнения. Трехмерный случай поэтому не вносит принципиальных изменений.

Рассмотрим, наконец, важный случай δ -образного источника (стока). Пусть в $J = Q\delta(x-x_0, y-y_0)$, где Q — интенсивность источника. Для простоты ограничимся случаем $a = b = 1$.

Пусть точка (x_0, y_0) является центром «источниковой» ячейки (рис. 28).

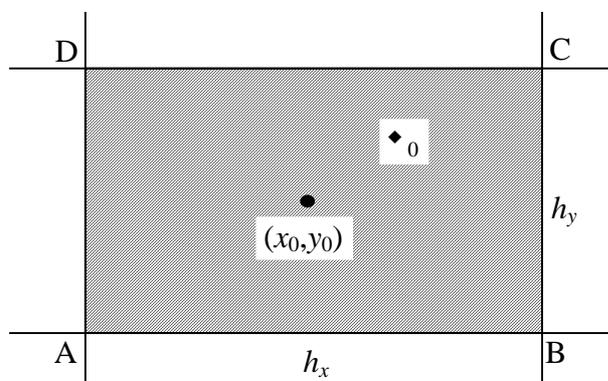


Рис. 28.

Тогда речь идет о многосвязной области с вырезанным прямоугольником ω_0 и остается лишь задать граничные условия Неймана на всех сторонах этой ячейки. Пренебрегая угловой зависимостью P в окрестности (x_0, y_0) , т.е. считая $P = P(r)$, $r^2 = x^2 + y^2$, получаем:

$$U_{BC} = -\frac{Q}{\pi h_y} \operatorname{arctg} \frac{h_y}{h_x}; \quad U_{AD} = -U_{BC};$$

$$U_{DC} = -\frac{Q}{\pi h_x} \operatorname{arctg} \frac{h_x}{h_y}; \quad U_{AB} = -U_{DC}.$$

Для квадратной ячейки ($h_x = h_y$):

$$U_{BC} = U_{DC} = -\frac{Q}{4}; \quad U_{AB} = U_{AD} = \frac{Q}{4}.$$

Вернемся к постоянным коэффициентам и рассмотрим случай системы уравнений. Пусть в a, b — положительные симметричные матрицы, не обязательно коммутирующие.

В силу линейности уравнения и постоянства коэффициентов векторная сеточная функция на нижнем слое

$$\mathbf{P}_{m,k}^n = e^{i(m\alpha + k\beta)} \mathbf{P}_* = \mathbf{E} \mathbf{P}_*$$

порождает аналогичные сеточные функции \mathbf{U} и \mathbf{V} $\left(\mathbf{U} = a \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x}, \quad \mathbf{V} = a \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \right)$. А именно,

$$\mathbf{U}_{m+1/2,k}^n = a \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} \mathbf{E} \mathbf{P}_*, \quad \mathbf{V}_{m,k+1/2}^n = b \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} \mathbf{E} \mathbf{P}_*,$$

$$\mathbf{U}_{m+1/2,k} = \mathbf{E} \mathbf{U}_*, \quad \mathbf{V}_{m,k+1/2} = \mathbf{E} \mathbf{V}_*.$$

Векторный аналог дает (после сокращения на \mathbf{E})

$$\left[E + \sigma a \frac{\tau}{h_x^2} (1 - \cos \alpha) \right] \mathbf{U} = a \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} \mathbf{P},$$

$$\left[E + \sigma b \frac{\tau}{h_y^2} (1 - \cos \beta) \right] \mathbf{V} = b \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} \mathbf{P}.$$

Здесь E — единичная матрица.

То есть, введя обозначения

$$\xi = a \frac{\tau}{h_x^2} (1 - \cos \alpha), \quad \eta = b \frac{\tau}{h_y^2} (1 - \cos \beta),$$

получим (теперь, в отличие от , ξ и η — матрицы):

$$\mathbf{U}_* = (E + \sigma \xi)^{-1} a \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} \mathbf{P}_*,$$

$$\mathbf{V}_* = (E + \sigma \eta)^{-1} b \frac{e^{i\beta} - 1}{h_y} \mathbf{P}_*.$$

Подстановка в дивергентное замыкание дает:

$$\mathbf{P}_{m,k}^{n+1} = E \mathbf{P}_* + \frac{\tau}{h_x} (1 - e^{i\alpha}) E \mathbf{U}_* + \frac{\tau}{h_y} (1 - e^{i\beta}) E \mathbf{V}_*.$$

Выразив \mathbf{U}_* и \mathbf{V}_* через \mathbf{P}_* согласно и заменив $E \mathbf{P}_*$ на $\mathbf{P}_{m,k}^n$, получим

$$\mathbf{P}_{m,k}^{n+1} = \left[E - 2(E + \sigma \xi)^{-1} \xi - 2(E + \sigma \eta)^{-1} \eta \right] \mathbf{P}_{m,k}^n.$$

Используя знакомые обозначения, перепишем в виде

$$\mathbf{P}_{m,k}^{n+1} = [E - 2R] \mathbf{P}_{m,k}^n,$$

где

$$R = R_x^\sigma + R_y^\sigma, \quad R_x^\sigma = (E + \sigma \xi)^{-1} \xi, \quad R_y^\sigma = (E + \sigma \eta)^{-1} \eta.$$

Для устойчивости схемы необходимо, чтобы

$$\|E - 2R\| \leq 1,$$

т.е., учитывая положительность и симметричность матриц R_x^σ и R_y^σ

$$\|R\| \leq 1.$$

Имеем

$$R_x^\sigma = \frac{1}{\sigma} (E + \sigma \xi)^{-1} \sigma \xi, \quad R_y^\sigma = \frac{1}{\sigma} (E + \sigma \eta)^{-1} \sigma \eta.$$

Но для любой положительной симметричной матрицы A

$$\left\| (E - A)^{-1} A \right\| \leq 1.$$

Поэтому $\|R_x^\sigma\| \leq 1/\sigma$, $\|R_y^\sigma\| \leq 1/\sigma$. Следовательно, при $\sigma \geq 2$ $\|R\| \leq 1$, что и требовалось установить.

Аналогичный анализ схемы 2 и обеих трехмерных схем дает те же необходимые условия устойчивости, что и для скалярных схем.

4.3.6. Полярная система координат

Уравнение теплопроводности в полярной системе координат имеет вид (ограничимся случаем изотопной теплопроводности)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} k r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} k \frac{\partial P}{\partial \varphi},$$

где коэффициент теплопроводности $k = k(r, \varphi)$.

Введем потоки

$$U = k r \frac{\partial P}{\partial r}, \quad V = \frac{k}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}.$$

Тогда аналогом и являются уравнения

$$r \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \right],$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right).$$

«Усеченные» уравнения — , используемые для расчета предварительных значений потоков, имеют вид (ср. с):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Введя естественным путем разностную сетку (r_m, φ_k) , получим следующую систему уравнений относительно $\tilde{U}_{m+1/2,k}$, $\tilde{V}_{m+1/2,k}$ (ср. с):

Этап 1:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{\sigma}{2} r_{m+1/2} q_r k_{m+1/2,k} \Delta_{rr} \tilde{U}_{m+1/2,k}, \\ \tilde{V}_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{\sigma}{2} \frac{1}{r_m^2} q_\varphi k_{m,k+1/2} \Delta_{\varphi\varphi} \tilde{V}_{m,k+1/2}.\end{aligned}$$

Здесь $q_r = \tau / h_r^2$, $q_\varphi = \tau / h_\varphi^2$,

$$\begin{aligned}\Delta_{rr} \tilde{U}_{m+1/2,k} &= \frac{1}{r_{m+1}} \Delta_r \tilde{U}_{m+1,k} - \frac{1}{r_m} \Delta_r \tilde{U}_{m,k}, \\ \Delta_{\varphi\varphi} \tilde{V}_{m,k+1/2} &= \tilde{V}_{m,k+3/2} - 2\tilde{V}_{m,k+1/2} + \tilde{V}_{m,k-1/2}, \\ \Delta_r \tilde{U}_{m,k} &= \tilde{U}_{m+1/2,k} - \tilde{U}_{m-1/2,k}, \\ U_{m+1/2,k}^n &= k_{m+1/2,k} r_{m+1/2} \frac{\Delta_r P_{m+1/2,k}^n}{h_r}, \\ V_{m,k+1/2}^n &= k_{m,k+1/2} \frac{1}{r_m} \frac{\Delta_\varphi P_{m,k+1/2}^n}{h_\varphi}, \\ \Delta_\varphi P_{m,k+1/2}^n &= P_{m,k+1}^n - P_{m,k}^n.\end{aligned}$$

Дивергентное замыкание этого этапа:

$$\begin{aligned}P_{m,k}^{n+1} &= P_{m,k}^n + \frac{1}{r_m} \left(\kappa_r \Delta_r \tilde{U}_{m,k} + \kappa_\varphi \Delta_\varphi \tilde{V}_{m,k} \right); \\ \kappa_r &= \tau / h_r, \quad \kappa_\varphi = \tau / h_\varphi\end{aligned}$$

порождает схему первого порядка.

Для реализации схемы второго порядка следует выполнить второй этап — пересчет потоков —, соответствующий уравнениям —.

Этап 2:

$$\begin{aligned}U_{m+1/2,k} - U_{m+1/2,k}^n &= \frac{1}{2} r_{m+1/2} k_{m+1/2,k} \left(q_r \Delta_{rr} U_{m+1/2,k} + q_{r\varphi} \Delta_{r\varphi} \tilde{V}_{m+1/2,k} \right), \\ V_{m,k+1/2} - V_{m,k+1/2}^n &= \frac{1}{2} \frac{1}{r_m^2} k_{m,k+1/2} \left(q_\varphi \Delta_{\varphi\varphi} V_{m,k+1/2} + q_{\varphi r} \Delta_{\varphi r} \tilde{U}_{m,k+1/2} \right).\end{aligned}$$

Здесь $q_{r\varphi} = q_{\varphi r} = \tau / (h_r h_\varphi)$, а

$$\begin{aligned}\Delta_{r\varphi} \tilde{V}_{m+1/2,k} &= \frac{1}{r_{m+1}} \Delta_\varphi \tilde{V}_{m+1,k} - \frac{1}{r_m} \Delta_\varphi \tilde{V}_{m,k}, \\ \Delta_{\varphi r} \tilde{U}_{m,k+1/2} &= \tilde{U}_{m+1/2,k+1} - \tilde{U}_{m+1/2,k} - \tilde{U}_{m-1/2,k+1} + \tilde{U}_{m-1/2,k}.\end{aligned}$$

Наконец, дивергентное замыкание этого этапа:

$$P_{m,k}^{n+1} = P_{m,k}^n + \frac{1}{r_m} (\kappa_r \Delta_r U_{m,k} + \kappa_\varphi \Delta_\varphi V_{m,k}).$$

Алгоритм решения соответствующих трехточечных разностных уравнений — тот же, что для декартовых координат. Для граничных условий Неймана значения потоков замыкают разностную краевую задачу. В случае постановки условий Дирихле (P на границе известно) — например, на границе $r = Const$ — трансверсальная производная легко вычисляется ($U_r = rP_t - V_\varphi$; P_t, V_φ — известные величины). Поэтому в качестве замыкающего разностного граничного условия можно использовать разностную аппроксимацию этой производной.

Алгоритм решения задачи с точечным источником интенсивности Q , расположенным в начале координат требует выделения «нулевой» ячейки ω_0 радиуса $r = h_r$. Таким образом, задача решается во внешней к ω_0 области. На границе $r = h_r$ задается поток U , определяемый интенсивностью источника: $U|_{r=h_r} = -Q/2\pi$.

Поскольку данное уравнение — даже при $k = Const$ — имеет переменные коэффициенты, то анализ устойчивости проводится в рамках принципа замороженных коэффициентов. Для этого просто «заморозим» r , т.е. заменим все значения r_m и $r_{m+1/2}$ на r . Повторяя соответствующие преобразования декартового случая, получим те же выражения для собственного значения оператора перехода:

$$\lambda = 1 - 2(R_r^\sigma + R_\varphi^\sigma),$$

где снова

$$R_r^\sigma = \xi / (1 + \sigma\xi), \quad R_\varphi^\sigma = \eta / (1 + \sigma\eta),$$

однако теперь $\xi = q_r(1 - \cos \alpha)$, а $\eta = q_\varphi(1 - \cos \beta) / r^2$.

Ясно, что $R_r^\sigma \leq 1/\sigma$, $R_\varphi^\sigma \leq 1/\sigma$. Поэтому схема первого порядка безусловно устойчива ($|\lambda| \leq 1$ для любых q_r, q_φ) лишь при $\sigma \geq 2$.

Анализ схемы второго порядка дает результат, аналогичный случаю декартовых координат: схема безусловно устойчива при $1 \leq \sigma \leq 2$.

4.3.7. Верификация и численные эксперименты

1. Как уже было сказано во Введении, предложенный метод был реализован в двух координатных системах — декартовой (2D и 3D) и полярной (2D). Для всех этих вариантов была проверена (экспериментально) аппроксимация обеих схем. Технологически это осуществлялось стандартным способом: для выбранной в качестве решения неоднородного уравнения $LP = f$ вычислялась аналитически соответствующая правая часть f , после чего задача решалась численно. Степень уменьшения разности $P_h - P$ (в различных нормах) при уменьшении шагов разностной сетки и дает реальный порядок аппроксимации. При этом для схемы 1 уменьшению временного шага τ в N раз соответствовало уменьшение пространственных шагов h в \sqrt{N} раз, а для схемы 2 τ и h уменьшались пропорционально.

Анализ численных результатов для различных областей полностью подтвердил анонсированный порядок аппроксимации как в C -норме, так и в L_2 -норме.

2. Для демонстрации эффективности метода применительно к расчету сингулярных решений были выбраны следующие две задачи:

а) Уравнение теплопроводности (для постоянных $a = b$) в квадратной области $X = Y = 3000$ с точечными источником и стоком одинаковой интенсивности в точках $(2685, 315)$ — источник и $(1485, 1485)$ — сток. Начальные данные $P = 300$. Граничные условия $\partial_\nu P = 0$.

Расчет производился на равномерной сетке 100×100 по схеме 2 с $\sigma = 2$, с постоянным шагом τ , соответствующим значению числа Куранта $q_x = q_y = 10$.

На рис. 29 представлена картина решения после 1200 шагов по времени. Несмотря на сингулярный характер $P(r, \varphi)$ и несоответствие сетки (квадратная) поведению решения в окрестности особенностей, метод демонстрирует хорошую разрешающую способность.

Замечание: поскольку значения P в центрах особых ячеек не участвуют в алгоритме, для "красоты" рисунка они были восстановлены с помощью простой экстраполяции.

б) Уравнение теплопроводности (для $k = 1$) в круговой области G_R для $R = 2$ с источником в центре интенсивности $Q = 0.8\pi$. Начальные данные: $P_0(r, \varphi) = -0.4 \ln r$. Граничные условия: $P_r = \cos(\varphi + 10t)$.

Расчет проводился по схеме 1 с $\sigma = 2$ на сетке 60 (по r) \times 30 (по φ). Шаг по времени $\tau = 0.01$.

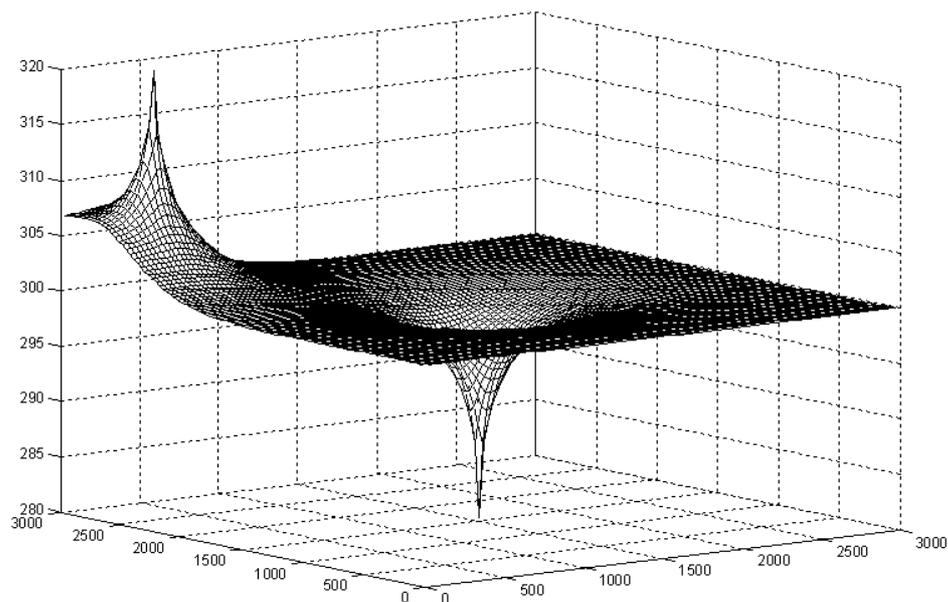


Рис. 29.

На рис. 30 изображено решение на момент $t=5$. (Здесь, в отличие от предыдущей задачи, значение P в центре не восстанавливалось и поэтому поверхность $P(r, \varphi)$ выглядит срезанной.)

3. Последний пример — решение задачи для в двухсвязной области, представляющей собой сектор с вырезом. Граничные условия — $\partial_\nu P = 0$ на всех компонентах границы. Начальные данные моделируют сумму восьми δ -образных функций (рис. 31, где изображены изолинии начального распределения $P_0(r, \varphi)$).

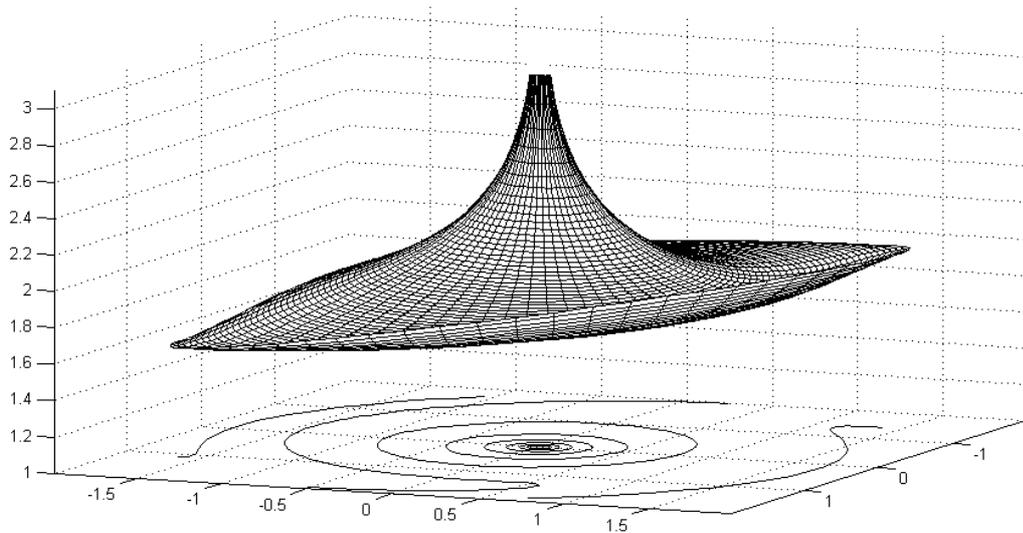


Рис. 30.

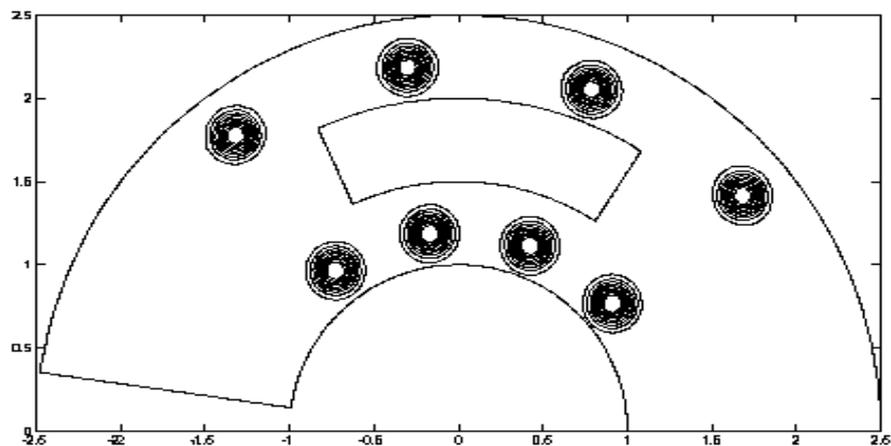


Рис. 31.

Численное интегрирование проводилось по схеме 1 с $\sigma=2$ на сетке 120×120 , что соответствует шагам $h_r = 0.0125$ и $h_\varphi = 0.025$. Шаг по времени $\tau = 0.001$.

Ясно, что с течением времени решение должно выглаживаться, что и демонстрирует рис. 32, на котором изображены изолинии $P(r, \varphi)$ на момент $t = 0.04$.

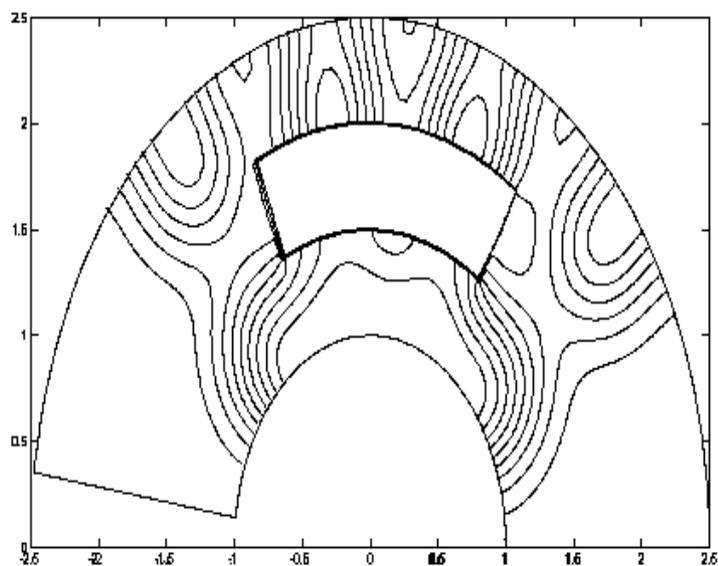


Рис. 32.

Представленный метод решения уравнения теплопроводности в ортогональной системе координат может использоваться как составной элемент при создании численных алгоритмов решения и более общих задач, таких например, как система уравнений фильтрации или система Навье-Стокса.

V. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

5.1. Задачи для практических занятий

1. Исследовать на аппроксимацию и устойчивость схему Ричардсона

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^{n-1}}{2\tau} = \frac{a}{h^2} \Delta_{xx} u^n,$$

с шаблоном

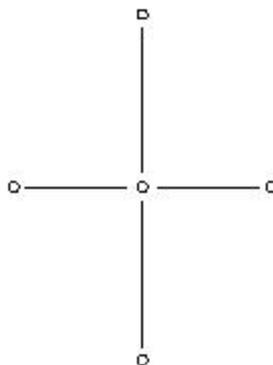


Рис. 33.

аппроксимирующую уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. Исследовать на аппроксимацию и устойчивость схему Саульева бегущего счета

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = \alpha \frac{u_{m-1}^n - (u_m^n + u_m^{n-1}) - u_{m+1}^{n-1}}{h^2}$$

(четные слои, счет справа налево)

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \alpha \frac{u_{m-1}^n - (u_m^n + u_m^{n+1}) + u_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$

(нечетные слои, счет слева направо) со следующим шаблоном:

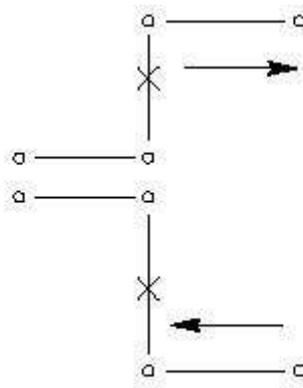


Рис. 34.

3. Исследовать на аппроксимацию и устойчивость схему Алена - Чена

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \alpha \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^n}{h^2}$$

с шаблоном

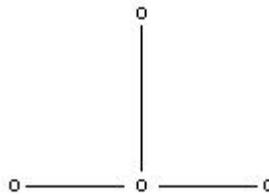


Рис. 35.

4. Выяснить, является ли явная четырехточечная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \alpha \Delta_{xx} u^n$$

с шаблоном

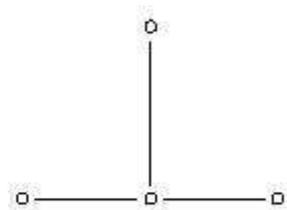


Рис. 36.

монотонной. Монотонные разностные схемы (по Фридрихсу) — это схемы, которые при записи в виде, разрешенном относительно u_m^{n+1} при значениях сеточной функции во всех остальных точках шаблона, имеют неотрицательные коэффициенты. Монотонные разностные схемы не дают паразитные осцилляции в решении. Придумать доказательство утверждения, что из монотонности разностной схемы следует ее устойчивость, предлагается самостоятельно.

5. Исследовать на устойчивость и аппроксимацию трехслойную схему

$$\frac{1,5(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} + \frac{0,5(u_m^n - u_m^{n-1})}{h} = \Delta_{xx} u_m^{n+1}$$

с шаблоном

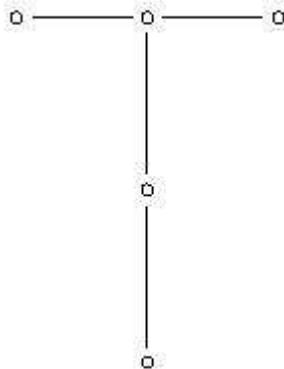


Рис. 37.

6. Показать, что решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} a u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\alpha > 0),$$

$$u(+\infty, t) = 0, \quad u(0, t) = ct^{1/\alpha}, \quad u(x, 0) = 0$$

представляет собой бегущую волну, распространяющуюся с конечной скоростью, причем при $\alpha \geq 0$ на фронте волны решение терпит разрыв первой производной (т.е. является обобщенным решением).

Предложить какие - нибудь разностные схемы для численного решения данной задачи, например, применив *интегро - интерполяционный метод*. Почему в этом случае нельзя переписать уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\alpha u^{\alpha-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

продифференцировав правую часть по x, а затем заменить производные их разностными аппроксимациями?

7. Используя условие устойчивости Куранта - Фридрихса - Леви, определить, какие из разностных схем, шаблоны которых приведены ниже, не будут устойчивыми:

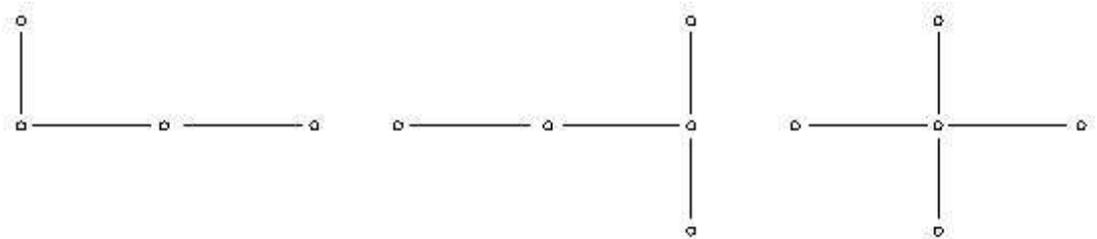


Рис. 38.

8. При каком соотношении шагов τ и h явная разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

для уравнения теплопроводности имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$?

9. Показать, что параметрическая разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \xi \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \xi) \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

при весе

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$$

имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$.

10. Для аппроксимации уравнения (2.2) использована схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(k_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} + k_{m-1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} \right),$$

где $k_{m+1/2}$ вычисляется следующим образом:

$$1. \quad k_{m+1/2} = \frac{a}{2} \left((u_m^n)^\alpha + (u_{m+1}^n)^\alpha \right);$$

$$2. \quad k_{m+1/2} = a \left(\frac{u_m^n + u_{m+1}^n}{2} \right)^\alpha;$$

$$3. \quad k_{m+1/2} = a \left(\frac{2u_m^n u_{m+1}^n}{u_m^n + u_{m+1}^n} \right)^\alpha;$$

$$4. \quad k_{m+1/2} = a \frac{(u_m^n)^\alpha (u_{m+1}^n)^\alpha}{(u_m^n)^\alpha + (u_{m+1}^n)^\alpha};$$

Выражения а) - d) суть некоторые аппроксимации au^α , взятые на предыдущем слое по времени между узлами u_m , u_{m+1} . Какой из вариантов предпочтительнее? Почему не работают в окрестности фронта средние гармонические — с) и d)?

Реализовать схемы а) и б) на ЭВМ, сравнить численное решение с точным

5.2. Задачи для лабораторных работ

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) **тестовый** пример и результаты вычислительного эксперимента по тесту (если необходимо); 4) полученные результаты и их анализ; 5) графический материал (если необходимо); 6) тексты программ.

Варианты заданий к задачам 1-6 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ*.

Задача 1. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Представить коэффициент теплопроводности $K(x)$ в виде функции двух переменных x и c : $K(x) = K(x, c)$, где c - параметр.

2. При заданных в индивидуальном варианте функциях $k(x)$ (что соответствует $K(x, 1)$), $f(x)$ и значениях UA , UB найти аналитическое решение задачи символично.

3. Изменяя значения параметра c в коэффициенте теплопроводности, найти решения задачи для наборов параметров 1-3 (см. таблицу ниже).

4. На одном чертеже построить графики найденных решений. Сравнить полученные результаты.

5. Аналогично п.2, найти аналитическое решение для набора параметров 4. На одном чертеже построить графики решений для наборов 1 и 4. Сравнить полученные результаты.

6. Изменяя граничные условия UA , UB , построить решения для наборов параметров 5-7.

Таблица наборов параметров

Параметр	1 набор	2 набор	3 набор	4 набор	5 набор	6 набор	7 набор
c	1	10	0.1	1	1	1	1
$K(x)$	$k(x)$	$ck(x)$	$ck(x)$	$1/k(x)$	$k(x)$	$k(x)$	$k(x)$
UA	ua	ua	ua	ua	$-ua$	ua	$-ua$
UB	ub	ub	ub	ub	ub	$-ub$	$-ub$

Задача 2. Найти приближенное решение краевой задачи методом конечных разностей:

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = UA, & u(b) = UB. \end{cases}$$

с заданной точностью ε и построить его график.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить разностную схему второго порядка точности и выписать коэффициенты матрицы системы уравнений и коэффициенты правой части.

2. Подготовить тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

3. Для вычисления решения задачи с заданной точностью произвести расчет с начальным шагом h , затем уменьшить шаг вдвое. Вывести на экран два соседних приближенных решения и сравнить результаты. Если заданная точность не достигнута, то продолжить уменьшение шага.

4. Построить график найденного решения и указать шаг, при котором заданная точность достигается.

Задача 3. Методом конечных разностей найти приближенное решение указанной в индивидуальном варианте краевой задачи с точностью ε и построить его график. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

УКАЗАНИЯ.

1. Использовать разностную схему второго порядка точности. Для аппроксимации производных в граничных условиях воспользоваться разностными отношениями:

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \quad \text{и} \quad y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

2. Организовать компактное хранение ненулевых элементов трехдиагональной матрицы системы разностных уравнений.

3. Подготовить самостоятельно тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

Задача 4. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи – переменного коэффициента теплопроводности $k(x)$ и плотности источников тепла $f(x)$:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f, \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить разностную схему второго порядка точности для решения указанной задачи.

2. Взять исходные данные из 1-го набора параметров для задачи 1. Шаг сетки положить равным $h = (b - a)/150$.

3. Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от коэффициента $k(x)$:

3.1. Пусть стержень состоит из 2-х материалов с различными свойствами:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & a \leq x \leq 0.5 \cdot (b+a) \\ k_2, & 0.5(b+a) < x \leq b \end{cases}, \quad \text{а) } k_1 \ll k_2, \quad \text{б) } k_1 \gg k_2.$$

3.3. Пусть стержень состоит из 3-х материалов с различными свойствами:

3.4.

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & a \leq x \leq a + (b-a)/3 \\ k_2, & a + (b-a)/3 \leq x \leq a + 2(b-a)/3 \\ k_3, & a + 2(b-a)/3 < x \leq b \end{cases}$$

$$\text{а) } k_1 < k_2 < k_3, \quad \text{б) } k_1 > k_2 > k_3,$$

$$\text{в) } k_1 = k, \quad k_2 = 10k, \quad k_3 = k, \quad \text{г) } k_1 = 100k, \quad k_2 = k, \quad k_3 = 100k.$$

4. Про моделировать процесс теплопроводности в зависимости от правой части – функции $f(x)$, предполагая, что $f(x)$ – точечный источник тепла. Задать точечный источник тепла можно следующим образом: $f(x) = c \cdot \delta(x - x_0)$, где c – некоторая константа (мощность источника), $\delta(x)$ – дельта-функция, x_0 – точка из отрезка $[a, b]$, в которую ставится источник.

Рассмотреть следующие варианты расположения источника:

- а) точечный источник поставлен в середину отрезка $[a, b]$;
- б) два одинаковых по мощности источника поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;
- в) два различных по мощности источника поставлены симметрично;
- г) предложить свой вариант расположения источников.

Задача 5. Методом конечных разностей найти приближенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} -(k(x)u')' + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ -k(a)u'(a) + 0.5u(a) = 0, \\ k(b)u'(b) + 0.5u(b) = 0. \end{cases}$$

с тремя верными значащими цифрами. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

УКАЗАНИЯ.

1. Использовать разностную схему второго порядка точности.
2. При аппроксимации производных в граничных условиях использовать метод баланса.

Задача 6. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи - коэффициента теплопроводности $k(x)$ и начальной температуры $\phi(x)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x)(1 - e^{-t}), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = UA, \quad u(l, t) = UB, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти приближенное решение задачи с шагами $\tau = 0.05$ и $h = 0.1$, используя явную разностную схему. Построить графики решений при значениях $t = 0.5\tau, 10\tau, 20\tau$.
2. Используя результаты задачи 1, экспериментально определить момент времени t , при котором происходит установление процесса (визуально).
3. Исследовать, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв другие функции $\phi(x)$ (согласованные с граничными условиями).

VI. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Радвогин Ю. Б. Экономичные алгоритмы численного решения многомерного уравнения теплопроводности." — ДАН, 2003, т. 388, №3, 295 – 297.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М., "Наука", 1988.
3. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М., "Наука", 1978.
4. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. Поточковый вариант метода прогонки. — ЖВМиМФ, 1968, том 8, №3.
5. Годунов С. К., Забродин А. В. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М., "Наука", 1976.
6. Коздоба Л.А. Решение нелинейных задач теплопроводности. Киев: «Наукова думка». 1976. – 136 с.
7. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975. 208 с.
8. Вабищев П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М., 1987.
9. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975. - 488 с.
10. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука. 1964. - 488 с.
11. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб. пособие. М.: Высш. шк. 1985. 480 с.
12. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа. 1979. 480 с.
13. Кудрявцев Л.И., Меньших Н.Л. Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Машиностроение. 1979. 232 с.
14. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978.

15. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численные методы в задачах тепло- и массообмена. - М.: Наука, 1984.
16. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. - Рига: Звайгзне, 1967. - 457 с.
17. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М. Высокотемпературные технологические процессы: теплофизические основы. М.: Наука. 1985. 171 с.
18. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В., Кокора А.Н. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов. М.: Машиностроение, 1985. 496 с.
19. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951. 296 с.
20. Рыкалин Н.Н. Тепловые основы сварки. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 272 с.
21. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена: пер. с англ. - М.: Мир, 1988 - 544 с.
22. Шлыков Ю.П., Ганин Е.А., Царевский С.Н. Контактное термическое сопротивление. М.: Энергия, 1977. 328 с.
23. Эккерт Э., Дрейк Р. Теория тепло- и массообмена. М. - Л.: Мосэнергоиздат. 1961.
24. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СХЕМА ВАРИАНТОВ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАДАЧАМ

№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи
1	10.1.1, 10.2.1, 10.4.1, 10.5.1, 10.6.1	11	10.1.11, 10.2.6, 10.4.11, 10.5.11, 10.6.11	21	10.1.21, 10.2.11, 10.4.21, 10.5.21, 10.6.21
2	10.1.2, 10.3.1,10.4.2, 10.5.2, 10.6.2	12	10.1.12, 10.3.6, 10.4.12, 10.5.12, 10.6.12	22	10.1.22, 10.3.12,10.4.22, 10.5.22, 10.6.22
3	10.1.3, 10.2.2, 10.4.3, 10.5.3, 10.6.3	13	10.1.13, 10.2.7,10.4.13, 10.5.13, 10.6.13	23	10.1.23, 10.2.12, 10.4.23, 10.5.23, 10.6.23
4	10.1.4, 10.3.2, 10.4.4, 10.5.4, 10.6.4	14	10.1.14, 10.3.7, 10.4.14, 10.5.14, 10.6.14	24	10.1.24, 10.3.12, 10.4.24, 10.5.24, 10.6.24
5	10.1.5, 10.2.3, 10.4.5, 10.5.5, 10.6.5	15	10.1.15, 10.2.8, 10.4.15, 10.5.15, 10.6.15	25	10.1.25, 10.2.13, 10.4.25, 10.5.25, 10.6.25
6	10.1.6, 10.3.3, 10.4.6, 10.5.6, 10.6.6	16	10.1.16, 10.3.8, 10.4.16, 10.5.16, 10.6.16	26	10.1.26, 10.3.13, 10.4.26, 10.5.26, 10.6.26
7	10.1.7, 10.2.4, 10.4.7, 10.5.7, 10.6.7	17	10.1.17, 10.2.9, 10.4.17, 10.5.17, 10.6.17	27	10.1.27, 10.2.14, 10.4.27, 10.5.27, 10.6.27
8	10.1.8, 10.3.4, 10.4.8, 10.5.8, 10.6.8	18	10.1.18, 10.3.9,10.4.18, 10.5.18, 10.6.18	28	10.1.28, 10.3.14, 10.4.28, 10.5.28, 10.6.28

9	10.1.9, 10.2.5, 10.4.9, 10.5.9, 10.6.9	19	10.1.19, 10.2.10, 10.4.19, 10.5.19, 10.6.19	29	10.12.9, 10.2.15, 10.4.29, 10.5.29, 10.6.29
10	10.1.10, 10.3.5,10.4.10, 10.5.10, 10.6.10	20	10.1.20, 10.3.10, 10.4.20, 10.5.20, 10.6.20	30	10.1.30, 10.3.15,10.4.30, 10.5.30, 10.6.30

Таблица к задаче 1

№	$k(x)$	$f(x)$	a	UA	b	UB
1.1	x^3	$10x^{1/4}$	1	3	2	0
1.2	x	$\sqrt{x}+4$	0.5	0	1.5	5
1.3	x^{-2}	$-2x^2-2x$	0.5	2	1.5	6
1.4	x^3	$1+x^{1/3}$	0.2	4	1.2	1
1.5	x	x^3+2	0.1	2	1.1	4
1.6	e^x	e^{2x}	0.5	1	1.5	5
1.7	x	$3x+x^2$	1	3	2	3
1.8	x	$x+x^{1/3}$	0.1	6	0.8	0.6
1.9	$\cos(x)$	$10\sin(x)$	0.1	3	0.8	1
1.10	x	$\ln(x)$	0.1	1	0.6	5
1.11	$\cos(x)$	$10\cos(x)$	1	2	1.5	1
1.12	x	x^{-1}	1	3	2	3
1.13	x^{-2}	$6x^2-3x$	1	-2	2.2	2
1.14	e^x	$x+e^x$	1	2	2.5	-2
1.15	$x^{-1/3}$	$x+\sqrt{x}$	1.5	3	2.5	-3
1.16	x^3	$10x^{-1/4}$	0.1	3	1.1	0

1.17	x^{-1}	$4 - \sqrt{x}$	1.5	-2	2.5	-4
1.18	x^2	$2x^2 + 2x$	0.5	2	1.6	6
1.19	x^{-3}	$4x^3 + 6$	0.2	4	1.2	1
1.20	x^{-2}	$5x^4 - 5$	1.5	-1	2.5	4
1.21	e^x	$2 - e^{2x}$	0.3	-1	2.3	1
1.22	x^{-1}	x	1	3	2	3
1.23	$1/\cos(x)$	$5\sin(x)$	0.5	1	1.5	1
1.24	$1/\cos^2(x)$	$6\cos^3(x)$	0.5	2	1.3	2
1.25	$1/\sin^2(x)$	$15\sin^3(x)$	0.2	-1	1.2	-1
1.26	x^{-1}	$3\ln(x)$	0.3	3	2.3	1
1.27	x^{-1}	$2x^2 - x$	2	-4	3	2
1.28	x^{-2}	$3x^2 + 4$	1.2	-4	2.4	1
1.29	$x^{1/2}$	$15(x - \sqrt{x})$	0.5	1	1.5	1
1.30	e^{-x}	$3 + e^{3x}$	0.3	3	2.3	1

Таблица к задаче 2

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	a	b	U		ε
						A	B	
2.1	$0.5 + \sin^2 x$	$2(1 + x^2)$	$10(1 + \sin^2 x)$	0	2	0	4	0.02
2.2	e^{-x^2}	$5(2 + \sin 2x)$	$e^x(1 + \sin 2x)$	0	2	0	5	0.05
2.3	$e^{-(x^2+1)}$	$10(1 + e^{-x})$	$e^{2.5x}(0.5 + x)$	0	1	4	0	0.03
2.4	e^{-2x}	$16/(1 + x^2)$	$e^{3x}(2 - x^2)$	0	1	1	3	0.05
2.5	$\ln(1 + x)$	$10/(1 + x)$	$x + 9/(1 + x)$	0	2	5	0	0.01

2.6	$\cos^2(x)$	$\frac{10}{1+\sin^2(x)}$	$e^{-0.5x}(12-x^2)$	0	2	3	0	0.05
2.7	$\ln(1+x^2)$	$e^{-x}(8+x^2)$	$8-x^2$	0	2	4	0	0.01
2.8	$1+\cos^2(x)$	x^2+1	$(x^2+1)\cos(x)$	1	3	-1	4	0.05
2.9	$0.5(1.5-x^2)$	$e^x(4-x)$	$5x^2e^{-x}$	1	2	0	3.5	0.02
2.10	$\sin(2x)$	$8(1+\sin^2 x)$	$10\cos x$	1	3	0	0	0.05
2.11	$0.25(1-x^2)$	$5(1+\cos^2(x))$	$15\cos x$	0	2	0	4	0.02
2.12	$-0.5+\sin x$	$\frac{8}{1+0.25x^2}$	$5(1-x^2)$	0	2	0	0	0.01
2.13	$\sin(x-2)$	$5(x+1/x)$	8	1	3	0	5	0.04
2.14	$1/(1+x^2)$	$10-x$	$e^{1.5x}(1+x^2)$	0	2	0	5	0.05
2.15	$0.5e^{-x}$	$10(1+\sin^2 x)$	12	0	1	-1	4	0.02
2.16	$0.5(1-0.4x^2)$	$e^{-x}(9+x)$	$10\sin x$	0	1	0	4	0.03
					·			
					5			
2.17	$0.5\sin x$	$7(1+\sin^2 x)$	$6(1+x^2)$	0	2	4	0	0.05
2.18	$0.4\sqrt{1+x^2}$	$4(1+x^2)$	$20e^{-x}$	0	2	0	0	0.05
					·			
					5			
2.19	$0.3\sqrt{4-x^2}$	$5(1+x^2)$	$8e^{0.5x}$	0	2	-1	3	0.1
2.20	$0.5/(1+x^2)$	$7(1+\sin^2 x)$	$20/(1+0.5x^2)$	0	1	2	-1	0.005
					·			
					5			
2.21	$\sin x$	$4(1+x^2)$	$6e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.05
2.22	$\sin x$	$6\sqrt{1+x^2}$	$7(1+\sin^2 x)$	0	2	0	0	0.05
2.23	$\cos(x)$	$5(1+\cos^2 x)$	$10/(1+0.5x^2)$	0	1	5	0	0.05

					·			
					5			
2.24	$\cos(x)$	$5(1 + \sin^2 x)$	$4e^{0.5x}$	0	2	0	4	0.02
2.25	e^{-x}	$8(1 + \sin^2 x)$	$20 - x^2$	1	3	0	0	0.01
2.26	$0.5e^x$	$5(1 + \sin^2 x)$	10	0	1	1	4	0.02
2.27	$2/(1+x^2)$	$2 - x$	$e^{1.5x}(1+x^2)$	0	2	2	5	0.05
2.28	$\ln(1+x)$	$5/(1+x)$	$5/(1+x)$	0	2	5	0	0.05
2.29	$5\sin x$	$5(1+x^2)$	$5e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.2
2.30	$0.5\sqrt{1+x^2}$	$5(1+x^2)$	$10e^{-x}$	0	2	0	0	0.2
					·			
					5			

Таблица к задаче 3

№	1.1. Задача	ε	№	1.2. Задача	ε
3.1	$u'' - xu' + 0.2u = x + 1$ $u(0.9) - 0.5u'(0.9) = 2$ $u(2.9) = 1$	0.04	10.3.11	$u'' + u' + 2xu = x^2 + 1$ $u(0.3) + 0.5u'(0.3) = 3$ $u(2.7) = 1$	0.03
3.2	$u'' - 0.5xu' + u = 2$ $u(0.4) = 1.2$ $u(1.4) + 2u'(1.4) = 3.2$	0.005	10.3.12	$u'' - xu = 2x$ $u(1.5) - 2u'(1.5) = 4.5$ $u'(3.5) = 3$	0.1
3.3	$u'' - 0.5u' + 0.5xu = 2x$ $u'(1) = 0.5$ $2u(3) - u'(3) = 2$	0.05	10.3.13	$u'' + xu' - u = x$ $u'(3) = 6$ $u(4) + u'(4) = 2$	0.1
3.4	$u'' - xu' + 2xu = 2.8$	0.07	10.3.14	$u'' - u'/x + u = 2x$	0.05

	$u(1.2) - 0.2u'(1.2) = 0.2$ $u'(2.2) = 4$			$u(1.5) + 0.5u'(1.5) = 1.5$ $u'(4.5) = 5$	
3.5	$u'' - u' + 2x^2u = x + 1$ $u(1.3) = 1$ $u(2.4) + u'(2.4) = 3.2$	0.1	10.3.15	$u'' - xu' + 2xu = x^2 + 1$ $u(1.2) + 10u'(1.2) = 2.2$ $u(3.6) = 1$	0.03
3.6	$u'' - 4xu' + 5u = 2x$ $u'(2) = 0$ $u(4) - 3u'(4) = 2$	0.07	10.3.16	$u'' - \cos(x^2)u = 2x + 1$ $u'(1) - 3u(1) = 1$ $u(3) = 10$	0.02
3.7	$u'' - 3u' + 8xu = 8$ $u(1.8) - 0.5u'(1.8) = 2$ $u(3.8) = 5$	0.1	10.3.17	$u'' + u' - x^2u = 2$ $u(1) + 0.5u'(1) = 2$ $u(4) = 4$	0.02
3.8	$u'' - 6xu' + 0.5u = -3$ $u(2.2) + 0.1u'(2.2) = 0.2$ $u'(4.2) = 4$	0.03	10.3.18	$u'' - 5u = e^x$ $u'(2) = 0$ $u(4) = 2$	0.2
3.9	$u'' - 1.5u' - 5xu = 0.5$ $2u(1.3) - 0.5u'(1.3) = 1$ $u(3.9) = 4$	0.05	10.3.19	$u'' + 2u' - 1.5xu = 2/x$ $u'(0.8) = 1$ $u(3.8) + 2u'(3.8) = 1$	0.1
3.10	$u'' - 3u'/x + xu = 3$ $u'(0.7) = 0.2$ $u'(3.6) + 20u(3.6) = 4$	0.03	10.3.20	$u'' - u'/4 + 2u/x = x/2$ $1.5u(1.3) - u'(1.3) = 0.6$ $u(2.6) = 2$	0.03

Таблица к задаче 5

№	a	b	c	$k(x)$		$q(x)$		$f(x)$
				$a < x < c$	$c < x < b$	$a < x < c$	$c < x < b$	
5.1	0	1.5	1.125	0.5	1.4	3.2	8.5	$8x^2(2-x)$
5.2	0	1.8	1.275	0.4	1.4	3.2	12	$8x(2-x^2)$

5.3	0	2.0	1.515	0.5	1.8	3.5	8.2	$10x(2.5 - x)$
5.4	0	2.3	1.875	0.4	1.8	3.5	12.8	$10x(1.2 - x^2)$
5.5	0	2.5	1.875	1.2	0.5	8.3	3.5	$9/(1 + 0.5x^2)$
5.6	0	2.8	1.875	1.2	0.4	8.3	2.8	$9/(2 + 0.3x^2)$
5.7	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$
5.8	0	1.5	0.925	1.5	0.4	7.5	12	$7e^{-x}$
10.5.9	0	1.7	0.925	1.8	0.4	7.0	12	$8x/(2 + x^3)$
5.10	0	2	1.125	1.8	0.6	6.5	7.8	$8x(2.5 - x)$
5.11	0	2.2	1.125	0.5	1.8	3.5	7.8	$10x^2(2.5 - x)$
5.12	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5 - 0.3x^2)$
5.13	0	2.7	1.815	0.5	1.2	5.6	12.3	$9(x + 1/(1 + x^3))$
5.14	0	3	1.815	0.3	1.2	5.6	10	$9x(3.5 - x)$
5.15	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5 - x)$
5.16	0	1.8	1.215	0.4	1.2	3.2	8.5	$8x(2 - x)$
5.17	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5 - 0.5x^2)$
5.18	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5 - x)$
5.19	0	2.5	1.725	0.5	1.5	3.5	12.08	$10x(1.3 - 0.2x^2)$
5.20	0	2.8	1.725	1.5	0.4	8.3	3.5	$9e^{-x}$
5.21	0	3.0	2.015	1.5	0.5	8.3	2.8	$8/(1 + x^2)$
5.22	0	1.5	0.925	1.2	0.4	8.3	12	$7(x + 1/(x + 0.5))$
5.23	0	1.7	0.925	1.2	0.5	7.5	12	$7e^{-x}$
5.24	0	2.0	1.215	1.8	0.4	7.0	12	$8x(2.5 - x)$
5.25	0	2.2	1.215	1.8	0.5	6.5	12	$8x(1.5 + 0.2x^2)$
5.26	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5 - 0.3x^2)$
5.27	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$

5.28	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5 - x)$
5.29	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5 - 0.5x^2)$
5.30	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5 - x)$

Указания к задаче 6

В задаче 6 взять входные данные $k(x)$, $f(x)$, ua , ub из задачи 1,

$$\phi(x) = (ub - ua)(x - a) / l + ua, \quad l = b - a.$$