Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АМГУ»)

*УТВЕРЖДАЮ*
Зав. кафедрой МАиМ
_____ Т.В. Труфанова
«___»_____ 2007г.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ**

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

для специальности 010101 – Математика

Составители: Т.В.Труфанова

Благовещенск
2007

*ББК*
*Т 80*

*Печатается по решению*
*редакционно-издательского совета*
*факультета математики*
*и информатики*
*Амурского государственного*
*университета*

*Труфанова Т.В.*
Учебно-методический комплекс дисциплины «Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений» для студентов очной формы обучения специальности 010101 – «Математика». – Благовещенск. Изд-во Амурский гос. ун-та, 2007. – 80 с.

© Амурский государственный университет, 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Рабочая программа 4
2. Краткий конспект лекций 13
3. Учебно-методические материалы по дисциплине 61
4. Необходимое техническое и программное обеспечение 80
5. Карта обеспеченности дисциплины кадрами ППС 80

# 1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине: спецкурс " Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений "
для специальности 010101 – Математика

Курс 5 Семестр 9
Лекции 64 час. Экзамен 9 семестр
Зачет (нет)

Практические (семинарские) занятия 32 (час).
Лабораторные занятия (нет)
Самостоятельная работа 128 (час).
Всего 224 (час)

## 1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

### 1.1. Цель преподавания дисциплины

Цель данного спецкурса – познакомить студентов математиков с основами теории малого параметра Ляпунова-Пуанкаре, которая лежит в основе целого ряда методов в астрономии, теории колебаний и т. д. Эта теория дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений, кроме того, эта теория дает понимание того, как должны строиться методы исследования новых задач.

### 1.2. Задачи изучения дисциплины

Асимптотические методы позволяют отыскивать приближенные решения дифференциальных уравнений (или систем), близких к таким уравнениям (или системам), решения которых известны. В прикладных задачах часто бывает, что на течение рассматриваемого физического процесса влияют как основные факторы, определяющие ход процесса, так и факторы, оказывающие меньшее влияние и меньшие количественные характеристики

процесса. При учете только основных факторов можно получить точное решение системы уравнений, а при учете всех известных факторов система становится сложной и не решается. В таких случаях асимптотические методы часто позволяют найти решения с нужной точностью.

## 2. Содержание дисциплины

### 2.1. Наименование тем, их содержание, объем в часах.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

| № п/п | Наименование темы | Кол. часов |
|---|---|---|
| 1 | Аналитические приближенные методы | 12 |
| 2 | Метод Ляпунова - Пуанкаре | 20 |
| 3 | Неавтономные квазилинейные системы. Метод Пуанкаре | 6 |
| 4 | Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова. | 6 |
| 5 | Асимптотические методы разделения движения. | 14 |
| 6 | Асимптотические методы в теории линейных уравнений, содержащих большой параметр | 6 |
| | ИТОГО ЗА СЕМЕСТР | 64 |

**Тема № 1. Аналитические приближенные методы**

- Зависимость решения от начальных условий и параметров – 2 час.
- Отыскание производных от решения по параметру и по начальным значениям – 2 час.
- Метод степенных рядов – 2 час.
- Метод малого параметра – 4 час.
- Оценка погрешности приближенного решения – 2 час.

**Тема № 2. Метод Ляпунова – Пуанкаре**

- Система Ляпунова. Консервативные системы. Приведение к каноническому виду – 2 час.
- Периодичность решений системы Ляпунова. Вычисление периода. Свойства периода. Теорема Ляпунова – 2 час.

- Условия существования периодических решений. Необходимые и достаточные условия периодичности – 4 час.
- Метод Ляпунова. Расчет приближенного решения в форме рядов по степеням малого параметра. Уравнение Дюффинга – 4 час.
- Метод Ляпунова в нелинейных консервативных системах – 2 час.
- Метод Пуанкаре построения автоколебательных режимов в случае квазилинейных систем – 4 час.
- Метод Каменкова. Отыскания периодических решений – 2 час.

**Тема № 3. Неавтономные квазилинейные системы. Метод Пуанкаре**

- Поведение решения вдали от резонанса – 2 час.
- Резонансные колебания. Случай одной степени свободы. Отыскания решений в виде рядов по степеням малого параметра – 2 час.
- Пример решения уравнения Ван-дер-Поля – 2 час.

**Тема № 4. Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова**

- Метод Малкина – 4час.
- Примеры расчета резонансных решений. Уравнения Дюффинга – 2 час.

**Тема № 5. Асимптотические методы разделения движения**

- Метод осреднения или метод разделения движений. Медленные и быстрые переменные – 2 час.
- Метод усреднения Ван-дер-Поля – 2 час.
- Схема М.В.Волосова. Укороченные уравнения – 2 час.
- Алгоритм асимптотического интегрирования для случая одной быстрой переменной. Построение приближенного решения – 4 час.
- Оценка точности приближенного решения – 4 час.

**Тема № 6. Асимптотические методы в теории линейных уравнений, содержащих большой параметр**

- Сведение уравнения к двучленному виду – 2 час.
- Однородная система второго порядка. Случай простых корней – 2 час.
- Система второго порядка, содержащая большой параметр – 2 час.

## 2.2. Программа практических занятий

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

| № п/п | Наименование темы и ее содержание | Кол. час. |
|---|---|---|
| 1 | **Зависимость решения от начальных условий и параметров** | |
| | • Оценка погрешности приближенного решения | 2 |
| | • Отыскание производных от решения по параметру | 4 |
| 2 | **Аналитические приближенные методы** | |
| | • Нахождение решений при помощи степенных рядов, удовлетворяющих начальным условиям | 2 |
| | • Оценка радиуса сходимости степенного ряда | 2 |
| | • Нахождение линейно независимых решений дифференциального уравнения в виде степенных рядов | 2 |
| | • Нахождение решений в виде обобщенных степенных рядов | 2 |
| | • Нахождение периодических решений | 2 |
| | • Нахождение решений в виде тригонометрических рядов | 2 |
| | • Разложение решений по степеням малого параметра | 4 |
| | • Нахождение с помощью малого параметра приближенного периодического решения с периодом, равным периоду правой части уравнения | 4 |
| 3 | **Фазовая плоскость** | |
| | • Построение фазового портрета | 2 |
| | • Предельные циклы | 2 |
| | • Признаки отсутствия предельных циклов | 1 |
| | • Признаки наличия предельных циклов | 1 |
| | ИТОГО ЗА СЕМЕСТР | 32 |

## 2.3. Самостоятельная работа студентов (128 час.)

1. Подготовка к практическим занятиям – 32 час.
2. Подготовка к экзамену – 76 час.
3. Написание рефератов – 20 час.

**Темы рефератов**

1. Алгоритм построения автоколебательных режимов в случае квазилинейных систем ( метод Пуанкаре).
2. Квазилинейная теория. Теорема Г.В. Каменкова.
3. Квазилинейная теория. Расчет периодических решений.
4. Неавтономные квазилинейные системы. Метод Пуанкаре.
5. Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова. Метод Малкина.
6. Системы с медленным временем.
7. Описание алгоритма асимптотического интегрирования для случая одной быстрой переменной.
8. Алгоритм асимптотического интегрирования. Случай нескольких быстрых переменных.
9. Исследование стационарных точек и устойчивости.
10. Асимптотические методы в теории линейных уравнений, содержащих большой параметр.
11. Особые случаи ( асимптотика и окрестности точек возврата).

**2.4. Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене.**

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех практических работ и написание реферата. В билет входят два вопроса и одна задача. Студент должен дать развернутый ответ на основные вопросы и краткий – на дополнительные, решить задачу.

Оценка «отлично» ставиться при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, при ответах на дополнительные вопросы, подтверждающие знание материала, и при правильном решении задачи.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом материала (в пределах конспектов лекций), при решении задачи допущены небольшие недочеты и ошибки вычислительного характера.

Оценка «удовлетворительно» ставиться, если задача решена с небольшими недочетами и на теоретические вопросы даны неполные ответы, показывающие поверхностное знание излагаемого материала.

Оценка «неудовлетворительно» ставиться, если не решена задача и студент дал ответ без доказательства теорем.

**2.5. Вопросы к экзамену.**

I. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний. Нерезонансный случай. Резонансный случай.

2.Интегрирование д.у. при помощи степенных рядов. Интегрирование линейного уравнения с помощью степенного ряда.

3. Интегрирование д.у. при помощи степенных рядов. Разложение решения в обобщенный степенной ряд.

4.Уравнение Бесселя.

5.Уравнение, приводящееся к уравнению Бесселя.

б.Дифференцируемость решения по параметру и её применение. Дифференцируемость решения по параметру.

7. Дифференцируемость решения по параметру и её применение. Дифференцируемость решения по начальному условию.

8.Асимптотические методы решения д.у.. Разложение решения по степеням малого параметра.

9.Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний. Фазовые траектории.

10.Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний. Линейная система.

11.Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний. Фазовая плоскость,уравнения Дюффинга.

12.Метод Ляпунова-Пуанкоре. Система Ляпунова. Случай одной степени свободы. Консервативные системы.

13.Метод Ляпунова-Пуанкоре. Система Ляпунова. Случай одной степени

свободы. Приведение к каноническому виду системы Ляпунова.

14.Метод Ляпунова-Пуанкоре. Система Ляпунова. Случай одной степени свободы. Преобразование интеграла Н.

15.Метод Ляпунова-Пуанкоре. Система Ляпунова. Случай одной степени свободы. Периодичность системы Ляпунова.

16.Метод Ляпунова-Пуанкоре. Система Ляпунова. Случай одной степени свободы. Одно свойство периода.

17.Условие существования периодических решений. Необходимые и достаточные условия периодичности.

18. Условие существования периодических решений. Случай, когда

фундаментальное решения уравнений $\begin{cases} x = a_{11}x + a_{12}y \\ y = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$

являются периодическими функциями.

19. Условие существования периодических решений. Уравнение второго порядка. 20.Метод Ляпунова.

21.Метод Ляпунова. Алгоритм Ляпунова.

22.Метод Ляпунова. Расчет приближенного решения.

23.Метод Ляпунова для решения систем с $n$ уравнениями.

24.Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля. Переменные Ван-дер-Поля.

25.Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля. Укороченные уравнения.

26.Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля. Стационарные режимы.

27.Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля в системах близких к консервативным. Замена переменных.

28.Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля в системах близких к консервативным. Укороченные уравнения.

29.Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Вывод укороченных уравнений.

30.Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Адиабатические инварианты.

31 .Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Интеграл действия.

32.Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Пример использования адиабатических инвариантов.

33.Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Вычисление амплитуды и энергии.

34.Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Некоторые обобщения.

35. Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Задача о маятнике переменной массы.

## 3. Учебно-методические материалы по дисциплине

### 3.1. Перечень обязательной (основной) литературы


1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000.-368 с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.- 464 с.
3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Изд. Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1969.- 379 с.
4. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Изд. УРСС, 2004.- 239 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: РХД, 2000.- 176 с.


### 3.2. Перечень дополнительной литературы

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Высш. шк., 1991. – 303с.:ил.1

2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений/ изд. 2-е – М.: гос-е изд-во технико – теор. литературы, 1950. – 436с.

3. Кодингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: изд-во иностр. Литературы, 1958. – 475 с.

## 2. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

### Тема 1. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

1.1 ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Пусть $y = y(t)$ - вектор- функция, являющаяся приближенным решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \; x\big|_{t=0} = x(0), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Здесь и далее будем считать, что вектор-функция непрерывна по переменным $t$, $x$ и удовлетворяет условию Липшица по переменной $x$:

$$\|f(t,y) - f(t,x)\| \le K\|y - x\|, \; K = const, \tag{2}$$

где $\|\bullet\|$ обозначает какую- либо норму вектора:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \; \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; \|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Пусть далее, приближенное решение $y(t)$ задачи (1) удовлетворяет неравенствам:

$$\left\|\frac{dy}{dt} - f(t,y)\right\| \le \varepsilon, \; \|y(0) - x(0)\| \le \delta. \tag{3}$$

Тогда справедлива оценка погрешности:

$$\|x(t) - y(t)\| \le \delta e^{K|t|} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|t|} - 1). \qquad (4)$$

## 1.2 ОБ ОТЫСКАНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ РЕШЕНИЙ ПО ПАРАМЕТРУ

Пусть в задаче

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n, \mu), \qquad (5)$$

$$x_i(0) = a_i(\mu), \; i = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

($\mu$ - параметр) функции $f_i$, $a_i$ - непрерывны и имеют непрерывные производные. Тогда решение $(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет непрерывную производную по параметру $\mu$ и его частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu} = a_i$, $i = \overline{1,n}$ являются решениями следующей задачи:

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \qquad (7)$$

$$u_i(0) = a_i'(\mu), \; i = \overline{1,n} \qquad (8)$$

частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$ вычисляются при $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, где $x_i(t)$ - решение задачи (5), (6).

В частности, если $a_k(\mu) = \mu$, $a_i(\mu) = const$ при $i \ne k$ и функция $f_i$, $i = \overline{1,n}$ от $\mu$ не зависимы, то из (7), (8) следует, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \; u_i(0) = 0, \; i \ne k, \; u_k(0) = 1, \qquad (9)$$

где $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_k}$.

## Тема 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРИБЛЕЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

### 2.1 МЕТОД СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Если коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ дифференциального уравнения

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

в окрестности точки $x = x_0$ являются аналитическими функциями, т. е. разлагающимися в ряд по степеням $x - x_0$, и $p_0(x) \neq 0$, то решение этого уравнения в некоторой окрестности указанной точки также аналитичны. Если же точка $x = x_0$ является $s$ - кратным нулем функции $p_0$, $s-1$-кратным (или выше) нулем функции $p_1$ (если $s > 1$) и $s-2$ - кратным (или выше) нулем функции $p_2$ (если $s > 2$), то существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (1) в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

где $r$ - некоторое число.

Если функция $f$ является аналитической в окрестности точки $(x_0, y_0)$, то решение задачи

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

также является аналитической функцией в окрестности точки $x = x_0$. Аналогично, если функция $f = f(x, y, y', ..., y^{(n)})$ является аналитической в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$, то существует решение задачи

$$y^{(n)} = f, \; y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

в виде ряда по степеням ($x - x_0$). Для отыскания коэффициентов ряда часто используется формула Тейлора.

### 2.2 МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Если в задаче

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n, \mu), \; x_i(t_0) = a_i(\mu), \; i = \overline{1, n} \qquad (2)$$

функции $f_i$, $a_i$ являются аналитическими по совокупности переменных $x_1, x_2, ..., x_n, \mu$, то вектор- решение ее $x(t, \mu)$ разлагается в сходящийся при малых

значениях $\mu$ (малых по сравнению с единицей, т. е. $|\mu| << 1$) степенной ряд по $\mu$ :

$$x(t,\mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots . \qquad (3)$$

Для того чтобы найти функции $y_0, y_1, \dots$, следует разложить правые части в задаче (2) по степеням $\mu$ и, подставив туда разложение (3), приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$ . В результате получаем систему дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями, интегрируя которую последовательно определяем функции $y_0, y_1, \dots$. При этом произвольные постоянные находим, используя начальные условия: $y_i(t) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ki})$, где $a_{ki} = const$.

Пользуясь методом малого параметра, можно приближенно находить периодические решения уравнений вида

$$\ddot{x} + a^2 x = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \qquad (4)$$

где $F$ - известная периодическая функция по $t$. В этом случае постоянные интегрирования, возникающие при решении дифференциальных уравнений относительно функций $y_0, y_1, \dots$, находятся из условий периодичности функций, заключающихся в отсутствии резонирующих членов в правых частях указанных дифференциальных уравнений.

Если правя часть уравнения (4) явно от $t$ не зависит, то период решения $x(t,\mu)$ заранее не известен. В таком случае в уравнении (4) следует сделать замену

$$\tau = t(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \dots),$$

где $\tau$ - новая неизвестная переменная, и искать решение $x(\tau,\mu)$ периода $\frac{2\pi}{a}$. При этом коэффициенты $b_1, b_2, \dots$ определяются из условий периодичности решений $y_0(\tau), y_1(\tau), \dots$.

## Тема 3. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Пусть дана начальная точка $(t_0, x_0) \in H$. Будем искать решение $x(t, t_0, x_0, \mu) = x(t, \mu)$ уравнения $\dot{x} = f(t, x, \mu)$, $f : G \to R^n$ с этими начальными данными. Из тождества

$$\dot{x}(t, \mu) = f(t, x(t, \mu), \mu) \tag{1.1}$$

следует, что функция $x(t, 0)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \tag{1.2}$$

называемого порождающим уравнением. Согласно методу малого параметра решение $x(t, \mu)$ ищем в виде

$$x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(t) \mu^k \tag{1.3}$$

где $C^{(k)}(t)$ - векторные коэффициенты, подлежащие определению. Выполнение начальных условий приводит к соотношению

$$x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(t_0) \mu^k$$

откуда получаем

$$C^{(0)}(t_0) = x_0, \; C^{(k)}(t_0) = 0 \; (k \in N) \tag{1.4}$$

Так как $C^{(0)}(t) = x(t, 0)$, то $C^{(0)}(t)$ - решение порождающего уравнения (1.2) с заданными начальными данными $(t_0, x_0)$. Пусть это решение определено при $t \in [a, b]$.Тогда ряд (1.3) сходится при каждом $t \in [a, b]$ при $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, если $\varepsilon$ достаточно мало.

По условию функцию $f(t, x, \mu)$ можно представить в виде ряда

$$f(t, x, \mu) = \sum_{k_1, \ldots, k_n, l > 0} a^{(k_1, \ldots, k_n, l)}(t)(x_1 - C_1^{(0)}(t))^{k_1} \ldots \mu^l \tag{1.5}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), учитывая (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$, получаем

$$\dot{C}^{(k)} = g^{(k)}(C^{(0)}, C^{(1)}, \ldots, C^{(k)}, t) \; (k \in N)$$

причем в силу (1.4) $C^{(k)}(t_0) = 0$. Если коэффициенты $C^{(0)}(t)$, $C^{(1)}(t)$,… определять последовательно, то полученное уравнение примет вид

$$\dot{C}^{(k)} = F^{(k)}(t, C^{(k)}) \tag{1.6}$$

Таким образом, дело свелось к нахождению решений уравнений (1.6), аннулирующихся при $t = t_0$.

Для того чтобы уяснить характер зависимости $F^{(k)}$ от $C^{(k)}$, продифференцируем (1.1) $k$ раз по $\mu$. В результате получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^k x}{\partial \mu^k}(t,\mu)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\mu), \mu)\frac{\partial^k x}{\partial \mu^k} + h^{(k)}\left(t, x, \frac{\partial x}{\partial \mu}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} x}{\partial \mu^{k-1}}, \mu\right)$$

Отсюда по формуле имеем

$$\dot{C}^{(k)} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, C^{(0)}(t), 0)C^{(k)} + p^{(k)}(t, C^{(0)}, \ldots, C^{(k-1)}) \tag{1.7}$$

Таким образом, (1.6)- линейное неоднородное уравнение, определенное при $t \in [a,b]$, причем соответствующее однородное есть уравнение в вариациях относительно решения $C^{(0)}(t)$, порождающего уравнения (1.2). Вычислив достаточное число коэффициентов $C^{(k)}(t)$, получим приближенное решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ с любой степенью точности при малых $\mu$.

Пример 1. Построим с точностью до $O(\mu^2)$ решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu \dot{x}^2 \tag{1.8}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$x(0,\mu) = 0$, $\dot{x}(0,\mu) = 1$.

Так как рассматриваемое уравнение эквивалентно нормальной системе двух уравнений, в правой части которого вектор

$$f(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2\sin t - 3x_1 + \mu x_2^2 \end{pmatrix}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, то искомое решение разлагается в ряд по степеням $\mu$. Представляя $x(t,\mu)$ в виде

$$x(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(t)\mu^k$$

подставляя это выражение в (1.8) и приравнивая последовательно свободный член и коэффициенты при степенях $\mu$, $\mu^2$ и т. д.., получаем

$$\ddot{C}^{(0)} + 3C^{(0)} = 2\sin t,$$
$$\ddot{C}^{(1)} + 3C^{(1)} = (C^{(0)})^2, \qquad (1.9)$$
$$\ddot{C}^{(2)} + 3C^{(2)} = 2\dot{C}^{(0)}\dot{C}^{(1)},$$
.....

Первое из уравнений (1.9) является порождающим. Решая его и учитывая начальное условие, находим $C^{(0)} = \sin t$. Тогда второе уравнение (1.9) принимает вид

$$\ddot{C}^{(1)} + 3C^{(1)} = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$$

Решая это уравнение с учетом начальных условий, найдем

$$C^{(1)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos\sqrt{3t}\ .$$

Итак,

$$x(t,\mu) = \sin t + \mu\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos\sqrt{3t}\right) + O(\mu^2).$$

Если найти решение с нулевыми начальными данными третьего из уравнений (1.9), то получим коэффициент разложения $x(t,\mu)$ при $\mu^2$.

## Тема 4. ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА И ФОКУСА

Метод малого параметра можно применять для построения решений аналитических систем дифференциальных уравнений и при отсутствии параметра в системе. В этом случае роль параметра играет начальное значение решения.

Рассмотрим двумерную систему

$$\dot{x} = Ax + X(x) \qquad (2.1)$$

Предположим, что собственные числа матрицы А чисто мнимые, равные $\pm i\beta$, $\beta > 0$, а функция $X(x)$ является вещественной аналитической в $\varepsilon$ - окрестности точки $x = 0$. Это означает, что

$$X_j = \sum_{k_1+k_2=2}^{\infty} X_j^{(k_1,k_2)} x_1^{k_2} x_2^{k_3}\ ,\ j = 1,2$$

Было показано, что траектории системы (2.1) совпадают с точностью до аффинного преобразования с интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\varphi} = P(r,\varphi) \qquad (2.2)$$

где ряд

$$P(r,\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\varphi) r^k$$

сходится при всех $\varphi \in R$ в круге $|r| < \varepsilon$, его коэффициенты $P_k(\varphi)$ - непрерывные $2\pi$ - периодические функции.

Поведение интегральных кривых уравнения (2.2) определяется функцией последования

$$g(r_0) = r(2\pi, r_0)$$

где $r(\varphi, r_0)$ - решение (2.2), определяемое начальным условием $r(0, r_0) = r_0$. Функция $r(\varphi, r_0)$ при каждом $\varphi \in [0,2\pi]$ аналитична по $r_0$ в $\delta^*$- окрестности точки $r_0 = 0$ при некотором $\delta^* > 0$, не зависящем от $\varphi \in [0,2\pi]$. Так как $r(\varphi, 0) \equiv 0$, то

$$r(\varphi, r_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\varphi) r_0^k \qquad (2.3)$$

где ряд (2.3) сходится при $|r| < \delta^*$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Следовательно,

$$g(r_0) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k r_0^k$$

где $g_k = a_k(2\pi)$. Начальное условие дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) r_0^k = r_0.$$

Следовательно,

$$a_1(0) = 1, \; a_k(0) = 0 \; (k = 2,3,\ldots) \qquad (2.4)$$

Покажем. что с помощью метода неопределенных коэффициентов можно последовательно определить все коэффициенты $a_k(\varphi)$. а значит, и коэффициенты $g_k$. Подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{`}(\varphi) r_0^k = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\varphi) \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\varphi) r_0^i\right)^k$$

Приравниваем здесь коэффициенты при $r_0 : a_1^{`}(\varphi) = 0$. Из (2.4)заключаем, что $a_1 = 1$. Далее, приравнивая коэффициенты при $r_0^k$, $k = 2,3,\ldots$. получаем

$a_k' = F_k(a_j(\varphi), P_i(\varphi))$ $(j = 1,...k-1; i = 2,...,k)$,

где $F_k$ - известный полином с целыми положительными коэффициентами. Отсюда и из (2.4) имеем

$$a_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} F_k(a_j(s), P_i(s))ds .$$

Следовательно,

$$g_1 = 1,\ g_k = \int_0^{2\pi} F_k(a_j(\varphi), P_i(\varphi))d\varphi\ ,\ (k = 2,3,...).$$

Нетрудно убедится. что $g_2 = 0$. Действительно, $F_2 = P_2(\varphi)$, а $P_2(\varphi)$ имеет среднее значение, равное нулю. так как представляет собой однородный полином от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ степени 3. Итак,

$$g(r_0) = r_0 + \sum_{k=3}^{\infty} g_k r_0^k \tag{2.5}$$

Пусть $g_l$ - первый среди отличных от нуля коэффициентов $g_k$ в (2.5). Если $g_l < 0$, а $r_0$ достаточно мало, то

$$r_0 - g(r_0) = -\sum_{k=l}^{\infty} g_k r_0^k > -\frac{1}{2} g_l r_0^l ,$$

или

$$g(r_0) < (1 + \frac{1}{2} g_l r_0^{l-1}) r_0 .$$

Таким образом, последовательные пересечения интегральными кривыми полуоси $\varphi = 0$ приближаются при возрастании полярного угла к точке $r = 0$. Траектории образуют устойчивый фокус. Аналогично, если $g_l > 0$, то получаем предыдущую картину при замене $\varphi$ на $-\varphi$. Следовательно, имеет место неустойчивый фокус. Если же все $g_k$ в (2.5) равны нулю, то $g(r_0) \equiv r_0$. Это означает, что все интегральные кривые замкнуты, т. е. получаем центр.

Таким образом, мы доказали, что траектории системы (2.1) образуют либо фокус, либо центр. Задача различения этих двух случаев с помощью конечного числа действий над коэффициентами разложений функций $X_1$ и $X_2$ называется проблемой центра и фокуса.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов линейной части системы являются корнями уравнения $(1-\lambda)(-1-\lambda)+2=0$, т.е. $\lambda_{1,2} = \pm i$. Собственные векторы находим из соотношений $s^2 = \bar{s}^1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$s^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{i-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $Q$ преобразования имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{i-1} & \frac{-1}{i+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем замену:

$$x_1 = -z_1 + z_2, \quad x_2 = 2z_1$$

и ей обратную:

$$z_1 = \frac{1}{2}x_2, \quad z_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_2.$$

Выполняя замену, получаем систему

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2}(-2x_1 - x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3) = -z_2 - \frac{1}{2}(z_1 - z_2)^2(z_1 + z_2),$$

$$\dot{z}_2 = x_1 + x_2 + \dot{z}_1 = z_1 - \frac{1}{2}(z_1 - z_2)^2(z_1 + z_2).$$

Переходим к полярным координатам $z_1 = r\cos\varphi$, $z_2 = r\sin\varphi$, $r \geq 0$.

Имеем

$$\dot{r} = -\frac{1}{2}r^3(\cos\varphi - \sin\varphi)^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2,$$

$$\dot{\varphi} = 1 - \frac{1}{2}r^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^3(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Исключаем $t$:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{2}r^3\cos^2 2\varphi + O(r^5).$$

Записывая решение в виде

$$r(\varphi, r_0) = r_0 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\varphi) r_0^k,$$

из предыдущего находим

$$a_2(\varphi) = 0 \Rightarrow a_2(\varphi) = 0 \Rightarrow g_2 = 0,$$

$$a_3'(\varphi) = -\frac{1}{2}\cos^2 2\varphi \Rightarrow g_3 = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 2\varphi\, d\varphi < 0.$$

Следовательно, в окрестности начала координат траектории образуют устойчивый фокус.

## Тема 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСЬ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

**5.1.** Рассматривается система уравнений с параметром $\mu$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = a(\mu);$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n). \tag{1}$$

При каждом $\mu$ система имеет решение. Оно зависит не только от $t$, но и от выбранного значения параметра $\mu$, поэтому обозначается $x(t, \mu)$.

**Теорема 1**. Пусть при $(t, \mu) \in D$, $\mu \in M$, ($D$ - область в $R^{n+1}$, $M$ - интервал в $R^1$) все функции $f_i$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$, $a'(\mu)$ непрерывны. Пусть при всех $\mu \in M$ на отрезке $t_0 \in [t_1, t_2]$ решение $x(t, \mu)$ задачи (1) существует и проходит в области $D$. Тогда это решение имеет производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu}$,, непрерывные по $(t, \mu)$. Функции $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \quad u_i(t_0) = a_i'(\mu), \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

В (2) производные от $f_i$ зависят от аргументов $t$, $x_1(t, \mu)$, …, $x_n(t, \mu)$, $\mu$, где

$x_i(t,\mu)$ - координаты решения $x(t,\mu)$ при том значении $\mu$, при котором разыскивается $\frac{\partial x}{\partial \mu}$.

Если решение $x(t,\mu)$ известно хотя бы при одном значении $\mu$. то система (2) позволяет найти $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ при этом $\mu$. Систему (2) можно не запоминать, она получается посредством дифференцирования обеих частей системы (1) по $\mu$; при этом считаем, что $x = x(t,\mu)$, и $\frac{\partial x_i}{\partial \mu}$ обозначаем $u_i$.

**Пример 1**. Найти $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$ от решения задачи

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 4\mu t + \mu^2, \; x(1) = 2\mu - 1. \tag{3}$$

<u>Решение примера</u>. Условия теоремы 1 выполнены, так как функции $f = x^2 + 4\mu t + \mu^2$ и $a(\mu) = 2\mu - 1$ непрерывны и имеют непрерывные производные по $x$, $\mu$. Дифференцируя (3) по $\mu$ и обозначая $x'_\mu = u$, получаем

$$\frac{du}{dt} = 2xu + 4t + 2\mu, \; u(1) = 2. \tag{4}$$

Здесь $\mu = 0$, а $x$ - решение задачи (3) при $\mu = 0$, то есть задачи $\frac{dx}{dt} = x^2$, $x(1) = -1$.

Отсюда $x = -\frac{1}{t}$. Теперь (4) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2u}{t} + 4t, \; u(1) = 2.$$

Решая это линейное уравнение (выкладки пропускаем), получаем $u = t^2 + ct^{-2}$. Из начального условия находим $c = 1$. Итак, $u = t^2 + t^{-2}$.◀

<u>Доказательство теоремы</u>. Зафиксируем $\mu \in M$. Имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \lim_{\tilde{\mu} \to \mu} \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu}, \tag{5}$$

где $\tilde{x} = x(t,\tilde{\mu})$ - решение задачи (1), но с $\tilde{\mu}$ вместо $\mu$, то есть

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t,\tilde{x},\tilde{\mu}),\ \tilde{x}(t_0) = a(\tilde{\mu}). \tag{6}$$

Обозначим дробь в (5) через $v(t,\mu)$. Идея доказательства теоремы. Составляем дифференциальное уравнение для $v(t,\mu)$ при $\tilde{\mu} \neq \mu$. Его правая часть при $\tilde{\mu} \to \mu$ стремится к правой части уравнения (2). Поэтому и решение $v(t,\tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} \to \mu$, то есть дробь в (5), стремится к решению уравнения (2).

Значит, предел в (5), то есть $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, существует и удовлетворяет уравнению (2).

Из уравнений (6) и (1), вычитая и деля на $\tilde{\mu} - \mu$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv(t,\tilde{\mu})}{dt} &= \frac{f(t,\tilde{x},\tilde{\mu}) - f(t,x,\mu)}{\tilde{\mu} - \mu} \\ v(t_0) &= \frac{a(\tilde{\mu}) - a(\mu)}{\tilde{\mu} - \mu} \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем первую дробь в (7). Положим

$F(s) = f(t,x^*,\mu^*)$,

$x^* = x + s(\tilde{x} - x)$, $\mu^* = \mu + s(\tilde{\mu} - \mu)$.

Тогда

$$f(t,\tilde{x},\tilde{\mu}) - f(t,x,\mu) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s)ds,$$

$$F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^*}(\tilde{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \mu^*}(\tilde{\mu} - \mu)\ \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \text{ есть матрица } \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j^*}\right)_{i,j=1,\dots,n}\right).$$

Поэтому из (7) имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu}\int_0^1 F'(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial f(t,x^*,\mu^*)}{\partial x^*}ds \cdot \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu} + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu^*}ds. \tag{8}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ непрерывны по совокупности переменных, то подынтегральные функции непрерывны по $t$, $x$, $\tilde{x}$, $\mu$, $\tilde{\mu}$, $s$, а интегралы- по $t$, $x$, $\tilde{x}$, $\mu$, $\tilde{\mu}$. Из (1) $x = x(t,\mu)$ непрерывно по $t$. Из теоремы (о непрерывной зависимости решения от параметра) $\tilde{x}$ непрерывно по $(t,\tilde{\mu})$- по совокупности переменных. Поэтому последние два интеграла в (8)- непрерывные функции от $(t,\tilde{\mu})$, включая значение $\tilde{\mu} = \mu$. Обозначая их $H(t,\tilde{\mu})$ и $h(t,\tilde{\mu})$, получаем

$$\frac{dv}{dt} = H(t,\tilde{\mu})v + h(t,\tilde{\mu}). \qquad (9)$$

Функция $v(t,\tilde{\mu})$ была определена при $\tilde{\mu} \neq \mu$. Доопределяем ее при $\tilde{\mu} = \mu$ как решение уравнения (9) с начальным условием $v(t_0,\mu) = \alpha'(\mu)$, полученным из начального условия (7) при $\tilde{\mu} \to \mu$. По теореме (о непрерывной зависимости решения от параметра) функция $v(t,\tilde{\mu})$ непрерывна по $\tilde{\mu}$, включая $\tilde{\mu} = \mu$. При $\tilde{\mu} = \mu$ имеем $x^* = x = x(t,\mu)$, $\mu^* = \mu$, подынтегральные выражения в (8) не зависят от $s$. Тогда в (9) матрица $H$ и вектор $h$ принимают значения

$$H(t,\mu) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad h(t,\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Таким образом, для $v(t,\mu)$ уравнение (9) и начальное условие $v(t_0,\mu) = \alpha'(\mu)$ совпадают с (2). В силу непрерывности $v(t,\tilde{\mu})$ существует $\lim\limits_{\tilde{\mu}\to\mu} v(t,\tilde{\mu}) = v(t,\mu)$. То есть в (5) существует производная $\frac{\partial x}{\partial \mu} = v(t,\mu)$ и координаты $u_i$ вектора $v(t,\mu)$ удовлетворяют системе уравнений и начальным условиям (2).

Теперь пусть $\mu$ меняется на интервале $M$. Тогда правые части системы (2) (и производные $\frac{\partial}{\partial u_j}$ от них) непрерывны по $(t,\mu)$. По теореме (о непрерывной зависимости решения от параметра) решение системы (2), то есть производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu}$, тоже непрерывны по $(t,\mu)$. ■

**5.2** Дифференцируемость решения по начальным условиям (следствие теоремы 1). Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,x_1,\dots,x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1,\dots,n) \qquad (10)$$

Пусть при $(t,x) \in D$ все функции $f_i$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны, и на отрезке $t_0 \in [t_1,t_2]$ решение задачи (10) существует и проходит в области $D$. Тогда при $t_1 \le t \le t_2$ существуют непрерывные производные решения $x_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$ по начальным

условиям $x_{k0}$ ($k = 1,...,n$). Функции $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{k0}}$ ($i = 1,...,n$) удовлетворяют системе

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \quad u_i(t_0) = \begin{cases} 0 (i \neq k) \\ 1 (i = k) \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $f_i = f_i(t, x_1(t),...,x_n(t))$, где $x_1(t),...,x_n(t)$ - решение задачи (10).

<u>Доказательство</u>. Пусть $x_{k0} = \mu$, а при $i \neq k$ $x_{i0}$ не зависит от $\mu$. Тогда система (10) удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, производные $\frac{\partial x_i}{\partial x_{k0}} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \mu} = u_i$ существуют, непрерывны и удовлетворяют системе (2), которая в этом случае превращается в (11).

**Теорема 2**. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, функции $f_i$, $a_i(\mu)$, имеют непрерывные производные по $x_1,...,x_n$, $\mu$ до порядка $m \geq 2$ включительно, в том числе смешанные производные. Тогда решение $x(t, \mu)$ имеет непрерывные по $t$, $\mu$ производные по $\mu$ до порядка $m$ включительно.

<u>Доказательство</u> производится с помощью индукции по $m$. Для $m = 1$ утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1. Пусть утверждение верно для производных до порядка $m - 1 \geq 1$. Докажем, что оно верно и для производных порядка $m$. Так как $\frac{\partial^m x_i}{\partial \mu^m} \equiv \frac{\partial^{m-1} u_i}{\partial \mu^{m-1}}$, а функции $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$ ($i = 1,...,n$) удовлетворяют системе (2), то надо проверить, что правые части в (2) имеют непрерывные производные по $u_i$, $\mu$ до порядка $m - 1$ включительно.

По условию, $f_i \in C^m$ по $x_1,...,x_n$, $\mu$, значит, в (2) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$ принадлежат $C^{m-1}$ по аргументам $x_1,...,x_n$, $\mu$. Но каждое $x_k = x_k(t, \mu)$ есть координата вектора $x(t, \mu)$, являющегося решением задачи (1), где $f$ и $a(\mu)$ принадлежат $C^m$, значит, принадлежат и $C^{m-1}$ по $x_1,...,x_n$, $\mu$. По предположению индукции, все $x_k(t, \mu) \in C^{m-1}$ по $\mu$. Значит, в (2) сложная функция $\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(t, x_1(t, \mu),...,x_n(t, \mu), \mu)$

принадлежит $C^{m-1}$ по $\mu$, аналогично $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$, также $a'(\mu) \in C^{m-1}$. По предположению индукции, примененному к системе (2), решение $u_1,...,u_n$ системы (2) принадлежит $C^{m-1}$ по $\mu$. Так как $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$, то $x_i(t,\mu) \in C^m$ по $\mu$. ■

## Тема 6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**6.1** Асимптотические методы позволяют отыскивать приближенные решения дифференциальных уравнений (или систем), близких к таким уравнениям (или системам), решения которых известны. В прикладных задачах часто бывает, что на течение рассматриваемого физического процесса влияют как основные факторы, определяющие ход процесса, так и другие факторы, оказывающие меньшее влияние и меняющие количественные характеристики процесса. При учете только основных факторов можно получить точное решение системы уравнений, а при учете всех известных факторов система становится сложной и не решается. В таких случаях асимптотические методы часто позволяют найти решение с нужной точностью.

**6.2** Разложение решения по степеням малого параметра- один из наиболее употребительных асимптотических методов.

**Следствие теоремы 2.** Пусть при $(t,x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$ выполнены условия теоремы 2, и при $\mu = 0$, $t_1 \le t \le t_2$ решение задачи (1) проходит в области $D$; $t_0 \in [t_1,t_2]$. Тогда решение $x(t,\mu)$ задачи (1) при $t_1 \le t \le t_2$ разлагается по формуле Тейлора по степеням параметра $\mu$ до $\mu^m$ включительно:

$$x(t,\mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + ... + \mu^m v_m(t) + o(\mu^m) \qquad (12)$$

Здесь $x(t,\mu)$ и $v_i(t)$ - $n$ - мерные вектор- функции, $v_0(t) \equiv x(t,0)$ есть решение системы (1) при $\mu = 0$, оно считается известным. Чтобы найти $v_1(t),...,v_m(t)$, надо подставить разложение (12) в систему (1) и начальные условия, и разложить правые части по степеням $\mu$ до $\mu^m$ включительно. Далее надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$. Получается для $v_1,...,v_m$ система

дифференциальных уравнений с начальными условиями. Последовательно решая уравнения системы и пользуясь начальными условиями, находим $v_1(t),...,v_m(t)$.

**Пример 2**. Найти разложение решения задачи

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} - 2\mu t^2, \; x(1) = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{8} \tag{13}$$

по степеням параметра $\mu$ до $\mu^2$ включительно.

<u>Решение примера</u>. Правая часть уравнения в области $x > 0$ имеет производные любого порядка по $x$, $\mu$. Условия теоремы 2 выполнены для любого $m$, пока решение задачи (13) с $\mu = 0$ проходит в области $x > 0$. При $\mu = 0$ задача (13) принимает вид $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$, $x(1) = 1$, и имеет решение $x(t) = t$, оно проходит в области $x > 0$ при $t > 0$. Поэтому $v_0(t) = t$ ($t > 0$). Разложение $x = t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + o(\mu^2)$ подставляем в уравнение и начальные условия (13), члены порядка $o(\mu^2)$ не пишем.

$$1 + \mu v_1' + \mu^2 v_2' + ... = \frac{t}{(t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + ...)} - 2\mu t^2, \tag{14}$$

$$1 + \mu v_1(1) + \mu^2 v_2(1) + ... = 1 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{8}. \tag{15}$$

Разлагаем дробь в (14) по степеням $\mu$, члены с $\mu^k$, $k > 2$, не пишем.

$$\frac{t}{t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + ...} = \frac{1}{1 + \mu t^{-1} v_1 + \mu^2 t^{-1} v_2 + ...} = 1 - \left(\frac{\mu}{t} v_1 + \frac{\mu^2}{t} v_2 + ...\right) + \left(\frac{\mu}{t} v_1 + ...\right)^2 - ... =$$
$$= 1 - \frac{\mu}{t} v_1 - \frac{\mu^2 t}{} v_2 + \frac{\mu^2}{t^2} v_1^2 + ...$$

Подставляем это в(14) и приравниваем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях параметра $\mu$:

при $\mu^1$: $v_1' = -\frac{v_1}{t} - 2t^2$, $v_1(1) = -\frac{1}{2}$; (16)

при $\mu^2$: $v_2' = -\frac{v_2}{t} + \frac{v_1^2}{t^2}$, $v_2(1) = \frac{1}{8}$. (17)

Здесь начальные условия получены из (15). Все дифференциальные уравнения

для $v_1,\dots,v_m$ всегда линейные. Из (16) получаем $v_1 = -\dfrac{t^3}{2}$. Подставляя это в (17),

находим $v_2 = \dfrac{1}{12t} + \dfrac{t^5}{24}$. Итак,

$$x(t) = t - \mu\frac{t^3}{2} + \mu^2\left(\frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}\right) + o(\mu^2). \tag{18}$$

Так как условия теоремы 2 выполнены для любого $m \geq 2$, то следующий член разложения имеет вид $\mu^3 v_3(t)$ и, не находя $v_3$, в (18) вместо $o(\mu^2)$ можно написать $O(\mu^3)$. ◀

**6.3** Отыскание периодических решений. Нижеследующие лемма 2 и теорема 3 дают условия существования периодических решений соответственно для линейной системы с периодической правой частью и для нелинейной системы, близкой к линейной, и указывают методы отыскания таких решений.

**Лемма 1.** Пусть при $0 \leq t \leq p$ вектор- функция $x(t)$ - решение уравнения

$x' = f(t,x)$, где вектор- функция $f$ и все $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны и $f(t+p,x) \equiv f(t,x)$.

Если $x(p) = x(0)$, то решение $x(t)$ продолжается на интервал $(-\infty,\infty)$ с периодом $p$.

<u>Доказательство</u>. Так как

$x'_{лев}(p) = f(p,x(p)) = f(0,x(0)) = x'_{прав}(0)$,

то продолженная с периодом $p$ функция $x(t) \in C^1$. Она всюду удовлетворяет данному уравнению, ибо для любого $k \in Z$ имеем

$x'(t+kp) = x'(t) = f(t,x(t)) = f(t+kp,x(t+kp))$. ■

**Лемма 2.** Если для всех собственных значений матрицы $A$ имеем

$$\lambda \neq \frac{2\pi k}{p} i,\ k = 0,\pm 1,\pm 2,\dots, \tag{19}$$

то система $x' = Ax + f(t)$ для каждой непрерывной функции $f(t)$ с периодом $p$ имеет (и только одно) решение с периодом $p$.

Условие (19) называется условием отсутствия резонанса.

Доказательство. Пусть $v(t)$ - частное решение данной системы с $v(0) = 0$. В силу теоремы (о сумме решений) и следствия (о фундаментальной матрице системы) общее решение имеет вид $x = e^{tA}b + v(t)$, где $b$ - произвольный вектор из $R^n$. Чтобы это решение имело период $p$, по лемме 1 надо, чтобы $x(p) = x(0)$. То есть

$e^{pA}b + v(p) = b + v(0)$, $(e^{pA} - E)b = -v(p)$.

Это- линейная алгебраическая система относительно неизвестных координат вектора $b$. Для существования единственного решения достаточно, чтобы $\det(e^{pA} - 1\cdot E) \neq 0$, то есть чтобы матрица $e^{pA}$ не имела собственных значений, равных 1.

Если $\lambda_1,...,\lambda_n$ - собственные значения матрицы $A$, то $e^{pA}$ имеет собственные значения $e^{p\lambda_i}$, $i = 1,...,n$. Для $\lambda = \alpha + \beta i$ имеем $e^{p\lambda} = e^{p\alpha}(\cos p\beta + i\sin p\beta)$. Это число равно 1 только в случае $\alpha = 0$, $p\beta = 2\pi k$, $k = 0,\pm 1,\pm 2,...$. Поэтому при условии (19) имеем $e^{p\lambda} \neq 1$. ■

**Теорема 3.** Пусть функции $f(t)$, $g(t,x,\mu)$ непрерывны при $x \in R^n$, $(t,x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$, имеют период $p$ по $t$; $g \in C^m$ по $x$, $\mu$, где $m \geq 1$. Пусть выполнено условие (19) и решение $x^0(t)$ с периодом $p$ уравнения $x' = Ax + f(t)$ содержится в области $D$. Тогда при всех достаточно малых $|\mu|$ система

$$x' = Ax + f(t) + \mu g(t,x,\mu) \tag{20}$$

имеет решение периода $p$ по $t$, стремящееся к $x^0(t)$ при $\mu \to 0$. Такое решение единственно и принадлежит классу $C^m$ по $\mu$.

Доказательство. Пусть $x(t;b,\mu)$ - решение системы (20) с начальным условием $x(0;b,\mu) = b$. По лемме 1 оно будет иметь период $p$, если

$$x(p;b,\mu) - b = 0 \tag{21}$$

Докажем, что при малых $\mu$ существует $b \in R^n$, удовлетворяющее уравнению (21). Функция $x(p;b,\mu) \in C^m$ по $b$, $\mu$ в силу теоремы 2. При $\mu = 0$ уравнение (20) линейное, как в лемме 2, уравнение (21) принимает вид

$$(e^{pA} - E)b = -v(p),\ \det(e^{pA} - 1\cdot E) \neq 0 \tag{22}$$

и имеет единственное решение $b$. Далее, якобиан левой части равенства (21) по

координатам $b_1,...,b_n$ вектора $b$ при $\mu = 0$ совпадает с детерминантом (22), значит, не равен нулю. Тогда по теореме о неявных функциях уравнение (21) при достаточно малых $\mu$ имеет решение $b = b(\mu)$, стремящееся к $b^0$ при $\mu \to 0$, такое решение единственно и $b(\mu) \in C^m$.

Тогда решение $x(t;b(\mu),\mu) \in C^m$ по $\mu$, и в силу (21) и леммы 1 имеет период $p$. ■

**Следствие.** При условиях теоремы 3 названное периодическое решение имеет разложение по степеням $\mu$ вида (12) с функциями $v_i(t)$, имеющими период $p$.

<u>Доказательство</u>. Решение $x(t;b(\mu),\mu) \in C^m$ по $\mu$, поэтому имеет разложение вида (12). Следовательно,

$$x(t+p,b(\mu),\mu) - x(t,b(\mu),\mu) = d_0 + d_1\mu + ... + d_m\mu^m + o(\mu^m) \tag{23}$$

где $d_i = v_i(t+p) - v_i(t)$, $i = 0,1,...,m$. В силу периодичности решения левая часть в (23) равна нулю, поэтому все $d_i = 0$, то есть $v_i(t+p) \equiv v_i(t)$. ■

**Замечание.** Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(t) + \mu g(t,y,\mu) \tag{24}$$

с постоянными коэффициентами $a_i$ и непрерывными функциями $f$, $g$ периода $p$ по $t$ и $g \in C^m$ по $y$, $\mu$, а корни $\lambda$ характеристического уравнения удовлетворяют условию (19). Тогда для отыскания решения периода $p$ не нужно переходить от уравнения (24) к системе, можно сразу отыскать решение в виде (12), где теперь $v_i(t)$ - скалярные функции с периодом $p$.

**Пример 3.** Найти с точностью $o(\mu^2)$ периодическое решение уравнения

$$x'' + 3x = 2\sin t + \mu x^2 \tag{25}$$

<u>Решение примера</u>. Здесь $p = 2\pi$, $\lambda^2 + 3 = 0$, $\lambda = \pm i\sqrt{3} \neq \dfrac{2\pi ki}{p} = ki$ ($k \in Z$), условие (19) выполнено. Ищем периодическое решение в виде $x = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + ...$. Подставляя в уравнение (25) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$, получаем систему уравнений

$v_0'' + 3v_0 = 2\sin t$, $v_1'' + 3v_1 = v_0^2$, $v_2'' + 3v_2 = 2v_0 v_1, \ldots$ .

Надо найти решения $v_0$, $v_1$, $v_2$ с периодом $2\pi$ . Для каждого из этих уравнений надо найти лишь частное решение (методом неопределенных коэффициентов), так как по теореме 3 при выполнении условия (19) решение с периодом $p$ единственно. Последовательно находим $v_0 = \sin t$; $v_1'' + 3v_1 = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$,

$v_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t$. Подставляя $v_0$ и $v_1$ в уравнение для $v_2$, имеем

$$v_2'' + 3v_2 = 2\sin t\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) = -\frac{1}{6}\sin t + \frac{1}{2}\sin 3t .$$

Отсюда находим

$$v_2 = -\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t .$$

Следовательно,

$$x = \sin t + \mu\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) + \mu^2\left(-\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t\right) + o(\mu) .$$

Как в примере 2, вместо $o(\mu^2)$ можно написать $O(\mu^3)$. ◄

**6.4** К системе вида (20) сводится задача о вынужденных колебаниях автономной системы вблизи положения равновесия, вызываемых периодическим малым внешним воздействием. Рассмотрим систему

$$x' = F(x) + \mu f(t),\ f(t+p) \equiv f(t),\ x = (x_1, \ldots, x_n)^T . \qquad (26)$$

Пусть $x^0$ - положение равновесия при $\mu = 0$, то есть $F(x^0) = 0$; $\mu$ - малое число, функция $f(t)$ непрерывна, $F(x) \in C^{m+1}$ $(m \geq 1)$ в окрестности точки $x^0$. Замена $x = x^0 + \mu y$ дает $\mu y' = F(x^0 + \mu y) + \mu f(t)$. Так как $F(x^0) = 0$, то по формуле Тейлора

$$F(x^0 + \mu y) = \mu A y + r(\mu, y),\ A = \left(\frac{\partial F_i(x^0)}{\partial x_j^0}\right)_{i,j=1,\ldots,n} .$$

Остаточный член $r \in C^{m+1}$ ( ибо другие члены в равенстве принадлежат $C^{m+1}$), $r = \mu^2 g(y, \mu)$. Получаем систему вида (20)

$$y' = Ay + f(t) + \mu g(y,\mu), \quad g \in C^m \tag{27}$$

Если собственные значения матрицы $A$ удовлетворяют условию (19) (нет резонанса), то по теореме 3 система (27) при достаточно малых $|\mu|$ имеет решение с периодом $p$.

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение

$$x'' + 2x' + x^2 - 1 = \mu \sin t \quad (x \in R^1). \tag{28}$$

<u>Решение примера</u>. При $\mu = 0$ положения равновесия $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Найдем периодическое решение, близкое к $x = 1$. Замена $x = 1 + \mu y$ дает

$$y'' + 2y' + 2y = \sin t - \mu y^2 \tag{29}$$

Здесь $p = 2\pi$, $\lambda = -1 \pm i \neq \dfrac{2\pi ki}{p}$ ($k \in Z$), условие (19) выполнено. Поэтому при малых $\mu$ уравнение (29) имеет решение периода $2\pi$ и вида $y = v_0(t) + \mu v_1(t) + \dots$, где все $v_i(t)$ имеют период $2\pi$. Подставляя это в (29), получаем, как в примере 3,

$$v_0'' + 2v_0' + 2v_0 = \sin t, \quad v_1'' + 2v_1' + 2v_1 = -v_0^2, \ \dots .$$

Отсюда находим $v_0 = a\cos t + b\sin t$, $a = -\dfrac{2}{5}$; $b = \dfrac{1}{5}$; $v_0^2 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{50}\cos 2t - \dfrac{2}{25}\sin 2t$,

$v_1 = h + c\cos 2t + d\sin 2t$, $h = -\dfrac{1}{20}$, $c = -\dfrac{1}{100}$, $d = -\dfrac{1}{50}$ и т.д. Следовательно,

$$x = 1 + \mu y + 1\mu\left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right) + \mu^2\left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{100}\cos 2t - \frac{1}{50}\sin 2t\right) + O(\mu^3). \tag{30}$$

Уравнение (28) при малых $\mu$ имеет другое решение с периодом $2\pi$. Оно близко к неустойчивому положению равновесия $x_2 = -1$ и отыскивается аналогичным способом. Можно доказать, что оно неустойчиво.

## Тема 7. WBKJ-решения

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} + \lambda^2 \omega^2(t) y = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda > 0$ - большой параметр $\lambda >> 1$ и $\omega^2(t) \geq \alpha > 0$. Если бы функция $\omega(t)$ была постоянной величиной, то решения уравнения (1) имели бы вид

$$y_{1,2} = \exp(\pm i\lambda\omega t).$$

Кажется, что при достаточно большом $\lambda$ поведение решений при $\omega = \omega(t)$ должно хорошо описываться функцией

$$\exp(\pm i\lambda \int_0^t \omega(t)dt).$$

В самом деле, если $\lambda$ достаточно велико, то решения уравнения (1) будут быстро осциллирующими функциями и за один период осцилляции функция $\omega(t)$ быстро измениться не сможет. Значит, в каждый момент времени линейно независимые решения можно аппроксимировать функциями

$$y_{1,2} \approx \exp(\pm i\lambda\bar{\omega} t)$$

где $\bar{\omega}$ - среднее значение функции $\omega(t)$, причем $\bar{\omega} t$ мало отличается от $\int \omega(t)dt$.

Используя эти наводящие соображения, будем искать решения уравнения (1) в виде

$$y_{1,2} = \exp[\pm i\lambda \int_0^t \omega(t)dt]z(t,\lambda). \qquad (1.2)$$

Экспоненциальный множитель в выражении (2) описывает быструю осцилляцию. Поэтому можно ожидать, что функция $z(t,\lambda)$ меняется медленно.

Дифференцируя дважды (2), подставляя в (1) и сокращая экспоненциальный множитель, мы получим уравнение относительно $z(t,\lambda)$

$$\ddot{z} \pm 2i\lambda\,\omega\,\dot{z} \pm i\lambda\,\dot{\omega}\,z = 0$$

или

$$\frac{1}{\lambda}\ddot{z} \pm 2i\omega\,\dot{z} \pm i\dot{\omega}\,z = 0 \quad . \qquad (1.3)$$

Первая производная функции $z(t,\lambda)$ мала, вторая производная, по-видимому, должна быть еще более малой величиной; к тому же она умножается на величину $1/\lambda$, которая мала по условию. Следовательно, мы не сделаем большой ошибки, если отбросим в (3) слагаемое $1/\lambda\,\ddot{z}$. Уравнение (3) после этой процедуры превращается в уравнение первого порядка. Переменные в нем разделяются, и мы получаем

$$z(t) = \frac{C}{\sqrt{\omega\,(t)}},$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, мы получили следующие приближенные значения для обоих линейно независимых интегралов уравнения (3):

$$y^*_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega\,(t)}}\exp[\pm i\lambda\int_0^t \omega\,(t)dt] \qquad (1.4)$$

или в тригонометрической форме

$$\begin{cases} y^*_1 = \dfrac{A}{\sqrt{\omega}}\cos[\lambda\int_0^t \omega(t)dt] \\ y^*_2 = \dfrac{B}{\sqrt{\omega}}\sin[\lambda\int_0^t \omega(t)dt] \end{cases}, \qquad (1.5)$$

где A и B – произвольные постоянные.

Функции (4) и (5) обычно называются WBKJ-решениями. Мы предполагали, что $\omega^2(t) \le \alpha < 0$, т.е. когда вместо уравнения (3) рассматривается уравнение

$$\ddot{y} + \lambda^2\omega_1^2(t)y = 0$$

при $\omega_1^2(t) \ge \alpha > 0$.

Для этого уравнения WBKJ-решения будут иметь вид

$$y_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega(t)}}\exp[\pm\lambda\int_0^t \omega(t)dt]. \qquad (1.6)$$

**Связь с методом усреднения**

Рассуждения, которые мы использовали для вывода формул (5), не являются строгими. Заметим, что эти формулы могут быть получены методом усреднения. В самом деле, сделаем в (1) замену независимого переменного

$$t = \varepsilon\tau, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда уравнение (1) перейдет в следующее:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \omega^2(\varepsilon\tau)y = 0. \qquad (1.7)$$

Интеграл действия

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\varepsilon\tau) Q_\psi^2 \, d\psi \qquad (1.8)$$

будет адиабатическим инвариантом, т.е. его производная в силу уравнений первого приближения равна нулю. В выражении (8) $Q$ и $Q_\psi$ означает функции

$$Q = x\cos\psi, \qquad Q_\psi = -x\sin\psi.$$

Следовательно,

$$J(x) = \frac{\omega(\varepsilon\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin^2\psi \, d\psi = const,$$

откуда

$$x = \frac{const}{\sqrt{\omega(\varepsilon t)}}.$$

Далее, уравнение первого приближения для фазы имеет вид $\frac{d\psi}{d\tau} = \omega(\varepsilon\tau)$,

из которого следует, что

$$y(t) = x\cos\psi = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}}\cos\lambda\int_0^t \omega(t)dt.$$

## Тема 8. Асимптотический характер приближенных формул

Вывод формул (5) и (6) был основан на предположении о том, что в уравнении (3) можно отбросить слагаемое $(1/\lambda)\ddot{z}$, если $\lambda$ достаточно велико.

Это уравнение относится к классу уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. Отбрасывание членов, содержащих малый параметр, приводит к понижению порядка системы. Решение такой системы меньшего числа степеней свободы может не иметь никакого отношения к решению исходной задачи. Тем не менее, как мы увидим ниже, при известных условиях формулы (5) и (6) действительно являются хорошей аппроксимацией точных решений уравнения (1).

Функции $z(t,\lambda)$ будем называть $\lambda^r$-асимптотическим решением (или просто решением, асимптотическим по параметру $\lambda$), если для любого $t \in [0,T]$ искомое решение можно представить в виде

$$y(t,\lambda) = z(t,\lambda) + \frac{\psi(t,\lambda)}{\lambda^r}, \tag{1.9}$$

где $\psi(t,\lambda)$ ограничена при $\lambda \to \infty$.

Теорема 1. Пусть функция $\omega^2(t)$ дважды дифференцируема на отрезке $[0,T]$ и существует такая постоянная $\lambda > 0$, что для любого $t \in [0,t]$

$$\omega(t) \geq \alpha .$$

Тогда для любого $t \in [0,T]$ функция (5) является $\lambda$ асимптотическим решением уравнения (1).

Доказательство этой теоремы базируется на двух вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. пусть u и v – положительные функции и C – положительная постоянная. Если для любого $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$u \leq C + \int_0^t uvdt \tag{1.10}$$

То для любого $t \geq 0$

$$u \leq C\exp(\int_0^t v dt) \quad . \tag{1.11}$$

Лемма 2. Если $\omega \geq \alpha > 0$ для любых $t \in [0,T]$, то для любого $\lambda \geq \beta > 0$ можно указать такую постоянную D>0, зависящую только от начальных условий и чисел $\alpha$ , $\beta$ и T, что при любом $t \in [0,T]$ решение задачи Коши для уравнения

$$\ddot{y} + \lambda^2 \omega^2(t) y = 0 \tag{1.12}$$

Удовлетворяет неравенству

$$|y| \leq D \quad .$$

Для доказательства умножим (12) на $\dot{y}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t, в результате получим

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + \lambda^2 \omega^2 \frac{y^2}{2} = \int_0^t y^2 \omega \dot{\omega} dt + \frac{d}{2}\lambda^2 \quad , \tag{1.13}$$

где

$$d = \frac{\dot{y}_0^2 + \lambda^2 \omega^2(0) y_0^2}{\lambda^2} > 0 \quad .$$

Заменим равенство (13) неравенством

$$\lambda^2\omega^2 y^2 \le \alpha^2\lambda^2 C + \int_0^t 2y^2\omega\,|\dot{\omega}|\,dt,$$

где

$$C = \frac{\dot{y}_0^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{\omega^2(0)y_0^2}{\alpha^2},$$

или

$$y^2 \le C + \int_0^t y^2 \frac{2\omega\,|\dot{\omega}|}{\alpha^2\beta^2}\,dt. \qquad (1.14)$$

Неравенство (14) удовлетворяет всем условиям леммы 1, где $u = y^2$, $v = \frac{2\omega\,|\dot{\omega}|}{\alpha^2\beta^2}$. Следовательно, мы имеем оценку

$$y^2 \le C\int_0^{Tt} \frac{2\omega\,|\dot{\omega}|}{\alpha^2\beta^2}\,dt = D. \qquad (1.15)$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим функции (4)

$$y^*_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega(t)}}\exp[\pm i\lambda\int_0^t \omega(t)dt]$$

и составим дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Вычисляя вторую производную, находим

$$\frac{d^2 y_i^*}{dt^2} = y_i\left[\frac{3}{4}\omega^{-2}\dot{\omega}^2 - \frac{1}{2}\omega\ddot{\omega} - \lambda^2\omega^2\right] \qquad \text{(i=1,2).}$$

Следовательно, функции $y_i^*$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 y_i^*}{dt^2} + (\lambda^2 \omega^2 + \varphi(t)) y_i^* = 0, \tag{1.16}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\omega\ddot{\omega} - \frac{3}{4}\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, уравнению (16) удовлетворяют обе функции $y_1^*$ и $y_2^*$. Значит, этому уравнению удовлетворяет также их произвольная линейная комбинация

$$y^* = C_1 y_1^* + C_2 y_2^*.$$

Пусть теперь y – то частное решение уравнения (12), которое удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $y^*$. Обозначим

$$v = y - y^* \tag{1.17}$$

и перепишем уравнение (12) так:

$$\ddot{y} + (\lambda^2 \omega^2 + \varphi) y = \varphi y. \tag{1.18}$$

Вычитая из уравнения (18) уравнение (16) и используя (17), получим уравнение, которому удовлетворяет функция v:

$$\ddot{v} + (\lambda^2 \omega^2 + \varphi) v = \varphi(t) y. \tag{1.19}$$

Функция v по построению удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$v(0) = \dot{v}(0) = 0. \tag{1.20}$$

Уравнение (19) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно v. Частные решения однородного уравнения (при $\varphi y \equiv 0$) нам известны – это функции $y_1^*$ и $y_2^*$. Следовательно, функцию v мы можем выразить при помощи формулы Лагранжа

$$v(t) = \int_0^t G(t,\tau)\varphi(\tau)y\tau d\tau, \tag{1.21}$$

где $G(t,\tau)$ - известная функция Грина

$$G(t,\tau) = \frac{1}{\Delta}\{y_2^*(t)y_2(\tau) - y_1^*(\tau)y_2^*(t)\},$$

$\Delta$ - определитель Вронского для функций $y_1^*$ и $y_2^*$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^* & y_2^* \\ \dfrac{dy_1^*}{dt} & \dfrac{dy_2^*}{dt} \end{vmatrix}.$$

Дифференцируя (5), убеждаемся, что

$$y_i^* = O(\lambda).$$

Следовательно, имеем оценку

$$\Delta = O(\lambda),$$

откуда сразу следует и оценка для функции Грина

$$G = O(\lambda^{-1}).$$

В самом деле, формулы (4) показывают, что функции $y_i^*$ ограничены при $\lambda \to \infty$.

Рассмотрим теперь выражение (21). Функция $\varphi(t)$ ограничена в силу условий, наложенных на $\omega(t)$. Для функции y(t) априорная оценка дана леммой 2. следовательно, для любого $t \in [0,T]$

$$v(t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Итак,

$$y = y^* + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad (1.22)$$

Что и требовалось доказать.

Формула (22) дает оценку точности приближенного решения, построенного при помощи формул (5).

## Тема 9. Системы с медленным временем

В этом параграфе мы будем изучать системы с переменными параметрами. Первые существенные результаты этой теории, полученные методом усреднения, принадлежат Ю.А. Митропольскому, которому также принадлежит первое математическое изложение теории колебательных систем, параметры которых медленно изменяются.

**1. Вывод укороченных уравнений.** Рассмотрим теперь уравнение следующего типа:

$$\ddot{z} + f(z,\tau) = \varepsilon\varphi(z,\dot{z},\tau), \tag{3.1}$$

где $\tau$ — “медленное время”: $\tau = \varepsilon t + const$ .Таким образом, в отличие от уравнения (2.1) уравнение (3.1) описывает колебательные процессы в системе с медленно меняющимися параметрами. При $\varepsilon = 0$ уравнение (3.1) превращается в порождающее

$$\ddot{z} + f(z,\tau) = 0, \tag{3.2}$$

где $\tau$ — некоторая постоянная.

Методы, развитые в предыдущем параграфе, без каких-либо существенных изменений могут быть использованы (3.1).

Общий интеграл порождающего уравнения, как и в предыдущем параграфе, будем считать известным, однако теперь он будет зависеть не только от x и y, но и от параметрами $\tau$ :

$$z = Q(x,y,\tau),$$

где, как и раньше, $y = \omega(x,\tau)(t + t_0)$. Заметим при этом, что теперь частота $\omega$ будет функцией не только амплитудой x, но и медленного времени $\tau$ : $\omega = \omega(x,\tau)$ .

Функция Q будет удовлетворять уравнению

$$\omega^2 Q_{YY} + f(Q) = 0 \tag{3.2}$$

тождественно по x и $\tau$ .

Так же, как и в предыдущем параграфе, решение уравнения (3.1) будем искать в виде (2.5)

$$z = Q(x,y,\tau), \tag{2.5'}$$

$$\dot{z} = \omega(x,\tau)Q_Y(x,y,\tau). \tag{2.6'}$$

Другими словами, вместо переменной z мы введем новые переменные x и y при помощи равенств (2.5’) и (2.6’). Уравнения (2.7) и (2.8) в нашем случае будут иметь следующий вид:

$$Q_X\dot{x} + Q_Y - \omega Q_Y + \varepsilon Q_\tau = 0,$$

$$(\omega_X Q_Y + \omega Q_{XY})\dot{x} + \omega\dot{y}Q_{YY} + f(Q,\tau) + \varepsilon(\omega_\tau Q_Y + \omega Q_{Y\tau}) = \varepsilon\varphi.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, и используя определения $\Delta$ и тождество (3.3), мы получим

$$\dot{x}\Delta + \varepsilon\left\{\omega_X(Q_\tau Q_{YY} + Q_X Q_{Y\tau}) - \omega_\tau Q_Y^2\right\} = -\varepsilon\varphi Q_Y,$$

$$-\dot{y}\Delta + \omega\Delta + \varepsilon\left\{\omega(Q_\tau Q_{XY} - Q_X Q_{Y\tau}) + \omega_\tau Q_X Q_\tau - \omega_\tau Q_X Q_Y\right\} = -\varepsilon\varphi Q_X$$

или окончательно

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\Delta}\{\varphi Q_Y + \xi_1(x,y,\tau)\}, \\ \dot{y} &= \omega(x,\tau) + \frac{\varepsilon}{\Delta}\{\varphi Q_X + \xi_2(x,y,\tau)\}, \end{aligned}\right\}$$

где

$$\xi_1 = \omega(Q_\tau Q_{YY} + Q_{Y\tau} Q_Y) - \omega_\tau Q_Y^2,$$

$$\xi_2 = \omega(Q_\tau Q_{XY} - Q_X Q_{Y\tau}) + \omega_X Q_Y Q_\tau - \omega_\tau Q_X Q_Y.$$

Система (3.4) отличается от системы (2.10) лишь тем, что ее правые части зависят не только от переменных x и y, т.е. не только от амплитуды и фазы, но и от времени. Существенно, однако, что правые части являются по условию медленно изменяющимися со временем. Поэтому основные соображения о возможности усреднения правых частей по периоду изменения быстрой переменной остаются в силе, так как за время, в течение которого фаза изменяется на $2\pi$, величина $\tau$ изменяется мало.

Итак, и в этом случае мы также сможем составить систему укороченных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\{\varphi Q_Y + \xi_1\}dy, \\ \dot{y} &= \omega(x,\tau) + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\{\varphi Q_X + \xi_2\}dy, \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Таким образом, процедура Ван-дер-Поля формально применима к системам с медленно меняющимися правыми частями при условии, что функция $Q(x,y,\tau)$ описывает некоторый колебательный процесс (т.е. правые части системы (3.4) являются периодическими функциями «быстрой» переменной y). В этом случае мы можем заменить исходное уравнение (3.1) укороченными — системой (3.5).

**2. Адиабатические инварианты.** В системах с медленно меняющимися параметрами рассматриваются величины, называемые *адиабатическими инвариантами.*

Предположим, что некоторая величина $I(x,y)$ является интегралом порождающего уравнения. Это значит, что производная $dI/dt$, вычисленная в силу порождающего уравнения, равна нулю.

Предположим, что система (3.1) не подвержена действию внешних сил, т.е. $\varphi = 0$, и вычислим в этом случае производную $dI/dt$ в силу укороченных уравнений Ван-дер-Поля. В общем случае эта величина будет зависеть от переменных x и $\tau$ и, следовательно, будет отлична от нуля при $\varepsilon \neq 0$.

Условимся называть функцию $I(x,y)$ адиабатическим инвариантом системы (3.1) относительно укороченных уравнений Ван-дер-Поля, если ее полная производная по времени, вычисленная в силу этих уравнений, равна нулю.

Ниже будет показано, что уравнения Ван-дер-Поля определяют решение с точностью до величин $O(\varepsilon)$. Следовательно, величину $I(x,y,\tau)$ мы называем адиабатическим инвариантом, если

$$\frac{dI}{dt} = Q(\varepsilon^k), \qquad k > 1.$$

Другими словами адиабатический инвариант — это некоторая функция амплитуды и фазы, которая изменяется медленнее, нежели параметры системы.

**3. Интеграл действия.** Рассмотрим функцию $I(x,\tau)$ определенную равенством

$$I(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(x,\tau) Q_Y^2(x,y,\tau)\,dy. \tag{3.6}$$

Функция (3.6) называется *интегралом действия.* Свое название это выражение оправдывается тем, что $I(x,\tau)$ является интегралом порождающего уравнения. В самом деле, при $\tau = const$ «амплитуда» — величина постоянная, поэтому и $I(x,\tau)$ также является постоянной.

Покажем, что интеграл действия является адиабатическим инвариантом. Для этого найдем полную производную по времени

$$\frac{dI}{dt} = I_X \dot{x} + I_\tau \varepsilon .$$

Вычислим частные производные $I_X$ и $I_\tau$ и подставим их в это выражение. В результате мы получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{XY})dy + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Q_Y^2\omega_\tau + 2\omega Q_Y Q_{Y\tau})dy. \qquad (3.7)$$

Преобразуем второе слагаемое в первом интеграле, проинтегрировав его по частям

$$\int_0^{2\pi} Q_X Q_{XY} dy = Q_X Q_Y \Big|_{Y=0}^{Y=2\pi} - \int_0^{2\pi} Q_{YY} Q_X dy.$$

Но первое слагаемое равно нулю, поскольку Q — периодическая функция; следовательно

$$\int_0^{2\pi} Q_Y Q_{XY} dy = -\int_0^{2\pi} Q_{YY} Q_X dy.$$

Используя это выражение, мы можем преобразовать первый из интегралов, входящих в правую часть (3.7)

$$I_1 = \frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{XY})dy = \frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\omega_X Q_Y^2 - \omega(Q_{YY}Q_X - Q_Y Q_{XY})\right\}dy.$$

Но по определению

$$\omega_X Q_Y^2 - \omega(Q_{YY}Q_X - Q_Y Q_{XY}) = -\Delta .$$

Таким образом

$$\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{XY})dy = -\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta\, dy.$$

Величина $\Delta$ от фазы y не зависит, поэтому

$$\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_X Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{XY})dy = -\dot{x}\Delta .$$

Аналогично проведем вычисление второго слагаемого

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_\tau Q_Y^2 + 2\omega Q_Y Q_{Y\tau})dy = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_\tau Q_Y^2 - \omega Q_{YY}Q_\tau + \omega Q_Y Q_{Y\tau})dy = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1(x,y,\tau)dy.$$

Итак, окончательно

$$\frac{dI}{dt} = -\Delta\dot{x} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1(x,y,\tau)dy. \tag{3.8}$$

Подставляя в (3.8) выражение для $\dot{x}$, которое дается первым из уравнений (3.4)

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy - \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy,$$

получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x,y,\tau)Q_Y dy.$$

Отсюда сразу следует, что если $\varphi \equiv 0$, то величина интеграла действия сохраняет свое значение. Итак, интеграл действия является адиабатическим инвариантом порождающего уравнения.

**4. Пример использования адиабатических инвариантов.** Использование адиабатических инвариантов позволяет в некоторых случаях получать ответы на интересующие нас вопросы, минуя интегрирование системы.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + g(\varepsilon t)z = 0. \tag{3.9}$$

В этом случае

$$z = x\cos y, \qquad \dot{z} = -\omega x\sin y,$$

где

$$\omega = \sqrt{g(\varepsilon t)}.$$

Таким образом,

$$Q(x,y) = x\cos y, \qquad Q_Y = -x\sin y.$$

Составим выражение адиабатического варианта

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\omega Q_Y^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sqrt{g(\varepsilon t)}x^2\sin^2 y dy = \frac{\sqrt{g(\varepsilon t)}x^2}{2}. \tag{3.10}$$

На основании сказанного выше мы имеем $I = I_0 = const$. Таким образом, если ставится вопрос об исследовании зависимости амплитуды x от времени, то из (3.10) мы сразу находим

$$x = \frac{const}{\sqrt[4]{g(\varepsilon t)}}. \qquad (3.11)$$

Этот результат может быть получен разными методами, но применение теории адиабатических инвариантов позволяет его получить, по-видимому, наиболее простым способом.

**5. Вычисление амплитуды и энергии.** Формула (3.11) является выражением значительно более общего результата. Пусть мы имеем произвольное нелинейное уравнение вида

$$\ddot{z} + f(z, \varepsilon t) = 0, \qquad (3.12)$$

у которого решение

$$z = Q(x, y, \varepsilon t) \qquad (3.13)$$

является периодической функцией у периода $2\pi$. Тогда зависимость амплитуды от времени может быть получена без интегрирования уравнения (3.12). В самом деле, для уравнения (3.12) интеграл действия будет адиабатическим инвариантом, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \omega(x, \varepsilon t) Q_Y^2(x, y, \varepsilon t) dy = const. \qquad (3.14)$$

Выражение (3.14) является некоторым трансцендентным уравнением, которое связывает величины x и t

$$\phi(x, t) = 0 \qquad (3.14')$$

и представляет собой неявное задание функции $x(t)$.

Полная энергия системы не является адиабатическим инвариантом, хотя она определяется так же, как и интеграл действия, только амплитудой. Однако, имея в распоряжении зависимость $x(\varepsilon t)$ и используя то обстоятельство, что

$$\frac{dE}{dt} = -\Delta \dot{x} + \varepsilon E_t,$$

мы можем легко подсчитать изменение энергии системы вследствие изменения параметров системы. Нетрудно убедиться в том, что $dE \backslash dt$ имеет порядок величины $\varepsilon$.

Процедура вычисления энергии может быть и не связана с нахождением корней трансцендентного уравнения (3.14'). Для этой цели следует использовать рассуждения предыдущего параграфа. Найдем производную величины $\alpha = 2E$

$$\alpha = \dot{z}^2 + U(z,\tau),$$

где

$$U(z,\tau) = \int_{Z_0}^{Z} f(z,\tau)dz.$$

Так как

$$\ddot{z} = -f(z,\tau),$$

то производная $d\alpha / dt$, вычисленная в силу этого уравнения, будет

$$\dot{\alpha} = \varepsilon U_\tau$$

или после усреднения

$$\dot{\alpha} = \frac{\varepsilon}{T(\alpha)} \int_{\beta_0}^{\beta_0+T} U_\tau(z,\tau)d\beta = \frac{\varepsilon}{T(\alpha)} \left\{ \int_{\underline{Z}}^{\overline{Z}} \frac{U_\tau dz}{\sqrt{\alpha - U_Z}} - \int_{\overline{Z}}^{\underline{Z}} \frac{U_\tau dz}{\sqrt{\alpha - U(Z)}} \right\},$$

где $\underline{z}$ и $\overline{z}$ являются корнями уравнения $U(z) = 0$.

**6. Некоторые обобщения**. Мы рассмотрели процедуру применения схемы Ван-дер-Поля для нахождения приближенных решений уравнения (3.1). Она может быть легко обобщена на широкий класс систем уравнений, близких к гамильтоновским. Одним из представителей таких систем является уравнение

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + f(z,\tau) = \varepsilon\varphi(z,\dot{z},\tau). \tag{3.15}$$

Для этого случая повторим все рассуждения данного параграфа. Считая, как и раньше, что решение порождающего уравнения

$$m\ddot{z} + f(z,\tau) = 0, \quad \tau = const,$$

нам известно:

$$z = Q(x,y,\tau),$$

сделаем замену переменного (2.5') и (2.6'). Выписав уравнение совместности и подставив эти функции в уравнение (3.15), мы получим

$$Q_X\dot{x} + Q_Y\dot{y} - \omega Q_Y = -\varepsilon Q_\tau,$$

$$m\dot{x}(\omega_X Q_Y + \omega Q_{XY}) + m\omega Q_{YY}\dot{y} + f(Q,\tau) = \varepsilon\varphi - \varepsilon\{\omega_\tau m Q_Y + \omega m Q_{Y\tau} + m_\tau \omega Q_Y\}.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и используя выражения для $\Delta, \xi_1$ и $\xi_2$, мы придем к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{m\Delta}\varphi Q_Y - \frac{\varepsilon}{\Delta}\xi_1 + \frac{\varepsilon}{m\Delta} m_\tau \omega Q_Y^2, \\ \dot{y} &= \omega + \frac{\varepsilon}{m\Delta}\varphi Q_X + \frac{\varepsilon}{\Delta}\xi_2 - \frac{\varepsilon}{m\Delta} m_\tau \omega Q_Y Q_X. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Система (3.16) совершенно аналогична системе (3.4). Проводя операцию осреднения, мы получим систему укороченных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy - \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy, \\ \dot{y} &= \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_X dy + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_2 dy - \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y Q_X dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Нетрудно проверить, что для уравнения (3.15) выражение

$$I(x,\tau) = \frac{m(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x,\tau)Q_Y^2 dy \tag{3.18}$$

является также адиабатическим инвариантом. Найдем для этого

$$\frac{dI}{dt} = \dot{x}I_X + \varepsilon I_\tau. \tag{3.19}$$

Повторяя вычисления предыдущих пунктов этого параграфа, мы получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}I_X &= -\dot{x}m\Delta, \\ \varepsilon I_\tau &= -\frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Заменяя в этих выражениях величину $\dot{x}$ из системы (3.17) и подставляя величины (3.20) в равенство (3.19), получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy + \frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy - \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy - \frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1 dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega Q_Y^2 dy = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi Q_Y dy.$$

Таким образом, при отсутствии внешних воздействий величина $I$, определяемая формулой (3.18), остается постоянной, если считать, что величина $x$ изменяется, следуя уравнениям (3.17).

**7. Задача о маятнике переменной массы**. Рассмотрим малые колебания математического маятника, масса которого изменяется со временем. Если предположить, что скорость отделения частиц бесконечно мала (или что система реактивных сил образует нулевой торсор), то уравнение движения такого маятника имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + m(\tau)glz = 0, \tag{3.21}$$

где $g$ — напряженность гравитационного поля, $l$ — длина маятника. Рассчитать приближенно изменения амплитуды колебаний такого маятника можно, не интегрируя уравнения (3.21). Для этого надо вспомнить, что величина

$$I = \frac{m(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega\, Q_y^2 dy$$

является адиабатическим инвариантом.

В нашем случае

$$\omega = \sqrt{gl}, \quad Q = x\cos y, \quad Q_Y = -x\sin y.$$

Подставляя эти величины в выражение (3.18), мы получим уравнение для определения амплитуды

$$\frac{m\sqrt{gl}}{2}x^2 = const,$$

откуда

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{m(\tau)}}. \tag{3.22}$$

Заметим, что закон изменения амплитуды (3.22) сохраняет свою силу также и для уравнения

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + m(\tau)glz = \varepsilon\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция.

В самом деле, изменение величины $I$ подчиняется уравнению

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\, Q_Y dy.$$

Следовательно, $I$ сохраняет свое значение не только тогда, когда $\varphi \equiv 0$, но и при условии ортогональности $\varphi$ и $Q_Y$ что в нашем случае соблюдается

$$\int_0^{2\pi} \varphi\, Q_Y dy = -x \int_0^{2\pi} \varphi\,(x\cos y)\sin y dy \equiv 0.$$

Итак, мы показали, как может быть использована идея Ван-дер-Поля об осреднении в задачах нелинейных колебаний. Она позволяет исследовать широкий круг вопросов этой теории при помощи укороченных уравнений.

Таким образом, теория Ван-дер-Поля позволяет получить только некоторые приближенные решения, причем она не содержит никаких методов, позволяющих оценить степень точности полученных решений. Точно так же в рамках теории Ван-дер-Поля мы не можем уточнить полученные решения. Наконец, еще одним существенным недостатком изложенного подхода является то, что он приспособлен для исследования только одномерных задач и не допускает непосредственного обобщения на многомерные задачи в системах с числом степеней свободы больше чем одна.

Для преодоления всех указанных трудностей необходима более общая теория, содержащая новый взгляд на проблему усреднения. Она впервые возникает в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, опубликованных в тридцатых годах. К ее изложению мы сейчас и переходим.

## Тема 10. Общий вид уравнений класса Фукса

Особой точкой называется точка, в которой функция или неопределенна или обращается в бесконечность. Если ряд содержит конечное число членов, то особая точка является полюсом. Если же ряд содержит бесконечное число членов, то особая точка является существенно особой точкой.

Линейные дифференциальные уравнения, интегралы которых имеют все особые точки регулярными, представляют особый интерес. Они впервые были изучены Фуксом и называются уравнениями класса Фукса.

Теорема Фукса: Для того чтобы уравнение

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

имело в некоторой точке $z = \xi$, особой для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$, интегралы с регулярной особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы $p(z)$ имело в $\xi$ полюс не выше первого порядка, а $q(z)$ имело бы полюс не выше второго порядка.

Так как регулярные особые точки являются для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ полюсами, то в случае уравнений класса Фукса $p(z)$ и $q(z)$ должны иметь на всей комплексной плоскости, включая и бесконечно удаленную точку, особыми точками только полюсы. Следовательно, число этих полюсов должно быть конечно, а потому $p(z)$ и $q(z)$ должны быть рациональными функциями, причем $p(z)$ имеет полюсы не выше первого порядка и $q(z)$ не выше второго порядка.

Обозначая особые точки $p(z)$ и $q(z)$ через $a_1, a_2, ..., a_n$, мы можем написать $p(z)$ и $q(z)$ в следующем виде:

$$p(z) = \frac{P(z)}{\prod_1^n (z - a_k)}, \tag{1}$$

$$q(z) = \frac{Q(z)}{\prod_1^n (z - a_k)^2}, \tag{2}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ - многочлены.

Нетрудно показать, что требование, чтобы бесконечно удаленная точка была или обыкновенной точкой интеграла или регулярной особой точкой, ограничивает степень многочленов $P(z)$ и $Q(z)$.

Действительно, подставляя в уравнение $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ выражения (1) и (2), получим дифференциальное уравнение в виде

$$w'' + \frac{P(z)}{\prod_1^n (z - a_k)} w' + \frac{Q(z)}{\prod_1^n (z - a_k)^2} w = 0 . \tag{3}$$

Для изучения поведения интегралов в области $z = \infty$ сделаем замену

$z = \dfrac{1}{\xi}$ и изучим поведение интегралов преобразованного уравнения в

области $\xi = 0$.

Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = -\xi^2\frac{dw}{d\xi}, \\ \frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{d^2w}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 + \frac{dw}{d\xi}\frac{d^2\xi}{dz^2} = \frac{d^2w}{d\xi^2}\xi^4 + \frac{dw}{d\xi}2\xi^3 \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - \frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_1^n\left(\xi - \frac{1}{a_k}\right)}\right)\frac{dw}{d\xi} + \frac{1}{\xi^{M-2n+4}}\frac{Q_1(\xi)}{\prod_1^n\left(\xi - \frac{1}{a_k}\right)^2}w = 0 \tag{5}$$

где N и M соответственно - степени многочленов P и Q и $P_1(\xi)$ и $Q_1(\xi)$ многочлены от $\xi$.

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (3), получим

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - \frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_1^n\left(\xi - \frac{1}{a_k}\right)}\right)\frac{dw}{d\xi} + \frac{1}{\xi^{M-2n+4}}\frac{Q_1(\xi)}{\prod_1^n\left(\xi - \frac{1}{a_k}\right)^2}w = 0 \tag{6}$$

Получим в случае, если $\xi = 0$ является точкой голоморфности, что

1) функция

$$\frac{2}{\xi} - \frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_1^n\left(\xi - \frac{1}{a_k}\right)} \tag{7}$$

при $\xi = 0$ голоморфна, для чего необходимо, чтобы $N - n + 2 = 1$, то есть

$$N = n - 1 \tag{8}$$

и чтобы $P_1(0) = 2\prod_1^n \frac{1}{a_k}(-1)^n$;

2) функция

$$\frac{1}{\xi^{M-2n+4}}\frac{Q_1(\xi)}{\prod_1^n\left(\xi-\frac{1}{a_k}\right)^2} \tag{9}$$

при $\xi=0$ голоморфна, для чего необходимо, чтобы

$M-2n+4=0$, то есть $M=2n-4$ (10)

Если же $\xi=0$ является регулярной особой точкой, то из выражения (6) получим, что $N\geq n-1$, и из выражения (9) получим, что $M-2n+4\geq 2$, то есть $M\geq 2n-2$.

Итак, в том и другом случаях уравнение (3) имеет вид

$$w''+\frac{p_0z^{n-1}+p_1z^{n-2}+\ldots+p_{n-1}}{\prod_1^n(z-a_k)}w'+\frac{q_0z^{2n-2}+q_1z^{2n-3}+\ldots+q_{2n-2}}{\prod_1^n(z-a_k)^2}w=0. \tag{11}$$

Таков общий вид уравнений класса Фукса. Функцию $p(z)$ можно, очевидно, написать в настоящем случае в виде

$$p(z)=\frac{p_0z^{n-1}+p_1z^{n-2}+\ldots+p_{n-1}}{\prod_1^n(z-a_k)}=\sum_1^n\frac{A_k}{z-a_k}. \tag{12}$$

Легко найти выражения $A_k$ через корни основного определяющего уравнения, соответствующего особой точке $a_k$. Действительно, уравнение (11) в области $z=a_k$ можно написать в виде

$$\begin{aligned}&(z-a_k)^2w''+\left[A_k(z-a_k)+(z-a_k)^2\{\ldots\}\right]w'+\\&+\left[M_k+M_k'(z-a_k)+(z-a_k)^2\{\ldots\}\right]w=0\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя в уравнение (13) для $w$ разложение вида

$$w=(z-a_k)^\rho\left[\alpha+\beta(z-a_k)+\ldots\right] \tag{14}$$

получим для определения показателя $\rho$ уравнение

$$\rho(\rho-1)+A_k\rho+M_k=0, \tag{15}$$

откуда, обозначая корни этого уравнения через $\rho_1^{(k)}$ и $\rho_2^{(k)}$ будем иметь

$$\rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)} = 1 - A_k \text{ и } \rho_1^{(k)}\rho_2^{(k)} = M_k. \tag{16}$$

Следовательно, равенство (12) может быть написано в виде

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}}{z - a_k}. \tag{17}$$

Так как по (16)

$$p\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}}{z - a_k\xi}\xi,$$

то, подставляя это выражение в уравнение (6), получим

$$\frac{2}{\xi} - \frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_{1}^{n}\left(\xi - \frac{1}{a_k}\right)} = \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}}{z - a_k\xi}. \tag{18}$$

Из уравнения (18) следует, что в области точки $\xi = 0$ имеем

$$\frac{2}{\xi} - \frac{P_1(\xi)}{\xi^{N-n+2}\prod_{1}^{n}\left(\xi - \frac{1}{a_k}\right)} = \frac{1}{\xi}\left(2 - \sum_{1}^{n}(1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)})\right) + \xi\{\ldots\}.$$

Отсюда следует, что если точка $\xi = 0$ является точкой голоморфности коэффициентов уравнения, то выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}\right) = 2. \tag{19}$$

Если же точка $\xi = 0$ является регулярной особой точкой, то обозначая для нее корни определяющего уравнения через $\rho_1^{(\Gamma)}$ и $\rho_2^{(\Gamma)}$ получим

$$2 - \sum_{1}^{n}(1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}) = 1 - \rho_1^{(\Gamma)} - \rho_2^{(\Gamma)},$$

что можно еще написать, относя к особой точке $\xi = 0$ (то есть $z = \infty$) номер n + 1 :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left\{1 - \left(\rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)}\right)\right\} = 2 \tag{20}$$

Соотношения (19) или (20) носят название соотношений Фукса.

Функции q(z) также можно придать очень простой вид, аналогичный выражению p(z) по формуле (12). Для этого заметим, что можно написать q(z) в виде

$$q(z) = \frac{q_0 z^{2n-2} + \ldots + q_{2n-2}}{\prod_1^n (z - a_k)^2} = \frac{q_0 z^{2n-2} + \ldots + q_{2n-2}}{\prod_1^n (z - a_k)} \frac{1}{\prod_1^n (z - a_k)} =$$
$$= \left\{ \sum_1^n \frac{M_k}{z - a_k} + Q_{n-1}(z) \right\} \frac{1}{\prod_1^n (z - a_k)} \qquad (21)$$

где $Q_{n-2}(z)$ - многочлен степени n-2, если точка $z = \infty$ есть регулярная особая точка, или в виде

$$q(z) = \frac{q_0 z^{2n-4} + \ldots + q_{2n-4}}{\prod_1^n (z - a_k)^2} = = \left\{ \sum_1^n \frac{M_k}{z - a_k} + Q_{n-4}(z) \right\} \frac{1}{\prod_1^n (z - a_k)}, \qquad (22)$$

если точка $z = \infty$ есть точка голоморфности для дифференциального уравнения.

Заметим, что в этих выражениях многочлены Q выпадают, если n-2 или га n-4 отрицательны, как это видно по происхождению этих многочленов.

Разлагая выражение (21) или (22) по степеням $(z - a_k)$, получим в области $(z - a_k)$ разложение вида

$$q(z) = \frac{M_k}{(z - a_k)^2} \cdot \frac{1}{(a_k - a_1)(a_k - a_2)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)} + \frac{1}{z - a_k}\{\ldots\}.$$

Сравнивая это разложение с (13), имеем

$$M'_k = \frac{M_k}{(a_k - a_1)(a_k - a_2)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)}$$

и по уравнению (16) получаем

$$M_k = \rho_1^{(k)} \rho_2^{(k)} (a_k - a_1)(a_k - a_2)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n) \qquad (23)$$

Отсюда окончательно можем представить уравнения класса Фукса в следующем виде, указанном Папперитцем:

$$w'' + \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)}}{z - a_k} \right\} w' +$$

$$+ \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_1^{(k)} \rho_2^{(k)} (a_k - a_1)(a_k - a_2)...(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})...(a_k - a_n)}{z - a_k} + Q_{n-2}(z) \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{w}{\prod_{1}^{n} (z - a_k)} = 0$$

Таким образом, данными показателями $\rho_{1,2}^{(k)}$ вполне определяется функция p(z), а в функции q(z) остается многочлен, коэффициенты которого не определяются через показатели $\rho_{1,2}^{(k)}$. Степень этого многочлена n-2, если $z = \infty$ является особой точкой, или n-4, если $z = \infty$ не является особой точкой коэффициентов.

## 3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 3.1. Материалы аудиторных практических занятий

В следующих задачах (1-4) оценить погрешность приближенного решения на указанном отрезке (волной отмечено приближенное решение).

**1.** $y' = \frac{x}{4} - \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 1$, $\tilde{y} = 1 - \frac{x}{2}$, $|x| \le \frac{1}{2}$.

◀ Действуем согласно изложенному в п. 1.1. Правая часть этого уравнения, очевидно, непрерывна по совокупности переменных $x$, $y$ ($|x| \le \frac{1}{2}$, $-\infty < y < +\infty$) и имеет непрерывную же по $y$ производную

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

причем

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{2|y|}{1+|y|^2} \cdot \frac{1}{1+|y|^2} \le \frac{2|y|}{1+|y|^2} \le 1.$$

Следовательно, в качестве постоянной Липшица $K$ можем взять единицу. Далее, по формулам (3), п. 1.1, имеем оценки:

$$\left|\tilde{y}' - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+\tilde{y}^2}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{4}{8-4x+x^2}\right| = \left|\frac{x^2(x-2)}{4(8-4x+x^2)}\right| \le \frac{1}{16}\max_{|x|\le\frac{1}{2}}\left|\frac{x-2}{8-4x+x^2}\right| = \frac{1}{64},$$

$$|\tilde{y}(0) - y(0)| = 0.$$

Поэтому $\varepsilon = \frac{1}{64}$, $\delta = 0$. Таким образом, согласно (4), п. 1.1, получаем оценку погрешности:

$$\|y(x)-\tilde{y}(x)\| = |y(x)-\tilde{y}(x)| \le \frac{1}{64}(e^{|x|}-1) \le \frac{e^{\frac{1}{2}}-1}{64} < 0{,}011 \cdot \blacktriangleright$$

**2.** $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = tx_1$, $x_1(0) = 1$ $x_2(0) = 0$; $\tilde{x}_1 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$, $\tilde{x}_2 = \frac{1}{2}t^2$, $|t| \le 0{,}1$.

◀ Пусть $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Тогда согласно (3), п. 1.1, имеем

$$\left\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t,\tilde{x})\right\| = \left|\frac{d\tilde{x}_1}{dt} - f_1(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\right| + \left|\frac{d\tilde{x}_2}{dt} - f_2(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\right|,$$

где

$$f_1(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2,\ f_2(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = t \cdot \tilde{x}_1.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t,\tilde{x})\right\| = |1 + t - (1+t)| + \left|t - t(1 + t + \frac{1}{2}t^2)\right| = \left|t(t + \frac{1}{2}t^2)\right| \le t^2 + |t|\frac{t^2 2}{} < 0{,}0105;$$

$\varepsilon = 0{,}0105$, $\delta = 0$.

Так как

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = t,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

то постоянная Липшица $K = 2$. А по формуле (4), п. 1.1, имеем:

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \le 0{,}0053(e^{2|t|} - 1) \le 0{,}0053(e^{0{,}2} - 1) < 0{,}0012. \blacktriangleright$$

**Примечание.** Если в области определения правой части $f(t,x)$, выпуклой по переменной $x$ .выполняются неравенства $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right| \le C$, то в качестве постоянной Липшица можно взять число $K = nC$.

**3.** $y'' - x^2 y = 0$, $y'(0) = 0$; $\tilde{y} = e^{\frac{x^4}{12}}$, $|x| \le 0{,}5$.

◀ Переходя от уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка, имеем:

$x = t$, $y = x_1$, $y' = x_2$, $x_1' = x_2$, $x_2' = t^2 x_1$,

$x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$; $\tilde{x}_1 = e^{\frac{t^4}{12}}$, $\tilde{x}_2' = \tilde{y}' = \frac{1}{3}t^3 e^{\frac{t^4}{12}}$, $|t| \le 0{,}5$.

Пусть $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Тогда согласно (3), п. 1.1, имеем:

$$\left\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t,\tilde{x})\right\| = |\tilde{x}_1' - f_1(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)| + |\tilde{x}_2' - f_2(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)|. \qquad (*)$$

Поскольку

$$\tilde{x}_1' = \frac{1}{3}t^3 e^{\frac{t^4}{12}},\ f_1(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2 - \frac{1}{3}t^3 e^{\frac{t^4}{12}},\ \tilde{x}_2' = e^{\frac{t^4}{12}}\left(t^2 + \frac{1}{9}t^6\right),\ f_2(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = t^2 \cdot \tilde{x}_1 = t^2 e^{\frac{t^4}{12}},$$

то из (*) следует, что

$$\left\|\frac{d\tilde{x}}{dt} - f(t,\tilde{x})\right\| = \left|\frac{t^6}{9}e^{\frac{t^4}{12}}\right| \le \max_{|t|\le\frac{1}{2}} \frac{t^6}{9}e^{\frac{t^4}{12}} = \frac{(0{,}5)^6}{9}e^{\frac{(0{,}5)^4}{12}} = 0{,}00017\ldots$$

Поэтому $\varepsilon = 0{,}0017$; $\delta = 0$.

Далее, так как

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = t^2,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

то постоянная Липшица $K = 2\max\limits_{|t|\le\frac{1}{2}}(1;t^2) = 2$ (см. примечание после примера 2). В силу оценки (4), п. 1.1, и имеющихся значений $\varepsilon$, $\delta$, $K$ справедливо неравенство

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \le \frac{0{,}0017}{2}(e^{2|t|} - 1) < 0{,}009(e - 1) < 0{,}002.$$

Отсюда следует, что тем более $|x_1 - \tilde{x}_1| < 0{,}002$.▶

**4.** $y' = 2xy^2 + 1$, $y(0) = 1$; $\tilde{y} = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| \le \dfrac{1}{4}$.

◀ Сначала находим числа $\varepsilon$, $\delta$. По формуле (3), п. 1.1, имеем:

$$\left|\tilde{y}' - 2x\tilde{y}^2 - 1\right| = \frac{x^2}{(1-x)^2} \le \frac{1}{9},\ \left|y(0) - \tilde{y}(0)\right| = 0,$$

поэтому $\varepsilon = \dfrac{1}{9}$, $\delta = 0$.

Предположим, что решение $y(x)$ существует в прямоугольнике

$$R = \left\{(x, y) : |x| \le \frac{1}{4}, |y-1| \le \frac{1}{3}\right\}$$

$(\tilde{y}(x) \in R)$. Тогда для постоянной Липшица $K$ имеем оценку

$$K \le \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_R |4xy| = \frac{4}{3}.$$

Используя полученные оценки, по формуле (4), п. 1.1, получаем

$$\left|y(x) - \tilde{y}(x)\right| \le \frac{1}{12}\left(e^{\frac{4|x|}{3}} - 1\right) \le \frac{1}{12}\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) = 0{,}034\ldots.$$

Остается проверить, действительно ли точное решение $y(x)$ содержится в указанном прямоугольнике. Поскольку функции $f(x,y) = 2xy^2 + 1$ и $f'_y = 4xy$ непрерывны в любом прямоугольнике $R_1 = \{(x,y) : |x| \le a, |y-1| \le b\}$, то, согласно теореме существования, на отрезке $|x| \le h$, где $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$, $M = \max\limits_{R_1}(2xy^2 + 1)$, существует единственное решение рассматриваемой задачи. Найдем $h$. Для этого оцениваем $M \le 2a(b+1)^2 + 1$ и ищем $\max\min\left(a, \dfrac{b}{2a(b+1)^2 + 1}\right)$. Из уравнений

$$a = \frac{b}{2a(b+1)^2 + 1},\ \left(\frac{b}{2a(b+1)^2 + 1}\right)'_b = 0$$

получаем

$$b = \sqrt{1 + \frac{1}{2a}},\ a = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0{,}308\ldots,\ b = 1{,}617\ldots.$$

Следовательно, в $R_1$ существует единственное решение $y(x)$, где

$R_1 = \{(x,y) : |x| \le 0{,}308, |y-1| \le 1{,}617\}$.

Поскольку $R < R_1$, то оно существует и в $R$. ►

Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений следующих задач:

**5.** $y' = y + \mu(x + y^2)$, $y(0) = 1$; найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

◄ Дифференцируя по параметру $\mu$ тождества

$y'_x(x,\mu) \equiv y(x,\mu) + \mu(x + y^2(x,\mu))$, $y(0,\mu) = 1$,

имеем:

$\dfrac{du}{dx} = u + x + y^2(x,\mu) + 2\mu y(x,\mu)u$, $u(0,\mu) = 0$,

где $u = \dfrac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu}$. Полагая здесь $\mu = 0$, получим задачу для функции $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = u(x,0)$:

$$\frac{du(x,0)}{dx} = u(x,0) + x + y^2(x,0),\ u(0,0) = 0. \qquad (*)$$

Функция $x \mapsto y(x,0)$ является решением задачи:

$y'(x,0) = y(x,0)$, $y(0,0) = 1$,

что непосредственно следует из данной задачи при $\mu = 0$. Поскольку $y(x,0) = e^x$, то, решая задачу (*), получаем окончательно

$u(x,0) = \left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = e^{2x} - x - 1$. ►

**6.** $y' = y + y^2 + xy^3$, $y(2) = y_0$; найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

◄ Пусть $y = y(x,y_0)$ - решение данной задачи. Тогда дифференцируя тождества

$y'_x(x,y_0) \equiv y(x,y_0) + y^2(x,y_0) + xy^3(x,y_0)$, $y(2,y_0) = y_0$

по параметру $y_0$, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y_0)}{\partial x} = u(x,y_0) + 2y(x,y_0)u(x,y_0) + 3xy^2(x,y_0)u(x,y_0) \\ u(2,0) = 1, u(x,y_0) = \dfrac{\partial y(x,y_0)}{\partial y_0} \end{cases}$$

Полагая здесь $y_0 = 0$, получаем задачу для функции $x \mapsto \left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = u(x,0) + 2y(x,0)u(x,0) + 3xy^2(x,0)u(x,0) \\ u(2,0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

где $y(x,0)$ - решение следующей задачи:

$y'_x(x,0) = y(x,0) + y^2(x,0) + xy^3(x,0)$, $y(2,0) = 0$.

Очевидно, $y(x,0) \equiv 0$, поэтому задача (*) принимает вид:

$\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = u(x,0)$, $u(2,0) = 1$.

Отсюда находим $u(x,0) = e^{x-2}$. Итак,

$\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = u(x,0) = e^{x-2}$. ►

**7.** $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + \mu tx^3$**,** $x(0) = 1 + \mu$ **;** найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

◄ Дифференцированием по $\mu$ из данной задачи получаем задачу для функции $u(t,\mu) = \dfrac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}$:

$\dfrac{\partial u(t,\mu)}{\partial t} = t(x^3 + 3x^2\mu u(t,\mu)) + 2xu(t,\mu)$, $u(0,\mu) = 1$.

Положив здесь $\mu = 0$, имеем:

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial t} = tx^3(t,0) + 2x(t,0)u(t,0), \quad u(0,0) = 1, \qquad (*)$$

где функция $t \mapsto x(t,0)$ является решением задачи:

$$\frac{dx(t,0)}{dt} = x^2(t,0), \quad x(0,0) = 1, \qquad (**)$$

получающейся из исходной при $\mu = 0$. Из (**) находим $x(t,0) = \frac{1}{1-t}$. Подставив $x(t,0)$ в (*), получаем задачу для искомой функции:

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial t} = \frac{t}{(1-t)^3} + \frac{2u(t,0)}{1-t}, \quad u(0,0) = 1,$$

откуда

$$u(t,0) = \frac{1-t-\ln(1-t)}{(1-t)^2}.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = u(t,0) = \frac{1-t-\ln(1-t)}{(1-t)^2}. \ ►$$

**8.** $\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2 & x(1) = x_0 \\ 2\dot{y} = -y^2 & y(1) = y_0 \end{cases}$**;** найти $\left.\frac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3\\ y_0=2}}$.

◄ Дифференцируя по параметру $y_0$ каждое равенство данной задачи, имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x_0,y_0)}{\partial t} = x(t,x_0,y_0)v(t,x_0,y_0) + u(t,x_0,y_0)y(t,x_0,y_0), \\ u(1,x_0,y_0) = 0, \\ 2\frac{\partial v(t,x_0,y_0)}{\partial t} = -2y(t,x_0,y_0)v(t,x_0,y_0), \\ v(1,x_0,y_0) = 1, \end{cases}$$

где введены обозначения:

$$u(t,x_0,y_0) = \frac{\partial x(t,x_0,y_0)}{\partial y_0}, \quad v(t,x_0,y_0) = \frac{\partial y(t,x_0,y_0)}{\partial y_0}.$$

Функции $x$, $y$ являются решениями исходной задачи. Полагая в ней $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ и интегрируя соответствующие уравнения, получаем:

$$x(t,3,2) = t^3 + 2t^2, \quad y(t,3,2) = \frac{2}{t}.$$

Подставляя в (*) найденные функции, а также $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,3,2)}{\partial t} = (t^3 + 2t^2)v(t,3,2) + \dfrac{2}{t}u(t,3,2), \\ u(1,3,2) = 0, \\ \dfrac{\partial v(t,3,2)}{\partial t} = -\dfrac{2}{t}v(t,3,2), \\ v(1,3,2) = 1, \end{cases}$$

Из второго уравнения системы (**) находим:

.

Подставив $v(t,3,2)$ в первое уравнение системы (**), после интегрирования имеем:

.

Следовательно,

**.** ►

**9.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x \quad \mu y^2 \end{cases}$**,** **;** найти $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu =}$ .

◄ С помощью дифференцирования каждого равенства данной задачи по параметру $\mu$ и последующей подстановки $\mu = 0$ получаем:

(*)

где $u(t,\mu) = \dfrac{\partial x(t, \quad)}{\partial \mu}$, $v(t,\mu \quad = \dfrac{\partial \quad (t,\mu}{\partial \mu}$. Функцию $y(t,0)$ находим из задачи:

$$x(0,0) = 1$$
$$y(0,0) = -2$$

которая получается из данной при $\mu = 0$. Подставив $x(t,0) = \dfrac{1}{2}\dot{y}(t,0)$ в первое уравнение, имеем

, , ,

из которой находим $(t,0) = -2e^{-t}$. Используя этот результат, из системы (*) методом исключения получаем задачу:

$\ddot{v}(t,0) - \dot{v}(t,0) - 2v(t,0) = -12e^{-2t}$, $v(0,0) = 0$, $\dot{v}(0,0) = 6$,

решение которой имеет вид:

$v(t,0) = 2e^{-t} + e^{2t} - 3e^{-2t}$.

Это и есть искомое решение. ►

**10.** $\ddot{x} - \dot{x} = (x+1)^2 - \mu x^2$; $x(0) = \frac{1}{2}$, $\dot{x}(0) = -1$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

◄ Дифференцируя равенства данной задачи и полагая затем в каждом из них $\mu = 1$, получаем:

$$\frac{d^2u(t,1)}{dt^2} - \frac{du(t,1)}{dt} - 2u = -x^2(t,1),\ u(0,1) = 0,\ \left.\frac{du(t,1)}{dt}\right|_{t=0},$$

где $u(t,\mu) = \frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}$. Функция $t \mapsto x(t,1)$ является решением задачи:

$$\frac{d^2x(t,1)}{dt^2} - \frac{dx(t,1)}{dt} = 2x(t,1) + 1,\ x(0,1) = \frac{1}{2},\ \dot{x}(0,1) = -1,$$

которую можно получить из данной при $\mu = 1$. Решив последнюю задачу, имеем:

$$x(t,1) = e^{-t} - \frac{1}{2}.$$

Учитывая это решение, задачу (*) представляем в виде:

$$\ddot{u}(t,1) - \dot{u}(t,1) - 2u(t,1) = -\left(e^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2,\ u(0,1) = \dot{u}(0,1) = 0.$$

Наконец, интегрируя последнее уравнение и используя начальные условия, получаем:

$$u(t,1) = \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1} = \frac{1}{8} + e^{-t}\left(\frac{5}{36} - \frac{t}{3}\right) - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{72}e^{2t}.\ ►$$

**11.** Оценить, насколько может измениться при $0 \le x \le 1$ решение уравнения $y' = x + \sin y$ с начальным условием $y(0) = y_0 = 0$, если число $y_0$ изменить меньше, чем на 0,01.

◄ Пользуемся неравенством (4), п. 1.1. В данном примере $\varepsilon = 0$, так как сравниваются между собой решения $y(x)$ и $z(x)$ одного и того же уравнения, т. е. $y' = x + \sin y$ и $z' = x + \sin z$, где решение $y(x)$ удовлетворяет начальному

условию $y_0 = 0$, а решение $z(x)$ - условию $z(0) = z_0$, для которого, согласно условию, справедлива оценка $|y_0 - z_0| \le 0{,}01$, или $|z_0| \le 0{,}01$. Следовательно, по формуле (3), п. 1.1, $\delta = 0{,}01$.

Далее, так как $|\sin y - \sin z| \le |y - z|$, то постоянная Липшица $K = 1$, и, согласно оценке (4), п. 1.1, имеем окончательно:

$|y(x) - z(x)| \le 0{,}01e^{|x|} \le 0{,}01e \approx 0{,}0271$. ►

**12.** Чтобы приближенно найти решение уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$, его заменили уравнением $\ddot{x} + x = 0$. Оценить при $0 \le t \le 2$ возникающую от этого погрешность в решении с начальными условиями $x(0) = 0{,}25$, $\dot{x}(0) = 0$, если известно, что $|x - \sin x| < 0{,}003$ при $|x| \le 0{,}25$.

◄ Пусть $y(t)$ - решение задачи

$$\ddot{y} + \sin y = 0,\ y(0) = 0{,}25,\ \dot{y}(0) = 0, \qquad (*)$$

а $x(t)$ - решение задачи:

$$\ddot{x} + x = 0,\ x(0) = 0{,}25,\ \dot{x}(0) = 0. \qquad (**)$$

Тогда для погрешности $u(t) = x(t) - y(t)$ путем почленного вычитания из равенств (*) равенств (**) получаем задачу:

$$\ddot{u}(t) + u(t) = \sin y - y,\ u(0) = 0,\ \dot{u}(0) = 0,$$

решение которой имеет вид:

$$u(t) = \int_0^t (\sin y(\tau) - y(\tau))\sin(t - \tau)d\tau. \qquad (***)$$

Умножив почленно уравнение (*) на $\dot{y}$ и проинтегрировав, а также приняв во внимание начальные условия, получим:

$$\dot{y}^2 = 2(\cos y - \cos 0{,}25).$$

Отсюда следует, что $|y| \le 0{,}25$. Поэтому $|\sin y - y| \le 0{,}003$, и из (***) находим нужную задачу:

$$|u(t)| \le \int_0^t |\sin y(\tau) - y(\tau)||\sin(t - \tau)|d\tau \le 0{,}003\int_0^t |\sin(t - \tau)|d\tau \le 0{,}003\int_0^2 d\tau = 0{,}006. \ ►$$

В каждой из задач 13-17 найти в виде степенного ряда решение, удовлетворяющее начальным условиям. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда.

**13.** $y' = y^2 - x$; $y(0) = 1$.

◀ Функция $f(x,y) = y^2 - x$ является аналитической по совокупности переменных $x$, $y$ в окрестности точки (0,1), поэтому существует аналитическое решение этой задачи

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

подставив его в данное уравнение, получаем тождество по $x$:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)^2 - x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, будем искать систему уравнений относительно чисел $a_i$ ($i = 0,1,2,..$):

$$a_1 = a_0^2,\ 2a_2 = 2a_0a_1 - 1,\ 3a_3 = a_1^2 + 2a_0a_2,\ 4a_4 = 2a_1a_2 + 2a_0a_3,\ \ldots.$$

Так как $y(0) = 1$, то $a_0 = 1$. А тогда из уравнений полученной системы последовательно находим:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{2}{3},\ a_4 = \frac{7}{12},\ \ldots.$$

Таким образом, приближенное решение имеет вид:

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4. \ ▶$$

**14.** $y' = y + xe^y$; $y(0) = 0$.

◀ Функцию $f(x,y) = y + xe^y$ разложим в степенной ряд в окрестности точки (0,0) по степеням $x$, $y$:

$$f(x,y) = y + x\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \ldots\right).$$

Далее, принимая во внимание начальное условие, ищем решение в виде ряда

$$y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots.$$

Подставив его в уравнение

$$y' = y + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим систему уравнений:

$a_1 = 0$, $2a_2 = 1$, $3a_3 = a_2$, $4a_a = a_3 + a_2$, …,

откуда находим

$a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{6}$, … .

Следовательно,

$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots$ . ►

**15.** $y'' = xy' - y^2$**;** $y(0) = 1$**,** $y'(0) = 2$**.**

◄ Как и в предыдущих задачах, приближенное решение $y(x)$ можно было бы получить в виде частичной суммы степенного ряда, находя коэффициенты из некоторой системы рекуррентных уравнений. Однако в данном случае мы поступим по-другому. Именно, зная, что искомый степенной ряд является рядом Тейлора, путем последовательного дифференцирования правой части данного уравнения по $x$ вычисляем нужного порядка производные в точке $x = 0$. Таким образом, учитывая начальные условия, имеем:

$y''(0) = -y^2(0) = -1$,

$y'''(x) = \frac{d}{dx}(xy' - y^2) = y' + xy'' - 2yy'$, $y'''(0) = -2$,

$y^{(4)} = 2y'' + xy''' - y'^2 - 2yy''$, $y^{(4)} = -8$, … .

Следовательно, по формуле Тейлора,

$y(x) \approx 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \ldots$ .►

**16.** $\frac{dx}{dt} = t + x - y^2$**,** $\frac{dy}{dt} = -1 + t^2 + x^2 + y$**;** $x(0) = 1$**,** $y(0) = -1$**.**

◄ Поскольку правые части уравнений являются аналитическими функциями переменных $x$, $y$, $t$ в совокупности, то решение ищем в виде

$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots$

$y(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \ldots$

Подставив их в данные уравнения и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $t$, получаем систему уравнений относительно чисел $a_i$, $b_i$, $i = 1,2,\ldots$:

$$a_1 = a_0 - b_0^2, \qquad 2a_2 = 1 + a_1 - 2b_0b_1, \qquad 3a_3 = a_2 - b_1^2 - 2b_0b_2, \ldots,$$
$$b_1 = -1 + b_0 + a_0^2, \qquad 2b_2 = b_1 + 2a_0a_1, \qquad 3b_3 = 1 + b_2 + a_1^2 + 2a_0a_2, \ldots$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия, которые дают $a_0 = 1$, $b_0 = -1$, последовательно находим:

$$a_1 = 0,\ b_1 = -1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ b_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{5}{6},\ b_3 = -\frac{1}{6}, \ldots.$$

Следовательно,

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t^3 + \ldots, \quad y(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \ldots. ►$$

**17.** $\dfrac{dx}{dt} = t + e^{x+y}$, $\dfrac{dy}{dt} = 1 + \sin xy$, $x(0) = y(0) = 1$.

◄ Поскольку

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2 + \frac{x'''(0)}{6}t^3 + \ldots,$$
$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 + \frac{y'''(0)}{6}t^3 + \ldots,$$

то остается только найти значения производных в точке $t = 0$. Из уравнений системы имеем:

$$x'(0) = e^2,\ x''(t) = 1 + e^{x+y}(x' + y') = 1 + e^{x+y}(x' + 1 + \sin xy),\ x''(0) = 1 + e^2(e^2 + 1 + \sin 1),$$
$$y'(0) = 1 + \sin 1,\ y''(t) = \cos xy \cdot (x'y + xy'),\ y''(0) = \cos 1 \cdot (e^2 + 1 + \sin 1).$$

Далее,

$$x''' = e^{x+y}(x' + y')^2 + e^{x+y}(x'' + y''),$$
$$x'''(0) = e^2((e^2 + 1 + \sin 1)^2 + 1 + e^4 + e^2 + e^2 \sin 1 + e^2 \cos 1 + \cos 1 + \cos 1 \cdot \sin 1);$$
$$y'''(t) = -\sin xy \cdot (x'y + xy')^2 + \cos xy \cdot (x''y + 2x'y' + xy''),$$
$$y'''(0) = -\sin 1 \cdot (e^2 + 1 + \sin 1)^2 + \cos 1 \cdot (1 + e^4 + e^2 + e^2 \sin 1 + 2e^2(1 + \sin 1) + \cos 1 \cdot (e^2 + 1 + \sin 1)).$$

►

**18.** Оценить снизу радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение уравнения $y' = y^2 - x$ с начальным условием $y(0) = 1$.

◄ Используя уравнение и начальное условие, последовательно находим:

$y'(0) = 1, \quad y''(x) = 2yy' - 1, \; y''(0) = 2y(0)y'(0) - 1 = 1,$

$$y^{(n)}(x) = 2(yy')^{(n-2)} = 2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} y^{(k)}(y')^{(n-2-k)} = 2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} y^{(k)}(x) y^{(n-1-k)}(x),$$

$$y^{(n)}(0) = 2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} y^{(k)}(0) y^{(n-1-k)}(0), \quad n \geq 3.$$

Покажем, что $\left|y^{(n)}(0)\right| \leq n!, \quad n \in N$. С этой целью воспользуемся методом математической индукции. Имеем $\left|y'(0)\right| \leq 1, \quad \left|y''(0)\right| \leq 1$. Предположив, что $\left|y^{(k)}(0)\right| \leq k!$ для $k = 3,4,\ldots,(n-1)$, оценим

$$\left|y^{(n)}(0)\right| \leq 2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} \left|y^{(k)}(0)\right| \left|y^{(n-1-k)}(0)\right| \leq 2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} k!(n-k-1)! = 2(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1) = n!.$$

Следовательно, согласно указанному методу, $\left|y^{(n)}(0)\right| \leq n!, \quad \forall\, n \in N$.

С учетом доказанного неравенства для коэффициентов степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, представляющего решение в некоторой окрестности точки $x = 0$, справедлива оценка:

$$\left|a_n\right| = \frac{1}{n!}\left|y^{(n)}(0)\right| \leq 1. \qquad (*)$$

Наконец, используя формулы Коши- Адамара $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}$, а также неравенство (*), для радиуса $R$ сходимости степенного ряда получаем требуемую оценку:

$R \geq 1$.►

### 3.2. Комплект экзаменационных билетов по дисциплине

Для студентов специальности 010101 – Математика предусмотрен экзамен в 9 учебном семестре.

В экзаменационном билете предусмотрено два вопроса на проверку знаний теоретического материала и одно практическое задание для проверки практических навыков решения задач.

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет №** 1

1. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний. Нерезонансный случай. Резонансный случай.
2. Условие существования периодических решений. Уравнение второго порядка.
3. Оценить погрешность приближенного решения на указанном отрезке (волной отмечено приближенное решение).

$$y' = \frac{x}{4} - \frac{1}{1+y^2},\ y(0) = 1,\ \tilde{y} = 1 - \frac{x}{2},\ |x| \le \frac{1}{2}.$$

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет №** 2

1. Интегрирование д.у. при помощи степенных рядов. Интегрирование линейного уравнения с помощью степенного ряда.
2. Метод Ляпунова. Алгоритм Ляпунова.

3. Оценить погрешность приближенного решения на указанном отрезке (волной отмечено приближенное решение).

$$y'' - x^2 y = 0,\ y'(0) = 0;\ \tilde{y} = e^{\frac{x^4}{12}},\ |x| \le 0{,}5.$$

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 3**

1. Уравнение Бесселя.
2. Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля. Переменные Ван-дер-Поля.
3. Оценить погрешность приближенного решения на указанном отрезке (волной отмечено приближенное решение).

$$y' = 2xy^2 + 1,\ y(0) = 1;\ \tilde{y} = \frac{1}{1-x},\ |x| \le \frac{1}{4}.$$

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 4**

1. Дифференцируемость решения по параметру и её применение. Дифференцируемость решения по параметру.
2. Метод Ляпунова. Расчет приближенного решения.

3. Оценить погрешность приближенного решения на указанном отрезке (волной отмечено приближенное решение).

$\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = tx_1$, $x_1(0) = 1$ $x_2(0) = 0$; $\tilde{x}_1 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$, $\tilde{x}_2 = \frac{1}{2}t^2$, $|t| \le 0{,}1$.

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 5**

1. Асимптотические методы решения д.у.. Разложение решения по степеням малого параметра.
2. Метод Ляпунова для решения систем с *n* уравнениями.
3. Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений следующих задач:

$$y' = y + \mu(x + y^2),\ y(0) = 1;\ \text{найти}\ \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 6**

1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний. Фазовые траектории.

2. Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля. Укороченные уравнения.

3. Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений следующих задач: $y' = y + y^2 + xy^3$, $y(2) = y_0$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0 = 0}$.

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 7**

1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний. Линейная система.

2. Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля. Стационарные режимы.

3. Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений следующих задач: $\frac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3$, $x(0) = 1 + \mu$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu = 0}$.

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 8**

1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний. Фазовая плоскость, уравнения Дюффинга.

2. Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля в системах близких к консервативным. Замена переменных.

3. Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений

следующих задач: $\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2 \\ 2\dot{y} = -y^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(1) = x_0 \\ y(1) = y_0 \end{matrix}$; найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2}}$.

.

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 9**

1. Метод Ляпунова-Пуанкоре. Система Ляпунова. Случай одной степени свободы. Консервативные системы.

2. Асимптотические методы разделения движения. Метод Ван-дер-Поля в системах близких к консервативным. Укороченные уравнения.

3. Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений

следующих задач: $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x + \mu y^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 1 + \mu \\ y(0) = -2 \end{matrix}$; найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра МАиМ

Утверждено на заседании кафедры

Факультет МиИ

«___»_____ 200_ г.

Курс 5

Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.

Дисциплина Асимптотические методы в ТДУ

Утверждаю:_____

**Экзаменационный билет № 10**

1. Условие существования периодических решений. Необходимые и достаточные условия периодичности.

2. Асимптотические методы разделения движения. Системы с медленным временем. Вывод укороченных уравнений.

3. Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений следующих задач: $\ddot{x} - \dot{x} = (x+1)^2 - \mu x^2$; $x(0) = \frac{1}{2}$, $\dot{x}(0) = -1$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

## 4. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

## 5. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Лекционные и практические занятия по дисциплине " Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений " для специальности 010101 – Математика проводит доцент кафедры математического анализа и моделирования, к.т.н. Труфанова Т.В.