Министерство образования Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информатики

Т.Е. Гришкина, О.А. Лебедь

Решение задач оптимизации с помощью надстройки Поиск решения

Лабораторный практикум

Благовещенск

2009

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного

университета

Гришкина Т.Е., Лебедь О.А.

Решение задач оптимизации с помощью надстройки Поиск решения. Лабораторный практикум. Благовещенск: Амурский гос. университет, 2009.

Лабораторный практикум является практическим руководством по использованию надстройки «Поиск решения» электронных таблиц Microsoft Excel для решения оптимизационных задач. В нем рассматриваются краткие теоретические сведения, примеры, задания для самостоятельной и контрольной работы.

Лабораторный практикум предназначен для студентов второго курса экономических специальностей.

Рецензент: А.А. Коваль, кандидат технических наук,

доцент кафедры информационных технологий ДальГАУ

Введение

Исследование различных процессов, в том числе и экономических, обычно начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математические соотношения. При этом составляются уравнения или неравенства, которые связывают различные показатели (переменные) исследуемого процесса, образуя систему ограничений. В этих соотношениях выделяются такие переменные, меняя которые можно получить оптимальное значение основного показателя данной системы (прибыль, доход, затраты и т.п.). Соответствующие методы, позволяющие решать указанные задачи, объединяются под общим названием «математическое программирование» или «математические методы исследования операций».

В настоящее время одним из перспективных, но недостаточно распространенных способов численного решения оптимизационных задач математического программирования является использование надстройки «Поиск решения» электронных таблиц Microsoft Excel.

Лабораторный практикум «Решение задач оптимизации с помощью надстройки Поиск решения» призван, на практике, помочь студентам применить знания, полученные по данной теме на лекциях и при самостоятельной работе.

Практикум содержит пять лабораторных работ, в каждой из них приведены краткие теоретические сведения, разобраны типовые задачи, приведены разноуровневые задания для самостоятельной работы.

Необходимо отметить, что в практикуме представлены задачи экономического содержания, они способствуют повышению интереса обучаемых и прикладной направленности данной работы.

Цель этих занятий – приобретение навыков компьютерной реализации оптимизационных экономико-математических моделей.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 «Линейное программирование»

Линейное программирование – это раздел математического программирования, посвященный нахождению экстремума линейных функций нескольких переменных при дополнительных линейных ограничениях, которые налагаются на переменные. Методы, с помощью которых решаются задачи, подразделяются на универсальные (например, симплексный метод) и специальные.

С помощью универсальных методов решаются любые задачи линейного программирования.

Многие проблемы производства, проектирования, прогнозирования сводятся к широкому классу задач оптимизации, для решения которых применяются математические методы. Типовыми задами такого плана являются, например, следующие:

1) ассортимент продукции – максимизация выпуска товаров при ограничениях на сырье для производства этих товаров;
2) штатное расписание – составление штатного расписания для достижения наилучших результатов при наименьших расходах;
3) планирование перевозок – минимизация затрат на транспортировку товаров;
4) составление смеси – достижение заданного качества смеси при наименьших расходах;
5) размер емкости – определение размеров некоторой емкости с учетом стоимости материала для достижения максимального объема;

6) прочие разнообразные задачи оптимального распределения ресурсов и оптимального проектирования и т. д.

Постановка задачи оптимизации в общем случае

№ п/п	Название	Математическая запись	Описание
1	**Целевая функция** (критерий оптимизации)	$F = f(x_j) \to \max(\min, const)$ $j = \overline{1,n}$	Показывает, в каком смысле решение должно быть оптимальным, т.е. наилучшим. 3 вида целевой функции: максимизация, минимизация, назначение заданного значения
2	**Ограничения**	$g_i(x_j) \leq (=, \geq) b_i$ $i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$ $x_j = \overline{1,k} \leq n$ - целые (для задач целочисленного программирования) $0 \leq x_j \leq 1, \quad j = \overline{1,k}$ - для задач с булевыми переменными	Устанавливают зависимости между переменными. Могут быть односторонними и двусторонними. При решении задач двустороннее ограничение записывается в виде двух односторонних
3	**Граничные условия**	$d_j \leq x_j \leq D_j, \ j = \overline{1,n}$	Показывают, в каких пределах могут быть значения искомых переменных в оптимальном решении

Решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям и граничным условиям, называется **допустимым.** Важная характеристика задачи оптимизации – ее размерность, которая определяется числом переменных n и числом ограничений m. Необходимым требованием задач оптимизации является условие $n>m$.

При $n<m$ задачи решения не имеют, а при $n=m$ – задача оптимизации, имеющая одно допустимое решение.

Задача имеет оптимальное решение, если она удовлетворяет двум требованиям:

a) имеет более одного решения;

b) имеется критерий, показывающий, в каком смысле принимаемое решение должно быть оптимальным.

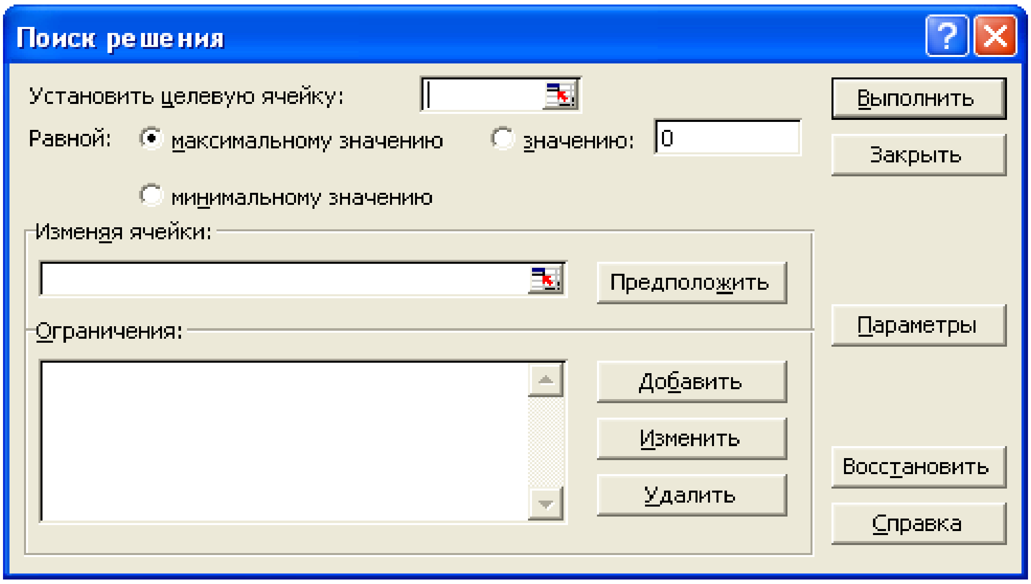
Надстройка Поиск решения

Поиск решения запускается командой Сервис/Поиск решения (если в меню Сервис нет Поиска решения, следует воспользоваться командой Сервис/Надстройки и установить флажок Поиск решения).

Этот инструмент может применяться для решения задач, которые включают много изменяемых ячеек, и помогает найти комбинации переменных, которые максимизируют или минимизируют значения в целевой ячейке. Позволяет задать одно или несколько ограничений – условий, которые должны выполняться при поиске решения.

Перед тем, как начать Поиск решения необходимо четко сформулировать решаемую задачу, т.е. выбрать входные данные и определить ограничения.

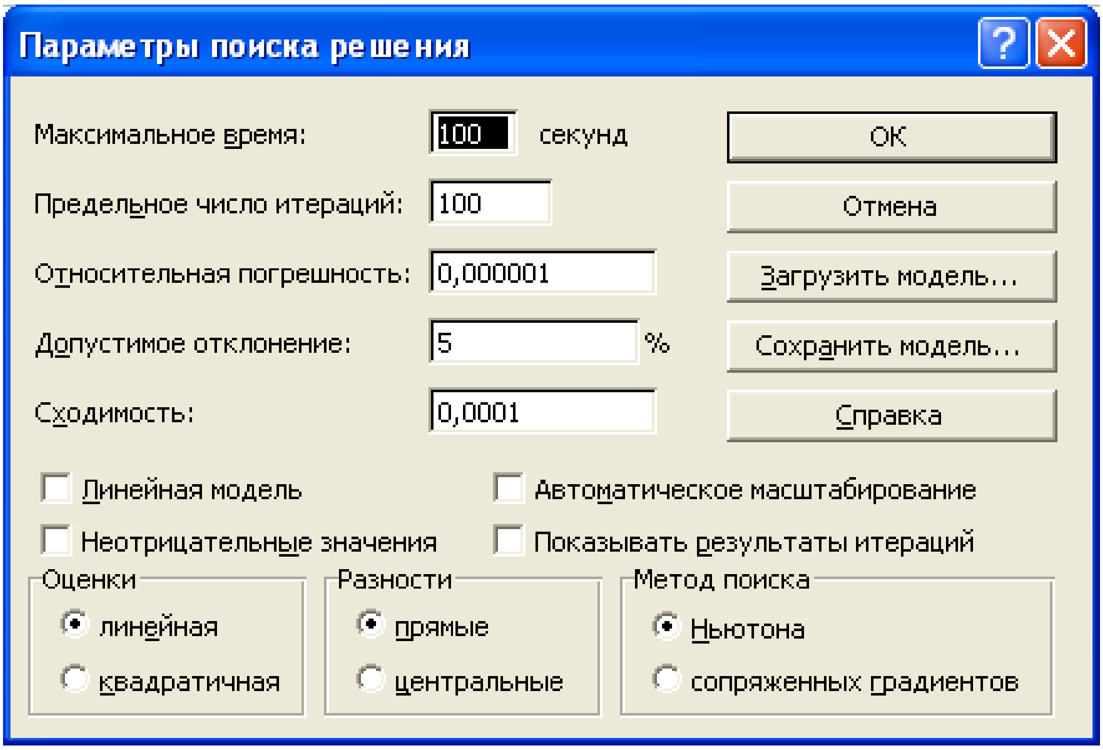
Исходные данные для запуска средства Поиск решения должны быть представлены в виде таблицы, которая содержит формулы, отражающие зависимость между данными таблицы. Целевая ячейка должна содержать формулу, которая прямо или косвенно ссылается на изменяемые ячейки.



Опции окна **Поиск решения**

Опции	Описание
Установить целевую ячейку	Указывается ячейка, содержащая целевую функцию рассматриваемой задачи
Равной	Следует выбрать из 3-х переключателей (максимальному значению, минимальному значению, значению) тот, который определяет тип взаимосвязи между решением и целевой ячейкой
Изменяя ячейки	Указываются ячейки, которые должны изменяться в процессе поиска решения задачи (т.е. ячейки, которые являются переменными задачи). Если значение целевой ячейки не зависит от изменяемых ячеек, поиск решения ничего не сможет найти.
Ограничения	Отображаются ограничения, налагаемые на переменные задачи. Допускаются ограничения в виде равенств, неравенств, а также – требование целочисленности переменных. Ограничения добавляются по одному с помощью кнопки **Добавить**.
Кнопка параметры	Позволяет изменять условия и варианты поиска решений исследуемой задачи, а также загружать и сохранять оптимизируемые модели.

При нажатии кнопки **Параметры** в окне **Поиск решения** открывается окно **Параметры поиска решения.**



Опции окна **Параметры поиска решения**

Опции	Описание
Максимальное время	Ограничивает время, отпускаемое на поиск решения задачи (в поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд).
Предельное число итераций	Ограничивает число промежуточных вычислений.
Относительная погрешность	Определяют точность, с которой ищется решение. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1.Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.
Допустимое отклонение	Служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.
Линейная модель	Служит для поиска решения линейной задачи оптимизации. В случае нелинейной задачи флажок **Линейная модель** должен быть сброшен, в

	случае линейной задачи – установлен, т.к. иначе возможно получение неверного результата.
Показать результаты итераций	Для приостановки поиска решений и просмотра отдельных итераций.
Автоматическое масштабирование	Предназначен для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно различающихся по величине.
Оценки	Служит для выбора метода экстраполяции
Разности	Группа предназначена для выбора метода численного дифференцирования.
Метод поиска	Служит для выбора алгоритма оптимизации.

Поиск решения может решить не всякую задачу. Если Поиск решения не находит оптимального решения задачи, в окне **диалога Результаты поиска решения** выводится сообщение о неудачном завершении поиска.

Решения нет, если:

1) поиск решения не удовлетворяет всем ограничениям. Может произойти из-за того, что ограничения логически противоречивы;
2) поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций). Чтобы не тратить зря время на возможно не решаемую задачу, поиск решения выводит сообщение, без получения оптимального решения;
3) поиск остановлен (истекло заданное на поиск время). Вычисления останавливаются после истечения установленного по умолчанию промежутка времени. Можно увеличить заданное по умолчанию значения.

Построение математической модели задачи

Для построения математической модели задачи необходимо ответить на следующие вопросы:

1) каковы переменные модели (для определения каких величин строится модель)?
2) в чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3) каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

Большую часть задач оптимизации представляют собой задачи линейного программирования, т.е. такие, у которых критерий оптимизации и ограничения - линейные функции. В этом случае для решения задачи следует установить флажок **Линейная модель** в окне **Параметры поиска решения**.

Анализ решения задачи оптимизации

При необходимости проводится анализ решения. Часто добавляют представление решения в виде графиков или диаграмм. Тип отчета выбирается по окончании поиска решения в окне **Результаты поиска решения** в списке **Тип отчета.**

Отчеты бывают 3-х типов: Результаты, Устойчивость, Пределы.

1) отчет типа **Результаты** содержит окончательные значения параметров задачи целевой функции и ограничений;
2) отчет типа **Устойчивость** показывает результаты малых изменений параметров поиска решения;
3) отчет типа **Пределы** показывает изменения решения при поочередной максимизации и минимизации каждой переменной при неизменных других переменных.

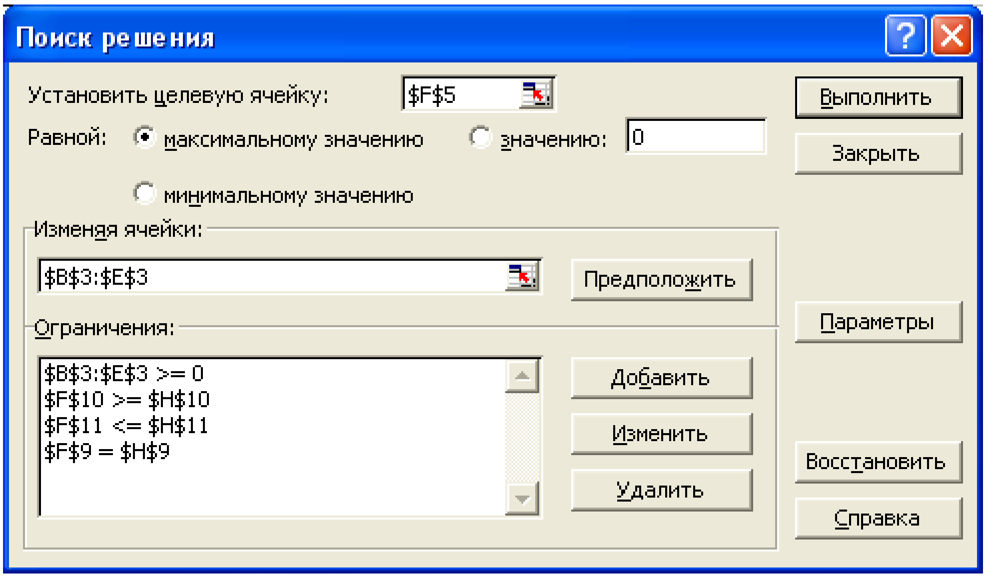
Задача 1. Рассмотрим пример нахождения задачи линейного программирования: $L(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to \max$

при ограничениях $\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756 \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450 \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \leq 89 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1{,}4} \end{cases}$

Решение: Введем исходные данные и формулы в электронную таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Переменные						
2	имя	x1	x2	x3	x4			
3	значение	0	0	0	0			
4						значение ЦФ		
5	коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	=B5*B3+C5*C3+D5*D3+E5*E3	max	
6								
7				Ограничения				
8	вид	коэффициенты				левая часть	знак	правая часть
9	Огран.1	-1,8	2	1	-4	=B9*B3+C9*C3+D9*D3+E9*E3	=	756
10	Огран.2	-6	2	4	-1	=B10*B3+C10*C3+D10*D3+E10*E3	>=	450
11	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	=B11*B3+C11*C3+D11*D3+E3*E11	<=	89

В меню *Сервис* активизируйте команду *Поиск решения* и опишите его параметры, как указано на рисунке. Не забудьте указать в *Параметрах* на *Линейность модели.*



Решение будет таким:

Переменные						
имя	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**		

значение	**100,6607**	**546,4444**	**0**	**38,92492**		
					значение ЦФ	
коэф.ЦФ	130,5	20	56	87,8	**27482,71351**	max

Задача 2. Фирма выпускает 2 типа строительных материалов: А и В. продукция обоих видов поступает в продажу. Для производства материалов используются два исходных продукта: I и II. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 7 и 9 тонн соответственно. Расходы продуктов: I и II на 1 тонну соответствующих материалов приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов, т (на 1 тонну материалов)		Максимально возможный запас
	Материал А	Материал В	
I	3	2	7
II	2	3	9

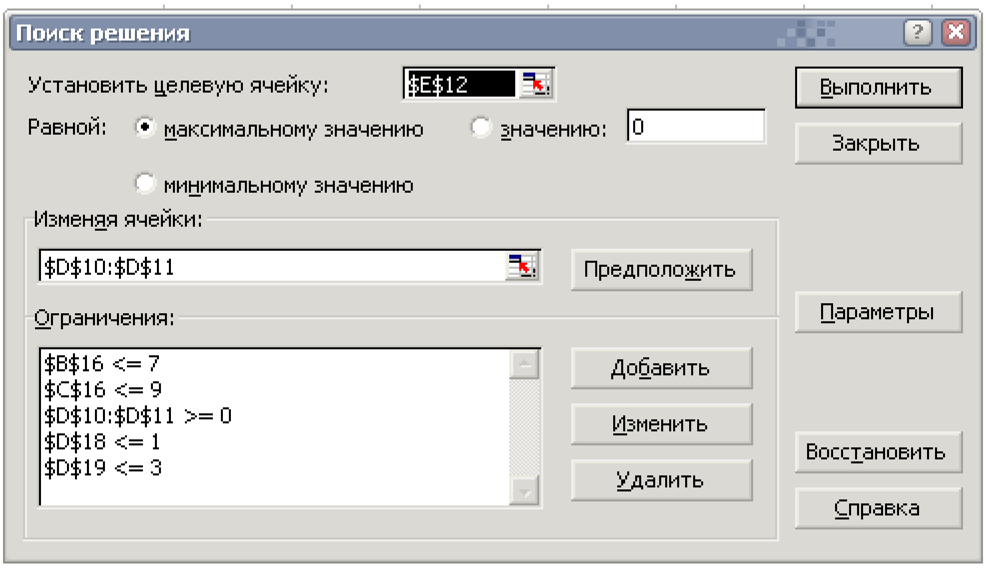
Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на материал В никогда не превышает спроса на материал А более чем на 1 т. Кроме, того спрос на материал А никогда не превышает 3 т. в сутки. Оптовые цены одной тонны материалов равны: 4000 у.е. для В и 3000 у.е. для А. Какое количество материала каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации был максимальным?

<u>Решение:</u> Для того чтобы воспользоваться надстройкой «Поиск решения» необходимо ввести исходные данные и формулы в электронную таблицу, следующим образом:

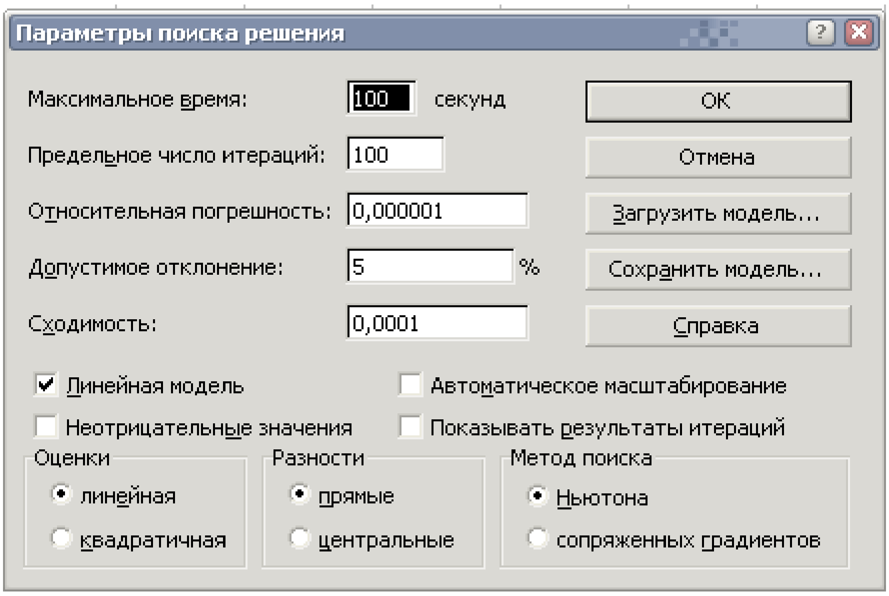
	B	C	D	E	F
1		Исходный продукт	Расход исходных продуктов, т. (на одну тонну материалов)		Максимально возможный запас, т.
2			материал А	материал В	
3					
4		I	3	2	7
5		II	2	3	9
6		цена (у.е.)	3000	4000	
7	Планирование производства материалов				
8					
9			количество	стоимость	

10		материал A	0	=D10*D6	
11		материал B	0	=D11*E6	
12			общая стоимость	=E10+E11	
13	Расход продуктов				
14					
15	I	II			
16	=D10*D4+ D11*E4	=D10*D5+D11*E5			
17			Ограничение на величину спроса на материалы		
18			=D10-D11	1	
19			=D10	3	

В меню *Сервис* активизируйте команду *Поиск решения* и опишите его параметры, как указано на рисунке.



Не забудьте указать в *Параметрах* на *Линейность модели*.



Решение будет таким:

Планирование производства материалов		
	количество	стоимость
материал А	**0,6**	1800
материал В	**2,6**	10400
	общая стоимость	**12200**

Из решения видно, что оптимальный план производства предусматривает изготовление 0,6т. материала А и 2,6т. материала В. Доход фабрики от реализации материала А и В составит 12200 у.е.

Описание отчетов о решении задачи

1. **Отчет по результатам.**

Таблица **Целевая ячейка** выводит сведения о целевой функции; таблица **Изменяемые ячейки** показывает значения искомых переменных, полученных в результате решения задачи; таблица **Ограничения** отображает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий. В поле **Формула** приведены зависимости, которые были введены в окно Поиск решения, в поле **Разница** – величины использованного материала. Если материал используется полностью, то в поле **Статус** указывается **связанное**, при неполном использовании материала в этом поле указывается **не связан**.

Рабочий лист: [Книга1.xls]Лист1
Отчет создан: 12.01.2009 18:50:03

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
E12	общая стоимость	12200	12200

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
D10	материал А количество	0,6	0,6
D11	материал В количество	2,6	2,6

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
B16	I	7	B16<=7	связанное	0
C16	II	9	C16<=9	связанное	0
D18	Ограничение на величину спроса на материалы	-2	D18<=1	не связан.	3
D19	Ограничение на величину спроса на материалы	0,6	D19<=3	не связан.	2,4
D10	материал А количество	0,6	D10>=0	не связан.	0,6
D11	материал В количество	2,6	D11>=0	не связан.	2,6

2. **Отчет по устойчивости.**

В таблице **Изменяемые ячейки** приводится результат решения задачи. В таблице **Ограничения** выводятся значения для ограничений, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1.xls]Лист1
Отчет создан: 12.01.2009 18:50:03

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
D10	материал А количество	0,6	0	3000	3000	333,3333333
D11	материал В количество	2,6	0	4000	500	2000

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
B16	I	7	200	7	3	1
C16	II	9	1200	9	1,5	3
D18	Ограничение на величину спроса на материалы	-2	0	1	1E+30	3
D19	Ограничение на величину спроса на материалы	0,6	0	3	1E+30	2,4

3. **Отчет по пределам.**

В отчете показано, в каких пределах может изменяться количество материалов, вошедших в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения; приводятся значения переменных в оптимальном решении, а также нижние и верхние пределы изменения значений переменных; указаны значения целевой функции при выпуске данного типа продукции на верхнем и нижнем пределах.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Книга1.xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 12.01.2009 18:50:03

Ячейка	Целевое Имя	Значение
E12	общая стоимость стоимость	12200

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
D10	материал А количество	0,6	0	10400	0,6	12200
D11	материал В количество	2,6	0	1800	2,6	12200

Задания к лабораторной работе «Линейное программирование»

Используя «Поиск решения» найти оптимальные значения целевых функций в следующих задачах:

1. При производстве двух видов продукции используется 4 типа ресурсов. Норма расхода ресурсов на производство единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице.

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы продукции первого вида составляет 2 ден. ед., второго вида – 3 ден. ед. Задача состоит в формировании производственной программы выпуска продукции, обеспечивающей максимальную прибыль от ее реализации.

2. Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется, по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед. Какие и сколько

наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

3. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице.

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден. ед. Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание питательных веществ каждого вида было бы не менее установленного предела.

4. Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции первого вида требуется не более двух единиц продукции второго вида. Нормы расходов полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции представлены в таблице.

Полуфабрикаты	Затраты ресурсов на реализацию, тыс. у.е.		Объем полуфабриката
	П1	П2	
1	1	2	800
2	6	2	2400
Прибыль, у.е.	10	35	

Определить план производства, доставляющий максимум прибыли.

5. Необходимо составить диету, состоящую из двух продуктов: А и Б. Дневное питание этими продуктами должно давать не более 14 единиц жира, но и не менее 300 калорий. В одном килограмме продукта А содержится 15 единиц

жира и 150 калорий, а в одном килограмме продукта Б – 4 единицы жира и 200 калорий. При этом цена одного килограмма продукта А равна 15 у.е., а цена одного килограмма продукта Б – 25 у.е. Какое количество продуктов в день необходимо употреблять для соблюдения диеты, чтобы вложенные средства были минимальны?

6. Для изготовления изделий А1 и А2 склад может выделить не более 80 кг металла. Деталей типа А1 завод может изготовить за сутки не более 30 штук, типа А2 – не более 40 штук. Стоимость одного изделия типа А1 составляет 3 у.е., а типа А2 – 5 у.е. На изготовление одного изделия типа А1 идет 2 кг металла, типа А2 – 1 кг. Требуется найти такой план выпуска изделий, который позволит заводу получить максимальную прибыль.

7. Найти решение для модели линейного программирования: $L(X) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \to \max$

при ограничениях $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250 \\ 0{,}4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \le 460 \\ 0{,}5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \le 190 \\ 11x_2 - 8{,}5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 210 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1{,}5} \end{cases}$

8. Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 м^2 досок, а для изделия модели В - 4 м^2. Фирма может получать от своих поставщиков до 1700 м^2 досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 минут машинного времени, а для изделия модели В – 30 минут. В неделю можно использовать 160 ч. машинного времени. Сколько изделий каждой модели следует выпускать фирме в неделю, если каждое изделие модели А приносит 2 у.е. прибыли, а каждое изделие модели В – 4 у.е. прибыли?

9. Магазин реализует три вида продукции П1, П2, П3. Для этого используются два ограниченных ресурса – полезная площадь помещений, которая с учетом коэффициента оборачиваемости составляет 450 $м^2$, и рабочее время работников магазина – 600 человекочасов. Товарооборот должен быть не менее 240 000 у.е. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющего максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию представлены в таблице.

Ресурсы	Затраты ресурсов на реализацию, тыс. у.е.			Объем ресурсов
	П1	П2	П3	
Полезная площадь, $м^2$	1,5	2	3	450
Рабочее время, человекочас	3	2	1,5	600
Прибыль, тыс. у.е.	50	65	70	

10. Найти $L(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

при ограничениях $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 4 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases}$

11. Фирма производит три вида продукции (A, B, C), для выпуска каждого требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах I, II, III, IV.

Вид продукции	Время обработки, ч.				Прибыль, долл.
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Пусть время работы на устройствах соответственно 84, 42, 21 и 42 часа. Определите, какую продукцию, и в каких количествах стоить производить для максимизации прибыли.

12. Для производства трех видов изделий A, B, C используется три различных вида сырья. Каждый вид сырья может быть использован в количестве не

большим 4, 5, 3, соответственно. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице:

Виды сырья	Нормы затрат сырья на единицу продукции			Объем сырья
	A	B	C	
I	2	2	1	4
II	1	3	-	5
III	-	3	1	3
Цена ед. продукции, д.е	1	2	3	

Определите план производства, при котором достигается максимальная прибыль.

13. Фирма производит два продукта A и B, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой машиной I, II, III. Время обработки в часах для каждого из изделий A и B приведено в таблице.

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Время работы машин I, II, III соответственно 40, 36 и 36 часов в неделю. Прибыль от изделий A и B составляет соответственно 5 и 3 доллара. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий A и B, максимизирующие прибыль.

14. Фирма занимается составлением диеты, содержащей, по крайней мере, 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных на рисунке ценах (в рублях) на 1 кг (или литр) пяти имеющихся продуктов?

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

15. Предприятие выпускает продукцию четырех видов П1, П2, П3, П4, для изготовления которой используются ресурсы трех видов: трудовые, сырье и оборудование. Нормы расхода каждого вида ресурса на изготовление единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Ресурс	Вид продукции				Объем ресурса
	П1	П2	П3	П4	
Трудовой	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100

Прибыль, получаемая от реализации единицы продукции, равна: для продукции П1 - 60 у.е., для П2 - 70 у.е., для П3 - 120 у.е., для П4 - 130 у.е. Определить оптимальный план производства каждого вида продукции, максимизирующий прибыль данного предприятия.

16. Совхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в следующей таблице:

Посевы	Массивы		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

За 1 ц. ржи совхоз получает 2 д.е., за 1 ц. пшеницы – 2,8 д.е., за 1 ц. кукурузы – 1,4 д.е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1 900т. ржи, 158 000т. пшеницы и 30 000т. кукурузы?

17. Для выпуска четырех видов продукции Р1, Р2, Р3, Р4 на предприятии используют три вида сырья С1, С2, С3. Объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице.

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		Р1	Р2	Р3	Р4
С1	35	4	2	2	3
С2	30	1	1	2	3

С3	40	3	1	2	1
Прибыль (у.е.)		14	10	14	11

Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль предприятия.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 «Транспортная задача (ТЗ)»

Под термином «транспортные задачи» понимается широкий круг задач не только транспортного характера. Общим является распределение ресурсов, находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов.

Часто встречаются следующие задачи, относящиеся к транспортным:

- прикрепление потребителей ресурса к производителям;
- привязка пунктов отправления к пунктам назначения;
- взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений;
- отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования;
- оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами – изготовителями и др.

Стандартная транспортная задача определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Исходные параметры модели ТЗ

1) m – количество пунктов отправления $(i=\overline{1,m})$, n – количество пунктов назначения $j=\overline{1,n}$.
2) a_i - запас продукции в пункте отправления A_i
3) b_j - спрос на продукцию в пункте назначения B_j

4) c_{ij} - тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j

Требуется найти план прямых поставок, при котором суммарные транспортные затраты будут минимальны.

Искомые параметры модели ТЗ

1) x_{ij} - количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j

2) $L(X)$ - транспортные расходы на перевозку всей продукции.

Этапы построения модели

1) Проверка сбалансированности задачи
2) Построение сбалансированной транспортной задачи
3) Задание целевой функции, ограничений
4) Решение задачи

Математическая запись транспортной задачи:

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ (i=\overline{1,m})\ ;\qquad \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ \ (j=\overline{1,n});\qquad X_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

Модель транспортной задачи называют ***закрытой (сбалансированной),*** если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$

Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется ***открытой (несбалансированной),*** т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Для разрешимости транспортную задачу с открытой моделью следует преобразовать в закрытую.

1) Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный (n+1) – й пункт назначения B_{n+1}, спрос фиктивного потребителя принимается равным $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимость перевозок продукции полагается одинаковой, чаще всего равной нулю (если не задана стоимость складирования продукции).
2) Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный (m+1) – й пункт отправления A_{m+1} с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Стоимость перевозок продукции полагается одинаковой, чаще всего равной нулю (если не задана стоимость штрафов за недопоставку продукции).

Задача

Производство продукции осуществляется на 4-х предприятиях, а затем развозится в 5 пунктов потребления. Предприятия могут выпускать в день 235, 175, 185 и 175 единиц продукции. Пункты потребления готовы принимать ежедневно 125, 160, 60, 250 и 175 единиц продукции. Стоимость перевозки единицы продукции (у.е.) с предприятий в пункты потребления приведена в таблице.

Предприятия	Пункты потребления				
	1	2	3	4	5
1	3,2	3	2,35	4	3,65
2	3	2,85	2,5	3,9	3,55

3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4
4	4	2	2,1	4,1	3,4

Необходимо минимизировать суммарные транспортные расходы по перевозке продукции.

Решение:

1. Проверка сбалансированности модели задачи – модель является сбалансированной, т.к. суммарный объем производимой продукции в день равен суммарному объему потребности в ней: $235+175+185+175=125+160+60+250+175$.
2. Построение математической модели – неизвестными в этой задаче являются объемы перевозок.

Пусть x_{ij} – объем перевозок с i-го предприятия в j-й пункт потребления.

Суммарные транспортные расходы – критерий цели: $L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$, где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i-го предприятия в j-й пункт потребления.

Неизвестные в этой задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

a) объемы перевозок не могут быть отрицательными;
b) так как модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятия, а потребности всех пунктов потребления должны быть полностью удовлетворены.

3. Имеем следующую задачу:

Найти минимум: $L(X)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min$ при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{4}x_{ij}=b_j, \quad j\in[1,5];$$

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i, \quad i\in[1,4];$$

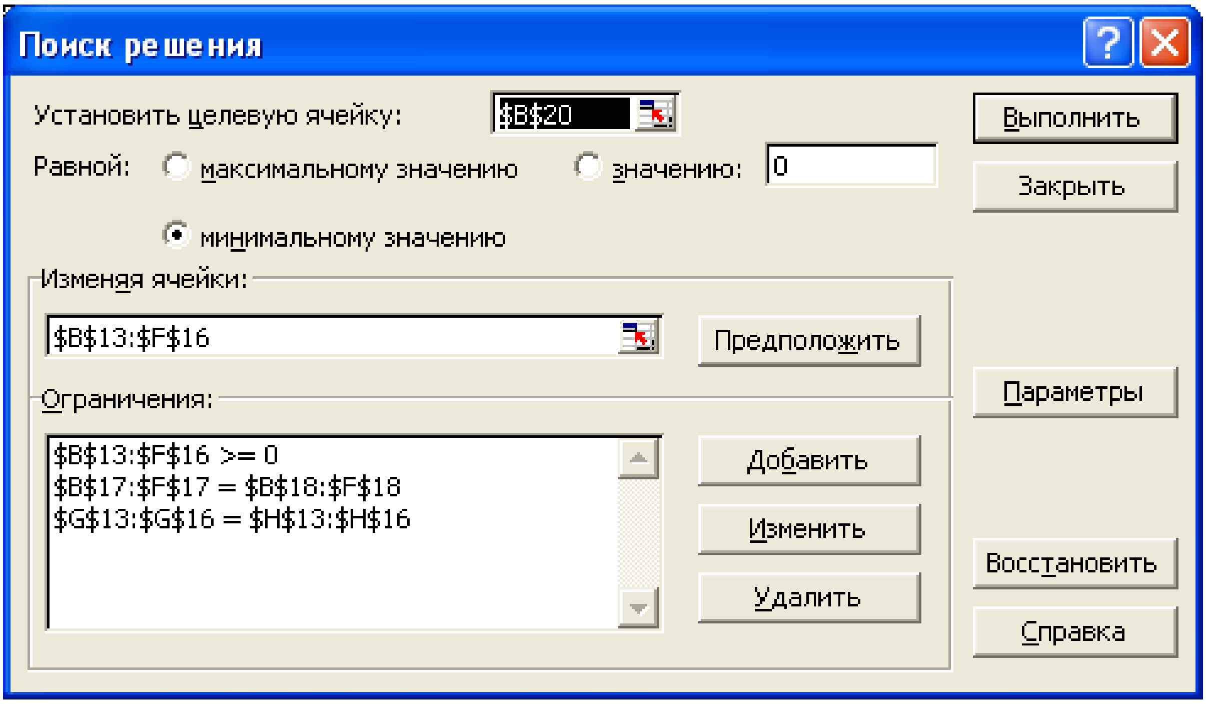
$X_{ij} \geq 0$, $i \in [1,4]$, $j \in [1,5]$

где a_i – объем производства на i-м предприятии, b_j – спрос в j-м пункте потребления.

4. Чтобы воспользоваться надстройкой «Поиск решения» необходимо ввести исходные данные и формулы в электронную таблицу, следующим образом:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Стоимость перевозок**							
2	Предприятия	Пункты потребления						
3		1	2	3	4	5		
4	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
5	2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
6	3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
7	4	4	2	2,1	4,1	3,4		
8								
9								
10	**Оптимальное число перевозок**							
11	Предприятия	Пункты потребления						
12		1	2	3	4	5	Огранич. 2	объемы производства
13	1	0	0	0	0	0	=СУММ(B13:F13)	235
14	2	0	0	0	0	0	=СУММ(B14:F14)	175
15	3	0	0	0	0	0	=СУММ(B15:F15)	185
16	4	0	0	0	0	0	=СУММ(B16:F16)	175
17	Огранич. 1	=СУММ(B13:B16)	=СУММ(C13:C16)	=СУММ(D13:D16)	=СУММ(E13:E16)	=СУММ(F13:F16)		
18	потребность в продукции	125	160	60	250	175		min
19								
20	**целевая ячейка**	=СУММПРОИЗВ (B13:F16;B4:F7)						

5. В меню *Сервис* активизируйте команду *Поиск решения* и опишите его параметры, как указано на рисунке. Не забудьте указать в *Параметрах* на *Линейность модели*.



6. Полученное оптимальное решение:

предприятие	пункты потребления				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	0	60	15	160
2	125	0	0	50	0
3	0	0	0	185	0
4	0	160	0	0	15
Целевая ячейка	**2373,5**				

Минимальные транспортные расходы по перевозке продукции составляют 2373,5 у.е.

Задания к лабораторной работе «Транспортная задача»

1. В угольном бассейне добывается уголь, который хранится на трех складах в количестве 120, 60, 100 ед. соответственно. Добытый уголь доставляется четырем энергетическим установкам в количестве 70, 90, 50 и 70 ед. Стоимость доставки 1 ед. угля из каждого склада соответствующим

энергетическим установкам задана матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Определить оптимальный план доставки угля энергетическим установкам, обеспечивающий суммарные минимальные затраты.

2. На складах А, В, С находится сортовое зерно 100, 150, 250т., которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50т., пункту 2 – 100т., пункту 3 – 200т., пункту 4 – 150т. сортового зерна. Стоимость доставки 1т. зерна со склада А в указанные пункты соответственно равна (д.е) 80, 30, 50, 20; со склада В – 40, 10, 60, 70; со склада С – 10, 90, 40, 30. Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.
3. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190, 90 тонн муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности равны 80, 90, 170, 80 тонн муки. Тарифы перевозок задаются матрицей:

$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Определить оптимальный план доставки муки четырем хлебозаводам, обеспечивающий суммарные минимальные затраты.
4. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 шт., второму – 30 шт., третьему – 20 шт., четвертому – 40 шт. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (д.е.):

Поставщики	Потребители			
	I	II	III	IV
1	18	20	14	10
2	10	20	40	30
3	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей, обеспечивающий минимальные расходы.

5. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.
6. Молочный комбинат может принять на переработку молоко от сельскохозяйственных предприятий в количестве 400 тыс. литров, его филиалы 310 тыс. литров и 510 тыс. литров. В районе производством молока занимаются сельхозпредприятия, мощность которых составляет соответственно 360, 260, 160, 260 тыс. литров. Стоимости перевозки молока заданы таблицей:

3	7	5	6
7	3	8	2
7	11	8	6

Требуется определить оптимальный план перевозки молока от сельхозпредприятий к молочным комбинатам при условии наименьших транспортных затрат.

7. В резерве трех железнодорожных станций А, В, С находятся соответственно 60, 80, 100 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если пункту 1 необходимо 40 вагонов, пункту 2 – 60 вагонов, пункту 3 – 80 вагонов и пункту 4 – 60 вагонов. Стоимости перегонов одного вагона со станции А в указанные пункты

соответственно равны 1, 2, 3, 4 у.е., со станции В – 4, 3, 2 , 1 у.е., со станции С – 1, 2, 2, 1 у.е.

8. Перед менеджером нефтяной компании «Магнум» стоит задача создания схемы поставки нефтепродуктов от четырех нефтеперерабатывающих комплексов компании к пяти регионам страны. Одним из основных условий поставленной задачи является минимизация стоимости перевозок, при этом все мощности нефтеперерабатывающих комплексов должны быть реализованы и все потребности регионов должны быть удовлетворены.

Мощности поставщиков и мощности потребителей, а также стоимость перевозок нефтепродуктов представлены в следующей таблице (в условных единицах).

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				
	600	400	700	500	1000
700	4	8	5	1	6
800	3	5	2	3	4
900	2	6	5	4	3
800	1	4	3	5	3

9. Имеются три сорта бумаги в количестве 10, 8 и 5т., которую можно использовать на издание четырех книг тиражом 8000, 6000, 15000, 10000 экземпляров. Расход бумаги на одну книгу составляет: 0,6; 0,8; 0,4; 0,5 кг, а себестоимость тиража книги при использовании i-го сорта бумаги задается следующей матрицей (д.е.): $\begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}$. Определить оптимальное распределение бумажных резервов.

10. На строительном полигоне имеется пять кирпичных заводов, объем производства которых в сутки равен 600, 600, 500, 650, 700т. Заводы удовлетворяют потребности семи строительных объектов соответственно в количестве 350, 450, 300, 450, 300, 200, 450т. Оставшийся кирпич отправляют по железной дороге в другие районы. Кирпич на строительные

объекты доставляется автомобильным транспортом. Расстояние в километрах от заводов до объектов указано в следующей таблице:

Заводы	Объекты						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	14	5	10	8	16	10	25
A_2	13	4	11	9	20	12	23
A_3	18	8	14	18	23	13	21
A_4	14	7	13	19	15	16	23
A_5	11	15	14	25	19	15	20

Определите, с каких заводов и на какие объекты должен доставляться кирпич, а также какие заводы и в каком количестве должны отправлять кирпич в другие районы, чтобы транспортные издержки по доставке кирпича автотранспортом били минимальными. Стоимость перевозки 1 т. кирпича автотранспортом удовлетворяет условию $c = a + d \cdot (l - 1)$, где $a = 25$ *д.е.*, $d = 5$ *д.е.*, l – *пробег*, *км*.

11. Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью 10, 8 и 6 млн. галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 6, 11 и 7 млн. галлонов. Бензин транспортируется в бензохранилища по трубопроводу. Стоимость перекачки на 1 км составляет 5 д.е. на 100 галлонов. Расстояние от заводов до бензохранилищ следующее:

№ завода	Бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	-
2	420	180	60
3	200	280	120

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и решите на минимум транспортных затрат.

12. Имеются три пункта поставки однородного груза – A_1, A_2, A_3 и пять пунктов потребления этого груза – B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. В пунктах A_1, A_2, A_3 находится груз a_1, a_2, a_3 соответственно. Груз необходимо доставить в пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 соответственно. Расстояния между пунктами в км заданы следующей матрицей:

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \end{pmatrix}$$

Требуется найти оптимальный план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза при условии минимизации общего пробега автомобилей, используя следующие параметры:

a) $A=(\text{۲۰۰}; \text{۱۷۵}; \text{۲۲۵})$ $B=(\text{۱۰۰}; \text{۱۳۰}; \text{۸۰}; \text{۱۹۰}; \text{۱۰۰})$ $D=\begin{pmatrix} \text{۵} & \text{۷} & \text{۴} & \text{۲} & \text{۵} \\ \text{۷} & \text{۱} & \text{۳} & \text{۱} & \text{۱۰} \\ \text{۲} & \text{۳} & \text{۶} & \text{۸} & \text{۷} \end{pmatrix}$

b) $A=(\text{۲۵۰}; \text{۲۰۰}; \text{۲۰۰})$ $B=(\text{۱۲۰}; \text{۱۳۰}; \text{۱۰۰}; \text{۱۶۰}; \text{۱۱۰})$ $D=\begin{pmatrix} \text{۲۷} & \text{۳۶} & \text{۳۵} & \text{۳۱} & \text{۲۹} \\ \text{۲۲} & \text{۲۳} & \text{۲۶} & \text{۳۲} & \text{۳۵} \\ \text{۳۵} & \text{۴۲} & \text{۳۸} & \text{۳۲} & \text{۳۹} \end{pmatrix}$

c) $A=(\text{۳۰۰}; \text{۲۵۰}; \text{۲۰۰})$ $B=(\text{۲۱۰}; \text{۱۷۰}; \text{۲۲۰}; \text{۱۵۰}; \text{۲۰۰})$ $D=\begin{pmatrix} \text{۴} & \text{۸} & \text{۱۳} & \text{۲} & \text{۷} \\ \text{۹} & \text{۴} & \text{۱۱} & \text{۹} & \text{۱۷} \\ \text{۳} & \text{۱۶} & \text{۱۰} & \text{۱} & \text{۴} \end{pmatrix}$

13. Из трех холодильников $A_i (i=\overline{1,3})$, вмещающих мороженую рыбу в количествах 320, 280, 250т. соответственно, необходимо доставить в пять магазинов $B_j (j=\overline{1,5})$ в количествах 150, 140, 110, 230, 220т. Стоимость перевозки 1т рыбы из холодильника A_i в магазин B_j заданы в виде матрицы $C=\begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Написать математическую модель задачи и спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

14. Груз, находящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина.

Первому магазину требуется 44 машины груза, второму – 70, третьему – 50 и четвертому – 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д.е. Расстояние от складов до магазинов указаны в таблице:

Склады	Машины			
	1	2	3	4
1	18	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составить оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3 «Дискретное программирование»

Дискретное программирование изучает экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие дискретности, а область допустимых решений конечна. Это, прежде всего, задачи с физической неделимостью многих факторов и объектов расчета. К дискретному программированию относят ряд задач целочисленного программирования, в которых искомые переменные принимают только целочисленные значения (например, задача о планировании штатного расписания) или логические, булевы, значения – нуль или единица (например, задача о назначениях). Рассмотрим решение задачи о назначениях.

Задача. Каждый из преподавателей может провести определенные виды занятий. Почасовая оплата c_{ij} i-му преподавателю по j-му виду занятий приведена в таблице.

Преподаватели	Почасовая оплата курсов			
	1	2	3	4
1	350	420	610	200
2	890	130	650	900
3	430	520	600	720
4	830	610	780	470

Составить план проведения учебных занятий так, чтобы все виды занятия были проведены, каждый преподаватель проводил занятия только по одному виду, а суммарная стоимость почасовой оплаты была минимальной.

Решение:

1. Проверка задачи на сбалансированность – задача является сбалансированной, так как количество преподавателей соответствует числу возможных видов занятий. В случае несбалансированности задачи необходимо ввести недостающее число фиктивных преподавателей или видов занятий.
2. Построение математической модели задачи.

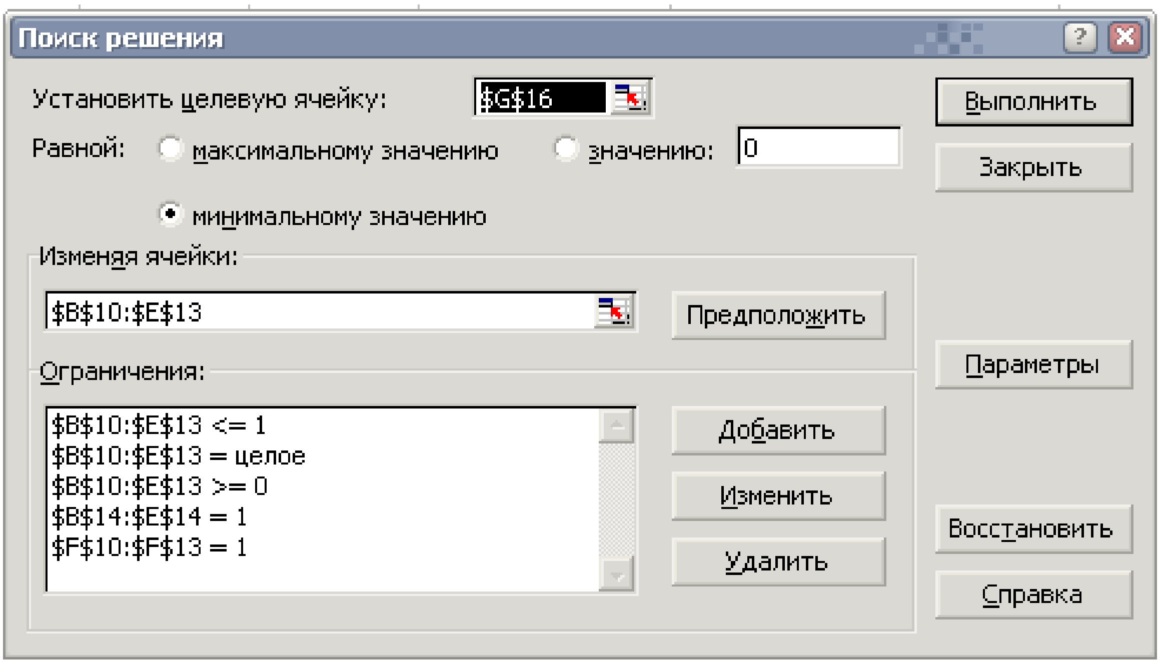
Пусть $x_{ij} = 1$ в случае выполнения i-м преподавателем j-го вида занятий, и $x_{ij} = 0$ – в случае невыполнения вида занятий. Тогда математическая модель задачи примет вид: $L(X) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \to \min$ при ограничениях:

$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$, $j = \overline{1,4}$; $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$, $i = \overline{1,4}$; $X_{ij} \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$

3. Чтобы воспользоваться надстройкой «Поиск решения» необходимо ввести исходные данные и формулы в электронную таблицу, следующим образом:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Преподаватели	Почасовая стоимость видов занятий				
2			1	2	3	4	
3		1	350	420	610	200	
4		2	890	130	650	900	
5		3	430	520	600	720	
6		4	830	610	780	470	
7							
8	Неизвестные задачи						
9		1	2	3	4	ограничения	
10	1	0	0	0	0	=СУММ (B10:E10)	
11	2	0	0	0	0	=СУММ (B11:E11)	
12	3	0	0	0	0	=СУММ (B12:E12)	
13	4	0	0	0	0	=СУММ (B13:E13)	
14	ограничения	=СУММ (B10:B13)	=СУММ (C10:C13)	=СУММ (D10:D13)	=СУММ (E10:E13)		
15						Стоимость всех занятий	=СУММПРОИЗВ (C3:F6;B10:E13)
16							

4. В меню *Сервис* активизируйте команду *Поиск решения* и опишите его параметры, как указано на рисунке. Не забудьте указать в *Параметрах* на *Линейность модели*.



5. Полученное оптимальное решение:

Неизвестные задачи						
	1	2	3	4	Ограничения	
1	**0**	**0**	**0**	**1**	1	
2	**0**	**1**	**0**	**0**	1	
3	**1**	**0**	**0**	**0**	1	
4	**0**	**0**	**1**	**0**	1	
Ограничения	1	1	1	1		
					Стоимость всех занятий	**1540**

Суммарная стоимость почасовой оплаты минимальна и составляет 1540 д.е., при условии, что план проведения учебных занятий следующий: первый преподаватель проводит 4 вид занятия, второй преподаватель – 2 вид занятия, третий преподаватель – 1 вид занятия, четвертый преподаватель – 3 вид занятия.

Задания к лабораторной работе «Дискретное программирование»

1. Каждый из преподавателей может провести определенные виды занятий.

Почасовая оплата c_{ij} i-му преподавателю по j-му виду занятий приведена в таблице, где преподавателям соответствуют строки, а видам занятий – столбцы. Составить план проведения учебных занятий так, чтобы все виды занятия были проведены, каждый преподаватель проводил занятия только по одному виду, а суммарная стоимость почасовой оплаты была минимальной.

a)

Преподаватели	Почасовая оплата курсов				
	1	2	3	4	5
1	310	300	600	520	700
2	500	200	720	800	350
3	320	550	100	590	200
4	600	240	200	980	450

b)

Преподаватели	Почасовая оплата курсов			
	1	2	3	4
1	860	620	200	500
2	510	230	910	860
3	300	800	120	900
4	100	410	210	330
5	300	720	990	500

c)

Преподаватели	Почасовая оплата курсов			
	1	2	3	4
1	320	360	210	650
2	100	200	670	780
3	510	120	110	900
4	270	540	200	950

2. Фирма производит два вида продукции: столы и стулья. Для изготовления одного стула требуется 3 кг древесины, а для изготовления одного стола – 7 кг. На изготовление одного стула уходит два часа рабочего времени, а на изготовление стола – 8 часов. Каждый стул приносит прибыль, равную 1 у.е.,

а каждый стол –3 у.е. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма, если она располагает 420 кг древесины и 400 часами рабочего времени и хочет получить максимальную прибыль?

3. Найти $L(X) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ при ограничениях $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 35 \\ 6x_1 + 43x_2 \le 42 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2} \\ x_1, x_2 - \textit{целые} \end{cases}$

4. Мебельная фабрика производит столы и стулья. Расход ресурсов на их производство и прибыль от их реализации представлены в таблице.

Продукты и ресурсы	Столы	Стулья	Объем ресурсов
Расход древесины на изделие, м ^{3}	0,5	0,04	200
Расход труда, чел.-ч	12	0,6	1800
Прибыль от реализации единицы изделия, руб.	180	20	

Кроме того, на производство 80 столов заключен контракт с муниципалитетом, который, безусловно, должен быть выполнен. Необходимо найти такую оптимальную производственную программу, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной.

5. Перед менеджером фирмы «Стар» стоит задача распределения четырех работников по вакантным должностям по условиям результатов контрольных испытаний. Производительность труда по отдельным видам работ, показанная каждым из работников, приведена в таблице. Одним из основных условий поставленной задачи является максимизация производительности труда в коллективе при условии, что каждый работник может быть назначен только на одну работу.

Работники	Производительность труда работников по должностям			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	5	2
A_2	2	4	8	6
A_3	8	2	7	6

A_4	4	3	5	1

6. Организация арендует баржу грузоподъемностью 83 т, на которой предполагает перевозить груз, состоящий из предметов четырех типов. Веса и стоимости предметов равны соответственно 24 т, 22 т, 16 т, 10 т и 96 у.е., 85 у.е., 50 у.е., 20 у.е. Требуется погрузить на баржу груз максимальной стоимости.
7. На предприятии пять станков различных видов, каждый из которых может выполнять пять различных операций по обработке деталей. Известна производительность каждого станка при выполнении каждой операции, заданная матрицей $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Определить, какую операцию и за каким станком следует закрепить, чтобы суммарная производительность была максимальной при условии, что за каждым станком закреплена только одна операция.
8. Фирма имеет три механизма A_1, A_2, A_3 , каждый из которых может быть использован на каждом из трех видов работ B_1, B_2, B_3 с производительностью, заданном матрицей

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Распределить механизмы по одному на каждую из работ так, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

9. Фирма, имеющая четыре склада, получила четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения

каждой базы имеют вполне достаточное количество товара, чтобы выполнить любой один из этих заказов. Расстояния между каждой базой и каждым потребителем приведены в матрице $\begin{pmatrix} 68 & 72 & 75 & 83 \\ 56 & 60 & 58 & 63 \\ 38 & 40 & 35 & 45 \\ 47 & 42 & 40 & 45 \end{pmatrix}$. Как следует распределить заказы по базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

10. Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего принято решение об установке в одном из цехов дополнительного оборудования, занимающего $\frac{19}{3}$ м^2 площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 у.е., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение 1-го комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 у.е., 2-го вида – 3 у.е. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 шт., а одного комплекта оборудования 2-го вида – на 4 шт. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2 м^2 площади, а для оборудования 2-го вида – 1 м^2 площади. Определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 «Нелинейное программирование»

Задача нелинейного программирования формулируется подобно задаче линейного программирования, но с учётом того, что целевая функция или/и хотя бы одно ограничение являются нелинейными. Вследствие этого задачи нелинейного программирования (НП) сложнее задач линейного программирования (ЛП). И для них не существует общего метода решения, который был бы аналогичен симплексному методу в ЛП. Следует так же заметить, что задачи нелинейного программирования включают так же нелинейные целочисленные задачи и задачи дискретного программирования.

С учётом методов решения, задачи нелинейной оптимизации делятся на задачи условной оптимизации (поиск экстремума функции с учётом дополнительных условий в виде ограничений и граничных условий) и задачи безусловной оптимизации (поиск экстремума функции без всяких дополнительных условий). Для решения такого типа задач существует много различных методов. Применение того или оного метода решения зависит от типа нелинейности. Надстройка **Поиск решения** помогает облегчить численное решение задач нелинейного программирования.

Решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными с помощью средства Поиск решения

Надстройка **Поиск решения** позволяет находить решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = C_1 \\ f_2(x,y) = C_2 \end{cases}, \qquad (1)$$

где: $f_i(x,y), i = 1{,}2$ – нелинейная функция от переменных x и y, $C_i, i = ١,٢$ –произвольная постоянная.

Известно, что пара (x,y) является решением системы уравнений (1) тогда, когда она является решением следующего нелинейного уравнения с двумя неизвестными:

$$\left(f_١(x,y) - C_١\right)^٢ + \left(f_٢(x,y) - C_٢\right)^٢ = ٠ \qquad (2)$$

С другой стороны, решение системы (1) –это точки пересечения двух кривых: $f_١(x,y) = C_١$ и $f_٢(x,y) = C_٢$ на плоскости XOY.

Из этого следует метод нахождения корней системы нелинейных уравнений:

1. Определить (хотя бы приближённо) интервал существования решения системы уравнений (1) или уравнения (2). Здесь необходимо учитывать вид уравнений, входящих в систему, область определения каждого из уравнений. Иногда применяется подбор начального приближённого решения.
2. Протабулировать решение уравнения (2) по переменным x и y на выбранном интервале, либо построить графики функций $f_1(x, y) = C_1$ и $f_2(x, y) = C_2$ (система (1)).
3. Локализовать предполагаемые корни системы уравнений – найти несколько минимальных значений из таблицы табулирования корней уравнения (2), либо определить точки пересечения кривых, входящих в систему(1).
4. Найти корни для системы уравнений (1) с помощью надстройки **Поиск решения**.

Задача.

Решить следующую систему нелинейных уравнений: $\begin{cases}(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ 5x + 4y = 2\end{cases}$

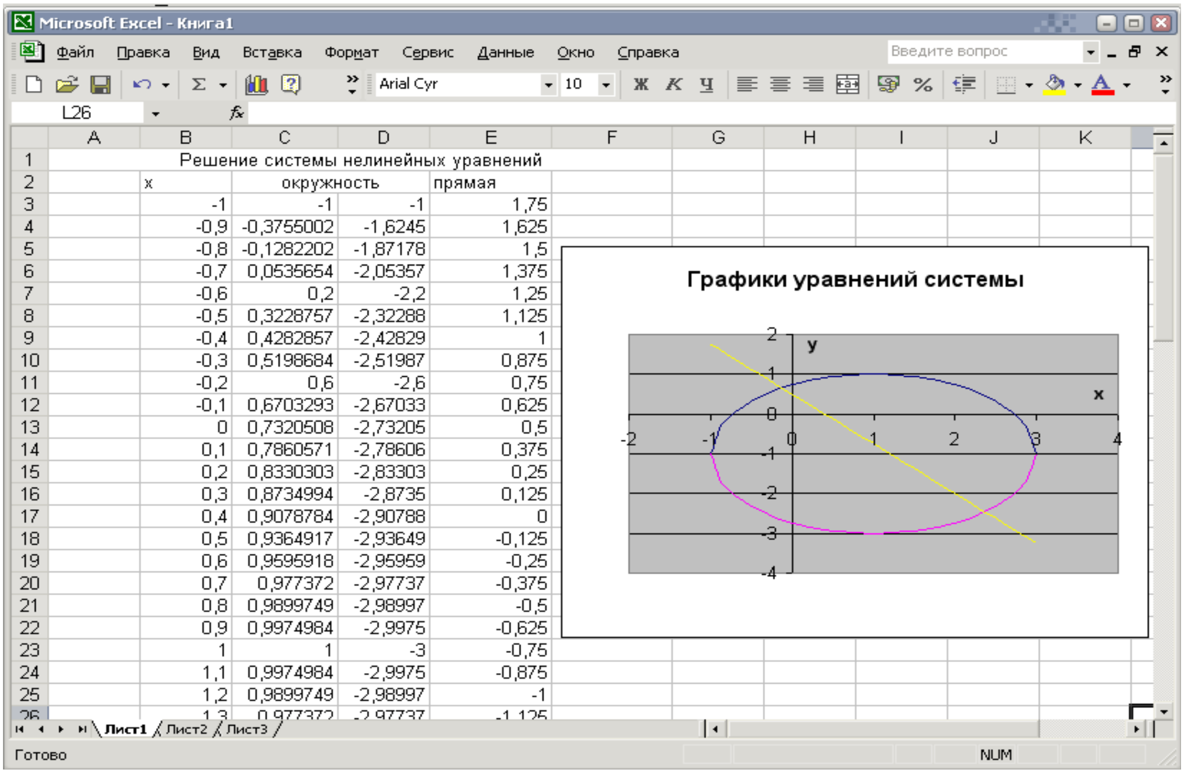
<u>*Решение:*</u> Решением системы уравнений являются точки пересечения окружности (с радиусом 2 и центром (1,-1)) и прямой $y = 0{,}5 - 1{,}25x$.

Данную систему заменим равносильным уравнением:

$((x-1)^2 + (y+1)^2 - 4)^2 + (5x + 4y - 2)^2 = 0$, для которого найдем решение с помощью надстройки **Поиск решения**.

1. Исходя из графиков уравнений, интервал локализации корней определим в границах от -3 до 3. Ячейки B3:B43 содержат значения X. Формулы для построения графиков:
   – в ячейке C3: = -1+корень(4-(B3-1)^2)
   – в ячейке D3: = -1-корень(4-(B3-1)^2)

– в ячейке E3: = (2-5*B3)/4



	A	B	C	D	E
1		Решение системы нелинейных уравнений			
2		x	окружность		прямая
3		-1	-1	-1	1,75
4		-0,9	-0,3755002	-1,6245	1,625
5		-0,8	-0,1282202	-1,87178	1,5
6		-0,7	0,0535654	-2,05357	1,375
7		-0,6	0,2	-2,2	1,25
8		-0,5	0,3228757	-2,32288	1,125
9		-0,4	0,4282857	-2,42829	1
10		-0,3	0,5198684	-2,51987	0,875
11		-0,2	0,6	-2,6	0,75
12		-0,1	0,6703293	-2,67033	0,625
13		0	0,7320508	-2,73205	0,5
14		0,1	0,7860571	-2,78606	0,375
15		0,2	0,8330303	-2,83303	0,25
16		0,3	0,8734994	-2,8735	0,125
17		0,4	0,9078784	-2,90788	0
18		0,5	0,9364917	-2,93649	-0,125
19		0,6	0,9595918	-2,95959	-0,25
20		0,7	0,977372	-2,97737	-0,375
21		0,8	0,9899749	-2,98997	-0,5
22		0,9	0,9974984	-2,9975	-0,625
23		1	1	-3	-0,75
24		1,1	0,9974984	-2,9975	-0,875
25		1,2	0,9899749	-2,98997	-1
26		1,3	0,977372	-2,97737	-1,125

2. Табулируем равносильное уравнение на отрезке [-3;3] с шагом 0,5.

Локализуем корни равносильного уравнения:

– ячейки A47:A59 содержат значения X на отрезке [-3;3] с шагом 0,5;

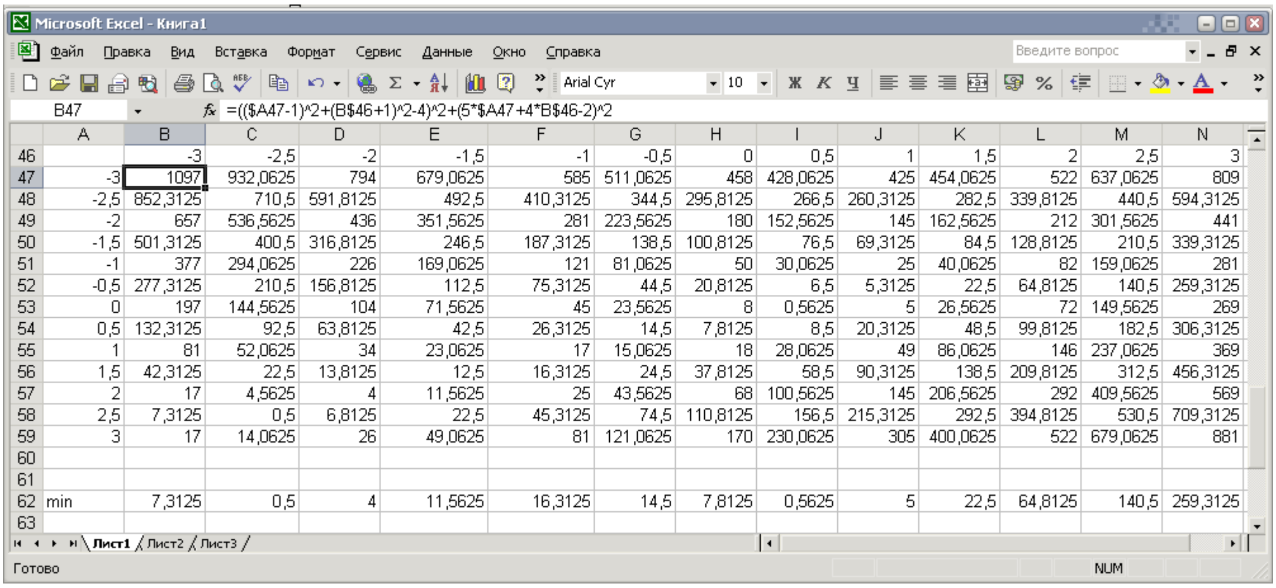
– ячейки B46:N46 содержат значения Y на отрезке [-3;3] с шагом 0,5;

– формула для ячейки B47 (копируется на диапазон B47:N59):

=(($A47-1)^2+(B$46+1)^2-4)^2+(5*$A47+4*B$46-2)^2

– формула для ячейки B62 (копируется на диапазон B62:N62):

=МИН(B47:B59)



B47 =(($A47-1)^2+(B$46+1)^2-4)^2+(5*$A47+4*B$46-2)^2

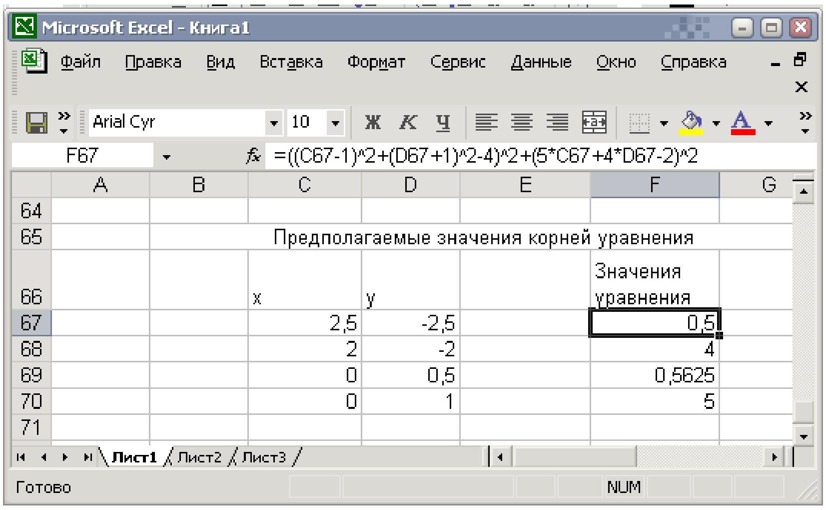
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
46		-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
47	-3	1097	932,0625	794	679,0625	585	511,0625	458	428,0625	425	454,0625	522	637,0625	809
48	-2,5	852,3125	710,5	591,8125	492,5	410,3125	344,5	295,8125	266,5	260,3125	282,5	339,8125	440,5	594,3125
49	-2	657	536,5625	436	351,5625	281	223,5625	180	152,5625	145	162,5625	212	301,5625	441
50	-1,5	501,3125	400,5	316,8125	246,5	187,3125	138,5	100,8125	76,5	69,3125	84,5	128,8125	210,5	339,3125
51	-1	377	294,0625	226	169,0625	121	81,0625	50	30,0625	25	40,0625	82	159,0625	281
52	-0,5	277,3125	210,5	156,8125	112,5	75,3125	44,5	20,8125	6,5	5,3125	22,5	64,8125	140,5	259,3125
53	0	197	144,5625	104	71,5625	45	23,5625	8	0,5625	5	26,5625	72	149,5625	269
54	0,5	132,3125	92,5	63,8125	42,5	26,3125	14,5	7,8125	8,5	20,3125	48,5	99,8125	182,5	306,3125
55	1	81	52,0625	34	23,0625	17	15,0625	18	28,0625	49	86,0625	146	237,0625	369
56	1,5	42,3125	22,5	13,8125	12,5	16,3125	24,5	37,8125	58,5	90,3125	138,5	209,8125	312,5	456,3125
57	2	17	4,5625	4	11,5625	25	43,5625	68	100,5625	145	206,5625	292	409,5625	569
58	2,5	7,3125	0,5	6,8125	22,5	45,3125	74,5	110,8125	156,5	215,3125	292,5	394,8125	530,5	709,3125
59	3	17	14,0625	26	49,0625	81	121,0625	170	230,0625	305	400,0625	522	679,0625	881
60														
61														
62	min	7,3125	0,5	4	11,5625	16,3125	14,5	7,8125	0,5625	5	22,5	64,8125	140,5	259,3125
63														

Исходя из результатов вычислений, получили следующие пары предполагаемых корней уравнения: (2,5;-2,5), (2;-2), (0;0,5), (0;1).

3. Найдем корни равносильного уравнения:

$$((x-1)^2+(y+1)^2-4)^2+(5x+4y-2)^2=0.$$

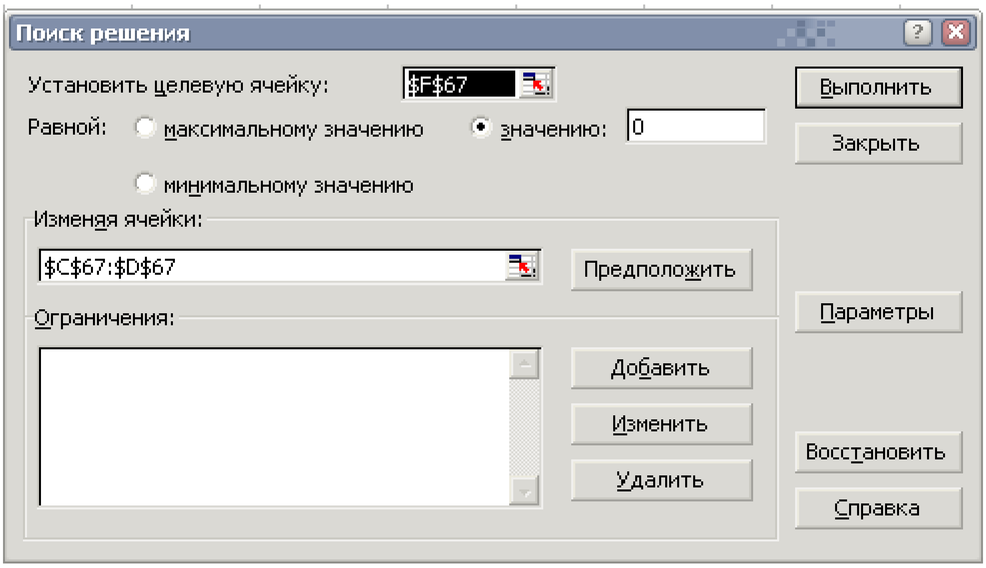
Введем данные и формулы в электронную таблицу



F67 =((C67-1)^2+(D67+1)^2-4)^2+(5*C67+4*D67-2)^2

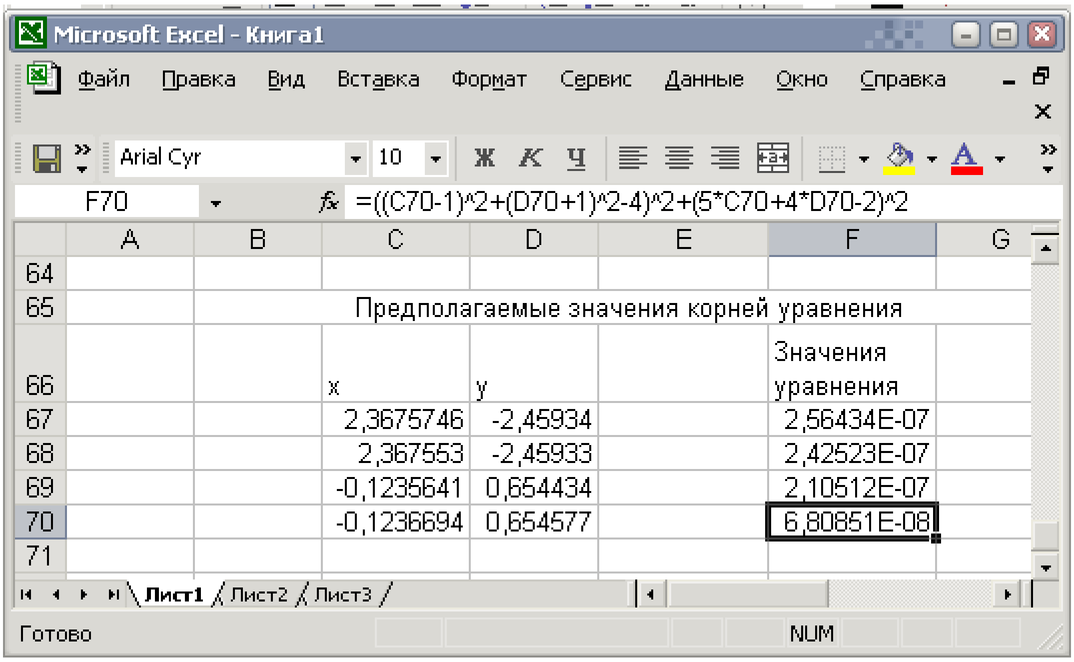
	A	B	C	D	E	F	G
64							
65		Предполагаемые значения корней уравнения					
66			x	y		Значения уравнения	
67			2,5	-2,5		0,5	
68			2	-2		4	
69			0	0,5		0,5625	
70			0	1		5	
71							

С помощью надстройки **Поиск решения** (в окне **Параметры поиска решения** флажок **Линейная модель** должен быть снят) установим необходимые параметры для поиска корня равносильного уравнения, затем выполним поиск решения. Параметры команды Поиск решения опишите, как указано на рисунке.



Процедуру необходимо повторить для всех имеющихся пар корней.

4. Решение имеет вид:



Результаты поиска решения позволяют сделать вывод о том, что система имеет 2 решения (2,3675746;-2,45934) и (-0,1235641;0,654434).

Задания к лабораторной работе «Нелинейное программирование»

Найти все решения системы нелинейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 = 4 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x^2 + 7y^2 = 6 \\ 4x - 5y = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ x + 6y = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4(x-1)^2 + 5(y+1)^2 = 12 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x^2 + 3y^2 = 4 \\ 8x + 4y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3(x-3)^2 + 5(y+5)^2 = 25 \\ x = 12 + 2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2} - 1\right)^2 = 16 \\ x = 4 + y \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7x^2 + 5y^2 = 8 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 3 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - |x| - 1 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ 5y + 7x = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 6/x \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 «Задача оптимального формирования портфеля ценных бумаг»

Основной задачей в процессе оптимального формирования портфеля ценных бумаг, является задача распределения инвестором определенной суммы денег по различным альтернативным вложениям (например, различные группы акций) с целью максимизации доходности. Следует понимать, что любое вложение капитала связано не только с ожиданием получения дохода, но и с постоянной опасностью проигрыша, а значит, в оптимизационных задачах по выбору портфеля ценных бумаг необходимо учитывать риск. В принципе, для создания портфеля ценных бумаг достаточно инвестировать деньги в какой-либо один вид финансовых активов. Но, такой однородный по содержанию портфель будет нести высокую норму риска. Гораздо более распространенный формой является так называемый диверсифицированный портфель, т.е. портфель с разнообразными ценными бумагами.

Использование диверсифицированного портфеля устраняет разброс в нормах доходности различных финансовых активов и снижает риски. Иными словами, портфель, состоящий из акций разноплановых компаний, обеспечивает стабильность получения положительного результата.

В общем случае задача оптимизации портфеля состоит в выборе такого распределения средств между активами, при котором происходит максимизация прибыли при заданных ограничениях на уровень риска.

Помимо оптимального формирования портфеля ценных бумаг существует еще большой класс задач, связанных с прогнозированием.

Модель оптимального формирования портфеля ценных бумаг – модель Марковица минимального риска.

В этой модели приняты следующие обозначения:

$x_j,\ j=\overline{1,n}$ – доля капитала, потраченная на покупку ценных бумагу j-го вида (весь выделенный капитал принимается за 1);

$m_j,\ j=\overline{1,n}$ – средняя ожидаемая доходность j-й ценной бумаги (m_j называют эффективностью j-й ценной бумаги);

$v_j,\ j=\overline{1,n}$ – дисперсия случайной доходности j-й ценной бумаги ($r_j=\sqrt{v_j}$ называют риском j-й ценной бумаги).

В предположении о некоррелированности ценных бумаг (их независимости) модель Марковица имеет вид:

Найти $x_j,\ j=\overline{1,n}$ – минимизирующие риск портфеля ценных бумаг

$\min r_j=\sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j\cdot x_j^{2}}$ (3), при условии, что обеспечивается заданное значение

эффективности портфеля m_p, т.е. $\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot x_j \ge m_p$ (4) и условии, что весь выделенный для инвестиций капитал в целях моделирования принимается за 1,

т.е. $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ (5), $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$ (6).

В модели (3) – (6) нелинейной является ЦФ.

Задача. Необходимо сформировать оптимальный портфель Марковица (минимального риска) трех ценных бумаг с эффективностями и рисками:(4, 10), (10, 40), (40, 80). Нижняя граница доходности портфеля задана равной 15.

<u>*Решение:*</u> Приведенная задача является моделью задачи нелинейного программирования. Пусть $x_j,\ j = 1,2,3$ – число предметов *j*-го типа.

Математическая модель задачи, согласно формулам (3) – (6) имеет вид:

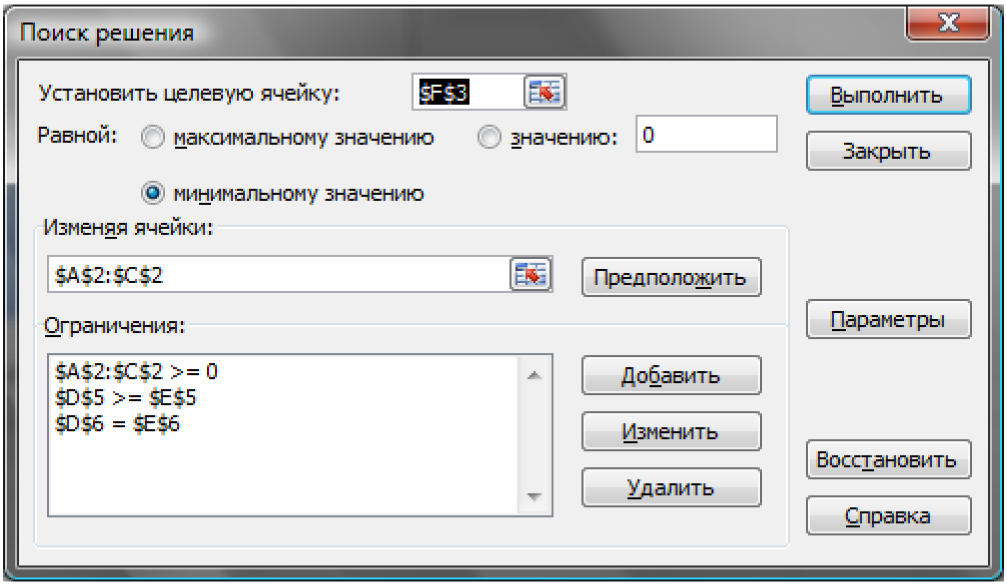
$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{100x_1^2 + 1600x_2^2 + 6400x_3^2} = 10\sqrt{x_1^2 + 16x_2^2 + 64x_3^2}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 + 40x_3 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

Чтобы воспользоваться надстройкой «Поиск решения» необходимо ввести исходные данные и формулы в электронную таблицу, следующим образом:

	A	B	C	D	E	F
1	x1	x2	x3			
2	0	0	0			ЦФ
3	=A2*A2	=B2*B2	=C2*C2		=A3+16*B3 + +64*C3	=корень(E3)*10
4	Ограничения					
5	4	10	40	=суммпроизв (A2:C2;A5:C5)	15	
6	1	1	1	=суммпроизв (A2:C2;A6:C6)	1	
7						
8						

Вызовите команду *Сервис/Поиск решения* и опишите его параметры, как указано на рисунке (в окне **Параметры поиска решения** флажок **Линейная модель** должен быть снят).



Реализуя приведенную модель средствами Excel, будем иметь оптимальный портфель Марковица:

$$x_1 = 0{,}521303,\ \ x_2 = 0{,}207769,\ \ x_3 = 0{,}270927,$$

т.е. доли ценных бумаг оказались равными 52,13%; 20,78% и 27,09%. При этом минимальный риск – 23,79, доходность портфеля оказалась равной заданной – 15.

	A	B	C	D	E	F
1	x1	x2	x3			
2	0,521303	0,207769	0,270927			ЦФ
3	0,271757	0,043168	0,073402		5,660150376	23,79107054
4			ограничение			
5	4	10	40	15	15	
6	1	1	1	1	1	

Задания к лабораторной работе «Задача оптимального формирования портфеля ценных бумаг»

1. Необходимо сформировать оптимальный портфель Марковица (минимального риска) трех ценных бумаг с эффективностями и рисками:(5, 10), (10, 50), (50, 90). Нижняя граница доходности портфеля задана равной 20.
2. Необходимо сформировать оптимальный портфель Марковица (минимального риска) трех ценных бумаг с эффективностями и рисками:(6, 20), (20, 60), (60,100). Нижняя граница доходности портфеля задана равной 30.

Контроль знаний по теме

«**Решение задач оптимизации с помощью надстройки Поиск решения**»

Вариант 1

1. Найти $L(X) = 18x_1 + 15x_2 + 15x_3 \to \min$

при ограничениях $\begin{cases} x_1 + 4{,}3x_2 + 2{,}6x_3 \ge 640 \\ 5x_1 + 1{,}5x_2 + 3x_3 \ge 800 \\ 3x_1 + 3{,}9x_2 + 4{,}3x_3 \le 860 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1{,}3} \end{cases}$

2. Фирма выпускает два вида древесно-стружечных плит – обычные и улучшенные. При этом производятся две основные операции – прессование и отделка. Какое количество плит каждого типа можно изготовить в течение месяца так, чтобы обеспечить максимальную прибыль при следующих ограничениях на ресурсы.

Затраты	Партия из 100 плит		Имеющиеся ресурсы на месяц
	обычных	улучшенных	
Материалы (кг)	20	40	4000
Время на прессование (ч)	4	6	900
Время на отделку (ч)	4	4	600

Средства (у.е.)	30	50	6000

3. Имеются два хранилища с однородным продуктом, в которых сосредоточено 200 и 120т. продукта соответственно. Продукты необходимо перевезти трем потребителям соответственно в количестве 80, 100 и 120т. Расстояния (в км) от хранилища до потребителей заданы в таблице:

Хранилище	Потребители		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1т. продукта на 1 км постоянны и равны 5 д.е. Определите план перевозок продукта от хранилища до потребителей из условия минимизации транспортных расходов.

4. На трех автобазах имеются автобусы в количестве 35, 45, 50 шт. соответственно для обслуживания четырех маршрутов. Для перевозки пассажиров каждому из маршрутов требуется автобусов в количестве 40, 25, 35 и 40 шт. соответственно. Расходы по эксплуатации каждой транспортной единицы заданы матрицей $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 12 & 7 \\ 9 & 8 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. Распределить имеющиеся транспортные средства (автобусы) по маршрутам таким образом, чтобы общие расходы были минимальными.

5. Имеется n преподавателей и m видов занятий. Стоимость c_{ij} выполнения i-м преподавателем j-го вида занятий приведена в таблицах, где преподавателям соответствуют строки, а видам занятий – столбцы. Составить такой план выполнения видов занятий так чтобы все виды занятий были проведены, каждый преподаватель был занят только на одном виде занятий, а суммарная стоимость проведения всех видов занятий была минимальной.

Преподаватели	Стоимость выполнения				
	Виды занятий				
	1	2	3	4	5
1	320	360	210	650	1100

2	100	200	670	780	340
3	510	120	110	900	210
4	270	540	200	950	500

6. Найти все решения системы нелинейных уравнений: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Вариант 2

1. Найти $L(X) = 13x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 87x_4 \to \max$

при ограничениях $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 750 \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 350 \\ 4x_1 - x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 80 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases}$

2. Предприятие выпускает продукцию четырех видов П1, П2, П3, П4, для изготовления которой используются ресурсы трех видов: трудовые, сырье и оборудование. Нормы расхода каждого вида ресурса на изготовление единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Ресурс	Вид продукции				Объем ресурса
	П1	П2	П3	П4	
Трудовой	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100

Прибыль, получаемая от реализации единицы продукции, равна: для продукции П1 - 60 у.е., для П2 - 70 у.е., для П3 - 120 у.е., для П4 - 130 у.е. Определить оптимальный план производства каждого вида продукции, максимизирующий прибыль данного предприятия.

3. Продукция выпускается на трех заводах в количестве 340, 300, 460. Спрос на эту продукцию определяется соответственно в количестве 350, 200, 450 и 100. Транспортные расходы на доставку 1 ед. продукции с i-го завода (i=1,2,3) k-му потребителю (k=1,2,3,4) определены матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам из условия минимизации затрат на транспортировку.

4. Составить оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т. к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40, 130 т. Стоимость перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю даны матрицей C= $\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Имеется n преподавателей и m видов занятий. Стоимость c_{ij} выполнения i-м преподавателем j-го вида занятий приведена в таблицах, где преподавателям соответствуют строки, а видам занятий – столбцы. Составить такой план выполнения видов занятий так чтобы все виды занятий были проведены, каждый преподаватель был занят только на одном виде занятий, а суммарная стоимость проведения всех видов занятий была минимальной.

Преподаватели	Стоимость выполнения			
	Виды занятий			
	1	2	3	4
1	610	1070	400	700
2	1200	900	800	1100
3	700	800	1050	900
4	430	1080	910	1100
5	1080	900	810	550

6. Найти все решения системы нелинейных уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

Вариант 3

1. Найти $L(X) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$

при ограничениях $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 + x_3 \le 6 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3} \end{cases}$

2. Фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр тканей представлен в таблице.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за 1 м ткани вида I равна 80 у.е., II – 70 у.е., III – 60 у.е. Определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

3. Строительный песок добывается в трех карьерах и доставляется на четыре строительные площадки. Производительность карьеров за день составляет соответственно 45т, 35т, 40т, потребности в песке строительных площадок составляют соответственно 30т, 40т, 50т. Транспортные расходы определены матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Определить план закрепления строительных площадок за карьерами, обеспечивающий минимальные расходы.

4. Три завода производят одно и то же изделие, которое отправляется четырем потребителям. Известно, что I завод поставляет 120 вагонов изделий, II – 280 вагонов, III – 160 вагонов. Для потребителей требуется: первому – 130 вагонов, второму – 220, третьему – 60 и четвёртому – 70. Стоимость (в руб.)

перевозки одного вагона между каждым поставщиком и потребителем указаны в следующей таблице:

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	1	7	9	5
II	4	2	6	8
III	3	8	1	2

Определить минимальный по стоимости план перевозок.

5. Имеется n преподавателей и m видов занятий. Стоимость c_{ij} выполнения i-м преподавателем j-го вида занятий приведена в таблицах, где преподавателям соответствуют строки, а видам занятий – столбцы. Составить такой план выполнения видов занятий так чтобы все виды занятий были проведены, каждый преподаватель был занят только на одном виде занятий, а суммарная стоимость проведения всех видов занятий была минимальной.

Преподаватели	Стоимость выполнения			
	Виды занятий			
	1	2	3	4
1	500	1200	200	700
2	1000	900	670	1030
3	720	810	1080	890
4	820	1040	750	130

6. Найти все решения системы нелинейных уравнений: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy(x+y) = -2 \end{cases}$

Библиографический список

1. Агальцов В.П. Информатика для экономистов: учеб.: рек. УМО/В. П. Агальцов, В. М. Титов. - М.: ФОРУМ: ИНФРА - М, 2006. - 448 с.
2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368с.: ил.
3. Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие. -Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2006.–128 с.
4. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. - СПб., BHV, 1997. - 384 с.
5. Лаврентьев С.М. Excel: Сборник примеров и задач. - М.: Финансы и статистика, 2003 – 336с.
6. Рудикова Л.В. Microsoft Excel для студента. СПб.: БХВ - Петербург, 2005.- 368с.: ил.
7. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. - М.: ЮНИТИ, 2005. – 304 с.

Содержание

Татьяна Евгеньевна Гришкина,

старший преподаватель кафедры ОМиИ АмГУ

Ольга Анатольевна Лебедь,

старший преподаватель кафедры ОМиИ АмГУ