Федеральное агентство по образованию

*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*

*Серия «Учебно-методический комплекс дисциплин»*

С.Г. Самохвалова

# ТЕОРИЯ ИГР

*Учебно-методическое пособие*

Благовещенск

2009

ББК 32.973 – 0.18.1я73

*Печатается по решению*
*редакционно-издательского совета*
*Амурского государственного*
*университета*

Самохвалова С.Г.

Теория игр. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления» очной формы обучения. – Благовещенск: Амурский государственный университет, 2009.

Основу учебно-методического пособия «Теория игр» составляют краткие теоретические сведения из теории игр, примеры, индивидуальные задания, контрольные вопросы.

Пособие рекомендуется студентам, изучающим дисциплину «Теория принятия решений», а также всем желающим ознакомится с элементами теории игр.

Рецензенты: Алутина Е.Ф., зав. кафедрой информатики и методики преподавания информатики БГПУ, канд. ф.-м. наук;
Масловская А.Г., доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, канд. ф.-м. наук.

© Амурский государственный университет, 2009
© Самохвалова С.Г., 2009

## Введение

Во многих областях человеческой деятельности часто встречается проблема принятия решений в условиях неопределенности, т.е. возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации, возникающие при игре в шахматы, шашки, домино и т.д., относятся к конфликтным: результат каждого хода игрока зависит от ответного хода противника, цель игры – выигрыш одного из партнеров. Во всех этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать.

Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы.

Теория игр – это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов.

Под конфликтом понимают явление, в котором присутствуют следующие компоненты:

- заинтересованные стороны;
- возможные действия каждой из сторон;
- интересы сторон.

В теории игр используются понятия теории множеств, алгебры и теории вероятностей. Теория игр является одной из составных частей математического аппарата кибернетики.

Зарождение теории игр как математической дисциплины связывают с письмом Б. Паскаля к П. Ферма от 29 июля 1654 года. Это же письмо принято считать также началом математической теории вероятностей. В дальнейшем отдельные идеи, которые можно отнести к теоретико-игровым, высказывались математиками Вальдегравом (1712), Д. Бернулли (1732), П. Лапласом (1814), Ж. Бертраном (1888). В 1928 году вышла в свет работа Дж. Неймана «К теории стратегических игр», содержащая основные идеи современной теории игр. С этого времени теория игр вошла в число разделов современной математики

Учебно – методическое пособие «Теория игр» по курсу “Теория принятия решений” составлено для студентов специальности 230102 “Автоматизированные системы обработки информации и управления”.

Его цель – научить студентов строить математические модели для принятия решений в реальных конфликтных ситуациях.

.

## Классификация игр

Игра представляет математическую модель реальной конфликтной ситуации, анализ которой ведется по определенным правилам. В общем случае правилами игры устанавливаются последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат (исход) игры. Правила определяют также конец игры, когда некоторая возможная последовательность выборов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Стороны, участвующие в игре (конфликте), называются ***игроками.*** В спортивной игре игроками могут быть отдельные лица или команды, в военном конфликте – воюющие стороны. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

***Стратегией*** игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. Игра называется ***конечной***, если число стратегий игроков конечно, и ***бесконечной***, если хотя бы у одного из игроков число стратегий является бесконечным. Выбор из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется ***ходом***. Ходы бывают ***личные*** и ***случайные***. Ход называется ***личным,*** если игрок сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (любой ход в шахматной игре). Ход называется ***случайным***, если выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание игральной кости или монеты).

Существует два способа описания игр: ***позиционный*** и ***нормальный.*** ***Позиционный*** способ связан с развернутой формой игры и сводится к графу последовательных шагов (дереву игры). ***Нормальный*** способ заключается в явном представлении совокупности стратегий игроков и платежной функции.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и $n$ игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков - тем больше проблем.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий игра называется бесконечной.

По характеру взаимодействия игры делятся на:

1) бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;
2) коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции наперёд определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 2, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).
Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.)

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

# Матричные игры

## Решение матричных игр в чистых стратегиях

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет $m$ стратегий $i = 1,2,...,m,$ второй имеет $n$ стратегий $j = 1,2,...,n$. Каждой паре стратегий $(i, j)$ поставлено в соответствие число $a_{ij}$, выражающее выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою $i-$ю стратегию, а 2 – свою $j-$ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: игрок 1 выбирает свою $i$-ю стратегию ($i=\overline{1,m}$), 2 – свою $j$-ю стратегию ($j=\overline{1,n}$), после чего игрок 1 получает выигрыш $a_{ij}$ за счёт игрока 2 (если $a_{ij}< 0$, то это значит, что игрок 1 платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i=\overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ часто называется чистой стратегией.

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей $A$ сводится к выбору игроком 1 $i$-й строки, а игроком 2 $j$-го столбца и получения игроком 1 (за счёт игрока 2) выигрыша $a_{ij}$.

Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является ***оптимальной***, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, игрок 1 исследует матрицу выигрышей $A$ следующим образом: для каждого значения $i$ ($i = \overline{1,m}$) определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий игрока 2

$$\min_j a_{ij} \qquad (i = \overline{1,m})$$

т.е. определяется минимальный выигрыш для игрока 1 при условии, что он примет свою $i$-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i = i_o$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е. находится

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_o j_o} = \underline{\alpha} \tag{1}$$

*<u>Определение</u>*. Число $\underline{\alpha}$, определённое по формуле (1) называется *<u>нижней чистой ценой игры</u>* и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Игрок 2 при оптимальном своём поведении должен стремится по возможности за счёт своих стратегий максимально уменьшить выигрыш игрока 1. Поэтому для игрока 2 отыскивается

$$\max_i a_{ij}$$

т.е. определяется max выигрыш игрока 1, при условии, что игрок 2 применит свою $j$-ю чистую стратегию, затем игрок 2 отыскивает такую свою $j = j_1$ стратегию, при которой игрок 1 получит min выигрыш, т.е. находит

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{\alpha} \tag{2}$$

*<u>Определение</u>*. Число $\overline{\alpha}$, определяемое по формуле (2), называется *<u>чистой верхней ценой игры</u>* и показывает, какой максимальный выигрыш за счёт своих стратегий может себе гарантировать игрок 1.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а игрок 2 за счёт применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш игрока 1 больше, чем $\overline{\alpha}$.

*Определение.* Если в игре с матрицей А $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, то говорят, что эта игра имеет *седловую точку* в чистых стратегиях и *чистую цену* игры

$$\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}.$$

*Седловая точка* – это пара чистых стратегий $(i_o, j_o)$ соответственно игроков 1 и 2, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$. В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Математически это можно записать и иначе:

$$a_{ij_o} \le a_{i_o j_o} \le a_{i_o j} \qquad (3)$$

где $i, j$ – любые чистые стратегии соответственно игроков 1 и 2; $(i_o, j_o)$ – стратегии, образующие седловую точку.

Таким образом, исходя из (3), седловой элемент $a_{i_o j_o}$ является минимальным в $i_o$-й строке и максимальным в $j_o$-м столбце в матрице А. Отыскание седловой точки матрицы А происходит следующим образом: в матрице А последовательно в каждой строке находят минимальный элемент и проверяют, является ли этот элемент максимальным в своём столбце. Если да, то он и есть седловой элемент, а пара стратегий, ему соответствующая, образует седловую точку. Пара чистых стратегий $(i_o, j_o)$ игроков 1 и 2, образующая седловую точку и седловой элемент $a_{i_o j_o}$, называется *решением игры*. При этом $i_o$ и $j_o$ называются *оптимальными чистыми стратегиями* соответственно игроков 1 и 2.

Пример 1.

$$\begin{array}{rcl}
 & & \begin{array}{c}\min\limits_j a_{ij} \\ \| \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{r} -3 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\
\max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 4 \end{array}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} &
\end{array}$$

Седловой точкой является пара $(i_o = 3; j_o = 1)$, при которой $\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha} = 2$.

<u>Пример 2.</u>

$$\begin{array}{rccl}
 & & \min\limits_j a_{ij} & \\
H = & \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \to \\ \to \end{array} & \left.\begin{array}{r} 10 \\ 20 \end{array}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 20 \\
\max\limits_i a_{ij} & \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \end{array} & & \\
 & \underbrace{\begin{array}{cc} 40 & 30 \end{array}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 30} & &
\end{array}$$

Из анализа матрицы выигрышей видно, что $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$, т.е. данная матрица не имеет седловой точки. Если игрок 1 выбирает свою чистую максиминную стратегию $i = 2$, то игрок 2, выбрав свою минимаксную $j = 2$, проиграет только 20. В этом случае игроку 1 выгодно выбрать стратегию $i = 1$, т.е. отклониться от своей чистой максиминной стратегии и выиграть 30. Тогда игроку 2 будет выгодно выбрать стратегию $j = 1$, т.е. отклониться от своей чистой минимаксной стратегии и проиграть 10. В свою очередь игрок 1 должен выбрать свою 2-ю стратегию, чтобы выиграть 40, а игрок 2 ответит выбором 2-й стратегии и т.д.

## Смешанное расширение матричной игры

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой седловой точки заканчивается исследование игры. Если же в игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

*Определение*. *Смешанной стратегией игрока* называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Таким образом, если игрок 1 имеет $m$ чистых стратегий $1,2,...,m,$ то его смешанная стратегия $x$ – это набор чисел $x = (x_1, ..., x_m)$ удовлетворяющих соотношениям

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1,m), \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Аналогично для игрока 2, который имеет $n$ чистых стратегий, смешанная стратегия $y$ – это набор чисел

$$y = (y_1, ..., y_n), \quad y_j \geq 0, \quad (j = 1,n), \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Так как каждый раз применение игроком одной чистой стратегии исключает применение другой, то чистые стратегии являются *несовместными* событиями. Кроме того, они являются единственными возможными событиями.

Чистая стратегия есть частный случай смешанной стратегии. Действительно, если в смешанной стратегии какая-либо $i$-я чистая стратегия применяется с вероятностью 1, то все остальные чистые стратегии не применяются. И эта $i$-я чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока.

*Определение*. Средний выигрыш игрока 1 в матричной игре с матрицей $A$ выражается в виде математического ожидания его выигрышей

$$E(A, x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x A y^T$$

Первый игрок имеет целью за счёт изменения своих смешанных стратегий $x$ максимально увеличить свой средний выигрыш $E(A, x, y)$, а второй – за счёт своих смешанных стратегий стремится сделать $E(A, x, y)$ минимальным, т.е. для решения игры необходимо найти такие $x$ и $y$, при которых достигается верхняя цена игры

$$\overline{\alpha} = \min_y \max_x E(A, x, y).$$

Аналогичной должна быть ситуация и для игрока 2, т.е. нижняя цена игры должна быть

$$\underline{\alpha} = \max_x \min_y E(A, x, y).$$

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: *оптимальными смешанными стратегиями* игроков 1 и 2 называются такие наборы $x_0$, $y_0$ соответственно, которые удовлетворяют равенству

$$\min_y \max_x E(A, x, y) = \max_x \min_y E(A, x, y) = E(A, x_0, y_0).$$

Величина $E(A, x_0, y_0)$ называется при этом *ценой игры* и обозначается через $\upsilon$.

Имеется и другое определение оптимальных смешанных стратегий: $x_0$, $y_0$ называются оптимальными смешанными стратегиями соответственно игроков 1 и 2, если они образуют седловую точку:

$$E(A, x, y_0) \leq E(A, x_0, y_0) \leq E(A, x_0, y)$$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называются *решением матричной игры*.

Основная теорема теории игр - теорема Неймана имеет вид:

***Теорема.*** Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

Стратегии игроков, входящие в их оптимальные смешанные стратегии, называются ***активными***.

***Теорема (об активных стратегиях)*** Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры $\gamma$ , независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.

***Теорема (о минимаксе).*** Для матричной игры с любой матрицей $A$ величины

$$\underline{\alpha} = \max_x \min_y E(A, x, y) \text{ и } \overline{\alpha} = \min_y \max_x E(A, x, y)$$

существуют и равны между собой.

## Свойства решений матричных игр

Обозначим через $G(X,Y,A)$ игру двух лиц с нулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает стратегию $x \in X$, игрок 2 – $y \in Y$, после чего игрок 1 получает выигрыш $A = A(x, y)$ за счёт игрока 2.

*Определение*. Стратегия $x^1$ игрока 1 *доминирует* (*строго доминирует*) над стратегией $x^2$, если

$$A(x^1, y) \geq A(x^2, y) \quad (A(x^1, y) > A(x^2, y)),\ y \in Y.$$

Стратегия $y^1$ игрока 2 *доминирует* (*строго доминирует*) над стратегией $y^2$, если

$$A(x, y^1) \leq A(x, y^2) \quad (A(x, y^1) < A(x, y^2)),\ x \in X.$$

При этом стратегии $x^2$ и $y^2$ называются *доминируемыми* (*строго доминируемыми*).

*Спектром смешанной стратегии* игрока в конечной антагонистической игре называется множество всех его чистых стратегий, вероятность которых согласно этой стратегии положительна.

*Свойство 1*. Если чистая стратегия одного из игроков содержится в спектре некоторой его оптимальной стратегии, то выигрыш этого игрока в ситуации, образованной данной чистой стратегией и любой оптимальной стратегией другого игрока, равен значению конечной антагонистической игры.

*Свойство 2*. Ни одна строго доминируемая чистая стратегия игрока не содержится в спектре его оптимальной стратегии.

Игра $G' = (X', Y', A')$ называется подыгрой игры $G\ (X,Y,A)$, если $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, а матрица А′ является подматрицей матрицы $A$. Матрица $A'$ при этом строится следующим образом. В матрице $A$ остаются строки и столбцы, соответствующие стратегиям $X'$ и $Y'$, а остальные “вычеркиваются”. Всё то что “останется” после этого в матрице $A$ и будет матрицей $A'$.

*Свойство 3*. Пусть $G = (X,Y,A)$ – конечная антагонистическая игра, $G' = (X \setminus x', Y, A)$ – подыгра игры $G$, а $x'$ – чистая стратегия игрока 1 в игре $G$, доминируемая некоторой стратегией $\bar{x}$, спектр которой не содержит $x'$. Тогда всякое решение $(x^o, y^o, \upsilon)$ игры $G'$ является решением игры $G$.

*Свойство 4*. Пусть $G = (X,Y,A)$ – конечная антагонистическая игра, $G' = (X, Y \setminus y', A)$ – подыгра игры $G$, а $y'$ – чистая стратегия игрока 2 в игре $G$, доминируемая некоторой стратегией $\bar{y}$, спектр которой не содержит $y'$.Тогда всякое решение игры $G'$ является решением $G$.

*Свойство 5*. Если для чистой стратегии $x'$ игрока 1 выполнены условия свойства 3, а для чистой стратегии $y'$ игрока 2 выполнены условия свойства 4, то всякое решение игры $G' = (X \setminus x', Y \setminus y', A)$ является решением игры $G = (X,Y,A)$.

*Свойство 6*. Тройка $(x_0, y_0, \upsilon)$ является решением игры $G = (X,Y,A)$ тогда и только тогда, когда $(x_0, y_0, \kappa\upsilon + a)$ является решением игры $G(X,Y,\kappa A+a)$, где $a$ – любое вещественное число, $\kappa > 0$.

*<u>Свойство 7</u>*. Для того, чтобы $x_0 = (x_{01},\ldots,x_{0i},\ldots,x_{0m})$ была *<u>оптимальной смешанной стратегией</u>* матричной игры с матрицей $A$ и ценой игры $\upsilon$, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{0i} \geq \upsilon \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{4}$$

Аналогично для игрока 2: чтобы $y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0j}, \ldots, y_{0n})$ была оптимальной смешанной стратегией игрока 2 необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{0j} \leq \upsilon \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{5}$$

Из последнего свойства вытекает: чтобы установить, является ли предполагаемые $(x, y)$ и $\upsilon$ решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли они неравенствам (4) и (5). С другой стороны, найдя неотрицательные решения неравенств (4) и (5) совместно со следующими уравнениями

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \tag{6}$$

получим решение матричной игры.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений линейных неравенств (4) (5) и линейных уравнений (6). Однако это требует большого объёма вычислений, которое растёт с увеличением числа чистых стратегий игроков. (Например для матрицы $3 \times 3$ имеем систему из 6 неравенств и 2 уравнений). Поэтому в первую очередь следует, по возможности используя свойства 2 и 3, уменьшить число чистых стратегий игроков. Затем следует во всех случаях проверить выполнение неравенства

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Если оно выполняется, то игроки имеют чистые оптимальные стратегии (игрок 1 – чистую максиминную, а игрок 2 – чистую минимаксную). В противном случае хотя бы у одного игрока оптимальные стратегии будут смешанные. Для матричных игр небольшого размера эти решения можно найти, применяя свойства 1 – 5.

Пример 3. Пусть $G = (X,Y,A)$, где $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, а функция выигрыша $A$ задана следующим образом:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2C & C & 2C & 3C \\ 3C & 3C/2 & C & 2C \\ 2C & 2C & C & C \\ C & C & C & C/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

где $C > 0$.

Решение. По свойству 6 достаточно решить игру $G^1 = (X,Y,A)$, где $A^1 = \dfrac{1}{C}A$ .

В матричной форме игра $G^1$ определяется матрицей выигрышей

$$A^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Элементы четвёртой строки этой матрицы “ $\le$ ” соответствующих элементов третьей строки и поэтому третья стратегия игрока 1 доминирует над четвёртой. Кроме того, элементы первого столбца матрицы $A^1$ “ $\ge$ ” соответствующих элементов второго столбца, Следовательно, вторая стратегия игрока 2 доминирует над его первой стратегией.

Далее, из свойства 5 следует, что всякое решение игры $G^2 = (X \setminus \{4\}, Y \setminus \{1\}, A^1)$ является решением игры $G^1$. В матричной форме игру $G^2$ можно представить матрицей

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Очевидно, что элементы второй строки " $\geq$" полусуммы соответствующих элементов первой и третьей строк. Кроме того, элементы третьего столбца матрицы $A^2$ " $\geq$" соответствующих элементов второго столбца. Применяя свойство 5 получим, что всякое решение игры $G^3 = (X \setminus \{4,2\},\ Y \setminus \{1,4\},\ A^2)$ является решением игры $G^2$, а следовательно и игры $G^1$. Игра $G^3$ определяется матрицей

$$A^3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матрица $A^3$ не имеет седловой точки, т.к. не выполнено равенство

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

а игра $G^3$ не имеет решения в чистых стратегиях, т.е. оптимальные стратегии игроков являются смешанными. Эти стратегии (в данном случае) легко найти из анализа структуры матрицы $A^3$. Поскольку матрица $A^3$ симметрична, можно предположить, что игроки в оптимальной стратегии используют свои чистые стратегии с равными вероятностями.

Действительно, если игрок 1 выбирает с равными вероятностями стратегии 1 и 3, то при применении любой из двух чистых стратегий игроком 2 математическое ожидание выигрыша игрока 1 будет равным либо

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{3}{2},$$

либо

$$\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Аналогично, если игрок 2 использует свои чистые стратегии 2 и 3 с равными вероятностями, то математическое ожидание его проигрыша будет равно $\frac{3}{2}$. Следовательно, указанные стратегии являются оптимальными в игре $G^3$, а величины $\frac{3}{2}$ – значением игры $G^3$. Из предыдущего следует, что эти стратегии оптимальны и в $G^1$.

Таким образом, стратегия $X = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ является оптимальной стратегией игрока 1, стратегия $Y = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ – оптимальной стратегией игрока 2 в игре $G^1$, а значение игры $G^1$ равно $\frac{3}{2}$. В силу свойства 4 решением игры $G$ будет тройка $(X, Y, \frac{3C}{2})$.

## Игры порядка 2 x 2

В общем случае игра $2 \times 2$ определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Прежде всего необходимо проверить, есть ли у данной игры седловая точка. Если да, то игра имеет решение в чистых стратегиях, причём оптимальными стратегиями игроков 1 и 2 соответственно будут чистая максиминная и чистая минимаксная стратегии. Если же игра с матрицей выигрышей А не имеет чистых стратегий, то оба игрока имеют только такие оптимальные стратегии, которые используют все свои чистые стратегии с положительными вероятностями. В противном случае один из игроков (например 1) имеет чистую оптимальную стратегию, а другой – только смешанные. Не ограничивая общности, можно считать, что оптимальной стратегией игрока 1 является выбор с вероятностью 1 первой строки. Далее, по свойству 1 следует, что $a_{11} = a_{12} = \upsilon$ и матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \upsilon & \upsilon \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для матриц такого вида одна из стратегий игрока 2 является доминируемой. Следовательно, по свойству 4 этот игрок имеет чистую стратегию, что противоречит предположению.

Пусть $X = (\xi,\ 1-\xi)$ – оптимальная стратегия игрока 1. Так как игрок 2 имеет смешанную оптимальную стратегию, из свойства 1 получим, что

$$\begin{cases} a_{11}\xi + a_{21}(1-\xi) = \upsilon, \\ a_{12}\xi + a_{22}(1-\xi) = \upsilon. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\upsilon \neq 0$ столбцы матрицы $A$ не могут быть пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, отличным от единицы. Если же коэффициент пропорциональности равен единице, то матрица $A$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix}$$

и игрок 1 имеет чистую оптимальную стратегию (он выбирает с вероятностью 1 ту из строк, элементы которой не меньше соответствующих элементов другой), что противоречит предположению. Следовательно, если $\upsilon \neq 0$ и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицы $A$ отличен от нуля. Из этого следует, что последняя система уравнений имеет единственное решение. Решая её, находим

$$\xi = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

$$\upsilon = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к тому, что оптимальная стратегия игрока 2 $Y = (\eta,\ 1 - \eta)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\eta + a_{12}(1-\eta) = \upsilon \\ a_{21}\eta + a_{22}(1-\eta) = \upsilon \end{cases}$$

откуда

$$\eta = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

## Графический метод решения игр *2 x n* и *m x 2.*

Этот метод применим только к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Рассмотри игру 2x2, т.к. она является наиболее простым случаем конечных игр. В этой игре каждый из игроков обладает только двумя стратегиями. Если игра 2x2 имеет седловую точку, то решение ее очевидно. Предположим, что игра не имеет седловой точки.

Таблица 1 – Матрица игры

| II / I | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $p^*_A=(p_1,p_2)$, $q^*_B=(q_1,q_2)$ и цену игры $\gamma$ .

Игрок I будет применять стратегию $A_1$ с вероятностью $p_1$ и стратегию $A_2$ с вероятностью $p_2$. Если игрок II применяет стратегию $B_1$, то выигрыш игрока I определяется из уравнения

$$a_{11}p_1+a_{21}p_2=\gamma .$$

Если игрок II будет применять стратегию $B_2$, то выигрыш игрока I не изменится и определяется равенством

$$a_{12}p_1+a_{22}p_2=\gamma .$$

Принимая во внимание условие $p_1+p_2=1$, будем иметь систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными величинами:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим величины $p_1$, $p_2$, т.е. $p^*_A=(p_1,p_2)$ и $\gamma$ .

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока II $q^*_B=(q_1,q_2)$ из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \gamma \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Дадим геометрическую интерпретацию игры 2х2, представленной в таблице 1. Для этого в системе координат X0Y на оси абсцисс отложим отрезок [$A_1$, $A_2$], равный единице, и через концы этого отрезка проведем перпендикулярные к оси абсцисс прямые, на которых будем откладывать выигрыш игрока I (см. рисунок 1).

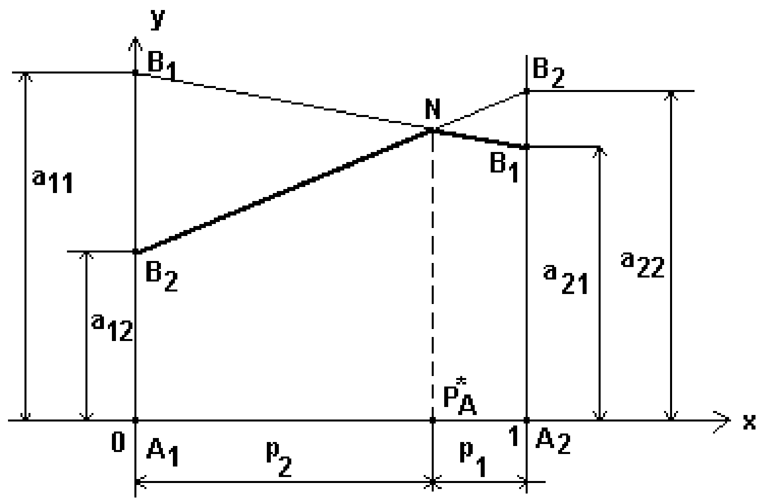


Рис.1

Левый перпендикуляр, совпадающий с осью ординат, соответствует стратегии $A_1$, для которой $p_1$=1, $p_2$=0, а правый равен стратегии $A_2$, для которой $p_1$=0, $p_2$=1. При применении игроком II стратегии $B_1$ выигрыш игрока I будет равен $a_{11}$, если он применяет стратегию $A_1$, и $a_{21}$, если он применяет стратегию $A_2$. Отложив отрезки, равные $a_{11}$ и $a_{21}$, на соответствующих перпендикулярах, получим две точки: $B_1$ на перпендикуляре, который соответствует стратегии $A_1$, и $B_1$ на перпендикуляре, который соответствует стратегии $A_2$. Ордината любой точки отрезка $B_1B_1$ равна величине выигрыша игрока I при применении им стратегии $A_1$ и $A_2$ с вероятностями $p_1$ и $p_2$ соответственно.

Если игрок II применяет стратегию $B_2$, то выигрыш игрока I будет равен $a_{12}$ при применении м стратегии $A_1$ и $a_{22}$ при применении стратегии $A_2$. Проводя аналогичные построения, получим отрезок $B_2B_2$. Ординаты точек, лежащих на отрезке $B_2B_2$, равны среднему выигрышу игрока I, если он применяет стратегии $A_1$ и $A_2$ с вероятностями $p_1$ и $p_2$ соответственно, а игрок II применяет стратегию $B_2$.

Для нахождения оптимальной стратегии $p^*_A$ построим нижнюю границу выигрыша игрока I, т.е. ломанную $B_2NB_1$, отмеченную на рисунке жирной линией. На этой ломаной лежат минимальные выигрыши игрока I при использовании им любой смешанной стратегии.

Оптимальное решение игры определяет точка N, в которой выигрыш игрока I принимает наибольшее значение. Ордината точки N равна цене игры $\gamma$. Проекции этой точки на оси абсцисс соответствует оптимальная стратегия $p^*_A=(p_1,p_2)$, при этом расстояния от точки $p^*_A$ до концов единичного отрезка на оси абсцисс равны вероятностям $p_1$ и $p_2$ стратегий $A_1$ и $A_2$ в оптимальной смешанной стратегии игрока I.

Оптимальная стратегия $q^*_B=(q_1,q_2)$ игрока II находится аналогично. Для этого необходимо поменять местами игроков I и II, т.е. транспонировать платежную матрицу, и вместо максимального значения нижней границы выигрыша находить минимальное значение верхней границы выигрыша (см. рисунок 2).

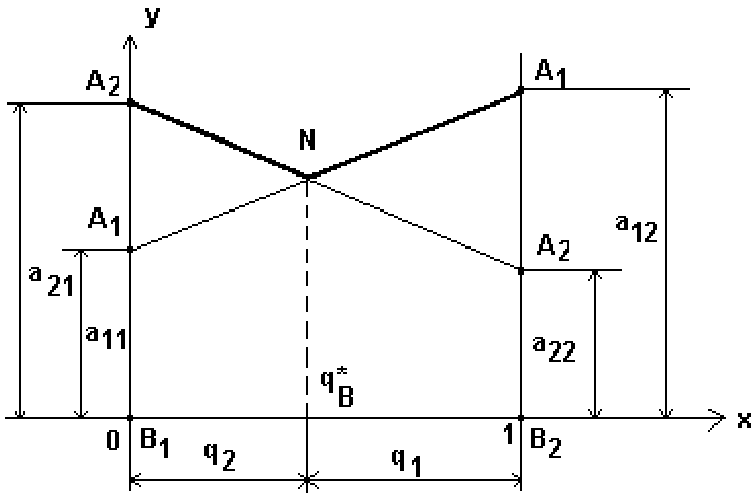


Рис. 2

На рисунках 1 и 2 решение игры определялось точкой пересечения стратегий, однако это справедливо не всегда. Так на рисунке 3 показан случай, когда нижняя граница игрока I совпадает с отрезком $B_1B_2$. Стратегия $B_1$ игрока II является для него невыгодной, так как, применяя ее, он в любом случае проигрывает больше, чем при применении стратегии $B_2$. Здесь $p^*_A=(p_1,p_2)=(0,1)$; $\gamma=a_{22}$. Игра имеет седловую точку.

Любая конечная игра mxn имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит l, где l=min(m,n). Следовательно, у игры 2xn или mx2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков. Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игра 2xn или mx2 превращается в игру 2x2.

Практически решение игры 2xn осуществляется следующим образом:

1) строится графическое изображение игры;

2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы, которая равна цене игры $\gamma$ ;

3) определяется пара стратегий, пересекающихся в точке оптимума.

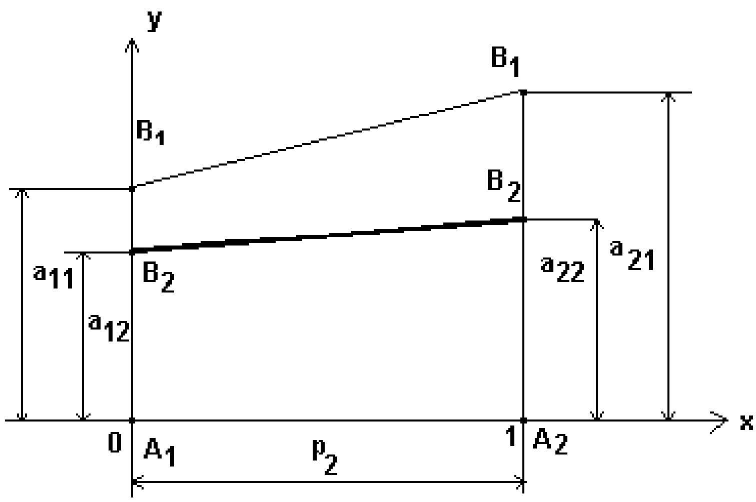


Рис.3

Решение игры mx2 осуществляется аналогично, только при решении игры mx2 выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой.

<u>Пример 4</u>.

Рассмотрим игру, заданную платёжной матрицей.

$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Откладываем на оси абсцисс отрезок единичной длины $A_1$, $A_2$, (каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 ($x, 1-x$). В частности, точке $A_1$ (0;0) отвечает стратегия $A_1$, точке $A_2$ (1;0) – стратегия $A_2$ . На вертикальной оси I – I откладываем отрезки $a_{11} = 1{,}5$ соответствующий стратегии $B_1$, и $a_{12} = 3$ соответствующий стратегии $B_2$. На вертикальной оси II – II отрезок $a_{21} = 2$ соответствующий стратегии $B_1$, отрезок $a_{22} = 1$ соответствует стратегии $B_2$. Нижняя цена игры $\alpha = a_{11} = 1{,}5$. Верхняя цена игры $\beta = a_{21} = 2$, седловая точка отсутствует. На рисунке 4 видно, что абсцисса точки N определяет оптимальную стратегию $S_A^*$, а ордината – цену игры $v$ . Точка $N$ является точкой пересечения прямых $B_1 B_1$ и $B_2 B_2$.

Уравнение прямой $B_1 B_1$, проходящей через точки $(0;1{,}5)$ и $(1;2)$:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1{,}5}{2-1{,}5} \quad \text{или} \quad y=0{,}5x+1{,}5$$

Уравнение прямой $B_2 B_2$, проходящей через точки $(0;3)$ и $(1;\ 1)$:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{1-3} \quad \text{или} \quad y=2x+3.$$

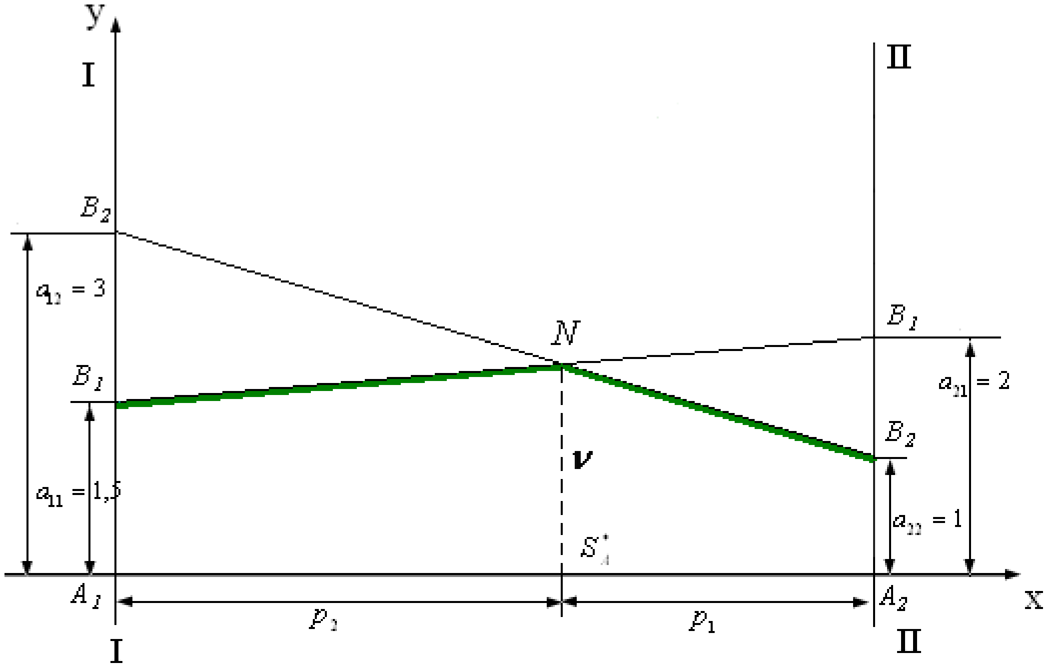


Рис 4.

Точка пересечения прямых является решением системы:

$$\begin{cases} y=0{,}5x+1{,}5 \\ y=-2x+3 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3}{5},\ \text{y}=\frac{9}{5},\ \text{т.е. } N(0{,}6;\ 1{,}8).$$

Таким образом, $p_1=0{,}6,\ p_2=1-0{,}6=0{,}4$; оптимальная стратегия $S_A^*=(0{,}6;\ 0{,}4)$, цены игры $\nu=1{,}8$.

Геометрически можно также определить оптимальную стратегию игрока $B$, если поменять местами игроков $A$ и $B$ и вместо максимума нижней границы $A_2MA_1$ в соответствии с принципом минимакса (рисунок 5.) рассмотреть минимум верхней границы.

Абсцисса точки $M$ определяет $q_2$ в оптимальной стратегии игрока $B$, ордината этой точки – цена игры. Прямая $A_1A_1$, проходящая через точки (0; 1,5) и (1; 3), удовлетворяет уравнению

$$y = 1{,}5x + 1{,}5$$

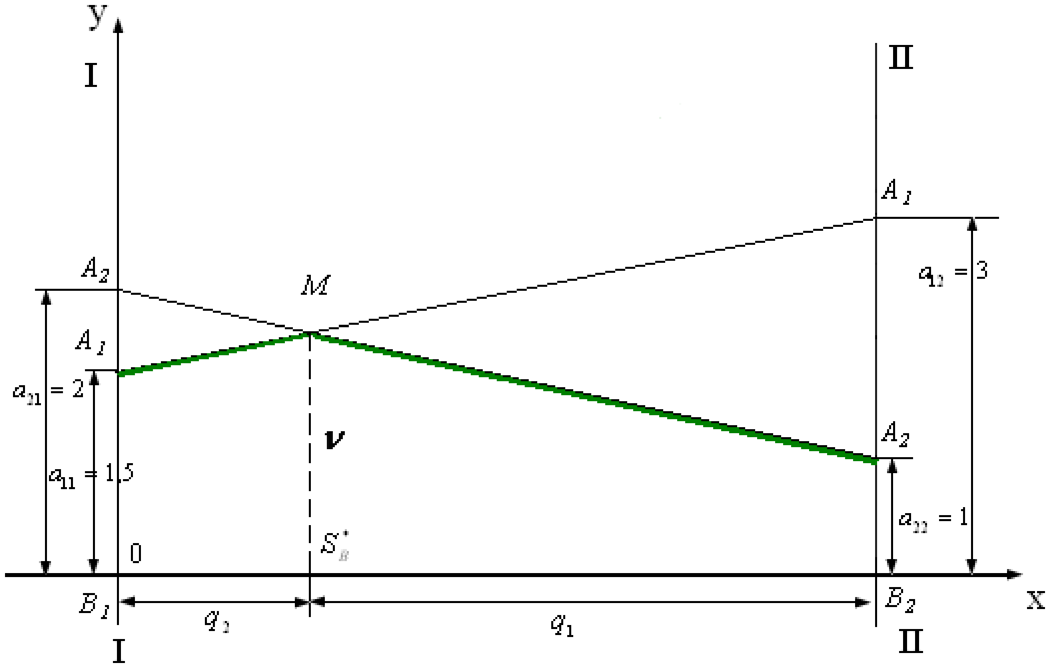


Рис. 5

Прямая $A_2A_2$, проходящая через точки (0; 2) и (1; 1), удовлетворяет уравнению

$$y = -x + 2$$

Координаты их точки пересечения М – это решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 1{,}5x + 1{,}5 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{5},\ y = \frac{9}{5}.$$

Следовательно $q_2 = 0{,}2;\ q_1 = 1 - q_2 = 0{,}8$, оптимальная стратегия $S_B^* = (0{,}8; 0{,}2)$, при цене игры $\upsilon = \dfrac{9}{5}$. Оптимальное решение найдено.

<u>Пример 5</u>. Найти решение игры, заданной матрицей

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

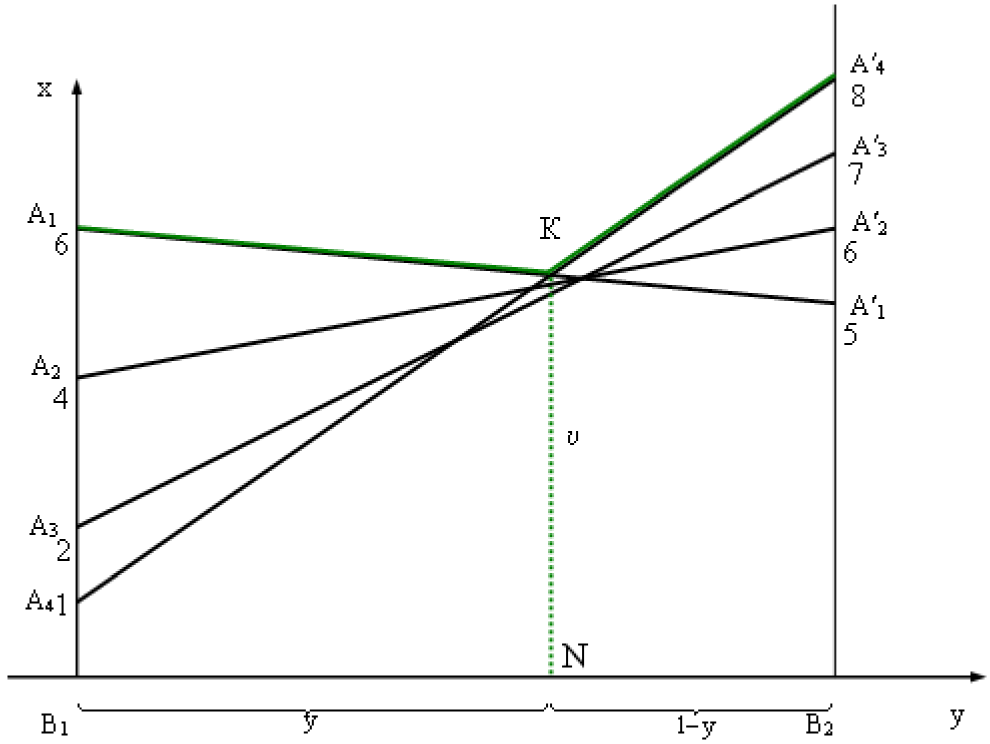


Рис.6.

Решение. Матрица имеет размерность 2 x 4. Строим прямые, соответствующие стратегиям игрока 1. Ломанная $A_1$ K $A'_4$ соответствует верхней границе выигрыша игрока 1, а отрезок N K –цене игры. Решение игры таково

$$Y = \left(\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right); \quad X = \left(\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}\right); \quad \upsilon = \frac{43}{8}.$$

## Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Предположим, что цена игры положительна ($\upsilon > 0$). Если это не так, то согласно свойству 6 всегда можно подобрать такое число $c$, прибавление которого ко всем элементам матрицы выигрышей даёт матрицу с положительными элементами, и следовательно, с положительным значением цены игры. При этом оптимальные смешанные стратегии обоих игроков <u>не изменяются</u>.

Итак, пусть дана матричная игра с матрицей $A$ порядка $m \times n$. Согласно свойству 7 оптимальные смешанные стратегии $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ соответственно игроков 1 и 2 и цена игры $\upsilon$ должны удовлетворять соотношениям.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge \upsilon \quad (j = \overline{1,n}) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \ge 0, \ (i = \overline{1,m}) \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \upsilon \quad (i = \overline{1,m}) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \ge 0, \ (j = \overline{1,n}) \end{cases} \tag{8}$$

Разделим все уравнения и неравенства в (7) и (8) на $\upsilon$ (это можно сделать, т.к. по предположению $\upsilon > 0$) и введём обозначения:

$$\frac{x_i}{\upsilon} = p_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad \frac{y_i}{\upsilon} = q_i \quad (j = \overline{1,n}),$$

Тогда (7) и (8) перепишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{\upsilon}, \quad p_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{\upsilon}, \quad q_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}).$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения $x_i$ и, следовательно, $p_i$ , чтобы цена игры $\upsilon$ была максимальной, то решение первой задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений $p_i$ $(i=\overline{1,m})$, при которых

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq 1. \tag{9}$$

Поскольку второй игрок стремится найти такие значения $y_j$ и, следовательно, $q_j$, чтобы цена игры $\upsilon$ была наименьшей, то решение второй задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений $q_j$, $(j=\overline{1,n})$, при которых

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 1. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) выражают двойственные друг другу задачи линейного программирования.

Решив эти задачи, получим значения $p_i$ $(i=\overline{1,m})$, $q_j$ $(j=\overline{1,n})$ и $\upsilon$. Тогда смешанные стратегии, т.е. $x_i$ и $y_j$ получаются по формулам:

$$\begin{aligned} x_i &= \upsilon p_i \quad (\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}) \\ y_j &= \upsilon q_j \quad (\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}) \end{aligned} \tag{11}$$

Пример 6. Найти решение игры, определяемой матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. При решении этой игры к каждому элементу матрицы $A$ прибавим 1 и получим следующую матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим теперь пару взаимно-двойственных задач:

$$p_1 + p_2 + p_3 \to \min \qquad\qquad q_1 + q_2 + q_3 \to \max$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 1, \\ 2p_1 + \qquad\; p_3 \geq 1, \\ \qquad\qquad\; p_3 \geq 1, \\ p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} q_1 + 2q_2 \qquad \leq 1, \\ q_1 \qquad + q_3 \leq 1, \\ 2q_1 + q_2 \qquad \leq 1, \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решим вторую из них симплекс-методом

| Б.п. | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | $q_6$ | Решение | ∑ | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | –1 | –1 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 | –3 | |
| $q_4$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 | — |
| $q_5$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1/1 |
| $q_6$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | — |

| Б.п. | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | $q_6$ | Решение | ∑ | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | –1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| $q_4$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 | 1/2 |
| $q_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | — |
| $q_6$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 1/1 = 1 |

| Б.п. | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | $q_6$ | Решение | ∑ | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1/2 | 0 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 3/2 | 7/2 | |
| $q_2$ | 1/2 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 1/2 | 5/2 | |
| $q_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | |
| $q_6$ | 3/2 | 0 | 0 | – 1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 5/2 | |

Из оптимальной симплекс-таблицы следует, что

$(q_1, q_2, q_3) = (0; \frac{1}{2}; 1)$,

а из соотношений двойственности следует, что

$(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{2}; 1; 0)$.

Следовательно, цена игры с платёжной матрицей $A_1$ равна

$$\vartheta_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}. \qquad \left( = \frac{1}{q_1 + q_2 + q_3} \right),$$

а игры с платёжной матрицей $A$ :

$$\upsilon = \upsilon_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

При этом оптимальные стратегии игроков имеют вид:

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (\upsilon p_1;\ \upsilon p_2;\ \upsilon p_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\cdot 1; \frac{2}{3}\cdot 0\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = (\upsilon q_1;\ \upsilon q_2;\ \upsilon q_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot 0; \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

## Определение бесконечной антагонистической игры

Естественным обобщением матричных игр являются бесконечные антагонистические игры (БАИ), в которых хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий. Мы будем рассматривать *игры двух игроков, делающих по одному ходу, и после этого происходит распределение выигрышей*. При формализации реальной ситуации с бесконечным числом выборов можно каждую стратегию сопоставить определённому числу из единичного интервала, т.к. всегда можно простым преобразованием любой интервал перевести в единичный и наоборот.

Пусть $E$ – некоторое множество вещественных чисел. Если существует число $y$, такое, что $x \le y$ при всех $x \in E$ (при этом $y$ не обязательно принадлежит $E$), то множество $E$ называется ограниченным сверху, а число $y$ называется верхней границей множества $E$. Аналогично определяется ограниченность снизу и нижняя граница множества $E$. Обозначаются верхняя и нижняя границы соответственно через $\sup E$ и $\inf E$ соответственно.

Пусть множество $E$ состоит из всех чисел вида $\frac{1}{n}$, $n$ = 1,2, ... Тогда множество $E$ ограничено, его верхняя грань равна 1, а нижняя 0, причём $0 \notin E$, а $1 \in E$.

Для дальнейшего изложения теории игр этого класса введём определения и обозначения: [0; 1] – единичный промежуток, из которого игрок может сделать выбор; $x$ – число (стратегия), выбираемое игроком 1; $y$ – число (стратегия), выбираемое игроком 2; $M_i(x,y)$ – выигрыш $i$-го игрока; $G\ (X,Y,M_1,M_2)$ –

игра двух игроков, с ненулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает число $x$ из множества $X$, игрок 2 выбирает число $y$ из множества $Y$, и после этого игроки 1 и 2 получают соответственно выигрыши $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$. Пусть, далее, $G\ (X,Y,M)$ – игра двух игроков с нулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает число $x$, игрок 2 – число $y$, после чего игрок 1 получает выигрыш $M(x, y)$ за счёт второго игрока.

Большое значение в теории БАИ имеет вид функции выигрышей $M(x, y)$. Так, в отличии от матричных игр, не для всякой функции $M(x, y)$ существует решение. Будем считать, что выбор определённого числа игроком означает применение его чистой стратегии, соответствующей этому числу. По аналогии с матричными играми назовём <u>*чистой нижней ценой*</u> игры величину

$$V_1 = \max_x \inf_y M(x, y) \quad \text{или} \quad V_1 = \max_x \min_y M(x, y),$$

а <u>*чистой верхней ценой*</u> игры величину

$$V_2 = \min_y \sup_x M(x, y) \quad \text{или} \quad V_2 = \min_y \max_x M(x, y),$$

Для матричных игр величины $V_1$ и $V_2$ всегда существуют, а в бесконечных играх они могут не существовать.

Естественно считать, что, если для какой-либо бесконечной игры величины $V_1$ и $V_2$ существуют и равны между собой ($V_1 = V_2 = V$), то такая игра имеет решение в чистых стратегиях, т.е. оптимальной стратегией игрока 1 есть выбор числа $x_o \in X$ и игрока 2 – числа $y_o \in Y$, при которых $M(x_o, y_o) = V$, в этом случае $V$ называется ценой игры, а $(x_o, y_o)$ – седловой точкой в чистых стратегиях.

<u>Пример 7</u>. Игрок 1 выбирает число $x$ из множества $X = [0;\ 1]$, игрок 2 выбирает число $y$ из множества $Y = [0;\ 1]$. После этого игрок 2 платит игроку 1 сумму

$$M(x, y) = 2x^2 - y^2.$$

Поскольку игрок 2 хочет минимизировать выигрыш игрока 1, то он определяет

$$\min_{y\in Y}(2x^2 - y^2) = 2x^2 - 1,$$

т.е. при этом y = 1. Игрок 1 желает максимизировать свой выигрыш, и поэтому определяет

$$\max_{x\in X}(\min_{y\in Y} M(x, y)) = \max_{x\in X}(2x^2 - 1) = 2-1 = 1,$$

который достигается при $x = 1$.

Итак, нижняя цена игры равна $V_1 = 1$. Верхняя цена игры

$$V_2 = \min_{y\in Y}(\max_{x\in X}(2x^2 - y^2)) = \min_{y\in Y}(2 - y^2) = 2-1 = 1,$$

т.е. в этой игре $V_1 = V_2 = 1$. Поэтому цена игры $V = 1$, а седловая точка (1;1).

Пример 8. Игрок 1 выбирает $x\in X = (0;\ 1)$, игрок 2 выбирает $y\in Y = (0;\ 1)$. После этого игрок 1 получает сумму

$$M(x, y) = x + y$$

за счёт игрока 2. Поскольку $X$ и $Y$ – открытые интервалы, то на них $V_1$ и $V_2$ не существуют. Если бы $X$ и $Y$ были замкнутые интервалы, то, очевидно, было бы следующее:

$$V_1 = V_2 = 1 \quad \text{при} \quad x_o = 1,\ y_o = 0.$$

С другой стороны, ясно, что, выбирая x достаточно близкое к 1, игрок 1 будет уверен, что он получит выигрыш не меньше, чем число, близкое к цене игры $V = 1$; выбирая $y$ близкое к нулю, игрок 2 не допустит, чтобы выигрыш игрока 1 значительно отличался от цены игры $V = 1$.

Степень близости к цене игры может характеризоваться числом $\varepsilon > 0$. Поэтому в описываемой игре можно говорить об оптимальности чистых стратегий $x_o = 1$, $y_o = 0$ соответственно игроков 1 и 2 с точностью до произвольного числа $\varepsilon > 0$. В связи с этим введём следующие определения.

Точка ($x_\varepsilon, y_\varepsilon$), где $x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$, в антагонистической непрерывной игре $G$ называется *точкой ε-равновесия*, если для любых стратегий $x \in X$ игрока 1, $y \in Y$ игрока 2 имеет место неравенство

$$M(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \le M(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \le M(x_\varepsilon, y) + \varepsilon.$$

Точка ε-равновесия ($x_\varepsilon, y_\varepsilon$) называется также *ε-седловой точкой функции* $M(x, y)$, а стратегии $x_\varepsilon$ и $y_\varepsilon$ называются *ε-оптимальными стратегиями*. Эти стратегии являются оптимальными с точностью до ε в том смысле, что, если отклонение от оптимальной стратегии никакой пользы игроку принести не может, то его отклонение от ε-оптимальной стратегии может увеличить его выигрыш не более, чем на ε.

Можно доказать, что для того, чтобы функция $M$ имела ε-седловые точки для любого $\varepsilon > 0$ необходимо и достаточно чтобы

$$\sup_x \inf_y M(x, y) = \inf_y \sup_x M(x, y).$$

Если игра $G$ не имеет седловой точки (ε-седловой точки) в чистых стратегиях, то оптимальные стратегии можно искать среди смешанных стратегий. Однако, в качестве вероятностной меры здесь вводятся функции распределения вероятностей применения игроками чистых стратегий.

Пусть $F(x)$ – функция распределения вероятностей применения чистых стратегий игроком 1. Если число ξ – чистая стратегия игрока 1, то

$$F(\mathrm{x}) = P(\xi \le x),$$

где $P(\xi \le x)$ означает вероятность того, что случайно выбранная чистая стратегия ξ не будет превосходить числа $x$.

Аналогично рассматривается функция распределения вероятностей применения чистых стратегий $\eta$ игроком 2

$$Q(y) = P(\eta \le y).$$

Функции $F(x)$ и $Q(y)$ называются *смешанными стратегиями* соответственно игроков 1 и 2. Если $F(x)$ и $Q(y)$ дифференцируемы, то существуют их производные, обозначаемые соответственно через $f(x)$ и $q(y)$ (функции плотности распределения).

В общем случае дифференциал функции распределения $dF(x)$ выражает вероятность того, что стратегия $\xi$ находится в промежутке

$$x \le \xi \le x + dx.$$

Аналогично для игрока 2: $dQ(y)$ означает вероятность того, что его стратегия $\eta$ находится в интервале

$$y \le \eta \le y + dy.$$

Тогда выигрыш игрока 1 составит

$$M(x, y)\, dF(x),$$

а выигрыш игрока 2 равен

$$M(x, y)\, dQ(y).$$

Средний выигрыш игрока 1 при условии, что игрок 2 применяет свою чистую стратегию $y$, получим, если проинтегрируем выигрыш по всем возможным значениям $x$, т.е.

$$E(F, y) = \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)$$

Множество $Y$ для $y$ является замкнутым промежутком [0; 1].

Если игрок 1 применяет свою чистую стратегию $x$, а игрок 2 – $y$, то выигрыш игрока 1 составит

$M(x, y)\, dP(\text{x})\, dQ(y)$.

Средний выигрыш игрока 1 при условии, что оба игрока применяют свои смешанные стратегии $F(x)$ и $Q(y)$, будет равен

$$E(\text{F,Q}) = \int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dF(x)\,dQ(y)\,.$$

В антагонистической непрерывной игре $G(X,Y,M)$ пара смешанных стратегий $F^*(x)$ и $Q^*(y)$ соответственно для игроков 1 и 2 образует седловую точку в смешанных стратегиях, если для любых смешанных стратегий $F(x)$ и $Q(y)$ справедливы соотношения

$$E(F,Q^*) \le E(F^*,Q^*) \le E\,(F^*,Q). \qquad (12)$$

Из левой части неравенства (12) следует, что если игрок 1 отступает от своей стратегии $F^*(x)$, то его средний выигрыш не может увеличиться, но может уменьшиться за счёт лучших действий игрока 2, поэтому $F^*(x)$ называется _оптимальной смешанной стратегией игрока 1_.

Из правой части неравенства (12) следует, что если игрок 2 отступит от своей смешанной стратегии $Q^*(y)$, то средний выигрыш игрока 1 может увеличиться, а не уменьшиться, за счёт более разумных действий игрока 1, поэтому $Q^*(y)$ называется _оптимальной смешанной стратегией игрока 2_. Средний выигрыш $E(F^*,Q^*)$, получаемый игроком 1 при применении игроками оптимальных смешанных стратегий, называется _ценой игры_.

По аналогии с матричными играми рассматривается нижняя цена непрерывной игры в смешанных стратегиях

$$V_1 = \max_F \min_Q E(F,Q)$$

и верхняя цена игры

$$V_2 = \min_F \max_Q E(F,Q).$$

Если существуют такие смешанные стратегии $F^*(x)$ и $Q^*(y)$ соответственно для игроков 1 и 2, при которых нижняя и верхняя цены непрерывной игры совпадают, то $F^*(x)$ и $Q^*(y)$ естественно назвать оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков, а $V_1 = V_2 = V$ – ценой игры.

Существование седловой точки в смешанных стратегиях игры $G(X,Y,M)$ равносильно существованию верхней $V_2$ и нижней $V_1$ цен игры в смешанных стратегиях и их равенству $V_1 = V_2 = V$.

Таким образом, решить игру $G(X,Y,M)$ – означает найти седловую точку или такие смешанные стратегии, при которых нижняя и верхняя цены игры совпадают.

**Теорема 1** (существования). Всякая антагонистическая бесконечная игра двух игроков $G$ с непрерывной функцией выигрышей $M(x,y)$ на единичном квадрате имеет решение (игроки имеют оптимальные смешанные стратегии).

**Теорема.** Пусть – бесконечная антагонистическая игра с непрерывной функцией выигрышей $M(x, y)$ на единичном квадрате и ценой игры $V$. Тогда, если $Q(y)$ – оптимальная стратегия игрока 2 и для некоторого $x_o$

$$\int_0^1 M(x_o, y)\,dQ(y) < V,$$

то $x_o$ не может входить в точки спектра оптимальной стратегии игрока 1; если $F(x)$ – оптимальная стратегия игрока 1 и для некоторого $y_o$

$$\int_0^1 M(x, y_o)\,dF(x) > V,$$

то $y_o$ не может быть точкой спектра оптимальной стратегии игрока 2.

Из теоремы следует, что если один из игроков применяет оптимальную стратегию, а другой – чистую, притом что средний выигрыш игрока 1 отличается от цены игры, то эта чистая стратегия не может войти в его оптимальную стратегию (или она входит в неё с вероятностью нуль).

**Теорема.** Пусть в бесконечной антагонистической игре функция выигрышей $M(x,y)$ непрерывная для $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ и

$$M(x, y) = -M(y, x),$$

тогда цена игры равна нулю и любая оптимальная стратегия одного игрока будет также оптимальной стратегией другого игрока.

Сформулированные свойства оптимальных смешанных стратегий и цены игры помогают находить или проверять решения, но они ещё не дают в общем виде приемлемых методов решения игры. Не существует общих методов для точного нахождения решения БАИ, и в том числе непрерывных игр на единичном квадрате, поэтому рассматриваются частные виды антагонистических бесконечных игр.

## Бескоалиционные игры

Антагонистические игры, описывают конфликты весьма частного вида. Более того, для большинства имеющих место в реальной жизни конфликтов антагонистические игры либо вовсе не могут считаться приемлемыми, либо, в лучшем случае, могут рассматриваться как первые грубые приближения.

Во-первых, антагонистические игры никак не затрагивают своими описаниями конфликты с числом строк, большим чем два. Вместе с тем, такие многосторонние конфликты не только встречаются в действительности, но являются принципиально более сложными, чем конфликты с двумя участниками, и даже не поддаются сведению к последним.

Во-вторых, даже в конфликтах с двумя участниками интересы сторон вовсе не обязаны быть противоположными; во многих конфликтах такого рода случается так, что одна из ситуаций оказывается предпочтительнее другой для обоих участников.

В-третьих, даже если любые две ситуации сравниваются игроками по их предпочтительности противоположным образом, различие разностей в оценках этой предпочтительности оставляет место для соглашений, компромиссов и коопераций.

Наконец, в-четвёртых, содержательная острота конфликта не обязательно соответствует его формальной антагонистичности. Например, при встрече двух боевых единиц воюющих сторон (скажем, танков) обоюдное их стремление уничтожить друг друга не выражает антагонистичности конфликта: в антагонистическом конфликте цели сторон оказываются строго противоположными, и стремлению одной стороны уничтожить другую противоположным будет стремление избежать уничтожения.

### Игры двух лиц с произвольной суммой

В конечной бескоалиционной игре двух игроков (КБИДИ) каждый из них делает один ход – выбирает одну стратегию из имеющегося у него конечного числа стратегий, и после этого он получает свой выигрыш согласно определённым для каждого из них матрицами выигрышей. Другими словами КБИДИ полностью определяется двумя матрицами выигрышей для двух игроков. Поэтому такие игры называются биматричными. Пусть у игрока 1 имеется $m$ стратегий, $i = \overline{1, m}$, у игрока 2 имеется $n$ стратегий, $j = \overline{1, n}$. Выигрыши игроков 1 и 2 соответственно задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Будем считать полный набор вероятностей $x = (x_1, ..., x_m)$ применения 1 игроком своих чистых стратегий смешанной стратегией игрока 1, и $y = (y_1, ..., y_n)$ – смешанной стратегией игрока 2. тогда средние выигрыши игроков 1 и 2 соответственно равны

$$\begin{cases} E(A,x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_i y_j = \mathrm{xAy}^{\mathrm{T}} \\ E(B,x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{b}_{ij} x_i y_j = \mathrm{xBy}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{13}$$

Ситуация равновесия для биматричной игры составляет пару $(x,y)$ таких смешанных стратегий игроков 1 и 2, которые удовлетворяют неравенствам:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} y_j \le \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{m}} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} x_i y_j \quad (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}) & (14) \\
\sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{b}_{ij} x_i \le \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{m}} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{b}_{ij} x_i y_j \quad (\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}) & (15)
\end{cases}
$$

или

$$
\begin{cases}
Ay^T \le xAy^T = E_1(A,x,y) & (16) \\
xB \le xBy^T = E_2(B,x,y) & (17)
\end{cases}
$$

Для определения ситуаций равновесия необходимо решить систему неравенств (14) и (15), (16) и (17) относительно неизвестных $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ при условиях

$$
\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad y_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}).
$$

**Теорема** (Нэша). Каждая биматричная игра имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия.

В качестве примера рассмотрим случай, когда каждый игрок имеет две чистые стратегии. В этом случае матрицы $A$ и $B$ равны:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.
$$

Смешанные стратегии для игроков 1 и 2 имеют вид:

$$
(x,\ 1 - x), \quad (y,\ 1 - y) \qquad 0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 1,
$$

а средние выигрыши равны:

$$
E_1(A,x,y) = xA\,y^T = (x;\ 1 - x) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix} =
$$

$$
= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, xy + (a_{12} - a_{22})\, x + (a_{21} - a_{22})\, y + a_{22}.
$$

$$E_2(B,x,y) = xB\,y^T = (x;\ 1-x)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})\,xy + (b_{12} - b_{22})\,x + (b_{21} - b_{22})\,y + b_{22}.$$

Условия (16) и (17) будут выглядеть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \le E_1(A,x,y),$$

$$(x;\ 1-x)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \le E_2(B,x,y),$$

или

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \le \mathrm{E}_1(\mathrm{A},\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \le \mathrm{E}_1(\mathrm{A},\mathrm{x},\mathrm{y}) \end{cases} \qquad (18)$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{21}(1-x) \le \mathrm{E}_2(\mathrm{B},\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ b_{12}x + b_{22}(1-x) \le \mathrm{E}_2(\mathrm{B},\mathrm{x},\mathrm{y}) \end{cases} \qquad (19)$$

Преобразовав (18) и (19), получим

$$\underbrace{(\mathrm{a}_{11} - \mathrm{a}_{12} - \mathrm{a}_{21} + \mathrm{a}_{22})}_{:=\mathrm{a}_1}(1-x)\,y + \underbrace{(\mathrm{a}_{12} - \mathrm{a}_{22})}_{:=-\,\mathrm{a}_2}(1-x) \le 0$$

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\,xy + (a_{12} - a_{22})\,x \ge 0$$

или

$$\begin{cases} a_1(1-x)y - a_2(1-x) \le 0 & (20) \\ a_1xy - a_2x \ge 0 & (21) \end{cases}$$

Множество всех приемлемых стратегий для игрока 1 удовлетворяет условиям (20) и (21), $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Чтобы найти $x$ рассмотрим 3 случая:

1. Если $x = 0$, то (20) справедливо $\forall\, y$, а (21) имеет вид:

$a_1y - a_2 \le 0.$ (22)

2. Если $x = 1$, то (20) справедливо $\forall\, y$, а (21) имеет вид:

$a_1y - a_2 \ge 0.$ (23)

3. Если $0 < x < 1$, то (20) разделим на $(1 - x)$, а (21) – на $x$ и получим

$$\begin{cases} a_1 y - a_2 \le 0, \\ a_1 y - a_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 y - a_2 = 0 \qquad (24)$$

Итак, множество *K* решений системы (20) – (21) состоит из

1) всех ситуаций вида $(0; y)$, если $a_1 y - a_2 \le 0$; $0 \le y \le 1$;

2) всех ситуаций вида $(x; y)$, если $a_1 y - a_2 = 0$; $0 < x < 1$;

3) всех ситуаций вида $(1; y)$, если $a_1 y - a_2 \ge 0$; $0 \le y \le 1$.

Если $a_1 = a_2 = 0$, то решением является $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, т. к. все неравенства (22) – (23) выполняются при всех $x$ и $y$, т. е. множество приемлемых для игрока 1 ситуаций покрывает весь единичный квадрат.

Если $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, то выполняется либо (22), либо (23), и поэтому решением является либо $x = 0$, либо $x=1$ при $0 \le y \le 1$ (приемлемой стратегии в игре не существует).

Если $a_1 > 0$, то из (22) получаем решение

$$x = 0; \ y \le \frac{a_2}{a_1},$$

Из (23) следует ещё решение $x = 1$, $y \ge \alpha$, из (24) следует ещё решение

$$0 < x < 1, \quad y = \alpha.$$

Если $a_1 < 0$, то решение следующее:

$$x = 0, \ y \ge \alpha; \ x = 1, \ y \le \alpha; \ 0 < x < 1, \ y = \alpha.$$

При этом необходимо учитывать, что дополнительно должно быть $0 \le y \le 1$.

Геометрически это выглядит следующим образом:

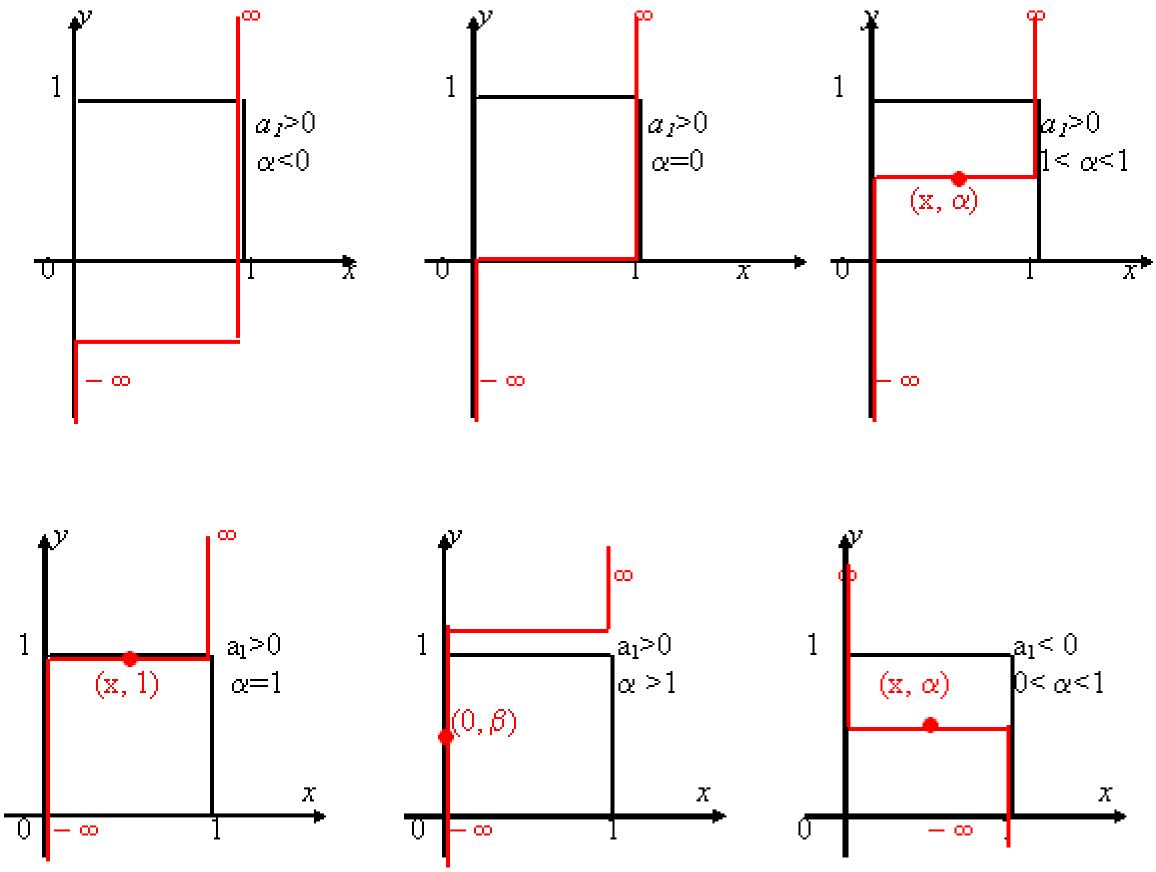


Рис. 5

Для игрока 2 исследования аналогичны. Если ввести обозначения

$$b_1 := b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$$
$$b_2 := b_{22} - b_{21}$$

то множество $L$ приемлемых для него ситуаций состоит из:

1) всех ситуаций вида $(x, 0)$, если $b_1x - b_2 < 0$; $0 \le x \le 1$,

2) всех ситуаций вида $(x, y)$, если $b_1x - b_2 = 0$; $0 \le x \le 1$; $0 < y < 1$,

3) всех ситуаций вида $(x, 1)$, если $b_1x - b_2 > 0$; $0 \le x \le 1$.

Результаты следующие:

если $b_1 = b_2 = 0$, то решение $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$;

если $b_1 = 0$; $b_2 \ne 0$, то решение либо $y = 0$, либо $y = 1$ при $0 \le x \le 1$ (приемлемой стратегии в игре не существует);

если $b_1 > 0$, то решения следующие:

$$y = 0,\ x < \frac{b_2}{b_1} = \beta;\ y = 1,\ x > \beta;\ 0 < y < 1;\ x = \beta;$$

если $b_1 < 0$, то решения следующие:

$$y = 0,\ x > \beta;\ y = 1,\ x < \beta;\ 0 < y < 1;\ x = \beta$$

При этом необходимо учитывать, что $0 \le x \le 1$.

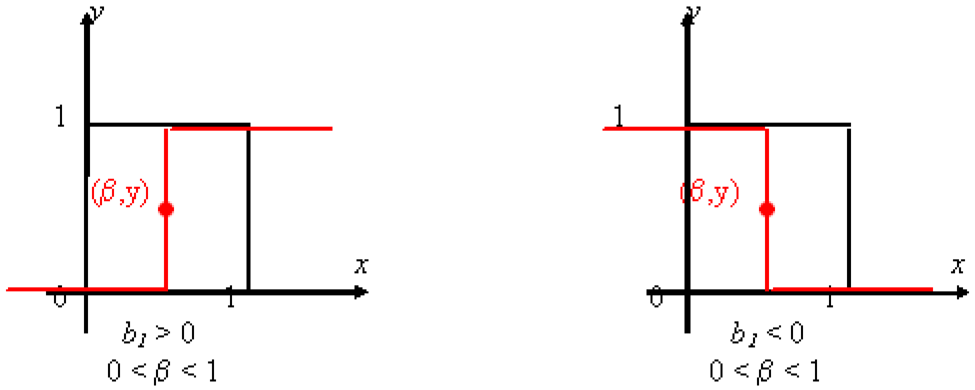


Рис.6

Решением игры является пересечение множеств K и $L$, т.е. те значения $x$ и $y$, которые являются общими для множеств K и $L$.

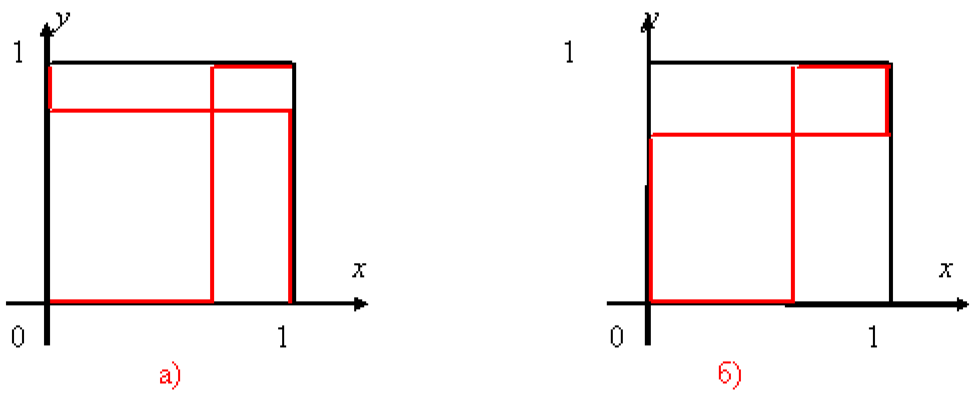


Рис. 7.

При этом зигзаги $K$ и $L$ могут быть не только одинаковой, но и противоположной направленности. В первом случае зигзаги имеют одну точку пересечения, а во - втором – три. Средние выигрыши при этом определяются по формулам (12), если в них подставить полученное решение $x$ и $y$ (рис.7. а)). Очевидно $\alpha$ входит в смешанную стратегию игрока 2, хотя зависит только от выигрышей 1 игрока; $\beta$ входит в смешанную стратегию игрока 1, хотя зависит только от выигрышей игрока 2. Сравнение этих результатов с результатами решения матричных игр с нулевой суммой показывает, что $\alpha$ совпадает с оптимальной стратегией игрока 1 в матричной игре с матрицей *A*, а $\beta$ – с оптимальной стратегией игрока 2 в матричной игре с матрицей *B*. Отсюда можно сделать вывод, что равновесная ситуация направляет поведение игроков не только на *максимизацию* своего выигрыша, сколько на *минимизацию* выигрыша противника.

С другой стороны, естественно также рассматривать подходящим поведение игроков в конечных бескоалиционных играх, направленное на максимизацию своего выигрыша с учётом максимального противодействия игрока, т.е. подходящей стратегией игрока 1 считать оптимальную смешанную стратегию игрока 1 в матричной игре с матрицей *A*, а подходящей стратегией игрока 2 считать оптимальную смешанную стратегию игрока 2 в матричной игре с матрицей *B*, если в ней рассматривать решение с позиций максимизации выигрыша игрока 2, т.е. решать её, как для игрока 1, с матрицей $B^T$.

Пример 9. Министерство желает построить один из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложения министерства или отказать. Министерство – игрок 1 – имеет две стратегии: строить объект 1, строить объект 2. Город – игрок 2 – имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно следующим матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(например: если игроки применяют свои первые стратегии, министерство решает строить 1 объект, а городские власти разрешают его постройку, тогда город получает выигрыш 5 млн, а министерство теряет 10 млн, и т.д.)

Решение. Для этой игры имеем:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14 < 0,$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3,$$

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{14}.$$

Так как $a_1 < 0$, то множество решений $K$ имеет следующий вид:

$(0, y)$ при $\frac{3}{14} \le y \le 1$;

$(x, \frac{3}{14})$ при $0 \le x \le 1$;

$(1, y)$ при $0 \le y \le \frac{3}{14}$.

Для 2 игрока имеем:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 + 2 + 1 + 1 = 9 > 0,$$

$$b_2 = b_{22} - b_{21} = 1 + 1 = 2,$$

$$\beta = \frac{2}{9}.$$

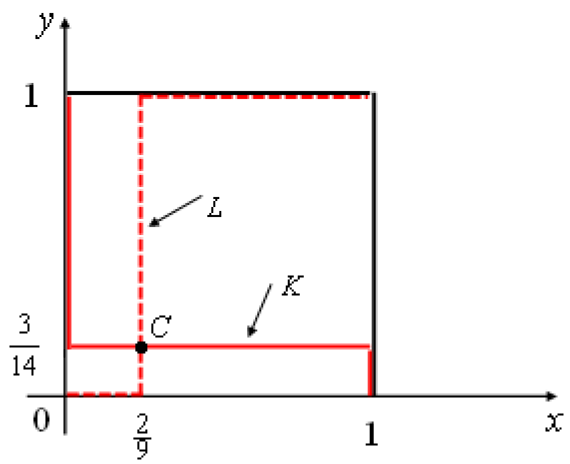


Рис. 7.

Так как $b_1 > 0$, то множество решений имеет следующий вид:

$(x; 0)$, при $0 \le x \le \frac{2}{9}$;

$(\frac{2}{9}; y)$, при $0 \le y \le 1$;

$(x; 1)$, при $\frac{2}{9} \le x \le 1$.

Точка пересечения множеств $L$ и $K$ есть точка $C$ с координатами $x = \frac{2}{9}$; $y = \frac{3}{14}$ и является соответственно приемлемыми стратегиями министерства и города.

При этом выигрыш соответственно равен

$$E_1(A,x,y) = (x,\ 1-x)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{9}; \frac{7}{9}\right)\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/14 \\ 11/14 \end{pmatrix} = -\frac{4}{7}$$

$$E_2(A,x,y) = (x,\ 1-x)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

Если решить эту игру как матричные игры двух игроков с нулевой суммой, то для игры с матрицей А оптимальные смешанные для 1 игрока и цена игры получаются из решения уравнений

$$\begin{cases} -10x^1 + (1 - x^1) = \upsilon_1 \\ 2x^1 - (1 - x^1) = \upsilon_1 \end{cases}$$

откуда вероятность применения игроком 1 первой стратегии равна $x^1 = \frac{2}{14}$, цена игры – $\upsilon_1 = -\frac{4}{7}$, что совпадает с $E_1$, вероятность применения игроком 2 первой стратегии $y^1 = \frac{3}{14}$; для игры с матрицей В оптимальные смешанные стратегии и цена игры для игрока 2 определяются из системы:

$$\begin{cases} 5y^2 - 2(1 - y^2) = \upsilon_2 \\ -y^2 + (1 - y^2) = \upsilon_2 \end{cases}$$

Следовательно, вероятность применения игроком 2 своей стратегии $y^2 = \frac{1}{3}$, а игроком 1 $x^2 = \frac{2}{9}$, цена игры $\upsilon_2 = \frac{1}{3}$, что совпадает с $E_2$.

Таким образом, если каждый из игроков будет применять свои стратегии в этой игре, исходя только из матриц своих выигрышей, то их оптимальные средние выигрыши совпадают с их выигрышами при ситуации равновесия.

## Кооперативные игры

Кооперативные игры получаются в тех случаях, когда, в игре $n$ игроков разрешается образовывать определённые коалиции. Обозначим через $N$ множество всех игроков, $N=\{1, 2, ..., n\}$, а через $K$ – любое его подмножество. Пусть игроки из $K$ договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из $r$ игроков, равно числу сочетаний из $n$ по $r$, то есть $C_n^r$, а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2n - 1.$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом $n$. Образовав коалицию, множество игроков $K$ действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из $n$ игроков.

Функция $\upsilon$, ставящая в соответствие каждой коалиции $K$ наибольший, уверенно получаемый его выигрыш $\upsilon(K)$, называется характеристической функцией игры. Так, например, для бескоалиционной игры $n$ игроков $\upsilon(K)$ может получиться, когда игроки из множества $K$ оптимально действуют как один игрок против остальных $N \backslash K$ игроков, образующих другую коалицию (второй игрок).

Характеристическая функция $\upsilon$ называется простой, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция $\upsilon$ простая, то коалиции $K$, для которых $\upsilon(K)=1$, называются *выигрывающими*, а коалиции $K$, для которых $\upsilon(K) = 0$, – *проигрывающими*.

Если в простой характеристической функции $\upsilon$ выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию $R$, то характеристическая функция $\upsilon$, обозначаемая в этом случае через $\upsilon R$, называется простейшей.

Содержательно простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое “ядро”, голосующее с соблюдением правила “вето”, а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Обозначим через $\upsilon G$ характеристическую функцию бескоалиционной игры. Эта функция обладает следующими свойствами:

**1) персональность**

$$\upsilon G(\varnothing) = 0,$$

т.е. коалиция, не содержащая ни одного игрока, ничего не выигрывает;

**2) супераддитивность**

$$\upsilon G(K \cup L) \geq \upsilon G(K) + \upsilon G(L), \text{ если } K, L \subset N, \ K \cap L \neq \varnothing,$$

т.е. общий выигрыш коалиции не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции;

**3) дополнительность**

$$\upsilon G(K) + \upsilon(N \backslash K) = \upsilon(N)$$

т.е. для бескоалиционной игры с постоянной суммой сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков.

Распределение выигрышей (делёж) игроков должно удовлетворять следующим естественным условиям: если обозначить через $xi$ выигрыш $i$-го игрока, то, во-первых, должно удовлетворяться условие индивидуальной рациональности

$$xi \geq \upsilon(i), \ \text{для} \ i \in N \qquad (25)$$

т.е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции); во-вторых, должно удовлетворяться условие коллективной рациональности

$$\sum_{i\in N} x_i = \upsilon(\mathrm{N}) \qquad (26)$$

т.е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $\upsilon(N)$, то игрокам незачем вступать в коалицию; если же потребовать, чтобы сумма выигрышей была больше, чем $\upsilon(N)$, то это значит, что игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть).

Таким образом, вектор $x = (x1, ..., xn)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется *дележём* в условиях характеристической функции $\upsilon$.

Система $\{N, \upsilon\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям (25) и (26) в условиях характеристической функции, называется *классической кооперативной игрой*.

Из этих определений непосредственно вытекает следующая теорема.

**Теорема.** Чтобы вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ был дележём в классической кооперативной игре $\{N, \upsilon\}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_i = \upsilon(i) + \alpha_i$, $(i\in N)$, причём $\alpha_i \geq 0$ , $(i\in N)$.

$$\sum_{i\in N} \alpha_i = \upsilon(\mathrm{N}) - \sum_{i\in N} \upsilon(\mathrm{i})$$

В бескоалиционных играх исход формируется в результате действий тех самых игроков, которые в этой ситуации получают свои выигрыши. Исходом в кооперативной игре является делёж, возникающий не как следствие действия игроков, а как результат их соглашений. Поэтому в кооперативных играх сравниваются не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи, и сравнение это носит более сложный характер.

Кооперативные игры считаются *существенными*, если для любых коалиций $K$ и $L$ выполняется неравенство

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) < \upsilon(K \cup L),$$

т.е. в условии супераддитивности выполняется строгое неравенство. Если же в условии супераддитивности выполняется равенство

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) = \upsilon(K \cup L),$$

т.е. выполняется свойство аддитивности, то такие игры называются *несущественными*.

Справедливы следующие свойства:

1) для того чтобы характеристическая функция была аддитивной (кооперативная игра – несущественной), необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$\sum_{i \in N} \upsilon(i) = \upsilon(N)$$

2) в несущественной игре имеется только один делёж

$$\{\upsilon(1),\ \upsilon(2),\ \dots,\ \upsilon(n)\};$$

3) в существенной игре с более чем одним игроком множество дележей бесконечно

$$(\upsilon(1) + \alpha_1,\ \upsilon(2) + \alpha_2,\ \dots,\ \upsilon(n) + \alpha_n)$$

где $\alpha_i \geq 0 \quad (i \in N)$, $\upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i) > 0$

Кооперативная игра с множеством игроков $N$ и характеристической функцией $\upsilon$ называется *стратегически эквивалентной* игрой с тем же множеством игроков и характеристической функцией $\upsilon^1$, если найдутся такие $к$

$> 0$ и произвольные вещественные $C_i$ ( $i \in N$ ), что для любой коалиции $K \subset N$ имеет место равенство:

$$\upsilon^{I}(K) = k\,\upsilon\,(K) + \sum_{i \in K} C_i$$

Смысл определения стратегической эквивалентности кооперативных игр состоит в том, что характеристические функции этих игр отличаются только масштабом измерения выигрышей $k$ и начальным капиталом $C_i$. Стратегическая эквивалентность кооперативных игр с характеристическими функциями $\upsilon$ и $\upsilon^{I}$ обозначается так $\upsilon \sim \upsilon^{I}$. Часто вместо стратегической эквивалентности кооперативных игр говорят о стратегической эквивалентности их характеристических функций.

Справедливы следующие свойства для стратегических эквивалентных игр:

1. *Рефлексивность,* т.е. каждая характеристическая функция эквивалентна себе $\upsilon \sim \upsilon$.

2. *Симметрия*, т.е. если $\upsilon \sim \upsilon^1$, то $\upsilon^1 \sim \upsilon$.

3. *Транзитивность*, т.е. если $\upsilon \sim \upsilon^1$ и $\upsilon^1 \sim \upsilon^2$, то $\upsilon \sim \upsilon^2$.

Из свойств рефлексивности, симметрии и транзитивности вытекает, что множество всех характеристических функций единственным образом распадается на попарно непересекающиеся классы, которые называются *классами стратегической эквивалентности*.

Кооперативная игра называется *нулевой*, если все значения её характеристической функции равны нулю. Содержательное значение нулевой игры состоит в том, что в ней игроки не имеют никакой заинтересованности.

Всякая несущественная игра стратегически эквивалентна нулевой.

*Определение.* Кооперативная игра с характеристической функцией $\upsilon$ имеет (0,1)-*редуцированную форму*, если выполняются соотношения:

$$\upsilon(\,i\,) = 0 \qquad (\,i \in N\,),\ \upsilon(N) = 1.$$

**Теорема**. Каждая существенная кооперативная игра стратегически эквивалентна одной и только одной игре в (0,1)-редуцированной форме.

В игре в (0,1)-редуцированной форме дележём является любой вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которого $x_i \geq 0$, $(i \in N)$, $\sum_{i \in N} x_i = 1$.

Индивидуальная работа № 1

**Задание.** Решить и дать графическую интерпретацию для следующих игр

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 & 6 \\ -3 & -4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 & 8 \\ -2 & 10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -7 \\ 2 & -5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & -5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ -7 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \\ 3 & 7 \\ 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \\ 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -7 & 9 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

## Контрольные вопросы

1. Чему равно оптимальное решение в игре двух лиц с нулевой суммой, независимо от того смешанные или чистые стратегии используют игроки?
2. В чем состоит принцип минимакса?
3. Чему равно оптимальное решение в смешанных стратегиях, если в игре *2xn* или *mx2* с нулевой суммой нет оптимального решения в чистых стратегиях?
4. Что такое чистая стратегия игрока?
5. Какая стратегия является оптимальной?
6. Что такое седловая точка?
7. Приведите классификацию игровых моделей принятия решений?
8. Какова процедура формирования платежной матрицы?

## Индивидуальная работа № 2

Найдите решение игры путем сведения ее к задаче линейного программирования, используя следующие платежные матрицы

1. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 3 & \cdot 2 & 5 & \cdot 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & \cdot 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} \cdot 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdot 2 & 2 \\ 3 & 3 & \cdot 3 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot 5 & 3 \\ \cdot 1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & \cdot 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 3 & 7 & \cdot 1 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & \cdot 6 \\ 6 & \cdot 9 & \cdot 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & \cdot 5 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} \cdot 1 & 5 & \cdot 6 \\ 8 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 15. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

## Контрольные работы

1. Как может быть представлена игра двух лиц с нулевой суммой?
2. На что влияет прибавление одного и того же числа ко всем элементам платежной матрице игры двух лиц с нулевой суммой?
3. Каким будет конечный результат игры для игрока А, если максимальное значение в игре двух лиц с нулевой суммой отрицательно?
4. Может игрок улучшить ожидаемый выигрыш, отступив от своей минимаксной стратегии, если игра двух лиц с нулевой суммой устойчива?
5. Обоснуйте возможность применения методов линейного программирования для решения матричных игр в смешанных стратегиях?
6. По какому правилу составляется двойственная задача?

## Список литературы

1. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.
2. Исследование операций. В 2-х книгах. Кн.2. Пер. с англ./ Под.ред. Дж.Моудера, С.Элмаграби. – М.: Мир, 1981.
3. Исследование операций в экономике: Учебн. Пособие для вузов/ Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред.проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
4. Теория игр: Учеб. пособие пособие. / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. – М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998.
5. Г.Вагнер. Основы исследования операций. - М. : Мир, 1973.
6. Ю.И.Дегтярев. Исследование операций. -М.: Высш. школа, 1986.
7. Е.М.Кудрявцев. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. М.: Радио и связь, 1984.
8. Л.С.Костевич, А.А.Лапко. Теория игр. Исследование операций. -Минск : Высшая школа, 1982.
9. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение……………………………………………………………………3

Классификация игр… ………………………………………………………5

Решение матричных игр в чистых стратегиях……………………………7

Решение игр в смешанных стратегиях…..…………………………………..11

Свойства решений матричных игр……………………………………..14

Игры порядка 2х2……………………………………………………..19

Графический метод решений игр 2хn и mх2…………………………..21

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования…………28

Определение бесконечной антагонистической игры…………………………32

Бескоалиционные игры……………………………………………………39

Игры двух лиц с произвольной суммой………………………………….40

Кооперативные игры………………………………………………………49

Индивидуальная работа № 1………………………………………………55

Индивидуальная работа № 2…………………………………………..…56

Список литературы……….........................................................................57

Светлана Геннадьевна Самохвалова

*доцент кафедры Информационных и управляющий систем АмГУ, канд.техн.наук*

**Теория игр**. Учебно-методическое пособие.

---

Из-во АмГУ. Подписано к печати 00.00.2009. Формат 60x84/. Усл. печ. л. , уч.-изд. л. .

Тираж 50. Заказ 000 . Отпечатано в типографии АмГУ.