Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

Н.В. Кван

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие

Благовещенск
2009

ББК22.143Я73
К32

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

Кван Н.В.

Линейные операторы. Учебное пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун - т., 2009.

Пособие разработано в помощь студентам 1-х курсов специальностей 010100 – математика, 010500 – прикладная математика и информатика 010701 – физика, изучающим дисциплины «Линейная алгебра и геометрия», «Геометрия и алгебра» и «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» в соответствии с содержанием Государственного образовательного стандарта и рабочих программ по теме «Линейные операторы». В пособии имеются теоретические сведения, решения типовых задач, упражнения для самостоятельного решения, вариант контрольной работы, контролирующий тест, индивидуальное задание.

Рецензент: к. физ.- мат. наук, доц. Н.В. Ермак, кафедра алгебры и геометрии БГПУ;

к. тех. наук, доц. Н.П. Семичевская, кафедра ИУС АмГУ.

1. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЕЙ

Будем рассматривать преобразования линейных (векторных) пространств.

Линейным преобразованием или линейным оператором линейного пространства V над полем P называется отображение φ множества V в себя

$\varphi : V \to V$, которое удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

2) $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

для любых $x, y \in V$ и $\lambda \in P$.

Вектор $\varphi(x)$ называется образом вектора x, а вектор x − прообразом вектора $\varphi(x)$.

Свойства линейных операторов

1. Всякое линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой вектор.

2. Условия 1) и 2) в определении линейного оператора эквивалентны одному условию:

$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$.

Примеры линейных отображений

1. Тождественный оператор ε, переводящий любой вектор *x* из пространства V в этот же вектор *x,* то есть $\varphi(x) = x$.

2. Нулевой оператор *0*, переводящий каждый вектор *x* из пространства V в нулевой вектор θ*,* то есть $\varphi(x) = \theta$.

3. Оператор подобия φ, который растягивает или сжимает каждый вектор пространства V в λ раз, то есть $\varphi(x) = \lambda x$.

4. Исходное пространство − множество векторов, исходящих из начала системы координат $OXYZ$. Преобразование φ в нем − ортогональное

проектирование векторов на некоторую плоскость π , проходящую через точку O.

5. Пусть V – конечномерное векторное пространство и $V = V_1 + V_2$ - разложение V в прямую сумму двух подпространств V_1 и V_2. Каждый вектор $x \in V$ имеет единственное представление в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$. Отображение φ пространства V, определяемое формулой $\varphi(x) = x_1$, является линейным.

6. Исходное пространство есть пространство многочленов $f(t)$ степени $\leq n$ с вещественными коэффициентами. Оператор φ в этом пространстве – дифференцирование:

$$\varphi(f(t)) = f'(t),$$

где $f'(t)$ - производная многочлена $f(t)$.

7. Исходное пространство $C(a,b)$. Функции $f(t) \in C(a,b)$ поставим в соответствие функцию

$$\varphi(f(t)) = \int_a^t f(\tau)d\tau .$$

8. В пространстве $V_{m\times n}$ матриц размера $m \times n$ с элементами из поля P соответствие каждой матрице транспонированной к ней является линейным отображением.

Задача 1. Доказать, что для фиксированного базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства V_n и произвольного набора его векторов $b_1, b_2, ..., b_n$ существует и притом только одно линейное преобразование пространства V_n, которое переводит векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, ..., b_n$

Решение. Для произвольного вектора x существует однозначное разложение по векторам базиса $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + ... + \zeta_n e_n .$$

Сопоставим вектору x вполне определенный вектор $\varphi(x)$ пространства V_n, представимый в виде:

$$\varphi(x) = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots \zeta_n b_n .$$

Это соответствие будет преобразованием пространства V_n. Если в качестве вектора x взять вектор

$$e_i = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 1 \cdot e_i + \ldots + 0 \cdot e_n ,$$

то в силу предыдущего равенства имеем:

$$\begin{aligned} &\varphi(e_i) = \varphi(0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 1 \cdot e_i + \ldots + 0 \cdot e_n) = \\ &= 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 1 \cdot b_i + \ldots + 0 \cdot b_n = b_i . \end{aligned}$$

Покажем, что преобразование φ является линейным. Для этого проверим выполнимость условий 1) и 2) из определения линейного преобразования.

Найдем образ суммы векторов x, y и образ произведения вектора x на число λ :

$$\begin{aligned} &\varphi(x + y) = \varphi((\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n) + (\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n)) = \\ &= \varphi((\zeta_1 + \eta_1) e_1 + (\zeta_2 + \eta_2) e_2 + \ldots + (\zeta_n + \eta_n) e_n) = \\ &= (\zeta_1 + \eta_1) b_1 + (\zeta_2 + \eta_2) b_2 + \ldots + (\zeta_n + \eta_n) b_n = \\ &= (\zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots + \zeta_n b_n) + (\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2 + \ldots + \eta_n b_n) = \varphi(x) + \varphi(y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda(\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n)) = \\ &= \varphi(\lambda \zeta_1 e_1 + \lambda \zeta_2 e_2 + \ldots + \lambda \zeta_n e_n = \\ &= \lambda \zeta_1 b_1 + \lambda \zeta_2 b_2 + \ldots + \lambda \zeta_n b_n = \\ &= \lambda(\zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots + \zeta_n b_n) = \lambda \varphi(x). \end{aligned}$$

Итак, условия линейности преобразования выполнены и искомое преобразование построено.

Покажем единственность этого преобразования. Пусть ψ другое линейное преобразование, отличное от φ , такое, что $\varphi(e_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, тогда в силу линейности преобразования φ имеем:

$$\begin{aligned} &\psi(x) = \psi(\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n) = \zeta_1 \psi(e_1) + \zeta_2 \psi(e_2) + \ldots + \zeta_n \psi(e_n) = \\ &= \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots + \zeta_n b_n = \varphi(x), \end{aligned}$$

то есть $\varphi = \psi$.

Таким образом, показано, что линейное преобразование φ пространства V_n вполне определяется заданием $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ образов векторов какого-либо базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пусть V_n – линейное пространство с фиксированным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Векторы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ задаются своими координатами:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ \varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из координатных столбцов преобразованных базисных векторов, называется матрицей линейного преобразования φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Таким образом, при фиксированном базисе всякому линейному преобразованию φ пространства V_n соответствует единственная матрица A с элементами из поля P.

Обратно, пусть дана квадратная матрица A порядка n с элементами из поля P. Пользуясь матрицей A, при фиксированном базисе $\{e\}$ по формулам, приведенным выше, найдем векторы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$. Выбором этих векторов вполне определяется линейное преобразование φ пространства V_n. Очевидно, что матрицей этого преобразования в базисе $\{e\}$ является матрица A.

В итоге, при фиксированном базисе пространства V_n имеем взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями в V_n и квадратными матрицами порядка n с элементами из поля P. Это позволяет говорить, что линейное преобразование задается матрицей A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Полученное взаимно однозначное соответствие между множествами линейных преобразований в V_n и матриц существенно зависит от базиса.

Выясним, как выражаются координаты вектора-образа $\varphi(x)$ через координаты данною вектора x, если преобразование φ задано матрицей A в базисе $\{e\}$.

Если какой-либо вектор $x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n$ из пространства V_n, то верно

$$\begin{aligned}
y &= \varphi(x) = \varphi(\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n) = \\
&= \zeta_1 \varphi(e_1) + \zeta_2 \varphi(e_2) + \ldots + \zeta_n \varphi(e_n) = \\
&= \zeta_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \ldots + a_{n1} e_n) + \\
&+ \zeta_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \ldots + a_{n2} e_n) + \ldots + \\
&+ \zeta_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \ldots + a_{nn} e_n) = \\
&= (a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n) e_1 + \\
&+ (a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n) e_2 + \ldots + \\
&+ (a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n) e_n
\end{aligned}$$

Обозначив через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ координаты вектора $y = \varphi(x)$ в базисе $\{e\}$, получаем:

$$\begin{cases}
\eta_1 = a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n, \\
\eta_2 = a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n, \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_n = a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n.
\end{cases}$$

Вводя матричные обозначения

$$X = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

для столбцов координат данного вектора x и его образа $\varphi(x)$, получаем матричную запись последней системы равенств:

$$Y = AX.$$

Таким образом, при фиксированном базисе столбец координат преобразованного вектора получается умножением матрицы A линейного преобразования φ на столбец координат данного вектора.

Задача 2. Найти матрицу линейного оператора

$\varphi(x) = (-3x_1 + 2x_3, 4x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3)$

в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ и образ вектора $a = (1, -3, 6)$ при данном отображении.

Решение. Для того чтобы составить матрицу линейного оператора $\varphi(x)$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, найдем образы базисных векторов:

$$\varphi(e_1) = (-3 \cdot 1 + 2 \cdot 0, 4 \cdot 0 - 0, 2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = (-3, 0, 0),$$

$$\varphi(e_2) = (-3 \cdot 0 + 2 \cdot 0, 4 \cdot 1 - 0, 2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot 0) = (0, 4, 1),$$

$$\varphi(e_3) = (-3 \cdot 0 + 2 \cdot 1, 4 \cdot 0 - 1, 2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 1) = (2, -1, -3).$$

Затем составим матрицу из координатных столбцов преобразованных базисных векторов:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрица A является искомой матрицей линейного оператора в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Найдем образ вектора $a = (1, -3, 6)$ при действии оператора φ, заданного матрицей A. Для этого умножим матрицу A слева на координатный столбец вектора a:

$$\varphi(a) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 0 + 12 \\ 0 - 12 - 6 \\ 0 - 3 - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Доказать линейность и найти матрицу линейного оператора φ – проектирования на плоскость OYZ прямоугольной системы координат в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ пространства векторов, исходящих из начала координат.

Решение. Так как проекция суммы векторов равна сумме их проекций, следовательно, выполняется первое условие линейности оператора $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Если вектор умножить на произвольное действительное число, то его проекция также умножится на это число, то есть выполняется второе условие линейности оператора $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$. Таким образом, операция ортогонального проектирования будет линейным оператором пространства V_3.

Найдем матрицу A преобразования φ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\varphi(\vec{i}) = \theta = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k},$$

$$\varphi(\vec{j}) = \vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k},$$

$$\varphi(\vec{k}) = \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдем матрицу A' оператора ортогонального проектирования на плоскость OXY в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \ \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$:

$$\varphi(\vec{i}) = \theta = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k},$$

$$\varphi(\vec{j}) = \vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k},$$

$$\varphi(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = \varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j}) - \varphi(\vec{k}) = 0\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Известно, что

$a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (-1, 0, 0)$;

$b_1 = (3, 5, 7)$, $b_2 = (1, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 1)$ –

векторы линейного пространства R_3, заданные своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу линейного оператора φ, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3.

Решение. Система векторов a_1, a_2, a_3 – линейно независимая, так как является лестничной. Тогда, следуя задаче 1, существует единственное отображение φ, переводящее векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3.

Для нахождения матрицы отображения φ в базисе e_1, e_2, e_3 необходимо образы базисных векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ линейно выразить через векторы базиса e_1, e_2, e_3. Сначала выразим векторы e_1, e_2, e_3 через векторы a_1, a_2, a_3. По условию каждый вектор первой системы представим в виде:

$$a_1 = e_1 - e_2 + e_3,$$

$$a_2 = e_1 + e_2,$$

$$a_3 = -e_1.$$

Откуда векторы базиса e_1, e_2, e_3 имеют вид:

$$e_1 = -a_3,$$

$$e_2 = a_2 + a_3,$$

$$e_3 = a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Найдем образы базисных векторов:

$$\varphi(e_1) = -\varphi(a_3) = -b_3 = -e_2 - e_3,$$

$$\varphi(e_2) = \varphi(a_2) + \varphi(a_3) = b_2 + b_3 = e_1 + e_2 + e_3,$$

$$\varphi(e_3) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) + 2\varphi(a_3) = b_1 + b_2 + 2b_3 =$$
$$= 3e_1 + 5e_2 + 7e_3 + e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 4e_1 + 7e_2 + 9e_3.$$

Следовательно, матрица отображения φ в базисе e_1, e_2, e_3, состоящая из координатных столбцов векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Если A и A' – матрицы линейного преобразования φ пространства V_n соответственно в базисах $\{e\}$ и $\{e'\}$, T – матрица перехода от базиса $\{e\}$ к $\{e'\}$, то справедливо равенство

$$A' = T^{-1}AT.$$

Действительно, если векторы x и $y = \varphi(x)$ имеют в базисе $\{e\}$ координатные столбцы X и Y соответственно, а в базисе $\{e'\}$ – X' и Y' соответственно, то справедливы равенства

$$Y = AX \text{ и } Y' = AX'.$$

С другой стороны,

$$Y = TY', \quad X = TX'.$$

Тогда

$$Y' = T^{-1}Y = T^{-1}(AX) = T^{-1}(A(TX')) = (T^{-1}AT)X',$$

то есть

$$Y' = (T^{-1}AT)X'.$$

Следовательно,

$$A' = T^{-1}AT.$$

Из полученной формулы следует утверждение: ранг матрицы линейного преобразования φ пространства V_n не изменяется при переходе от одного базиса к другому.

Задача 5. Линейный оператор φ в базисе $e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (2, 1, 0), e_3 = (-3, 2, 4)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A' этого оператора в базисе $e'_1 = (2, 1, 1), e'_2 = (3, 2, 1), e'_3 = (0, 0, 1)$.

Решение.

Для нахождения матрицы A' сначала построим матрицу T перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$. Для этого составим и решим следующие векторные уравнения:

$$\begin{cases} e'_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \tau_{31}e_3, \\ e'_2 = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \tau_{32}e_3, \\ e'_3 = \tau_{13}e_1 + \tau_{23}e_2 + \tau_{33}e_3. \end{cases}$$

Используя координатные равенства, получим:

$$\begin{cases} 2 = \tau_{11} + 2\tau_{21} - 3\tau_{31}, \\ 1 = \tau_{21} + 2\tau_{31}, \\ 1 = \tau_{11} + 4\tau_{31}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = \tau_{12} + 2\tau_{22} - 3\tau_{32}, \\ 2 = \tau_{22} + 2\tau_{32}, \\ 1 = \tau_{12} + 4\tau_{32}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \tau_{13} + 2\tau_{23} - 3\tau_{33}, \\ 0 = \tau_{23} + 2\tau_{33}, \\ 1 = \tau_{13} + 4\tau_{33}; \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 7 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 11 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/11 & 2/11 & 1/11\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 25/11 & 39/11 & 3/11\\ 0 & 1 & 0 & 9/11 & 18/11 & -2/11\\ 0 & 0 & 1 & 1/11 & 2/11 & 1/11\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 7/11 & 3/11 & 7/11\\ 0 & 1 & 0 & 9/11 & 18/11 & -2/11\\ 0 & 0 & 1 & 1/11 & 2/11 & 1/11\end{array}\right).$$

Таким образом, матрица T перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$ имеет вид:

$$T=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7 & 3 & 7\\ 9 & 18 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

а ее обратная матрица T^{-1} представима в виде:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -12\\ -1 & 0 & 7\\ 0 & -1 & 9\end{pmatrix}.$$

Теперь применяя формулу $A'=T^{-1}AT$, получим искомую матрицу:

$$A'=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}2 & 1 & -12\\ -1 & 0 & 7\\ 0 & -1 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3 & 7\\ 9 & 18 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-126 & -186 & -49\\ 102 & 149 & 30\\ 120 & 163 & 54\end{pmatrix}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

1. Выяснить, будет ли отображение φ линейного вещественного пространства в себя линейным, если:

а) $\varphi(x)=-3x$ для всякого вектора $x\in V$;

б) для всякого вектора $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ его образ имеет вид:

$$\varphi(x)=(x_1-8x_2+x_3,2x_1-x_2-x_3,x_1+x_2);$$

в) для всякого вектора $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ его образ имеет вид:

$$\varphi(x)=(x_1-k,x_2+k,x_3-k),$$

где $k \in R$ – фиксированное число;

г) для всякого вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ его образ имеет вид:

$$\varphi(x) = (x_1 - x_3, x_2^2, x_3 + x_1).$$

2. Покажите, что отображение φ пространства вещественных функций, определённых и непрерывных на отрезке $[a, b]$, ставящее в соответствие каждой функции $f(x)$ из этого пространства функцию $\int\limits_a^x f(x)dx$, является линейным.

3. Известно, что

$$a_1 = (0, 0, 1),\ a_2 = (0, 1, 1),\ a_3 = (1, 1, 1);$$

$$b_1 = (2, 3, 5),\ b_2 = (1, 0, 0),\ b_3 = (0, 1, -1) \text{ —}$$

векторы линейного пространства V, заданные своими координатами в базисе

e_1, e_2, e_3. В том же базисе найдите матрицу линейного отображения φ, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3.

4. а) Покажите, что в трёхмерном пространстве V_3 геометрических векторов, исходящих из начала координат *O*, ортогональное проектирование φ на некоторую плоскость, проходящую через точку *O*, является линейным отображением пространства в себя.

б) Пусть φ — ортогональное проектирование пространства V_3 на плоскость *ХОУ* прямоугольной системы координат, а e_1, e_2, e_3 — векторы, направленные по осям координат. Найдите матрицу φ в базисе e_1, e_2, e_3 и в базисе

$$e_1' = e_1,\ e_2' = e_2,\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3,$$

а также образ вектора $x = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ двумя способами:

1) исходя непосредственно из определения φ;

2) по формуле $Y = A \cdot X$, где A — матрица φ в каком-либо базисе, а X и Y — столбцы координат векторов x и $y = \varphi(x)$ в том же базисе.

5. Пусть φ — ортогональное проектирование трёхмерного пространства V_3 на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы коорди-

нат, а e_1, e_2, e_3 — единичные векторы, направленные по осям координат. Найдите матрицу линейного отображения φ в базисе e_1, e_2, e_3.

6. Докажите, что если e_1, e_2, e_3 — векторы, направленные по осям пространственной системы координат, то проектирование трёхмерного пространства на координатную ось вектора e_1 параллельно координатной плоскости векторов e_2 и e_3 является линейным отображением. Найдите его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3.

7. Покажите, что отображение φ пространства R_3 в себя, переводящее любой вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi(x) = (-4x_2 + x_3, 5x_1 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3)$, является линейным. Найдите его матрицу в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

8. Пусть

$$a_1 = (2, 0, 3),\ a_2 = (4, 1, 5),\ a_3 = (3, 1, 2),$$

$$b_1 = (1, 2, -1),\ b_2 = (4, 5, -2),\ b_3 = (1, -1, 1) \text{ —}$$

векторы линейного пространства L, заданные своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Определите, существует ли линейное отображение, переводящее векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3, и если существует, то найдите его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3.

9. Докажите, что если линейное отображение φ пространства R^n переводит линейно независимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то матрица A_e этого отображения в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ равна $B \cdot A^{-1}$, где столбцы матриц B и A состоят соответственно из координат векторов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

10. Линейное отображение пространства R^4 переводит векторы $a_1 = (0, 1, -1, 2)$, $a_2 = (1, 2, -3, 1)$, $a_3 = (0, 0, 0, 1)$, $a_4 = (-2, 0, 1, -1)$ соответственно в векторы $b_1 = (7, 6, -11, -10)$, $b_2 = (0, 7, -8, 1)$, $b_3 = (4, 2, -3, -6)$, $b_4 = (-1, 3, -3, 9)$. Найдите матрицу этого отображения в базисе a_1, a_2, a_3, a_4.

11. Докажите, что если $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — некоторая матрица из линейного пространства M_2 квадратных матриц порядка 2 над полем P, то отображения

φ_1 и φ_2 пространства M_2, определяемые формулами $\varphi_1(A) = A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и

$\varphi_2(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot A$, являются линейными. Найдите матрицы этих отображений

в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Докажите, что если $a = (1, 2, 3)$ — вектор из евклидова пространства R^3 над полем R и для любого $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ $\varphi(x) = (x, a) \cdot a = (3x_1 + 2x_2 + x_3) \cdot a$, то отображение φ является линейным. Найдите его матрицу:

а) в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

б) в базисе $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (2, 0, -1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$.

13. Линейное отображение φ пространства L задано в некотором базисе e_1, e_2, e_3 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что система векторов $a_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $a_2 = -e_1 - 2e_2$, $a_3 = 2e_2 + e_3$ составляет базис пространства L, и найдите матрицу B отображения φ в этом базисе.

14. Линейное отображение φ в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого отображения в базисе:

а) e_2, e_1, e_3, e_4;

б) $a_1 = e_1$, $a_2 = e_1 + e_2$, $a_3 = e_2 + e_3$, $a_4 = e_3 + e_4$;

в) $b_1 = e_1$, $b_2 = 3e_1 + e_2$, $b_3 = -5e_1 + 2e_2 + e_3$, $b_4 = 7e_1 - 3e_2 + 2e_3 + e_4$.

15. Линейное отображение φ пространства R^3 в базисе $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу B того же отображения в базисе $b_1 = (2, 3, 5)$, $b_2 = (0, 1, 2)$, $b_3 = (1, 0, 0)$.

16. Пусть φ — линейное отображение в себя пространства F_4 многочленов степени ≤ 3 над R, переводящее каждый многочлен в его производную. Найдите матрицу этого отображения в базисе:

а) $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$;

б) $e_1 = 1$, $e_2 = \frac{x}{1!}$, $e_3 = \frac{x^2}{2!}$, $e_4 = \frac{x^3}{3!}$;

в) $e_1 = 1$, $e_2 = 1+x$, $e_3 = 1+x+x^2$, $e_4 = 1+x+x^2+x^3$;

г) $e_1 = 1$, $e_2 = 1-x$, $e_3 = 1-x-x^2$, $e_4 = 1-x-x^2-x^3$.

2. ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ И МАТРИЦАМИ

Пусть даны линейные преобразования φ и ψ, действующие в линейном пространстве R_n. Два преобразования φ_1 и φ_2 считаются равными, если для любого вектора $x \in R_n$ будет $\varphi_1 x = \varphi_2 x$.

Суммой линейных преобразований φ и ψ называется преобразование $\varphi+\psi$, которое ставит в соответствие вектору x вектор $\varphi x + \psi x$, то есть

$$(\varphi+\psi)x = \varphi x + \psi x.$$

Нетрудно показать, что преобразование $\varphi+\psi$ является линейным. При этом матрица преобразвания $\varphi+\psi$ в некотором базисе равна сумме матриц каждого оператора в этом же базисе.

Произведением линейного преобразования φ на число $\lambda \in P$ называется преобразование $\lambda\varphi$, определяемое равенством

$$(\lambda\varphi)x = \lambda(\varphi x).$$

Преобразование $\lambda\varphi$ также является линейным. При этом матрица преобразвания $\lambda\varphi$ в некотором базисе равна произведению матрицы оператора на число λ в этом же базисе.

Произведением линейных преобразований φ и ψ называется преобразование, обозначаемое через $\varphi\psi$ и состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования ψ, а затем преобразования φ.

Следуя этому определению, справедливо равенство:

$$(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x).$$

Аналогично, преобразование $\varphi\psi$ является линейным. При этом матрица преобразвания $\varphi\psi$ в некотором базисе равна произведению матриц каждого оператора в этом же базисе.

Сложение и умножение линейных преобразований пространства V_n обладают свойствами:

1. $\varphi + \psi = \psi + \varphi$;
2. $(\varphi + \psi) + \omega = \varphi + (\psi + \omega)$;
3. $(\varphi\psi)\omega = \varphi(\psi\omega)$;
4. $(\varphi + \psi)\omega = \varphi\omega + \psi\omega$,

   $\omega(\varphi + \psi) = \omega\varphi + \omega\psi$.

Множество линейных преобразований пространства V_n над полем P образует кольцо, изоморфное кольцу квадратных матриц порядка n с элементами из поля P.

Изоморфизм позволяет перенести свойства матриц на линейные преобразования. Однако на основании того же изоморфизма можно свойства линейных преобразований переносить на матрицы линейных операторов.

Задача 1. Пусть в линейном пространстве R_3 заданы линейные операторы φ и ψ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$: $\varphi(x) = (2x_1 - x_2; 2x_2 - 3x_3; -4x_1)$ и $\psi(x) = (x_1 + x_2; 5x_2 - x_3; 0)$. Найти их матрицы A и B соответственно в том же базисе и вычислить образ вектора $x = (3; -5; -1)$ при преобразовании $-2\varphi + \psi^2$.

Решение. Для нахождения матрицы A отображения φ в базисе e_1, e_2, e_3 найдем образы базисных векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$:

$$\varphi(e_1) = (2\cdot 1 - 0, 2\cdot 0 - 3\cdot 0, -4\cdot 1) = (2, 0, -4),$$

$$\varphi(e_2) = (2\cdot 0 - 1, 2\cdot 1 - 3\cdot 0, -4\cdot 0) = (-1, 2, 0),$$

$$\varphi(e_3) = (2\cdot 0 - 0, 2\cdot 0 - 3\cdot 1, -4\cdot 0) = (0, -3, 0).$$

Следовательно, матрица A линейного преобразования φ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения матрицы B отображения ψ в базисе e_1, e_2, e_3 найдем образы базисных векторов $\psi(e_1)$, $\psi(e_2)$, $\psi(e_3)$:

$$\psi(e_1) = (1 + 0, 5\cdot 0 - 0, 0) = (1, 0, 0),$$

$$\psi(e_2) = (0 + 1, 5\cdot 1 - 0, 0) = (1, 5, 0),$$

$$\psi(e_3) = (0 + 0, 5\cdot 0 - 1, 0) = (0, -1, 0).$$

Следовательно, матрица B линейного преобразования ψ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, найдем матрицу преобразования $-2\varphi + \psi^2$, выполняя соответствующие действия над матрицами A и B.

$$-2A + B^2 = -2\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 25 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 0 & 21 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения координатного столбца образа вектора $x = (3; -5; -1)$ умножим полученную матрицу слева на координатный столбец вектора x:

$$(-2\varphi + \psi^2)(x) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 0 & 21 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -106 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Пусть преобразование φ в базисе $a_1 = (1; 2)$ $a_1 = (-1; 1)$ имеет матрицу $A_a = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $b_1 = (3;-1)$, $b_2 = (2;5)$ имеет матрицу $B_b = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2.

Решение. Сначала найдем матрицу линейного оператора φ в базисе b_1, b_2, используя формулу $A_b = T^{-1}A_aT$, где матрица T есть матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2. Для нахождения матрицы T выразим векторы b_1, b_2 через векторы a_1, a_2:

$$b_1 = (3;-1) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = (\lambda_1 - \lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 3, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = -1, \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3},\ \ \lambda_2 = -\frac{7}{3},\ \ b_1 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{7}{3}a_2;$$

$$b_2 = (2;5) = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = (\mu_1 - \mu_2; 2\mu_1 + \mu_2),$$

$$\begin{cases} \mu_1 - \mu_2 = 2, \\ 2\mu_1 + \mu_2 = 5, \end{cases}$$

$$\mu_1 = \frac{7}{3},\ \ \lambda_2 = \frac{1}{3},\ \ b_2 = \frac{7}{3}a_1 + \frac{1}{3}a;$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_b = T^{-1}A_aT = -\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} 120 & -141 \\ -282 & 288 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2, сложив матрицы A_b и B_b

$$A_b + B_b = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} 120 & -141 \\ -282 & 288 \end{pmatrix} + \frac{1}{51}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} -112 & 145 \\ 287 & -286 \end{pmatrix}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

1. Пусть в линейном пространстве R_3 заданы линейные операторы в некотором базисе:
$\varphi(x) = (x_2 - 2x_1; -3_1 + 0{,}5x_2 - 5x_3; x_1 - x_2 + x_3)$ и $\psi(x) = (x_1 + 6x_2; 2x_1 - x_3; 0)$. Найти их матрицы A и B соответственно в том же базисе и вычислить образ вектора $x = (3; -5; -1)$ при данном преобразовании:

а) $-4A$;

б) $A - B$;

в) $(-2A + 3B^3)x$.

2. Линейное отображение φ пространства R^2 в базисе $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (1, 1)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

а линейное отображение ψ пространства R^2 в базисе $b_1 = (5, 2)$, $b_2 = (1, 0)$ имеет матрицу

$$B_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & 3{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицы отображений $\varphi + \psi$ и $\varphi \cdot \psi$ в базисе b_1, b_2.

3. Линейное отображение φ пространства R^2 в базисе $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а линейное отображение ψ в базисе $b_1 = (3, 1)$, $b_2 = (4, 2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу линейного отображения $2\varphi - \psi$ в базисе b_1, b_2.

4. Линейное отображение φ в базисе $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а линейное отображение ψ в базисе $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ име-

ет матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу отображения $\varphi^2 \cdot \psi$ в том базисе, в котором даны координаты векторов a_1, a_2, b_1, b_2.

5. Пусть φ − оператор дифференцирования в пространстве

$$L = L(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x).$$

Найдите в базисе $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$ матрицу оператора φ^3.

3. ЯДРО И ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Среди линейных преобразований векторных пространств особое место занимают взаимнооднозначные преобразования.

Линейное преобразование φ пространства V_n взаимно однозначно тогда и только тогда, когда его матрица в каком-нибудь базисе невырожденная.

Линейное преобразование φ пространства V_n называют обратимым (или невырожденным), если существует такое линейное преобразование ψ, что справедливо равенство

$$\psi\varphi = \varphi\psi = \varepsilon,$$

где ε − тождественное преобразование.

Очевидно, что если какое-либо преобразование ψ удовлетворяет последнему равенству, то оно единственно, линейно и невырожденно. Это преобразование называется обратным для преобразования φ и обозначается через φ^{-1}, так что

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \varepsilon.$$

Линейное преобразование φ пространства V_n обратимо тогда и только тогда, когда оно в каком-либо базисе задается невырожденной матрицей A. При этом обратное преобразование определяется матрицей A^{-1}.

Пусть φ − линейное преобразование пространства V_n. Совокупность векторов $y = \varphi(x)$ для всех $x \in V_n$ называется областью значений преобразования φ и обозначается φV_n или $\operatorname{Im}\varphi$. Множество $\operatorname{Im}\varphi$ есть подпространство линейного пространства V_n.

Ранг матрицы линейного преобразования пространства V_n не зависит от выбора базиса в нем, а зависит только от самого преобразования.

Рангом линейного преобразования φ пространства V_n называется ранг его матрицы.

Размерность подпространства $\operatorname{Im}\varphi$ равна рангу преобразования φ, то есть

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = rang\varphi .$$

Для невырожденных преобразований φ значение ранга равно размерности самого пространства V_n.

Если преобразование вырожденное, то $rang\varphi < n$, в этом случае преобразование φ переводит пространство V_n в его часть $\operatorname{Im}\varphi$ размерности $\leq n-1$.

Наряду с областью значений важной характеристикой линейного преобразования является так называемое ядро линейного преобразования.

Ядром линейного преобразования φ пространства V_n называется множество всех векторов, отображаемых преобразованием φ в нулевой вектор. Ядро преобразования φ обозначается через $Ker\varphi$:

$$Ker\varphi = \{x : \varphi(x) = \theta\}.$$

Легко доказать, что множество $Ker\varphi$ является подпространством пространства V_n.

Размерность ядра преобразования φ пространства V_n равна разности размерности пространства V_n и ранга преобразования φ, то есть

$$\dim Ker\varphi = \dim V_n - rang\varphi .$$

Для того чтобы линейное преобразование пространства V_n было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы ядро этого преобразования было нулевым.

Задача 1. Найти область значений, ядро, ранг и дефект линейного оператора φ пространства R^4, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 11 & -2 \\ -5 & 3 & -13 & 1 \\ 7 & -2 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Решение. По определению областью значений линейного оператора φ пространства R^4 является подпространство L, натянутое на векторы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$, координатные столбцы которых являются столбцами матрицы A. Для отыскания базиса подпространства L, выделим максимально независимую систему векторов среди векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -51 & 57 & -60 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \end{pmatrix};$$

$$L = L\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)\} = L\{\varphi(e_1), \varphi(e_2)\} = \mathrm{Im}\varphi .$$

Так как ранг матрицы A равен 2, а значит и размерность области значения линейного оператора φ равна 2, то ранг оператора φ тоже равен 2.

Для нахождения ядра линейного оператора φ, следуя определению, решим матричное уравнение

$$AX = 0$$

или

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 11 & -2 \\ -5 & 3 & -13 & 1 \\ 7 & -2 & 16 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 0, \\ -5x_1 + 3x_2 - 13x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 16x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 11 & -2 \\ -5 & 3 & -13 & 1 \\ 7 & -2 & 16 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 7 & -9 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & -9 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & 17 & -17 & 34 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 0, \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Для полученной системы уравнений найдем фундаментальную систему решений, приняв переменные x_1 и x_2 за базисные, а переменные x_3 и x_4 –за свободные. Тогда если $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, то $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, и если $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -2$. Таким образом, ядро линейного оператора с матрицей A можно представить в виде линейной оболочки, натянутой на найденные фундаментальные решения последней системы:

$$Ker\varphi = \{\lambda(-2;1;1;0) + \mu(-1;-2;0;1), \forall \lambda, \mu \in R\}.$$

При этом размерность ядра равна 2 ($Ker\varphi = 2$), следовательно, и дефект преобразования φ тоже равен 2 ($def\varphi = 2$).

Задача 2. Найти ядро, ранг и область значений линейного оператора φ пространства M_2 вещественных матриц 2-го порядка, если φ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 11 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Областью значений линейного оператора φ пространства M_2 является линейная облочка, натянутая на векторы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$, cooринатные столбцы которых являются столбцами матрицы A.

Приводя матрицу A к трапециевидной форме, имеем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 11 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 26 & 17 & -1 \\ 0 & 26 & 17 & -1 \\ 0 & 26 & 17 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 26 & 17 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда ранг матрицы A, а значит, и ранг отображения φ равен 2.

Следовательно, базис подпространства $\varphi(M_2)$ состоит из двух векторов. Если заметить, что первые два столбца матрицы A непропорциональны, то за базис $\varphi(M_2)$ можно принять векторы $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$:

$$\varphi(e_1) = -e_1 + 5e_2 + 4e_3 + 3e_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_2) = 5e_1 + e_2 + 6e_3 + 11e_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 22 & 17 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\varphi(M_2) = \left\{ x : x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 22 & 17 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in R \right\}.$$

Ядро отображения φ соответствует пространству решений системы уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ \quad 26x_2 + 17x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений:

при $x_3 = 26, \quad x_4 = 0$ имеем $x_1 = -7, \quad x_2 = -17$,

а при $x_3 = 0, \quad x_4 = 26$ имеем $x_1 = -21, \quad x_2 = 1$.

Тогда базисные векторы ядра могут быть представлены:

$$a_1 = -7e_1 - 17e_2 + 26e_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17 & -17 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 26 \\ 26 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 9 \\ 19 & 26 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = -21e_1 + e_2 + 26e_4 = \begin{pmatrix} -21 & 0 \\ -21 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 26 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$Ker\varphi = \left\{ x : x = \lambda_1 \begin{pmatrix} -24 & 9 \\ 19 & 26 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in R \right\}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

1. Найти ядро и область значений линейного отображения φ пространства R^3, если φ задано формулой $\varphi(x) = 4x$.

2. Линейное отображение φ пространства L задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе $e_1, e_2, e_3,\ e_4$. Найти ядро и дефект отображения φ .

3. Найти область значений, ранг, ядро и дефект линейного отображения φ пространства M_2 вещественных матриц порядка 2 над полем *R,* если φ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

выяснить, принадлежит ли вектор

$$y = \begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

из пространства M_2 подпространству $Ker\ \varphi$.

4. Линейное отображение φ пространства M_2 квадратных матриц порядка 2 над полем R задано в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти для вектора

$$x_0 = -e_1 + 2e_2 + 4e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

его образ $y_0 = \varphi(x_0)$ и полный прообраз вектора y_0.

5. Доказать, что линейное отображение φ n-мерного линейного пространства L над полем P взаимно однозначно тогда и только тогда, когда ядро отображения φ является нулевым подпространством.

6. Исходя из геометрических соображений, найти ядро, дефект, область значений и ранг линейного отображения φ −ортогонального проектирования на плоскость OXY пространства R_3.

7. Чему равен дефект линейного отображения φ пространства R^3, если φ в некотором базисе задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Является ли φ взаимно однозначным отображением пространства R^3 на себя?

8. Найти матрицу, образ и ядро линейного отображения φ пространства R^3 в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, если известно, что оно любой вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ переводит в вектор:

а) $\varphi(x) = (-x_1, -x_2, 3x_3)$;

б) $\varphi(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, 0)$.

4. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть φ линейное преобразование пространства V. Подпространство L пространства V называется инвариантным относительно преобразования φ если для всех $x \in L$ выполняется $\varphi(x) \in L$.

В случае инвариантности подпространства L можно говорить о линейном преобразовании φ_1 с областью определения L. Преобразование φ_1 называется индуцированным преобразованием. Если $x \in L$, то $\varphi(x) = \varphi_1(x)$; если же $x \notin L$, то φx существует, а $\varphi_1 x$ не определено. Различие преобразований φ и φ_1 состоит лишь в различии между их областями применения.

Примеры инвариантных подпространств:

1. Нуль-подпространство, состоящее из одного вектора θ, и само пространство R инвариантны относительно любого преобразования в R.

2. В пространстве V_3 выполняется некоторый поворот φ вокруг оси l, проходящей через точку O. Подпространствами, инвариантными относительно φ, будут:

а) совокупность векторов, лежащих на оси l;

б) совокупность векторов, лежащих в плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной оси l.

3. R_n − пространство многочленов $f(t)$ степени $\leq n-1$. Преобразование φ, переводящее любой многочлен в его производную, является линейным. Пусть k - натуральное число, причем $k \leq n-1$. Тогда подпространство всех многочленов степени $\leq k$ будет инвариантным относительно преобразования φ.

Задача 1. В пространстве R^3 линейный оператор φ переводит произвольный вектор $a = (x, y, z)$ в вектор:

а) $\varphi(a) = (x, 0, 0)$;

б) $\varphi(x) = (-2x, y, z)$.

Дать геометрическую интерпретацию заданных отображений и найти инвариантные подпространства для каждого оператора.

Решение. а) Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $OXYZ$. Будем понимать каждый набор (x, y, z) как вектор, исходящий из начала координат в точку с координатами x, y, z. Все одномерные и двумерные подпространства R^3 тогда будут центральными (проходящими через начало координат) прямыми и плоскостями, а отображение φ будет обозначать проектирование векторов на ось OX. Поэтому все векторы, лежащие на этой оси, будут переходить в себя, то есть образовывать инвариантное одномерное подпространство. Наряду с ними одномерными инвариантами являются и все центральные прямые плоскости OYZ. Двумерными инвариантными подпространствами в этом случае являются плоскость OYZ и все плоскости, проходящие через прямую OX.

б) При той же интерпретации векторов в R^3, что и в случае а) преобразование φ есть растяжение в 2раза вдоль оси OX с последующим отражением относительно плоскости OYZ. Тогда все одномерные инварианты − это все центральные прямые плоскостиOYZ и перпендикулярная этой плоскости центральная прямая OX. А двумерными инвариантами в этом случае служат плоскость OYZ и все перпендикулярные ей центральные плоскости.

Задача 2. Пусть φ − линейное отображение 3-х мерного пространства V в себя, a – ненулевой вектор из V, а V_1 − подпространство V, порожденное векторами $a, \varphi(a), \varphi^2(a)$. Показать, что V_1 − инвариантное подпространство относительно φ.

Решение. Покажем, что вектор $\varphi^3(a)$ линейно выражается через векторы системы $a, \varphi(a), \varphi^2(a)$. Система векторов $a, \varphi(a), \varphi^2(a), \varphi^3(a)$ линейно зависима в V, так как состоит из 4-х векторов. Поэтому найдутся такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_0 a + \lambda_1 \varphi(a) + \lambda_2 \varphi^2(a) + \lambda_3 \varphi^3(a) = 0 .$$

Пусть λ_κ − последнее отличное от нуля число ( ) в последовательности чисел $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, но при этом $\lambda_\kappa \neq \lambda_0$, так как $a \neq \theta$. Тогда имеем

$$\lambda_0 a + \lambda_1 \varphi(a) + \ldots + \lambda_\kappa \varphi^\kappa(a) = 0 .$$

Отсюда следует, что вектор $\varphi^{\kappa}(a)$ выражается через предшествующие векторы:

$$\lambda_{\kappa}\varphi^{\kappa}(a) = \mu_0 a + \mu_1\varphi(a) + \ldots + \mu_{\kappa-1}\varphi^{\kappa-1}(a).$$

Применяя $3-k$ раз отображение φ к обеим частям последнего равенства, получим

$$\varphi^3(a) = \mu_0\varphi^{3-\kappa}a + \mu_1\varphi^{3-\kappa+1}(a) + \ldots + \mu_{\kappa-1}\varphi^2(a).$$

Пусть b – произвольный вектор из подпространства V_1:

$$b = \eta_0 a + \eta_1\varphi(a) + \eta_2\varphi^2(a).$$

Тогда

$$\varphi(b) = \eta_0\varphi(a) + \eta_1\varphi^2(a) + \eta_2\varphi^3(a) = \eta_0\varphi(a) + \eta_1\varphi^2(a) + \eta_2(\mu_0\varphi^{3-\kappa}a +$$
$$+ \mu_1\varphi^{3-\kappa+1}(a) + \ldots + \mu_{\kappa-1}\varphi^2(a)) \in V_1,$$

то есть V_1 – инвариантно относительно оператора φ.

Упражнения для самостоятельного решения

1. В пространстве R^3 линейное отображение φ переводит любой вектор $x = (x_1, \ x_2, \ x_3)$ в вектор:

а) $\varphi(x) = (0, \ x_2, \ 0)$;

б) $\varphi(x) = (0, \ 0, \ x_3)$;

в) $\varphi(x) = (0, \ x_2, \ x_3)$;

г) $\varphi(x) = (2x_1, x_2, x_3)$

д) $\varphi(x) = (x_1, -x_2, x_3)$.

Дайте геометрическую интерпретацию заданных отображений и для каждого отображения найдите все его инвариантные подпространства.

2. Пусть φ — линейное отображение n-мерного пространства L в себя, a — любой ненулевой вектор из L, а L_1 — подпространство L, порожденное векторами

$$a, \varphi(a), \varphi^2(a), \ldots, \varphi^{n-1}(a), \tag{1}$$

где $\varphi^2(a)=\varphi(\varphi(a))$, $\varphi^3(a)=(\varphi(\varphi(\varphi(a))))$ и.т.д.

а) Показать, что L_1 — инвариантное подпространство относительно φ .

б) Найти базис L_1, если L есть пространство M_2 вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем R, $a=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, а отображение φ задано в базисе

$$e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

матрицей

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. В пространстве R^3 линейное отображение φ задано в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

а векторы $a_1=(1,1,0)$, $a_2=(1,0,-1)$, $a_3=(2,2,-1)$ — своими координатами в том же базисе. Покажите, что линейные оболочки $L_1=L(a_1)$, $L_2=L(a_2)$, $L_3=L(a_3)$, $L_4=L(a_1,a_2)$ являются инвариантными относительно φ подпространствами.

5. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть φ − линейное преобразование пространства V_n над полем P. Собственным вектором линейного преобразования φ пространства V_n над полем P называется ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию

$$\varphi(x)=\lambda x$$

для некоторого $\lambda\in P$. Число λ при этом называется собственным значением преобразования φ, соответствующим вектору x.

Свойства собственных векторов

1. Собственные векторы линейного преобразования φ, отвечающие данному собственному значению λ, вместе с нулевым вектором образуют подпространство.

2. Собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейного преобразования φ, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ линейно независимы. Следовательно, линейное преобразование φ пространства V_n не может иметь более n собственных векторов с попарно различными собственными значениями.

3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ − попарно различные собственные значения преобразования φ. Если для каждого из этих значений взять линейно независимую систему собственных векторов, то система, состоящая из всех этих векторов, линейно независима.

Пусть A − квадратная матрица порядка n с элементами a_{ij} из поля P. Тогда многочлен

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

называется характеристическим многочленом матрицы A.

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ относительно λ называют характеристическим уравнением, а его корни − характеристическими числами матрицы A.

Из определения определителя следует, что $\Delta(\lambda)$ есть многочлен от λ степени n с коэффициентом старшего члена равным $(-1)^n$.

Пусть φ − линейное, преобразование пространства V_n. Выбирая различные базисы пространства V_n, получают различные матрицы преобразования φ, но при этом характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Множество собственных значений преобразования φ линейного пространства V_n над числовым полем P совпадает с множеством корней характеристического многочлена преобразования φ, принадлежащих полю P.

Среди линейных преобразований часто встречаются такие, матрицы которых в некотором базисе симметричны.

Все собственные значения линейного преобразования φ с вещественной симметрической матрицей A вещественны.

Задача 1. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение с матрицей A:

$$|A - \lambda E| = 0; \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для его решения выполним преобразования:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Таким образом, собственные значения линейного оператора с матрицей A равны $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих соответствующим собственным значениям, необходимо решить уравнение

$$AX = \lambda X \text{ или } (A - \lambda E)X = 0.$$

Для $\lambda_1 = 1$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

при $x_3 = 1$, значения $x_1 = 1,\ x_2 = 1$.

Следовательно, вектор $(1;\,1;\,1)$ является собственным, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 1$, а значит, каждый вектор вида $(\mu;\,\mu;\,\mu)$ при любом действительном значении $\mu \neq 0$ является собственным для $\lambda_1 = 1$.

Для $\lambda_2 = 2$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad x_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

Вектор $(1;\,0;\,1)$ является собственным, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = 2$ и каждый вектор вида $(\mu;\,0;\,\mu)$ при любом действительном значении $\mu \neq 0$ является собственным для $\lambda_2 = 2$.

Для $\lambda_3 = 3$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, вектор $(1;\,1;\,0)$ является собственным, отвечающим собственному значению $\lambda_3 = 3$ и каждый вектор вида $(\mu;\,\mu;\,0)$ при любом действительном значении $\mu \neq 0$ является собственным для значения $\lambda_3 = 3$.

Если линейное преобразование φ пространства V_n имеет n линейно независимых собственных векторов, то в базисе, состоящем из этих векторов, матрица преобразования φ имеет диагональную форму.

Обратно, если в некотором базисе матрица преобразования φ диагональная, то векторы этого базиса являются собственными.

Из этих утверждений, учитывая свойства собственных векторов, получаем: если характеристический многочлен преобразования φ пространства V_n над полем P имеет n различных корней, принадлежащих полю P, то матрица преобразования φ приводится к диагональной форме.

Если число кратных корней характеристического многочлена равно n, то приведение матрицы преобразования к диагональной форме возможно, если же оно меньше n, то невозможно.

Задача 2. В пространстве R^3 отображение φ в некоторомбазисе задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, приводится ли матрица этого отображения кдиагональной форме.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение с матрицей A:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2.$$

Для собственных векторов, отвечающих $\lambda_1 = 1$, имеем систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 \phantom{{}-x_3} = 0. \end{cases}$$

Фундаментальный набор решений этой системы состоит из одного вектора, например, $a_1 = (1, 1, 1)$.

Для $\lambda_{2,3} = 2$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальный набор решений этой системы состоит из двух векторов, например, $a_2 = (1, 1, 0)$ и $a_3 = (0, 1, 3)$.

Таким образом, сумма размерностей подпространств, порожденных собственными векторами, отвечающих собственным значениям $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3} = 2$ равна 3, следовательно, в базисе a_1, a_2, a_3 матрица линейного оператора φ диагональна и имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

1. Найти собственные векторы и собственные значениялинейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Выясните, какие из следующих матриц линейных отображений можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Докажите, что её собственные значения квадратной матрицы A отличны от нуля тогда и только тогда, когда матрица обратима.

4. Линейное отображение φ пространства R^3 задано невырожденной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственные значения отображения φ^{-1}.

5. В некотором базисе пространства R^2 преобразование φ задано матрицей

$$а)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad б)\ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь непосредственно, что в случае а) собственных векторов не существует, а в случае б) каждый вектор является собственным.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ
ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ»

Задание 1. Являются ли линейными следующие преобразования:

1.1 а) $\varphi(x) = (3x_1, 2x_2 - 3x_3, x_1 + x_2 - x_3)$,

б) $\varphi(x) = (-x_1 + 3, 5x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 - 0{,}5x_3)$,

в) $\varphi(x) = (x_1^2 - x_3, 5x_1 - x_2, 5x_3)$;

1.2 а) $\varphi(x) = (-x_1 + 5x_3, x_1 - 3x_3, 2x_1 + x_2 + x_3)$,

б) $\varphi(x) = (x_1 + x_3, x_1 - x_2 + x_3 - 4, 2x_1 - x_2)$,

в) $\varphi(x) = (-2x_2 - 1, -3x_1 + x_3, -x_2 - 0{,}5x_3)$;

1.3 а) $\varphi(x) = (x_1 - 5x_3 + 5, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3)$,

б) $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 + x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2)$,

в) $\varphi(x) = (x_1 - x_2^3, 10x_1 - x_2 + x_3, -x_2)$;

1.4 а) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2 + x_3 - 10, x_3 - 2x_1)$,

б) $\varphi(x) = (x_1^4 - 6x_2, -x_1 + 8x_2, x_3 - x_2)$,

в) $\varphi(x) = (7x_1 - 2x_2 + x_3, 6x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 5x_3)$;

1.5 а) $\varphi(x) = (4x_2 - x_3, 10x_1 + 5x_2, x_1 + x_2 - 8x_3)$

б) $\varphi(x) = (2x_3, x_1^3, x_1 + x_2 - x_3)$,

в) $\varphi(x) = (0, x_2 - 8, x_1 + 4x_3)$;

1.6 а) $\varphi(x) = (6, 3x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 5x_2)$,

б) $\varphi(x) = (x_2^2 + 7x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3)$,

в) $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2)$;

1.7 а) $\varphi(x) = (x_1^3 x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, 0)$

б) $\varphi(x) = (5x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, 0)$,

в) $\varphi(x) = (5x_2 - x_3 9, x_1 + 4x_2 - x_3, 1)$;

1.8 а) $\varphi(x) = (5x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, x_1 - 9)$,

б) $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 + x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2)$,

в) $\varphi(x) = (9x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, x_2 + 4x_1 - 10)$;

1.9 а) $\varphi(x) = (-9x_2, 7x_1 + 3x_2 + x_3, -5x_1 + x_2)$, б) $\varphi(x) = (-x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + 3, 0)$,

в) $\varphi(x) = (x_1 - 4x_3, 6x_1 - 7x_2 + x_3, x_1 x_3^2)$;

1.10 а) $\varphi(x) = (x_2 + x_3)^2, 3x_1 + 8x_2 - 7x_3, 2x_1 + x_3)$,

б) $\varphi(x) = (9, -3x_1 + 5x_2 + 3x_3, -2x_1 + 6x_3)$,

в)$\varphi(x) = (2x_1 - 7x_3, 0, x_1)$;

1.11 а) $\varphi(x) = (4x_3, 10x_3 - x_2, 7x_1 - 6x_2 + x_3)$,

б) $\varphi(x) = (6x_1 + 4x_3, -3x_1 + x_2^2 + 10x_3, x_1)$,

в) $\varphi(x) = (3x_2 + 2x_3, -3x_1 + 5, 8x_2 - x_1)$;

1.12 а) $\varphi(x) = (-2, x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2 + 6x_3)$,

б)$\varphi(x) = (-x_2 - 9x_3, -3x_1 + 5x_2 + 3x_3, 0)$,

в) $\varphi(x) = (-2x_1x_2x_3, 4x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2 - 3x_3)$;

1.13 а) $\varphi(x) = (5x_1 + 4x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3, -x_1x_2x_3)$,

б) $\varphi(x) = (3x_1 + x_2 - x_3, 9, -x_1 + x_2 - 2x_3)$,

в)$\varphi(x) = (10x_1 - 3x_2 + 5x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3, 2x_1 + 2x_2)$;

1.14 а) $\varphi(x) = (-x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3)$,

б) $\varphi(x) = (x_1 - 5x_3 + 10, -4x_1 + 7x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$,

в) $\varphi(x) = (x_1x_2x_3, x_1 + 2x_3, 3x_1 + 5x_2)$;

1.15 а) $\varphi(x) = (-2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2x_3)$,

б) $\varphi(x) = (10, x_1 + 2x_2, -3x_1 + x_2 - x_3)$,

в)$\varphi(x) = (x_1 + 3x_2 - x_3, x_1^3 + 6x_2, x_1 + x_2 - 5x_3)$;

1.16 а) $\varphi(x) = (4x_3 - 4, x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 - 2x_3)$,

б)$\varphi(x) = (-x_1, 12x_1 - 3x_3, 3x_1 + 4x_2 - 8x_3)$,

в) $\varphi(x) = (x_1^2, x_1x_2 - x_3, x_1x_2)$;

1.17 а) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_2 + x_1 - 5)$,

б)$\varphi(x) = (-2x_1 + 10x_2, 7x_1 + 2x_3, -3x_1 + 5x_2 - x_3)$,

в) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_2, x_1x_2x_3, 2x_2 + 4x_1 - x_3)$;

1.18 а) $\varphi(x) = (x_1 - 8x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2)$,

б) $\varphi(x) = (-5x_2 - x_3, -4x_1 - x_2 2x_3, 3x_1 - 5)$,

в) $\varphi(x) = (x_3^2, x_1^2, x_2^2)$;

1.19 а) $\varphi(x) = (x_2, x_1^2 - x_2 + 7x_3, x_2^2 + x_3)$,

б) $\varphi(x) = (13x_1 - x_2, - x_1 - x_2 + 2, 8 + 5x_2)$,

в)$\varphi(x) = (7x_1 - 2x_2 + x_3, - 6x_1 - x_2 + x_3, - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3)$;

1.20 а) $\varphi(x) = (10x_1, - x_1 - x_2 - 6x_3, x_2^2 + 9x_3)$,

б)$\varphi(x) = (-4x_2 - x_3, 10x_1 - 5x_2, x_1 + x_2 - 8x_3)$,

в) $\varphi(x) = (3x_1 = x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, x_2 + 4x_1 - 11)$;

1.21 а) $\varphi(x) = (-5x_2 - x_3, - 4x_1 - x_2 - 2x_3, 3x_1 - 5x_2)$,

б) $\varphi(x) = (-x_2, - x_1^3 - x_2 + x_3, 0)$,

в) $\varphi(x) = (4x_1 - x_2, - x_1 - x_2 + 2, 8x_1 + 5x_2)$;

1.22 а) $\varphi(x) = (0, 0, x_2^2)$,

б) $\varphi(x) = (1, - 9x_1 + 3x_2 + x_3, - 4x_3 + x_2)$,

в)$\varphi(x) = (5x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, - 3x_1 + x_2)$;

1.23 а) $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 + x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2)$,

б) $\varphi(x) = (x_1 + 2x_3, x_1 + 3x_2 + x_3^2, - 5)$,

в) $\varphi(x) = (x_1, - 2, - 5x_1 + x_2 + x_3)$;

1.24 а) $\varphi(x) = (0, x_3^3 + 3x_2, 10x_1 + x_2^2)$,

б) $\varphi(x) = (9x_2, - 4x_1 - x_2 + x_3, - x_3 + 7)$,

в)$\varphi(x) = (-8x_3, 7x_1 + 3x_2 + x_3, - 5x_1 + x_2)$;

1.25 а) $\varphi(x) = (-3x_1 + 7x_3, - 5x_1 + 4x_2, x_1 - x_2)$,

б) $\varphi(x) = (4x_2 + 1, x_1 - x_2, x_1 + 4x_3)$,

в) $\varphi(x) = (x_1^2 + x_2 - x_3, 3x_3 - 2x_2, 6x_1 + 11x_3)$.

Задание 2. Найти матрицу линейного оператора $\varphi(x)$ и образ вектора a при данном отображении.

2.1 $\varphi(x) = (-2x_1 - x_3, 5x_2 + 4x_3, - 8x_1 - x_2 - x_3)$, $a = (-2, 5, -11)$;

2.2 $\varphi(x) = (x_2 + 5x_3, x_1 - x_2 - 5x_3, 7x_1 - x_2)$, $a = (4, -6, 1)$;

2.3 $\varphi(x) = (-8x_1 + x_3, 9x_2 - 11x_3, x_1 + x_2 - 23x_3)$, $a = (7, 8, -1)$;

2.4 $\varphi(x) = (10x_1 - 2x_3, - 9x_1 + 12x_2 - 5x_3, 3x_1 + 4x_2 + 6x_3)$;

2.5 $\varphi(x) = (x_1 - 9x_2 - 2x_3, - 20x_1 + 15x_2, - x_1 + 4x_2 - 7x_3)$, $a = (25, -17, 11)$;

2.6 $\varphi(x) = (-5x_1 + 7x_2, 18x_1 + 6x_2 - 3x_3, - 8x_2 + 11x_3)$, $a = (4, -6, 1)$;

2.7 $\varphi(x) = (-21x_3, -4x_1 + 12x_2 - 6x_3, -3x_1 + 8x_2 - x_3)$, $a = (-3, -8, -10)$;

2.8 $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 + x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2)$, $a = (5, -3, 0)$;

2.9 $\varphi(x) = (-9x_2, 7x_1 + 3x_2 + x_3, -5x_1 + x_2)$, $a = (7, 5, -14)$;

2.10 $\varphi(x) = (2x_1 - 7x_3, -5x_1 + 4x_3, x_1 + x_3)$, $a = (8, 2, -1)$;

2.11 $\varphi(x) = (4x_3, 10x_3 - x_2, 7x_1 - 6x_2 + x_3)$, $a = (10, -9, 20)$;

2.12 $\varphi(x) = (-x_2 - 9x_3, -3x_1 + 5x_2 + 3x_3, -2x_1 + 6x_3)$, $a = (6, 11, -12)$;

2.13 $\varphi(x) = (10x_1 - 3x_2 + 5x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3, 2x_1 + 2x_2)$;

2.14 $\varphi(x) = (-x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3)$;

2.15 $\varphi(x) = (11x_1 + 2x_2 - 11x_3, 4x_1 + 6x_2, x_1 + x_2 - 5x_3)$;

2.16 $\varphi(x) = (-x_1, 12x_1 - 3x_3, 3x_1 + 4x_2 - 8x_3)$;

2.17 $\varphi(x) = (-2x_1 + 10x_2, 7x_1 + 2x_3, -3x_1 + 5x_2 - x_3)$;

2.18 $\varphi(x) = (x_1 - 8x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2)$;

2.19 $\varphi(x) = (7x_1 - 2x_2 + x_3, -6x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_2 - 4x_3)$;

2.20 $\varphi(x) = (-4x_2 - x_3, 10x_1 - 5x_2, x_1 + x_2 - 8x_3)$;

2.21 $\varphi(x) = (-5x_2 - x_3, -4x_1 - x_2 2x_3, 3x_1 - 5x_2)$;

2.22 $\varphi(x) = (5x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, -3x_1 + x_2)$;

2.23 $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 + x_3, 6x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2)$;

2.24 $\varphi(x) = (-8x_3, 7x_1 + 3x_2 + x_3, -5x_1 + x_2)$;

2.25 $\varphi(x) = (-3x_1 + 7x_3, -5x_1 + 4x_2, x_1 - x_2 + x_3)$.

Задание 3. Доказать линейность и найти матрицу линейного оператора:

3.1 проектирования на плоскость $x + \sqrt{3}y = 0$;

3.2 проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$;

3.3 проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}y = 0$;

3.4 проектирования на плоскость $z + \sqrt{3}y = 0$;

3.5 проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$;

3.6 проектирования на плоскость $\sqrt{3}x - z = 0$;

3.7 проектирования на плоскость $x + y = 0$;

3.8 проектирования на плоскость $x - z = 0$;

3.9 проектирования на плоскость $y + z = 0$;

3.10 проектирования на плоскость $x = \sqrt{3}y$;

3.11 проектирования на плоскость $x + z = 0$;

3.12 проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$;

3.13 проектирования на плоскость $\sqrt{3}z - y = 0$;

3.14 проектирования на плоскость $x - y = 0$;

3.15 проектирования на плоскость $\sqrt{3}x - y = 0$;

3.16 проектирования на плоскость $y - \sqrt{3}x = 0$;

3.17 проектирования на плоскость $x = z$;

3.18 проектирования на плоскость $y - \sqrt{3}z = 0$;

3.19 проектирования на плоскость $x = -y$;

3.20 проектирования на плоскость $z = y$;

3.21 проектирования на плоскость $y = -\sqrt{3}z$;

3.22 проектирования на плоскость $z - \sqrt{3}y = 0$;

3.23 проектирования на плоскость $-\sqrt{3}y = x$;

3.24 проектирования на плоскость $z = -y$;

3.25 проектирования на плоскость $\sqrt{3}z = x$.

Задание 4. Найти матрицу оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени, не превосходящей 3, в данном базисе:

4.1 $-3, x-4, 5x^2-3x+8, 6+x-2x^2+4x^3$;

4.2 $2, x+3, -4x^2+2x-6, 5-2x+2x^2-6x^3$;

4.3 $-1, -5x+4, 10x^2-6x+8, -1+6x-8x^2+x^3$;

4.4 $4, -9x-6, 5x^2-2, -10+3x-6x^2+3x^3$;

4.5 $-2, 3x-4, 7x^2-3x+3, -8+4x+2x^2+9x^3$;

4.6 $5, -2x+3, 5x^2-4x+12, 2+15x-6x^2+2x^3$;

4.7 $1, -x-7, 5x^2+10x-11, 4+12x-x^2+7x^3$;

4.8 $-6, 5x+15, -5x^2+10x-15, 25-30x+35x^2-40x^3$;

4.9 $8, -2x+4, -6x^2-2x-10, 1+3x-5x^2+x^3$;

4.10 $-11, x+1, -x^2+x-1, 1-x+x^2+x^3$;

4.11 $7, -3x+4, -4x^2+x-3, 1+x-5x^2+4x^3$;

4.12 $9,\ 7x, 2x^2-11x-3, 1+2x-5x^2+2x^3$;

4.13 $-11, x+4, x^2+x-1, 1+x-x^2+x^3$;

4.14 $2, 6x+4, -3x^2+x-3, 1+x-x^2+4x^3$;

4.15 $-1, -x+2, 3x^2-4x-1, 1+2x+x^2+x^3$;

4.16 $-4, 2x-4, -x^2-3x+8, 1+x-2x^2+4x^3$;

4.17 $-1, 8x+1, -2x^2+2x-5, 5-2x+x^2-x^3$;

4.18 $3, -x+6, 12x^2-3x+2, -1+x-x^2+5x^3$;

4.19 $10, -2x-5, x^2-2, 3x-6x^2+3x^3$;

4.20 $-2,\ x-1, 7x^2-3x, -8+2x^2+x^3$;

4.21 $5, -3x-4, -x^2-4x+2, 2+6x^3$;

4.22 $-2, x+15, -2x^2-15, 2-3x+5x^2-4x^3$;

4.23 $1, x+1, x^2+x-1, 2-x-x^2+x^3$;

4.24 $-7, -4x+2, -2x^2+4x-4, 1-2x+3x^2+2x^3$;

4.25 $-6, x+4, x^2+1, 2-3x^3$.

Задание 5. Известно, что векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ и $b_1,\ b_2,\ b_3$ линейного пространства R_3, заданные своими координатами в некотором базисе. В том же базисе найти матрицу линейного отображения φ, переводящего векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ соответственно в векторы $b_1,\ b_2,\ b_3$.

5.1 $a_1=(0,0,1),\quad a_2=(1,0,-2),\quad a_3=(0,0,3)$;

$b_1=(-3,0,1),\quad b_2=(8,1,-2),\quad b_3=(0,-5,3)$.

5.2 $a_1=(0,0,1),\quad a_2=(2,0,-1),\quad a_3=(0,0,-1)$;

$b_1=(-4,1,-1),\quad b_2=(6,1,-2),\quad b_3=(2,-7,3)$.

5.3 $a_1=(1,0,1),\quad a_2=(0,0,-2),\quad a_3=(0,4,3)$;

$b_1=(4,9,-1),\quad b_2=(6,-1,2),\quad b_3=(0,4,8)$.

5.4 $a_1=(3,0,1),\quad a_2=(0,0,-2),\quad a_3=(0,-4,3)$;

$b_1=(-7,2,0),\quad b_2=(4,2,-5),\quad b_3=(7,-2,11)$.

5.5 $a_1=(-1,2,1),\quad a_2=(0,0,5),\quad a_3=(0,-7,3)$;

$b_1=(-3,4,-1),\quad b_2=(8,9,-10),\quad b_3=(0,-6,2)$.

5.6 $a_1=(0,0,-7),\quad a_2=(10,10,-2),\quad a_3=(0,-8,1)$;

$b_1 = (-10, 0, 1), \quad b_2 = (5, 1, 2), \quad b_3 = (0, -5, 3)$.

5.7 $a_1 = (-6, 5, -4), \quad a_2 = (0, 12, -2), \quad a_3 = (0, 0, -9)$;

$b_1 = (-9, 2, -5), \quad b_2 = (3, 1, -3), \quad b_3 = (2, -4, 9)$.

5.8 $a_1 = (0, 0, -1), \quad a_2 = (-1, 8, -2), \quad a_3 = (0, 6, 3)$;

$b_1 = (5, 9, 10), \quad b_2 = (-8, 1, -2), \quad b_3 = (3, -5, 8)$.

5.9 $a_1 = (4, 6, -8), \quad a_2 = (0, 0, -3), \quad a_3 = (0, 7, 12)$;

$b_1 = (-9, 7, 5), \quad b_2 = (-2, 0, -2), \quad b_3 = (-5, -5, 5)$.

5.10 $a_1 = (1, -4, 3), \quad a_2 = (0, 5, -6), \quad a_3 = (0, 0, -1)$;

$b_1 = (-13, 11, 0), \quad b_2 = (0, 3, -4), \quad b_3 = (7, 6, 4)$.

5.11 $a_1 = (0, 1, 1), \quad a_2 = (1, 1, -1), \quad a_3 = (0, 0, 1)$;

$b_1 = (20, 10, -1), \quad b_2 = (2, 4, -6), \quad b_3 = (6, 8, 10)$.

5.12 $a_1 = (0, 0, 1), \quad a_2 = (5, 6, 3), \quad a_3 = (0, 1, -8)$;

$b_1 = (13, 12, 11), \quad b_2 = (0, 1, 0), \quad b_3 = (2, -6, 3)$.

5.13 $a_1 = (-2, 0, 1), \quad a_2 = (0, 0, 8), \quad a_3 = (0, 1, 9)$;

$b_1 = (5, 0, 11), \quad b_2 = (6, 7, 2), \quad b_3 = (0, -4, 8)$.

5.14 $a_1 = (0, 0, 1), \quad a_2 = (0, 2, -2), \quad a_3 = (3, -4, 3)$;

$b_1 = (-1, -2, -3), \quad b_2 = (4, 5, -6), \quad b_3 = (7, -8, 9)$.

5.15 $a_1 = (-6, -2, 1), \quad a_2 = (0, 5, 5), \quad a_3 = (0, 0, 7)$;

$b_1 = (8, 2, 1), \quad b_2 = (-8, 1, -1), \quad b_3 = (12, -6, 2)$.

5.16 $a_1 = (0, 0, -5), \quad a_2 = (4, -14, -8), \quad a_3 = (0, -3, 1)$;

$b_1 = (-5, 8, 1), \quad b_2 = (7, 1, -9), \quad b_3 = (0, 5, 4)$.

5.17 $a_1 = (-7, 5, -4), \quad a_2 = (0, 12, -2), \quad a_3 = (0, 0, -1)$;

$b_1 = (-7, 9, -5), \quad b_2 = (-4, 1, -3), \quad b_3 = (-6, -4, 9)$.

5.18 $a_1 = (0, 0, -6), \quad a_2 = (1, -2, -2), \quad a_3 = (0, 1, 3)$;

$b_1 = (-2, 4, 1), \quad b_2 = (-6, -1, -2), \quad b_3 = (3, -5, 8)$.

5.19 $a_1 = (-1, 6, -8), \quad a_2 = (0, 0, -3), \quad a_3 = (0, -6, 12)$;

$b_1 = (-8, 6, -5), \quad b_2 = (4, 0, -2), \quad b_3 = (-5, -1, 5)$.

5.20 $a_1 = (0, -4, 3), \quad a_2 = (0, 0, -6), \quad a_3 = (5, -8, -1)$;

$b_1 = (-3, 1, 9), \quad b_2 = (4, 3, -4), \quad b_3 = (-2, 6, 4)$.

5.21 $a_1 = (0, -1, 1), \quad a_2 = (4, 2, -3), \quad a_3 = (0, 0, -1)$;

$b_1 = (4, 8, -3), \quad b_2 = (-5, 7, -9), \quad b_3 = (11, 2, -5)$.

5.22 $a_1 = (0, 0, -2), \quad a_2 = (-1, 6, 3), \quad a_3 = (0, 4, -8)$;

$b_1 = (-3, -2, -1), \quad b_2 = (0, 4, 10), \quad b_3 = (2, -8, 6)$.

5.23 $a_1 = (-10, 0, 1), \quad a_2 = (0, 0, -1), \quad a_3 = (0, 15, -1)$;

$b_1 = (-8, -4, -6), \quad b_2 = (4, -3, -2), \quad b_3 = (-1, -6, 11)$.

5.24 $a_1 = (2, 6, 1), \quad a_2 = (0, 6, -1), \quad a_3 = (0, 0, -8)$;

$b_1 = (-4, 1, -1), \quad b_2 = (6, 1, -2), \quad b_3 = (2, -7, 3)$.

5.25 $a_1 = (0, 2, 1), \quad a_2 = (2, -5, -1), \quad a_3 = (0, 0, -7)$;

$b_1 = (21, -1, 3), \quad b_2 = (4, 3, -5), \quad b_3 = (-2, -7, 0)$.

Задание 6. Линейное отображение φ линейного пространства R_3 имеет в некотором базисе $e_1, \; e_2, \; e_3$ матрицу A. Найти матрицу этого отображения в указанном базисе.

6.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2, \quad e_2 - e_3, \quad e_3 + 2e_1$;

6.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2 + e_3, \quad e_2 + 3e_3, \quad e_3 - 2e_1$;

6.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_2, \quad e_1 - 3e_2 + e_3, \quad e_3 - 5e_2$;

6.4 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2 - e_3, \quad e_1 + e_2 - e_3, \quad e_1 + 2e_2 + e_3$;

6.5 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $e_1 - 2e_2 - 3e_3, \quad e_1 - e_3, \quad e_1 - e_2 + 4e_3$;

6.6 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $2e_1 + e_2, \quad -e_3, \quad e_1 - e_2 + e_3$;

6.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2 + 5e_3, \quad -e_2 - e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3$;

6.8 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $-e_3$, $e_1 + e_2 + 3e_3$, $e_1 - e_3$;

6.9 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $2e_1 + 3e_2 + 4e_3$, $-e_2$, $e_1 + 2e_2$;

6.10 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_1 - e_2 - e_3$, $e_2 - e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$;

6.11 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2$, $e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $-e_2$;

6.12 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 - 2e_2 - 4e_3$, $e_1 - 6e_3$, e_1;

6.13 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_2 - e_3$, $2e_1 + e_2 + 2e_3$, $e_1 + 2e_2 + e_3$;

6.14 $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $e_1 - 3e_3$, $-e_2 - e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$;

6.15 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_1 - e_2 - e_3$, $-2e_2 + 2e_3$;

6.16 $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2 + 4e_3$, $2e_1 - e_3$, $e_2 + e_3$;

6.17 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_1 + 5e_2$;

6.18 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $-4e_2 - e_3$, $-e_1 + 2e_2 - e_3$, $3e_1 + 2e_2 - e_3$;

6.19 $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_2$, $2e_1 + e_2 + 3e_3$, $-4e_2 + 2e_3$;

6.20 $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $-e_1 + e_2 + e_3$, $e_1 - e_2 + e_3$, $e_1 + e_2 - e_3$;

6.21 $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -9 \\ -1 & 6 & -1 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $5e_3,\quad -e_1,\quad -2e_2$;

6.22 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1-3e_2-e_3,\quad 2e_1-e_3,\quad -3e_1+2e_2$;

6.23 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $-e_1+e_2,\quad -e_1+e_2-e_3,\quad e_1+8e_3$;

6.24 $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $-6e_2+3e_3,\quad 2e_1+3e_2+4e_3,\quad -2e_1$;

6.25 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1-e_3,\quad -e_1-e_2-e_3,\quad e_1+e_2+e_3$.

Задание 7. Линейное отображение φ линейного пространства R_4 имеет в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ матрицу A. Найти матрицу A' того же отображения в базисе $e_1',\ e_2',\ e_3',\ e_4'$.

7.1 $e_1=(1;-4;2;-2),\quad e_2=(1;-3;-;1;2),\quad e_3=(-1;2;-4;2),\quad e_4=(3;1;1;1)$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 4 & -6 & 6 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(-1;-1;2;2),\quad e_2'=(3;3;1;-1),\quad e_3'=(2;1;-1;-5),\quad e_4'=(-3;-1;-1;-1)$.

7.2 $e_1=(-1;-1;2;2),\quad e_2=(-3;-3;-;1;1),\quad e_3=(2;1;-1;-5),\quad e_4=(-1;3;1;-2)$,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ -7 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(-1;3;2;3),\quad e_2'=(-1;3;1;1),\quad e_3'=(2;1;-1;1),\quad e_4'=(2;-1;-5;1)$.

7.3 $e_1=(3;-2;2;1),\quad e_2=(1;-1;1;-4),\quad e_3=(1;1;-1;2),\quad e_4=(1;2;-5;-2)$,

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(-1;2;-4;2),\quad e_2'=(1;-4;2;-2),\quad e_3'=(1;-3;-1;2),\quad e_4'=(3;1;1;1)$.

7.4 $e_1=(5;-1;-1;-1),\quad e_2=(3;3;1;-1),\quad e_3=(1;-2;4;-2),\quad e_4=(1;-4;2;-2)$,

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 & -6\\ -1 & -2 & 1 & 1\\ 4 & -3 & -2 & 4\\ -2 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(1;-1;3;5),\quad e_2'=(-4;2;3;-1),\quad e_3'=(2;-4;1;-1),\quad e_4'=(-2;2;-1;-1)$.

7.5 $e_1=(1;1;2;-2),\quad e_2=(-4;-3;1;-1),\quad e_3=(2;-1;-1;1),\quad e_4=(-2;2;-5;-2)$,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 & -1\\ -1 & 0 & 7 & 0\\ 2 & -10 & 9 & -4\\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(-1;4;-2;2),\quad e_2'=(1;-3;-1;2),\quad e_3'=(2;1;-1;-5),\quad e_4'=(-2;-1;1;2)$.

7.6 $e_1=(1;-2;3;-4),\quad e_2=(2;3;4;-5),\quad e_3=(3;-1;-1;7),\quad e_4=(2;-1;6;-3)$,

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -7 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 8\\ 4 & 0 & 9 & -1\\ -2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(1;2;3;4),\quad e_2'=(2;1;2;3),\quad e_3'=(3;2;1;2),\quad e_4'=(4;3;2;1)$.

7.7 $e_1=(2;-1;3;2),\quad e_2=(3;3;3;2),\quad e_3=(3;-1;-1;2),\quad e_4=(3;-1;3;-1)$,

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -9 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9 & -1\\ -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(2;-1;2;2),\quad e_2'=(3;2;1;-1),\quad e_3'=(1;-3;-1;-3),\quad e_4'=(4;2;2;5)$.

7.8 $e_1=(1;1;2;3),\quad e_2=(3;-1;-1;-2),\quad e_3=(2;3;-1;-1),\quad e_4=(1;2;3;-1)$,

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 3 & 9\\ -4 & 0 & 9 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(1;2;3;-2),\quad e_2'=(1;-1;-2;-3),\quad e_3'=(3;2;-1;2),\quad e_4'=(2;-3;2;1)$.

7.9 $e_1=(1;2;3;4),\quad e_2=(2;1;2;3),\quad e_3=(3;2;1;2),\quad e_4=(4;3;2;1)$,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -9 & 1 & 2\\ -5 & 5 & -2 & 1\\ 8 & 6 & 8 & -1\\ -1 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$e_1' = (0;1;-3;4), \quad e_2' = (1;0;-2;3), \quad e_3' = (3;2;0;-5), \quad e_4' = (4;3;0;-5)$.

7.10 $e_1 = (1;3;5;7), \quad e_2 = (3;5;7;1), \quad e_3 = (5;7;1;3), \quad e_4 = (7;1;3;5)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -10 \\ 2 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix},$$

$e_1' = (1;5;3;-4), \quad e_2' = (3;1;-2;0), \quad e_3' = (5;-7;0;10), \quad e_4' = (0;3;-5;0)$.

7.11 $e_1 = (2;1;-5;1), \quad e_2 = (1;-3;0;-6), \quad e_3 = (0;2;-1;2), \quad e_4 = (1;4;-7;6)$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & -6 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$e_1' = (2;-1;3;2), \quad e_2' = (3;3;3;2), \quad e_3' = (3;-1;-1;2), \quad e_4' = (3;-1;3;-1)$.

7.12 $e_1 = (1;4;6;4), \quad e_2 = (1;1;4;6), \quad e_3 = (4;1;1;4), \quad e_4 = (6;4;1;1)$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & 7 \\ -3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$e_1' = (1;2;3;4), \quad e_2' = (2;1;2;3), \quad e_3' = (3;2;1;2), \quad e_4' = (4;3;2;1)$.

7.13 $e_1 = (1;1;1;1), \quad e_2 = (1;-1;2;-2), \quad e_3 = (1;1;4;4), \quad e_4 = (1;-1;-1;4)$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$e_1' = (0;1;1;1), \quad e_2' = (0;1;1;1), \quad e_3' = (1;2;3;0), \quad e_4' = (0;1;2;3)$.

7.14 $e_1 = (1;2;-3;4), \quad e_2 = (2;-1;3;-4), \quad e_3 = (3;1;-1;2), \quad e_4 = (4;3;4;2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -3 \\ 9 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$e_1' = (13;-25;1;11), \quad e_2' = (4;5;-7;-2), \quad e_3' = (3;-1;11;-13), \quad e_4' = (2;-3;4;-3)$.

7.15 $e_1 = (3;-2;2;1), \quad e_2 = (1;-1;1;-4), \quad e_3 = (1;1;-1;2), \quad e_4 = (1;2;-5;-2)$,

$$A=\begin{pmatrix}0 & -9 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 5 & -1\\ -2 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

$e_1'=(4;1;0;-1),\quad e_2'=(1;-3;4;0),\quad e_3'=(0;3;-2;4),\quad e_4'=(1;2;-1;-3)$.

7.16 $e_1'=(1;2;3;4),\quad e_2'=(2;1;2;3),\quad e_3'=(3;2;1;2),\quad e_4'=(4;3;2;1)$,

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -9 & 6 & -3\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 9 & -1\\ -2 & 4 & 4 & 7\end{pmatrix},$$

$e_1'=(-1;4;-2;2),\quad e_2'=(1;-3;-1;2),\quad e_3'=(2;1;-1;-5),\quad e_4'=(-2;-1;1;2)$.

7.17 $e_1=(1;1;2;3),\quad e_2=(3;-1;-1;-2),\quad e_3=(2;3;-1;-1),\quad e_4=(1;2;3;-1)$,

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4 & -3\\ -1 & 0 & 3 & 9\\ 3 & 6 & 8 & -1\\ -2 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

$e_1'=(4;1;0;-1),\quad e_2'=(1;-3;4;0),\quad e_3'=(0;3;-2;4),\quad e_4'=(1;2;-1;-3)$.

7.18 $e_1=(1;2;-1;1),\quad e_2=(2;1;1;1),\quad e_3=(1;-1;2;1),\quad e_4=(1;1;-1;3)$,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & -3\\ -5 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ -6 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

$e_1'=(2;-1;2;2),\quad e_2'=(3;2;1;-1),\quad e_3'=(1;-3;-1;-3),\quad e_4'=(4;2;2;5)$.

7.19 $e_1=(3;-2;2;1),\quad e_2=(1;-1;1;-4),\quad e_3=(1;1;-1;2),\quad e_4=(1;2;-5;-2)$,

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2 & 4\\ 0 & 3 & -4 & 0\\ 1 & 0 & 2 & -10\\ -2 & 10 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$e_1'=(4;1;0;-1),\quad e_2'=(1;-3;4;0),\quad e_3'=(0;3;-2;4),\quad e_4'=(1;2;-1;-3)$.

7.20 $e_1=(2;-1;3;2),\quad e_2=(3;3;3;2),\quad e_3=(3;-1;-1;2),\quad e_4=(3;-1;3;-1)$,

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 1 & -5\\ -10 & 0 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

$e_1'=(4;1;0;-1),\quad e_2'=(1;-3;4;0),\quad e_3'=(0;3;-2;4),\quad e_4'=(1;2;-1;-3)$.

7.21 $e_1=(5;2;-1;1),\quad e_2=(2;1;1;1),\quad e_3=(1;-1;2;1),\quad e_4=(1;1;-1;3)$,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ -6 & 1 & 12 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(0;1;0;-1),\quad e_2'=(1;-3;4;0),\quad e_3'=(0;3;-2;4),\quad e_4'=(1;2;-1;-3)$.

7.22 $e_1=(3;-2;2;1),\quad e_2=(1;-1;1;-4),\quad e_3=(1;1;-1;2),\quad e_4=(1;2;-5;-2)$,

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 & 8 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -9 \\ -3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(1;-1;3;5),\quad e_2'=(-4;2;3;-1),\quad e_3'=(2;-4;1;-1),\quad e_4'=(-2;2;-1;-1)$.

7.23 $e_1=(1;2;-1;1),\quad e_2=(2;1;1;1),\quad e_3=(1;-1;2;1),\quad e_4=(1;1;-1;3)$,

$$A=\begin{pmatrix} 12 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$e_1=(3;-2;2;1),\quad e_2=(1;-1;1;-4),\quad e_3=(1;1;-1;2),\quad e_4=(1;2;-5;-2)$.

7.24 $e_1'=(2;-1;2;2),\quad e_2'=(3;2;1;-1),\quad e_3'=(1;-3;-1;-3),\quad e_4'=(4;2;2;5)$,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & -6 \\ -11 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & -2 & 1 \\ -12 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(6;1;0;-1),\quad e_2'=(1;-3;4;0),\quad e_3'=(0;3;-2;4),\quad e_4'=(1;2;-1;-3)$.

7.25 $e_1=(2;1;-1;3),\quad e_2=(3;-1;1;5),\quad e_3=(1;2;-1;2),\quad e_4=(2;3;1;-1)$,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$e_1'=(-1;4;-2;2),\quad e_2'=(1;-3;-1;2),\quad e_3'=(2;1;-1;-5),\quad e_4'=(-2;-1;1;2)$.

Задание 8. Линейное отображение φ линейного пространства R_2 имеет в базисе e_1, e_2 матрицу A_e, а линейное отображение ψ пространства R_2 имеет в базисе e_1', e_2' матрицу $B_{e'}$. Найти матрицы отображений $\varphi+\psi$, 3φ, $-0{,}5\psi$, $\varphi\psi$ в базисе e_1', e_2'.

8.1 $e_1 = (1, -4), \quad e_2 = (-2, 3), \quad A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (-3, 5), \quad e_2' = (2, -1), \; B_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$

8.2 $e_1 = (-1, -3), \quad e_2 = (-1, 3), \quad A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (-2, -5), \quad e_2' = (3, -1), B_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$

8.3 $e_1 = (3, -9), \quad e_2 = (-1, -2), \quad A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (2, 6), \quad e_2' = (-2, 1), \; B_{e'} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

8.4 $e_1 = (-1, -6), \quad e_2 = (2, 3), \quad A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (3, -5), \quad e_2' = (-2, -1), \; B_{e'} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

8.5 $e_1 = (8, -4), \quad e_2 = (2, 3), \; A_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (4, 5), \quad e_2' = (3, -1), \; B_{e'} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$

8.6 $e_1 = (2, -4), \quad e_2 = (-9, 3), \; A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (7, 1), \quad e_2' = (-5, 0), \; B_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

8.7 $e_1 = (-3, -4), \quad e_2 = (7, 3), \; A_e = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (0, 5), \quad e_2' = (2, -1); \; B_{e'} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$

8.8 $e_1 = (-1, -1), \quad e_2 = (2, 3); \; A_e = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (3, -4), \quad e_2' = (-2, -1); \; B_{e'} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$

8.9 $e_1 = (1, -4), \quad e_2 = (-2, 3); \; A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$

$e_1' = (5, 0), \quad e_2' = (-10, -1); \; B_{e'} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

8.10 $e_1 = (-3,-9), \quad e_2 = (2,0)$; $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (7,1), \quad e_2' = (0,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

8.11 $e_1 = (1,-4), \quad e_2 = (-2,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-3,5), \quad e_2' = (2,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

8.12 $e_1 = (2,-4), \quad e_2 = (5,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-3,5), \quad e_2' = (2,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8.13 $e_1 = (-8,-4), \quad e_2 = (0,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (0,-2), \quad e_2' = (-2,1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

8.14 $e_1 = (-4,-4), \quad e_2 = (-5,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-6,2), \quad e_2' = (7,-9)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.15 $e_1 = (7,-4), \quad e_2 = (-1,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (2,-8), \quad e_2' = (-11,7)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

8.16 $e_1 = (6,-12), \quad e_2 = (-7,-3)$; $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (1,1), \quad e_2' = (-3,-4)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

8.17 $e_1 = (7,-6), \quad e_2 = (-2,4)$; $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-2,-4), \quad e_2' = (-8,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

8.18 $e_1 = (-6,-4), \quad e_2 = (-3,2)$; $A_e = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-3,5), \quad e_2' = (2,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

8.19 $e_1 = (-6,-1),\quad e_2 = (5,-9)$; $A_e = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-3,5),\quad e_2' = (2,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

8.20 $e_1 = (7,-4),\quad e_2 = (-2,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (4,-20),\quad e_2' = (0,-16)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

8.21 $e_1 = (-3,-4),\quad e_2 = (0,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (14,2),\quad e_2' = (-6,1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8.22 $e_1 = (-5,-2),\quad e_2 = (2,3)$; $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (4,-3),\quad e_2' = (1,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8.23 $e_1 = (0,-20),\quad e_2 = (1,-4)$; $A_e = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-6,-3),\quad e_2' = (1,0)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

8.24 $e_1 = (2,8),\quad e_2 = (3,9)$; $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (3,-3),\quad e_2' = (7,-5)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

8.25 $e_1 = (4,6),\quad e_2 = (-2,9)$; $A_e = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$;

$e_1' = (-1,-1),\quad e_2' = (1,-1)$; $B_{e'} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Задание 9. Пусть в линейном пространстве R_3 заданы линейные операторы $\varphi(x) = (x_3 - 2x_1, -3x_1 + 0{,}5x_2 - 5x_3, -x_2)$ и $\psi(x) = (x_1 + 6x_2, 2x_1 - x_3, x_1)$. Найти их матрицы A и B соответственно и вычислить образ вектора $x = (-4; 8; -11)$ при указанном преобразовании:

9.1 $(2A - B^3)x$;

9.2 $(3A^2 - 2B)x$;

9.3 $(-2AB^2)x$;

9.4 $(AB^3 - A)x$;

9.5 $(B - 5A^2B)x$;

9.6 $(A(A - 4B^2))x$;

9.7 $(B(A - 2B^3))x$;

9.8 $(A(A^2 + 3B))x$;

9.9 $(A(A - 4B^2))x$;

9.10 $(A^3 + 0{,}5B^2)x$;

9.11 $(3(A - 4B^2))x$;

9.12 $(A(A - 4B^2))x$;

9.13 $(-5A^2B^2)x$;

9.14 $(2AB^2 + A)x$;

9.15 $(6AB + B^2)x$;

9.16 $(B - 2AB^2)x$;

9.17 $(4A^2 - B^2)x$;

9.18 $(-2B^2 + 3A)x$;

9.19 $(-4A - 6B^2)x$;

9.20 $(B^2(A + 2B))x$;

9.21 $(BA + 5A^2)x$;

9.22 $(7A - 2B^3)x$;

9.23 $(3BA - B^2)x$;

9.24 $(2B(A - A^3))x$;

9.25 $(A - 2B^3A^2)x$.

Задание 10. Найти образ, ранг, ядро и дефект линейного оператора, заданного матрицей A в соответствующем базисе.

10.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

10.2 $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

10.3 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

10.4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

10.5 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -11 & -5 & 5 \end{pmatrix}$;

10.6 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$;

10.7 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

10.8 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$;

10.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

10.10 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 9 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

10.11 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

10.12 $A=\begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -2 & 8 \\ -2 & -7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

10.13 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 13 & 18 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$;

10.14 $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

10.15 $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

10.16 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

10.17 $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

10.18 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 \\ 6 & -3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 14 & -31 \\ 8 & -4 & -12 & 23 \end{pmatrix}$;

10.19 $A=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \\ -12 & -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$;

10.20 $A=\begin{pmatrix} 5 & 11 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -7 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

10.21 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 \\ 4 & 4 & 12 & -4 \end{pmatrix}$;

10.22 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$;

10.23 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$;

10.24 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$;

10.25 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

Задание 11. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного соответствующей матрицей.

11.1 а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.2 а) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.3 а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

11.4 а) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11.5 а) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

11.6 а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

11.7 а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

11.8 а) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11.9 а) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

11.10 а) $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;б) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

11.11 а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.12 а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.13 а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

11.14 а) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.15 а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.16 а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

11.17 а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.18 а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -9 & -7 \\ 4 & -9 & 0 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

11.19 а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11.20 а) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

11.21 а) $\begin{pmatrix} 11 & 18 & -9 \\ -4 & -7 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11.22 а) $\begin{pmatrix} 7 & 14 & 8 \\ -8 & -15 & -8 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

11.23 а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -8 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.24 а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ -6 & -7 & -24 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

11.25 а) $\begin{pmatrix} -1 & -8 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ»

1. Линейный оператор φ переводит вектор (x, y, z) в вектор $(-3x+4z, -5x-y+2z, x+z)$. Найти образ вектора $(1, -6, 2)$ и прообраз вектора $(0, 1, -1)$.
2. Определить, как изменится матрица линейного оператора, если поменять местами какие-нибудь два базисных вектора.
3. Пусть L –двумерное векторное пространство над полем действительных чисел. Найти собственные векторы и собственные значения для отображения φ – поворот на угол α. Составить характеристическое уравнение.
4. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите все подпространства вещественного трёхмерного пространства, инвариантные относительно линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти ядро и дефект линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

в пространстве R^4

5. КОНТРОЛИРУЮЩИЙ ТЕСТ ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ»

1. Среди отображений пространства R_3 линейными являются:

1) $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3,\ 2x_1 - x_2,\ x_3^2)$;

2) $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ 1)$;

3) $Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_3)$;

4) $Дx = (x_1 - 4x_2^2 - 3,\ 2x_1 - x_2,\ x_1 - x_3)$.

2. Среди преобразований векторов плоскости, исходящих из начала координат линейными не являются:

1) поворот плоскости на некоторый угол вокруг начала координат;

2) параллельный перенос на ненулевой вектор;

3) ортогональное проектирование на прямую, не проходящую через начало координат;

4) гомотетия с центром в начале координат.

3. Образом вектора $x = (1,2,-4)$ при отображении φ, заданного матрицей

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ является вектор:

1) $y = (10,3,-5)$;

2) $y = (-17,22,-22)$;

3) $y = (17,-22,22)$;

4) $y = (0,0,0)$

4. Прообразом вектора $y = (-4,7,5)$ при отображении φ, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ является вектор:

1) $x = (1,2,-4)$;

2) $x = (-10,3,4)$;

3) $x = (-4,7,5)$;

4) $x = (0,10,-13)$.

5. Пусть в некотором базисе матрица линейного оператора φ имеет вид $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1{,}5 & 5\end{pmatrix}$, а матрица оператора ψ имеет вид $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. Тогда матрица преобразования в том же базисе $\varphi\psi$ имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}5{,}5 & -9\\ -2 & 6\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}5{,}5 & -2\\ -9 & 6\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}10 & 1\\ 0 & 1{,}5\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 6\end{pmatrix}$.

6. Ранг линейного оператора φ, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -6 & -1 & 5\end{pmatrix}$ равен:

1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 3.

7. Ядром линейного отображения – ортогонального проектирования на плоскость OYZ пространства R_3 является:

1) ось OY;

2) ось OZ;

3) плоскость OYZ;

4) ось OX.

8. Дефект линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}4 & -6 & 2\\ 6 & -1 & -5\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ равен:

1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 0.

9. Сумма собственных значений матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ линейного оператора с учетом кратности равна:

1) 1; 2) 0; 3) 4; 4) 2.

10. Вектор $x=(0,0,-1,1)$ является собственным для матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

11. К диагональному виду можно привести матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С.* Задачник-практикум по алгебре. Ч. 1. М.: Просвещение, 1982.

2 *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 2006.

3. *Громов А.П.* Учебное пособие по линейной алгебре. М.: Просвещение, 1971.

4. *Косткрикни А.И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.

5. *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение, 1993.

6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.

7. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.

8. *Нечаев В А.* Задачник-практикум по алгебре. М.: Просвещение, 1983.

9. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 2007.

10. Сборник задач по алгебре / Под ред. *А.И. Кострикина.* М.: Факториал, 1995.

11. *Фадеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Понятие линейного оператора. Представление линейного оператора матрицей	2
2.	Действия над линейными преобразованиями и матрицами	17
3.	Ядро и область значений линейного оператора	22
4.	Инвариантные подпространства и индуцированные преобразования	29
5.	Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования	33
6.	Индивидуальное задание	41
7.	Вариант контрольной работы «Линейные операторы»	69
8.	Контролирующий тест по теме «Линейные операторы»	71
9.	Литература	74

Наталья Владимировна Кван,
доцент кафедры МАиМ АмГУ

Линейные операторы
Учебное пособие.

Изд - во АмГУ. Подписано к печати 00.00.09. Формат 60х84/16.

Усл. печ. л. Тираж 100. Заказ .