

Федеральное агентство по образованию  
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой АПП и Э

\_\_\_\_\_ А.Н. Рыбалев

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2007 г.

Теория автоматического управления  
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ  
для специальности  
220301– Автоматизация технологических процессов и производств  
(по отраслям)

Составитель: А.Н. Рыбалев, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники АмГУ

Благовещенск

2007 г.

*Учебно-методический комплекс дисциплины включает в себя следующие документы:*

- 1. Рабочая программа дисциплины*
- 2. План-конспект лекций*
- 3. Методическое пособие к выполнению практических, лабораторных и самостоятельных работ*
- 4. Оптимальные системы. Практические и лабораторные работы (издано в типографии АмГУ)*
- 5. Пособие к курсовому проектированию (издано в типографии АмГУ)*
- 6. Задачи для проверки знаний*
- 7. Дополнительные материалы:*
  - Лабораторный практикум по системам автоматического управления (издано в типографии АмГУ)*

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации  
Амурский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе

Е.С. Астапова  
личная подпись, И.О.Ф

«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине «Теория автоматического управления»

для специальности 22.03.01 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Курс 3,4

Семестр 6,7

Лекции 102 (час.) Экзамен 6,7

Практические (семинарские) занятия 52 (час.) Зачет \_

Лабораторные занятия 34 (час.)

Самостоятельная работа 142 (час.)

Всего часов 330

Составитель А.Н. Рыбалев, доцент кафедры автоматизации \_\_\_\_\_ про-  
изводственных процессов и электротехники  
(И.О.Ф., должность, ученое звание)

Факультет Энергетический

Кафедра автоматизации производственных процессов и электротехники

2005 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта ВПО 657900 «Автоматизированные технологии и производства» и учебного плана специальности 22.03.01 «Автоматизация технологических процессов и производств»: блок общепрофессиональных дисциплин, ОПДФ.05.01 «Автоматическое управление энергетическими установками»

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники

«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г., протокол № \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ А.Н. Рыбалев

Рабочая программа одобрена на заседании УМС 22.03.01 «Автоматизация технологических процессов и производств»

«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г., протокол № \_\_\_\_\_

Председатель \_\_\_\_\_ А.Н. Рыбалев

СОГЛАСОВАНО

Начальник УМУ

\_\_\_\_\_  
Г.Н. Торопчина

(подпись, И.О.Ф.)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

СОГЛАСОВАНО

Председатель УМС факультета

\_\_\_\_\_  
Ю.В. Мясоедов

(подпись, И.О.Ф.)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

СОГЛАСОВАНО

Заведующий выпускающей кафедрой

\_\_\_\_\_  
А.Н. Рыбалев

(подпись, И.О.Ф.)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

## ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель изучения дисциплины «Теория автоматического управления» заключается в формировании у студентов знаний и умений анализа и синтеза систем автоматического регулирования и управления.

В результате изучения этой дисциплины студент должен знать:

- основные понятия кибернетики и место теории управления в нем;
- основные принципы и концепции построения систем автоматического регулирования и управления;
- математический аппарат теории автоматического управления;
- методы анализа и синтеза систем автоматического регулирования и управления;
- основные проблемы и перспективы направления развития теории автоматического регулирования;

Уметь:

- составлять математические описания автоматических систем регулирования и управления;
- осуществлять анализ устойчивости и качества автоматических систем регулирования и управления;
- обоснованно выбирать структуры и схемы автоматического регулирования и управления, осуществлять параметрическую оптимизацию регулируемых и управляющих устройств;
- синтезировать законы и алгоритмы оптимального управления объектами.

Изучение теории автоматического управления базируется в основном на учебном материале следующих дисциплин: «Математика» (линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, преобразования Лапласа и Фурье, теория вероятности), «Теоретическая механика» (динамика точки и твердого тела, уравнения Лагранжа, малые колебания систем), «Программирование и основы алгоритмизации» (примеры составления и отладка программ), «Общая электротехника и электроника» (переходные процессы в электрических цепях).

Изучение дисциплины предусматривает широкое применение ЭВМ при проведении лабораторных и практических работ и при выполнении курсовой работы.

Теория автоматического управления используется при изучении определенных разделов дисциплин: «Технические средства автоматизации», «Моделирование систем» (моделирование систем регулирования и управления), «Проектирование автоматизированных систем» (проектирование локальных АСР и АСУ), «Автоматизация технологических процессов и производств» (разработка локальных АСР и АСУ).

# СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1. ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К МИНИМУМУ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

ОПД.Ф.05.01: основные понятия теории управления; классификация систем управления (СУ); поведение объектов и СУ; информация и принципы управления; примеры СУ техническими, экономическими и организационными объектами; задачи теории управления; линейные непрерывные модели и характеристики СУ; модели вход-выход: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики; модели вход-состояние-выход; преобразования форм представления моделей; анализ основных свойств линейных СУ: устойчивости, инвариантности, чувствительности, управляемости и наблюдаемости; качество переходных процессов в линейных СУ; задачи и методы синтеза линейных СУ; линейные дискретные модели СУ: основные понятия об импульсных СУ, классификация дискретных СУ; анализ и синтез дискретных СУ; нелинейные модели СУ; анализ равновесных режимов; методы линеаризации нелинейных моделей; анализ поведения СУ на фазовой плоскости; устойчивость положений равновесия: первый и второй методы Ляпунова, частотный метод исследования абсолютной устойчивости; исследование периодических режимов методом гармонического баланса; линейные стохастические модели СУ: модели и характеристики случайных сигналов; прохождение случайных сигналов через линейные звенья; анализ и синтез линейных стохастических систем при стационарных случайных воздействиях; оптимальные системы управления: задачи оптимального управления, критерии оптимальности; методы теории оптимального управления: классическое вариационное исчисление, принцип максимума, динамическое программирование; СУ оптимальные по быстрдействию, оптимальные по расходу ресурсов и расходу энергии; аналитическое конструирование оптимальных регуляторов; робастные системы и адаптивное управление.

## 2. ЛЕКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

### 6 семестр

#### 2.1. Основные понятия автоматического управления - 4 часа.

Автоматизация и механизация производства. Управление, объект управления, управляемые величины, управляющие и возмущающие воздействия. Автоматическое управление, автоматическое управляющее устройство, система автоматического управления. Разомкнутые и замкнутые системы управления. Понятие обратной связи. Подсистемы автоматического регулирования. Автоматический регулятор. Основные функциональные элементы регулятора и алгоритм его функционирования. Способы реализации алгоритмов регулирования. Аналоговые и цифровые регуляторы. Классификация АСР (непрерывные, дискретные, линейные, нелинейные, оптимальные, адаптивные и т.д.).

Автоматизированные системы управления современными технологическими процессами, их структура, виды обеспечения. Примеры реальных систем автоматического управления и регулирования.

#### 2.2. Математическое описание линейных непрерывных объектов и систем управления – 2 часа.

Линейные непрерывные модели и характеристики СУ. Модели вход-выход: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики. Модели вход-состояние-выход. Преобразования форм представления моделей.

#### 2.3. Устойчивость линейных непрерывных систем автоматического регулирования. – 12 час.

##### 2.3.1. Проблема устойчивости САР. – 4 часа.

Понятие устойчивости систем автоматического регулирования (САР). Устойчивость линейных непрерывных САР. Определение устойчивости по передаточной матрице системы. Причины появления неустойчивости линейных непрерывных САР. Влияние коэффициента передачи на устойчивость системы.

##### 2.3.2. Критерии устойчивости линейных непрерывных САР. - 6 часов.

Необходимое условие устойчивости Стодолы. Необходимые и достаточные условия устойчивости САР. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Стодолы. Критерий Рауса – Гурвица. Частотный критерий устойчивости Михайлова. Свойства АФЧХ разомкнутых систем. Частотный критерий устойчивости Найквиста. Запасы устойчивости. Интерпретация критерия Найквиста с помощью логарифмических частотных характеристик. Запасы устойчивости линейных систем по АФЧХ и ЛЧХ разомкнутых систем. Применение критерия Найквиста для систем с запаздыванием. Критерий Найквиста для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии.

2.4. Качество линейных непрерывных систем автоматического регулирования. – 14 час.

2.4.1. Качество САР в статических и стационарных динамических режимах. – 4 часа.

Определение статической ошибки по задающему и возмущающему воздействиям. Качество САР в стационарных динамических режимах (при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной). Способы снижения и устранения ошибки при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной.

2.4.2. Качество линейных непрерывных САР в стационарных режимах при случайных воздействиях. – 6 часов.

Случайные величины и случайные процессы. Законы распределения случайных величин и их параметры. Характеристики случайных процессов: корреляционная функция и спектральная плотность. Определение точности линейной САР при стационарных случайных воздействиях. Точность линейных систем при наличии двух случайных стационарных воздействий. Пример определения точности САР при стационарных случайных воздействиях.

2.4.3. Качество переходных процессов в линейных непрерывных САР. - 8 час.

Прямые показатели качества переходных процессов САР. Влияние коэффициента усиления на прямые показатели качества.

Частотные критерии качества переходных процессов. Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам замкнутой системы. Частотный показатель колебательности. Определение показателей качества переходных процессов по ВЧХ и МЧХ замкнутой системы. Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам разомкнутой системы. Корневые критерии качества переходных процессов: степень устойчивости, степень (показатель) колебательности. Определение корневого показателя колебательности и его использование для синтеза САР.

2.5. Синтез линейных непрерывных систем автоматического регулирования. – 22 час.

2.5.1. Постановка задачи синтеза регуляторов и корректирующих устройств одномерных линейных непрерывных САР. – 2 часа.

2.5.2. Общие подходы структурно-параметрического синтеза регуляторов в классе одномерных линейных непрерывных систем. – 8 часов.

Построение эталонных передаточных функций замкнутой системы. Построение эталонной передаточной функции системы в классе низкочастотных фильтров Баттерворта. Построение эталонной передаточной функции системы методами стандартных коэффициентов.

Общетеоретические методы синтеза регуляторов в классе одномерных линейных непрерывных систем. Применение принципа динамической компенсации для синтеза линейной САР. Расчет регулятора с помощью уравнений синтеза. Применение обратных связей по производным выходного сигнала для синтеза линейной САР. Модальное управление. Применение стационарного наблюдателя.

2.5.3. Практические методы синтеза линейных непрерывных САР. – 2 часа.

Влияние местных обратных связей на свойства типичных объектов. Последовательные корректирующие устройства – регуляторы. Типовые законы регулирования. Пропорциональный и интегральный регуляторы и их характе-

ристики. ПД-регулятор и его характеристики. ПИД-регулятор и его характеристики. Расчет регуляторов на заданный частотный показатель колебательности. Расчет регуляторов методом расширенных амплитудно-частотных характеристик. Синтез последовательных корректирующих устройств с помощью ЛАЧХ. Связь ЛАЧХ минимально фазовой разомкнутой системы с показателями качества замкнутой. Построение эталонной ЛАЧХ разомкнутой системы. Определение и упрощение передаточной функции корректирующего устройства. Пример решения задачи синтеза.

2.5.4. Многоконтурные, комбинированные и многосвязные линейные непрерывные САР и их синтез. – 6 часов.

Преимущества многоконтурных САР. Особенности расчета регуляторов и корректирующих устройств многоконтурных систем автоматического регулирования.

Расчет устройств компенсации возмущений в комбинированных системах. Условия инвариантности системы по отношению к возмущению. Практическая реализация теоретически рассчитанных устройств компенсации.

Многосвязные линейные непрерывные САР: методы синтеза. Несвязное регулирование. Принцип автономности. Пример расчета двусвязной системы.

2.5.5. Синтез линейных стохастических систем при стационарных случайных воздействиях. – 2 часа.

7 семестр

2.6. Импульсные линейные системы автоматического регулирования. – 10 часов.

Классификация дискретных систем управления. Импульсные системы. Виды импульсной модуляции. Математическое описание импульсных систем. Применение непрерывной модели для системы с ШИМ-модуляцией. Математическое описание импульсных систем. Линейные дискретные модели систем управления. Разностные уравнения, дискретное преобразование Лапласа, Z-преобразование. Этапы построения мат. модели линейной системы с амплитудно-импульсной модуляцией. Передаточные функции импульсной системы в

форме Z-преобразования. Частотные свойства импульсных сигналов и устройств. Устойчивость импульсных систем. Применение теории импульсных систем к цифровым системам. Дискретное представление типовых законов регулирования. Синтез импульсных и цифровых систем управления.

2.7. Нелинейные системы автоматического управления. – 14 часов.

2.7.1. Определение и особенности нелинейных систем автоматического управления – 4 часа.

Определение нелинейных САУ. Виды нелинейностей. Существенные и несущественные нелинейности. Линеаризация нелинейных моделей «в малом».

Статические режимы нелинейных систем. Последовательное, параллельное и соединение в виде ОС статических нелинейностей. Ограничение сигналов в системах автоматического регулирования. Организация и моделирование ограничений.

Особенности стационарных режимов нелинейных систем при случайных воздействиях. Исследование стационарных режимов нелинейных систем при случайных воздействиях методом статистической линеаризации.

2.7.2. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. – 6 часов.

Особенности проблемы устойчивости для нелинейных САУ. Методы А.М. Ляпунова определения устойчивости. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем В.М. Попова. Применение критерия абсолютной устойчивости В.М. Попова к системам с неустойчивой или нейтральной линейной частью. Гармоническая линеаризация статических нелинейностей. Анализ периодических режимов в нелинейных системах методом гармонического баланса.

2.7.3. Релейные системы автоматического регулирования. - 6 часов.

Особенности динамики релейных систем автоматического регулирования. Процесс регулирования в релейной системе со статической линейной частью. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (первого порядка) линейной частью. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (второго порядка) линейной частью. Исследование колебательных режимов в

релейных системах методом гармонического баланса. Скользящие режимы в релейных системах.

## 2.8. Оптимальные системы автоматического управления

2.8.1. Постановка задачи оптимального управления. Классификация задач оптимизации динамических режимов САУ. – 2 часа.

2.8.2. Решение задач оптимального управления методами классического вариационного исчисления. – 8 часов.

Уравнение Эйлера. Решение задачи оптимального управления с учетом ограничений. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем. Задача с подвижными концами и фиксированным временем. Задача с подвижными концами и нефиксированным временем.

## 2.8.3. Принцип максимума Понтрягина. – 6 часов.

Формулировка принципа максимума. Линейная задача максимального быстродействия. Теорема об  $n$ -интервалах. Пример решения задачи на максимальное быстродействие с помощью принципа максимума. Определение решения в виде оптимальной программы и оптимальной стратегии.

## 2.8.4. Метод динамического программирования Беллмана. – 6 часов.

Оптимизация дискретных многошаговых процессов принятия решений. Принцип оптимальности Беллмана. Задача о замене оборудования. Метод динамического программирования для непрерывных систем. Задача об аналитическом конструировании регуляторов.

## 2.9. Робастные и адаптивные системы. – 2 часа.

Общие понятия теории робастных систем. Принципы построения и классификация адаптивных систем.

# 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ (52 часа)

## 6 семестр (36 часов)

3.1. Исследование характеристик типовых звеньев. – 2 часа.

3.2. Преобразование моделей линейных непрерывных объектов и систем

3.3. Определение чувствительности, инвариантности, управляемости и наблюдаемости объектов и систем. – 2 часа.

3.4. Построение корневого годографа системы второго и третьего порядков. – 2 часа.

3.5. Определение устойчивости систем с помощью алгебраических критериев. – 2 часа.

3.6. Определение устойчивости систем с помощью частотных критериев. – 2 часа.

3.7. Определение статической точности систем. – 2 часа.

3.8. Определение точности систем при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной. – 2 часа.

3.9. Определение основных характеристик случайного сигнала (мат. ожидания, дисперсии, корреляционной функции, спектральной плотности) . – 2 часа.

3.10. Определение точности системы при случайном входном воздействии. – 2 часа.

3.11. Определение косвенных частотных показателей качества (показателя колебательности, запасов устойчивости). – 2 часа.

3.12. Определение корневых показателей колебательности и расчет коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели. – 2 часа.

3.13. Построение эталонных передаточных функций. – 2 часа.

3.14. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза. – 2 часа.

3.15. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по выходной величине объекта. – 2 часа.

3.16. Расчет последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ. – 2 часа.

3.17. Расчет устройства компенсации возмущения в комбинированной системе управления. – 2 часа.

3.18. Расчет двусвязной системы автоматического регулирования. – 2 часа.

7 семестр (16 часов)

3.19. Составление разностных уравнений, Z-изображений сигналов и передаточных функций. – 2 часа.

3.20. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений и их систем. – 2 часа.

3.21. Исследование нелинейных САР на фазовой плоскости. – 2 часа.

3.22. Определение устойчивости нелинейной системы с помощью второго метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости Попова. – 2 часа.

3.23. Расчет параметров автоколебаний в релейной системе с помощью метода гармонического баланса. – 2 часа.

3.24. Решение задачи оптимального управления методом классического вариационного исчисления. – 2 часа.

3.25. Решение задачи на максимальное быстродействие методом максимума. – 2 часа.

3.26. Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования. – 2 часа.

4. ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ (34 часа)

6 семестр (18 часов)

4.1. Моделирование линейной системы. – 2 часа.

4.2. Исследование влияния коэффициента передачи на динамические свойства и устойчивость линейной системы. – 2 часа.

4.3. «Экспериментальное» определение запасов устойчивости замкнутой системы с помощью имитационного моделирования. – 2 часа.

4.4. Определение точности системы в статических и стационарных динамических режимах путем имитационного моделирования. – 2 часа.

4.5. Определение характеристик случайных сигналов на входе и выходе системы с помощью имитационной модели. – 2 часа.

4.6. Определение частотных показателей качества с помощью имитационных моделей. – 2 часа.

4.7. Исследование моделей, заданных эталонными передаточными функциями, моделирование системы, построенной методом динамической компенсации. – 2 часа.

4.8. Моделирование системы с последовательным корректирующим устройством. – 2 часа.

4.9. Моделирование комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования. – 2 часа.

#### 7 семестр (16 часов)

4.10. Моделирование линейной импульсной системы автоматического регулирования. – 2 часа.

4.11. Моделирование линеаризованных «в малом» систем. – 2 часа.

4.12. Построение фазовых портретов с помощью имитационного моделирования. – 2 часа.

4.13. Моделирование релейных систем автоматического регулирования. – 2 часа.

4.14. Моделирование релейных систем автоматического регулирования. – 2 часа.

4.15. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – классическое вариационное исчисление). – 2 часа.

4.16. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – принцип максимума). – 2 часа.

4.17. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – динамическое программирование). – 2 часа.

#### 5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА (142 часа)

Самостоятельная работа студентов по дисциплине предусматривается в следующих формах:

– выполнение расчетно-графической работы (6 семестр) и курсового проекта (7 семестр) – всего 56 часов;

– выполнения практических заданий по темам практических занятий, подготовка отчетов по ним – 52 часа;

– предварительная подготовка к лабораторным занятиям и составление отчетов по ним – 34 часов.

#### 5.1. РГР и курсовой проект (40 часов)

Тема курсового проекта по дисциплине: «Анализ и синтез следящей системы автоматического регулирования угла поворота исполнительного вала с двигателем постоянного тока независимого возбуждения».

Необходимые теоретические сведения, задание и исходные данные на курсовой проект содержатся в учебном пособии:

А.Н. Рыбалев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию. Учебное пособие. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2004, 145 с.

Курсовой проект состоит из трех частей и выполняется в рамках следующих работ:

1) Математическое описание линейной системы и ее анализ (РГР по дисциплине «Математические основы управления», изучаемой в 5 семестре);

2) Синтез линейной системы автоматического регулирования (РГР по «Теории автоматического управления», 6 семестр);

3) Анализ нелинейной системы автоматического регулирования («Теория автоматического управления», 7 семестр).

Кроме выполнения третьей, завершающей части проекта в 7 семестре предусматривается оформление пояснительной записки и трех графических листов по всему проекту.

Защита проекта производится студентом индивидуально перед комиссией, состоящей из не менее трех преподавателей из числа преподавателей кафедры компетентных в области теории автоматического управления, включая лектора по дисциплине (председатель комиссии) и преподавателей, ведущих практиче-

ские и лабораторные занятия. Защита предусматривает доклад студента (не более 10 мин.) и ответы на вопросы членов комиссии (не более трех вопросов на одного члена комиссии).

Критерии оценки курсового проекта на защите:

Оценка «удовлетворительно» ставится, если

– основные результаты проекта, не являясь наилучшими из возможных, все же удовлетворяют предъявляемым требованиям;

– в результате доклада и ответов на вопросы выявлено понимание студентом основных положений теории, использованной при подготовке проекта, однако ряд частных положений остался не проясненным.

Оценка «хорошо» ставится, если

– основные результаты проекта близки к оптимальным, однако ответы на вопросы членов комиссии выявили неполное понимание теоретических положений;

– ответы на вопросы членов комиссии выявили полное понимание теоретических положений, однако результаты проекта, удовлетворяя в целом предъявляемым требованиям, далеки от оптимальных.

Оценка «отлично» ставится, если

– студентом получены результаты, близкие к оптимальным;

– в результате доклада и ответов на вопросы выявлено понимание студентом всех положений теории, использованной при подготовке проекта.

5.2. Выполнение практических заданий по темам практических занятий, подготовка отчетов по ним (52 часа):

#### 6 семестр (36 часов)

5.2.1. Исследование характеристик типовых звеньев. – 2 часа.

5.2.2. Преобразование моделей линейных непрерывных объектов и систем. – 2 часа.

5.2.3. Определение чувствительности, инвариантности, управляемости и наблюдаемости объектов и систем. – 2 часа.

5.2.4. Построение корневого годографа системы второго и третьего порядков. – 2 часа.

5.2.5. Определение устойчивости систем с помощью алгебраических критериев. – 2 часа.

5.2.6. Определение устойчивости систем с помощью частотных критериев. – 2 часа.

5.2.7. Определение статической точности систем. – 2 часа.

5.2.8. Определение точности систем при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной. – 2 часа.

5.2.9. Определение основных характеристик случайного сигнала (мат. ожидания, дисперсии, корреляционной функции, спектральной плотности) . – 2 часа.

5.2.10. Определение точности системы при случайном входном воздействии. – 2 часа.

5.2.11. Определение косвенных частотных показателей качества (показателя колебательности, запасов устойчивости). – 2 часа.

5.2.12. Определение корневых показателей колебательности и расчет коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели. – 2 часа.

5.2.13. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза. – 2 часа.

5.2.14. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по выходной величине объекта. – 2 часа.

5.2.15. Расчет системы модального управления со стационарным наблюдателем. – 2 часа.

5.2.16. Расчет последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ. – 2 часа.

5.2.17. Расчет устройства компенсации возмущения в комбинированной системе управления. – 2 часа.

5.2.18. Расчет двусвязной системы автоматического регулирования. – 2 часа.

7 семестр (16 часов)

5.2.19. Составление разностных уравнений, Z-изображений сигналов и передаточных функций. – 2 часа.

5.2.20. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений и их систем. – 2 часа.

5.2.21. Исследование нелинейных САР на фазовой плоскости. – 2 часа.

5.2.22. Определение устойчивости нелинейной системы с помощью второго метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости Попова. – 2 часа.

5.2.23. Расчет параметров автоколебаний в релейной системе с помощью метода гармонического баланса. – 2 часа.

5.2.24. Решение задачи оптимального управления методом классического вариационного исчисления. – 2 часа.

5.2.25. Решение задачи на максимальное быстродействие методом максимума. – 2 часа.

5.2.26. Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования. – 2 часа.

5.3. Предварительная подготовка к лабораторным занятиям и составление отчетов по ним (34 часов):

6 семестр (18 часов)

5.3.1. Моделирование линейной системы. – 2 часа.

5.3.2. Исследование влияния коэффициента передачи на динамические свойства и устойчивость линейной системы. – 2 часа.

5.3.3. «Экспериментальное» определение запасов устойчивости замкнутой системы с помощью имитационного моделирования. – 2 часа.

5.3.4. Определение точности системы в статических и стационарных динамических режимах путем имитационного моделирования. – 2 часа.

5.3.5. Определение характеристик случайных сигналов на входе и выходе системы с помощью имитационной модели. – 2 часа.

5.3.6. Определение частотных показателей качества с помощью имитационных моделей. – 2 часа.

5.3.7. Исследование моделей, заданных эталонными передаточными функциями. – 2 часа.

5.3.8. Моделирование системы с последовательным корректирующим устройством. – 2 часа.

5.3.9. Моделирование двусвязной системы автоматического регулирования. – 2 часа.

#### 7 семестр (16 часов)

5.3.10. Моделирование линейной импульсной системы автоматического регулирования. – 2 часа.

5.3.11. Моделирование линеаризованных «в малом» систем. – 2 часа.

5.3.12. Построение фазовых портретов с помощью имитационного моделирования. – 2 часа.

5.3.13. Моделирование релейных систем автоматического регулирования. – 2 часа.

5.3.14. Моделирование релейных систем автоматического регулирования. – 2 часа.

5.3.15. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – классическое вариационное исчисление). – 2 часа.

5.3.16. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – принцип максимума). – 2 часа.

5.3.17. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза – динамическое программирование). – 2 часа.

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ И ТЕМЫ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ФОРМ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Промежуточный контроль знаний студентов по дисциплине предусматри-

вает по две контрольные точки в 6 и 7 семестрах, оценки по которым выставляются на основе информации о выполнении практических заданий, лабораторных работ, РГР или курсового проекта, а также на основе тестирования теоретических знаний, полученных за прошедший период обучения. Предусмотрено тестирование по темам:

6.1. Математическое описание, устойчивость и качество линейных систем автоматического регулирования – 6 семестр, 1-я контрольная точка;

6.2. Синтез линейных систем автоматического регулирования – 6 семестр, 2-я контрольная точка;

6.3. Импульсные системы автоматического регулирования – 7 семестр, 1-я контрольная точка;

6.4. Нелинейные системы автоматического регулирования – 7 семестр, 2-я контрольная точка.

## 7. ЭКЗАМЕНЫ

По курсу предусмотрены экзамены в 6 и 7 семестрах.

### 6 семестр

Экзамен предусматривает ответы на два теоретических вопроса и решение задачи.

Вопросы к экзаменам:

1. Основные понятия автоматического управления. Управление, объект управления, управляемые величины, управляющие и возмущающие воздействия. Разомкнутые и замкнутые системы управления. Понятие обратной связи.

2. Классификация систем автоматического регулирования.

3. Линейные модели вход-выход: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики.

4. Модели вход-состояние-выход. Преобразования форм представления моделей.

5. Понятие устойчивости САУ. Устойчивость линейных САУ.

6. Причины появления неустойчивости линейных САУ.

7. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Стодолы. Критерий Рауса – Гурвица.
8. Частотный критерий устойчивости Михайлова.
9. Свойства АФЧХ разомкнутых систем.
10. Частотный критерий устойчивости Найквиста.
11. Интерпретация критерия Найквиста с помощью логарифмических частотных характеристик.
12. Запасы устойчивости линейных систем по АФЧХ и ЛЧХ разомкнутых систем.
13. Критерий Найквиста для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии.
14. Показатели качества систем автоматического регулирования.
15. Качество САР в статических режимах. Определение ошибки по задающему и возмущающему воздействиям.
16. Качество САР в стационарных динамических режимах (при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной).
17. Способы снижения и устранения ошибки при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной.
18. Стационарные режимы линейных систем при случайных воздействиях.
19. Законы распределения случайных величин и их параметры.
20. Характеристики случайных процессов: корреляционная функция и спектральная плотность.
21. Определение точности линейной САР при стационарных случайных воздействиях.
22. Показатели качества переходных процессов в САР.
23. Частотные критерии качества переходных процессов. Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам замкнутой системы.
24. Частотные критерии качества переходных процессов. Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам ра-

зомкнутой системы.

25. Корневые критерии качества переходных процессов: степень устойчивости, степень (показатель) колебательности.

26. Определение корневого показателя колебательности и его использование для синтеза САР.

27. Постановка задачи синтеза регуляторов и корректирующих устройств одномерных линейных САР.

28. Построение эталонной передаточной функции системы в классе низкочастотных фильтров Баттерворта.

29. Построение эталонной передаточной функции системы методами стандартных коэффициентов.

30. Применение принципа динамической компенсации для синтеза линейной САР.

31. Расчет регулятора с помощью уравнений синтеза.

32. Применение обратных связей по производным выходного сигнала для синтеза линейной САР.

33. Влияние местных обратных связей на свойства типичных объектов.

34. Типовые законы регулирования (обзор).

35. Пропорциональный и интегральный регуляторы и их характеристики.

36. ПД-регулятор и его характеристики.

37. ПИД-регулятор и его характеристики.

38. Расчет регуляторов на заданный частотный показатель колебательности.

39. Расчет регуляторов методом расширенных амплитудно-частотных характеристик.

40. Синтез последовательных корректирующих устройств с помощью ЛАЧХ.

41. Связь ЛАЧХ минимально фазовой разомкнутой системы с показателями качества замкнутой.

42. Построение эталонной ЛАЧХ разомкнутой системы.

43. Многоконтурные САР и их синтез.
44. Расчет устройств компенсации возмущений.
45. Расчет двусвязной системы. Несвязное регулирование.
46. Расчет двусвязной системы. Автономная система.
47. Синтез линейных стохастических систем при стационарных случайных воздействиях.

Тематика задач:

1. Частотные характеристики линейных систем и частотные показатели качества.
2. Показатели качества линейных систем в статических и стационарных динамических режимах.
3. Применение методов динамической компенсации и уравнений синтеза для расчета регулирующих устройств.
4. Расчет корректирующих устройств в виде обратной связи по выходной величине и ее производной, модальное управление.
5. Расчет простейшего регулятора на заданные корневые показатели качества.
6. Определение устойчивости с помощью алгебраических и частотных критериев.

#### 7 семестр

Экзамен предусматривает ответы на два теоретических вопроса и решение задачи.

Вопросы к экзамену:

1. Импульсные системы автоматического регулирования. Виды импульсной модуляции.
2. Математическое описание импульсных систем. Применение непрерывной модели для системы с ШИМ-модуляцией.
3. Математическое описание импульсных систем. Этапы построения мат. модели линейной системы с АИМ.
4. Разностные уравнения, дискретное преобразование Лапласа, Z-

преобразование.

5. Передаточные функции импульсной системы в форме Z-преобразования.
6. Частотные свойства импульсных сигналов и устройств.
7. Устойчивость импульсных систем.
8. Применение теории импульсных систем к цифровым системам.
9. Дискретное представление типовых законов регулирования.
10. Синтез импульсных систем.
11. Нелинейные системы автоматического регулирования. Виды нелинейностей. Существенные и несущественные нелинейности.
12. Статические режимы нелинейных систем. Последовательное, параллельное и соединение в виде ОС статических нелинейностей.
13. Особенности стационарных режимов нелинейных систем при случайных воздействиях.
14. Устойчивость нелинейных систем. Методы А.М. Ляпунова определения устойчивости.
15. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем В.М. Попова.
16. Применение критерия абсолютной устойчивости В.М. Попова к системам с неустойчивой или нейтральной линейной частью.
17. Релейные системы автоматического управления. Процесс регулирования в релейной системе со статической линейной частью.
18. Релейные системы автоматического управления. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (первого порядка) линейной частью.
19. Релейные системы автоматического управления. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (второго порядка) линейной частью.
20. Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации.
21. Скользящие режимы в релейных системах.
22. Ограничение сигналов в системах автоматического регулирования. Организация и моделирование ограничений.
23. Классификация задач оптимизации динамических режимов САР.

24. Уравнение Эйлера.
25. Уравнения Эйлера-Лагранжа.
26. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем.
27. Задача с подвижными концами и фиксированным временем.
28. Задача с подвижными концами и нефиксированным временем.
29. Принцип максимума Понтрягина.
30. Линейная задача максимального быстродействия.
31. Метод динамического программирования. Задача о замене оборудования.
32. Метод динамического программирования для непрерывных систем.
33. Задача об аналитическом конструировании регуляторов.
34. Понятие о робастных системах автоматического управления.
35. Понятие об адаптивном управлении.

Тематика задач:

1. Линеаризация нелинейностей путем разложения в ряд Тейлора.
2. Определение результирующей статической характеристики соединений нелинейных звеньев.
3. Применение первого метода Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных систем в малом.
4. Применение критерия абсолютной устойчивости Попова.
5. Применение метода гармонической линеаризации.
6. Составление разностных уравнений и дискретных передаточных функций.
7. Составление гамильтониана и расширенной системы дифференциальных уравнений для решения задач динамической оптимизации.
8. Составление функционального уравнения Беллмана.

Для допуска к экзамену достаточными основаниями являются выполнение, сдача и проверка РГР (6 семестр) или КП (7 семестр) и всех практических и лабораторных работ (заданий). В порядке исключения к экзамену может так-

же быть допущен студент, не выполнивший одну или две работы (задание).

Студент, не сдавший одной или двух работ (заданий) и допущенный к экзамену в порядке исключения, отвечает также дополнительные вопросы по теме этого работ (заданий). Для подготовки ответа студенту отводится 40 мин. Для получения удовлетворительной оценки достаточно показать знание основных понятий по теме вопросов и показать направление решения задачи. Оценка «хорошо» выставляется студенту, правильно решившему задачу и показавшему способность экономического, математического, технического и др. обоснований применяемых решений. Оценка «отлично» выставляется, если, кроме того, студент правильно ответил на дополнительные вопросы по темам, смежным с темами основных вопросов. При этом неправильные ответы на дополнительные вопросы могут служить основанием для снижения оценки до «удовлетворительно», если эти ответы свидетельствуют о слабом понимании материала.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 1. ПЕРЕЧЕНЬ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ (ОСНОВНОЙ) ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. В.А. Бессекерский. Теория автоматического управления: Учебное пособие/ В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. – СПб: Профессия, 2004 – 750 с.

1.2. А.С. Востриков Теория автоматического управления: Учебное пособие. Рек. УМО по образованию в обл. радиотехники, электроники и автоматизации / А.С. Востриков, Г.А. Французова – М.: Высш. Школа, 2004 – 366 с.

А.А. Ерофеев. Теория автоматического управления: Учеб. Рек. Мин. образ. РФ/ А.А. Ерофеев – 2 изд., доп. и перераб. – СПб: Политехника, 2003 – 303 с.

1.3. Теория автоматического управления: Учебник. Рек. Мин. образ. РФ/ В.И. Брюханов, М.Г. Косов, С.П. Протопопов и др.: Ред. Ю.М. Соломенцев. – 4 изд., стер. М.: Высшая школа, 2003 – 270 с.

1.4. А.Н. Рыбалев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию. Учебное пособие. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2004, 145 с.

1.5. Т.В. Карпова. Исследование систем автоматического управления: Учеб. пособие/ Т.В. Карпова, А.Е. Серов – Благовещенск: Изд.-во АмГУ, 2001 – 56 с.

## 2. ПЕРЕЧЕНЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

2.1. Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999 – 467с. – для углубленного изучения некоторых направлений теории автоматического управления, а также возможностей MATLAB для моделирования систем;

2.2. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т.: Учебник. Рек. Минобразования РФ/ Ред. Н.Д. Егунов. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2000 – для углубленного изучения некоторых направлений теории автоматического управления.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Формы контроля
			практич. (семина.)	лаборат.		содержание	час.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	Автоматизация и механизация производства. Управление, объект управления, управляемые величины, управляющие и возмущающие воздействия. Автоматическое управление, автоматическое управляющее устройство, система автоматического управления. Разомкнутые и замкнутые системы управления. Понятие обратной связи. Подсистемы автоматического регулирования. Классификация АСР (непрерывные, дискретные, линейные, нелинейные, оптимальные, адаптивные и т.д.).			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР	2	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
1	1	Линейные непрерывные модели и характеристики СУ. Модели вход-выход: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики. Модели вход-состояние-выход. Преобразования форм представления моделей.	1. Исследование характеристик типовых звеньев		А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	Анализ основных свойств линейных СУ: устойчивости, инвариантности, чувствительности, управляемости и наблюдаемости	2. Преобразование моделей линейных непрерывных объектов и систем	1. Моделирование линейной системы	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
3	3.1	Проблема устойчивости САР. Понятие устойчивости систем автоматического регулирования (САР). Устойчивость линейных непрерывных САР. Определение устойчивости по передаточной матрице системы.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
3	3.1	Причины появления неустойчивости линейных непрерывных САР. Влияние коэффициента передачи на устойчивость системы	3. Определение чувствительности, инвариантности, управляемости и наблюдаемости объектов и систем		А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
4	3.2	Необходимое условие устойчивости Стодолы. Необходимые и достаточные условия устойчивости САР. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Стодолы. Критерий Рауса – Гурвица.	4. Построение корневого годографа системы второго и третьего порядков	2. Исследование влияния коэффициента передачи на динамические свойства и устойчивость линейной системы	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	3.2	Частотный критерий устойчивости Михайлова. Свойства АФЧХ разомкнутых систем. Частотный критерий устойчивости Найквиста. Запасы устойчивости. Интерпретация критерия Найквиста с помощью логарифмических частотных характеристик.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
5	3.2	Запасы устойчивости линейных систем по АФЧХ и ЛЧХ разомкнутых систем. Применение критерия Найквиста для систем с запаздыванием. Критерий Найквиста для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии.	5. Определение устойчивости систем с помощью алгебраических критериев		А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
6	4.1	Качество САР в статических и стационарных динамических режимах. Определение статической ошибки по задающему и возмущающему воздействиям.	6. Определение устойчивости систем с помощью частотных критериев	3. «Экспериментальное» определение запасов устойчивости замкнутой системы с помощью имитационного моделирования	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
7	4.1	Качество САР в стационарных динамических режимах (при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной). Способы снижения и устранения ошибки при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	4.2	Случайные величины и случайные процессы. Законы распределения случайных величин и их параметры. Характеристики случайных процессов: корреляционная функция и спектральная плотность.	7. Определение статической точности систем		А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
8	4.2	Определение точности линейной САР при стационарных случайных воздействиях. Точность линейных систем при наличии двух случайных стационарных воздействий.	8. Определение точности систем при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной	4. Определение точности системы в статических и стационарных динамических режимах путем имитационного моделирования	А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
9	4.2	Пример определение точности САР при стационарных случайных воздействиях.			А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
9	4.3	Прямые показатели качества переходных процессов САР. Влияние коэффициента усиления на прямые показатели качества.	9. Определение основных характеристик случайного сигнала (мат. ожидания, дисперсии, корреляционной функции и спектральной плотности) по его выборке.		А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	4.3	Частотные критерии качества переходных процессов. Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам замкнутой системы. Частотный показатель колебательности. Определение показателей качества переходных процессов по ВЧХ и МЧХ замкнутой системы. Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам разомкнутой системы.	10. Определение точности системы при случайном входном воздействии	5. Определение характеристик случайных сигналов на входе и выходе системы с помощью имитационной модели	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
11	4.3	Корневые критерии качества переходных процессов: степень устойчивости, степень (показатель) колебательности.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
11	4.3	Определение корневого показателя колебательности и его использование для синтеза САУ.	11. Определение косвенных частотных показателей качества (показателя колебательности, запасов устойчивости)		А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	5.1	Постановка задачи синтеза регуляторов и корректирующих устройств одномерных линейных непрерывных САР.	12. Определение корневых показателей колебательности и расчет коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели.	6. Определение частотных показателей качества с помощью имитационных моделей	А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
13	5.2	Построение эталонных передаточных функций замкнутой системы. Построение эталонной передаточной функции системы в классе низкочастотных фильтров Баттерворта. Построение эталонной передаточной функции системы методами стандартных коэффициентов.			А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
13	5.2	Общетеоретические методы синтеза регуляторов в классе одномерных линейных непрерывных систем. Применение принципа динамической компенсации для синтеза линейной САР. Расчет регулятора с помощью уравнений синтеза.	13. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза		А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
14	5.3	Практические методы синтеза линейных непрерывных САР. Применение обратных связей по производным выходного сигнала для синтеза линейной САР. Модальное управление. Применение стационарного наблюдателя.	14. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по выходной величине объекта.	7. Исследование моделей, заданных эталонными передаточными функциями	А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	5.3	Пропорциональный и интегральный регуляторы и их характеристики. ПД-регулятор и его характеристики. ПИД-регулятор и его характеристики. Расчет регуляторов на заданный частотный показатель колебательности. Расчет регуляторов методом расширенных амплитудно-частотных характеристик.			А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
15	5.3	Синтез последовательных корректирующих устройств с помощью ЛАЧХ. Связь ЛАЧХ минимально фазовой разомкнутой системы с показателями качества замкнутой. Построение эталонной ЛАЧХ разомкнутой системы. Определение и упрощение передаточной функции корректирующего устройства. Пример решения задачи синтеза	15. Расчет системы модального управления со стационарным наблюдателем		А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	3	Экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
16	5.4	Многоконтурные, комбинированные и многосвязные линейные непрерывные САР и их синтез. Преимущества многоконтурных САР. Особенности расчета регуляторов и корректирующих устройств многоконтурных систем автоматического регулирования.	16. Расчет последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ	8. Моделирование системы с последовательным корректирующим устройством	А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	5.4	Расчет устройств компенсации возмущений в комбинированных системах. Условия инвариантности системы по отношению к возмущению. Практическая реализация теоретически рассчитанных устройств компенсации.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
17	5.4	Многосвязные линейные непрерывные САУ: методы синтеза. Несвязное регулирование. Принцип автономности. Пример расчета двусвязной системы.	17. Расчет устройства компенсации возмущения в комбинированной системе управления		А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
18	5.5	Синтез линейных стохастических систем при стационарных случайных воздействиях.	18. Расчет двусвязной системы автоматического регулирования	9. Моделирование комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение РГР, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Экзамен, проверка РГР, сдача практических заданий и лабораторных работ
7 семестр								
1	6	Импульсные линейные системы автоматического регулирования. Классификация дискретных систем управления. Импульсные системы. Виды импульсной модуляции. Математическое описание импульсных систем. Применение непрерывной модели для системы с ШИМ-модуляцией.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП	2	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, защита КП

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	Математическое описание импульсных систем. Линейные дискретные модели систем управления. Разностные уравнения, дискретное преобразование Лапласа, Z-преобразование. Этапы построения мат. модели линейной системы с амплитудно-импульсной модуляцией.				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ
2	6	Передаточные функции импульсной системы в форме Z-преобразования. Частотные свойства импульсных сигналов и устройств. Устойчивость импульсных систем.	19. Составление разностных уравнений, Z-изображений сигналов и передаточных функций.	10. Моделирование линейной импульсной системы автоматического регулирования	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, защита КП, сдача практических заданий и лабораторных работ
3	6	Применение теории импульсных систем к цифровым системам. Дискретное представление типовых законов регулирования.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП	2	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, защита КП
3	6	Синтез импульсных и цифровых систем управления.				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №1, экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	7.1	<p>Определение нелинейных САУ. Виды нелинейностей. Существенные и несущественные нелинейности. Линеаризация нелинейных моделей «в малом».</p> <p>Статические режимы нелинейных систем. Последовательное, параллельное и соединение в виде ОС статических нелинейностей. Ограничение сигналов в системах автоматического регулирования. Организация и моделирование ограничений.</p>	20. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений и их систем.	11. Моделирование линеаризованных «в малом» систем.	А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, защита КП, сдача практических заданий и лабораторных работ
5	7.1	Ограничение сигналов в системах автоматического регулирования. Организация и моделирование ограничений.			А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, защита КП,
5	7.1	Особенности стационарных режимов нелинейных систем при случайных воздействиях. Исследование стационарных режимов нелинейных систем при случайных воздействиях методом статистической линеаризации.				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7.2	Особенности проблемы устойчивости для нелинейных САР. Методы А.М. Ляпунова определения устойчивости.	21. Исследование нелинейных САР на фазовой плоскости	12. Построение фазовых портретов с помощью имитационного моделирования	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, защита КП, сдача практических заданий и лабораторных работ
7	7.2	Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем В.М. Попова. Применение критерия абсолютной устойчивости В.М. Попова к системам с неустойчивой или нейтральной линейной частью.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, защита КП
7	7.2	Гармоническая линеаризация статических нелинейностей. Анализ периодических режимов в нелинейных системах методом гармонического баланса.				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	7.3	Особенности динамики релейных систем автоматического регулирования. Процесс регулирования в релейной системе со статической линейной частью. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (первого порядка) линейной частью. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (второго порядка) линейной частью. Исследование колебательных режимов в релейных системах методом гармонического баланса.	22. Определение устойчивости нелинейной системы с помощью второго метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости Попова	13. Моделирование релейных систем автоматического регулирования	А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, защита КП, сдача практических заданий и лабораторных работ
9	7.3	Скользящие режимы в релейных системах.			А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП	2	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, защита КП
9	8.1	Постановка задачи оптимального управления. Классификация задач оптимизации динамических режимов САУ.				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	8.2	Решение задач оптимального управления методами классического вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Решение задачи оптимального управления с учетом ограничений. Уравнения Эйлера-Лагранжа.	23. Расчет параметров автоколебаний в релейной системе с помощью метода гармонического баланса.	14. Моделирование релейных систем автоматического регулирования	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Экзамен, защита КП, сдача практических заданий и лабораторных работ
11	8.2	Задача с закрепленными концами и фиксированным временем.			А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП	2	Экзамен, защита КП
11	8.2	Задача с подвижными концами и фиксированным временем				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ
12	8.2	Задача с подвижными концами и нефиксированным временем.	24. Решение задачи оптимального управления методом классического вариационного исчисления	15. Моделирование оптимальной системы управления	А.Н. Рыбалева. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Экзамен, защита КП, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	8.3	Формулировка принципа максимума. Линейная задача максимального быстродействия. Теорема об n-интервалах.			А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП	2	Экзамен, защита КП
13	8.3	Пример решения задачи на максимальное быстродействие с помощью принципа максимума. Определение решения в виде оптимальной программы и оптимальной стратегии.				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ
14	8.4	Оптимизация дискретных многошаговых процессов принятия решений. Принцип оптимальности Беллмана. Задача о замене оборудования.	25. Решение задачи на максимальное быстродействие методом максимума	16. Моделирование оптимальной системы управления	А.Н. Рыблев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию	Выполнение КП, подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Контрольная точка и тестирование №2, экзамен, защита КП, сдача практических заданий и лабораторных работ
15	8.4	Метод динамического программирования для непрерывных систем.						Экзамен
15	8.4	Задача об аналитическом конструировании регуляторов.				Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	2	Экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	9	Робастные и адаптивные системы. Общие понятия теории робастных систем. Принципы построения и классификация адаптивных систем.	26. Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования	17. Моделирование оптимальной системы управления		Подготовка к практическим и лабораторным занятиям, выполнение самостоятельных заданий в рамках практических и лабораторных занятий.	4	Экзамен, сдача практических заданий и лабораторных работ

*Федеральное агентство по образованию Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*  
Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**ПЛАН-КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

**Благовещенск**  
**2007**

## Содержание

1. Основные понятия автоматического управления - 4 часа .....	3
2. Математическое описание линейных непрерывных объектов и систем управления – 2 часа. ....	4
3. Устойчивость линейных непрерывных систем автоматического регулирования - 12 часов. ....	4
4. Качество линейных непрерывных систем автоматического регулирования - 14 часов. ....	6
5. Синтез линейных непрерывных систем автоматического регулирования. – 22 час. ....	10
6. Импульсные линейные системы автоматического регулирования – 10 часов. ....	14
7. Нелинейные системы автоматического управления – 14 часов. ....	16
8. Оптимальные системы автоматического управления - 22 часа .....	18
9. Робастные и адаптивные системы. – 2 часа. ....	21

## ***1. Основные понятия автоматического управления - 4 часа***

### **1.1. Основные понятия теории автоматического управления.**

Автоматизация и механизация производства. Управление, объект управления, управляемые величины, управляющие и возмущающие воздействия. Автоматическое управление, автоматическое управляющее устройство, система автоматического управления. Разомкнутые и замкнутые системы управления. Понятие обратной связи. Подсистемы автоматического регулирования. Автоматический регулятор. Основные функциональные элементы регулятора и алгоритм его функционирования. Способы реализации алгоритмов регулирования. Аналоговые и цифровые регуляторы.

### **1.2. Классификация АСР**

Классификация по способу управления: разомкнутые системы с управлением по задающему и по возмущающему воздействиям, замкнутые системы с управлением по отклонению, комбинированные системы.

Классификация по виду задающего сигнала: системы стабилизации и системы воспроизведения, в т.ч. программные и следящие системы.

Классификация по количеству выходных (регулируемых) координат: одномерные и многомерные системы. Подходы к построению многомерных систем: несвязное, связанное управление, автономные системы.

Классификация по типу зависимости выходной величины от входной: линейные и нелинейные системы. Принцип суперпозиции для линейных систем.

Классификация систем по постоянству параметров: стационарные и нестационарные системы.

Классификация по виду сигналов: непрерывные и дискретные системы. Классификация дискретных систем: релейные, импульсные и цифровые системы. (непрерывные, дискретные, линейные, нелинейные, оптимальные, адаптивные и т.д.).

Автоматизированные системы управления современными технологическими процессами, их структура, виды обеспечения. Примеры реальных систем автоматического управления и регулирования.

## ***2. Математическое описание линейных непрерывных объектов и систем управления – 2 часа.***

Линейные непрерывные модели и характеристики СУ. Модели вход-выход: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики. Модели вход-состояние-выход. Преобразования форм представления моделей.

## ***3. Устойчивость линейных непрерывных систем автоматического регулирования - 12 часов.***

### **3.1. Проблема устойчивости САР.**

Понятие устойчивости систем автоматического регулирования. Определение устойчивости САР, устойчивость установившегося режима.

Условие устойчивости линейной системы. Определение устойчивости по передаточной матрице системы и по корням ее характеристического полинома.

Влияние корней характеристического полинома на характер поведения составляющих переходного процесса. Частные случаи: действительные корни, комплексно-сопряженные пары корней, чисто мнимые пары. Понятие границы устойчивости. Пример системы на границе устойчивости. Влияние нулевых корней. Понятие нейтральной системы. Пример нейтральной системы.

Причины появления неустойчивости линейных непрерывных САР и вид неустойчивых процессов.

Колебательный расходящийся процесс. Устойчивость контура регулирования с пропорциональным регулятором. Влияние коэффициента передачи регулятора на устойчивость системы. Пример построения корневого годографа системы третьего порядка.

Апериодический расходящийся процесс. Пример системы с положительной обратной связью.

### 3.2. Критерии устойчивости линейных непрерывных САР. – 6 часов.

Понятие и назначение критериев устойчивости. Классификация критериев устойчивости линейных систем: алгебраические и частотные критерии.

Алгебраические критерии устойчивости.

Необходимое условие устойчивости Стодолы. Обоснование.

Критерий Гурвица. Формулировка. Правило составления определителя Гурвица. Пример определения устойчивости системы.

Критерий Рауса. Формулировка. Правило составления таблицы Рауса. Пример определения устойчивости системы.

Частотные критерии устойчивости.

Частотный критерий устойчивости Михайлова. Пример определения устойчивости системы и влияния коэффициента передачи регулятора на устойчивость. Определение граничного коэффициента регулятора.

Частотный критерий устойчивости Найквиста. Критерий устойчивости Найквиста для систем устойчивых и нейтральных в разомкнутом состоянии. Свойства АФЧХ разомкнутых систем: связь АФЧХ с порядком системы, относительным порядком передаточной функции, числом нулевых полюсов, порядком числителя передаточной функции. Примеры характеристик в сопоставлении с передаточными функциями. Пример определения устойчивости системы и влияния коэффициента передачи регулятора на устойчивость. Определение граничного коэффициента регулятора. Понятие запасов устойчивости по амплитуде и фазе. Интерпретация критерия Найквиста с помощью логарифмических частотных характеристик. Определение запасов устойчивости линейных систем по АФЧХ и ЛЧХ разомкнутых систем. Применение критерия Найквиста для систем с запаздыванием (влияние запаздывания на АФЧХ и устойчивость системы). Критерий Найквиста для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии.

#### *4. Качество линейных непрерывных систем автоматического регулирования - 14 часов.*

4.1. Качество САР в статических и стационарных динамических режимах.

Показатели качества систем автоматического регулирования: общая характеристика. Классификация показателей качества.

Качество систем автоматического регулирования в статических режимах. Статическая ошибка системы. Типовая структура одноконтурной САР для определения статической ошибки. Вывод передаточных функций ошибки по задающему и возмущающему воздействиям. Определение коэффициента ошибки по задающему воздействию. Способы уменьшения и устранения ошибки: увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы, введение интегрирующих звеньев. Статические и астатические системы. Влияние возмущения на статическую ошибку. Способы уменьшения и устранения ошибки: увеличение коэффициента передачи системы и введение интегрирующих звеньев до места приложения возмущающего воздействия. Компенсация возмущения в комбинированных системах. Вывод передаточной функции идеального компенсатора. Принципы приближенной реализации компенсирующих устройств.

Качество САР в стационарных динамических режимах (при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной).

Определение и описание входного задающего воздействия, изменяющегося с постоянной  $k$ -ой производной. Порядок воздействия. Эквивалентное описание одноконтурной системы регулирования при задающем воздействии, изменяющемся с постоянной  $k$ -ой производной. Вывод передаточной функции ошибки. Определение ошибки при различных порядках астатизма системы. Условие отсутствия ошибки: порядок воздействия меньше порядка астатизма. Влияние коэффициента передачи разомкнутой системы на величину ошибки при равенстве порядков воздействия и астатизма.

Влияние возмущения, изменяющегося с постоянной  $k$ -ой производной на величину ошибки. Эквивалентное описание одноконтурной системы регулирования при возмущающем воздействии, изменяющемся с постоянной  $k$ -ой производной. Вывод передаточной функции ошибки. Определение ошибки при различном количестве интегрирующих звеньев до места приложения возмущения. Условие отсутствие ошибки: порядок воздействия меньше числа интегрирующих звеньев до места приложения возмущения. Влияние коэффициента передачи разомкнутой системы на величину ошибки при равенстве порядков воздействия числа интегрирующих звеньев до места приложения возмущения. Понятие добротности системы. Добротность по скорости и ускорению.

Способы снижения и устранения ошибки при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной.

4.2. Качество линейных непрерывных САР в стационарных режимах при случайных воздействиях. – 6 часов.

Случайные величины и случайные процессы и их характеристики.

Примеры случайных воздействий. Определение случайного процесса. Определение стационарного случайного процесса. Законы распределения случайных величин и их параметры. Интегральный закон распределения. Дифференциальный закон распределения. Связь между интегральным и дифференциальным законами. Виды законов распределения (равномерный, нормальный, Пуассона). Обоснование применения нормального закона распределения к случайным воздействиям. Параметры нормального закона. Математическое ожидание случайной величины. Гипотеза эргодичности и ее применение при определении математического ожидания. Понятие центрированной случайной величины. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение. Применение гипотезы эргодичности для определения дисперсии.

Корреляционная функция и спектральная плотность случайного воздействия.

Назначение корреляционной функции. Определение корреляционной функции. Вид корреляционной функции. Максимальное и минимальное значения корреляционной функции. Взаимная корреляционная функция (определение). Назначение спектральной плотности. Физическая интерпретация спектральной плотности. Определение спектральной плотности через корреляционную функцию. Определение корреляционной функции по спектральной плотности. Определение дисперсии центрированной случайной величины по спектральной плотности. Качественная связь между графиками корреляционной функции и спектральной плотности. Предельные случаи: детерминированный процесс и чисто случайный процесс (белый шум).

Точность систем автоматического регулирования при случайных воздействиях.

Применение принципа суперпозиции при оценке точности системы при случайном воздействии. Реакция системы на постоянную составляющую случайного процесса. Определение корреляционной функции выходной центрированной случайной величины через корреляционную функцию входного воздействия и весовую функцию системы по каналу случайное воздействие – выход. Определение спектральной плотности функции выходной центрированной случайной величины через спектральную плотность входного воздействия и амплитудно-частотную характеристику системы по каналу случайное воздействие – выход. Точность линейных систем при наличии двух случайных стационарных воздействий. Пример определения точности САР первого порядка при стационарном случайном воздействии, заданном своей корреляционной функцией.

4.3. Качество переходных процессов в линейных непрерывных САР. - 8 час.

Общая характеристика показателей качества переходных процессов в САР. Прямые и косвенные показатели переходных процессов.

Прямые показатели качества переходных процессов САР: время переходного процесса, перерегулирование, колебательность. Влияние коэффициента передачи на прямые показатели качества.

Частотные критерии качества переходных процессов.

Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам замкнутой системы.

Частотный показатель колебательности. Предельный случай при определении частотного показателя колебательности: система на границе устойчивости. Диапазон приемлемых значений частотного показателя колебательности. Связь между АЧХ замкнутой системы и ее переходной характеристикой. Приближенное определение длительности переходной характеристики по АЧХ.

Определение показателей качества переходных процессов по ВЧХ замкнутой системы.

Типичные ВЧХ замкнутой системы. Связь между колебательностью (перерегулированием) и видом ВЧХ. Приближенное определение длительности переходной характеристики по ВЧХ. Интервал положительности.

Определение показателей качества переходных процессов по частотным характеристикам разомкнутой системы.

Преимущество использования частотных характеристик разомкнутой системы. Показатели оценки качества: частота среза, запасы устойчивости по фазе и амплитуде. Приближенное определение длительности переходного процесса по частоте среза. Рекомендуемые значения минимальных запасов устойчивости по фазе и амплитуде. Использование ЛАЧХ для оценки качества переходных процессов минимально-фазовых систем. Требования к ЛАЧХ разомкнутой системы для обеспечения приемлемой колебательности САР.

Корневые критерии качества переходных процессов.

Обоснование применения корневых показателей качества.

Критерий длительности переходного процесса – степень устойчивости системы. Связь между длительностью процесса и степенью устойчивости.

Критерий колебательности переходного процесса – степень колебательности. Связь между колебательностью системы и степенью колебательности. Графическая интерпретация степени колебательности на комплексной плоскости. Определение степени устойчивости с помощью алгебраических критериев устойчивости. Пример определения степени устойчивости с помощью критерия устойчивости Гурвица. Синтез системы (определение коэффициента передачи регулятора) на заданную степень устойчивости с помощью критерия устойчивости Гурвица (пример). Определение и использование показателя колебательности с помощью частотных критериев устойчивости (Михайлова и Найквиста). Пример определения показателя колебательности с помощью критерия Михайлова. Синтез системы (определение коэффициента передачи регулятора) на заданный показатель колебательности с помощью критериев Найквиста и Михайлова (примеры).

Интегральные показатели качества. Среднеквадратический критерий. Использование среднеквадратического критерия при синтезе систем.

## ***5. Синтез линейных непрерывных систем автоматического регулирования. – 22 час.***

5.1. Постановка задачи синтеза регуляторов и корректирующих устройств одномерных линейных непрерывных САР.

Структура одномерной систем автоматического регулирования, используемая в задачах синтеза. Изменяемые и неизменяемые части системы. Требования, предъявляемые к системам автоматического регулирования. Этапы синтеза САР: технический и математический, последовательность выполнения. Математический синтез системы: структурно-параметрический и параметрический синтез.

5.2. Общие подходы структурно-параметрического синтеза регуляторов в классе одномерных линейных непрерывных систем.

Структура одноконтурной линейной САР. Постановка задачи. Требования к качеству САР. Отражение требований к качеству системы в задании эталонного поведения или эталонного оператора.

Построение эталонных передаточных функций замкнутой системы.

Построение эталонной передаточной функции системы в классе низкочастотных фильтров. Определение идеального низкочастотного фильтра и обоснование его использования в качестве эталона. Общий вид эталонной передаточной функции. Среднеквадратический корень.

Распределение полюсов эталонной передаточной функции по Баттерворту. Определение коэффициентов характеристического полинома фильтра Баттерворта. Ограничения на использование фильтров Баттерворта.

Построение эталонной передаточной функции методами стандартных коэффициентов. Биноминальное распределение полюсов эталонной передаточной функции. Задание характеристического полинома для систем с ограниченным перерегулированием. Задание эталонной передаточной функции с одним нулем.

Общетеоретические методы синтеза регуляторов в классе одномерных линейных систем.

Принцип динамической компенсации.

Структура синтезируемой системы. Вывод передаточной функции регулятора из условия обеспечения заданной эталонной передаточной функции замкнутой системы. Недостатки метода динамической компенсации: проблемы с физической реализуемостью регулятора и устойчивостью системы для не минимально-фазовых объектов. Условия физической реализуемости регулятора. Передаточная функция синтезируемой системы с учетом неточности реализации регулятора. Упрощение закона регулирования путем аппроксимации частотной функции регулятора или системы.

Расчет регуляторов с помощью уравнений синтеза.

Структура синтезируемой системы. Задание структуры регулятора. Вывод формул для определения коэффициентов передаточной функции регулятора. Пример расчета системы.

Применение обратных связей по производным выходного сигнала для синтеза линейной САР.

Структура синтезируемой системы. Порядок расчета коэффициентов передаточной функции идеального регулятора (использующего сигналы по производным). Переход к представлению в пространстве состояний. Понятие модального управления. Расчет коэффициентов модального регулятора для объекта, представленного в канонической форме. Проблема измерения производных выходного сигнала. Устройства идентификации состояния объекта (стационарные наблюдатели). Структура стационарного наблюдателя полного порядка. Условие устойчивости процесса идентификации. Расчет стационарного наблюдателя. Структура системы модального управления с наблюдателем. Пример системы. Формирование числителя передаточной функции системы модального управления (понижение порядка системы).

5.3. Практические методы синтеза линейных непрерывных САР. – 2 часа.

Влияние местных обратных связей на свойства типичных объектов. Основные виды обратных связей: идеальная жесткая отрицательная обратная связь, инерционная жесткая ООС, идеальная гибкая ООС, инерционная гибкая ООС. Влияние идеальных жесткой и гибкой ООС на свойства инерционного объекта первого порядка. Охват интегрирующего звена идеальной жесткой ООС, инерционной жесткой ООС и идеальной гибкой ООС. Охват колебательного звена идеальной жесткой ООС и идеальной гибкой ООС. Охват пропорционального звена инерционной жесткой ООС.

Типовые линейные регуляторы.

Передаточная функция и структура ПИД-регулятора. Назначение составляющих ПИД-закона регулирования. Типовые законы регулирования. П-регулятор. Реализация. Достоинства и недостатки. Интегральный регулятор.

Передаточная функция. Уравнение выхода. Достоинства и недостатки. Невозможность применения И-регулятора для объекта без самовыравнивания. АФЧХ разомкнутой системы с И-регулятором. ПИ-регулятор. Передаточная функция. Уравнение выхода. Физический смысл изодромной постоянной времени. Достоинства и недостатки. АФЧХ разомкнутой системы с ПИ-регулятором. ПД-регулятор. Передаточная функция. Уравнение выхода. Приближенная реализация ПД-регулятора. Достоинства и недостатки. АФЧХ разомкнутой системы с ПД-регулятором. ПИД-регулятор. Передаточная функция. Уравнение выхода. Приближенная реализация ПИД-регулятора. Достоинства и недостатки. АФЧХ разомкнутой системы с ПИД-регулятором. Логарифмические частотные характеристики типовых регуляторов.

Методы расчета типовых регуляторов

Расчет регуляторов на заданный частотный показатель колебательности.

Обоснование метода. Методика расчета параметров П-, ПИ- и ПИД- регуляторов.

Расчет регуляторов методом расширенных амплитудно-частотных характеристик.

Обоснование метода. Методика расчета параметров П-, ПИ- и ПИД- регуляторов.

Синтез последовательных корректирующих устройств с помощью ЛАЧХ.

Связь ЛАЧХ минимально фазовой разомкнутой системы с показателями качества замкнутой. Влияние низкочастотной части ЛАЧХ на характеристики системы статическом и стационарном динамическом режимах. Влияние среднечастотной части ЛАЧХ на устойчивость и качество переходных процессов в системе. Построение эталонной ЛАЧХ разомкнутой системы. Определение и упрощение передаточной функции корректирующего устройства. Пример решения задачи синтеза.

5.4. Многоконтурные, комбинированные и многосвязные линейные непрерывные САУ и их синтез. – 6 часов.

Структура многоконтурной САР. Преимущества и сфера применения многоконтурных САР. Подавление «быстрых» возмущений внутренними контурами регулирования. Пример: система регулирования давления пара котлоагрегата с внутренним контуром стабилизации тепловой нагрузки. Ограничение внутренних координат. Пример: система регулирования скорости двигателя с внутренним токовым контуром. Особенности расчета регуляторов и корректирующих устройств многоконтурных систем автоматического регулирования.

Расчет устройств компенсации возмущений в комбинированных системах. Структура комбинированной системы. Условия инвариантности системы по отношению к возмущению. Расчет идеального компенсирующего устройства. Практическая реализация теоретически рассчитанных устройств компенсации.

Синтез многосвязных линейных непрерывных САР. Определение многосвязной системы регулирования. Структура двусвязной системы регулирования. Пример: регулирования давления и температуры в редуцированной охлаждающей установке. Методы синтеза многосвязных систем. Влияние перекрестных связей на динамические характеристики системы. Несвязное регулирование с автономной настройкой регуляторов. Несвязное регулирование с итеративной настройкой регуляторов. Принцип автономности. Расчет устройств развязки каналов. Практическая реализация теоретически рассчитанных устройств развязки.

5.5. Синтез линейных стохастических систем при стационарных случайных воздействиях. – 2 часа.

## **6. Импульсные линейные системы автоматического регулирования – 10 часов.**

6.1. Классификация дискретных систем управления.

Определение импульсных систем. Виды импульсной модуляции: амплитудно-импульсная, широтно-импульсная, времяимпульсная, в т.ч. фазоим-

пульсная и частотно-импульсная. Модулируемые параметры при всех видах импульсной модуляции. Преимущества импульсных систем.

### 6.2. Математическое описание импульсных систем.

Применение непрерывной модели для системы с ШИМ-модуляцией. Пример: система регулирования температуры с воздействием на подачу теплоносителя, изменяемую с помощью клапана с электроприводом. Построение эквивалентной непрерывной модели и условие ее адекватности.

Математическое описание систем с амплитудно-импульсной модуляцией. Линейные дискретные модели систем управления. Этапы построения математической модели линейной системы с амплитудно-импульсной модуляцией. Разложение импульсного элемента на идеальный импульсный элемент и формирующий элемент. Выходные импульсы идеального импульсного элемента. Пример формирующего элемента для прямоугольной формы импульсов: передаточная функция. Перенос внешнего воздействия на вход импульсного элемента. Замена действующих в непрерывной части системы непрерывных сигналов на фиктивные дискретные сигналы. Решедчатые функции. Разностные уравнения. Разности различных порядков. Дискретные передаточные функции. Решение разностных уравнений. Дискретное преобразование Лапласа, Z-преобразование. Основные свойства Z-преобразования: линейность сдвиг во временной области, начальное и конечное значение оригинала. Применение преобразования Лапласа к моделированной последовательности идеальных импульсов. Прохождение выходного сигнала идеального импульсного элемента через линейную часть системы. Z-преобразование реакции линейной части системы на модулированную последовательность идеальных импульсов. Передаточная функция системы в форме Z-преобразования. Пример расчета реакции импульсной системы на входное воздействие.

### 6.3. Частотные свойства импульсных сигналов и устройств.

Разложение немодулированной последовательности идеальных импульсов в ряд Фурье в комплексной форме. Определение изображения по Лапласу

дискретного сигнала на выходе идеального импульсного элемента. Спектр импульсного сигнала. Частотные характеристики импульсного элемента. Приближенное определение частотных характеристик.

#### 6.4. Исследование импульсных систем.

Определение устойчивости с использованием преобразования Лапласа. Определение устойчивости по характеристическому полиному замкнутой системы. Критерий Найквиста. Критерии устойчивости импульсных систем с использованием Z-преобразования. Определение устойчивости по характеристическому полиному замкнутой системы. Критерий Найквиста.

Применение теории импульсных систем к цифровым системам. Структура цифровой системы.

Исследование системы с помощью преобразования Лапласа. Дискретное представление типовых законов регулирования. Эквивалентная структурная схема модели.

Исследование системы с помощью Z-преобразования. Эквивалентная структурная схема модели.

Особенности синтеза импульсных и цифровых систем управления.

### ***7. Нелинейные системы автоматического управления – 14 часов.***

7.1. Определение и особенности нелинейных систем автоматического управления.

Определение нелинейных САУ. Виды нелинейностей. Существенные и несущественные нелинейности. Линеаризация нелинейных моделей «в малом». Пример: электропривод постоянного тока с последовательным возбуждением.

Статические режимы нелинейных систем. Последовательное, параллельное и соединение в виде ОС статических нелинейностей. Ограничение сигналов в системах автоматического регулирования. Организация и моделирование ограничений.

Особенности стационарных режимов нелинейных систем при случайных воздействиях. Пример: прохождение случайного сигнала, заданного своим дифференциальным законом распределения через звено ограничения. Определение закона распределения выходного случайного сигнала. Демонстрация неприменимости принципа суперпозиции: влияние математического ожидания и дисперсии входного сигнала на математическое ожидание и дисперсию выходного сигнала.

Исследование стационарных режимов нелинейных систем при случайных воздействиях методом статистической линеаризации. Идея метода статистической линеаризации. Основное допущение метода. Коэффициенты статистической линеаризации. Линеаризованная модель системы. Методика расчета.

#### 7.2. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования.

Особенности проблемы устойчивости для нелинейных САР. Зависимость устойчивости от величины входного воздействия. Пример системы. Автоколебания в нелинейных (релейных) системах как нормальный режим их работы. Примеры: электрические бытовые приборы (регулирование температуры), импульсные блоки питания.

Методы А.М. Ляпунова определения устойчивости. Определение устойчивого движения по Ляпунову. Первый метод Ляпунова – определение устойчивости «в малом» линеаризуемой системы. Пример определения устойчивости нелинейной системы в окрестности рабочей точки. Второй (прямой) метод Ляпунова: формулировка. Асимптотическая и не асимптотическая устойчивость. Функция Ляпунова. Графическая интерпретация метода (система третьего порядка). Пример расчета области устойчивости для системы второго порядка. Применение прямого метода Ляпунова к линейным системам. Лемма Ляпунова.

Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем В.М. Попова.

Определение абсолютной устойчивости в классе нелинейностей заданных условием сектора. Структура анализируемой системы. Модифицирован-

ная частотная характеристика линейной части. Формулировка критерия Попова для устойчивой линейной части. Связь критерия Попова с критерием Найквиста. Применение критерия абсолютной устойчивости к системам с неустойчивой или нейтральной линейной частью. Эквивалентное преобразование расчетной схемы. Формулировка критерия.

Гармоническая линеаризация статических нелинейностей. Анализ периодических режимов в нелинейных системах методом гармонического баланса.

### 7.3. Релейные системы автоматического регулирования.

Особенности динамики релейных систем автоматического регулирования. Процесс регулирования в релейной системе со статической линейной частью. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (первого порядка) линейной частью. Процесс регулирования в релейной системе с астатической (второго порядка) линейной частью. Исследование колебательных режимов в релейных системах методом гармонического баланса. Скользящие режимы в релейных системах.

## **8. Оптимальные системы автоматического управления - 22 часа**

8.1. Постановка задачи оптимального управления. Общий вид функционала качества системы в задачах оптимального управления.

Классификация задач оптимизации динамических режимов. Классификация по виду функционала качества: задачи Больца, Майера и Лагранжа. Примеры задач. Классификация по виду ограничений. Ограничения типа равенств. Голономные ограничения. Неголономные ограничения. Изопериметрические ограничения. Преобразование задачи для исключения изопериметрических ограничений. Ограничения типа неравенств. Классификация задач по виду граничных условий: задачи с закрепленными и подвижными концами. Классификация задач в зависимости от моментов начала и окончания процесса управления: задачи с фиксированным и нефиксированным временем.

Вид решения задачи оптимального управления. Оптимальная программа и оптимальная стратегия. Структуры систем управления, реализующих оптимальную программу и оптимальную стратегию. Методы решения задач оптимального управления.

2.8. Решение задач оптимального управления методами классического вариационного исчисления.

Простейшая одномерная задача вариационного исчисления с закрепленными концами и фиксированным временем. Вывод уравнения Эйлера как необходимого условия экстремума функционала. Необходимые условия экстремума функционала нескольких функций.

Решение задачи вариационного исчисления с учетом ограничений.

Задание голономных и неголономных ограничений. Составление функции Лагранжа. Уравнения Эйлера-Лагранжа как необходимые условия экстремума функционала с учетом ограничений.

Применение уравнений Эйлера – Лагранжа к решению практической задачи оптимального управления (для объекта, заданного уравнениями состояний). Задача с закрепленными концами и фиксированным временем. Составление функции Лагранжа. Переход к использованию функции Гамильтона. Составление сопряженной системы дифференциальных уравнений как необходимого условия экстремума функционала. Правило множителей Лагранжа. Пример аналитического решения задачи с закрепленными концами и фиксированным временем.

Задача с подвижными концами и фиксированным временем. Простейшая одномерная задача поиска экстремума функционала. Вывод необходимых условий экстремума. Условия трансверсальности. Учет ограничений при решении задач с подвижными концами. Составление модифицированного критерия, включающего ограничения. Уравнения Эйлера – Лагранжа и условия трансверсальности с учетом ограничений. Запись через функцию Гамильтона. Примеры решения задачи с подвижными концами. Задача на перевод системы из состояния в положение с минимальным потреблением энер-

гии. Задача перевода системы на максимальную дальность с учетом ограничения на энергоресурс.

Задача с подвижными концами и нефиксированным временем. Простейшая одномерная задача поиска экстремума функционала. Вывод необходимых условий экстремума. Дополнительные условия трансверсальности. Учет ограничений при решении задач с подвижными концами и нефиксированным временем. Составление модифицированного критерия, включающего ограничения. Уравнения Эйлера – Лагранжа, условия трансверсальности и дополнительные условия трансверсальности с учетом ограничений. Запись через функцию Гамильтона. Примеры решения задачи с подвижными концами и нефиксированным временем. Задача максимального быстродействия с ограничением на энергоресурс.

### 8.3. Принцип максимума Понтрягина.

Сфера применения принципа максимума. Функция Понтрягина. Формулировка принципа максимума.

Пример решения задачи максимального быстродействия с ограничением управления по модулю методом максимума. Определение решения в виде оптимальной программы. Нахождение оптимальной стратегии и построение структуры системы управления.

Пример решение задачи на минимизацию комбинированного критерия (быстродействие и энергопотребление). Нахождение оптимальной стратегии и построение структуры системы управления.

Применение принципа максимума в задачах максимального быстродействия для линейных объектов. Линейная задача максимального быстродействия. Теорема об  $n$ -интервалах.

### 8.4. Метод динамического программирования Беллмана.

Общая характеристика метода. Оптимизация дискретных многошаговых процессов принятия решений. Принцип оптимальности Беллмана. Вывод функционального уравнения Беллмана для дискретного многошагового процесса принятия решения. Задача о замене оборудования. Составление функ-

ционального уравнения Беллмана. Решение задачи для четырехлетнего производственного процесса.

Метод динамического программирования для непрерывных систем. Постановка задачи. Функция Беллмана. Вывод функционального уравнения Беллмана для непрерывных систем. Пример решения задачи управления, доставляющего минимум квадратичному критерию методом динамического программирования. Определение оптимальной стратегии и построение структуры системы управления.

Задача об аналитическом конструировании регуляторов. Постановка задачи. Решение функционального уравнения Беллмана. Вывод уравнения Риккати. Общий вид решения задачи. Доказательство устойчивости синтезированной системы с помощью прямого метода Ляпунова.

### ***9. Робастные и адаптивные системы. – 2 часа.***

Общие понятия теории робастных систем. Принципы построения и классификация адаптивных систем.

*Федеральное агентство по образованию Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*

Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Методическое пособие к выполнению практических,  
лабораторных и самостоятельных работ**

Благовещенск

2007

## Содержание

<i>ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ</i> .....	5
<i>Практическое занятие №1. Исследование характеристик типовых звеньев</i> .....	5
<i>Практическое занятие №2. Преобразование моделей линейных непрерывных объектов и систем</i> .....	5
<i>Практическое занятие №3. Определение чувствительности, инвариантности, управляемости и наблюдаемости объектов и систем</i> ...	9
<i>Практическое занятие №4. Построение корневого годографа системы второго и третьего порядков</i> .....	15
<i>Практическое занятие № 5. Определение устойчивости систем с помощью алгебраических критериев</i> .....	17
<i>Практическое занятие №6. Определение устойчивости систем с помощью частотных критериев</i> .....	20
<i>Практическое занятие №7. Определение статической точности систем</i> .....	21
<i>Практическое занятие № 8. Определение точности систем при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной</i> .....	23
<i>Практическое занятие № 9. Определение основных характеристик случайного сигнала (мат. ожидания, дисперсии, корреляционной функции, спектральной плотности)</i> .....	25
<i>Практическое занятие № 10. Определение точности системы при случайном входном воздействии</i> .....	32
<i>Практическое занятие №11. Определение косвенных частотных показателей качества (показателя колебательности, запасов устойчивости)</i> .....	37
<i>Практическое занятие №12. Определение корневых показателей колебательности и расчет коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели</i> .....	39
<i>Практическое занятие №13. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза</i> .....	41
<i>Практическое занятие №14. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по переменным состояниям объекта</i> .....	43
<i>Практическое занятие №15. Расчет системы модального управления со стационарным наблюдателем</i> .....	45
<i>Практическое занятие №16. Расчет последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ</i> .....	46
<i>Практическое занятие №17. Расчет устройства компенсации возмущения в комбинированной системе управления</i> .....	51
<i>Практическое занятие № 18. Расчет двусвязной системы автоматического регулирования</i> .....	64
<i>Практическое занятие № 19. Составление разностных уравнений, Z-изображений сигналов и передаточных функций</i> .....	71

Практическое занятие № 20. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений и их систем.....	78
Практическое занятие №21. Исследование нелинейных САР на фазовой плоскости.....	79
Практическое занятие № 22. Определение устойчивости нелинейной системы с помощью второго метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости Попова.....	83
Практическое занятие № 23. Расчет параметров автоколебаний в релейной системе с помощью метода гармонического баланса.....	89
Практическое занятие № 24. Решение задачи оптимального управления методом классического вариационного исчисления.....	90
Практическое занятие № 25. Решение задачи на максимальное быстроедействие методом максимума.....	90
Практическое занятие № 26. Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования.....	90
<b>ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ.....</b>	<b>91</b>
Лабораторная работа № 1. Моделирование линейной системы.....	91
Лабораторная работа №2. Исследование влияния коэффициента передачи на динамические свойства и устойчивость линейной системы.	97
Лабораторная работа №3. «Экспериментальное» определение запасов устойчивости замкнутой системы с помощью имитационного моделирования.....	100
Лабораторная работа №4. Определение точности системы в статических и стационарных динамических режимах путем имитационного моделирования.....	104
Лабораторная работа №5. Определение характеристик случайных сигналов на входе и выходе системы с помощью имитационной модели	107
Лабораторная работа №6. Определение частотных показателей качества с помощью имитационных моделей.....	109
Лабораторная работа №7. Исследование моделей, заданных эталонными передаточными функциями.....	117
Лабораторная работа №8. Моделирование системы с последовательным корректирующим устройством.....	119
Лабораторная работа № 9. Моделирование комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования.....	120
Лабораторная работа № 10. Моделирование линейной импульсной системы автоматического регулирования.....	122
Лабораторная работа № 11. Моделирование линеаризованных «в малом» систем.....	128
Лабораторная работа № 12. Построение фазовых портретов с помощью имитационного моделирования.....	134
Лабораторная работа № 13. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.1.....	135
Лабораторная работа № 14. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.2.....	139

<i>Лабораторная работа № 15. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза - классическое вариационное исчисление)...</i>	<i>143</i>
<i>Лабораторная работа № 16. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза - принцип максимума) .....</i>	<i>144</i>
<i>Лабораторная работа №17. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза - динамическое программирование).....</i>	<i>144</i>

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

### *Практическое занятие №1. Исследование характеристик типовых звеньев*

В работе исследуются переходные и частотные характеристики следующих типовых звеньев:

– апериодическое звено

$$(T_p + 1)y(t) = ku(t), \quad (1)$$

– колебательное звено

$$(T^2 p^2 + 2\xi T_p p + 1)y(t) = ku(t), \quad (2)$$

– реальное дифференцирующее звено

$$(T_p + 1)y(t) = kpu(t). \quad (3)$$

В ряде вариантов может быть исследовано звено, представляющее собой соединение типовых звеньев (при условии, что порядок звена не более двух).

Требуется без применения вычислительных средств определить аналитические выражения для

– переходной и импульсной переходной характеристик;

– амплитудно-фазовой частотной характеристики, вещественной и мнимой частотных характеристик;

– амплитудно-частотной, логарифмической амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

Задание в форме передаточной функции звена выдается студенту преподавателем индивидуально. Студент выполняет задание самостоятельно и предоставляет преподавателю отчет. Ряд вариантов рассматривается на практическом занятии у доски.

### *Практическое занятие №2. Преобразование моделей линейных непрерывных объектов и систем*

В данной работе требуется:

– выразить передаточные функции системы автоматического регулирования по передаточным функциям ее звеньев, проведя необходимые структурные преобразования;

– построить модель системы в пространстве состояний и определить матрицы описания системы.

Пример. Дана система автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 1.

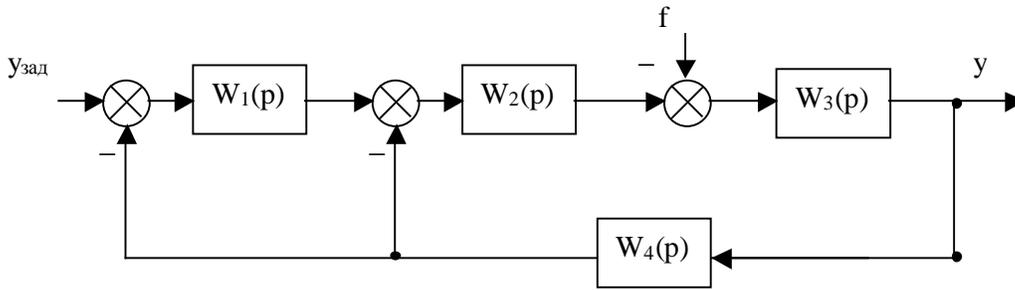


Рис.1. Структурная схема системы

Передаточные функции звеньев:

$$W_1(p) = \frac{10(0,1p+1)}{0,01p+1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{0,5p+1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{3p}, \quad W_4(p) = \frac{1}{0,2p+1}. \quad (1)$$

Определим передаточные функции системы путем структурных преобразований. Для этого представим систему в виде (рис.2)

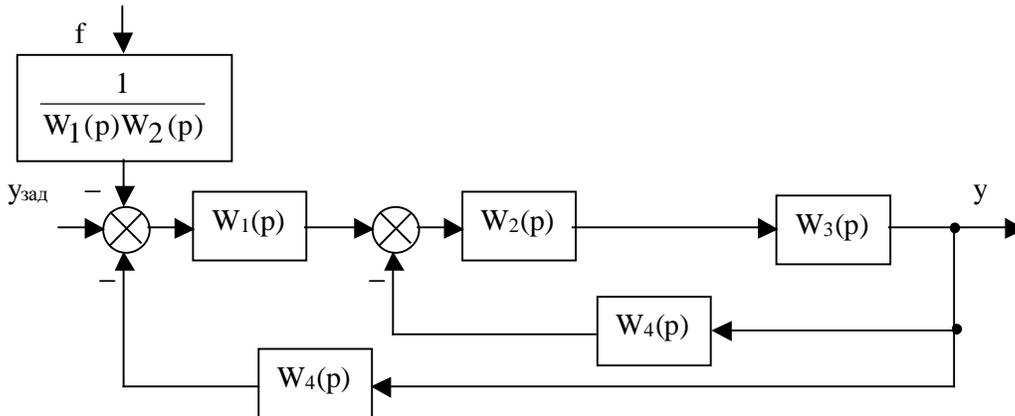


Рис.2. Структурная схема системы

Передаточная функция системы по заданию:

$$W_{\text{зад}}(p) = \frac{W_1(p) \times \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)}}{1 + W_1(p) \times \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)} \times W_4(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)[1 + W_1(p)]}. \quad (2)$$

Передаточная функция системы по возмущению:

$$W_f(p) = \frac{W_{\text{зад}}(p)}{W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)[1 + W_1(p)]}. \quad (3)$$

Вычисление явного вида передаточных функций (2),(3) производится с помощью пакета Matlab при выполнении лабораторной работы №1.

Построим модели звеньев системы в пространстве состояний и соединим их по схеме, приведенной на рис. 1. Получим структуру (рис. 3).

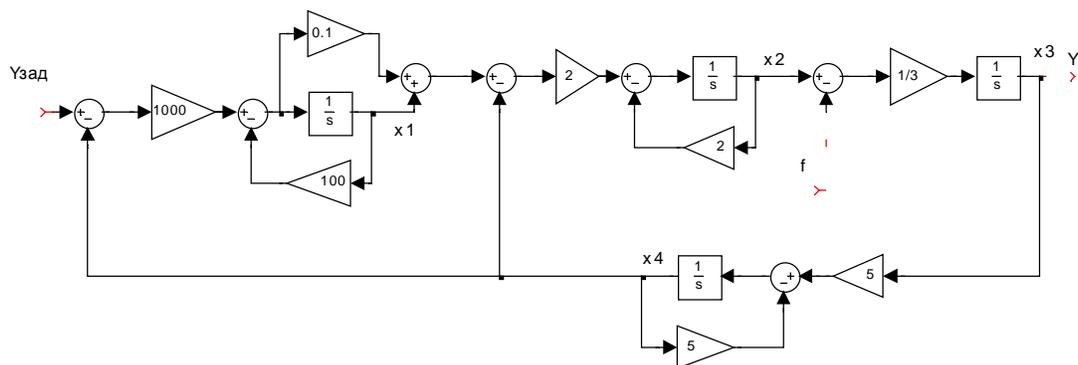


Рис. 3. Структура системы в пространстве состояний

Составим уравнения состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -100x_1 - 1000x_4 + u_{\text{зад}}; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 0,2x_1 - 2x_4 = -18x_1 - 202x_4 + 0,2u_{\text{зад}}; \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}f; \\ \dot{x}_4 = 5x_3 - 5x_4. \end{cases} \quad (4)$$

$$y = x_3. \quad (5)$$

Представим описание системы в виде

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX. \quad (6)$$

Матрицы описания будут иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 & -1000 \\ -18 & 0 & 0 & -202 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 0 \ 1 \ 0). \quad (7)$$

### Порядок выполнения работы

Исходные данные к выполнению задания в форме одного из вариантов структуры системы и численных значений коэффициентов передаточных функций ее звеньев выдается студенту преподавателем индивидуально. Студент выполняет задание самостоятельно и предоставляет преподавателю отчет. Ряд вариантов рассматривается на практическом занятии у доски. Продолжение работы по теме производится в рамках выполнения лабораторной работы №1.

Таблица 1. Варианты исходных данных.

№ п/п	Структурная схема	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$W_3(s)$	$W_4(s)$	$W_5(s)$
1		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	-
2		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_5s + 1}$	-
3		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	-	-
4		$\frac{K_1}{T_1s + 1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s + 1)}{T_4s + 1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2 + T_6s + 1}$	-

5		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s-1)}{T_4s+1}$	-	-
6		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s-1)}{T_4s+1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2+T_6s+1}$	$(T_7s+1)$
7		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s-1)}{T_4s+1}$	-	$(T_7s+1)$
8		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s-1)}{T_4s+1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2+T_6s+1}$	$(T_7s+1)$
9		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	-	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2+T_6s+1}$	$(T_7s+1)$
10		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s-1)}{T_4s+1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2+T_6s+1}$	-
11		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	-	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2+T_6s+1}$	$(T_7s+1)$
12		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	-	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2+T_6s+1}$	$(T_7s+1)$
13		$\frac{K_1}{T_1s+1}$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3(T_3s-1)}{T_4s+1}$	$\frac{K_4}{T_5T_6s^2+T_6s+1}$	-

**Практическое занятие №3. Определение чувствительности, инвариантности, управляемости и наблюдаемости объектов и систем**

В данной работе определяется чувствительность, управляемость и наблюдаемость системы с несколькими входами и несколькими выходами. В качестве исходных данных выступают матрицы описания линейной системы.

## Теоретические сведения

Под чувствительностью системы по каналу  $u_i - y_j$  понимают отношение приращения выходной величины  $\Delta y_j$ , вызванное приращением входной величины  $\Delta u_i$ :

$$k_{ij} = \frac{\Delta y_j}{\Delta u_i}. \quad (1)$$

Если  $k_{ij} = 0$ , система *инвариантна* по данному каналу.

Под управляемостью системы в общем смысле понимается возможность оказания на нее управляющих воздействий, которые обеспечили бы заданное движение. Приведем определение управляемости.

Система является полностью управляемой, если для любых начального  $X(t_n)$  и конечного  $X(t_k)$  ее положений найдется допустимое управление  $U(t)$ , переводящее систему из  $X(t_n)$  в  $X(t_k)$  за время  $t = t_k - t_n$ .

Для линейных систем в отсутствии ограничений на управляющие сигналы управляемость системы может быть определена с помощью критерия Калмана.

Система полностью управляема, если

$$\text{rank}(J) = \text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n, \quad (2)$$

где  $n$  – порядок системы (размеры матрицы  $A$ ).

В том случае, когда система имеет несколько входов, управляемость проверяется для каждого из них. В (2) вместо «всей» матрицы  $B$  подставляется  $i$ -ый ее столбец  $B_i$ , где  $i$  – номер входа, для которого проверяется управляемость.

Если  $\text{rank}(J) = k < n$ , то  $k$  переменных управляемы,  $k-n$  – не управляемы.

В этом случае описание системы может быть представлено следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_y \\ \dot{X}_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_y \\ X_{ny} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times U, \quad (3)$$

где  $X_y$  –  $k$ -мерный вектор управляемых координат;  $X_{ny}$  –  $(k-n)$ -мерный вектор неуправляемых координат.

Для таких систем вводится понятие *стабилизируемости*. Система стабилизируема, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_{ny}(t) = 0$ .

Это имеет место, если  $A_{22}$  – гурвицева матрица, т.е. матрица, собственные числа которой (корни характеристического полинома  $\det(pE - A_{22})$ ) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Под наблюдаемостью системы понимается возможность по наблюдениям за ее входами и выходами восстановить вектор состояний. Определение: система называется наблюдаемой, если существует момент времени  $t^*$ , такой, что по наблюдениям за  $y(\tilde{t})$  и входом  $U(\tilde{t})$ , где  $\tilde{t} \in [t, t^*]$ , можно определить состояние  $X(t)$ .

Для линейных систем наблюдаемость можно определить с помощью критерия Калмана.

Для того, чтобы система была полностью наблюдаема, необходимо и достаточно:

$$\text{rank}N = \text{rank}[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T] = n. \quad (4)$$

В том случае, когда система имеет несколько выходов, наблюдаемость проверяется для каждого из них. В (2) вместо «всей» матрицы  $C$  подставляется  $j$ -ая ее строка  $C_j$ , где  $j$  – номер выхода, для которого проверяется наблюдаемость.

Если  $\text{rank}(N) = k < n$ , то  $k$  переменных наблюдаемы,  $n-k$  – не наблюдаемы, и тогда систему можно описать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_H \\ \dot{X}_{HH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_H \\ X_{HH} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \times U, \quad (5)$$

где  $X_H$  –  $k$ -мерный вектор наблюдаемых координат,  $X_{HH}$  –  $(k-n)$ -мерный вектор ненаблюдаемых координат.

Для таких систем вводится понятие *обнаруживаемости*.

Для того, чтобы система была обнаруживаема, необходимо и достаточно:  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_{HH} = 0$  при  $X_H = 0, U = 0$ , т.е.  $A_{22}$  была гурвицевой матрицей.

*Примеры определения наблюдаемости*

*1. Интегратор.*

Рассмотрим звено структурной схемы системы – интегратор.

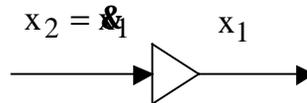


Рис. 1. Интегратор

Если измерению поддается величина  $x_1$ , т.е.  $Y = x_1$ , можно определить и вторую координату, дифференцируя  $x_1$ :

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{Y}. \quad (6)$$

Если же измерению подлежит  $x_2$ , т.е.  $Y = x_2$ , определить координату  $x_1$  невозможно:

$$x_1 = \int_0^t x_2 dt = F_{x_2}(t) - F_{x_2}(0) + x_1(0), \quad (7)$$

где  $F_{x_2}$  – первообразная  $x_2$ . Действительно,  $x_1(0)$  неизвестно.

*2. Объект с двойным интегрированием:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U, \\ Y = c_1 x_1 + c_2 x_2. \end{cases} \quad (8)$$

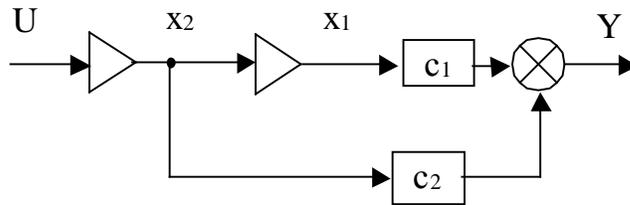


Рис. 2. Объект с двойным интегрированием

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (c_1 \quad c_2). \quad (9)$$

Матрица наблюдаемости

$$H = \begin{pmatrix} c_1 & (0 \quad 0) \\ c_2 & (1 \quad 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Ее определитель:

$$\det(H) = -c_1^2. \quad (11)$$

Таким образом, наблюдаемость объекта с двойным интегрированием определяется только коэффициентом  $c_1$ .

При  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  – координата  $x_1$  не наблюдаема.

При  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{c_1} Y, \quad x_2 = \frac{1}{c_1} Y, \quad (12)$$

т.е. система полностью наблюдаема.

При  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$

$$Y = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 x_2 + c_2 U, \quad (13)$$

откуда

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{c_1} Y - \frac{c_2}{c_1} U, \\ x_1 = \frac{1}{c_1} Y - \frac{c_2}{c_1} x_2 = \frac{1}{c_1} Y - \frac{c_2}{c_1^2} Y + \frac{c_2^2}{c_1^2} U. \end{cases} \quad (14)$$

Схема восстановления координат, составленная на основании (14), приведена на рис. 3.

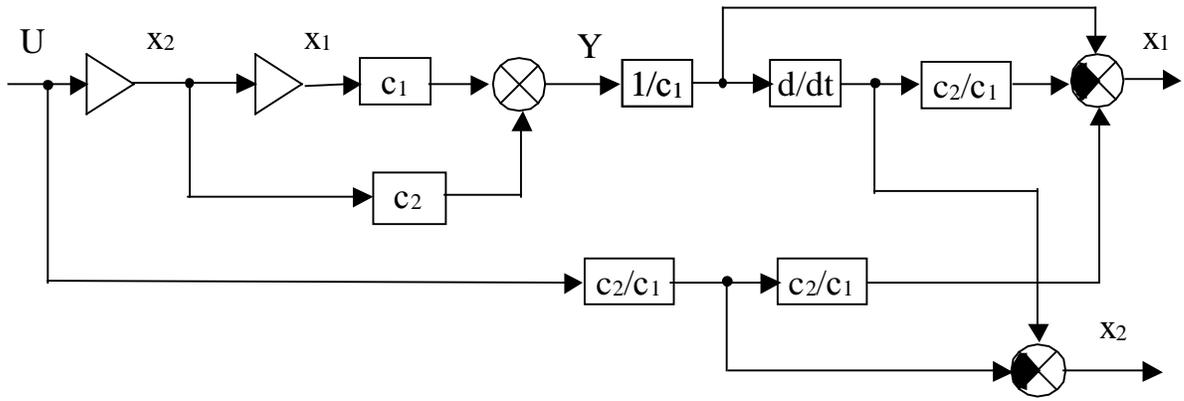


Рис. 3. Схема восстановления координат объекта (8)

3. Объект второго порядка с обратными связями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U - a_1 x_1 - a_2 x_2, \\ Y = c_1 x_1 + c_2 x_2. \end{cases} \quad (15)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (c_1 \quad c_2). \quad (16)$$

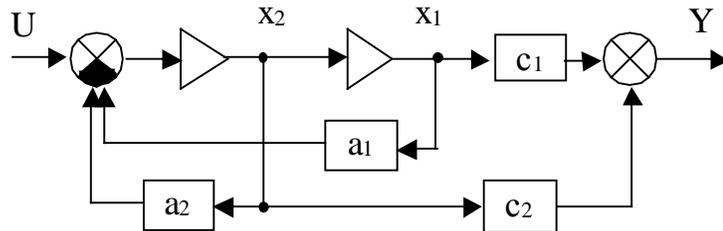


Рис. 4. Система второго порядка с обратными связями

Матрица наблюдаемости:

$$H = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -a_1 c_2 \\ c_2 & c_1 - a_2 c_2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

ее определитель

$$\det(H) = c_1^2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2. \quad (18)$$

При  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$   $\det(H) = a_1 c_2^2$  и система наблюдаема при любом ненулевом  $a_1$ . Координата  $x_2$  определяется просто:

$$x_2 = \frac{1}{c_2} Y. \quad (19)$$

Определим  $x_1$ , продифференцировав уравнение выхода:

$$\dot{Y} = c_2 \dot{x}_2 = c_2 U - c_2 a_1 x_1 - a_2 Y, \quad (20)$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{a_1} U - \frac{a_2}{c_2 a_1} Y - \frac{1}{c_2 a_1} \dot{Y}. \quad (21)$$

При  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$   $\det(H) = c_1^2$  и система полностью наблюдаема при любых  $a_1, a_2$ :

$$x_1 = \frac{1}{c_1} Y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{1}{c_1} \dot{Y}. \quad (22)$$

При  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$  в общем случае система наблюдаема, однако возможен вариант

$$\det(H) = c_1^2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2 = 0, \quad (23)$$

что имеет место при  $a_1 = \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{c_1}{c_2} a_2$ , и в этом случае система не наблюдаема.

Продифференцировав уравнение выхода, получим:

$$\dot{Y} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = c_1 x_2 + c_2 U - c_2 a_1 x_1 - c_2 a_2 x_2, \quad (24)$$

или

$$\dot{Y} = c_2 U - c_2 a_1 x_1 + (c_1 - c_2 a_2) x_2. \quad (25)$$

Решая совместно уравнение (63) и уравнение выхода, получим

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c_1 - c_2 a_2}{\det(H)} Y - \frac{c_2}{\det(H)} \dot{Y} + \frac{c_2^2}{\det(H)} U, \\ x_2 = \frac{c_2 a_1}{\det(H)} Y + \frac{c_1}{\det(H)} \dot{Y} - \frac{c_1 c_2}{\det(H)} U. \end{cases} \quad (26)$$

Схема восстановления координат приведена на рис. 5 (сам объект не показан).

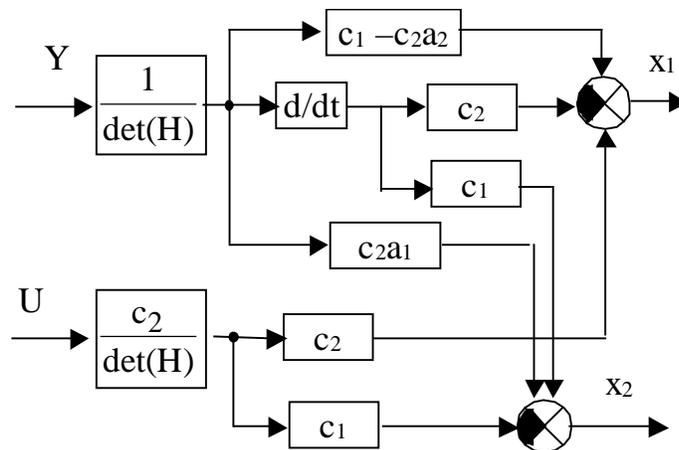


Рис. 5. Схема восстановления координат для объекта (15)

### Порядок выполнения работы

Каждому студенту индивидуально выдаются матрицы описания линейной системы с несколькими входами и несколькими выходами.

В ходе выполнения работы необходимо

- 1) построить структурную схему системы;
- 2) определить управляемость системы по каждому каналу;
- 3) определить наблюдаемость систем по каждому выходу;
- 4) определить чувствительность системы по каждому каналу.

На занятии рассматриваются примеры решения задач.

#### **Практическое занятие №4. Построение корневого годографа системы второго и третьего порядков**

В данной работе требуется построить корневые годографы системы, схема которой приведена на рис. 1, при изменении коэффициента передачи  $k_p$ . Исходными данными являются значения коэффициентов передачи  $k_1$ ,  $k_2$  и постоянных времени  $T_1$ ,  $T_2$ .

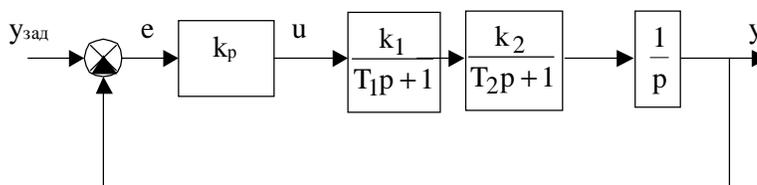


Рис. 1. Структурная схема САР

#### **Пример.**

Пусть  $k_1=k_2=T_1=1$ ,  $T_2 = 0,5$ .

Разомкнутая система нейтральна, так как состоит из устойчивых звеньев и одного нейтрального. Ее передаточная функция равна

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p} \quad (1)$$

Корни характеристического полинома разомкнутой системы 0, -1, -2. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2k_p} \quad (2)$$

На рис. 48 приведен корневой годограф системы – зависимость положения ее полюсов на комплексной плоскости от коэффициента передачи регулятора.

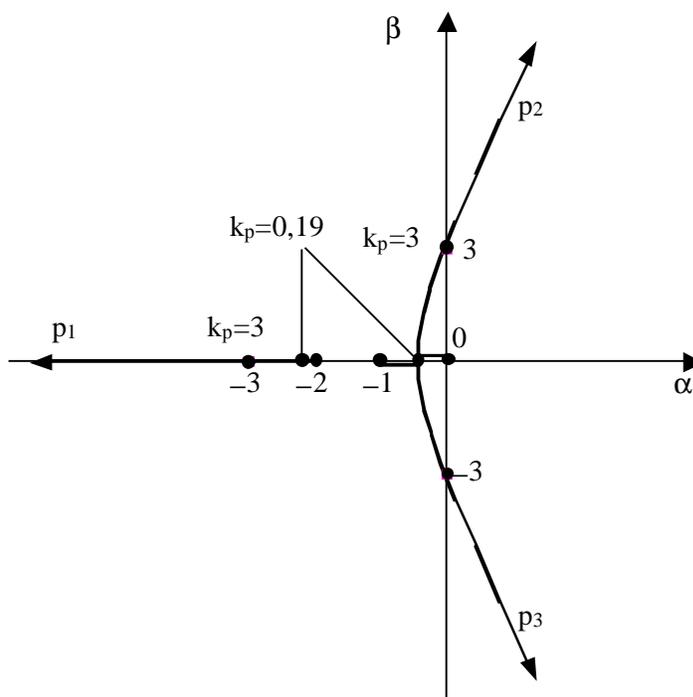


Рис. 2. Корневой годограф системы

При  $k_p \rightarrow 0$ . Корни характеристического полинома замкнутой системы, как это видно из (2), стремятся к полюсам  $W_{раз}(p)$ :  $0, -1, -2$ .

В диапазоне коэффициентов передачи от  $k_p = 0$  до  $k_p \approx 0,19$  происходит «сближение» полюсов  $p_2$  и  $p_3$  и уменьшение полюса  $p_1$ . Переходные характеристики системы носят апериодический характер, причем с увеличением  $k_p$  быстродействие системы растет.

При  $k_p \approx 0,19$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся равными  $-0,42$ . Полюс  $p_1$  принимает значение  $-2,15$ . Дальнейшее увеличение  $k_p$  приводит к тому, что полюса  $p_2$  и  $p_3$  вновь «расходятся», становясь комплексно-сопряженными. вещественные части полюсов и модуль мнимых частей увеличиваются. Полюс  $p_1$  по-прежнему уменьшается, оказывая все меньшее влияние на характер движения системы. Переходная характеристика становится колебательной, причем перерегулирование и частота колебаний с ростом  $k_p$  увеличиваются.

При  $k_p = 3$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся чисто мнимыми, равными  $\pm 3j$ , и система выходит на границу устойчивости. Ее переходная характеристика принимает вид незатухающих колебаний.

Дальнейшее увеличение коэффициента передачи делает систему неустойчивой. При этом ее поведение определяется в основном парой правых комплексно-сопряженных корней  $p_2$  и  $p_3$ .

Продолжение работы по теме производится в рамках лабораторной работы №2.

## Практическое занятие № 5. Определение устойчивости систем с помощью алгебраических критериев

В данной работе с помощью критерия Гурвица определяется:

- устойчивость системы, заданной на практическом занятии №2;
- критическое значение коэффициента передачи  $k_p$  для системы, заданная на практическом занятии №4.

### Теоретические сведения

Для оценки устойчивости по критерию Гурвица необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить определитель Гурвица по следующим правилам:

- 1) по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов; столбцы определителя заполняются коэффициентами от главной диагонали вниз по убывающим, а вверх- по возрастающим индексам;
- 2) места коэффициентов, индексы которых больше  $n$  или меньше нуля заполняются нулями.

Для примера составим определитель Гурвица, для системы 5-го порядка. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0, \quad (1)$$

где все коэффициенты строго больше нуля. Получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части и система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты и все диагональные определители определителя Гурвица были строго больше нуля.

Для устойчивости системы 5-го порядка необходимо выполнение условий

$$a_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots, 5; \quad (3)$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \quad (4)$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0; \quad (5)$$

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 - a_2 a_5 \Delta_2 + a_0 a_5 (a_1 a_4 - a_0 a_5) > 0; \quad (6)$$

$$\Delta_5 = a_5 \Delta_4 > 0. \quad (7)$$

Так как при выполнении необходимого условия устойчивости всегда  $a_n > 0$ , то об устойчивости системы можно судить по определителям до  $\Delta_{n-1}$  включительно. Доказано, что если  $\Delta_{n-1} = 0$ , то система находится на колебательной границе устойчивости, т.е. имеет пару чисто мнимых корней. Из ус-

ловия  $\Delta_{n-1} = 0$  можно определить критические значения параметров системы, при которых она выходит на границу устойчивости.

**Пример.** Исследовать устойчивость системы стабилизации угла тангажа самолета и определить критическое значение передаточного числа автопилота по углу тангажа. Система задана структурной схемой.

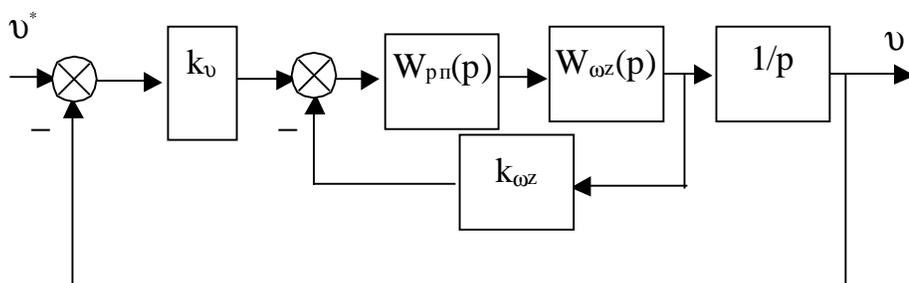


Рис.1. Структурная схема системы стабилизации угла тангажа.

На схеме обозначено:

$k_v$ - передаточное число (коэффициент передачи) автопилота по углу тангажа;

$W_{рп}(p) = \frac{1}{T_{рп}p+1}$  – передаточная функция рулевого привода;

$W_{\omega_z}(p) = \frac{k_c(T_1p+1)}{T^2p^2+2T\zeta p+1}$  – передаточная функция самолета по угловой

скорости тангажа  $\omega_z$ ;

$k_{\omega_z}$  - передаточное число автопилота по угловой скорости тангажа.

Для передаточной функции разомкнутой системы можно записать

$$W(p) = \frac{k_v k_c W_{рп}(p) W_{\omega_z}(p)}{p(1+k_{\omega_z} W_{рп}(p) W_{\omega_z}(p))} = \frac{k_v k_c (T_1 p + 1)}{p(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3)}, \quad (8)$$

где  $a_0 = T^2 T_{рп}$ ;  $a_1 = 2T T_{рп} \zeta + T^2$ ;  $a_2 = T_{рп} + 2T \zeta + k_{\omega_z} k_c T_1$ ;

$a_3 = 1 + k_{\omega_z} k_c$ .

Передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{k_v k_c (T_1 p + 1)}{d_0 p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p + d_4}, \quad (9)$$

где  $d_0 = a_0$ ;  $d_1 = a_1$ ;  $d_2 = a_2$ ;  $d_3 = a_3 + k_v k_c T_1$ ;  $d_4 = k_v k_c$ .

Составим определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & 0 & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_0 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Оценим устойчивость системы для следующих значений параметров:  $k_v = 5$ ;  $k_{vz} = 1,2$ ;  $k_c = 0,9$ ;  $T_1 = 1,8$ ;  $T = 0,12$ ;  $\xi = 0,1$ .

При этих значениях для коэффициентов характеристического уравнения получим:

$$d_0 = a_0 = 0,00115; \quad d_1 = a_1 = 0,0163; \quad d_2 = a_2 = 2,048; \quad a_3 = 2,08; \quad d_3 = 10,18; \\ d_4 = 4,5.$$

Следовательно, все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы положительны и

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= d_1 d_2 - d_0 d_3 = 0,021675 > 0; \\ \Delta_3 &= d_3 \Delta_2 - d_1^2 d_4 = 0,21945 > 0; \\ \Delta_4 &= d_4 \Delta_3 = 0,98755 > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия устойчивости выполнены и система при избранных параметрах устойчива.

Определим критическое значение передаточного числа по углу тангажа, для чего приравняем третий диагональный определитель нулю и сделаем преобразования.

$$d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3) - d_1^2 d_4 = 0. \quad (12)$$

Отсюда

$$d_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} d_3 + \frac{d_1^2}{d_0} d_4 = 0. \quad (13)$$

В последнем выражении только  $d_3$  и  $d_4$  являются функциями коэффициента  $k_v$  и подставив их в него, получим квадратное уравнение относительно этого коэффициента

$$(k_c T_1)^2 k_v^2 + (2a_3 k_c T_1 - \frac{d_1 d_2}{d_0} k_c T_1 + \frac{d_1^2}{d_0} k_c) k_v + (a_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} a_3) = 0. \quad (14)$$

Решив это уравнение, получим критическое значение передаточного числа по углу тангажа

$$(k_v)_{кр} = 16.56. \quad (15)$$

Система устойчива, если  $k_v < 16.56$ .

**Практическое занятие №6. Определение устойчивости систем с помощью частотных критериев**

В данной работе с помощью критериев Михайлова и Найквиста определяется устойчивость системы, заданной на практическом занятии №4 при различных значениях коэффициента передачи  $k_p$ .

**Пример.**

Пусть  $k_1=k_2=T_1=1$ ,  $T_2 = 0,5$ . Требуется определить устойчивость системы с помощью критерия Михайлова.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p}. \quad (1)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2k_p}. \quad (2)$$

Годограф характеристического многочлена системы (годограф Михайлова):

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2j\omega + 2k_p = \\ &= [-3\omega^2 + 2k_p] + j[-\omega^3 + 2\omega] = P(\omega) + jQ(\omega). \end{aligned} \quad (3)$$

Найдем точки пересечения годографа с осями комплексной плоскости.

Точки пересечения с вещественной осью найдем из условия

$$Q(\omega) = 0. \quad (4)$$

Получим

$$-\omega^3 + 2\omega = 0, \quad (5)$$

откуда  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_3 = \sqrt{2}$ .

$$P(\omega_1) = 2k_p, \quad P(\omega_3) = -6 + 2k_p.$$

Точку пересечения с мнимой осью найдем из условия

$$P(\omega) = 0. \quad (6)$$

Получим

$$-3\omega^2 + 2k_p = 0, \quad (7)$$

$$\text{откуда } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k_p}{3}}.$$

$$Q(\omega_2) = 2\sqrt{\frac{2k_p}{3}}(1 - k_p/3). \quad (8)$$

Согласно критерию Михайлова система находится на границе устойчивости, если годограф проходит через начало координат, т.е. через точку

$$P(\omega) = Q(\omega) = 0. \quad (9)$$

Это возможно на частоте  $\omega = \omega_1 = 0$  при  $k_p = 0$ , а также на частоте  $\omega = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{2}$  при  $k_p = 3$ . Очевидно, что первое решение не представляет интереса, так как не имеет отношения к реальной системе.

Рассчитаем и построим годографы Михайлова при  $k_p = 2, 3, 4$  (рис.1).

При  $k_p = 2$  система устойчива, так как годограф, начинаясь на положительной вещественной полуоси, проходит последовательно три квадранта, то есть ровно столько квадрантов, каков порядок системы.

При  $k_p = 3$  система находится на границе устойчивости.

При  $k_p = 4$  система неустойчива, поскольку годограф проходит квадранты не последовательно (из первого квадранта попадает в четвертый, потом в третий).

Кроме того, из рис. 1 видно, что увеличение  $k_p$  приводит только к смещению годографа Михайлова вправо (вдоль вещественной оси). Таким образом для построения семейства годографов достаточно было построить один годограф при определенном  $k_p$  – остальные будут его копиями, сдвинутыми вдоль вещественной оси. Величина сдвига легко вычисляется из (3).

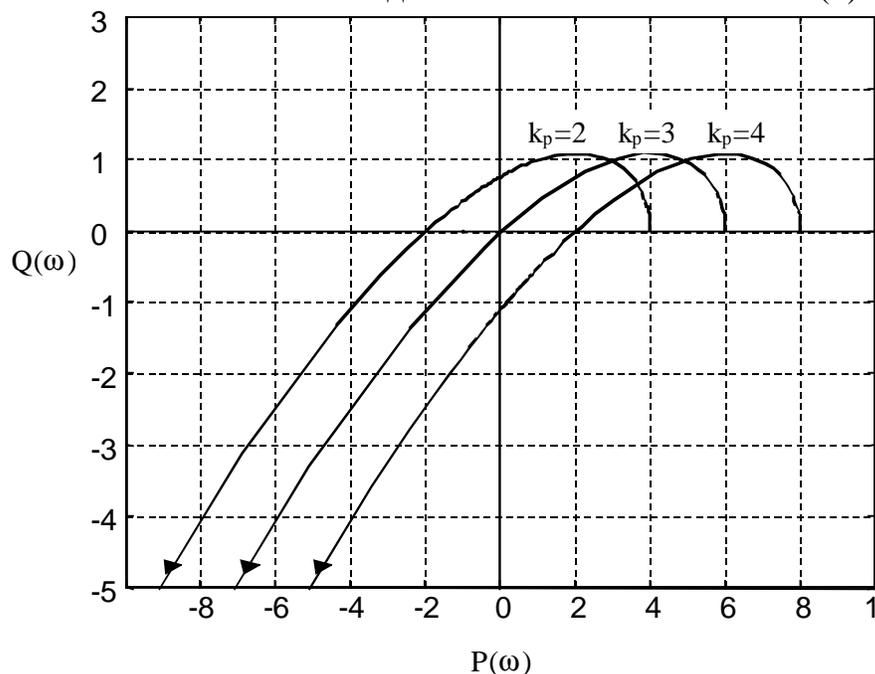


Рис. 1. Годографы Михайлова при различных значениях  $k_p$

### ***Практическое занятие №7. Определение статической точности систем***

В данной работе определяется статическая точность системы, заданной на практическом занятии №2, при различных значениях коэффициента передачи одного из звеньев. Преподаватель задает места приложения возмущающих воздействий, а также указывает переменный коэффициент передачи. Требуется построить статические характеристики системы – зависимости выходной величины от всех внешних воздействий в установившемся режиме

при различных коэффициентах передачи, а также определить общую зависимость выходной величины от всех входных.

**Пример.** Пусть структура системы имеет вид (рис.1).  $k_1=k_2=1$ .

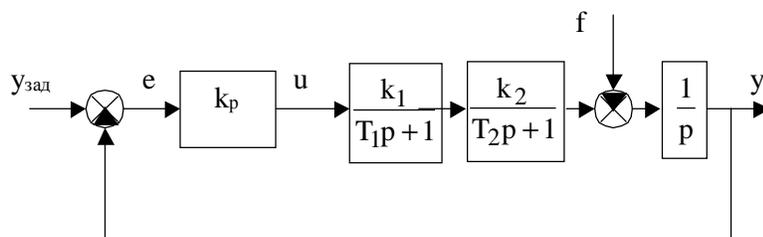


Рис. 1. Структурная схема САР

Поскольку в структуру контура входит интегрирующее звено, система является астатической, а, следовательно, при любом  $k_p$  коэффициент передачи замкнутой системы по задающему воздействию равен единице и при отсутствии возмущения  $y = u_{зад}$ . (см. также практическое занятие №5).

Зависимость  $y(f)$  при  $u_{зад} = 0$  можно определить двумя способами.

1) В установившемся режиме сигнал на входе интегрирующего звена равен нулю. Отсюда следует, что

$$ek_pk_1k_2 - f = 0. \quad (1)$$

Поскольку при нулевом задании  $e = -y$ ,

$$-yk_pk_1k_2 - f = 0, \quad (2)$$

откуда

$$y = -\frac{f}{k_pk_1k_2} = -\frac{f}{k_p} \quad (3)$$

2) Определим коэффициент передачи системы по возмущению. Для этого в передаточных функциях всех звеньев системы за исключением интегрирующего положим  $p = 0$  и воспользуемся известными правилами преобразования структурных схем. Получим

$$W_f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ -\frac{1/p}{1 + k_pk_1k_2/p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{p + k_pk_1k_2} \right] = -\frac{1}{k_pk_1k_2} = -\frac{1}{k_p}. \quad (4)$$

В установившемся режиме при  $u_{зад} = 0$

$$y = W_f(0)f = -\frac{f}{k_p}, \quad (5)$$

что соответствует результату полученному ранее (3).

По (5) построены графики зависимости  $y(f)$  при  $k_p = 10, 5, 2,5$  (рис. 2).

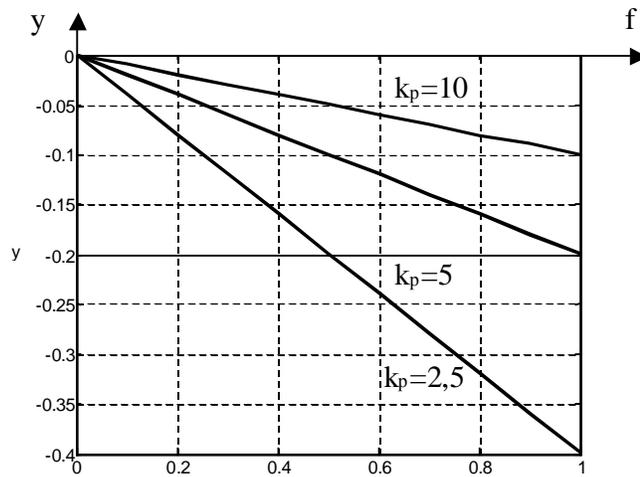


Рис. 2. Зависимость  $y(f)$  при  $k_p = 10, 5, 2,5$ .

Общая зависимость выходной величины от входных имеет вид:

$$y = y_{\text{зад}} - \frac{f}{k_p}. \quad (6)$$

**Практическое занятие № 8. Определение точности систем при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной**

В данной работе определяется точность системы, заданной на практическом занятии №2, при постоянных входных воздействиях и воздействиях, изменяющихся с постоянной скоростью. Преподаватель задает места приложения возмущений. Требуется провести анализ влияния всех входных воздействий на ошибку регулирования в статике и в стационарных динамических режимах (предполагается, что система устойчива). Внешние воздействия могут быть постоянными, изменяться с постоянной скоростью, ускорением.

Теоретические сведения по данной работе приведены в пособии «Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию», п. 4.1.3. «Качество САР в стационарных динамических режимах».

**Пример.** Структура системы имеет вид (рис.1). Пусть  $k_1=k_2=1$ .

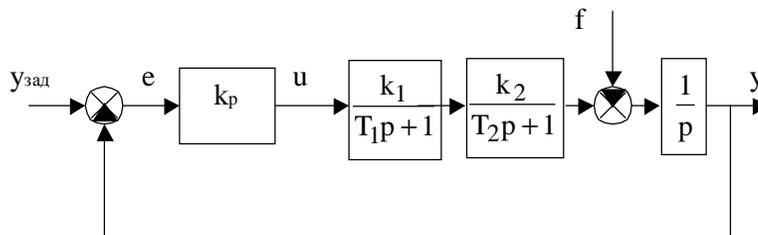


Рис. 1. Структурная схема САР

Зависимость ошибки регулирования от возмущения при  $f = \text{const}$  для данной системы определена на практическом занятии №8. При  $y_{\text{зад}} = 0$

$$y = -\frac{f}{k_p k_1 k_2} = -\frac{f}{k_p}, \quad (1)$$

$$e = y_{\text{зад}} - y = \frac{f}{k_p k_1 k_2} = \frac{f}{k_p}. \quad (2)$$

Если возмущение изменяется с постоянной скоростью, ошибка регулирования будет неограниченно возрастать по модулю, поскольку число интегрирующих звеньев в контуре перед местом приложения возмущения (нуль) меньше порядка воздействия (единица). Это можно показать также с помощью следующих простейших рассуждений.

Предположим, при постоянной скорости изменения возмущения, ошибка постоянна и равна некоторой величине

$$e = e^* = \text{const}. \quad (3)$$

Условием постоянства ошибки будет нулевой сигнал на входе интегрирующего звена:

$$e^* k_p k_1 k_2 - f = 0. \quad (4)$$

Однако, поскольку возмущение изменяется, равенство (4) не может соблюдаться в любой момент времени и, следовательно, наше предположение неверно.

Зависимость ошибки от задающего воздействия зависит от порядка воздействия.

1. При  $y_{\text{зад}} = \text{const}$  ошибка равна нулю, так как порядок воздействия (нуль) меньше порядка астатизма (единица). Действительно, система может находиться в установившемся состоянии, если на входе интегрирующего звена нулевой сигнал, а при  $f = 0$  это возможно, только если  $e = 0$ .

2. При  $y_{\text{зад}} = \lambda t$ , где  $\lambda$  – скорость изменения задания, ошибка регулирования постоянна, так как порядок воздействия (единица) равен порядку астатизма. Определим значение ошибки в данном случае.

Если  $e = e^* = \text{const}$ , то скорость изменения выходной величины равна скорости изменения задания, следовательно, на входе интегрирующего звена присутствует сигнал, равный  $\lambda$ . Отсюда

$$e^* k_p k_1 k_2 = \lambda. \quad (5)$$

Из (5) найдем

$$e^* = \frac{\lambda}{k_p k_1 k_2} = \frac{\lambda}{k_p}. \quad (6)$$

3. При  $y_{\text{зад}} = \mu t^2/2$ , где  $\mu$  – ускорение задания, ошибка регулирования неограниченно возрастает, так как порядок воздействия (два) больше порядка астатизма. Действительно, для того, чтобы ошибка была постоянной, требуется, чтобы выходной сигнал изменялся с тем же ускорением, что и задание.

Однако это невозможно, так как при постоянной ошибке постоянен и сигнал на входе интегратора и, следовательно, выходной сигнал системы может возрасти только с нулевым ускорением.

**Практическое занятие № 9. Определение основных характеристик случайного сигнала (мат. ожидания, дисперсии, корреляционной функции, спектральной плотности)**

В данной работе определяются основные характеристики случайного сигнала: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция, спектральная плотность.

**Теоретические сведения**

Для стационарного случайного процесса  $y(t)$  благодаря его эргодичности среднее по множеству, т.е. математическое ожидание  $m_y$ , можно определить как среднее по времени:

$$m_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt. \quad (1)$$

Поскольку на практике  $y(t)$  чаще всего представляется своими дискретными отчетами, отсчитанными через один и тот же промежуток времени, математическое ожидание можно определить как среднее значение отчета, рассчитанное на достаточно большом интервале времени. В Matlab эту задачу выполняет функция `mean`.

Случайная функция, математическое ожидание которой равно нулю, называется центрированной. Соответственно, любую случайную функцию можно представить как сумму математического ожидания и центрированной случайной функции:

$$y(t) = m_y + y^o(t), \quad (2)$$

где  $y^o(t)$  – центрированная случайная функция.

Поскольку мы рассматриваем только стационарные случайные процессы, для которых  $m_y = \text{const}$ , можно считать, что любой случайный сигнал содержит постоянную составляющую  $m_y$  и случайную составляющую  $y^o(t)$ .

Дисперсия  $D_y$  случайной функции  $y(t)$  – это среднее значение квадрата ее отклонения от среднего значения, или, что то же самое, среднее значение квадрата центрированной случайной функции:

$$D_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (y(t) - m_y)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (y^o(t))^2 dt. \quad (3)$$

Дисперсия является мерой отклонения случайной функции от ее среднего значения.

Среднеквадратическое отклонение есть квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}. \quad (4)$$

Эта величина удобна тем, что имеет ту же размерность, что и случайная функция.

В Matlab среднеквадратическое отклонение вычисляется с помощью функции `std`.

Корреляционная (автокорреляционная) функция  $R_y(\tau)$  случайной функции – это среднее значение произведения двух значений этой функции, сдвинутых на определенный промежуток времени  $\tau$ :

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t + \tau)dt. \quad (5)$$

Эта функция служит для количественной оценки зависимости между последующими во времени значениями случайного процесса, т.е. оценивает быстроту изменения случайного процесса во времени.

Корреляционная функция является четной функцией, т.е.  $R_y(\tau) = R_y(-\tau)$  и имеет следующий общий вид (рис.1). Максимальное значение корреляционной функции имеет место при  $\tau=0$ , когда  $y(t+\tau)=y(t)$ , и равно среднему значению квадрата случайной функции:

$$R_y(0) = M[y^2]. \quad (6)$$

Такому же значению будет равна корреляционная функция при всех значениях  $\tau$  для детерминированной постоянной во времени величины  $a$ :

$$R_a(\tau) = a^2. \quad (7)$$

Если случайная величина центрирована, то, согласно (3), максимальное значение корреляционной функции равно дисперсии сигнала.

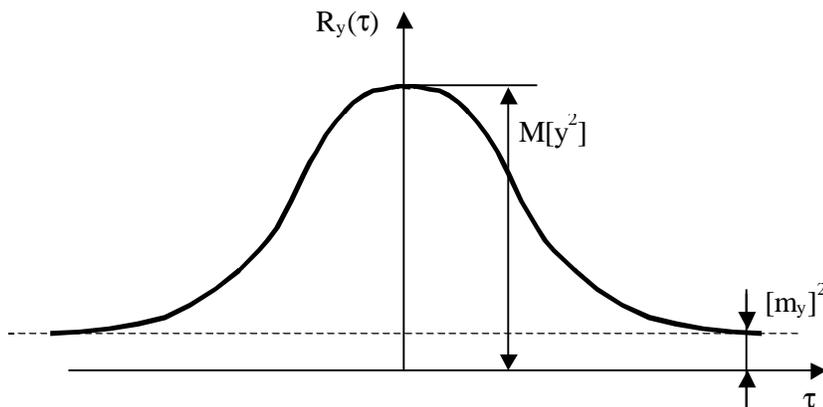


Рис.1. Корреляционная функция

Предельное значение корреляционной функции при  $\tau \rightarrow \infty$  равно квадрату среднего значения:

$$R_y(\infty) = m_y^2. \quad (8)$$

Для центрированной случайной функции предельное значение равно нулю.

В системе Matlab корреляционные функции вычисляются с помощью функции `xcorr` из пакета `Signal Processing Toolbox`.

Спектральная плотность  $S_y(\omega)$  случайного процесса  $y(t)$  – частотная функция, характеризующая спектральный (частотный) состав процесса. Она представляет собой функцию распределения средних значений квадратов амплитуд гармоник, на которые может быть разложен случайный процесс.

Спектральная плотность формально определяется как изображение Фурье корреляционной функции:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9)$$

Поскольку  $R_y(\tau)$  – четная функция, выражение удобно представить в тригонометрической форме:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (10)$$

С помощью обратного преобразования Фурье можно выразить корреляционную функцию через спектральную плотность:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (11)$$

или в тригонометрической форме, учитывая, что  $S_y(\omega)$  – четная функция

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (12)$$

Спектральная плотность, как и корреляционная функция, является четной, т.е.  $S_y(\omega) = S_y(-\omega)$ , ее вид также подобен виду корреляционной функции. Соотношение между графиками спектральной плотности и корреляционной функции следующее: чем шире график корреляционной функции, тем уже график спектральной плотности и наоборот. В предельном случае, когда процесс детерминирован,  $y = a$ ,  $R_y(\tau) = a^2$ , спектральная плотность равна нулю всех частотах, кроме нулевой и описывается следующим образом:

$$S_y(\omega) = 2\pi a^2 \delta(\omega), \quad (13)$$

где  $\delta(\omega)$  – дельта-функция.

В другом предельном случае, когда  $y(t)$  является чисто случайным стационарным процессом и связь между последующими значениями  $y(t)$ , совсем отсутствует,

$$S_y(\omega) = a = \text{const}, \quad R_a(\tau) = a\delta(\tau). \quad (14)$$

Такой случайный процесс называется белым шумом. На практике процесс в виде белого шума невозможен, так как он имеет бесконечный спектр, и, следовательно, бесконечную мощность. Однако реальные случайные процессы с конечным спектром часто можно приближенно представить в виде белого шума, если рассматривается действие их на систему, полоса пропускания которой значительно уже ширины спектра процесса. Кроме того, приближенно реализованный белый шум можно использовать для формирования

случайных процессов с заданными характеристиками, как это и делается в данной работе.

Для центрированной случайной величины существует следующая связь между спектральной плотностью и дисперсией:

$$D_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{y^o}(\omega) d\omega. \quad (15)$$

### Формирование случайной последовательности

Исходными данными являются последовательности значений случайного сигнала, сформированного преподавателем с помощью имитационной модели.

Случайная последовательность формируется с помощью некоторой Simulink-модели, например, приведенной на рис. 2.

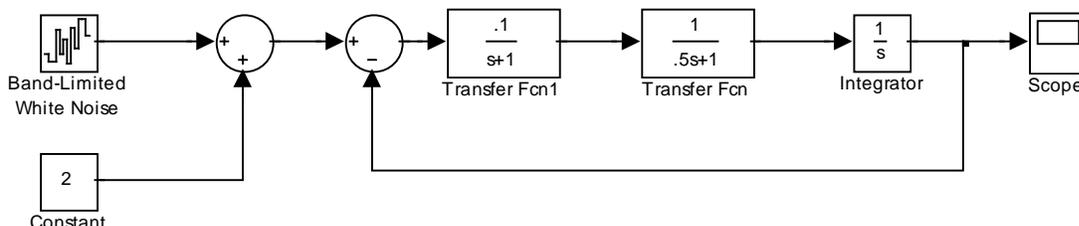


Рис. 2. Simulink-модель для формирования случайной последовательности

Случайный сигнал на входе системы имеет постоянную составляющую, формируемую блоком «Constant» и центрированную случайную составляющую, формируемую блоком «Band Limited White Noise». Последний моделирует работу генератора «белого шума» заданной мощности  $a$ . Проходя через линейную систему, случайный сигнал приобретает заданные характеристики, которые полностью определяются свойствами системы. В частности, его спектральная плотность равна

$$S(\omega) = aA^2(\omega), \quad (16)$$

где  $A(\omega)$  – АЧХ системы.

В блоке «Scope» выходной случайный сигнал сохраняется в рабочей области Matlab как переменная, в нашем случае имеющая имя  $rs$  (рис. 3).

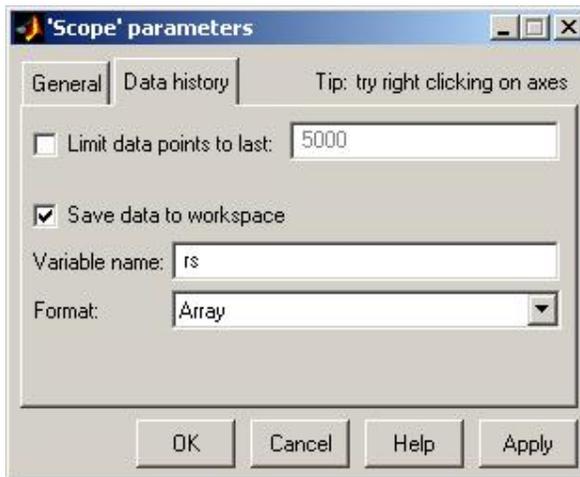


Рис. 3. Сохранение случайного сигнала в рабочей области

Расчет должен проводиться методом-решателем с постоянным шагом, например, `ode5`, причем шаг решателя должен быть равен параметру «Sample time» блока «Band Limited White Noise». Для того чтобы выходной сигнал системы с достаточной степенью отражал свойства системы, необходимо, чтобы

- шаг интегрирования должен быть достаточно мал, чтобы отразить поведение системы на всех частотах ее полосы пропускания;
- расчетный промежуток времени должен быть достаточно велик, чтобы отразить усредненные характеристики выходного сигнала.

Для проверки «адекватности» полученной случайной последовательности следует предпринять следующие шаги:

1) извлечь массивы значений времени и выходного случайного сигнала из массива `rs` и определить шаг дискретизации. Поскольку формируется, по сути, возмущающее воздействие, для его обозначения будем использовать символ «`f`»:

```
t = rs(:,1);
f = rs(:,2);
dt = t(2)-t(1);
```

2) определить математическое ожидание и выделить центрированную случайную величину:

```
mf = mean(f);
f = f - mf;
```

3) определить корреляционную (автокорреляционную) функцию  $R_f(\tau)$  с помощью функции `xcorr` (пакет `Signal Processing Toolbox`):

```
max_tau = 100; % область определения  $R_f(\tau)$   $-100 \leq \tau \leq 100$ 
max_lag = round(max_tau/dt); % максимальное число отчетов
Rf = xcorr(f,max_lag,'unbiased'); % расчет  $R_f(\tau)$ 
tr = [-max_lag : max_lag]*dt; % формирование оси абсцисс
```

```
figure(1),plot(tr,Rf), grid % построение графика  $R_f(\tau)$ 
```

4) рассчитать спектральную плотность  $S_f(\omega)$  по формуле (10), заменив интеграл суммой:

```
w = 0:.01:1.5;  
ws = length(w);  
Sf = zeros(ws,1);  
for j=1:ws  
    for i=1:size(Rf)  
        Sf(j) = Sf(j)+ Rf(i)*cos(w(j)*tr(i))*dt;  
    end  
end
```

5) рассчитать АЧХ системы с помощью методов пакета Control:

```
W1 = tf(.1,[1 1]);  
W2 = tf(1,[.5 1]);  
W3 = tf(1,[1 0]);  
W = feedback(W1*W2*W3,1);  
[A,ph] = bode(W,w); A = A(:);
```

6) построить на одних осях графики функции  $S_f(\omega)$ , рассчитанной по случайной последовательности и по формуле (16)

```
a = .1; % мощность белого шума  $P_{\text{бш}}$   
Sf1 = a*A.*A; % спектральная плотность по (16)  
figure(2), plot(w,Sf,w,Sf1), grid
```

7) определить дисперсию и среднеквадратическое отклонение выходного сигнала по случайной последовательности и через полученную спектральную плотность согласно (15):

```
d = std(f) % среднеквадратическое отклонение по сл. послед.  
D = d^2 % дисперсия  
D1 = 1/pi*trapz(w,Sf) % дисперсия по спектр. плотности  
d1 = sqrt(D1) % среднеквадратическое отклонение
```

Ниже показаны результаты расчетов для системы, приведенной на рис. 2 при следующих параметрах:

```
мощность белого шума:  $a = 0,1$ ;  
шаг интегрирования:  $dt = 1$ ;  
расчетный интервал:  $t = 0 \dots 500000$ ;  
область определения  $R(\tau)$ :  $-100 \leq \tau \leq 100$ ;  
область определения  $S(\omega)$ :  $\omega = 0 \dots 1,5$ ;
```

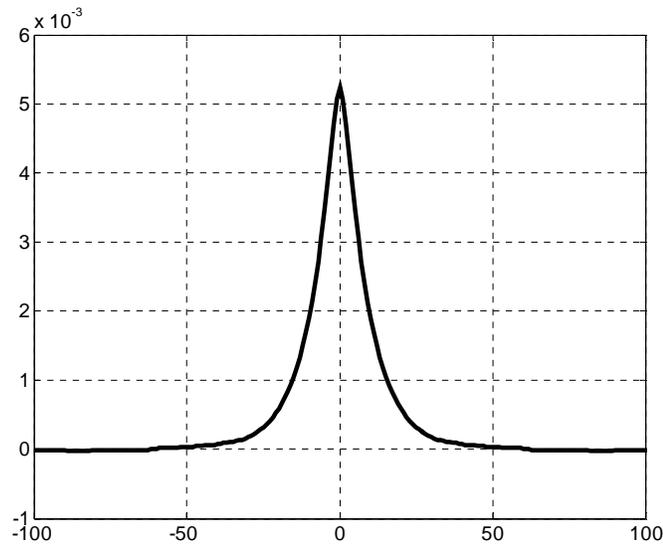


Рис. 2. Корреляционная функция  $R_f(\tau)$  (величина  $f$  центрирована)

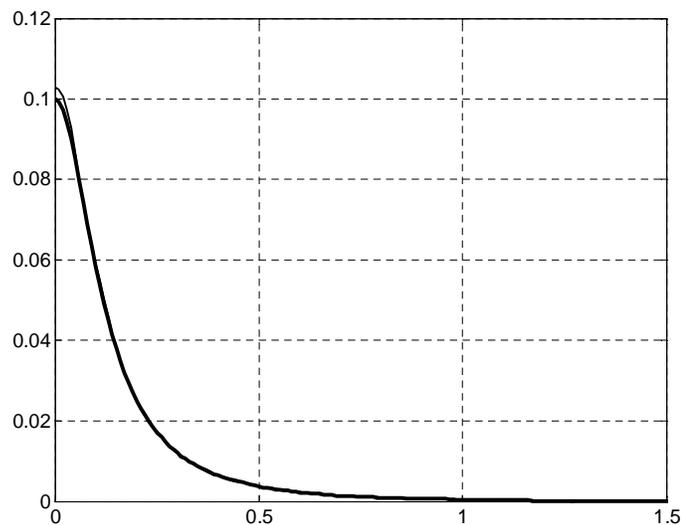


Рис. 3. Спектральные плотности, определенные теоретически (жирн.) и по выходной случайной последовательности (тонк.)

Дисперсия выходного сигнала, определенная по случайной последовательности: 0.0052332.

Дисперсия выходного сигнала, определенная по спектральной плотности: 0.0052201.

Описанная выше процедура может использоваться студентами для расчетов.

### Порядок выполнения работы

Преподаватель заранее формирует случайные последовательности с заданными характеристиками и в начале занятия выдает их студентам в виде

mat-фалов Matlab. По данной последовательности студенты самостоятельно определяют математическое ожидание и дисперсию случайного сигнала, рассчитывают корреляционную функцию и спектральную плотность и строят соответствующие графики. Правильность расчета проверяется путем сравнения значений дисперсии, определенных непосредственно по выборке и через спектральную плотность. Кроме того, поскольку рассчитывается дисперсия центрированной случайной величины, ее значение должно совпадать с максимальным значением корреляционной функции. Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №5.

На занятии разбирается пример решения задачи.

Сначала берется небольшая выборка в 20–30 отчетов. С помощью калькулятора определяется математическое ожидание и дисперсия сигнала, вычисляются значения корреляционной функции для 4–5 значений  $\tau$ . Далее, интерполируя, строится график функции  $R(\tau)$ . Определяются значения спектральной плотности для 5–6 значений  $\omega$ . Интерполируя, строится график  $S(\omega)$ . По нему рассчитывается дисперсия и сравнивается с полученной непосредственно по выборке. Цель данного этапа – уяснить «технология» расчетов.

Далее разбирается программа решения задачи в Matlab. Используется «большая» выборка (300000 – 500000 отчетов). Для демонстрации используется видеопроектор.

### ***Практическое занятие № 10. Определение точности системы при случайном входном воздействии***

В данной работе определяется точность системы, заданной на практическом занятии №2, при случайном воздействии, характеристики которого получены на практическом занятии №9. Преподаватель задает места приложения случайного воздействия. Требуется определить характеристики случайного процесса на выходе системы: математическое ожидание, корреляционную функцию, спектральную плотность и дисперсию.

#### **Теоретические сведения**

Математическое ожидание сигнала на выходе системы при случайном воздействии находится следующим образом:

$$m_y = W(0)m_f, \quad (1)$$

где  $m_f$  – математическое ожидание случайного входного сигнала,  $W(0)$  – коэффициент передачи системы.

Корреляционная функция выходного сигнала получается двукратным взятием интеграла Дюамеля (интеграла свертки) от корреляционной функции входного воздействия:

$$\begin{cases} R_y(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(\tau_2) x(\tau - \tau_2) d\tau_2; \\ x(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(\tau_1) R_f(\tau)(\tau + \tau_1) d\tau_1. \end{cases} \quad (2)$$

где  $R_f(\tau)$  – корреляционная функция входного сигнала,  $\omega(\tau)$  – весовая функция системы,  $x(\tau)$  – вспомогательная (промежуточная) функция.

Спектральная плотность выходного случайного сигнала может быть найдена по корреляционной функции:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (3)$$

или через спектральную плотность входного воздействия и АЧХ системы:

$$S_y(\omega) = S_f(\omega) A^2(\omega), \quad (4)$$

Поскольку характеристики  $R_f(\tau)$  и  $S_f(\omega)$  были получены для центрированной случайной входной последовательности, характеристики  $R_y(\tau)$  и  $S_y(\omega)$  относятся к центрированной случайной выходной последовательности. Поэтому дисперсию можно определить через спектральную плотность:

$$D_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (5)$$

### Пример

На систему, структурная схема которой показана на рис.1, подается случайный сигнал  $f$ .

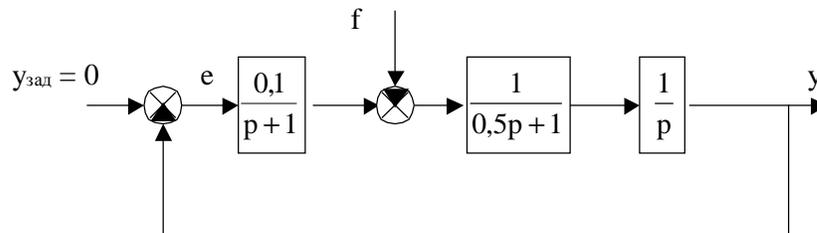


Рис. 1. Структурная схема САР

Известны характеристики сигнала: математическое ожидание, корреляционная функция и спектральная плотность. Они получены в результате выполнения предыдущего практического задания и сохранены в переменных:

$m_f$  - мат. ожидание входного воздействия

$R_f$  - корреляционная функция входного воздействия

$t_r$  - область определения  $R_f$

$dt$  - шаг по времени

$S_f$  - спектральная плотность входного воздействия

$w$  - область определения  $S_f$

Требуется определить характеристики выходного сигнала  $y$ .

1) Определим передаточную функцию системы по возмущению, весовую функцию и АЧХ

```
w1 = tf(.1,[1 1]);  
w2 = tf(1,[.5 1]);  
w3 = tf(1,[1 0]);  
W = feedback(w2*w3,w1); % ПФ системы по возмущению  
t = 0:dt:100;  
ww = impulse(W,t); % весовая функция системы  
[A,ph] = bode(W,w); A = A(:); % АЧХ системы
```

2) Определим математическое ожидание выходного сигнала

```
k = dcgain(W); % коэффициент передачи системы по возмущению  
my = mf*k
```

3) Найдем корреляционную функцию выходного сигнала, численно решив интегральные уравнения (2).

```
n = length(Rf);  
m = length(ww);  
x = zeros(n,1); % вспомогательная величина  
Ry = zeros(n,1);
```

% Нахождение  $x(\tau)$ :

```
for j = 1:n % цикл по  $\tau$   
    for i=1:m % цикл по  $\tau_1$   
        if (j+i) < n % участвуют только реальные данные  
            x(j) = x(j) + ww(i)*Rf(j+i)*dt;  
        end  
    end  
end
```

% Нахождение  $R_y(\tau)$ :

```
for j = 1:n % цикл по  $\tau$   
    for i=1:m % цикл по  $\tau_2$   
        if (j-i) > 0 % участвуют только реальные данные  
            Ry(j) = Ry(j) + ww(i)*x(j-i)*dt;  
        end  
    end  
end  
figure(1), plot(tr,Ry), grid % график  $R_y(\tau)$ 
```

3) Найдем спектральную плотность выходного сигнала через  $R_y(\tau)$ , численно решив интеграл (3):

```
Sy = zeros(1,ws);  
for j=1:ws  
    for i=1:size(Ry)  
        Sy(j) = Sy(j)+ Ry(i)*cos(w(j)*tr(i))*dt;  
    end  
end
```

4) Для проверки найдем спектральную плотность выходного сигнала через  $S_f(\omega)$  и  $A(\omega)$  и построим графики:

```
Sy1 = Sf.*A.*A;  
figure(2), plot(w,Sy,w, Sy1), grid
```

5) Определим дисперсию и среднеквадратическое отклонение выходного сигнала

```
Dy = 1/pi*trapz(w,Sy)  
dy = sqrt(Dy)
```

Результаты вычислений показаны на рис. 2,3.

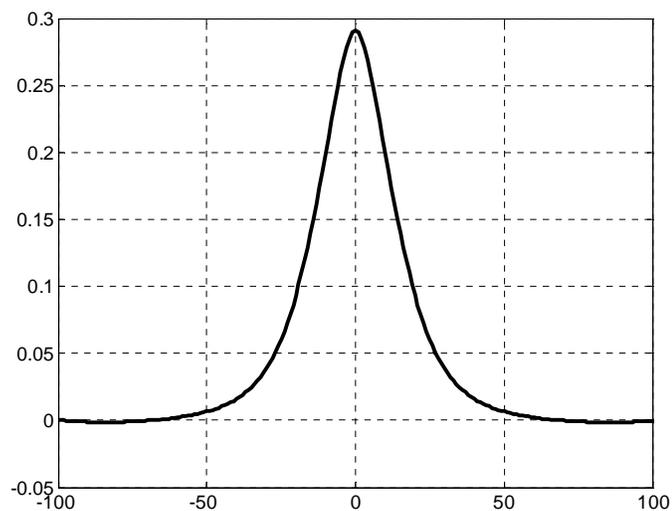


Рис. 2. Корреляционная функция  $R_y(\tau)$  (величина у центрирована)

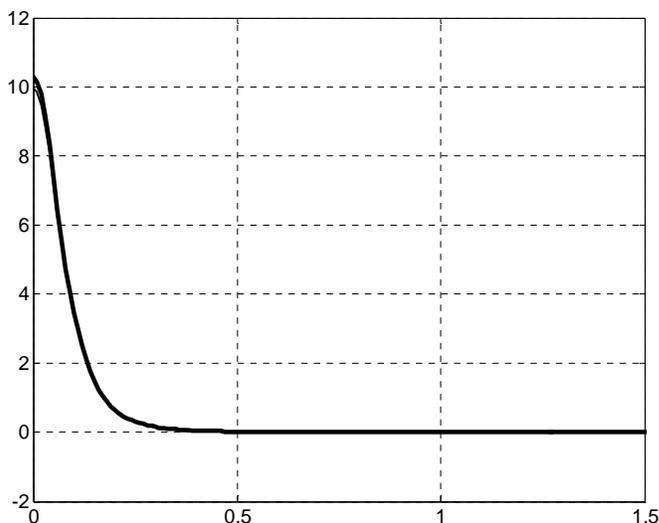


Рис. 3. Спектральные плотности  $S_y(\omega)$ , определенные через АЧХ системы (жирн.) и по корреляционной функции (тонк.)

Математическое ожидание выходного сигнала

$$m_y = 19.999.$$

Дисперсия выходного сигнала

$$D_y = 0.2906.$$

Среднеквадратическое отклонение

$$d_y = 0.5391.$$

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются характеристики случайного воздействия, полученные при выполнении практического задания №9 и структурная схема системы, включающая место приложения возмущения и параметры всех звеньев.

Студенты самостоятельно определяют математическое ожидание и дисперсию случайного сигнала на выходе системы, рассчитывают корреляционную функцию и спектральную плотность и строят соответствующие графики. Правильность расчета проверяется путем сравнения графиков спектральной плотности выходного сигнала, рассчитанных по корреляционной функции и через АЧХ системы. Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №5.

На занятии разбирается пример решения задачи. Для демонстрации используется видеопроектор.

**Практическое занятие №11. Определение косвенных частотных показателей качества (показателя колебательности, запасов устойчивости)**

В данной работе определяются косвенные частотные показатели качества системы, заданной на практическом занятии №2. Требуется определить показатель колебательности системы и ее запасы устойчивости.

**Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 4.2.3. [«Показатели качества переходных процессов»](#).

**Пример**

Определить значения частотного показателя колебательности, запасы устойчивости по фазе и амплитуде системы, структурная схема которой представлена на рис.1.

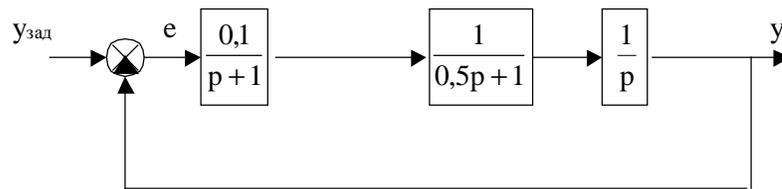


Рис. 1. Структурная схема САР

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{0,1}{p+1} \frac{1}{0,5p+1} \frac{1}{p} = \frac{0,1}{0,5p^3 + 1,5p^2 + p}. \quad (1)$$

АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{0,1}{0,5(j\omega)^3 + 1,5(j\omega)^2 + j\omega} = \frac{0,1}{-1,5\omega^2 + j\omega(1 - 0,5\omega^2)} = \frac{-0,15\omega^2}{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2} + j \frac{-0,1\omega(1 - 0,5\omega^2)}{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}. \quad (2)$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A_{\text{раз}}(\omega) = \frac{0,1}{\sqrt{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}}. \quad (3)$$

Найдем частоту среза разомкнутой системы из условия  $A_{\text{раз}}(\omega_{\text{ср}}) = 1$ :

$$\frac{0,1}{\sqrt{2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}} = 1, \quad (4)$$

откуда

$$2,25\omega^4 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2 = 0,01. \quad (5)$$

После преобразования из (5) получим

$$0,25\omega^6 + 1,25\omega^4 + \omega^2 - 0,01 = 0. \quad (6)$$

Решения данного уравнения:  $\omega = \pm 1.9992j, \pm 1.0066j, \pm 0.0994$ . Из всех решений выбираем  $\omega_{cp} = 0,0994$  как единственное вещественное неотрицательное.

Фазо-частотная характеристика разомкнутой системы

$$\varphi_{раз}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-0,1\omega(1 - 0,5\omega^2)}{-0,15\omega^2} \quad (7)$$

Анализируя выражение для АФЧХ (2), приходим к выводу, что на частоте среза вещественная и мнимая частотные характеристики отрицательны, поэтому

$$-\pi/2 < \varphi_{раз}(\omega_{cp}) < -\pi. \quad (8)$$

Если функция  $\operatorname{arctg}$  возвращает результат в диапазоне от 0 до  $\pi$ , то с учетом установленного выше формулу (8) следует применить следующим образом:

$$\varphi_{раз}(\omega_{cp}) = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{0,1\omega_{cp}(1 - 0,5\omega_{cp}^2)}{0,15\omega_{cp}^2}. \quad (9)$$

Тогда запас устойчивости по фазе

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi_{раз}(\omega_{cp}) = \operatorname{arctg} \frac{0,1\omega_{cp}(1 - 0,5\omega_{cp}^2)}{0,15\omega_{cp}^2}. \quad (10)$$

Подставив  $\omega_{cp} = 0,0994$  в (10) найдем  $\Delta\varphi = 81,4782^\circ$ .

Для нахождения запаса по амплитуде определим точку пересечения АФЧХ с отрицательной вещественной полуосью. В этой точке мнимая частотная характеристика принимает нулевое значение. Из (2) непосредственно видно, что это возможно только на частоте  $\omega_1 = \sqrt{2}$ . Подставляя данную частоту в (3) получим

$$A_{раз}(\omega_1) = \frac{0,1}{1,5\omega_1^2} = 0,0333. \quad (11)$$

Запас устойчивости по амплитуде равен

$$\Delta A = 1 - A_{раз}(\omega_1) = 1 - 0,0333 = 0,9667. \quad (12)$$

Для определения частотного показателя колебательности, найдем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{0,1}{0,5p^3 + 1,5p^2 + p + 0,1}. \quad (13)$$

АФЧХ системы

$$W(j\omega) = \frac{0,1}{0,5(j\omega)^3 + 1,5(j\omega)^2 + j\omega + 0,1} = \frac{0,1}{-1,5\omega^2 + 0,1 + j\omega(1 - 0,5\omega^2)}. \quad (14)$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{0,1}{\sqrt{(-1,5\omega^2 + 0,1)^2 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2}}. \quad (15)$$

Максимум АЧХ соответствует минимуму подкоренного выражения:

$$f(\omega) = (-1,5\omega^2 + 0,1)^2 + \omega^2(1 - 0,5\omega^2)^2 = \\ = 0,25\omega^6 + 1,25\omega^4 + 0,7\omega^2 + 0,01 \rightarrow \min. \quad (16)$$

Условие минимума:

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} = 0,25\omega^6 + 1,25\omega^4 + 0,7\omega^2 + 0,01 = 1,5\omega^5 + 5\omega^3 + 1,4\omega = 0. \quad (17)$$

Поскольку максимум АЧХ ищется на частотах, больших нуля, его условием будет

$$1,5\omega^4 + 5\omega^2 + 1,4 = 0. \quad (18)$$

Сделаем замену переменной  $\omega^2 = \varpi$ , тогда

$$1,5\varpi^2 + 5\varpi + 1,4 = 0. \quad (19)$$

Решения квадратного уравнения:  $\varpi = -3,0248, -0,3086$ . Поскольку оба решения отрицательны, делаем вывод, что при  $\omega > 0$  АЧХ системы максимума не имеет. Следовательно, частотный показатель колебательности равен единице.

### ***Практическое занятие №12. Определение корневых показателей колебательности и расчет коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели***

Работа посвящена определению корневых показателей колебательности и расчету коэффициентов передачи, обеспечивающих требуемые показатели

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 4.2.3. [«Показатели качества переходных процессов»](#).

#### **Пример 1**

Характеристический полином замкнутой системы

$$D(p) = p^2 + 3p + 2. \quad (1)$$

Определить степень устойчивости системы  $\eta$ .

Сделаем в полиноме замену  $p = q - \eta$ :

$$D(q) = (q - \eta)^2 + 3(q - \eta) + 2, \quad (2)$$

откуда после простейших преобразований получим

$$D(q) = q^2 + (3 - 2\eta)q + \eta^2 - 3\eta + 2. \quad (3)$$

Применяя критерий Гурвица, определим такое  $\eta$ , чтобы система оказалась на границе устойчивости. Эта величина и будет искомой степенью устойчивости.

Определитель Гурвица и условие нахождения системы на границе устойчивости:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-2\eta & 0 \\ 1 & \eta^2 - 3\eta + 2 \end{vmatrix} = (3-2\eta)(\eta^2 - 3\eta + 2) = 0. \quad (4)$$

Решения уравнения (4):  $\eta = 1, 1,5, 2$ . Исходя из определения степени устойчивости, выбираем наименьшее значение и окончательно получаем значение  $\eta = 1$ .

### Пример 2

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k}{p^2 + 3p + 1}. \quad (5)$$

Определить коэффициент передачи  $k$ , обеспечивающий степень устойчивости замкнутой системы  $\eta = 1$ .

Передаточная функция замкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p^2 + 3p + 1 + k}. \quad (6)$$

Произведем в характеристическом полиноме замену  $p = q - \eta = q - 1$ :

$$D(q) = (q-1)^2 + 3(q-1) + 1 + k = q^2 + q - 1 + k. \quad (7)$$

Для нахождения  $k$  составим определитель Гурвица и приравняем его к нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 + k \end{vmatrix} = -1 + k = 0, \quad (8)$$

откуда искомое значение  $k=1$ .

### Пример 3

Определить с помощью критерия Михайлова показатель колебательности  $m$  САР с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2}. \quad (9)$$

Запишем выражение для частотной характеристики Михайлова, заменив в характеристическом полиноме системы оператор  $p$  на  $(j-m)\omega$ :

$$D((j-m)\omega) = (j-m)^2 \omega^2 + 2(j-m)\omega + 2. \quad (10)$$

После преобразований получим

$$D((j-m)\omega) = (m^2 - 1)\omega^2 - 2m\omega + 2 + j(-2m\omega^2 + 2\omega). \quad (11)$$

Условиями нахождения системы на границе устойчивости будут

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D((j-m)\omega)] = (m^2 - 1)\omega^2 - 2m\omega + 2 = 0; \\ \operatorname{Im}[D((j-m)\omega)] = -2m\omega^2 + 2\omega = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из второго уравнения системы (12) найдем  $\omega = 1/m$  (решение  $\omega = 0$  нас не интересует). Подставив данное соотношение в первое уравнение, получим:

$$-\frac{1}{m^2} + 1 = 0, \quad (13)$$

откуда  $m = 1$ .

#### **Пример 4**

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k}{p^2 + 2p + 1}. \quad (14)$$

Применяя критерий Найквиста определить коэффициент усиления  $k$  такой, чтобы показатель колебательности  $m$  был равен единице.

Расширенная АФЧХ разомкнутой системы:

$$W_{\text{раз}}((j-m)\omega) = \frac{k}{(j-m)^2\omega^2 + 2(j-m)\omega + 1} = \frac{k}{(j-1)^2\omega^2 + 2(j-1)\omega + 1}. \quad (15)$$

Проведя необходимые преобразования, получим

$$W_{\text{раз}}((j-m)\omega) = \frac{k(1-2\omega)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2} + j \frac{-2k(\omega-\omega^2)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2}. \quad (16)$$

Определим  $k$  из условий

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[W_{\text{раз}}((j-m)\omega)] = \frac{k(1-2\omega)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2} = -1; \\ \operatorname{Im}[W_{\text{раз}}((j-m)\omega)] = \frac{-2k(\omega-\omega^2)}{(1-2\omega)^2 + 4(\omega-\omega^2)^2} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из второго уравнения системы (17) найдем  $\omega = 1$  (решение  $\omega = 0$  нас не интересует). Подставив это значение в первое уравнение, получим  $k = 1$ .

#### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются передаточная функция разомкнутой системы второго порядка, и заданные значения степени устойчивости и показателя колебательности системы, которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбираются примеры решений задач.

#### ***Практическое занятие №13. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза***

В работе рассчитываются параметры регуляторов, построенных по принципу динамической компенсации и с помощью уравнений синтеза.

### Теоретические сведения

Рассмотрим примеры расчета регуляторов для объекта с передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{1}{A(p)} = \frac{1}{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p}. \quad (1)$$

Требуется определить передаточную функцию регулятора такую, чтобы обеспечить распределение полюсов замкнутой системы по Баттерворту с  $\omega_0 = 1$ .

#### Пример 1. Расчет регулятора методом динамической компенсации

Согласно методу динамической компенсации передаточная функция регулятора имеет вид:

$$W_p(p) = W_o^{-1}(p) W_{\text{раз,эт}}(p), \quad (2)$$

где  $W_{\text{раз,эт}}(p)$  – эталонная передаточная функция разомкнутой системы, которая определяется через эталонную передаточную функцию  $W_{\text{эт}}(p)$  замкнутой системы:

$$W_{\text{раз,эт}}(p) = \frac{W_{\text{эт}}(p)}{1 - W_{\text{эт}}(p)}. \quad (3)$$

Передаточная функция  $W_{\text{эт}}(p)$  имеет тот же порядок, что и объект и обладает заданным распределением полюсов. Идеальный низкочастотный фильтр Баттерворта третьего порядка описывается передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3}. \quad (4)$$

Таким образом, получим

$$W_{\text{эт}}(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), найдем

$$W_{\text{раз,эт}}(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p}. \quad (4)$$

и, далее, по (2) определим передаточную функцию регулятора

$$W_p(p) = \frac{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p}{p^3 + 2p^2 + 2p} = \frac{p^2 + 1,5p + 0,5}{p^2 + 2p + 2}. \quad (5)$$

#### Пример 2. Расчет регулятора с помощью уравнений синтеза

Передаточная функция регулятора, рассчитываемого с помощью уравнений синтеза, имеет такой же порядок, как и передаточная функция объекта, причем порядок числителя на единицу меньше порядка знаменателя:

$$W_p(p) = \frac{r_2 p^2 + r_1 p + r_0}{p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0} = \frac{R(p)}{C(p)}. \quad (6)$$

Необходимо найти такие коэффициенты  $r_0, r_1, r_2, c_0, c_1, c_2$ , чтобы обеспечить заданное распределение корней характеристического полинома замкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы:

$$D(p) = C(p)A(p) + R(p) = [p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0] \times [p^3 + 1,5p^2 + 0,5p] + r_2p^2 + r_1p + r_0. \quad (7)$$

После преобразований получим

$$D(p) = p^6 + (1,5 + c_2)p^5 + (0,5 + 1,5c_2 + c_1)p^4 + (0,5c_2 + 1,5c_1 + c_0)p^3 + (0,5c_1 + 1,5c_0 + r_2)p^2 + (0,5c_0 + r_1)p + r_0. \quad (8)$$

Эталонный полином шестого порядка с распределением корней по Баттерворту имеет вид:

$$D_3(p) = p^6 + 3,86\omega_0p^5 + 7,46\omega_0^2p^4 + 9,14\omega_0^3p^3 + 7,46\omega_0^4p^2 + 3,86\omega_0^5p + \omega_0^6. \quad (9)$$

При  $\omega_0 = 1$  имеем

$$D_3(p) = p^6 + 3,86p^5 + 7,46p^4 + 9,14p^3 + 7,46p^2 + 3,86p + 1. \quad (10)$$

Сравнив (8) и (10), найдем коэффициенты регулятора  $c_2 = 2,36, c_1 = 3,42, c_0 = 2,83, r_2 = 1,51, r_1 = 2,45, r_0 = 1$ .

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, и требования к эталонной передаточной функции (распределение полюсов, среднегеометрический полюс), которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбираются примеры решений задач.

### *Практическое занятие №14. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по переменным состояниям объекта*

В работе рассчитывается регулятор в виде обратных связей по координатам состояния для объекта третьего порядка.

#### Теоретические сведения

Теоретические сведения по теме работы приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Системы автоматического управления. Лабораторный практикум»](#), в п. [3.1. «Модальное управление»](#)

#### Пример

Определить параметры регулятора для системы, структурная схема которой приведена на рис. 1, таким образом, чтобы обеспечить распределение полюсов системы по Баттерворту ( $\omega_0 = 1$ ) и коэффициент передачи, равный единице. Все переменные состояния объекта измеряемы.

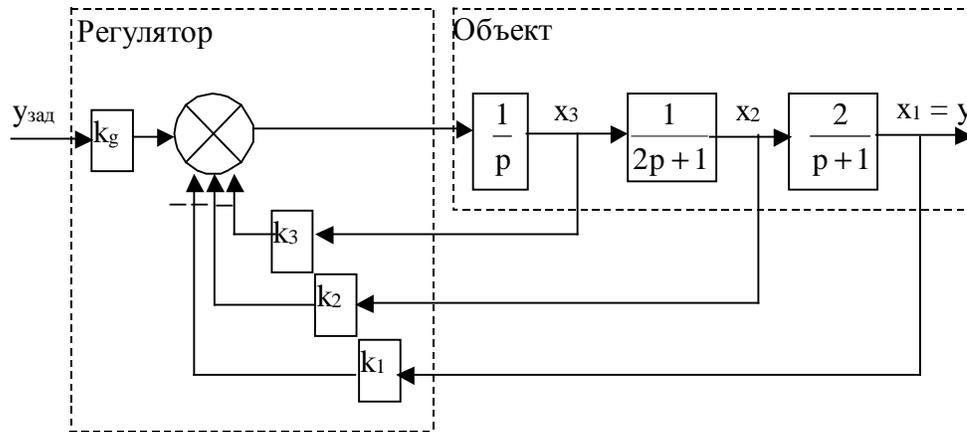


Рис.1. Структурная схема системы управления

Передаточная функция системы, удовлетворяющая требованиям задания, имеет вид:

$$W(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}. \quad (1)$$

Уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1; \\ \dot{x}_2 = 0,5x_3 - 0,5x_2; \\ \dot{x}_3 = k_g u_{\text{зад}} - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{cases} \quad (2)$$

$$y = x_1.$$

Матрицы описания:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_g \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0), \quad D = 0. \quad (3)$$

Характеристический полином системы:

$$\begin{aligned} \det(pE - A) &= \det \begin{pmatrix} p+1 & -2 & 0 \\ 0 & p+0,5 & -0,5 \\ k_1 & k_2 & p+k_3 \end{pmatrix} = \\ &= (p+1)(p+0,5)(p+k_3) + k_1 + 0,5k_2(p+1) = \\ &= p^3 + (1,5+k_3)p^2 + (0,5+0,5k_2+1,5k_3)p + k_1 + 0,5k_2 + 0,5k_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенство полинома заданному обеспечивают следующие коэффициенты:  $k_3 = 0,5$ ,  $k_2 = 1,5$ ,  $k_1 = 0$ .

Числитель передаточной функции системы

$$\text{num}(p) = C(pE + A)^+ B. \quad (5)$$

Найдем присоединенную матрицу  $(pE - A)^+$ :

$$(pE - A)^T = \begin{pmatrix} p+1 & 0 & k_1 \\ -2 & p+0,5 & k_2 \\ 0 & -0,5 & p+k_3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$(pE - A)^+ = \begin{pmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}. \quad (7)$$

где знаком «×» помечены элементы, которые нас не интересуют с учетом структур матриц В и С.

Подставляя (7) в (5) получим

$$\text{num}(p) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k_g \end{pmatrix} = k_g. \quad (8)$$

Таким образом, требуемый коэффициент числителя достигается выбором  $k_g = 1$ .

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, и требования к эталонной передаточной функции (распределение полюсов, среднегеометрический полюс), которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту. В качестве варианта студентам может быть предложено рассчитать систему модального регулирования скорости электропривода постоянного тока, включающую преобразователь напряжения и ДПТ с независимым возбуждением. Переменные состояния, по которым заводятся обратные связи регулятора: напряжение на выходе преобразователя, ток якоря двигателя и его угловая скорость. Исходные данные приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#).

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбирается пример решения задачи.

### ***Практическое занятие №15. Расчет системы модального управления со стационарным наблюдателем***

В работе рассчитывается стационарный наблюдатель состояния для объекта третьего порядка, заданного на практическом занятии №14.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Системы автоматического управления. Лабораторный практикум»](#), в п. [3.2. «Стационарный наблюдатель»](#)

## Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, полученные на практическом занятии №14, а также коэффициенты обратных связей регулятора, рассчитанные в ходе выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №14, которые и будут являться коэффициентами модального регулятора.

Кроме того, для всех вариантов задаются единые требования к скорости процесса идентификации: характеристический полином процесса  $\det(pE - A + GC)$  должен иметь биномиальное распределение корней и среднегеометрический полюс, вдвое превышающий таковой для характеристического полинома системы регулирования  $\det(pE - A + BK)$ .

Требуется рассчитать вектор настроек наблюдателя  $G$  и построить полную структурную схему (схему модели) системы модального управления со стационарным наблюдателем.

В качестве варианта студентам может быть предложено рассчитать стационарный наблюдатель для системы модального регулирования скорости электропривода постоянного тока, включающую преобразователь напряжения и ДПТ с независимым возбуждением. (В данной работе мы исходим из предположения, что переменные состояния объекта – напряжение на выходе преобразователя, ток якоря двигателя – не измеряются). Исходные данные приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#).

По результатам выполнения самостоятельного задания студент предоставляет отчет.

На занятии разбирается пример решения задачи.

### *Практическое занятие №16. Расчет последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ*

В работе рассчитывается последовательное корректирующее устройство с помощью ЛАЧХ для объекта третьего порядка.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 5.3. [«Расчет корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик»](#).

#### **Пример**

Для объекта с передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{1}{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p}. \quad (1)$$

с помощью ЛАЧХ рассчитать последовательное корректирующее устройство, такое, чтобы замкнутая система обладала следующими показателями:

- 1) отсутствие статической ошибки по задающему воздействию;

2) ошибка при задании, изменяющемся со скоростью 1 ед/сек не более 0,1 ед.;

3) время регулирования не более 4 сек.;

4) перерегулирование не более 20%.

При расчете воспользоваться в качестве эталонной типовой ЛАЧХ (рис.1) системы третьего порядка с передаточной функцией

$$W_{\text{раз,эт}}(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}. \quad (2)$$

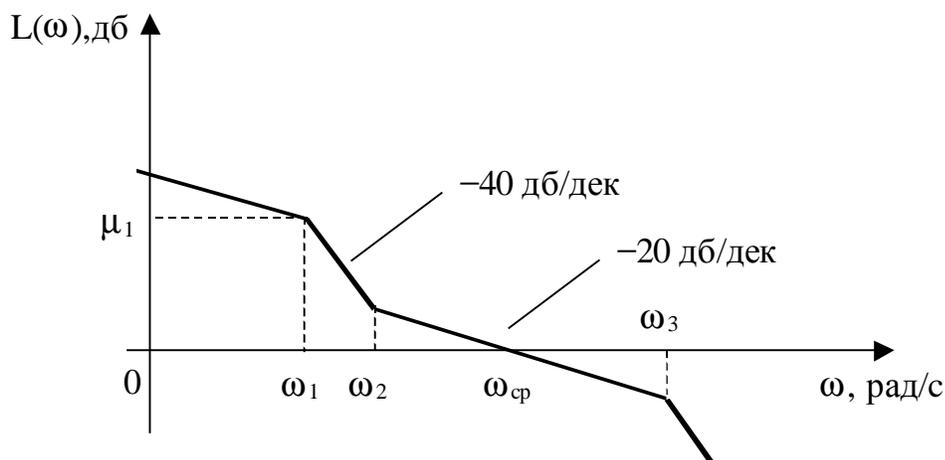


Рис.1. Типовая ЛАЧХ

1. Определим параметры типовой ЛАЧХ исходя из требований к системе.

Типовая ЛАЧХ соответствует системе с астатизмом первого порядка, следовательно, первое требование к синтезируемой системе удовлетворяется автоматически.

Для выполнения второго требования определим отношение между параметрами  $\omega_1$  и  $\mu_1$ . Эти параметры задают уровень низкочастотной асимптоты ЛАЧХ, которая определяется входящим (неявно) в структуру системы интегрирующим звеном с передаточной функцией

$$W_{\text{и}}(p) = \frac{k'_{\text{раз}}}{p}, \quad (3)$$

где  $k'_{\text{раз}}$  – коэффициент передачи системы с передаточной функцией  $p \times W_{\text{раз}}(p)$ .

ЛАЧХ этого звена

$$L_{\text{и}}(\omega) = 20 \lg k'_{\text{раз}} - 20 \lg \omega. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\mu_1 = 20 \lg k'_{\text{раз}} - 20 \lg \omega_1. \quad (5)$$

Величина  $k'_{\text{раз}}$  находится из требований к точности системы в стационарном динамическом режиме:

$$k'_{\text{раз}} = \frac{\nu}{e} = \frac{1}{0,1} = 10, \quad (6)$$

где  $\nu$  – скорость изменения задающего сигнала,  $e$  – установившееся значение ошибки регулирования при данной скорости.

Подставляя (6) в (5), получим

$$\mu_1 = 20 - 20 \lg \omega_1. \quad (7)$$

График зависимости  $\mu_1(\omega_1)$  приведен на рис.2

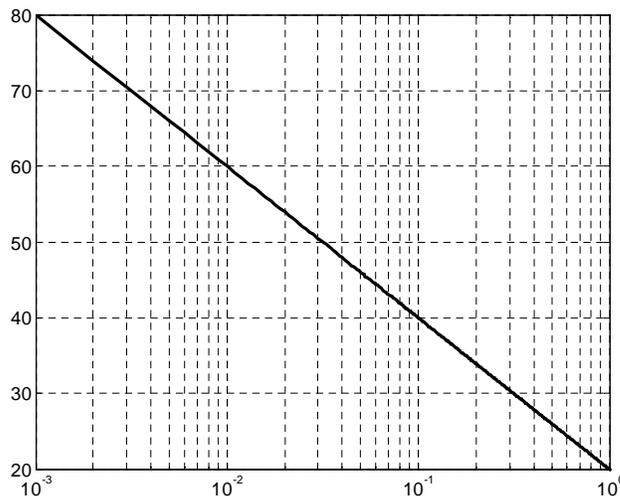


Рис.2. График зависимости  $\mu_1(\omega_1)$

Исходя из требования к быстродействию системы определим желаемую частоту среза:

$$\omega_{\text{ср}} = (1 \div 2) \frac{2\pi}{t_p} = 1,57 \dots 3,14 \text{ рад/сек.} \quad (8)$$

Примем  $\omega_{\text{ср}} = 2$  рад/сек.

Далее будем искать на номограммах такое отношение  $\omega_1/\omega_{\text{ср}}$ , чтобы для  $\mu_1$ , определенного по графику, кривая при данном отношении была не выше уровня перерегулирования 20%.

В результате на номограммах для  $\omega_3/\omega_{\text{ср}} = 4$  найдем точку (см. рис.3) со следующими параметрами:  $\omega_1/\omega_{\text{ср}} = 0,05$ ,  $\omega_1 = 0,1$  рад/сек,  $\mu_1 = 40$  дБ, перерегулирование  $\sigma \approx 15\%$ .

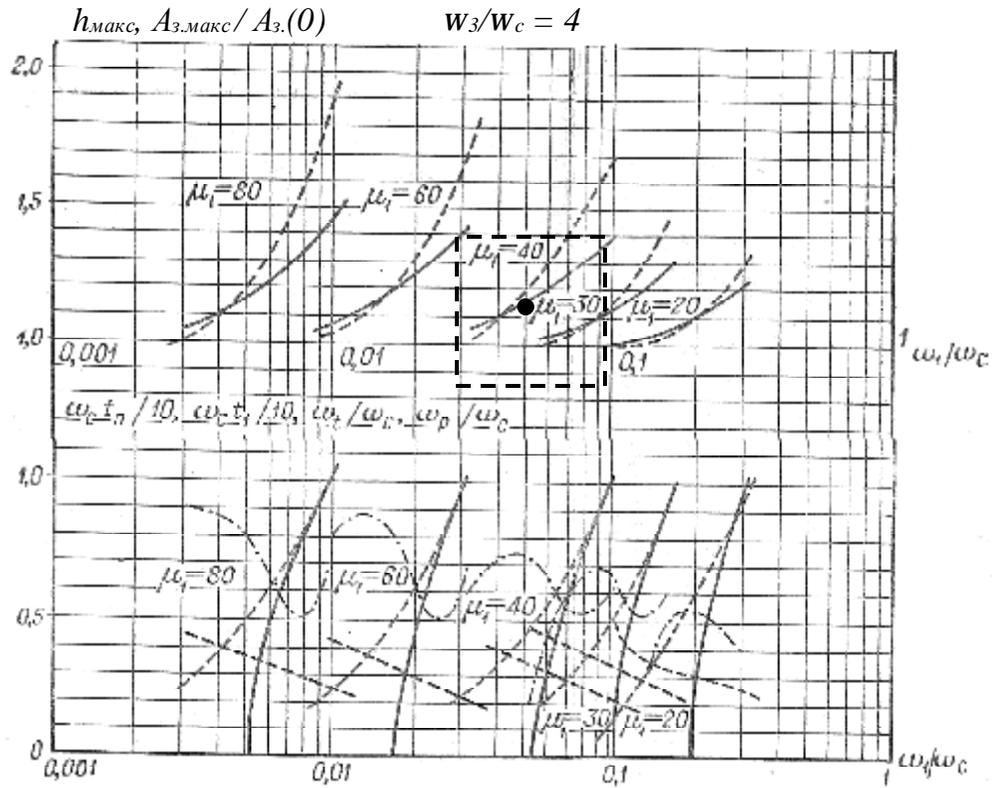


Рис. 3. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = 4$ ).

Частоту  $\omega_2 = 1/T_2$  определим через  $\mu_1$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_c$ :

$$\omega_2 = 10^{\left[ \frac{\mu_1 + \lg \frac{\omega_1^2}{\omega_c}}{20} \right]} = 10^{\left[ \frac{2 + \lg \frac{0,01}{2}}{2} \right]} = 0,5 \text{ рад/сек.} \quad (9)$$

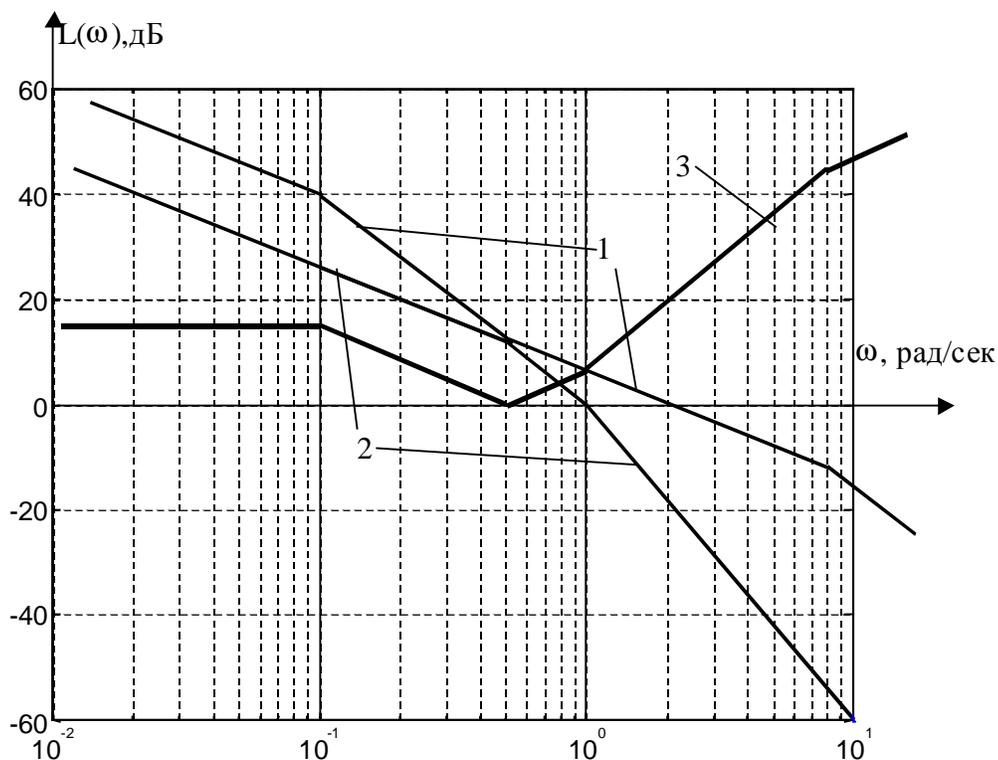
По найденным параметрам типовой ЛАЧХ восстановим эталонную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_{\text{раз,эт}}(p) = \frac{10(2p+1)}{p(10p+1)(0,125p+1)}. \quad (10)$$

2. Построим эталонную ЛАЧХ и ЛАЧХ объекта (рис.4.).

Для построения ЛАЧХ объекта разложим его передаточную функцию на произведение передаточных функций типовых звеньев:

$$W_o(p) = \frac{1}{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p} = \frac{2}{p} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{1}{p+1}. \quad (11)$$



1 – эталонная ЛАЧХ, 2 – ЛАЧХ объекта,  
3 – ЛАЧХ корректирующего устройства

Рис. 4. Определение ЛАЧХ корректирующего устройства

3. Определим структуру и параметры корректирующего устройства.

Для этого, вычитая из эталонной ЛАЧХ ЛАЧХ объекта, найдем ЛАЧХ корректирующего устройства и по ней восстановим его передаточную функцию:

$$W_{\text{ку}}(p) = \frac{k_{\text{ку}}(T_{\text{ку}2}p + 1)^2(T_{\text{ку}3}p + 1)}{(T_{\text{ку}1}p + 1)(T_{\text{ку}4}p + 1)}. \quad (12)$$

Коэффициент передачи корректирующего устройства определяется как отношение  $k'_{\text{раз}}$  к коэффициенту передачи, определенному по передаточной функции  $p \times W_o(p)$ .

$$k_{\text{ку}} = \frac{k'_{\text{раз}}}{\lim_{p \rightarrow 0} [pW_o(p)]} = \frac{10}{2} = 5. \quad (13)$$

Постоянные времени корректирующего устройства найдем как величины, обратные частотам сопряжения асимптот ее ЛАЧХ. Получим:

$$W_{\text{ку}}(p) = \frac{5(2p + 1)^2(p + 1)}{(10p + 1)(0,125p + 1)}. \quad (14)$$

Передаточная функция (14) физически нереализуема, так как порядок ее числителя больше порядка знаменателя. Для устранения этого недостатка

введем в структуру устройства дополнительное (балластное) апериодическое звено с малой постоянной времени (которое будет выполнять также полезную функцию фильтра низких частот). Окончательно получим

$$W_{\text{ку}}(p) = \frac{5(2p+1)^2(p+1)}{(10p+1)(0,125p+1)(0,1p+1)}. \quad (15)$$

### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции звеньев объекта регулирования, и требования к качеству синтезируемой системы, которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

Отчет о выполнении выполнения самостоятельного задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 8.

На занятии разбирается примере решения задачи.

### ***Практическое занятие №17. Расчет устройства компенсации возмущения в комбинированной системе управления***

Целью работы является освоение методики расчета комбинированных автоматических систем регулирования (АСР) при известных динамических характеристиках.

#### **Теоретические сведения**

При автоматизации технологического объекта управления (ТОУ) возможны случаи, когда одноконтурные АСР не обеспечивают удовлетворительного качества регулирования ни при каких настройках регулятора. Одной из причин низкого качества регулирования является воздействие на ТОУ существенных возмущений. Если имеется возможность автоматического измерения наиболее «сильного» возмущающего воздействие на ТОУ, то применяется комбинированная АСР. Действие контролируемого возмущения компенсируется специальным устройством, компенсатором, а с помощью регулятора, находящегося в контуре обратной связи, устраняется действие других (не контролируемых) возмущений. Таким образом, регулирующее воздействие формируется на основании двух принципов регулирования: по отклонению регулируемой переменной от заданного значения и по возмущению. Компенсация возмущений осуществляется путем введения дополнительного управляющего воздействия либо на вход канала регулирования ТОУ (рис. 1а), либо непосредственно на вход регулятора (рис. 2а).

Основой расчета комбинированных систем регулирования является принцип инвариантности. Применительно к рассматриваемым системам этот принцип можно сформулировать следующим образом: отклонение выходной координаты ТОУ  $y(t)$  под действием возмущения  $x(t)$  должно быть тождественно равно нулю:

$$\Delta y(t, x) = y(t) - y_0(t) \equiv 0. \quad (1)$$

Переходя к изображениям по Лапласу  $x(p)$  и  $y(p)$  сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ , условие (1) при  $y_0(t) = 0$  можно преобразовать к виду:

$$y(p) \equiv 0. \quad (2)$$

Равенство (2) используется для вывода передаточной функции компенсатора  $R_k(p)$  при заданных по каналам возмущения  $W_x(p)$  и регулирования  $W_u(p)$  характеристиках объекта. Для случая, когда сигнал от компенсатора подается на вход объекта (см. рис. 1а.), структурная схема комбинированной АСР преобразуется к последовательному соединению разомкнутой системы 1 и замкнутого контура 2 (см. рис. 1б.), передаточные функции которых соответственно равны:

$$W_{pc}^{(1)}(p) = W_x(p) + R_k(p) \cdot W_u(p) \quad (3)$$

и

$$W_{zc} = \frac{1}{1 - W_u(p)R(p)}. \quad (4)$$

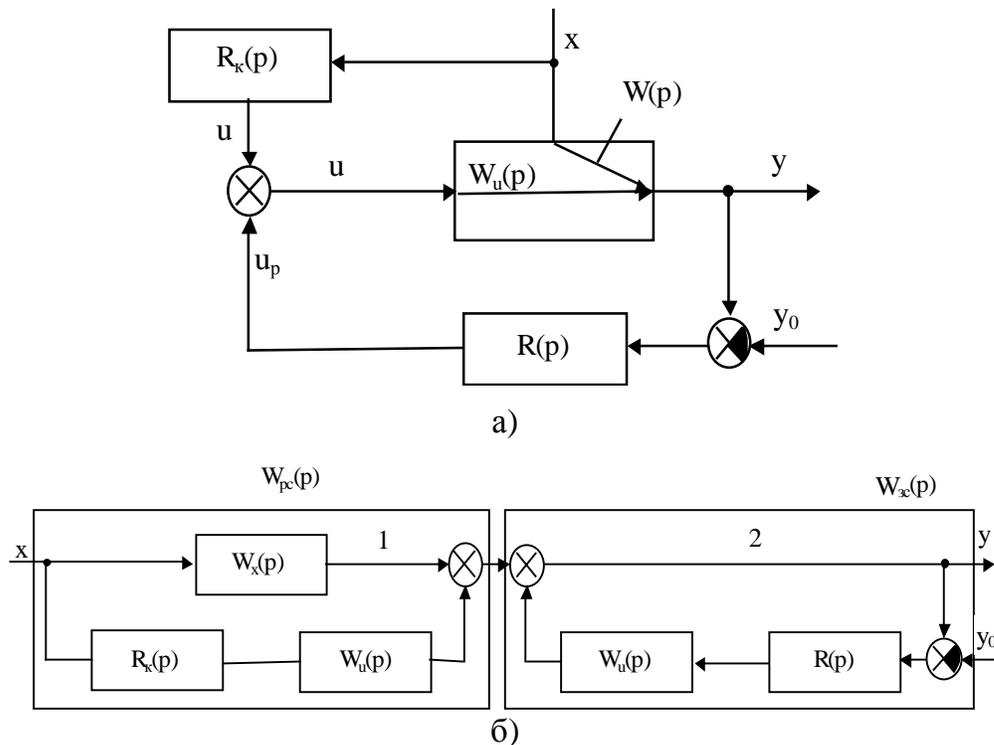


Рис. 1. Структурные схемы комбинированной АСР при подаче компенсирующего сигнала на вход объекта:  
а)- исходная; б)- преобразованная  
(1-разомкнутая система; 2-замкнутая АСР).

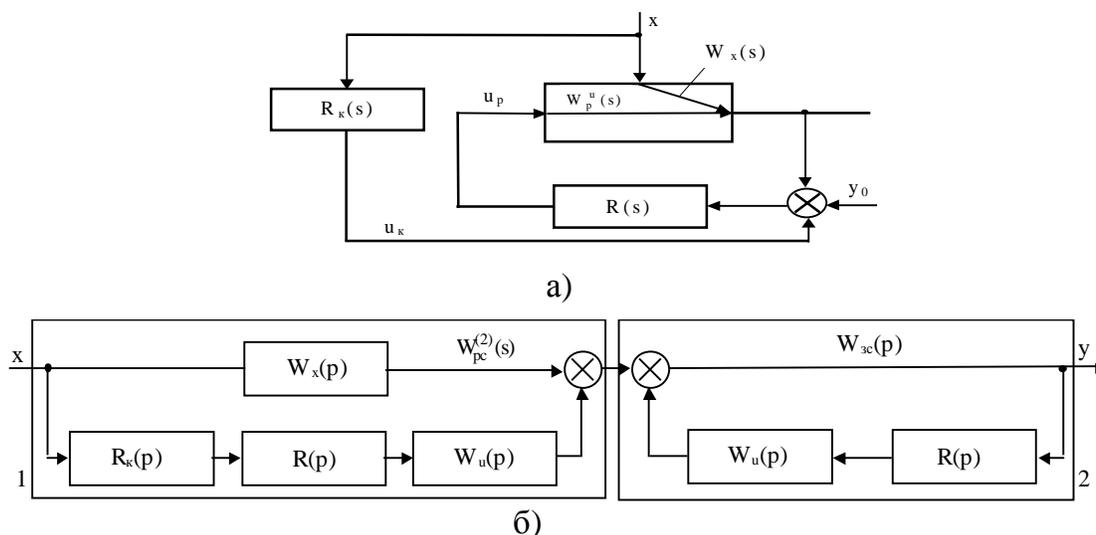


Рис. 2. Структурные схемы комбинированной АСР при подаче компенсирующего сигнала на вход регулятора:  
а)- исходная; б)- преобразованная  
(1-разомкнутая система; 2-замкнутая АСР).

При этом передаточная функция комбинированной АСР равна

$$W_{kc}^{(1)}(p) = W_{pc}^{(1)} \cdot W_{zc}(p) \quad (5)$$

и

$$y(p) = x(p) \cdot W_{kc}^{(1)}(p). \quad (6)$$

Подстановка выражений (5) и (6) в условие инвариантности (2) приводит к следующим соотношениям:

$$x(p) \cdot W_{pc}^{(1)} \cdot (p) \cdot W_{zc}(p) = 0. \quad (7)$$

Если  $x(p) \neq 0$  и  $W_{zc}(p) \neq 0$ , то получаем условие инвариантности в виде:

$$W_x(p) + R_k(p) \cdot W_u(p) = 0, \quad (8)$$

откуда

$$R_k(p) = -\frac{W_x(p)}{W_u(p)}. \quad (9)$$

При использовании комбинированной АСР второго типа (см. рис. 2а) аналогичный вывод условия инвариантности приводит к соотношениям вида (рис. 2б):

$$y(p) = x(p) \cdot W_{kc}^{(2)}(p), \quad (10)$$

где

$$W_{kc}^{(2)}(p) = W_{pc}^{(2)}(p) \cdot W_{zc}(p) \quad (11)$$

и

$$W_{pc}^{(2)}(p) = W_x(p) + R_k(p) \cdot R(p) \cdot W_u(p). \quad (12)$$

С учетом условий (2) и (9) имеем

$$x(p) \cdot W_{pc}^{(2)}(p) \cdot W_{zc}(p) = 0, \quad (13)$$

следовательно, если  $x(p) \neq 0$  и  $W_{zc}(p) \neq 0$ , то  $W_{pc}^{(2)}(p) = 0$ , откуда

$$R_k(p) = -\frac{W_x(p)}{W_u(p) \cdot R(p)}. \quad (14)$$

Знак минус в формулах (9) и (14) означает, что компенсирующий сигнал должен иметь знак, противоположный знаку возмущения. Одной из основных трудностей построения инвариантных систем регулирования является проблема их физической реализуемости. Можно указать два условия физической реализуемости компенсаторов:

1. Компенсатор не должен содержать звена с отрицательным чистым запаздыванием, т.е. время чистого запаздывания по каналу регулирования  $\tau_u$  должно быть меньше, чем время запаздывания по каналу возмущения  $\tau_x$ . Тогда, с учетом (9) или (14)

$$\tau_k = \tau_x - \tau_u > 0. \quad (15)$$

2. Компенсатор не должен содержать идеальные дифференцирующие звенья, т.е. в передаточной функции компенсатора степень  $m_k$  полинома в числителе не должна превышать степени  $n_k$  полинома в знаменателе. Например, если канал возмущения представляет собой апериодическое звено 1-го порядка, а канал регулирования - апериодическое звено 2-го порядка, то компенсатор окажется физически нереализуемым, так как если

$$W_x(p) = \frac{k_x}{Tp + 1} \quad (16)$$

и

$$W_u(p) = \frac{k_u}{(T_1p + 1) \cdot (T_2p + 1)}, \quad (17)$$

то

$$R_k(p) = -\frac{k_x \cdot (T_1p + 1) \cdot (T_2p + 1)}{k_u \cdot (Tp + 1)}, \quad (18)$$

т.е.  $m_k = 2$ ,  $n_k = 1$ .

При практической реализации разомкнутых и комбинированных АСР обычно добиваются приближенной инвариантности системы в определенном диапазоне частот. При этом реальный компенсатор выбирается из числа наиболее легко реализуемых динамических звеньев, параметры которых рассчитываются из условия близости частотных характеристик идеального  $R_k(i\omega)$  и реального  $\tilde{R}_k(i\omega)$  компенсаторов в заданном диапазоне частот, т.е.

$$R_k(i\omega) \approx \tilde{R}_k(i\omega), \quad \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}. \quad (19)$$

При такой постановке задачи условие приближенной инвариантности имеет вид:

$$|y(i\omega)| = 0, \quad \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}, \quad (20)$$

где

$$|y(i\omega)| = |x(i\omega)| \cdot |W_{kc}(i\omega)|^2. \quad (21)$$

Обычно выбирают такой тип компенсатора и с такими параметрами, при которых удовлетворяются следующие условия:

$$W_k(i \cdot 0) - W_k^p(i \cdot 0) = 0,$$

$$W_k(i \cdot \omega_p) - W_k^p(i \cdot \omega_p) \rightarrow \min_{a,b}$$

или

$$W_k(i \cdot 0) - W_k^p(i \cdot 0) \rightarrow \min_{a,b},$$

$$W_k(i \cdot \omega_p) - W_k^p(i \cdot \omega_p) = 0,$$

где  $W_k(i \cdot \omega)$ ,  $W_k^p(i \cdot \omega)$  - амплитудно-фазовая характеристика соответственно идеального и реального компенсатора;  $a$ ,  $b$  - векторы параметров выбранного типа реального компенсатора.

Условия (22) и (23), (24) и (25) выражают максимально возможное приближение АФХ идеального и реального компенсаторов на частоте  $\omega = 0$  и на резонансной (рабочей) частоте  $\omega = \omega_p$ . При этом компенсация возмущения на нулевой частоте обеспечивает инвариантность системы в установившихся статических режимах, если  $W_{zc}(i\omega) \neq 0$  при  $\omega = 0$  (например, при использовании ПИ-регулятора) или повышает качество регулирования при ступенчатых возмущениях, когда  $|x(i \cdot 0)| = \infty$  при  $\omega = 0$ . Диапазон  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  зависит от частотного спектра сигнала возмущения  $|x(i \cdot \omega)|$  и частотных характеристик системы. Комбинированную АСР можно рассматривать, как двухступенчатый фильтр для сигнала возмущения, состоящий из разомкнутой системы и замкнутого контура.

Для практической реализации астатических компенсирующих и развязывающих устройств в качестве реальных часто используют реальные дифференцирующие звенья:

$$W_k^p = \frac{T_{\partial p}}{T_p + 1}. \quad (26)$$

Для практической реализации статических компенсирующих устройств в качестве реальных часто используют интегро - дифференцирующие звенья:

$$W_k^p = k \frac{T_{\epsilon p} + 1}{T_p + 1}. \quad (27)$$

*Расчёт оптимальных параметров компенсирующих устройств.*

*1. Устройством является реальное дифференцирующее звено.*

Рассмотрим в качестве реального компенсатора звено с передаточной функцией (26). Возможные случаи положения вектора  $W_k(i \cdot \omega_p)$  изображе-

ны на рис. 3. а,б. АФХ звена (26) имеет вид полуокружности. Уравнение окружности, построенной на АФХ, представляет собой выражение:

$$\left( \operatorname{Re}_k(\omega) - \frac{T_\partial}{2 \cdot T} \right)^2 + \operatorname{Im}_k^2(\omega) = \left( \frac{T_\partial}{2 \cdot T} \right)^2. \quad (28)$$

Уравнение направления вектора  $W_k(i \cdot \omega_p)$  имеет вид:

$$\operatorname{Im}_k(\omega) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{Re}_k(\omega), \quad (29)$$

где

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p)}. \quad (30)$$

Для случая, изображенного на рис. 3а, имеет место условие:

$$\operatorname{tg} j = \operatorname{tg} a > 0. \quad (31)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае

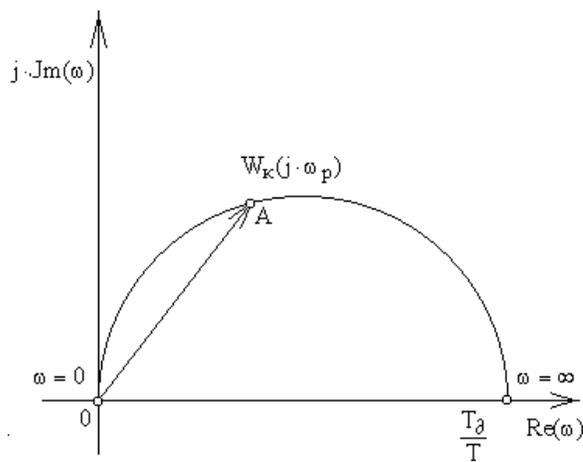
$$W_k^p = \frac{T_\partial \cdot T \cdot \omega^2}{T^2 \cdot \omega^2 + 1} + i \cdot \frac{T_\partial \cdot \omega}{T^2 \cdot \omega^2 + 1}, \quad (32)$$

с учетом (30),

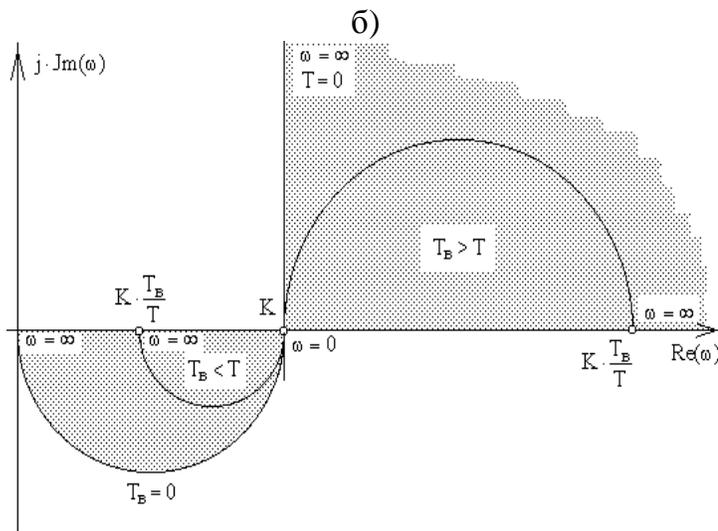
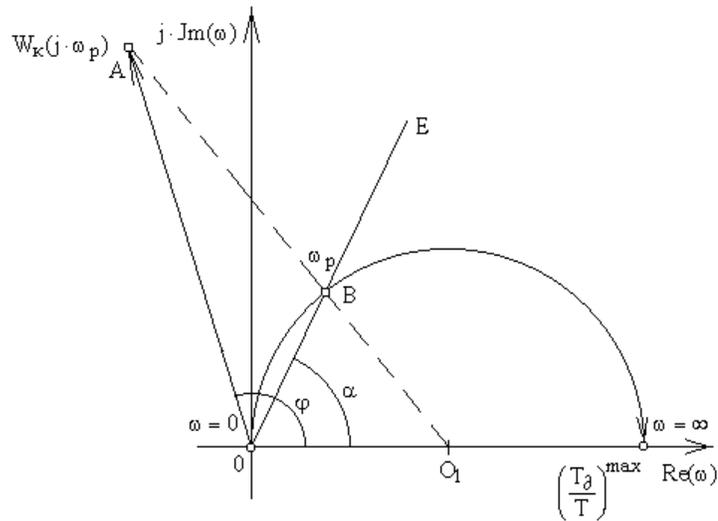
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{T \cdot \omega_p} \quad (33)$$

найдем

$$T = \frac{\operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\omega_p \cdot \operatorname{Im}_k(\omega_p)}. \quad (34)$$



а)



в)

Рис.3. К определению параметров компенсатора

Подставив (34) в (28) при  $\omega = \omega_p$ , получим

$$T_{\partial} = \frac{\operatorname{Re}_k^2(\omega_p) + \operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\omega_p \cdot \operatorname{Im}(\omega_p)}. \quad (35)$$

Для случая, изображенного на рис. 3б, имеет место условие  $\operatorname{tg}\varphi < 0$ .

$$(36)$$

Выберем максимально возможное отношение  $\frac{T_{\partial}}{T} = \left(\frac{T_{\partial}}{T}\right)^{\max}$  и, подставив

в уравнение (28), после преобразований получим

$$\operatorname{Re}^2(\omega) - \left(\frac{T_{\partial}}{T}\right)^{\max} \cdot \operatorname{Re}(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega) = 0. \quad (37)$$

Запишем уравнение луча  $O_1A$ :

$$\operatorname{Im}(\omega) = \left( \operatorname{Re}(\omega) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right) \cdot \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max}} \quad (38)$$

и, решая (38) совместно с (37), получим координаты точки В :

$$\operatorname{Re}_B(\omega_p) = \min \operatorname{Re}_{1,2}(\omega_p) = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}, \quad (39)$$

где

$$a = 1 + \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2}, \quad (40)$$

$$b = \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \cdot \left( 1 + \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2} \right), \quad (41)$$

$$c = 0.25 \cdot \left( \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{\left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)^2}, \quad (42)$$

$$\operatorname{Im}_B(\omega_p) = \operatorname{Re}_B(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \cdot \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max}}. \quad (43)$$

Из очевидного выражения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{Im}_B(\omega_p)}{\operatorname{Re}_B(\omega_p)}, \quad (44)$$

с учетом (39) и (43), получим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1 - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \cdot \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_B(\omega_p) \cdot \left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot \left( \frac{T_{\partial}}{T} \right)^{\max} \right)}. \quad (45)$$

Для  $\alpha = \alpha_1$  из (33), с учетом (45), найдем

$$T = \frac{\operatorname{Re}_B(\omega_p)(\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5(\frac{T_\partial}{T})^{\max})}{\omega_p(\operatorname{Re}_B(\omega_p)(\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5(\frac{T_\partial}{T})^{\max}) - 0.5(\frac{T_\partial}{T})^{\max} \operatorname{Im}_k(\omega_p))} \quad (46)$$

а величину  $T_B$  найдем по выражению

$$T_\partial = T \cdot \left(\frac{T_\partial}{T}\right)^{\max}. \quad (47)$$

2. Устройством является интегро - дифференцирующее звено первого порядка.

Рассмотрим в качестве компенсатора или развязывающего элемента звено с передаточной функцией (27). Его АФЧХ:

$$W_k^p(j \cdot \omega_p) = K_k^p \cdot \frac{1 + T_B \cdot T \cdot \omega^2}{1 + T^2 \cdot \omega^2} + j \cdot K_k^p \cdot \frac{(T_B - T) \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}. \quad (48)$$

имеет вид полуокружности. Уравнение окружности, построенной на АФЧХ, представляет собой выражение:

$$\left( \operatorname{Re}_k(\omega) - \frac{K_k^p}{2} \cdot \left(\frac{T_B}{T} + 1\right) \right)^2 + \operatorname{Im}_k^2(\omega) = 0.25 \cdot (K_k^p)^2 \cdot \left(\frac{T_B}{T} - 1\right)^2. \quad (49)$$

Заштрихованная на рис. 3в область является областью принципиально возможной реализации компенсатора или развязывающего элемента.

Пусть при  $K_k^p = W_k(0)$  конец вектора  $W_k(j \cdot \omega_p)$  лежит в заштрихованной области. При этом будут выполнены либо условия:

$$\operatorname{Im}_k(\omega_p) \geq \min \operatorname{Im}_k^p(\omega_p), \operatorname{Re}_k^p(\omega) = \operatorname{Re}_k(\omega_p) > 0, \operatorname{Im}_k(\omega_p) < 0, \quad (50)$$

если  $T_B < T$ , либо условия:

$$\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0, \operatorname{Re}_k(\omega_p) > W_k(0) > 0, \quad (51)$$

если  $T_B > T$ .

Значение  $\min \operatorname{Im}_k^p(\omega_p)$  в условиях (50) получают как  $\operatorname{Im}_k(\omega_p)$  из уравнения (49) при  $T_B = 0$  и  $\operatorname{Re}_k(\omega) = \operatorname{Re}_k(\omega_p)$ . Определим параметры  $T_B$  и  $T$  уравнения (49) при условии, что полуокружность пройдет через точки А и В (рис. 4а). Подставляя  $K_k^p = W_k(0)$ ,  $\operatorname{Re}_k(\omega) = \operatorname{Re}_k(\omega_p)$ ,  $\operatorname{Im}_k(\omega) = \operatorname{Im}_k(\omega_p)$  в уравнение (49), после преобразований получим:

$$\frac{T_B}{T} \cdot W_k(0) \cdot (W_k(0) - \operatorname{Re}_k(\omega_p)) + \operatorname{Re}_k(\omega_p) \cdot (\operatorname{Re}_k(\omega_p) - W_k(0)) + \operatorname{Im}_k^2(\omega_p) = 0 \quad (52)$$

Из (48)

$$W^p(\infty) = \operatorname{Re}^p(\infty) = W_k(0) \cdot \frac{T_B}{T}. \quad (53)$$

Из (52), с учетом (53),

$$\operatorname{Re}^p(\infty) = \operatorname{Re}_k(\omega_p) - \frac{\operatorname{Im}_k^2(\omega_p)}{W_k(0) - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}. \quad (54)$$

Теперь определим параметры  $T$  и  $T_B$ , пользуясь известными выражениями:

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{AC}{CD}}, \quad (55)$$

$$T_B = OD \cdot \frac{T}{K_k^p}, \quad (56)$$

где отрезки  $AC$ ,  $CD$  и  $OD$  (рис. 4.) имеют очевидные выражения.

Из (55), с учетом (53) и (54):

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{W_k(0) - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - \operatorname{Re}_k^p(\infty)}}, \quad (57)$$

а из (56):

$$T_B = T \cdot \frac{W_k^p(\infty)}{W_k(0)}. \quad (58)$$

Выражения (57) и (58) справедливы для определения настроечных параметров  $T$  и  $T_B$  при попадании конца вектора  $W_k(j \cdot \omega_p)$  в любую точку заштрихованных областей, изображенных на рис. 3. Если конец вектора  $W_k(j \cdot \omega_p)$  не лежит в заштрихованной области, т.е. не выполняются условия (50) или (51), то ставится задача выполнения условий (22) и (23) или (24) и (25).

Рассмотрим случай выполнения условий (22) и (23) (рис. 4б.). Выбирается максимально возможное значение отношения  $(T_B/T)^{\max}$ , если  $\operatorname{Im}(\omega_p) > 0$ , или минимально возможное отношение  $(T_B/T)^{\min}$ , если  $\operatorname{Im}(\omega_p) < 0$ .

Пусть  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0$ . Найдем координаты точки  $B$  совместным решением уравнений окружности (49) и линии  $O_1B_1$ . Уравнение линии  $O_1B_1$  имеет вид:

$$\operatorname{Im}(\omega) = \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p) \cdot \left( \operatorname{Re}(\omega) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot \left( 1 + (T_B/T)^{\max} \right) \right)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot \left( 1 + (T_B/T)^{\max} \right)}. \quad (59)$$

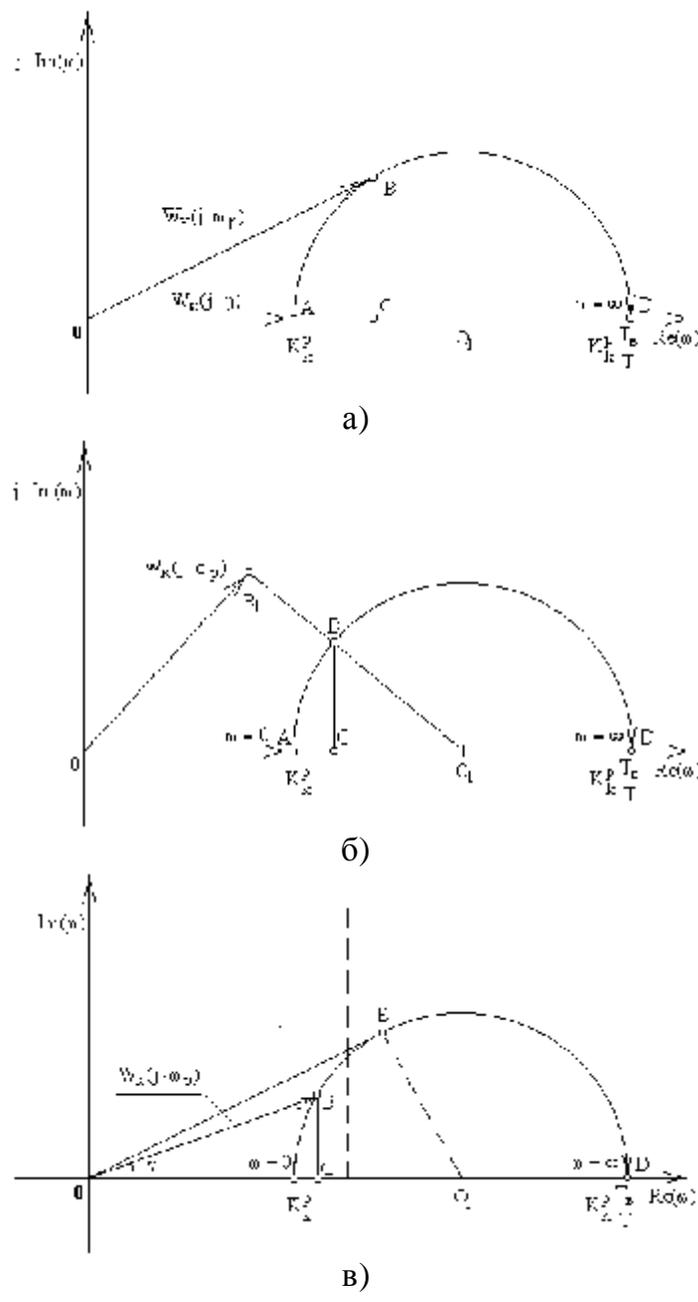


Рис. 4. К определению параметров компенсатора в виде интегро - дифференцирующего звена.

Подставляя (59) в (49), получим:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}^2(\omega) \cdot \left( 1 + \left( \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_\epsilon/T)^{\max})} \right)^2 \right) - \operatorname{Re}(\omega) \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_\epsilon/T)^{\max}) \times \\
& \times \left( 1 + \left( \frac{\operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_\epsilon/T)^{\max})} \right)^2 \right) + \\
& + W_k^2(0) \cdot \left( (T_B/T)^{\max} + \left( \frac{0.5 \cdot (1 + (T_\epsilon/T)^{\max}) \cdot \operatorname{Im}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot W_k(0) \cdot (1 + (T_\epsilon/T)^{\max})} \right)^2 \right) = 0
\end{aligned} \tag{60}$$

Решая уравнение (60), выбираем физически интерпретируемый корень, руководствуясь условиями: если  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0$ , то выбирается корень  $\operatorname{Re}_B(\omega_p)$ , при котором  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) > 0$  в (59); если  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) < 0$ , то выбирается корень  $\operatorname{Re}_B(\omega_p)$ , при котором  $\operatorname{Im}_k(\omega_p) < 0$  в (59).

Пользуясь выражениями (55) и (56), определим параметры  $T$  и  $T_\epsilon$ :

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{W_k(0) - \operatorname{Re}_B(\omega_p)}{\operatorname{Re}_B(\omega_p) - W_k(0) \cdot (T_\epsilon/T)^{\max}}}, \tag{61}$$

$$T_\epsilon = T \cdot (T_\epsilon/T)^{\max}. \tag{62}$$

Если  $T_\epsilon < T$ , то выполнение условий (22) и (23) достигается при

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{W_k(0) - \operatorname{Re}_B(\omega_p)}{\operatorname{Re}_B(\omega_p) - W_k(0) \cdot (T_\epsilon/T)^{\min}}}, \tag{63}$$

$$T_\epsilon = T \cdot (T_\epsilon/T)^{\min}. \tag{64}$$

Рассмотрим случай выполнения условий (24) и (25), когда  $T_\epsilon > T$  (рис. 4в).). Выберем максимально возможную величину  $(T_\epsilon/T)^{\max}$  и запишем уравнение окружности (49), проходящей через точку В:

$$\begin{aligned}
& \left( \operatorname{Re}_k(\omega_p) - 0.5 \cdot K_k^p \cdot ((T_\epsilon/T)^{\max} + 1) \right)^2 + \operatorname{Im}^2(\omega_p) = \\
& = 0.25 \cdot K_k^p \cdot ((T_\epsilon/T)^{\max} - 1)^2
\end{aligned} \tag{65}$$

Из (65) определим величину  $K_k^p$ , решая квадратное уравнение:

$$\begin{aligned}
& (T_\epsilon/T)^{\max} \cdot (K_k^p)^2 - ((T_\epsilon/T)^{\max} + 1) \cdot \operatorname{Re}_k(\omega_p) \cdot K_k^p + \\
& + \operatorname{Re}_k^2(\omega_p) + \operatorname{Im}_k^2(\omega_p) = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

Выберем меньший корень  $K_k^p$ . Определим теперь параметры  $T$  и  $T_\epsilon$ , пользуясь выражениями (55) и (58), с учетом (66),

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{K_k^p - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - K_k^p \cdot (T_\epsilon/T)^{\max}}}, \tag{67}$$

а  $T_B$  определяется по формуле (62). Если  $T_g < T$ , то выполнение условий (24) и (25) достигается при

$$T = \frac{1}{\omega_p} \cdot \sqrt{\frac{K_k^p - \operatorname{Re}_k(\omega_p)}{\operatorname{Re}_k(\omega_p) - K_k^p \cdot (T_g/T)^{\min}}}, \quad (68)$$

где  $K_k^p$  - больший корень уравнения (66) при замене  $(T_g/T)^{\max}$  на  $(T_g/T)^{\min}$ , а  $T_g$  определяется по формуле (64).

Таким образом, расчет комбинированной АСР заключается в выборе структуры и расчете настроек регулятора и компенсатора и включает следующие этапы:

расчет настроек регулятора и определение рабочей частоты в замкнутой одноконтурной системе регулирования;

вывод передаточной функции идеального компенсатора из условия инвариантности и анализ его реализуемости;

выбор реального компенсатора и расчет его параметров из условия приближенной инвариантности в интервале частот  $[0, \omega_p]$ .

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции объекта по каналам возмущения и регулирования, которые выдаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

При заданных передаточных функциях требуется рассчитать комбинированную АСР с динамическим компенсатором.

В ходе выполнения задания необходимо

1. Рассчитать настройки ПИ-регулятора и определить рабочую частоту в замкнутой одноконтурной системе регулирования.

2. По передаточным функциям каналов возмущения и управления (регулирования) вывести передаточную функцию идеального компенсатора из условия инвариантности  $u$  (способ подключения компенсатора задается преподавателем). Провести анализ физической реализуемости компенсатора (или сложности его технической реализации).

3. Выбрать структуру реального компенсатора и рассчитать его параметры из условия приближенной инвариантности  $u$  по отношению к возмущениям  $x_1$  на нулевой и рабочих частотах (или в диапазоне частот  $[0, \omega_p]$ ).

Отчет о выполнении выполнения самостоятельного задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 9.

На занятии разбирается пример решения задачи с применением переносного персонального компьютера и медиапроектора .

## Практическое занятие № 18. Расчет двусвязной системы автоматического регулирования

Целью работы является освоение методики выбора и расчета автоматической системы регулирования для объекта с взаимосвязанными координатами.

### Теоретические сведения

Один из основных приемов построения систем автоматизации сложных объектов состоит в разбиении их на несколько более простых с одной регулируемой переменной каждый и последующим расчетом для них обычных одноконтурных систем регулирования, работающих независимо друг от друга.

Однако большинство ТОУ имеют несколько входных и выходных переменных, взаимосвязанных между собой. На рис. 1 показана структурная схема четырехканального объекта с двумя регулируемыми выходами  $y_1$ ,  $y_2$  и двумя входами  $x_1$ ,  $x_2$ , каждый из которых представляет сумму регулирующего воздействия  $U_1$  (или  $U_2$ ) и внешнего возмущения  $Z_1$  (или  $Z_2$ ). В таких объектах каналы воздействия  $x_1$  (и  $x_2$ ) на выходы  $y_1$  (и  $y_2$ ) называют прямыми, каналы воздействия  $x_1$  на  $y_2$  и  $x_2$  на  $y_1$  – перекрестными.

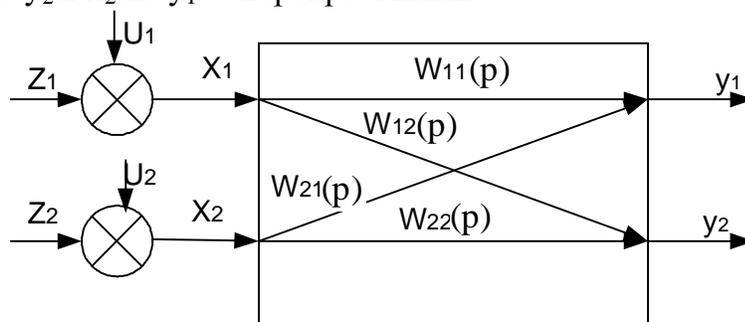


Рис.1 Структурная схема четырёхканального объекта с двумя регулируемыми переменными.

Перекрестные каналы связи, по сути, являются каналами возмущения, которые приводят к взаимному влиянию двух контуров регулирования, снижая, из запас устойчивости.

Для объектов с взаимосвязанными координатами применяют два типа автоматических систем регулирования:

- несвязанного регулирования;
- автономного регулирования.

Рассмотрим последовательно каждую из этих систем.

Структурная схема системы несвязанного регулирования приведена на рис.2. Она включает две одноконтурные замкнутые системы регулирования с регуляторами  $R_1$  и  $R_2$  в обратной связи. Оба контура влияют на работу друг друга через перекрестные связи. При этом ухудшается качество регулирования, снижается запас устойчивости и при определенных соотношениях пара-

метров основных и перекрестных каналов может наступить потеря устойчивости.

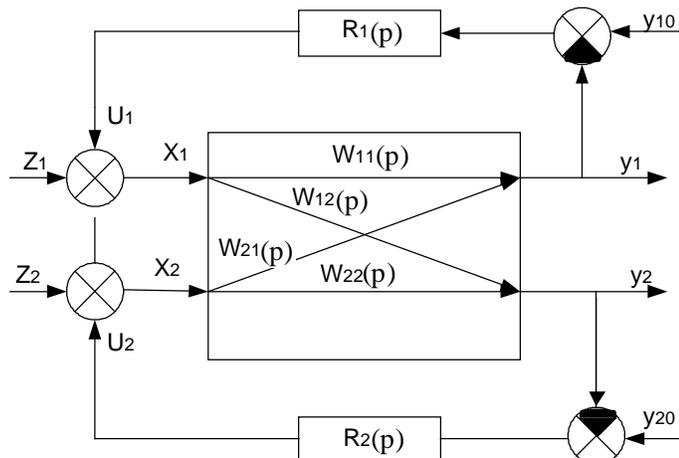


Рис.2. Структурная схема системы несвязанного регулирования.

Для уменьшения отрицательного влияния перекрестных связей при расчете настроек каждого из регуляторов должен рассматриваться эквивалентный объект, включающий все четыре канала объекта и другой регулятор.

Структурная схема эквивалентного объекта для регулятора  $R_1$  приведена на рис. 3.

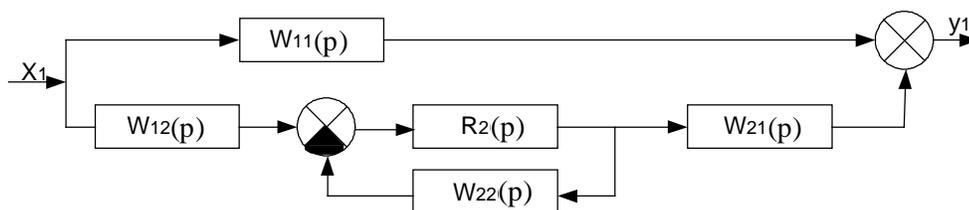


Рис.3. Структурная схема эквивалентного объекта для регулятора

Его передаточная функция определяется следующим выражением:

$$W_1(p) = W_{11}(p)[1 + k_{cb}(p)W_{2зам}(p)], \quad (1)$$

где  $k_{cb}(p)$ - передаточная функция комплекса, характеризующего степень взаимной связи регулируемых переменных:

$$k_{cb}(p) = \frac{W_{12}(p)W_{21}(p)}{W_{11}(p)W_{22}(p)}, \quad (2)$$

$W_{23}(s)$  - передаточная функция замкнутой системы регулирования второго контура по каналу задания:

$$W_{2зам}(p) = \frac{R_2(p)W_{22}(p)}{1 + R_2(p)W_{22}(p)}, \quad (3)$$

Передаточная функция эквивалентного объекта для второго регулятора находится аналогично.

Комплекс взаимной связи  $k_{св}(p)$  характеризует влияние перекрестных каналов на качество регулирования. Если модуль комплекса связи на нулевой частоте близок к нулю  $k_{св}(j0) \approx 0$ , то перекрестные связи достаточно слабы и их влиянием можно пренебречь; при этом  $W_1(p) \approx W_{11}(p)$  и  $W_2(p) \approx W_{22}(p)$ .

Если

$$k_{св}(p) = \frac{W_{12}(j0)W_{21}(j0)}{W_{11}(j0)W_{22}(j0)} = \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}} > 1 \quad (4)$$

т.е. произведение коэффициентов усиления по перекрестным каналам больше, чем по основным, то  $x_1$  следует использовать в качестве регулирующего воздействия для переменной  $y_2$  и наоборот.

Расчет настроек регуляторов для системы несвязанного регулирования проводится итеративным способом. Для практических целей обычно бывает достаточно провести два этапа расчета:

Этап 1. Рассчитываются настройки регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  без учета перекрестных связей, т.е. по передаточным функциям прямых каналов объекта  $W_{11}(p)$  и  $W_{22}(p)$  для первого и второго регуляторов соответственно. Результаты этого расчета считаются первым приближением.

Этап 2. Рассчитываются настройки регулятора  $R_1$  для эквивалентного объекта, передаточная функция которого определяется выражением (1) при значениях настроек регулятора  $R_2$ , полученных в первом приближении. Если значения настроек  $R_1$ , рассчитанные в первом и втором приближениях, отличаются не более чем на 20%, то можно принять результаты второго приближения, как окончательное. В противном случае требуется продолжить расчет.

Аналогично рассчитывается второй контур регулирования.

Структурная схема системы автономного регулирования приведена на рис.4.

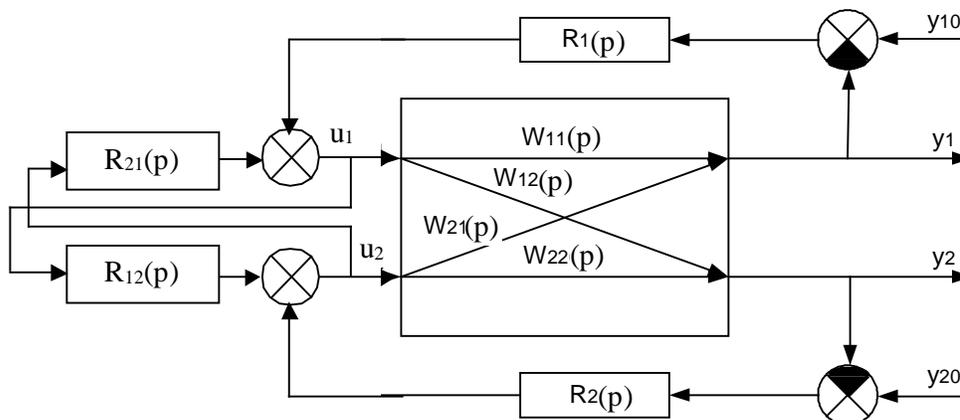


Рис.4. Структурная схема автономной АСР.

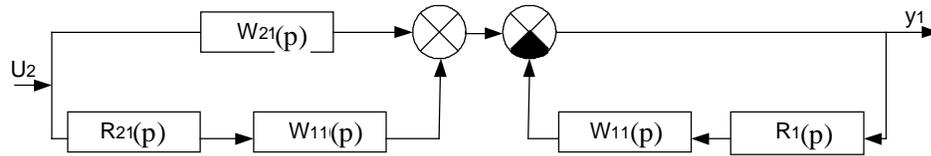


Рис.5. Эквивалентная схема автономной АСР для первого выхода.

Расчет системы основан на принципе автономности (независимости) одной регулируемой переменной  $y_1$  от другой  $y_2$ , который формулируют следующим образом: в любой момент времени отклонение  $\Delta y_1$  регулируемой координаты  $y_1$  от заданной величины  $y_{10}$  не зависит от значений другой, регулируемой переменной:

$$\Delta y_1(t, y_2) \equiv 0. \quad (5)$$

Аналогично формулируется принцип автономности по отношению ко второй регулируемой переменной:

$$\Delta y_2(t, y_1) \equiv 0. \quad (6)$$

Поскольку причиной отклонения регулируемой переменной  $y_2(t)$  являются соответствующие изменения входной  $x_2(t)$  координаты, которые по перекрестному каналу передаются на выход другого канала, то от принципа автономности целесообразно перейти к принципу инвариантности, т.е. независимости регулируемой переменной от изменения входной координаты другого канала

$$\begin{aligned} \Delta y_1(t, x_2) \equiv 0 \quad \text{или} \quad \Delta y_2(t, u_2) \equiv 0, \\ \Delta y_2(t, x_1) \equiv 0 \quad \text{или} \quad \Delta y_2(t, u_1) \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Автономность (т.е. взаимная независимость) двух контуров регулирования достигается за счет применения специальных динамических устройств (называемых динамическими компенсаторами), через которые между регуляторами осуществляются внешние связи, компенсирующие внутренние перекрестные связи в объекте. Передаточные функции компенсаторов выводятся из условия автономности. В автономной АСР изменения выходных координат объекта под действием регулирующих воздействий по перекрестным каналам описываются следующими уравнениями (см. рис.5):

$$\begin{aligned} \Delta y_1(p) &= u_2(p)[W_{21}(p) + R_{21}(p)W_{11}(p)]W'_{13}(p), \\ \Delta y_2(p) &= u_1(p)[W_{12}(p) + R_{12}(p)W_{22}(p)]W'_{23}(p), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$W'_{13}(p) = \frac{1}{1 + W_{11}(p)R_1(p)}, \quad W'_{23}(p) = \frac{1}{1 + W_{22}(p)R_2(p)} \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) видно, что, так как в общем случае сигналы  $u_1(p)$ ,  $u_2(p)$  и передаточные функции  $W'_{13}(p)$  и  $W'_{23}(p)$  не обращаются в нуль, то условие автономности может быть выполнено только за счет равенства нулю выражений в квадратных скобках в уравнениях (8). Отсюда получаем формулы для передаточных функций компенсаторов:

$$R_{21}(p) = -\frac{W_{21}(p)}{W_{11}(p)}, \quad R_{12}(p) = -\frac{W_{12}(p)}{W_{22}(p)}. \quad (10)$$

Рассчитанные по формулам (10) компенсаторы могут оказаться физически нереализуемыми, если характеристики прямых и перекрестных каналов таковы, что порядок полинома числителя  $R_{21}(p)$  (или  $R_{12}(p)$ ), окажется больше, чем у полинома в знаменателе. В этом случае компенсатор должен содержать идеальные дифференцирующие звенья, что физически не реализуемо.

Второй случай физической нереализуемости компенсаторов возникает тогда, когда время запаздывания по прямым каналам оказывается больше, чем по перекрестным. В этом случае в состав идеального компенсатора должно входить звено с отрицательным запаздыванием, что также физически нереализуемо.

В некоторых случаях удается получить физически реализуемые компенсаторы, если поменять местами прямые и перекрестные каналы, используя для регулирования каналы  $x_2 \rightarrow y_1$  и  $x_1 \rightarrow y_2$ . Другой способ практической реализации автономных АСР состоит в том, что, вместо теоретически рассчитанных («идеальных») компенсаторов используются типовые динамические компенсаторы. Их параметры рассчитываются из условия приближенной автономности, которая достигается лишь в определенном диапазоне частот или на отдельных частотах. Для нахождения этих частот рассмотрим амплитудно-фазовые характеристики канала, связывающего, например, сигнал  $u_2(i\omega)$  с первой регулируемой переменной  $y_1(i\omega)$  в автономной АСР (см.рис.5). Как следует из формулы (8),

$$\Delta y_1(j\omega) = u_2(j\omega)[W_{21}(j\omega) + R_{21}(j\omega)W_{11}(j\omega)]W'_{13}(j\omega), \quad (11)$$

где

$$W'_{13}(j\omega) = \frac{1}{1 + W_{11}(j\omega)R_1(j\omega)}. \quad (12)$$

Если представить канал связи  $u_2 \rightarrow y_1$  в автономной АСР как двухступенчатый фильтр для сигнала  $u_2(j\omega)$ , то условие приближенной автономности можно сформулировать следующим образом: частотные характеристики реального компенсатора должны удовлетворить соотношению (10) в том диапазоне частот, в котором отличны от нуля  $|u_2(j\omega)|$  и  $|W'_{13}(j\omega)|$ . Особенности частотных характеристик замкнутых систем регулирования состоит в том, что модули их частотных характеристик имеют максимумы на рабочей частоте и при использовании законов регулирования с интегральной составляющей обращаются в ноль при  $\omega=0$ .

Прохождение сигнала  $u_2$  через замкнутые системы с ПИ (а) и П-регуляторами (б) и соответствующие ошибки регулирования иллюстрирует рис.6, на котором представлены модуль входного сигнала  $|u_2(j\omega)|$ , АЧХ замкнутой системы  $A_3(\omega)$  и модуль ошибки регулирования  $|\Delta y_1(i\omega)|$ .

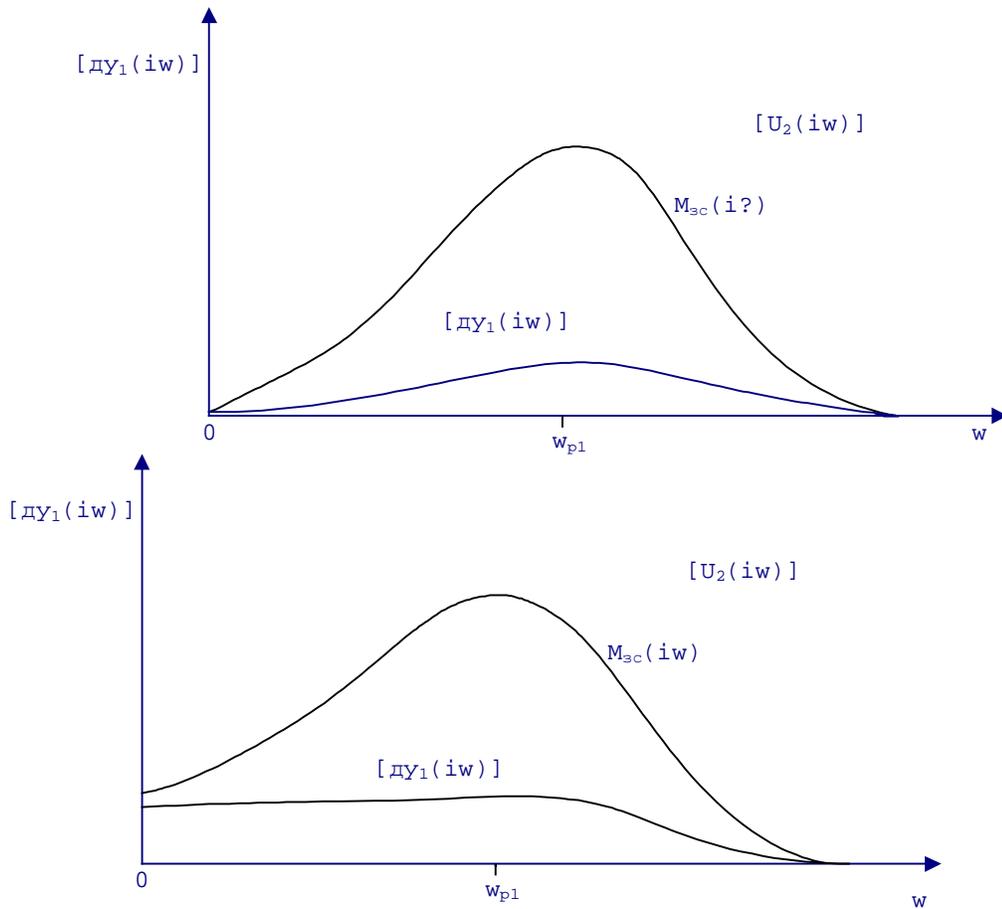


Рис.6. Частотные характеристики замкнутых АСР с ПИ(а) и П(б) регуляторами и модули сигналов и ошибки регулирования

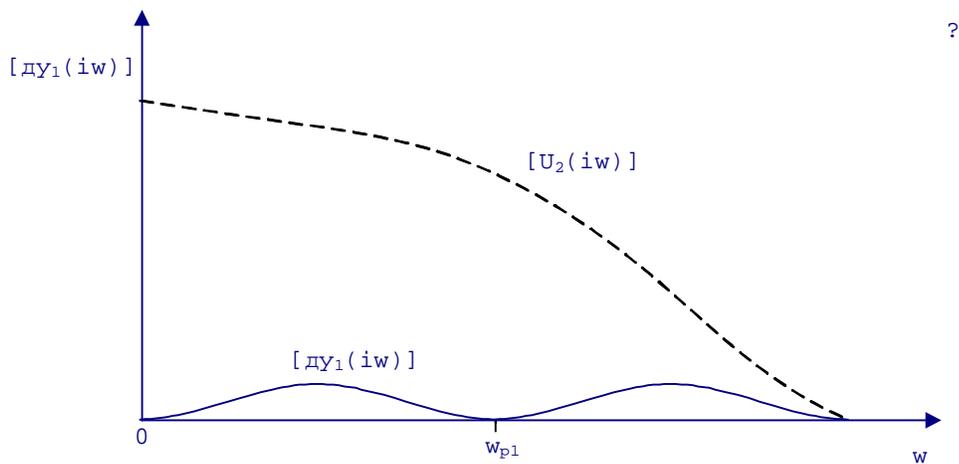


Рис.7. Модули сигналов и ошибки регулирования автономной АСР с реальным компенсатором

Если параметры компенсаторов рассчитываются из условия автономности на нулевой и рабочей частотах, то ошибка регулирования на этих частотах становится равной нулю (рис.7).

Таким образом, расчет автономной системы регулирования для четырехканального объекта включает следующие этапы:

1. Расчет настроек регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  по передаточным функциям  $W_{11}(p)$  и  $W_{22}(p)$  прямых каналов объекта и определение рабочих частот  $\omega_{p1}$  и  $\omega_{p2}$  каждого контура.

2. Вывод передаточных функций идеальных компенсаторов  $R_{21}(p)$  и  $R_{12}(p)$  из условия автономности и анализ их реализуемости.

3. Выбор реальных компенсаторов и расчет их параметров из условия приближенной автономности в интервалах частот  $[0, \omega_{p1}]$  и  $[0, \omega_{p2}]$ .

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточные функции объекта по четырем каналам  $x_1-u_1$ ,  $x_1-u_2$ ,  $x_2-u_2$ ,  $x_2-u_1$ , два из которых принять за прямые каналы регулирования, два других – за «перекрестные» (выдаются преподавателем индивидуально каждому студенту).

Для выбранных каналов, регулирования рассчитать приближенные настройки ПИ-регуляторов и определить рабочие частоты обоих контуров регулирования (без учета перекрестных связей в объекте).

Рассчитать модуль (амплитудно-частотную характеристику) коэффициента взаимной связанности  $K_{св}(i\omega)$  двух контуров АСР на нулевой и рабочих частотах  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ .

В зависимости, от величины  $[K_{св}(i\omega)]$  проанализировать возможность и целесообразность применения трех типов АСР:

– несвязанного регулирования без учета перекрестных каналов в объекте;

– несвязанного регулирования, при условии коррекции настроек регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  по передаточным функциям эквивалентных объектов;

– автономной АСР.

Рассчитать частотные характеристики эквивалентных объектов  $W_1^3(i\omega)$  и  $W_2^3(i\omega)$  на нулевой и рабочих частотах, сравнить их (по модулю) с  $W_{11}(i\omega)$  и  $W_{22}(i\omega)$  соответственно. Рассчитать настройки регуляторов  $R_1$  и  $R_2$  по  $W_1^3(i\omega)$  и  $W_2^3(i\omega)$ .

По передаточным функциям прямых и перекрестных каналов ЭИД, полученным в п.5.1, вывести передаточные функции компенсаторов из условия автономности. Провести анализ физической реализуемости компенсаторов. Оценить сложность технической реализации компенсаторов.

Выбрать структуру реальных компенсаторов  $R_{12}$  и  $R_{21}$  и рассчитать их параметры из условия приближенной автономности на нулевой и рабочих частотах:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{21}(i0) &= R_{21}(i0), & \bar{R}_{21}(i\omega_{p1}) &= R_{21}(i\omega_{p1}), \\ \bar{R}_{12}(i\omega_{p2}) &= R_{12}(i\omega_{p2}), & \bar{R}_{12}(i0) &= R_{12}(i0). \end{aligned}$$

Отчет о выполнении выполнения самостоятельного задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 9.

На занятии разбирается пример решения задачи с применением переносного персонального компьютера и медиапроектора .

### ***Практическое занятие № 19. Составление разностных уравнений, Z-изображений сигналов и передаточных функций***

В работе находится математическое описание импульсной системы автоматического регулирования в виде передаточной функции в форме z-преобразования и разностного уравнения.

#### **Теоретические сведения**

В данной работе строится модель цифровой системы автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 1.

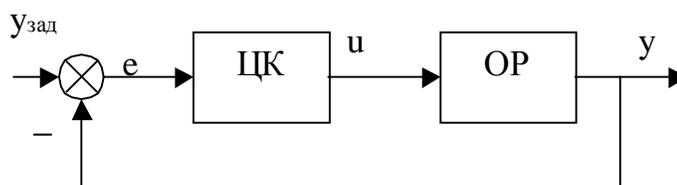


Рис. 1. Структурная схема системы

Система включает объект регулирования ОР, описываемый передаточной функцией  $W_o(p)$  и цифровой контроллер ЦК, реализующий простейший пропорциональный закон регулирования:

$$u = k_p e. \quad (1)$$

Разрядность цифрового контроллера достаточно велика, чтобы пренебречь при расчетах квантованием сигнала по уровню. С другой стороны, время цикла контроллера  $T_c$  (который включает измерение входных сигналов, аналого-цифровое преобразование, вычисление управляющего воздействия и цифроаналоговое преобразование) недостаточно мало, для того чтобы пренебречь квантованием сигнала по времени. Это может быть связано, например, с тем обстоятельством, что контроллер, помимо данной системы, параллельно обслуживает еще множество других систем и процессов, что чаще всего и имеет место на практике. Таким образом, в данном случае речь идет об импульсной системе автоматического регулирования.

Требуется построить модель системы в виде разностного уравнения, или, что то же самое, передаточной функции в форме z-преобразования.

Структура цифрового пропорционального регулятора может быть представлена следующим образом (рис.2)

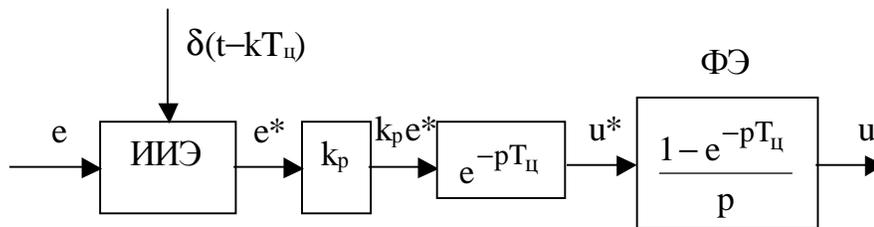


Рис. 2. Структура цифрового регулятора

Модель включает:

- 1) идеальный импульсный элемент ИИЭ, который производит модуляцию последовательности идеальных импульсов – дельта-функций  $\delta(t-kT_{ц})$  входным сигналом ошибки. Выходной сигнал ИИЭ – модулированная последовательность идеальных импульсов  $e^*$ , площадь каждого из которых равна значению сигнала ошибки  $e$  в момент формирования импульса;
- 2) блок масштабирования  $k_p$ , реализующий алгоритм регулирования;
- 3) блок временной задержки с передаточной функцией  $e^{-pT_{ц}}$ , который моделирует задержку реализации выходного сигнала от начала цикла на один такт котроллера;
- 4) формирующий элемент ФЭ, преобразующий моделированную последовательность дельта-функций в реальный сигнал на выходе контроллера. В большинстве случаев для этой цели используется *преобразователь первого порядка (zero order holder)*, выходной сигнал которого изменяется ступенчато, «удерживая» уровень между тактами контроллера (рис. 3).

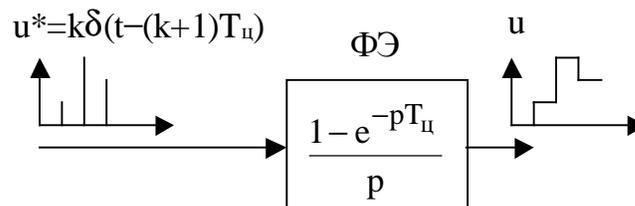


Рис. 3. Формирование выходного сигнала контроллера

На рис. 4 показана структура формирователя, поясняющая его передаточную функцию на примере формирования одного импульса (здесь нужно учитывать, что площадь дельта-функции равна единице, а площадь импульса  $u^*$ , и соответственно, высота импульса  $u - k_p e$ ).

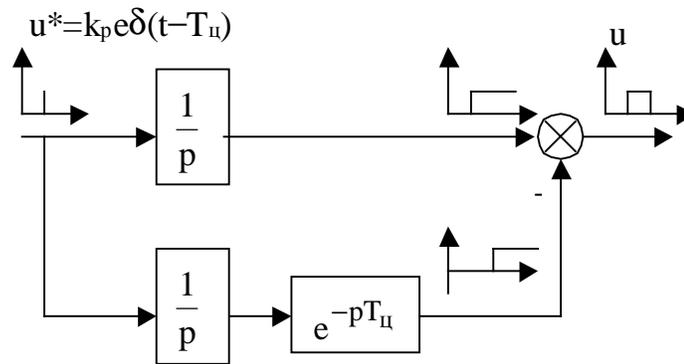


Рис. 4. Структура формирователя импульсов

При составлении дискретной модели системы рассматривается следующая структура (рис.5.)

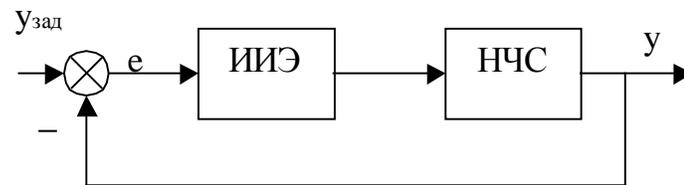


Рис. 5. Структурная схема системы

Здесь под непрерывной частью системы НЧС уже понимается не только объект управления, но и все блоки регулятора, кроме идеального импульсного элемента. Таким образом, в нашем случае передаточная функция НЧС равна

$$W_{\text{нчс}}(p) = k_p \frac{e^{-pT_u} - e^{-2pT_u}}{p} W_o(p). \quad (2)$$

В дальнейшем определяются передаточные функции НЧС и всей системы в форме z-преобразования.

Как известно, дискретная модель непрерывной системы определяется тремя факторами:

- свойствами системы, т.е. исходным ее описанием;
- шагом квантования по времени;
- формой входных импульсов (поскольку одна и та же система будет реагировать по разному на одинаковые по высоте, но разные по форме импульсы).

Исходя из структуры системы, приведенной на рис. 5, в данном случае z-преобразование производится из условия, что на входе НЧС действует моделированная последовательность дельта-функций. В таком случае передаточная функция НЧС в форме z-преобразования определяется z-преобразованием весовой функции НЧС:

$$W_{\text{нчс}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\text{нчс}}(kT) z^{-k}. \quad (3)$$

Однако в прямом применении данного преобразования обычно нет необходимости, поскольку существуют специальные таблицы, позволяющие для

простых передаточных функций получить их z-преобразования (табл.1). В более сложных случаях исходную передаточную функцию можно свести к сумме простых и далее, воспользовавшись свойством линейности z-преобразования, определить z-преобразование сложной функции как сумму z-преобразования простых.

Определив  $W_{\text{нчс}}(z)$ , систему приводят к виду (рис. 6).

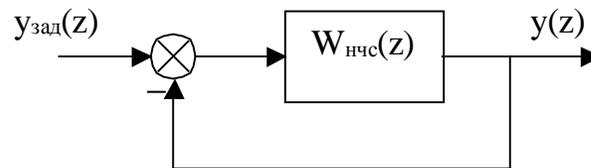


Рис.6. Структурная схема системы

При этом ИИЭ исключается из рассмотрения, поскольку передаточная функция НЧС непосредственно связывает отчеты сигналов  $y(kT_{\text{ц}})$  и  $e(kT_{\text{ц}})$  и при ее выводе учитывается, что на входе НЧС действует модулированная последовательность дельта-функций.

Передаточная функция замкнутой системы в форме z-преобразования

$$W(z) = \frac{y(z)}{u_{\text{зад}}(z)} = \frac{W_{\text{нчс}}(z)}{1 + W_{\text{нчс}}(z)}. \quad (4)$$

Определив  $W(z)$ , можно записать разностное уравнение, связывающее  $y(kT_{\text{ц}})$  и  $y(nT_{\text{ц}})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$  и с помощью него рассчитать реакцию системы на любое воздействие.

Таблица z-преобразования для передаточных функций

№	$W(s)$	$W(z)$	№	$W(s)$	$W(z)$
1	$k$	$k$	12	$\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{T_1^2}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} \frac{z}{z-a^{-T_1}} - \frac{T_2^2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} \frac{z}{z-a^{-T_2}} - \frac{T_3^2}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} \frac{z}{z-a^{-T_3}} \right]$
2	$\frac{k}{s}$	$\frac{kz}{z-1}$	13	$\frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k \left[ \frac{T_0}{(z-1)^2} \frac{z}{z-1} + \frac{T_1^2}{(z-1)} \frac{z}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} - \frac{k}{z-a^{-T_1}} + \frac{T_2^2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} \frac{z}{z-a^{-T_2}} + \frac{T_3^2}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} \frac{z}{z-a^{-T_3}} \right]$
3	$\frac{k}{s^2}$	$\frac{kT_0z}{(z-1)^2}$	14	$\frac{k(T_0s+1)}{s}$	$\frac{k(T_0+1)(z - \frac{T_0}{T_0+1})}{z-1}$
4	$\frac{k}{T_0s+1}$	$\frac{k}{T_0} \frac{z}{z-a^{-T_0}}$	15	$\frac{k(T_0s+1)}{s^2}$	$\frac{k T_0 z (z + \frac{T_0}{T_0+1} - 1)}{(z-1)^2}$
5	$\frac{k}{s(T_0s+1)}$	$\frac{k(1-a^{-T_0})z}{(z-1)(z-a^{-T_0})}$	16	$\frac{k(T_2s+1)}{T_2s+1}$	$\frac{k}{T_2} \left[ T_2 + (1 - \frac{T_1}{T_2}) \frac{z}{z-a^{-T_0}} \right]$
6	$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{k(e^{-T_1} - e^{-T_2})}{T_1 - T_2} \frac{z}{(z-a^{-T_1})(z-a^{-T_2})}$	17	$\frac{k(T_1s+1)}{s(T_2s+1)}$	$\frac{kT_1}{T_2} \frac{z \left[ z + \frac{T_2(1-a^{-T_1})}{T_1} - 1 \right]}{(z-1)(z-a^{-T_2})}$
7	$\frac{k}{(T_0s+1)^2}$	$\frac{kT_0^{-1/2}}{T_0^2} \frac{z}{(z-a^{-T_0})^2}$	18	$\frac{k(T_2s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{k}{T_1 - T_2} \left[ \frac{(1 - \frac{T_1}{T_2})z}{z-a^{-T_1}} + \frac{(\frac{T_1}{T_2} - 1)z}{z-a^{-T_2}} \right]$
8	$\frac{k}{s^2(T_0s+1)}$	$k \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_0(1-a^{-T_0})z}{(z-1)(z-a^{-T_0})} \right]$			
9	$\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} + \frac{T_1}{T_2-T_1} \frac{z}{z-a^{-T_1}} - \frac{T_2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-a^{-T_2}} \right]$			
10	$\frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T_1+T_2)z}{z-1} - \frac{T_1^2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-a^{-T_1}} + \frac{T_2^2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-a^{-T_2}} \right]$			
11	$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k \left[ \frac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} \frac{z}{z-a^{-T_1}} + \frac{T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} \frac{z}{z-a^{-T_2}} \right]$			

№	W(s)	W(z)	№	W(s)	W(z)
19	$\frac{k(T_2s+1)}{s(T_2s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} + \frac{(T_1-T_2)z}{(T_2-T_1)(z-e^{-T_1})} + \frac{(T_2-T_1)z}{(T_1-T_2)(z-e^{-T_2})} \right]$	23	$\frac{k}{s(T_1^2s^2+2\zeta T_1s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - ze^{-\zeta T_1} \sec \varphi \cos(\frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \varphi)}{z^2 - 2ze^{-\zeta T_1} \cos(\frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2}) + e^{-2\zeta T_1}} \right]$ где $\varphi = \arctg(-\frac{\varphi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$
21	$\frac{k(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$	$k \left[ \frac{T_2}{(z-1)^2} - \frac{(T_1-T_2)(1-e^{-T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T_1})} \right]$	24	$\frac{k(T_2s+1)}{T_1^2s^2-2\zeta T_1s-1}$	$\frac{kT_2}{T_1^2} \frac{z \left[ z - e^{-\zeta T_1} (\cos \frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2}) \right]}{z^2 - 2ze^{-\zeta T_1} \cos \frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2} + e^{-2\zeta T_1}}$
22	$\frac{k(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[ \frac{T_2}{(z-1)^2} + \frac{(T_3-T_1-T_2)z}{z-1} - \frac{(T_1-T_2)z}{(\frac{T_1}{T_2}-1)(z-e^{-T_1})} - \frac{(T_2-T_3)z}{(\frac{T_1}{T_2}-1)(z-e^{-T_2})} \right]$	25	$\frac{k(T_2s+1)}{s(T_1^2s^2+2\zeta T_1s+1)}$	$k \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - ze^{-\zeta T_1} \sec \varphi \cos(\frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \varphi)}{z^2 - 2ze^{-\zeta T_1} \cos \frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2} + e^{-2\zeta T_1}} \right]$ где $\varphi = \arctg \frac{1-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$
22	$\frac{k}{T_1^2s^2+2\zeta T_1s+1}$	$\frac{kze^{-\zeta T_1} \sin(\frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2})}{T_1 \sqrt{1-\zeta^2} \left[ z^2 - 2ze^{-\zeta T_1} \cos(\frac{1}{T_1} \sqrt{1-\zeta^2}) + e^{-2\zeta T_1} \right]}$			

Таблица z-преобразований для возмущений

№	g(t)	G(s)	G(z)	№	g(t)	G(s)	G(z)
1	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	7	$1 - \cos \omega_0 t$	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
2	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	8	sh $\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}$	$\frac{z \operatorname{sh} \omega_0 T}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega_0 T + 1}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$	9	ch $\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 - \omega_0^2}$	$\frac{z(z - \operatorname{ch} \omega_0 T)}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega_0 T + 1}$
4	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$	10	e^{-at} - e^{-\beta t}	$\frac{\beta - \alpha}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{z(e^{-\alpha T} - e^{-\beta T})}{(z - e^{-\alpha T})(z - e^{-\beta T})}$
5	sin $\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	11	a_0 + a_1 t	$\frac{a_0(s + \frac{a_1}{a_0})}{s^2}$	$\frac{a_0 z (z + \frac{a_1 T}{a_0} - 1)}{(z-1)^2}$
6	cos $\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	12	a_0 + a_1 t + a_2 t^2	$\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3}$	$\frac{a_0 z^2}{z-1} + \frac{a_1 T z}{(z-1)^2} + \frac{a_2 T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

### Пример

Пусть  $W_o(p) = \frac{2}{(p+1)(2p+1)}$ ,  $k_p = 1$ ,  $T_{ц} = 1$  сек. Определим  $W(z)$ .

По формуле (2) получим передаточную функцию непрерывной части системы:

$$W_{\text{нчс}}(p) = \frac{2(e^{-pT_{ц}} - e^{-2pT_{ц}})}{p(p+1)(2p+1)}. \quad (5)$$

Согласно основному свойству  $z$ -преобразования  $e^{-pT_{ц}} \Rightarrow z^{-1}$ ,  $e^{-2pT_{ц}} \Rightarrow z^{-2}$ , откуда

$$W_{\text{нчс}}(z) = (z^{-1} - z^{-2})Z\left[\frac{2}{p(p+1)(2p+1)}\right]. \quad (6)$$

Пользуясь табл. 1, п.9, запишем

$$W_{\text{нчс}}(z) = 2(z^{-1} - z^{-2})\left[\frac{z}{z-1} + 0,5\frac{z}{z-e^{-1}} - 0,5\frac{z}{z-e^{-0,5}}\right]. \quad (7)$$

После преобразований, получим

$$W_{\text{нчс}}(z) = \frac{0,3096z + 0,1878}{z^3 - 0,9744z^2 + 0,2231z}. \quad (8)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W(z) = \frac{W_{\text{нчс}}(z)}{1 + W_{\text{нчс}}(z)} = \frac{0,3096z + 0,1878}{z^3 - 0,9744z^2 + 0,5328z + 0,1878}. \quad (9)$$

Перепишем (9) в виде

$$W(z) = \frac{0,3096z^{-2} + 0,1878z^{-3}}{1 - 0,9744z^{-1} + 0,5328z^{-2} + 0,1878z^{-3}} \quad (10)$$

и составим разностное уравнение

$$y(kT_{ц}) = 0,3096y_{\text{зад}}((k-2)T_{ц}) + 0,1878y_{\text{зад}}((k-3)T_{ц}) + \\ + 0,9744y((k-1)T_{ц}) - 0,5328y((k-2)T_{ц}) - 0,1878y((k-3)T_{ц}). \quad (11)$$

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются передаточная функция объекта регулирования, коэффициент передачи регулятора и время цикла цифрового контроллера, которые задаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

Студенты самостоятельно определяют передаточную функцию в форме  $z$ -преобразования и разностное уравнение системы. Эти данные будут служить исходными для выполнения лабораторной работы №10. Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №10.

На занятии разбирается пример решения задачи.

## *Практическое занятие № 20. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений и их систем*

В работе проводится линеаризация математического описания нелинейных уравнений и систем, а также исследование их устойчивости «в малом» с применением первого метода Ляпунова.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. [6.1. Математическое описание и устойчивость нелинейных САУ](#)

### **Пример 1.**

Получить линеаризованное описание системы, описываемой в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \sqrt{x_1}; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad (1)$$

в окрестности точки покоя при  $u=1$ . Определить устойчивость статического режима по Ляпунову.

1. Определим значение координат системы в статике  $x_{10}, x_{20}$ , положив в (1) производные координат системы равными нулю:

$$\begin{cases} x_{20} - \sqrt{x_{10}} = 0; \\ -x_{10} + u = -x_{10} + 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решив систему (2), найдем:  $x_{10}=x_{20} = 1$ .

2. Разлагая уравнения системы (1) в ряд Тейлора в окрестности точки установившегося режима и отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости, получим:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 - \frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} \Delta x_1; \\ \Delta \dot{x}_2 = -\Delta x_1 + \Delta u, \end{cases} \quad (3)$$

3. Отметим, что в нашем случае  $\Delta u=0$ , поскольку рассматривается устойчивость статического режима. Составим матрицу состояния линеаризованной системы

$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

и найдем ее характеристический полином

$$\det(pE - A) = \det \begin{pmatrix} p+0,5 & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix} = p^2 + 0,5p + 1. \quad (5)$$

Характеристический полином имеет второй порядок, все его коэффициенты положительны. Следовательно, статический режим устойчив.

### **Пример 2.**

Получить линеаризованное описание системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y \frac{dy}{dt} + y^2 = u \quad (6)$$

в окрестности точки покоя при  $u=1$ . Определить устойчивость статического режима по Ляпунову.

1. Определим значение переменной  $y$  в статике, положив в (6) производные равными нулю:  $y_0 = 1$ .

2. Разлагая уравнение в ряд Тейлора в окрестности точки установившегося режима и отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости, получим:

$$\frac{d^2\Delta y}{dt^2} + 2y_0 \frac{d\Delta y}{dt} + \left( 2 \left. \frac{dy}{dt} \right|_0 + 2y_0 \right) \Delta y = \Delta u, \quad (7)$$

$$\frac{d^2\Delta y}{dt^2} + 2 \frac{d\Delta y}{dt} + 2\Delta y = \Delta u, \quad (8)$$

3. Как и в предыдущем примере,  $\Delta u = 0$ . Линейное дифференциальное уравнение имеет второй порядок, все его коэффициенты положительны. Следовательно, оно соответствует устойчивой системе. Исходная нелинейная система будет устойчива при малых отклонениях.

### **Порядок выполнения работы**

Исходными данными к выполнению работы являются: 1) система нелинейных дифференциальных уравнений, 2) нелинейное дифференциальное уравнение высокого порядка 2) величины управляющих сигналов в статике.

Студенты определяют значение всех координат в статике, линеаризованное описание систем и их устойчивость.

Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы №11.

На занятии разбираются примеры решения задачи.

### ***Практическое занятие №21. Исследование нелинейных САР на фазовой плоскости***

В работе производится построение фазового портрета нелинейной системы регулирования.

#### **Теоретические сведения**

Метод фазовых траекторий представляет собой графо-аналитический способ исследования нелинейных систем. Сущность метода заключается в описании поведения систем при помощи наглядных геометрических представлений – фазовых портретов.

Свободное движение нелинейной динамической системы управления с одной управляемой величиной  $x(t)$  в общем случае можно описать с помощью  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j[x_1(t), x_2(t), \dots; x_j(t), \dots, x_n(t)], \quad (j = 1; 2; \dots; n), \quad (1)$$

где  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ , ...  $x_{j+1}(t) = \dot{x}_j(t)$  – фазовые переменные состояния.

Мгновенное состояние системы и ее дальнейшее поведение однозначно определены, если в данный момент времени  $t = t_1$  известны значения всех  $n$  переменных  $X_j$ . Эти значения можно рассматривать как координаты точки  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  в  $n$ -мерном пространстве, которое называется фазовым пространством (здесь термин «фаза» имеет тот же смысл, что и слово «стадия»).

Точку с координатами  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  называют *изображающей точкой*, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния системы – *фазовой траекторией*.

Как известно, конкретной группе начальных условий  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$ ; ...;  $x_n(0) = x_{n0}$  соответствует единственное решение системы (1) – определенная совокупность искомых функций времени  $x_1(t)$ ;  $x_2(t)$ ; ...;  $x_n(t)$ . Поэтому каждой группе начальных условий соответствует только одна начальная точка и единственная фазовая траектория, а множеству групп начальных условий соответствует целое семейство траекторий, которое называется *фазовым портретом* системы.

Метод фазового пространства наиболее удобен для анализа систем второго порядка, так как их фазовые траектории располагаются в одной плоскости - в фазовой плоскости переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Фазовый портрет этих систем можно построить непосредственно по дифференциальному уравнению, не решая его.

Пусть описание системы представлено в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} dx_1 / dt = f_1(x_1, x_2); \\ dx_2 / dt = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1 = x$  – отклонение выходной величины или сигнала ошибки от установившегося значения.

Если в качестве второй переменной состояния  $x_2$  принята производная переменной  $x_1 = x$ , т. е. Если  $x_2 = \dot{x}$ , то всегда функция  $f_1(x_1, x_2) = x_2$ .

Разделив второе уравнение системы (2) на первое, можно получить уравнение фазовых траекторий в дифференциальной форме

$$dx_2 / dx_1 = f_2(x_1, x_2) / x_2, \quad (3)$$

в котором независимой переменной является величина  $x_1$ , а зависимой –  $x_2$ .

Разделяя далее переменные  $x_1$  и  $x_2$  и интегрируя уравнение (3), можно получить уравнение фазовых траекторий в явном виде

$$x_2 = F(x_1) + C_0, \quad (4)$$

где  $C_0$  - постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

Рассмотрим характерные фазовые траектории (рис. 1, б, г, е) системы второго порядка, соответствующие затухающему (рис. 1, а), расходящемуся (рис. 1, в) и незатухающему (рис. 1, д) колебательным процессам. Моменты времени  $t_1, t_3, t_5$ , когда кривые  $x(t)$  достигают своих максимумов и минимумов, соответствуют пересечению фазовыми траекториями оси  $x_1 = x$ , а моменты прохождения кривыми  $x(t)$  через нуль ( $t_2, t_4$ ) — пересечению оси  $x_2 = \dot{x}$ .

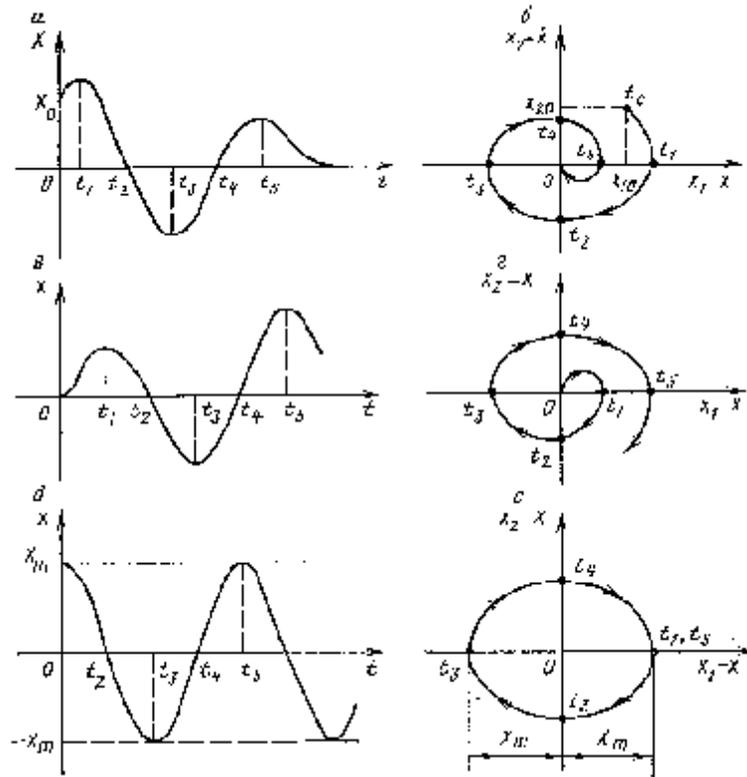


Рис. 1. Переходные процессы и фазовые траектории нелинейной системы а, б — устойчивой; в, г — неустойчивой; д, е — на границе устойчивости

Построение фазовых траекторий значительно облегчается, если учитывать их следующие общие свойства, вытекающие из анализа выражений (2) и (3).

В верхних квадрантах фазовой плоскости изображающая точка движется всегда слева направо, а в нижних — справа налево. Это объясняется тем, что при  $x_2 = \dot{x} > 0$  переменная  $x_1 = x$  возрастает, а при  $x_2 = \dot{x} < 0$  переменная  $x_1 = x$  убывает.

В любой точке фазовой плоскости, где переменная  $x_2$  и функция  $f_2$  не равны нулю, фазовая траектория имеет только одно определенное направление, соответствующее значению производной  $dx_2/dx_1$  в данной точке. Из этого следует, что фазовые траектории в таких точках не пересекаются.

Согласно выражению (3) при  $x_2=0$  производная  $dx_2/dx_1=\infty$  т. е. фазовые траектории пересекают ось  $x_1$  под прямым углом, а переменная  $x_1=x$  достигает своего максимума. Если при  $x_2=0$  одновременно равна нулю функция  $f_2$ , то фазовая траектория в таких особых точках плоскости не имеет определенного направления, а обе производные  $x_1$  и  $x_2$  согласно уравнениям (2) равны нулю. Последнее означает, что изображающая точка неподвижна, а исследуемая система управления находится в состоянии равновесия.

Особые точки могут быть обособленными или образовывать целые особые отрезки на оси  $x_1$ . Такие отрезки называются отрезками покоя. У систем с релейными характеристиками длина отрезка покоя равна зоне нечувствительности.

Самые важные для анализа нелинейных систем свойства фазовых траекторий заключаются в следующем:

1. Затухающему (устойчивому) переходному процессу соответствует фазовая траектория, сходящаяся к началу координат или к отрезку покоя.
2. Неустойчивому процессу соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат.
3. Периодическому процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, называемая предельным циклом.

Предельный цикл может быть устойчивым или неустойчивым. Если все соседние фазовые траектории стягиваются к предельному циклу, то он является устойчивым и соответствует автоколебаниям. Если же соседние траектории отходят от цикла, то он является неустойчивым.

Фазовый портрет нелинейной системы, обладающей кусочно-линейной или разрывной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями.

Линии, отделяющие на плоскости одну область от другой, называются *линиями переключения*.

В точках пересечения фазовыми траекториями линии переключения происходит излом траекторий. Это происходит из-за смены правой части уравнения (3).

### Порядок выполнения работы

В работе исследуется система, структурная схема которой представлена на рис.1.

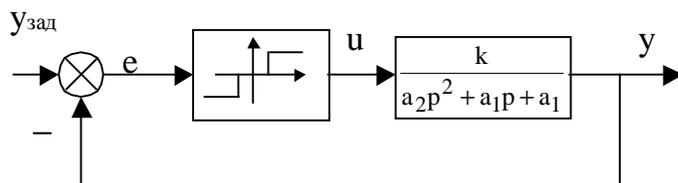


Рис. 2. Структурная схема системы

Параметры системы (коэффициенты передаточной функции, зона нечувствительности и уровень выходного сигнала релейного элемента) задаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

Необходимо построить фазовый портрет системы при нулевых начальных условиях и единичном задании.

Отчет о выполнении задания включается в отчет о выполнении лабораторной работы № 12.

На занятии решается пример.

### ***Практическое занятие № 22. Определение устойчивости нелинейной системы с помощью второго метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости Попова***

В данной работе решаются две задачи:

1) с помощью второго (прямого) метода Ляпунова определить устойчивость и область устойчивости нелинейной системы второго порядка, заданной в пространстве состояний;

2) аналитически и графически определить область абсолютной устойчивости системы третьего порядка с нелинейной обратной связью (определить границы сектора, в котором должна лежать характеристика нелинейного элемента).

#### **Теоретические сведения**

##### **Второй метод Ляпунова**

Второй (прямой) метод Ляпунова является общим методом исследования устойчивости любых нелинейных систем. Он дает достаточные условия устойчивости, т.е. определяет часть области устойчивости. Формулировка достаточного условия устойчивости следующая:

*Если можно указать такую знакоопределенную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  координат системы (функцию Ляпунова), производная которой по времени  $dV/dt$ , согласно дифференциальным уравнениям системы, тоже является знакоопределенной функцией, но противоположного знака, то возмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Знакоопределенной функцией называется функция, которая при всех значениях переменных имеет один знак, а в начале координат обращается в нуль.

Часто в качестве функций Ляпунова и их производных выступают квадратичные формы координат системы. В матричном виде они записываются следующим образом:

$$Q(X) = X^T P X, \quad (1)$$

где  $X$  – вектор столбец координат системы,  $P$  – квадратная матрица коэффициентов квадратичной формы.

Согласно *критерию Сильвестра*, для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  (определители вдоль главной диагонали) матрицы  $P$  были положительны:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (2)$$

Достаточное условие отрицательной определенности квадратичной формы имеет вид

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, \quad (3)$$

т.е. определители должны последовательно чередовать знак, причем знак первого определителя должен быть отрицательным.

**Пример 1.**

Пусть имеется система, описываемая уравнениями в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3. \end{cases} \quad (4)$$

Найдем область устойчивости системы.

Составим функцию Ляпунова в виде

$$V(x_1, x_2) = \alpha x_1^4 + \frac{1}{2}(\beta x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + x_2^2). \quad (5)$$

При  $\alpha > 0$  первое слагаемое в (5), очевидно, положительно определено. Второе слагаемое представляет квадратичную форму координат системы. Оно может быть представлено в матричном виде следующим образом

$$(x_1 \ x_2) \times \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма будет положительно определенной, если все диагональные миноры ее матрицы положительны.

В нашем случае имеем

$$\Delta_1 = \beta, \quad \Delta_2 = \beta - \beta^2. \quad (7)$$

Из (7) следует, что квадратичная форма (6), а, следовательно, и функция (5) будут положительно определены при условии

$$0 < \beta < 1. \quad (8)$$

Найдем производную функции Ляпунова по времени в силу дифференциальных уравнений системы:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\alpha x_1^3 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_1 + \beta x_2 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_2 + x_2 \dot{x}_2 = \\ &= 4\alpha x_1^3 x_2 + \beta x_1 x_2 + \beta x_2^2 - \beta x_1 x_2 - \beta x_1^4 - x_2^2 - x_1^3 x_2 = \\ &= -\beta x_1^4 - (1 - \beta)x_2^2 + (4\alpha - 1)x_1^3 x_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Выбирая  $\alpha = 1/4$ , получим

$$\frac{dV}{dt} = -\beta x_1^4 - (1 - \beta)x_2^2. \quad (10)$$

С учетом неравенства (8), очевидно, что производная функции Ляпунова отрицательно определена при любых значениях  $x_1$  и  $x_2$ , что означает устойчивость системы в целом.

Для общности рассуждений, заметим, что выражение (10) представляет собой квадратичную форму относительно  $x_1^2$  и  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -(1-\beta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Диагональные миноры матрицы квадратичной формы

$$\Delta_1 = -\beta < 0, \quad \Delta_2 = \beta - \beta^2 > 0, \quad (12)$$

удовлетворяют достаточному условию Сильвестра для отрицательно определенной квадратичной формы. Далее, поскольку форма (11) отрицательно определена относительно  $x_1^2$  и  $x_2$ , она также отрицательно определена относительно и для  $x_1$  и  $x_2$ .

Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова

Абсолютной устойчивостью называют асимптотическую устойчивость свободного движения динамической системы при произвольных начальных условиях относительно положения равновесия вне зависимости от конкретной формы нелинейности.

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями вида

$$\begin{cases} y(t) = W(p)u(t); \\ u(t) = -\varphi(y(t)), \end{cases} \quad (13)$$

где  $W(p)$  – передаточная функция линейной части системы,  $\varphi(y)$  – непрерывная однозначная функция, удовлетворяющая при  $y \neq 0$  условию

$$0 < \frac{\varphi(y)}{y} < k \leq +\infty. \quad (14)$$

Условие (14) означает, что график функции  $\varphi(y)$  должен находиться в секторе, ограниченном осью  $y$  и прямой с коэффициентом наклона, равном  $k$  (рис.1).

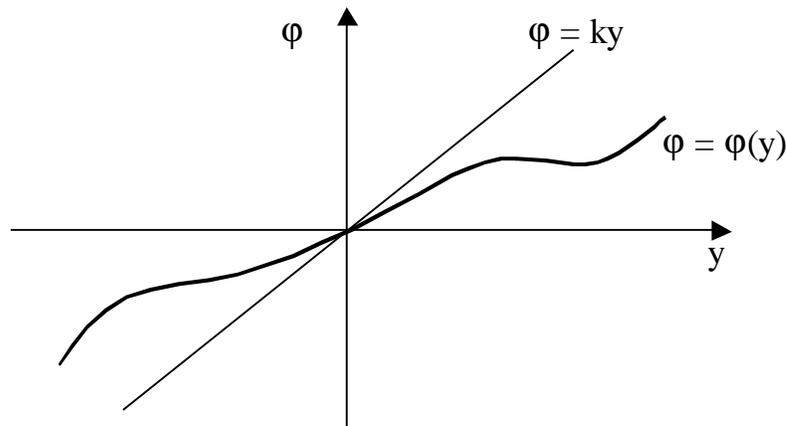


Рис.1. Статическая характеристика нелинейности

Таким образом, уравнения (13) описывают систему, состоящую из линейной части, охваченной отрицательной нелинейной обратной связью.

Сформулируем критерий абсолютной устойчивости Попова для случая, когда  $W(p)$  имеет только левые полюса (линейная часть устойчива):

*Если существует, такое вещественное число  $q$ , что при всех  $w^3$  выполнено условие*

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] \geq 0, \quad (15)$$

то система абсолютно устойчива.

Критерий допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Так как  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , то условие (15) равносильно неравенству

$$\frac{1}{k} + P(\omega) - q\omega Q(\omega) \geq 0, \quad (16)$$

Построим модифицированную частотную характеристику, изображающая точка которой определяется координатами  $P(\omega)$ ,  $\omega Q(\omega)$  (рис. 2). Условие (16) означает, что на плоскости  $P$ ,  $Q$  должна существовать прямая  $\frac{1}{k} + P - q\omega Q \geq 0$  (прямая Попова), проходящая через точку  $(-1/k, 0)$  и лежащая левее модифицированной частотной характеристики. Угол наклона этой прямой определяется параметром  $q$  (рис. 2).

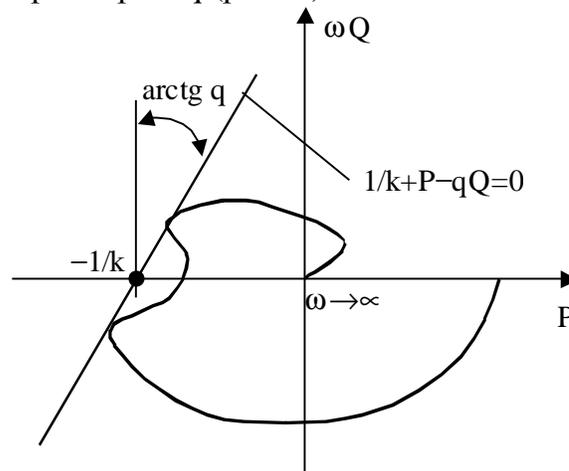


Рис. 2. Графическая интерпретация критерия абсолютной устойчивости

### Пример 2

Определить границы сектора, в котором должна лежать статическая характеристика нелинейного элемента, чтобы система, имеющая линейную часть с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} \quad (17)$$

была абсолютно устойчивой.

Передаточная функция (17) имеет только левые полюса:  $p_1 = p_2 = p_3 = -1$ , поэтому мы вправе применить для решения данной задачи критерий Попова.

Частотная характеристика линейной части системы

$$W(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{1 - 3\omega^2 - j\omega(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}. \quad (18)$$

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] = \frac{1 - 3\omega^2 + q\omega^2(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}. \quad (19)$$

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] = \frac{\omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1}{k \left[ (1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2 \right]}. \quad (20)$$

Для того чтобы при всех  $\omega \geq 0$  выполнялось условие  $\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] \geq 0$ , необходимо, чтобы при всех  $\omega \geq 0$

$$\omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1 \geq 0. \quad (21)$$

Простейший путь обеспечить неравенство (21) – потребовать выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} -kq + 3 \leq 0; \\ -3k + 3kq + 3 \geq 0, \end{cases} \quad (22)$$

откуда приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} q \leq \frac{3}{k}; \\ q \geq 1 - \frac{1}{k}. \end{cases} \quad (23)$$

Решение системы (23) существует при  $k \leq 4$ .

Таким образом, здесь доказано, что система абсолютно устойчива, если  $0 < \frac{\varphi(y)}{y} < 4$ . Однако, это не является решением задачи, поскольку неравен-

ство (21) может выполняться и в случае отрицательных коэффициентов при степенях  $\omega$ . Поэтому вполне вероятно, что существует более общее решение, и предельное значение  $k$  может быть больше четырех.

Предельное значение  $k$  соответствует случаю, когда при некотором значении  $\omega$  неравенство (21) обращается в равенство, а его левая часть достигает минимума. Поэтому решение может быть найдено из системы уравнений:

$$\begin{cases} \omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1 = 0; \\ 6\omega^5 + 4(-kq + 3)\omega^3 + 2(-3k + 3kq + 3)\omega = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Решение системы (24) затруднительно, поэтому перейдем к графическому решению задачи.

Пользуясь (18), получим уравнение модифицированной частотной характеристики линейной части:

$$\begin{aligned} W^*(j\omega) &= P(\omega) + j\omega Q(\omega) = \\ &= \frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2} + j \frac{-\omega^2(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

По (25) построим модифицированный годограф и прямую Попова (рис.3). Прямая касается годографа в точке  $(-0,125, 0)$  и имеет угол наклона  $45^\circ$ . Следовательно, предельное значение  $k = 1/0,125 = 8$ , при этом  $q = 1$ .

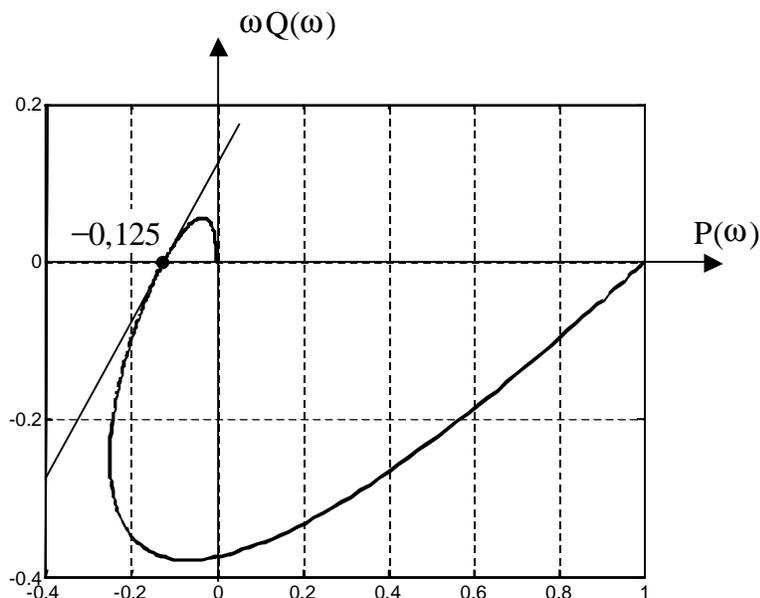


Рис. 3. Построение прямой Попова

Проверим полученные результаты, подставив найденные значения  $k$  и  $q$  в (20) и построив график функции  $\frac{1}{k} + \text{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)]$  (рис. 4).

Как видно из графика, наше предположение о характере изменения данной функции подтвердилось.

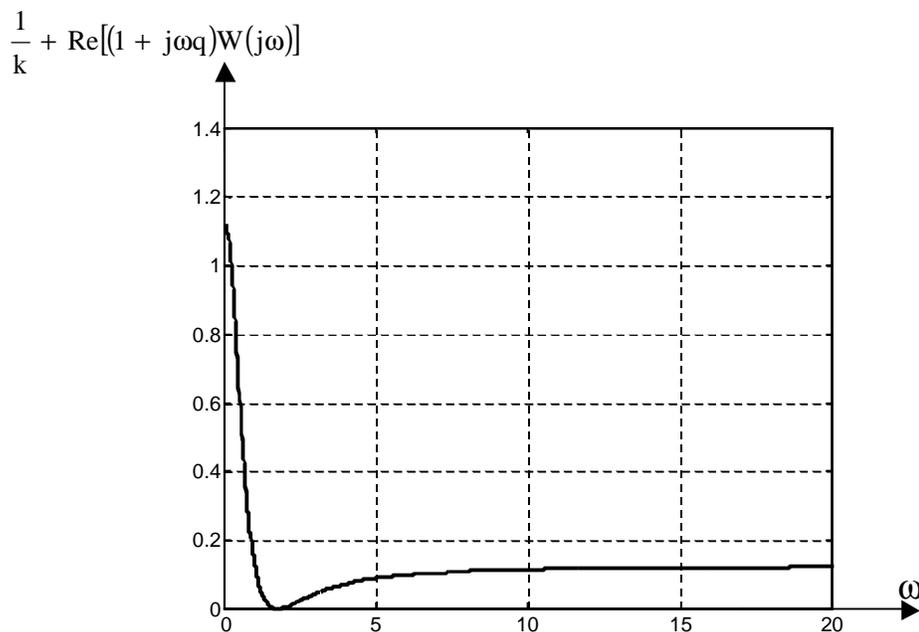


Рис. 4. График функции  $\frac{1}{k} + \text{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)]$

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются:

- 1) система из двух нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши для анализа устойчивости по Ляпунову;
- 2) передаточная функция третьего порядка для анализа абсолютной устойчивости по Попову.

Исходные данные выдаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

На занятии разбираются примеры решения задач. Отчет о выполнении практического задания строится по форме примеров, разобранных выше.

### *Практическое занятие № 23. Расчет параметров автоколебаний в релейной системе с помощью метода гармонического баланса*

В данной работе с помощью метода гармонического баланса определяются параметры автоколебаний (амплитуда и частота) в релейной системе, структурная схема которой приведена на рис. 1

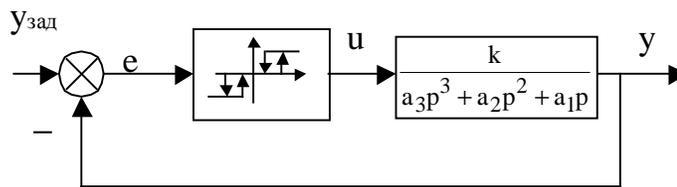


Рис. 1. Структурная схема системы

### Теоретические сведения

Теоретические сведения приведены в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в пунктах [6.3 «Особенности динамики релейных систем»](#) и [6.4 «Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации»](#).

### Порядок выполнения работы

Исходными данными к выполнению работы являются параметры релейного элемента и передаточной функции линейной части системы.

Исходные данные выдаются преподавателем индивидуально для каждого студента.

На занятии разбирается пример решения задач. Как частный случай рассматривается вариант, когда характеристика релейного элемента однозначна (идеальное трехпозиционное реле). Отчет о выполнении практического задания включается в отчет о выполнении лабораторных работ 13, 14.

***Практическое занятие № 24. Решение задачи оптимального управления методом классического вариационного исчисления***

Теоретические сведения и задания к практической и самостоятельной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления с помощью вариационного исчисления»](#).

***Практическое занятие № 25. Решение задачи на максимальное быстродействие методом максимума***

Теоретические сведения и задания к практической и самостоятельной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума»](#).

***Практическое занятие № 26. Решение задачи оптимального управления методом динамического программирования***

Теоретические сведения и задания к практической и самостоятельной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оптимальные системы»](#), в главе [«Решение задач оптимального управления методом динамического программирования»](#).

## ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ

### *Лабораторная работа № 1. Моделирование линейной системы*

#### **Цель работы:**

- изучить возможности MatLab по созданию и преобразованию моделей линейных систем;
- получить практические навыки по созданию и преобразованию моделей линейных систем;
- получить практические навыки по определению реакции типовых звеньев на типовые воздействия.

#### **Теоретические сведения**

##### *Общие характеристики пакета Control System Toolbox (CST)*

Исследование систем автоматического управления начинается с создания математической модели. В пакете CST линейные модели могут быть представлены в четырех формах:

- передаточная функция (tf);
- нули, полюса и коэффициент усиления (zpk);
- пространство состояния (ss);
- частотные характеристики (frd).

Задать модель системы в форме tf – это задать вектор коэффициентов числителя и знаменателя. Например, если в форме tf требуется представить модели системы, передаточная функция которой известна

$$W(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 10},$$

то в m-файле (или в окне команд) требуется записать следующую команду

```
h1=tf([1,0],[1,2,10])
```

Для создания модели системы в форме zpk, требуется знание нулей (корней числителя), полюсов  $p$  (корней знаменателя) и коэффициента усиления. Например, если модель задана в форме zpk

$$W(p) = \frac{2p}{(p-2)(p^2-2p+2)}$$

то в m-файле ей будет соответствовать следующие команды:

```
z = 0; p = [2, 1+j, 1-j]; k = 2;
```

```
H = zpk(z,p,k)
```

Модель системы в пространстве состояния задается системой матричных уравнений

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX + DU,$$

где  $X$  – вектор состояния;  $U$  и  $Y$  – векторы входа и выхода системы;  $A$  – матрица состояния,  $B$  – матрица управления,  $C$  – матрица выхода,  $D$  – матрица, характеризующая связь входного сигнала с выходным (матрица прямого обхода).

В частном случае, характеризующем простые системы, выход является скалярной величиной. В этом случае матрица  $C$  – это вектор строка, а матрица  $X$  – вектор столбец и их произведение дает скалярную величину.

Пусть, например, система описывается уравнениями

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

В пакете CST имеется команда `ss`, позволяющая создать модель системы в пространстве состояний

```
A = [0 1;-1 -1]; B = [0;1]; C = [1 0]; D = 0;
H = ss(A,B,C,D)
```

Модель в форме `frd` характеризует систему в частотной области. Исходными данными для создания формы `frd` являются модели, представленные формами: `tf`, `zpk` или `ss`. Для снятия частотных характеристик на вход системы подается ряд частот и команда `frd` определяет стационарную реакцию на эти возмущения. Для работы с моделью в форме `frd` в `m`-файле следует записать следующую программу, из которой следует, что исходная модель задана в форме `tf`, а тестовые сигналы задаются вектором `Fred`:

```
H=tf(num,den); %Исходные данные
Fred=[1,2,5,10]; %Входные воздействия
H1=frd(H,fred). %Реакция на входные воздействия
```

На рис.1 представлена схема, показывающая связи между математическими моделями, представленными в пакете CST.

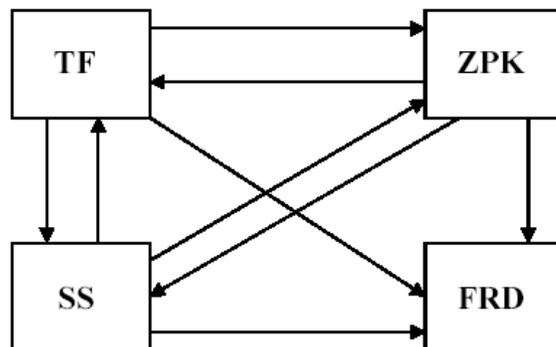


Рис.1. Схема преобразования моделей в пакете CST

Из схемы рис.1 видно, что модели, заданные в форме `tf`, `zpk` и `ss`, взаимно преобразуемы. Переход от формы `ss` к форме `tf` и `zpk` задается командами:

```
h1=ss(A,B,C,D) %Задание модели в форме ss
h2=tf(h1) %Переход от формы ss к форме tf
h3=zpk(h1) %Переход от формы ss к форме zpk
h3=zpk(h2) %Переход от формы tf к форме zpk
```

Аналогично можно записать команды, преобразующие модель формы `zpk` к другим формам представления:

```

h3=zpk(Z,P,K) %Задание модели в форме zpk
h2=tf(h3) %Переход от формы zpk к форме tf
h1=ss(h3) %Переход от формы zpk к форме ss
Модель, заданная в форме tf, может быть преобразована к формам ss и
zpk:

```

```

h2=tf(num,den)%Исходные данные, заданные вектором
                    %полинома числителя и знаменателя
h1=ss(h2) %Преобразование модели от формы tf к ss
h3=zpk(h2) %Преобразование модели от формы tf к zpk
Преобразование моделей к форме frd осуществляется из tf, ss и zpk и ну-
ждается в векторе входного тестового сигнала:

```

```

h1=tf(num,den)
h1=ss(h1)
h1=zpk(h1).
fred=(1;10;20;40)
h2=frd(h1,fred).

```

В пакете CST имеются команды, позволяющие получать математическое описание сложных систем по их структурным схемам.

Структурная схема последовательного соединения представлена на рис.2.

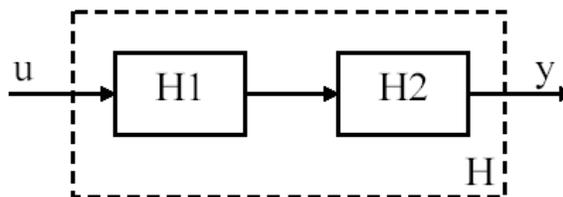


Рис.2. Структурная схема последовательного соединения звеньев

Передачная функция этого соединения  $H$  определяется следующими командами:

```

H=series(H1,H2),
или
H=H2*H1

```

При определении передаточных функций последовательно соединенных звеньев следует учитывать обратный порядок сомножителей в операции умножения и на структурной схеме.

Параллельное соединение звеньев показано на рис.3.

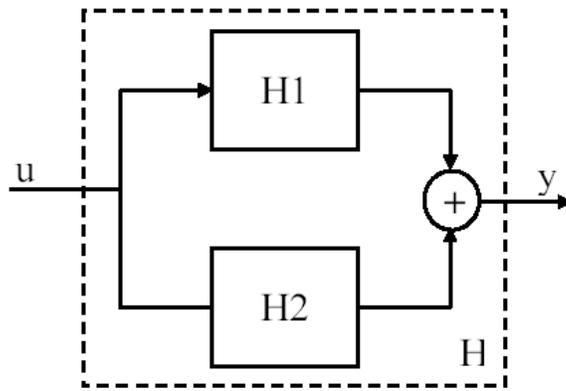


Рис.3. Структурная схема параллельного соединения

Передаточная функция  $H$  этой структуры включает следующие команды:

$$H = \text{parallel}(H1, H2),$$

или

$$H = H2 + H1$$

При охвате звена  $H1$  обратной связью структура системы принимает вид (рис. 4).

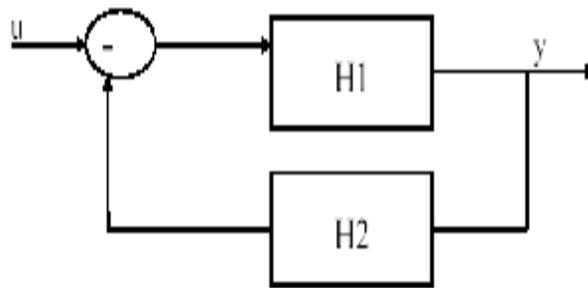


Рис.4.Обобщенная структурная схема замкнутой системы регулирования

Передаточная функция замкнутой системы определяется выражением:

$$H = \text{feedback}(H1, H2)$$

При положительной обратной связи команда определения  $H$  изменяется:

$$H = \text{feedback}(H1, H2, +1)$$

Два звена могут иметь разные входы (горизонтальной конкатенации) – рис.5.

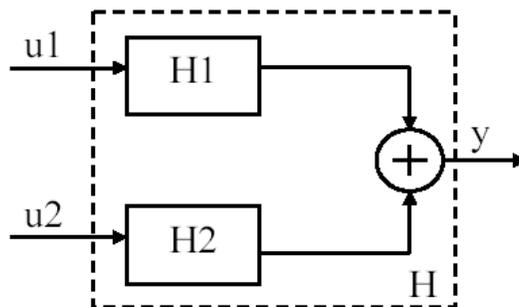


Рис.5. Структурная схема горизонтальной конкатенации

Выходная величина для горизонтальной конкатенации определяется выражением

$$y = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Передаточная функция, соответствующая структуре рис.5, определяется командой:

$$H = [H_1, H_2]$$

Если два звена имеют общий вход, но разные выходы, то такое соединение образует вертикальную конкатенацию (рис.6).

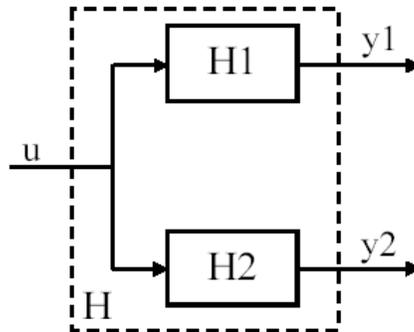


Рис.6. Структурная схема вертикальной конкатенации

Выходная величина для вертикальной конкатенации соответствует соотношению:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} u,$$

а в пакете CST этому соединению соответствует команда:

$$H = [H_1; H_2]$$

При описании моделей систем регулирования в пространстве состояния возникает необходимость компактного описания соединений блоков, представленных на рис.7.

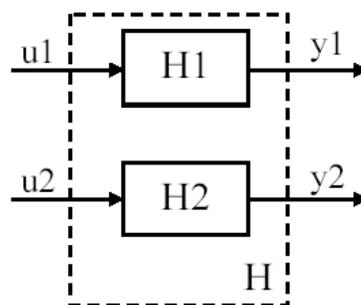


Рис.7. Структурная схема соединения блоков, формирующих результирующую (агрегативную) модель

Математическая запись структурной схемы рис.7 соответствует формированию диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

В пакете CST этому преобразованию соответствует команда:

`H=append ( H1 , H2 )`

### **Задание**

С помощью методов пакета CST выполнить следующее:

- 1) определить передаточные функции системы по передаточным функциям входящих в нее звеньев;
- 2) определить модели звеньев в пространстве состояний и, проведя необходимые вычисления, построить модель системы в пространстве состояний;
- 3) определить передаточные функции системы, используя в качестве исходной модель в пространстве состояний.

### **Исходные данные**

Исходные данные в виде структурной схемы системы и передаточных функций ее элементов выдаются студенту преподавателем на практическом занятии №2. Результаты самостоятельной работы по теме практического занятия и результаты лабораторной работы должны соответствовать друг другу.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) исходную структурную схему системы и передаточные функции ее элементов;
- 2) результаты самостоятельной работы по теме практического занятия №2;
- 3) код, промежуточные и окончательные результаты, достигнутые в ходе компьютерного моделирования.

### **Контрольные вопросы:**

1. Какие исходные данные требуются для формирования модели в форме tf ?
2. Какие исходные данные требуются для формирования модели в форме zpk?
3. Какие исходные данные требуются для формирования модели в форме ss?
4. Как сформировать выходные сигналы модели, заданной в форме frd?
5. Как записать модель в форме ss если исходные данные заданы в форме tf?
6. Как записать модель в форме ss если исходные данные заданы в форме zpk?
7. Какой командой определяется последовательное соединение звеньев?
8. Какой командой определяется параллельное соединение звеньев?
9. Какой командой определяется соединение звеньев, образующих горизонтальную конкатенацию?

10. Какой командой определяется соединение звеньев, образующих вертикальную конкатенацию?

11. Как определить передаточную функцию замкнутой системы (обратная связь отрицательная)?

12. Как определить передаточную функцию замкнутой системы (обратная связь положительная)?

13. Как, имея матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , записать дифференциальные уравнения системы?

14. Как, используя матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , представить структурную схему системы?

### ***Лабораторная работа №2. Исследование влияния коэффициента передачи на динамические свойства и устойчивость линейной системы***

#### **Цель работы:**

- изучить возможности программы SisoTool;
- получить практические навыки исследования систем в программе;
- выявить основные закономерности, связанные с влиянием коэффициента передачи на динамические свойства системы регулирования.

#### **Теоретические сведения**

##### **Программа SisoTool**

В состав пакета Control Systems, наряду с «низкоуровневыми» средствами представления и исследования линейных объектов и систем, входит программа SisoTool, представляющая собой достаточно мощный инструмент анализа и синтеза одномерных линейных систем с типовыми структурами. Программа написана на языке Matlab, что демонстрирует не только «вычислительные» возможности языка, но и его возможности в плане построения полноценного пользовательского интерфейса. Запустить программу можно, введя в командном окне:

```
sisotool
```

Внешний вид главного окна программы показан на рис. 1.

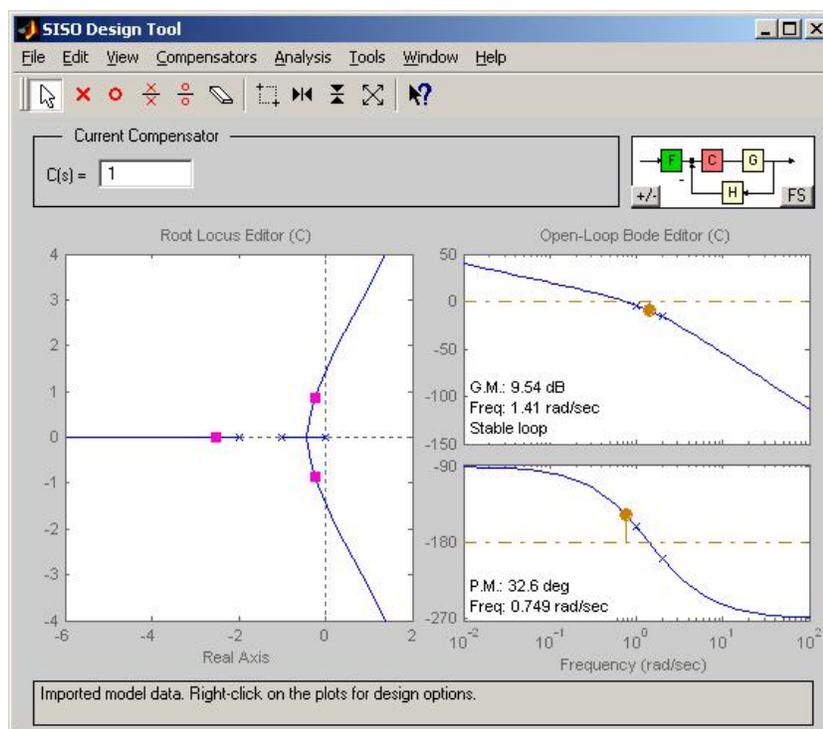


Рис. 1. Окно программы SisoTool

Программа позволяет анализировать четыре типовые структуры линейных систем. Структура исследуемой системы показана в верхней правой части окна. Изменение структуры производится с помощью кнопки FS (см. рис. 1). Четыре блока, формирующие структуру системы, имеют следующее назначение:  $G$  – объект регулирования (в широком понимании этого термина);  $H$  – датчик обратной связи;  $F$  – предварительный фильтр;  $C$  – компенсатор (регулятор, корректирующее устройство и т.д.). Математическое описание этих блоков может быть представлено в виде SISO-объектов классов *ss*, *tf*, *zpk*. Объекты загружаются в программу из рабочей области (WorkSpace) Matlab, MAT-файла, или Simulink-диаграммы с помощью функции Import меню File. Особое место среди блоков занимают блоки  $F$  и  $C$ : после предварительной загрузки их математическое описание можно редактировать путем изменения, добавления и удаления полюсов и нулей передаточных функций, а также изменения коэффициентов. Это можно сделать с помощью меню Compensators или двойного щелчка мыши непосредственно на блоках. Кроме того, параметры компенсатора  $C$  выводятся в области Current Compensator главного окна программы. Для задания коэффициента компенсатора эта область имеет поле ввода. Нули и полюса компенсатора можно добавлять и удалять с помощью панели инструментов.

По умолчанию в главном окне программы SisoTool располагаются редактор размещения полюсов замкнутой системы и редактор частотных характеристик разомкнутой системы.

Редактор размещения полюсов представляет собой карту нулей и полюсов компенсатора (красные «кружочки» и «крестики») и полюсов замкнутой

системы (красные «квадратики»). С помощью мыши можно изменять положение нулей и полюсов компенсатора, одновременно наблюдая изменение полюсов замкнутой системы. На карте также показаны траектории движения последних при изменении коэффициента компенсатора. Передвигая по ним полюса, можно наблюдать изменение текущего значения этого коэффициента.

Редактор частотных характеристик разомкнутой системы включает ее ЛАЧХ и ФЧХ, на которых «кружочками» и «крестиками» отмечены частоты, соответствующие нулям и полюсам. «Кружочки» и «крестики», относящиеся к компенсатору, выделены красным, их положение можно изменять с помощью мыши. Кроме отображения характеристик, редактор предоставляет информацию об устойчивости системы, выдавая значения запасов устойчивости по амплитуде и фазе.

Изменить содержание главного окна программы можно с помощью меню View.

Меню Analysis предоставляет широкие возможности по анализу САР путем построения различных временных и частотных ее характеристик в отдельных окнах. Следует отметить, что временные характеристики могут быть построены не только по каналу задание – выход, но и по другим каналам, связывающим входные воздействия с «промежуточными» величинами системы (см. пункт меню Other Loop Responses). При этом изменение параметров системы в главном окне ведет к автоматическому пересчету характеристик во всех открытых окнах. Таким образом, можно, например, изменяя нули и полюса системы или компенсатора, наблюдать за изменением переходной характеристики системы.

Меню Tools предлагает дополнительные инструменты, в частности для построения Simulink-модели системы.

Результаты работы в программе SisoTool в виде передаточных функций компенсатора, предварительного фильтра и системы в целом могут быть сохранены как в рабочей области Matlab (пункт Export меню File), так и в MAT-файле (пункт Save Session).

### **Задание**

С помощью программы SisoTool выполнить следующее:

- 1) построить корневой годограф системы при изменении коэффициента передачи  $k_p$ ;
- 2) определить значения коэффициента передачи, соответствующие
  - максимальному быстродействию при апериодическом характере переходной характеристики (зафиксировать время переходного процесса);
  - максимальному быстродействию системы (зафиксировать время переходного процесса);
  - перерегулированию 20% (зафиксировать время переходного процесса);
  - перерегулированию 60% (зафиксировать время переходного процесса);

3) построить переходные характеристики, АФЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы и ЛАЧХ замкнутой системы для всех четырех вариантов  $k_p$ .

#### **Исходные данные**

Исходные данные в виде структурной схемы системы и передаточных функций ее элементов выдаются студенту преподавателем на практическом занятии №4. Результаты самостоятельной работы по теме практического занятия и результаты лабораторной работы должны соответствовать друг другу.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) исходную структурную схему системы и передаточные функции ее элементов;
- 2) результаты самостоятельной работы по теме практического занятия №3;
- 3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы в программе SisoTool (см. Задание).

#### **Контрольные вопросы:**

1. При каком коэффициенте передачи полюса замкнутой системы совпадают с полюсами разомкнутой?
2. Что можно сказать о полюсах замкнутой системы, обеспечивающих максимальное быстродействие?
3. Что можно сказать о полюсах замкнутой системы, находящейся на границе устойчивости?
4. Как по значениям полюсов определить частоту колебаний в замкнутой системе?
5. Как влияют нули передаточной функции замкнутой системы на ее устойчивость?
6. Как по значениям полюсов оценить быстродействие замкнутой системы?

#### ***Лабораторная работа №3. «Экспериментальное» определение запасов устойчивости замкнутой системы с помощью имитационного моделирования***

#### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования динамических систем при гармонических воздействиях;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов устойчивости по темам практического занятия №6.

#### **Теоретические сведения**

При оценке устойчивости систем одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо еще оценивать величину запаса устойчивости, т. е. степени удаленности системы от границы устойчивости. В случае применения

критерия Найквиста запас устойчивости оценивают следующими показателями.

*Запас устойчивости по амплитуде* определяется величиной  $\Delta A$  допустимого увеличения значения коэффициента передачи по амплитуде, при котором система окажется на границе устойчивости.

*Запас устойчивости по фазе* определяется величиной  $\Delta\varphi$ , на которую должно увеличиться запаздывание по фазе, чтобы система оказалась на границе устойчивости.

В данной работе эти показатели определяются «экспериментально» с помощью виртуальной лабораторной установки, вид которой показан на рис. 1.

Установка представляет собой Simulink-модель замкнутой системы регулирования. Блок Transfer Fcn моделирует передаточную функцию «исходной» разомкнутой системы. Кроме него в систему «искусственно» введены блок «K» (типа Slider Gain) – для изменения коэффициента передачи разомкнутой системы и блок «Variable Transfer Delay» (переменное запаздывание) – для введения дополнительного фазового сдвига в систему. Величина запаздывания блока «Variable Transfer Delay» может регулироваться с помощью блока «tau» (типа Slider Gain). Блоки «K» и «tau» позволяют изменять свои коэффициенты передачи непосредственно в ходе выполнения сеанса имитационного моделирования (без остановки процедуры расчета). Их окна с настроечными ползунками показаны в верхнем правом углу экрана.

Кроме того, виртуальная установка содержит переключатель (типа Manual Switch), с помощью которого можно «замыкать» и «размыкать» систему регулирования.

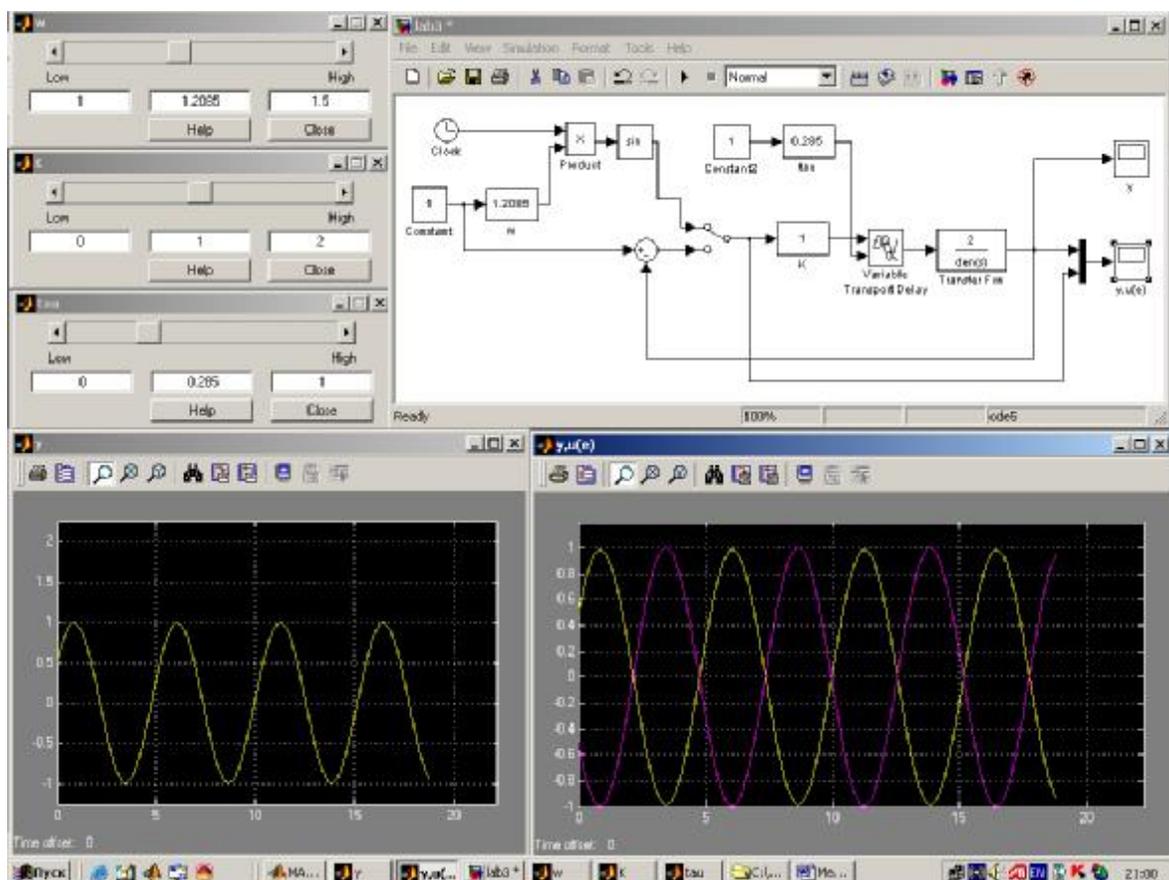


Рис. 1. Виртуальная экспериментальная установка

В разомкнутом состоянии на систему подается гармонический сигнал с единичной амплитудой. Частоту сигнала можно настраивать с помощью блока «w» (типа Slider Gain). Входной сигнал и реакция на него системы контролируются блоком «y,u(e)» (типа Scope). Все это позволяет исследовать частотные характеристики разомкнутой системы.

В замкнутом состоянии на вход системы подается единичный сигнал. Реакцию на него можно контролировать с помощью блока «u» (типа Scope) или с помощью блока «y,u(e)» (тогда кроме выходного сигнала в окне будет выводиться также сигнал ошибки регулирования).

При построении виртуальной установки следует придерживаться следующих рекомендаций:

1) все окна модели для наглядности лучше разместить так, чтобы они не перекрывали друг друга;

2) для расчета модели лучше использовать метод с постоянным шагом, например, ode5. Время расчета желательно установить очень большим, чтобы в ходе выполнения работы не отвлекаться на его перезапуск. Расчетный шаг нужно подобрать таким образом, чтобы графики в окнах Scope перерисовывались не очень быстро и не очень медленно. При этом в настройках блоков Scope лучше оставить ограничение на максимальное количество запоминаемых точек (Limit data point to last), а временной диапазон блоков выбрать таким, чтобы он вмещал не менее 3 – 4 периодов колебаний на всех частотах.

При расчете запасов устойчивости система поочередно выводится на границу устойчивости либо путем изменения дополнительного коэффициента передачи, либо путем изменения дополнительного запаздывания. В первом случае рассчитывается запас устойчивости по амплитуде, во втором – по фазе.

Так, если на частоте  $\omega^*$ , соответствующей фазовому сдвигу  $-180^\circ$  вывести систему на границу устойчивости, введя дополнительный коэффициент передачи  $k$  (при нулевом дополнительном запаздывании), то согласно критерию Найквиста

$$k A(\omega^*) = 1, \quad (1)$$

где  $A(\omega^*)$  – значение АЧХ «исходной» разомкнутой системы на частоте  $\omega^*$ .

Отсюда

$$A(\omega^*) = 1/k, \quad (2)$$

и, следовательно, запас устойчивости по амплитуде можно определить как

$$\Delta A = 1 - A(\omega^*) = 1 - 1/k. \quad (3)$$

Если на частоте  $\omega^{**}$ , при которой значение АЧХ «исходной» разомкнутой системы равно единице (частоте среза), вывести систему на границу устойчивости, введя дополнительное запаздывание (при  $k=1$ ), то запас устойчивости по фазе можно определить следующим образом

$$\Delta\varphi = \tau\omega^{**}, \quad (4)$$

где  $\tau$  – величина дополнительного запаздывания.

Если анализируется поведение замкнутой системы, о ее нахождении на границе устойчивости свидетельствуют незатухающие колебания на выходе (с постоянной амплитудой). Если эксперимент проводится над разомкнутой системой, ее выходные колебания должны происходить с амплитудой, равной амплитуде входных колебаний, и отставать от них по фазе на  $180^\circ$ . Другими словами, выходные колебания должны находиться в противофазе по отношению к входным.

### **Задание**

1. Построить виртуальную экспериментальную установку. Для этого использовать передаточную функцию разомкнутой системы, структура и параметры которой заданы преподавателем на практическом занятии №5.

2. Провести эксперимент по определению запасов устойчивости над разомкнутой системой по критерию Найквиста, для чего

2.1. Разомкнуть систему ручным переключателем, установить  $k = 1$ ,  $\tau = 0$  и запустить процедуру расчета.

2.2. Изменяя частоту входных колебаний, добиться, чтобы выходные колебания отставали от входных на  $180^\circ$  (т.е. найти частоту  $\omega^*$ ).

2.3. Изменяя коэффициент  $k$ , вывести систему на границу устойчивости (т.е. добиться равенства амплитуд).

2.4. Определить запас по амплитуде по формуле (3).

2.5. Вновь установить  $k = 1$ ,  $\tau = 0$ . Изменяя частоту входных колебаний, добиться, чтобы амплитуда выходных колебаний была равна амплитуде входных (т.е. найти частоту среза  $\omega^{**}$ ).

2.6. Изменяя запаздывание  $\tau$ , вывести систему на границу устойчивости (т.е. добиться, чтобы колебания находились в противофазе).

2.7. Определить запас по фазе по формуле (4).

3. Провести эксперимент по определению запасов устойчивости над замкнутой системой, для чего

3.1. Замкнуть систему ручным переключателем, установить  $k = 1$ ,  $\tau = 0$  и запустить процедуру расчета.

3.2. Изменяя коэффициент  $k$ , вывести систему на границу устойчивости (т.е. добиться автоколебаний на выходе).

3.3. Определить запас по амплитуде по формуле (3).

3.4. Вновь установить  $k = 1$ . Изменяя запаздывание  $\tau$ , вывести систему на границу устойчивости.

3.5. Определить запас по фазе по формуле (4).

### **Исходные данные**

Структура и параметры системы регулирования, заданные преподавателем на практическом занятии №5.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) схему виртуальной лабораторной установки;  
2) результаты самостоятельной работы по темам практических занятий №5 и №6;

3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы путем имитационного моделирования, а также результаты их обработки.

### **Контрольные вопросы:**

1. Что понимается под устойчивостью системы автоматического регулирования.

2. Условие устойчивости линейной системы автоматического регулирования.

3. Необходимый критерий устойчивости Стодолы.

4. Методика применения критерия устойчивости Гурвица.

5. Критерий устойчивости Михайлова.

6. Критерий устойчивости Найквиста (для систем устойчивых в разомкнутом состоянии).

7. Определение запасов устойчивости по критерию Найквиста.

8. Сущность методики определения запаса устойчивости по амплитуде, применяемой в лабораторной работе.

9. Сущность методики определения запаса устойчивости по фазе, применяемой в лабораторной работе.

## ***Лабораторная работа №4. Определение точности системы в статических и стационарных динамических режимах путем имитационного моделирования***

### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования динамических систем в статических и стационарных динамических режимах;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов статических и стационарных динамических режимах, полученных при выполнении практических заданий №7,8.

### Теоретические сведения

Точность системы в статическом и стационарном динамическом режимах оценивается величиной ошибки регулирования, т.е. разности между заданным и текущим значениями регулируемой величины.

Пусть, например, рассматривается система, структура которой приведена на рис.1.

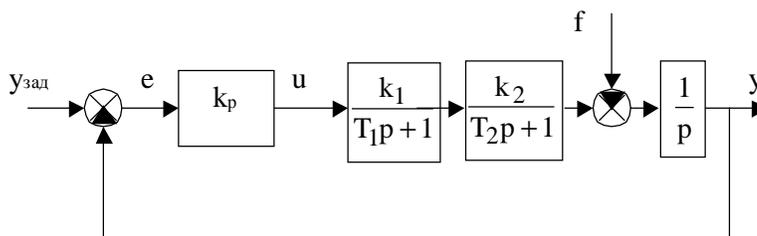


Рис.1. Структура системы автоматического регулирования

В указаниях к практическим работам № 7,8 исследовалась точность данной системы при постоянных воздействиях и при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной.

Для случая  $k_1 = k_2 = 1$  было определено уравнение статического режима системы в виде

$$y = y_{\text{зад}} - \frac{f}{k_p}. \quad (1)$$

Из (1) следует уравнение ошибки

$$e = y_{\text{зад}} - y = \frac{f}{k_p}. \quad (2)$$

В результате исследования стационарных динамических режимов системы при воздействиях с постоянной производной было выяснено, что

1) при изменении задающего сигнала с постоянной скоростью ошибка регулирования постоянна и равна

$$e = \frac{\lambda}{k_p}. \quad (3)$$

где  $\lambda$  – скорость изменения задания.

Отметим, что выражение (3) получено при условии  $f = 0$ . В общем случае для стационарного динамического режима в присутствии возмущения суммарная ошибка может быть найдено сложением (2) и (3):

$$e = \frac{f + \lambda}{k_p}. \quad (4)$$

2) при изменении возмущения с постоянной скоростью ошибка системы неограниченно увеличивается. То же самое наблюдается при изменении задающего сигнала с постоянным ускорением.

Для «экспериментального» подтверждения полученных результатов может использоваться Simulink-модель системы, представленная на рис. 2.

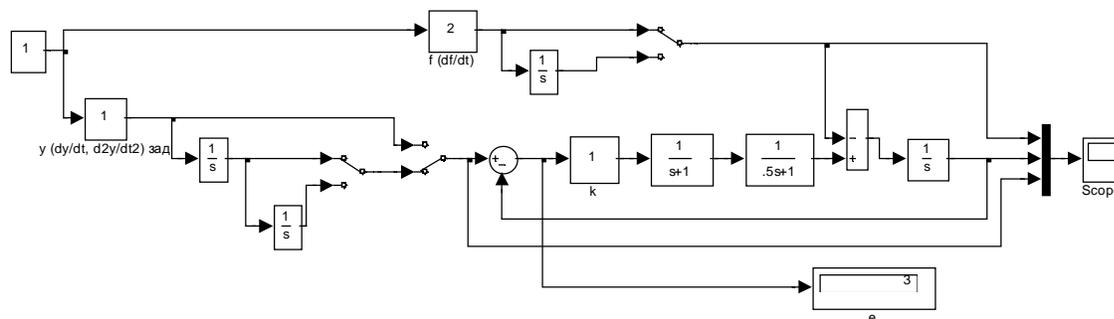


Рис. 2. Simulink-модель системы

Модель включает контур регулирования и вспомогательные цепи, предназначенные для формирования входных воздействий разного вида.

С помощью переключателей задающий сигнал можно сформировать в виде постоянного воздействия, а также воздействий, изменяющихся с постоянной скоростью и постоянным ускорением. При этом значение постоянного сигнала, скорость и ускорение задания можно изменять непосредственно при выполнении процедуры расчета с помощью блока «y (dy/dt, d2y/dt2) зад» типа «Slider Gain».

Возмущающий сигнал может быть сформирован либо как постоянное воздействие, либо как воздействие с постоянной скоростью. Значение или скорость возмущения изменяется с помощью блока «f (df/dt)» типа «Slider Gain».

Кроме того, модель содержит «переменный» коэффициент передачи «k».

С помощью блока «Scope» контролируются выходной и задающий сигналы, а также сигнал возмущения. Величина ошибки регулирования выводится на блок «e» типа «Display».

Для того, чтобы проводить исследования, не отвлекаясь на перезапуск расчета, использован метод с постоянным шагом (ode5), расчетное время поставлено достаточно большим (3000 сек.), а шаг – достаточно малым (0,01 сек.). В режимах с установившейся ошибкой это позволяет наблюдать изменения ошибки по блоку «e», настраивая коэффициенты модели с помощью блоков типа «Slider Gain». В режимах, когда ошибка неограниченно возрастает процедуру расчета можно остановить, не ожидая истечения расчетного времени. При этом изменение ошибки можно контролировать с помощью блока «Scope».

### **Задание**

1. Построить Simulink-модель исследуемой системы с вспомогательными цепями для формирования входных воздействий разного вида. Виды воздействий должны соответствовать случаям, когда ошибка нулевая (если это возможно), постоянная, отличная от нуля и неограниченно возрастающая.

2. Исследовать реакцию системы на каждое воздействие в отдельности, а также зависимость этой реакции от переменного коэффициента и построить соответствующие графики (в виде зависимости ошибки от величины воздействия или ее производной при различных значениях коэффициента). В случае неограниченно возрастающей ошибки зафиксировать график изменения ошибки со временем.

3. Исследовать реакцию системы на некоторую комбинацию воздействий, зависимость этой реакции от переменного коэффициента и построить соответствующие графики.

### **Исходные данные**

Структура и параметры системы регулирования, заданные преподавателем на практическом занятии №7.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) схему виртуальной лабораторной установки;
- 2) результаты самостоятельной работы по темам практических занятий №7 и №8;
- 3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы путем имитационного моделирования, а также результаты их обработки.

### **Контрольные вопросы:**

1. Что такое порядок астатизма системы и как он влияет на статическую ошибку регулирования по задающему воздействию?
2. Что такое порядок воздействия?
3. Чем определяется статическая ошибка регулирования в системе с нулевым порядком астатизма?
4. Каково условие отсутствия статической ошибки по возмущающему воздействию?

### ***Лабораторная работа №5. Определение характеристик случайных сигналов на входе и выходе системы с помощью имитационной модели***

#### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования динамических систем при случайных воздействиях;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по темам практических занятий №9 и №10.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующих разделах указаний к выполнению практических работ №9 и №10.

При выполнении работы требуется построить модель системы, заданной преподавателем перед выполнением практического задания №10, в Simulink и исследовать реакцию системы на случайное возмущение, сформированное преподавателем на практическом занятии №9 в виде числовой последовательности с постоянным шагом. Последовательность сохраняется в переменной – двумерном массиве, состоящем из двух столбцов. Первый столбец содержит отчеты времени, второй – значения случайного сигнала. Массив сохраняется в mat-файле. Для его загрузки в рабочую область Matlab необходимо использовать команду load.

Для «подсоединения» случайного сигнала к Simulink-модели системы применяется блок «From Workspace» из раздела «Sources» (источники сигналов).

Можно также непосредственно считывать случайное воздействие из mat-файла в Simulink-модель (не загружая его содержимое в рабочую область Matlab), используя блок «From File». При этом mat-файл должен содержать матрицу, первая строка которой содержит отчеты по времени, вторая – значения случайного воздействия. При этом, естественно, требуется предварительное преобразование формата mat-файла.

При расчете реакции системы на случайное воздействие, необходимо использовать метод с постоянным шагом, причем шаг интегрирования должен быть равен шагу изменения случайного воздействия, а время расчета – максимальному значению отчета времени воздействия.

### **Задание**

1) построить Simulink-модель системы, подать на ее вход (в точке, указанной преподавателем перед выполнением практической работы №10) случайное воздействие, сформированное и выданное преподавателем перед выполнением практической работы №9 в виде mat-файла;

2) провести имитационное моделирование и получить реакцию системы на случайное воздействие. Сохранить реакцию системы в рабочей области Matlab (см. указания к практической работе №9);

3) обработать результаты эксперимента, получив значения математического ожидания, графиков корреляционной функции и спектральной плотности, а также значения дисперсии выходного сигнала по методике, предложенной в указаниях к практической работе №9;

4) сравнить полученные результаты с результатами теоретических расчетов по программе практического занятия №10. В случае положительного результата составить отчет о выполнении практических работ № 9, 10 и лабораторной работы №5.

### **Исходные данные**

1) mat-файл, содержащий случайную последовательность для входного случайного сигнала, сформированный и выданный преподавателем перед выполнением практической работы №9;

2) структурная схема системы регулирования с указанием передаточных функций звеньев и места приложения случайного воздействия, выданная преподавателем перед выполнением практического задания №10.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) исходную структурную схему системы и передаточные функции ее элементов;

2) результаты самостоятельной работы по темам практических занятий №9 и №10;

3) результаты, достигнутые в ходе исследования системы путем имитационного моделирования, а также результаты их обработки.

### **Контрольные вопросы:**

1. Дать определение математического ожидания случайной величины.

2. Дать определение дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины.

3. Пояснить сущность гипотезы эргодичности.

4. Дать определение корреляционной функции. Указать предельные значения корреляционной функции.

5. Дать определение спектральной плотности. Указать предельные значения спектральной плотности.

6. Привести формулы для определения корреляционной функции выходного сигнала линейной системы по корреляционной функции случайного входного воздействия.

7. Привести формулы для определения спектральной плотности выходного сигнала линейной системы по спектральной плотности случайного входного воздействия.

8. Пояснить метод приближенного численного определения корреляционной функции по случайной последовательности.

9. Пояснить метод приближенного численного определения спектральной плотности по корреляционной функции.

10. Привести формулы для определения дисперсии сигнала по случайной последовательности, корреляционной функции и спектральной плотности центрированной случайной величины.

### ***Лабораторная работа №6. Определение частотных показателей качества с помощью имитационных моделей***

#### **Цель работы:**

изучение влияния коэффициента передачи на прямые и косвенные (частотные) показатели качества переходных процессов, изучение связи между

прямыми и косвенными (частотными) показателями качества переходных процессов;

### Теоретические сведения

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 4.2.3. [«Показатели качества переходных процессов»](#).

### «Лабораторная установка»

Пусть требуется выполнить программу работы для системы, структурная схема которой представлена на рис.1.

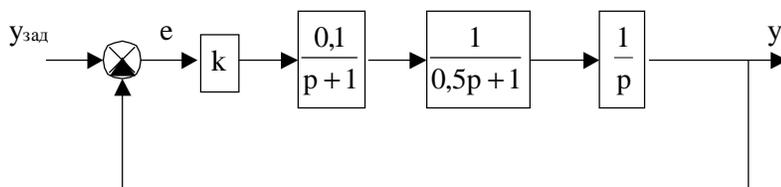


Рис. 1. Структурная схема САР

Для изучения влияния коэффициента  $k$  на переходную характеристику построим Simulink-модель (рис.2)

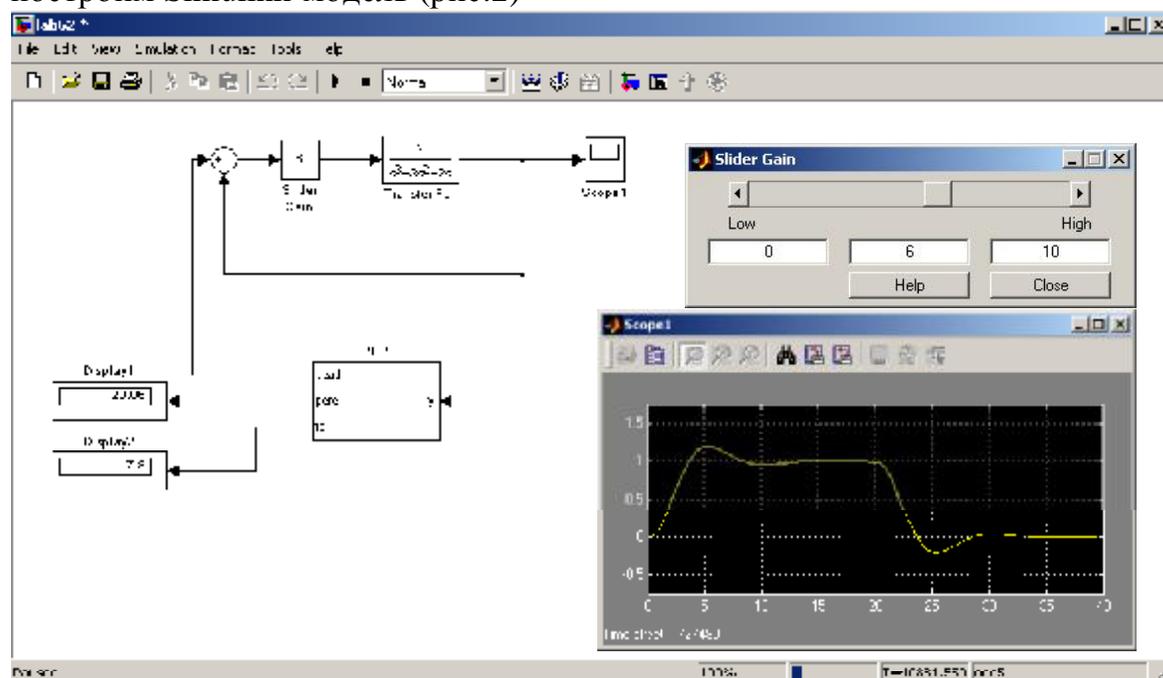


Рис.2. Simulink-модель системы для изучения влияния коэффициента  $k$  на временные характеристики

Подсистема PPP подает на вход модели САР прямоугольные импульсы единичной амплитуды, длительность которых достаточна для завершения переходного процесса. В блоке Scope 1 параметр Time range установлен равным периоду следования импульсов, поэтому имеется возможность наблюдать переходной процесс в «режиме осциллографа». Коэффициент  $k$  изменяется «вручную» с помощью блока Slider Gain непосредственно в ходе расчета

модели. Чтобы не тратить время на перезапуск, установлены следующие параметры расчета (Simulation Parameters): очень большое значение Stop time (в нашем случае 4000000 сек. или 100000 циклов); решатель с постоянным шагом ode5; малый шаг по времени (Fixed step size) 0,05 сек. Блоки Display 1 и Display 2 отражают «текущие» значения перерегулирования и времени регулирования.

На рис. 3 приведена подсистема PPP.

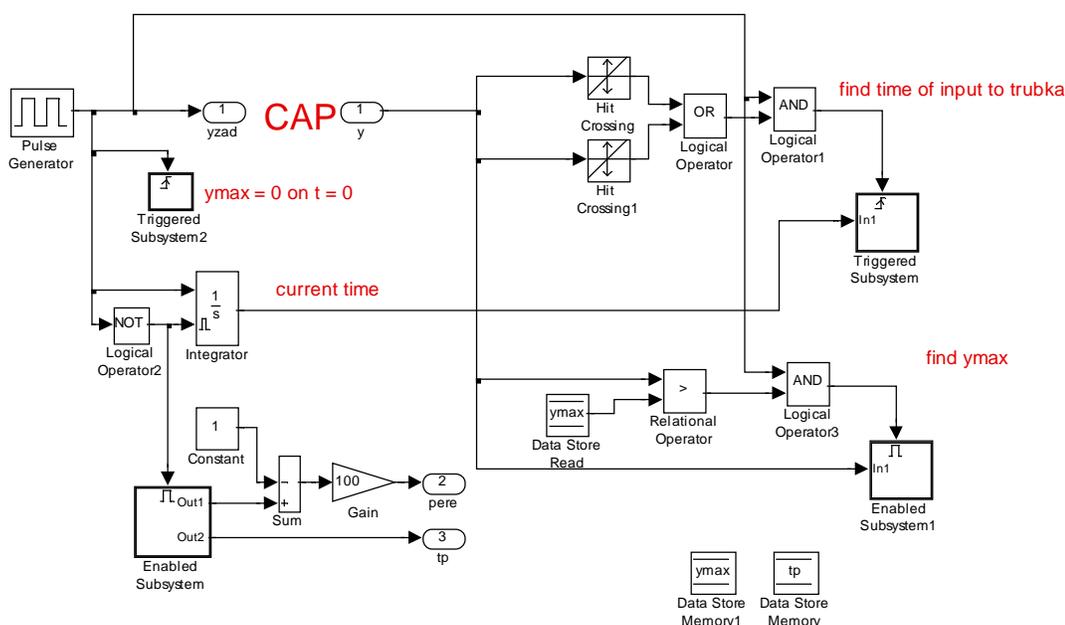


Рис.3. Подсистема PPP

В состав подсистемы входит блок Pulse generator, выдающий последовательность прямоугольных импульсов заданной длительности.

Для сохранения значений времени переходного процесса и максимума выходного сигнала CAP используются локальные переменные  $tp$  и  $y_{max}$ . Они «объявлены» с помощью блоков Data Store memory и Data Store memory1. В начале каждого периода следования импульсов переменная  $y_{max}$  обнуляется с помощью блока Triggered Subsystem 2 (рис. 4).

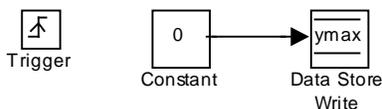


Рис. 4. Triggered Subsystem 2

Интегратор Integrator со сбросом по уровню вырабатывает сигнал времени с момента начала импульса, необходимый для расчета длительности переходного процесса.

С помощью блоков Hit Crossing и Hit Crossing 1 фиксируются моменты пересечения кривой переходного процесса значений 0,95 и 1,05 («трубка допуска»). Если это имеет место при наличии импульса (блок Logical Operator1 AND), приводится в действие блок Triggered Subsystem, который заносит время пересечения в переменную tp (рис. 5). Таким образом, к моменту снятия импульса в переменной tp будет записана длительность переходного процесса.

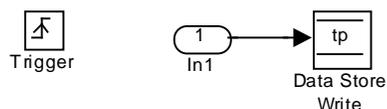


Рис. 5. Triggered Subsystem

С помощью блоков Data Store Read и Relation Operator (>) определяется максимальное значение выходного сигнала САР. Если во время действия импульса (блок Logical Operator1 AND) текущее значение «у» больше ранее запомненного ymax, считанного блоком Data Store Read, подсистема Enabled Subsystem 1 заносит его в переменную ymax (рис. 6). Таким образом, к моменту снятия импульса в переменной ymax будет записано максимальное значение выхода системы в переходном процессе.

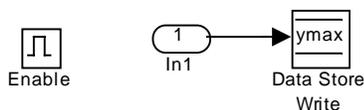


Рис.6. Enabled Subsystem 1

Расчет и вывод значений перерегулирования и времени регулирования осуществляется с помощью блоков Enabled Subsystem, Constant, Sum, Gain, pere и tp. Подсистема Enabled Subsystem активизируется только при отсутствии импульса (блок Logical Operator2 NOT) и выполняет считывание ранее полученных значений из переменных ymax и tp (рис.7). Таким образом, выходная информация обновляется только после снятия импульса, что обеспечивает ее достоверность.

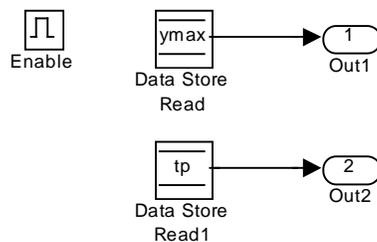


Рис.7. Enabled Subsystem

Для изучения влияния коэффициента  $k$  на запасы устойчивости построим Simulink-модель (рис.8)

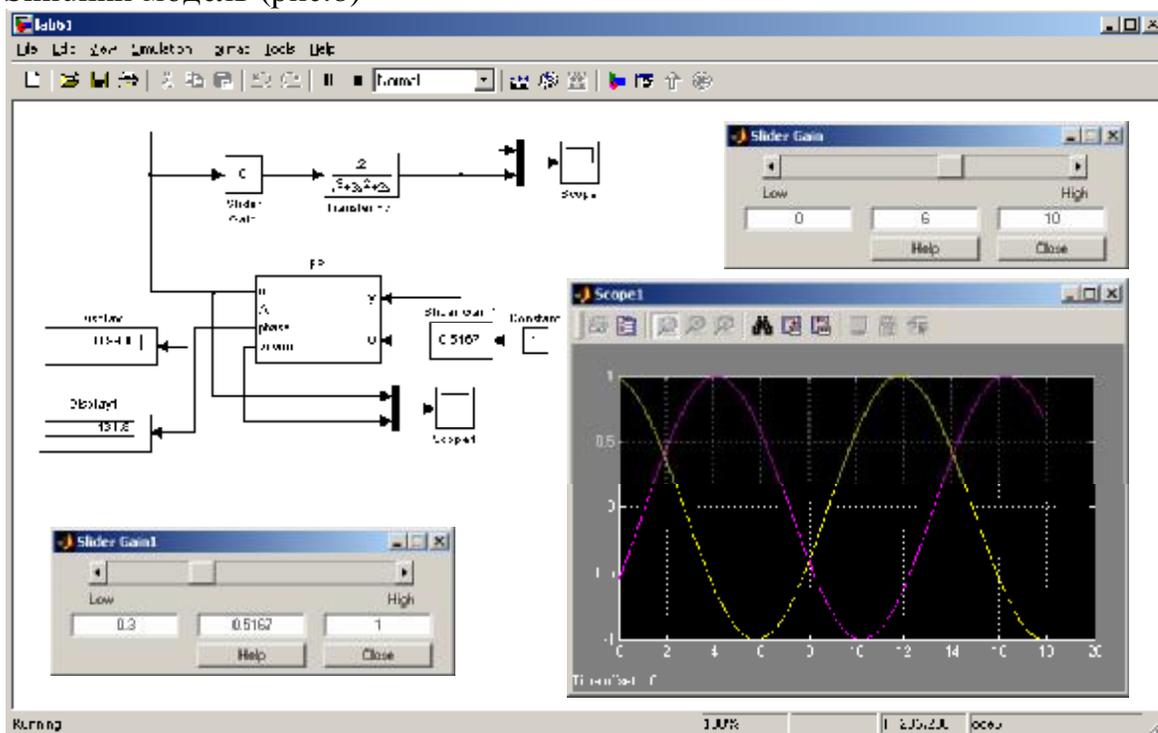


Рис.8. Simulink-модель системы для изучения влияния коэффициента  $k$  на запасы устойчивости

На вход модели разомкнутой системы подсистема FP подает синусоидальный сигнал с единичной амплитудой. Частота сигнала настраивается с помощью блока Slider Gain 1. Коэффициент передачи системы изменяется с помощью блока Slider Gain. Блоки Display и Display 1 отражают текущие значения амплитуды и фазового сдвига выходного сигнала. Блок Scope выводит графики колебаний на входе и выходе системы. То же самое делает и блок Scope1, но с дополнительной «привязкой» выходных колебаний к нулевой оси.

Чтобы не тратить время на перезапуск, установлены следующие параметры расчета (Simulation Parameters): очень большое значение Stop time (в нашем случае 30000 сек.); решатель с постоянным шагом ode5; малый шаг по времени (Fixed step size) 0,001 сек.

На рис. 9 приведена подсистема FP.

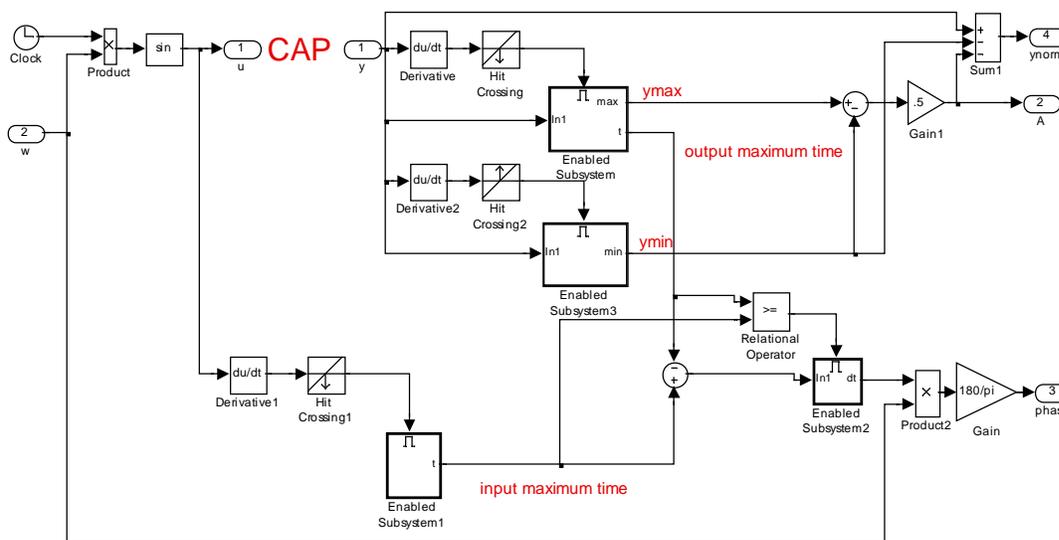


Рис. 9. Подсистема FP

Подсистема включает генератор синусоидального сигнала переменной частоты, построенный на блоках Clock, Product и sin, схем фиксации максимумов входного и выходного сигнала, а также минимума выходного сигнала и схему расчета сдвига фаз.

Максимальное значение выходного сигнала и соответствующее время фиксируются с помощью блоков Derivative, Hit Crossing и Enabled Subsystem. Подсистема Enabled Subsystem включается в работу в момент перехода производной выходного сигнала через нуль в сторону уменьшения и выдает на выход текущие значения выходного сигнала (максимальное) и время (рис. 10). Все остальное время выходы системы «заморожены».



Рис. 10. Подсистема Enabled Subsystem

Аналогично работает схема фиксации минимума выходного сигнала, построенная на блоках Derivative 2, Hit Crossing 2 и Enabled Subsystem 3, только здесь фиксируется момент перехода производной нуля в положительном направлении.

Для входного сигнала фиксируется только время его максимума (блок Enabled Subsystem 1, рис. 11).

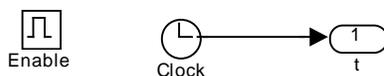


Рис. 11. Подсистема Enabled Subsystem 1

Полученные значения времен максимумов входного и выходного сигнала используются в схеме определения сдвига фазы. Подсистема Enabled Subsystem 2 (рис. 12) фиксирует разность между временем максимума входа и временем максимума выхода, если последнее больше, либо равно первому (для исключения сравнения времен не соседних максимумов).

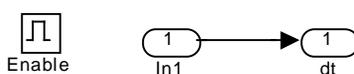


Рис. 12. Подсистема Enabled Subsystem 2

Далее, помощью блоков Product 2 и Gain вычисляется фазовый сдвиг:  $\Delta\varphi = 180\omega\Delta t/\pi$ .

Определение амплитуды выходного сигнала производится по формуле  $A = (u_{\max} - u_{\min})/2$ .

Кроме того, подсистема FP включает также схему «нормализации» выходного сигнала, работающую по формуле  $u_{\text{norm}} = u - A - u_{\min}$ .

Вынужденные колебания разомкнутых систем, содержащих звенья интегрирования, содержат постоянную составляющую, зависящую от начальных условий. Поскольку эти условия мы изменяем непосредственно в ходе расчета, изменяя частоту входного сигнала, постоянная составляющая будет меняться при каждом изменении частоты. Это мешает наглядности графиков, на которых выходные колебания совмещены с входными (см. Score). Для устранения данного недостатка и используется данная схема.

### Задание

С помощью подсистем PPP и FP провести исследования влияния коэффициента передачи системы на следующие показатели качества переходных процессов:

- перерегулирование и время регулирования;
- запасы устойчивости по амплитуде и фазе, частоту среза;
- частотный показатель колебательности и резонансную частоту системы.

мы.

Заполнить следующую таблицу:

k	$\sigma$ , %	$t_p$ , сек	$\Delta A$	$\Delta\phi$ , град	$\omega_{ср}$ , рад/сек	M	$\omega_p$ , рад/сек
	Макс. быстрый астатический процесс						
	20						
	40						
	60						

Для определения запаса устойчивости по амплитуде необходимо, изменяя частоту колебаний, вывести систему в режим  $\Delta\phi = -180$  град.

Для определения запаса устойчивости по фазе и частоты среза необходимо, изменяя частоту колебаний, вывести систему в режим  $A = 1$ .

Для определения частотного показателя колебательности и резонансной частоты следует исследовать модель замкнутой системы. Изменяя частоту, необходимо найти такое ее значение, чтобы амплитуда выходных колебаний была максимальной.

#### **Исходные данные**

- 1) структурная схема системы и передаточные функции ее элементов, полученные на практическом занятии №11;
- 2) подсистемы PPP и FP, предоставляемые преподавателем.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №11;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по заданию, изложенному выше.

#### **Контрольные вопросы:**

1. Дать определение понятию «перерегулирование».
2. Дать определение понятию «время регулирования».
3. Дать определение понятию «запас устойчивости по фазе».
4. Дать определение понятию «запас устойчивости по амплитуде».
5. Дать определение понятию «частота среза».
6. Дать определение понятию «резонансная частота».
7. Дать определение понятию «частотный показатель колебательности».
8. Какова качественная связь между частотным показателем колебательности M и перерегулированием в системе?
9. Какой характер имеет переходная характеристика в случаях, когда  $M = 0$ ,  $M \rightarrow \infty$ ?
10. Какие минимальные значения запасов устойчивости по фазе и амплитуде считаются удовлетворительными?

## **Лабораторная работа №7. Исследование моделей, заданных эталонными передаточными функциями**

### **Цель работы:**

- 1) изучение временных и частотных характеристик систем с эталонными передаточными функциями;
- 2) экспериментальная проверка результатов выполнения самостоятельной работы по теме практических работ №№13,14.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения к выполнению работы в основном приведены в указаниях к выполнению практических работ №№13,14. Недостающие сведения будут изложены в задании.

### **Задание**

1. Получить передаточные функции низкочастотных фильтров 2– 4 порядков с распределением полюсов:

- по Баттерворту;
- биномиальным;
- полученным методом стандартных коэффициентов.

Величину  $\omega_0$  взять из задания к выполнению практических работ №№14,15.

2. Построить переходные характеристики по всем передаточным функциям, используя функцию «step» Matlab. Характеристики сгруппировать по порядку передаточных функций: на одном графике привести характеристики систем второго порядка, на втором – третьего, на третьем – четвертого. Сравнить динамические характеристики систем с точки зрения показателей качества переходных процессов.

3. Построить ЛАЧХ всех фильтров, используя функцию «bode» Matlab.

Сравнить частотные характеристики по степени их приближения к частотным характеристикам идеального низкочастотного фильтра. При этом привести сравнение как систем одного порядка с различными распределениями полюсов, так и систем разных порядков с одним и тем же распределением полюсов.

4. Получить передаточную функцию замкнутой системы с регулятором, рассчитанным методом динамической компенсации в результате выполнения самостоятельной работы по теме практической работе №13 (функции Matlab «tf» и «feedback»). Получить «минимальную реализацию» этой передаточной функции (с использованием функции «minreal»). Сравнить результат с заданием к практической работе №13.

5. Получить передаточную функцию замкнутой системы с регулятором, рассчитанным с помощью уравнений синтеза. Сравнить его характеристический полином с заданным в практической работе №13. Построить переходную характеристику и ЛАЧХ системы. Выявить влияние числителя передаточной функции, сравнив полученные характеристики с характеристиками системы «без числителя» (пункты задания 2,4).

6. Ввести матрицы описания в пространстве состояний системы, синтезированной в ходе выполнения практической работы № 14 (функция «ss»). По данному описанию получить передаточную функцию системы и сравнить ее с заданной.

#### **Исходные данные**

1) передаточная функция объекта регулирования, требования к эталонной передаточной функции системы, полученные на практических занятиях №13,14;

2) передаточные функции регуляторов, полученные в результате выполнения задания по темам практических занятий №13,14.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) результаты выполнения самостоятельных заданий по темам практических занятий №№13,14;

2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по заданию, изложенному выше.

#### **Контрольные вопросы:**

1. Почему «хорошая» замкнутая система должна по своим свойствам приближаться к идеальному низкочастотному фильтру?

2. Покажите АЧХ идеального низкочастотного фильтра.

3. Какое распределение полюсов замкнутой системы обеспечивает наилучшее приближение свойств системы к свойствам идеального низкочастотного фильтра?

4. Приведите общий вид передаточной функции, используемой в качестве эталона при синтезе систем (выраженной через среднегеометрический корень  $\omega_0$ ).

5. Приведите общий вид передаточной функции низкочастотного фильтра с биномиальным распределением полюсов.

6. Как расположены на комплексной плоскости полюса систем, распределенные по Баттерворту?

7. Как изменяется быстродействие системы при увеличении среднегеометрического корня  $\omega_0$ , если остальные параметры передаточной функции остаются неизменными?

8. Приведите выражение для передаточной функции регулятора согласно методу динамической компенсации.

9. Приведите структуру регулятора (общий вид его передаточной функции), рассчитываемого с помощью уравнений синтеза.

10. Какова цель расчета регулятора с помощью уравнений синтеза?

11. Какова цель расчета регулятора в виде обратных связей по переменным состояниям объекта?

## **Лабораторная работа №8. Моделирование системы с последовательным корректирующим устройством**

### **Цель работы:**

«Экспериментальная» проверка результатов расчета последовательного корректирующего устройства, проведенного в рамках выполнения практической работы №16.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. 5.3. [«Расчет корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик»](#). В результате выполнения практической работы №16 получена передаточная функция последовательного корректирующего устройства.

### **Задание**

1. Получить передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем автоматического регулирования с последовательным корректирующим устройством без учета балластного звена, входящего в его структуру, определенным в результате выполнения практического задания №16 (применяемые функции Matlab: tf, feedback).

2. Получить «минимальную реализацию» передаточной функции разомкнутой системы с помощью функции minreal (производящей необходимые сокращения полиномов числителя и знаменателя). Сравнить полученную передаточную функцию с эталонной передаточной функцией разомкнутой системы.

3. Построить переходную характеристику замкнутой системы (используя функцию Matlab step) и определить показатели качества переходного процесса: время регулирования и перерегулирование. Сравнить полученные показатели с заданными в практическом задании №16.

4. Построить Simulink-модель системы с учетом балластного звена, входящего в состав передаточной функции корректирующего устройства.

С помощью модели найти максимальное значение постоянной времени балластного звена, при котором показатели качества переходного процесса удовлетворяют заданию (использовать в качестве генератора входного сигнала блок «Step»).

Подать на вход модели линейно возрастающий со скоростью 1 ед/сек сигнал (использовать в качестве генератора входного сигнала блок «Ramp»). Получить график зависимости ошибки регулирования от времени. Определить установившееся значение ошибки и сравнить его с заданным.

### **Исходные данные**

1) передаточная функция объекта регулирования, требования к показателям качества системы, полученные на практическом занятии №16;

2) передаточная функция корректирующего устройства, полученная в результате выполнения задания по теме практического занятия №16.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №16;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по заданию, изложенному выше.

### **Контрольные вопросы:**

1. Свойства каких линейных систем целиком и полностью определяются их ЛАЧХ?
2. Приведите в асимптотическом виде ЛАЧХ интегрирующего, апериодического и форсирующего первого порядка звеньев.
3. Как определяется ЛАЧХ последовательного соединения звеньев?
4. Какими показателями качества проектируемой системы определяются требования к низкочастотной асимптоте ее ЛАЧХ?
5. Какими показателями качества проектируемой системы определяются требования к среднечастотной части ее ЛАЧХ?
6. Какова зависимость между временем регулирования и частотой среза?
7. Какой наклон должна иметь асимптота ЛАЧХ разомкнутой системы, проходящая через частоту среза и какой должна быть «длина» этой асимптоты, чтобы система обладала приемлемыми показателями качества переходных процессов?
8. Из каких соображений строится низкочастотная асимптота желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы?
9. Из каких соображений строится высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы?
10. Каково условие физической реализуемости корректирующего устройства?

### ***Лабораторная работа № 9. Моделирование комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования***

#### **Цель работы:**

«Экспериментальная» проверка результатов расчетов комбинированной и двусвязной систем автоматического регулирования, проведенных в рамках выполнения практических работ №17,18.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующих разделах руководства к практическим работам №17,18.

В результате выполнения практической работы №17 получены передаточные функции регулятора и компенсирующего устройства для комбинированной системы

В результате выполнения практической работы №18 получены передаточные функции регуляторов и компенсирующих устройств для автономной системы двусвязного регулирования.

### **Задание**

1. Построить Simulink-модели систем регулирования без компенсации возмущения и с компенсацией возмущения.

2. Провести сравнительную оценку качества регулирования в рассматриваемых системах.

3. Построить Simulink-модели системы несвязного управления и автономной системы.

4. Провести сравнительную оценку качества регулирования в рассматриваемых системах.

### **Исходные данные**

1) передаточные функции объекта по каналам регулирования и возмущения, полученные на практическом занятии №17;

2) передаточные функции регулятора и компенсирующего устройства, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №17;

3) передаточные функции двусвязного объекта по четырем каналам, полученные на практическом занятии №18;

4) передаточные функции регуляторов и компенсирующих устройств, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №18.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1. Результаты выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №17, в том числе

– передаточные функции ТОО по каналам возмущения и управления (регулирования);

– структурную схему комбинированной АСР;

– расчётные формулы и результаты расчёта настроек регулятора и компенсатора;

– графики амплитудно-фазовых характеристик идеального и реального компенсаторов в частотном диапазоне  $(0, \infty)$ .

2. Результаты моделирования комбинированной системы

– графики переходных процессов в одноконтурной и в комбинированной системах управления;

– выводы по качеству управления в одноконтурной и в комбинированной системах управления с представлением значений: степени затухания  $\psi$ , величины перерегулирования  $\sigma$ , времени регулирования  $t_p$ .

3. Результаты выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №18, в том числе

– передаточные функции прямых и перекрестных каналов объекта;

– структурные схемы несвязанной и автономной АСР;

- результаты расчета настроек регуляторов и компенсаторов;
- графики частотных характеристик идеальных и реальных компенсаторов.

#### 4. Результаты моделирования автономной системы

- графики переходных процессов в системе несвязного регулирования и в автономной системе управления;
- выводы по качеству управления в системе несвязного регулирования и в автономной системе управления с представлением значений: степени затухания  $\psi$ , величины перерегулирования  $\sigma$ , времени регулирования  $t_p$ .

#### **Контрольные вопросы:**

1. Как изображаются структурные схемы комбинированных АСР двух типов?
2. Как формулируется условие абсолютной инвариантности для случая, когда  $y_0(t) = 0$ ?
3. В чём заключаются условия физической реализуемости инвариантных АСР?
4. В каких случаях для реального физического объекта компенсатор оказывается физически нереализуемым звеном?
5. Сформулируйте принцип и условие автономности для системы регулирования четырехканального объекта с двумя входами и двумя выходами.
6. Сформулируйте условия физической реализуемости автономной АСР.
7. Приведите примеры передаточных функций четырехканального объекта, когда применение «перекрестного» регулирования позволит получить физически реализуемую автономную АСР.
8. При каких условиях автономная АСР окажется физически нереализуемой при любом выборе каналов регулирования?
9. Изобразите структурную схему системы несвязанного регулирования.
10. Изобразите структурную схему автономной АСР.
11. Сформулируйте условия выбора системы несвязанного регулирования и автономной АСР в зависимости от величины коэффициента взаимной связи.

### ***Лабораторная работа № 10. Моделирование линейной импульсной системы автоматического регулирования***

#### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования и расчета импульсных систем;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №19.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующем разделе указаний к выполнению практической работы №19. В результате ее

выполнения получена передаточная системы в форме z-преобразования и разностное уравнение, связывающее вход и выход системы. Проведем дальнейшие исследования, программа которых и будет положена в основу выполнения данной лабораторной работы.

Конечная цель исследований – выяснить, как цифровая реализация будет влиять на качество переходной характеристики системы. Поэтому построим переходную характеристику «идеальной» системы. Ее передаточная функция

$$W(p) = \frac{k_p W_o(p)}{1 + k_p W_o(p)}. \quad (1)$$

В нашем случае имеем  $W_o(p) = \frac{2}{2p^2 + 3p + 1}$ ,  $k_p = 1$ . Подставив  $W_o(p)$  и  $k_p$

в (1), получим

$$W(p) = \frac{2}{2p^2 + 3p + 3}. \quad (2)$$

С помощью следующего кода Matlab построим переходную характеристику системы (рис.1):

```
W = tf(2,[2 3 3]);
step(W)
```

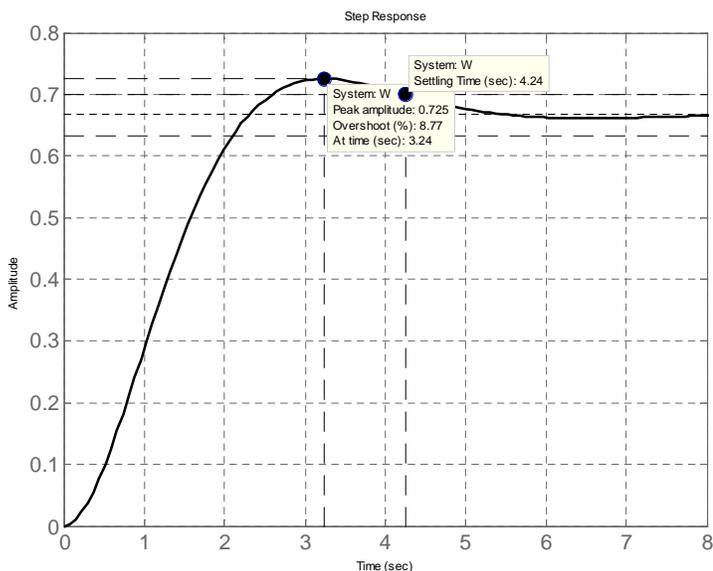


Рис. 1. Переходная характеристика «идеальной» системы  
Далее в Simulink построим модель импульсной системы (рис. 2).

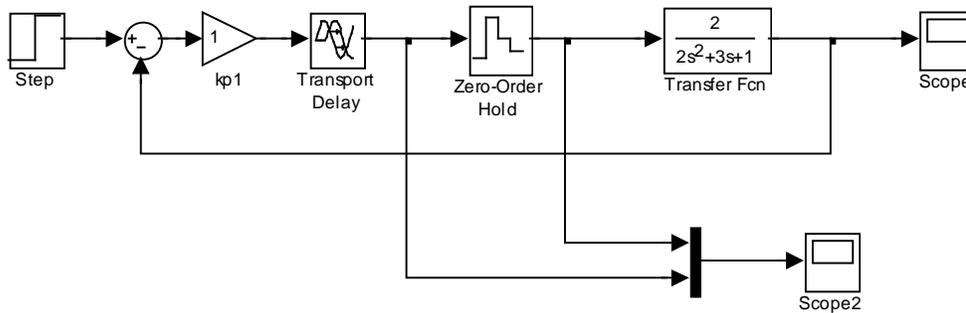


Рис.2. Модель импульсной системы в Simulink

Модель включает передаточную функцию объекта и все элементы цифрового регулятора (см. указания к практической работе №19): масштабный коэффициент, транспортное запаздывание (на один такт контроллера), равное 1 сек., преобразователь первого порядка, имитирующий работу ЦАП. Результаты моделирования приведены на рис. 3,4.

На рис. 3 показана переходная характеристика системы. Сравнив ее с переходной характеристикой «идеальной» системы, видим значительное ухудшение динамических свойств системы. Очевидно, это обусловлено слишком большим временем цикла контроллера.

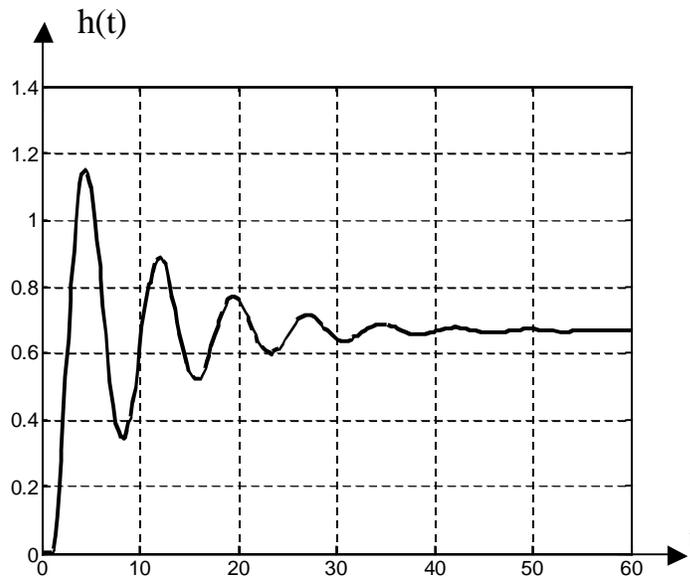


Рис.3. Переходная характеристика системы по результатам моделирования

На рис. 4 показан процесс формирования управляющего сигнала, «снятый» при помощи блока Scope2, демонстрирующий принцип работы преобразователя первого порядка.

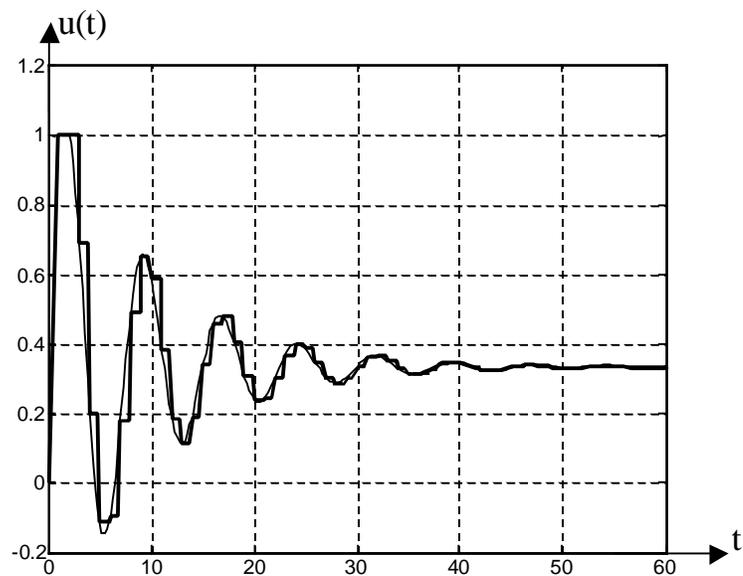


Рис. 4. Процесс формирования управляющего сигнала

Далее проверим правильность полученных на практическом занятии №19 передаточной функции системы в форме z-преобразования и разностного уравнения системы.

Построим переходную характеристику дискретной системы двумя способами:

1) по передаточной функции (рис. 5):

```
Wz = tf([.3096 .1878],[1 -.9744 .5328 .1878],1);
step(Wz)
```

2) решая разностное уравнение (рис. 6)

```
t = -3:60;
yzad = [0 0 0, ones(1,61)]; % единичное ст. возд.
y = zeros(size(yzad));
for i=4:64
    y(i) = .3096*yzad(i-2) + .1878*yzad(i-3) + ...
           .9744*y(i-1) - .5328*y(i-2) - .1878*y(i-3);
end
plot(t,y), grid
```

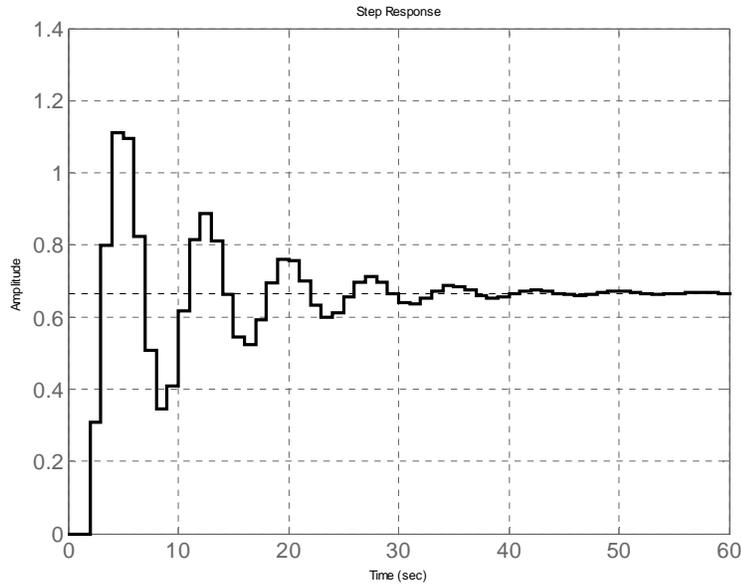


Рис. 5. Переходная характеристика дискретной системы, построенная по передаточной функции

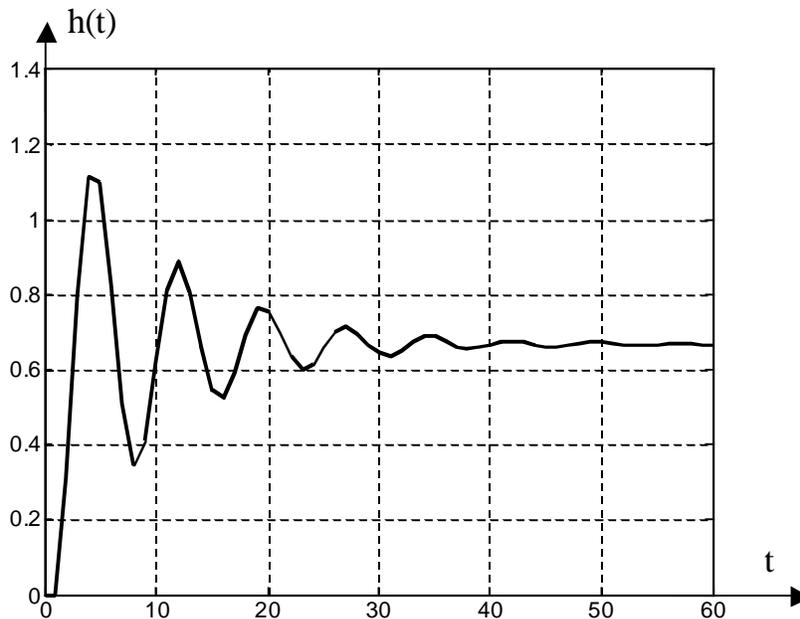


Рис. 6. Переходная характеристика дискретной системы, построенная решением разностного уравнения

Сравнив, переходные характеристики, приведенные на рис. 3,5 и 6, приходим к выводу, что они совпадают во всех расчетных точках (следующих с интервалом в 1 сек.). Это хорошо видно на фрагменте их совмещения (рис. 7).

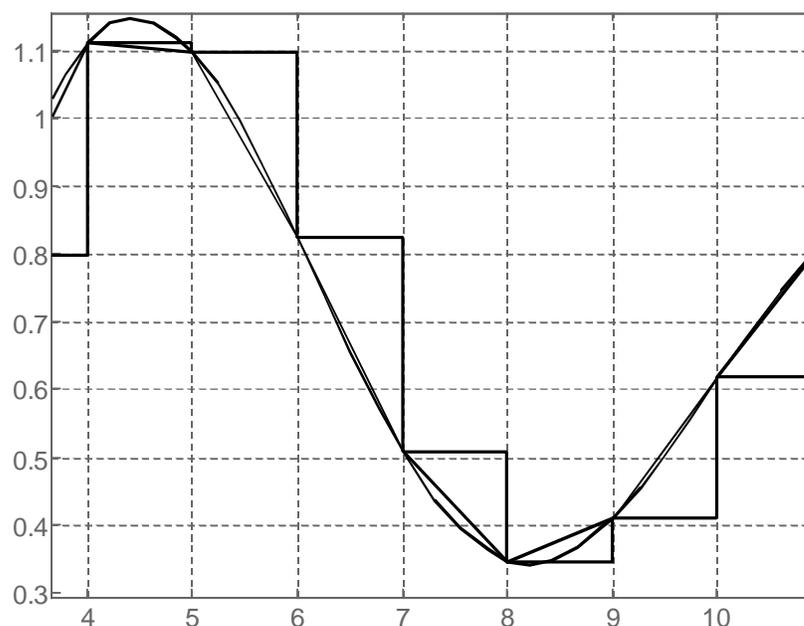


Рис. 7. Фрагмент совмещения характеристик, приведенных на рис. 3,5 и 6

Таким образом, правильность полученных на практическом занятии №19 моделей подтверждена моделированием.

#### **Задание**

Провести исследование систем и моделей, полученных в результате выполнения задания по теме практического занятия №19 по программе, изложенной выше.

#### **Исходные данные**

- 1) передаточная функция объекта регулирования, коэффициент регулятора и время цикла контроллера, полученные на практическом занятии №19;
- 2) передаточная функция системы в форме  $z$ -преобразования и разностное уравнение системы, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №19.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №19;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше.

#### **Контрольные вопросы:**

1. Дать определение импульсной системе автоматического регулирования.
2. Дать определение цифровой системы автоматического регулирования.
3. Какую функцию выполняет идеальный импульсный элемент?
4. Какую функцию выполняет формирующий элемент?
5. Опишите принцип работы преобразователя первого порядка.

6. Какое реальное устройство выполняет функцию преобразователя первого порядка?

7. Как в модели цифровой системы учитывается задержка реализации управляющего воздействия относительно момента измерения входных величин на один такт контроллера?

8. От каких факторов зависит результат дискретизации непрерывной модели?

9. Как, зная «непрерывную» передаточную функцию системы получить ее «дискретную» передаточную функцию (в форме z-преобразования), если на входе системы действует модулированная последовательность дельта-функций?

10.  $y(z)$  – изображение сигнала  $y(t)$ . Чему равен оригинал изображения  $z^{-1}y(z)$ , если  $T_c = 0,5$  сек.?

### ***Лабораторная работа № 11. Моделирование линеаризованных «в малом» систем***

#### **Цель работы:**

– получение навыков имитационного моделирования нелинейных систем;

– «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №20.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в п. [6.1. «Математическое описание и устойчивость нелинейных САУ»](#)

В лабораторной работе создаются и исследуются имитационные модели линеаризованных систем, полученные в результате выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №20. Ниже приведем продолжение исследований по примерам из практической работы №20.

Пример 1.

Достигнутые при выполнении задания результаты:

математическое описание исходной (нелинейной) системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \sqrt{x_1}; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad (1)$$

уравнения первого приближения в точке  $u = 1, x_{10}=x_{20} = 1$ :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 + 0,5\Delta x_1; \\ \Delta \dot{x}_2 = -\Delta x_1 + \Delta u, \end{cases} \quad (2)$$

статический режим при  $u=1$  устойчив «в малом».

Построим Simulink-модели исходной и линеаризованной систем (рис.1).

Настройка параметров блоков моделей показана на рис.2,3 для следующих отклонений координат систем от статического режима:  $x_{10} = 1,5$  ( $\Delta x_{10} = 0,5$ ),  $x_{20} = 0,5$  ( $\Delta x_{20} = -0,5$ ).

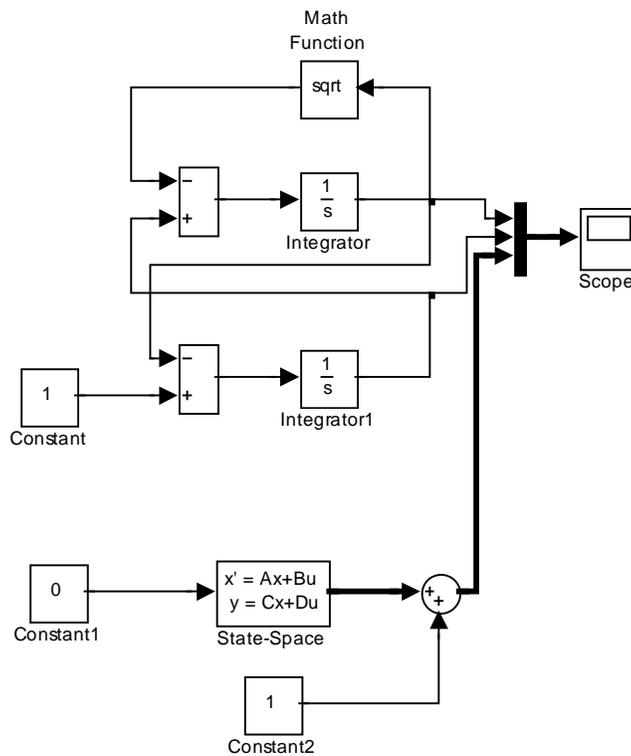


Рис. 1. Simulink-модели исходной и линеаризированной систем

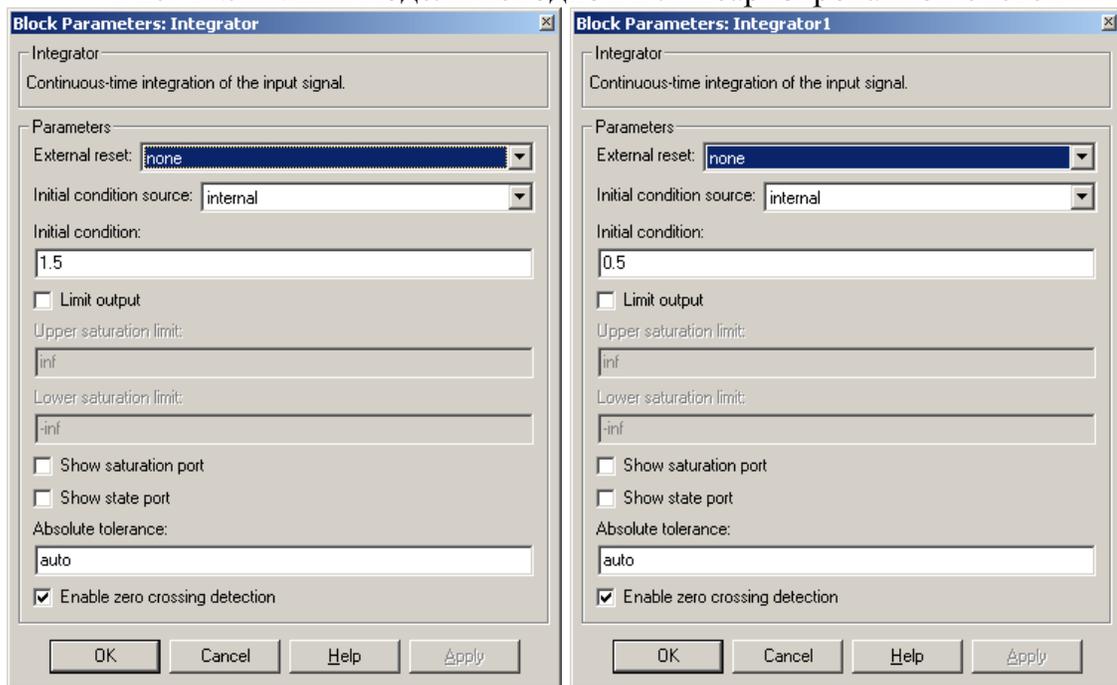


Рис. 2. Настройка блоков Integrator и Integrator1

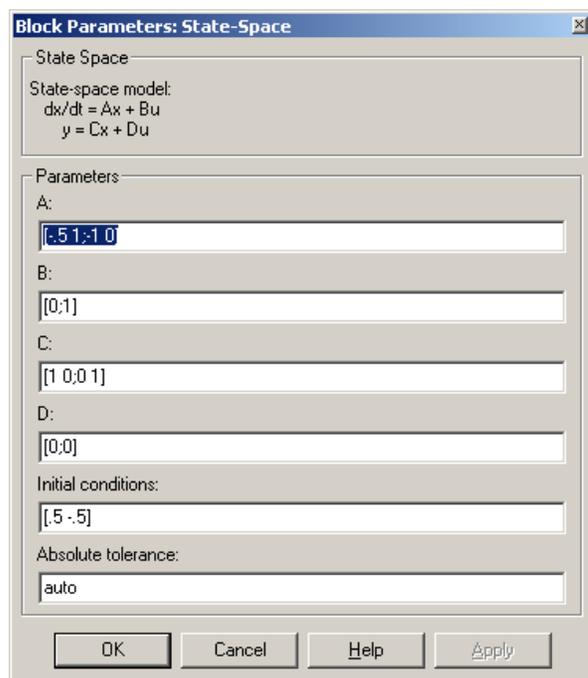


Рис.3. Настройка блока State-Space

Выходы линейной модели в отклонениях  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  (блока State-Space) искусственно смещены на единицу для совмещения графиков  $\Delta x_1(t)$ ,  $\Delta x_2(t)$  с графиками  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .

Результаты расчета имитационной модели приведены на рис. 4.

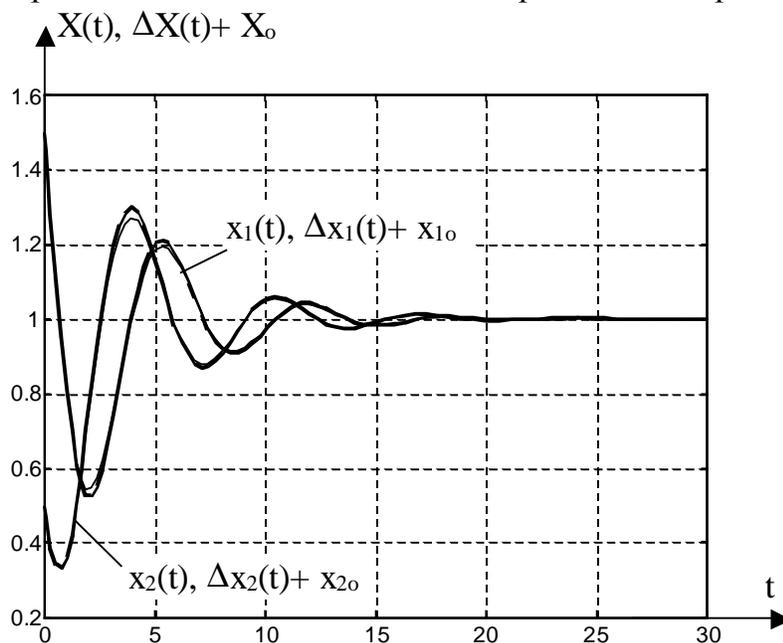


Рис.4. Результаты расчета моделей

Результаты расчета подтверждают как правильность результатов линеаризации, так и правильность вывода об устойчивости нелинейной системы «в малом».

Увеличивая начальные отклонения координат системы, наблюдаем все большее расхождение между поведением нелинейной системы и поведением линеаризованной системы. Так, при  $x_{10} = 2$  ( $\Delta x_{10} = 1$ ),  $x_{20} = 0$  ( $\Delta x_{20} = -1$ ) разница между соответствующими графиками уже достаточно заметна.

Пример 2.

Достигнутые при выполнении задания результаты:  
дифференциальное уравнение исходной системы:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y \frac{dy}{dt} + y^2 = u, \quad (3)$$

линейное дифференциальное уравнение в отклонениях от статического режима при  $u = 1$  ( $y = 1$ ):

$$\frac{d^2\Delta y}{dt^2} + 2 \frac{d\Delta y}{dt} + 2\Delta y = \Delta u, \quad (4)$$

статический режим при  $u=1$  устойчив «в малом».

Для исследования нелинейной и линейной систем построим их модели в пространстве состояний, приняв  $x_1 = y$ ,  $x_2 = dy/dt$ ,  $\Delta x_1 = \Delta y$ ,  $\Delta x_2 = d\Delta y/dt$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u - 2x_1x_2 - x_1^2, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2; \\ \Delta \dot{x}_2 = \Delta u - 2\Delta x_1 - 2\Delta x_2. \end{cases} \quad (6)$$

По уравнениям (5) и (6) построим Simulink-модели (рис. 5).

Изменяя начальные условия интеграторов, наблюдаем отклонение поведения линеаризованной модели от поведения исходной нелинейной.

На рис.6,7 показана настройка параметров блоков моделей для следующих отклонений координат систем от статического режима:  $y = x_{10} = 1,5$  ( $\Delta y = \Delta x_{10} = 0,5$ ),  $(dy/dt)_0 = x_{20} = 0,5$  ( $(d\Delta y/dt)_0 = \Delta x_{20} = -0,5$ ).

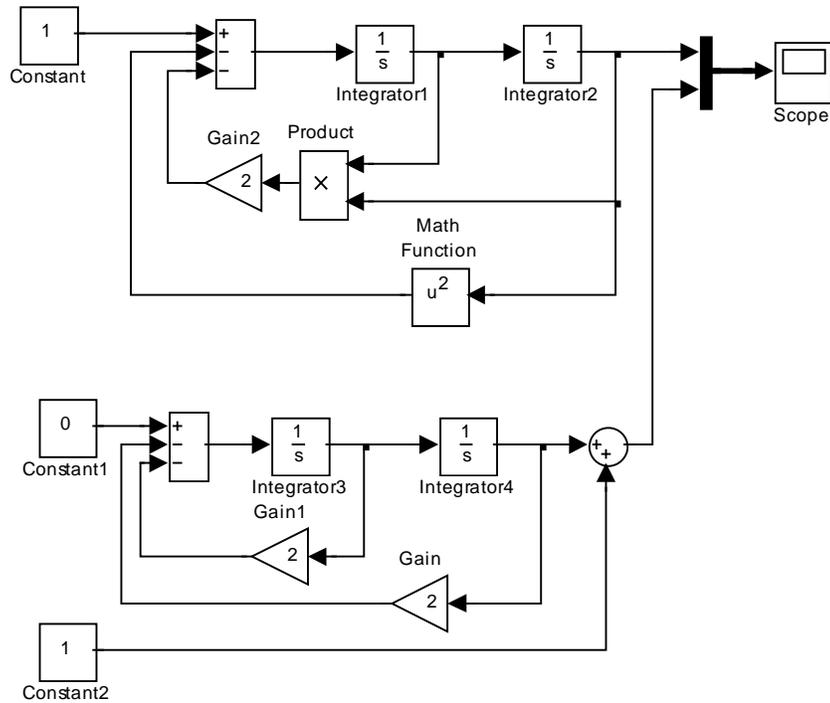


Рис. 5. Simulink-модели исходной и линеаризированной систем

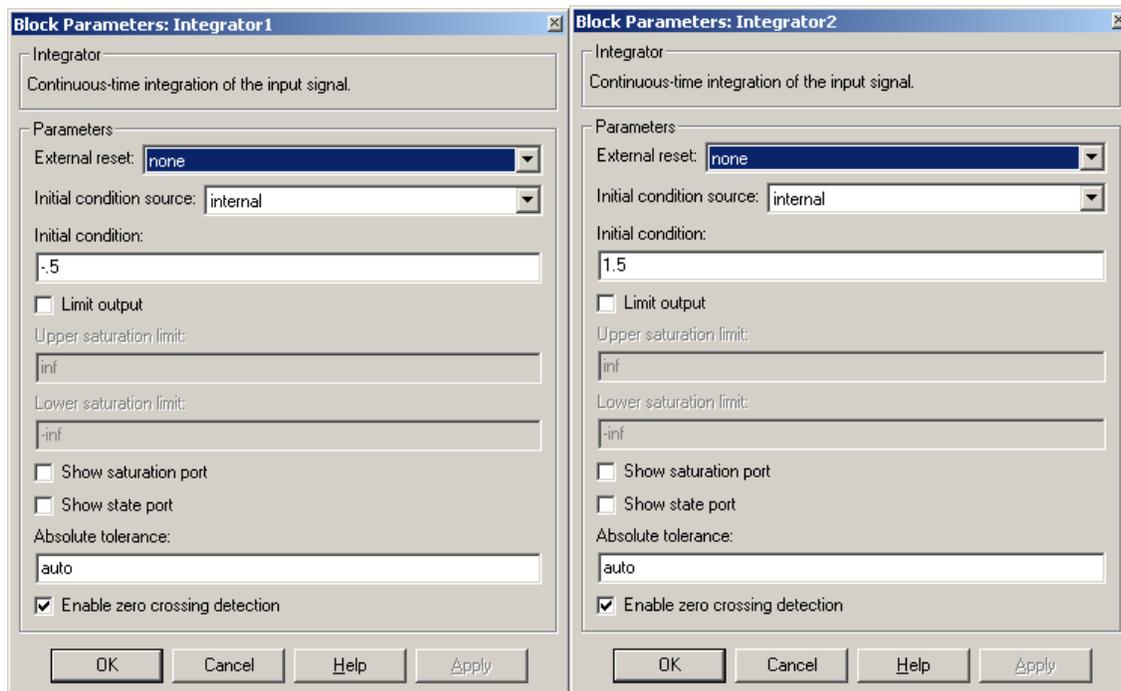


Рис. 6. Настройка блоков Integrator1 и Integrator2

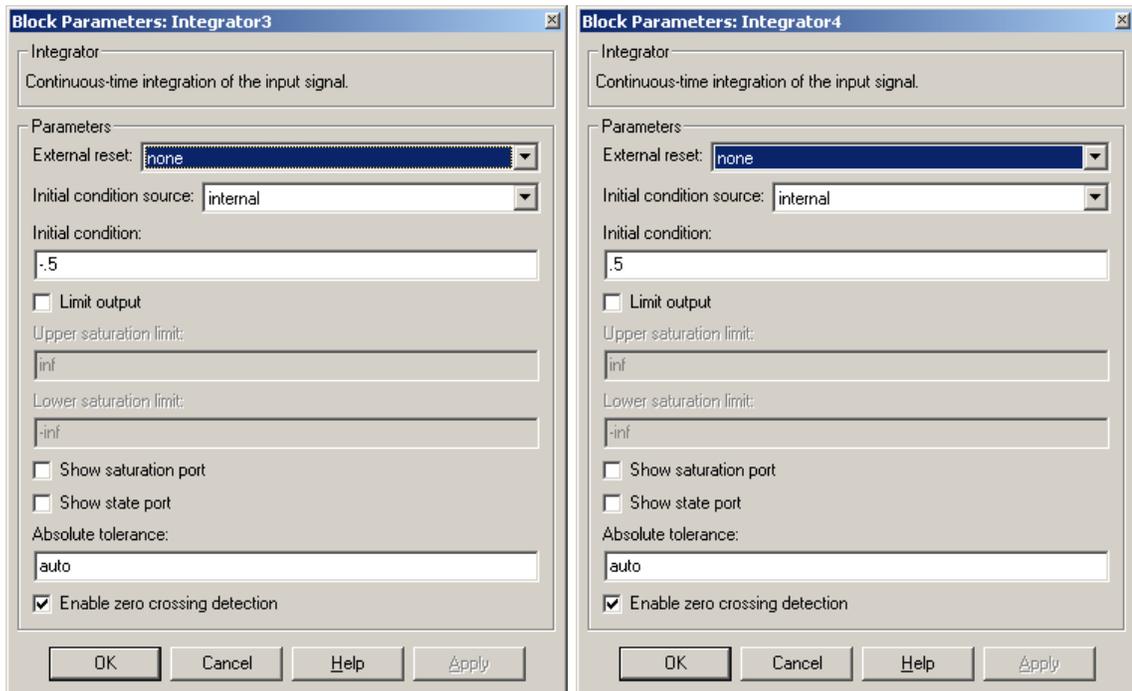


Рис. 7. Настройка блоков Integrator3 и Integrator4  
 Результаты расчета имитационной модели приведены на рис. 8.

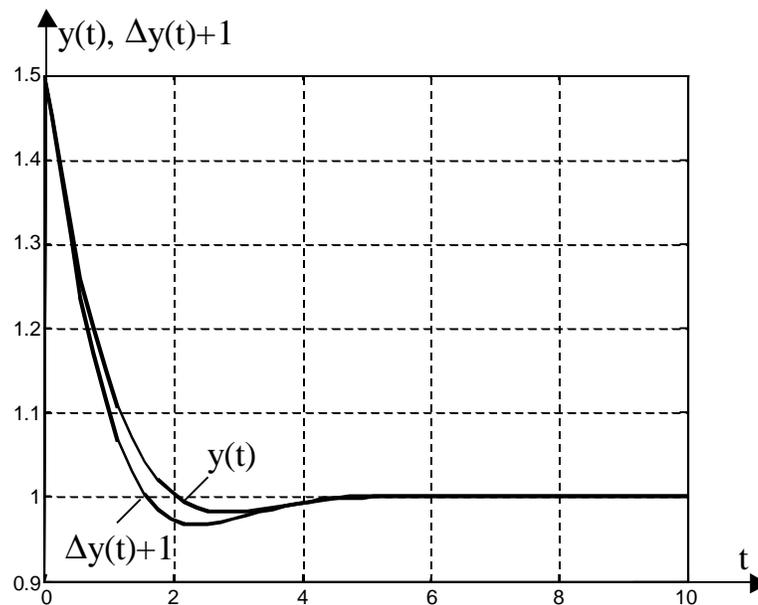


Рис.4. Результаты расчета моделей

Результаты показывают заметное расхождение между поведением линеаризованной системы и поведением исходной при данных отклонениях. Уменьшая отклонения, наблюдаем снижение расхождения, что подтверждает правильность сделанных ранее построений и выводов.

### **Задание**

Провести исследование систем и моделей, полученных в результате выполнения задания по теме практического занятия №20 по программе, изложенной выше.

### **Исходные данные**

- 1) описания нелинейных систем в пространстве состояний и в виде дифференциального уравнения, полученные на практическом занятии №20;
- 2) описания линеаризованных систем, полученные в результате выполнения задания по теме практического занятия №20.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №20;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше. В отчете обязательно должно быть отражено влияние начальных отклонений на поведение линеаризованной модели (графики для «малых» и «больших» отклонений).

### **Контрольные вопросы:**

1. Для какого класса нелинейностей допустима линеаризация «в малом»?
2. Сформулируйте положение первого метода Ляпунова.
3. Что можно сказать об устойчивости «в малом» нелинейной системы, если линеаризованная система находится на границе устойчивости?
4. Как влияет величина начальных отклонений на «адекватность» линеаризованной модели?
5. Для исследования какого типа систем автоматического регулирования допустимо использовать линеаризованные модели?

## ***Лабораторная работа № 12. Построение фазовых портретов с помощью имитационного моделирования***

### **Цель работы:**

- получение навыков построения фазовых портретов с помощью имитационного моделирования;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №21.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения по теме работы изложены в соответствующем разделе указаний к выполнению практической работы №21. В результате ее выполнения рассчитан фазовый портрет релейной системы.

### **Задание**

1. Построить Simulink-модель системы, рассчитанной в ходе выполнения самостоятельного задания по теме практической работы №21. В модель включить блок XY Graph для построения фазовых портретов. Построив фа-

зовый портрет для заданных параметров системы, «экспериментально» проверить правильность расчетов.

2. С помощью модели построить фазовые портреты и графики переходных процессов при следующих условиях:

2.1. нелинейный элемент – идеальное двухпозиционное реле;

2.2. нелинейный элемент – реальное двухпозиционное реле с зоной неоднозначности равной половине зоны нечувствительности, заданной на практическом занятии №21;

2.3. нелинейный элемент – реальное трехпозиционное реле с зоной неоднозначности равной половине зоны нечувствительности, заданной на практическом занятии №21.

Методика моделирования релейных элементов приведена в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в пункте [7.4.3. «Моделирование ограничений и релейных характеристик»](#).

Проанализировав полученные графики, установить соответствие между фазовыми портретами и графиками переходных процессов – на фазовых портретах отметить моменты времени в характерных точках (пересечение осей и линий переключения).

#### **Исходные данные**

Параметры передаточной функции и релейного элемента, полученные на практическом занятии №21.

#### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №21;

2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы согласно заданию к лабораторной работе.

#### **Контрольные вопросы:**

1. Сущность метода фазовых траекторий.

2. Свойства фазовых траекторий.

3. Фазовый портрет системы.

4. Как влияют параметры нелинейного элемента на фазовые траектории?

5. Линии переключения.

6. Предельный цикл, устойчивый и неустойчивый.

### ***Лабораторная работа № 13. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.1***

#### **Цель работы:**

– получение навыков моделирования и расчета релейных систем;

– «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №23.

#### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в пунктах [6.3 «Особенности динамики релейных систем»](#) и [6.4 «Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации»](#). Основой для выполнения данной работы являются результаты самостоятельной работы по теме практического задания №23.

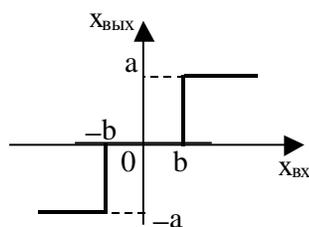
### Пример

Проведем исследования на следующем примере:

– передаточная функция линейной части системы

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{2}{p^3 + p^2 + p}; \quad (1)$$

– статическая характеристика релейного элемента приведена на рис.1.



$$a = 1, b = \text{var.}$$

Рис. 1. Статическая характеристика релейного элемента

Конечная цель исследований – выяснить влияние зоны нечувствительности релейного элемента на амплитуду и частоту автоколебаний системы.

Коэффициенты гармонической линеаризации релейного элемента определяются следующим образом:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b, k_2(A) = 0. \quad (2)$$

Обратная инверсная характеристика релейного элемента:

$$-\frac{1}{W_{\text{нз}}(j\omega, A)} = -\frac{1}{k_1(A)}. \quad (3)$$

Поскольку в нашем случае статическая характеристика реле однозначна и  $k_2(A)=0$ , точка пересечения АФЧХ линейной части и обратной инверсной характеристики лежит на отрицательной вещественной полуоси комплексной плоскости и, следовательно, частота колебаний не зависит от зоны нечувствительности и определяется только АФЧХ линейной части системы.

Построим АФЧХ линейной части

```
W = tf(2,[1 1 1 0]);
w = .5:.01:20;
[re,im] = nyquist(W,w); re = re(:); im = im(:);
figure (1), plot(re,im), grid
```

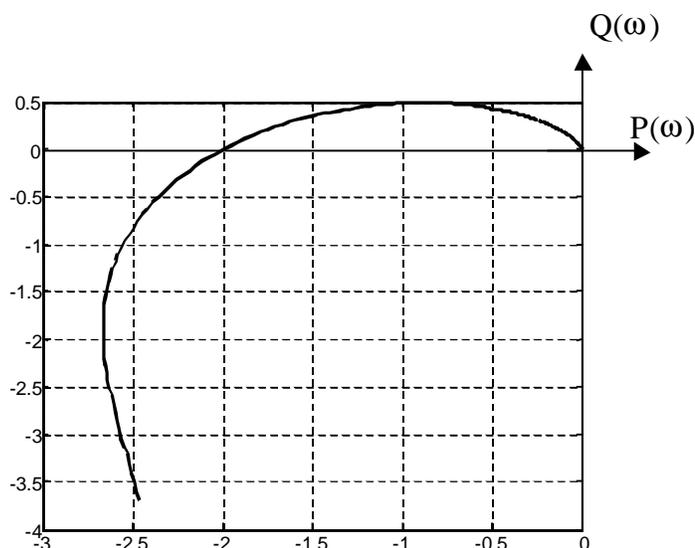


Рис.2. АФЧХ линейной части системе в диапазоне частот  $\omega = 0,5 \dots 20$

По графику определим координаты пересечения АФЧХ с отрицательной вещественной полуосью:  $\{-2, 0\}$ .

Частоту автоколебаний для всех значений зоны нечувствительности найдем из графика, построенного при помощи кода

```
figure (2)
plot(w,im), grid,
```

Увеличив масштаб графика в области  $Q(\omega) = 0$ , определим  $\omega = 1$  рад/сек.

Для определения влияния зоны нечувствительности реле на амплитуду колебаний, рассчитаем ряд обратных инверсных характеристик при различных значениях зоны нечувствительности и диапазонах изменения амплитуды:

- 1) для  $b = 0,1$  при  $A = 0,1 \dots 3$ ;
- 2) для  $b = 0,7$  при  $A = 0,7 \dots 3$ ;
- 3) для  $b = 1$  при  $A = 1 \dots 3$ .

Расчеты выполним с помощью кода:

```
hold on, grid on
b = .1
A = .1:.01:3;
k1 = 4/pi./A.*(sqrt(1-b^2./(A.^2)));
Wi = -1./k1;
plot(A,Wi),
```

```
b = .7
A = .7:.01:3;
k1 = 4/pi./A.*(sqrt(1-b^2./(A.^2)));
Wi = -1./k1;
plot(A,Wi),
```

```
b = 1
```

```

A = 1:.01:3;
k1 = 4/pi./A.*(sqrt(1-b^2./(A.^2)));
Wi = -1./k1;
plot(A,Wi),

hold off

```

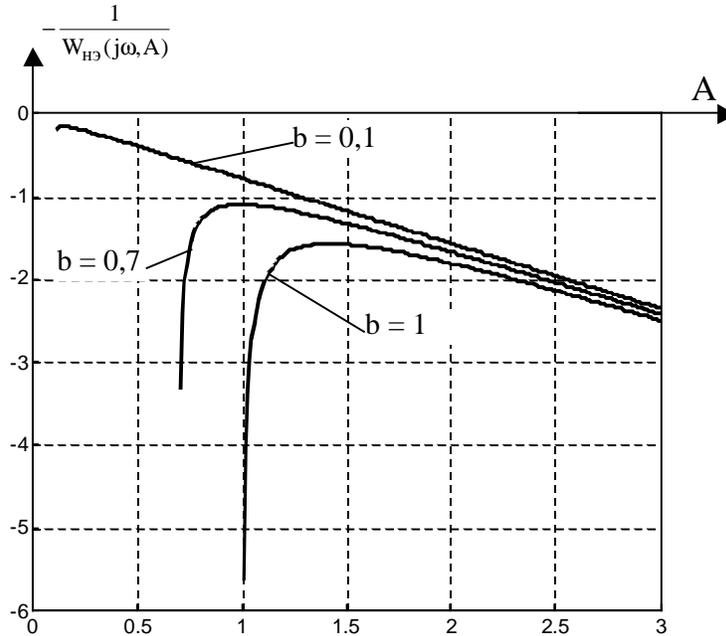


Рис. 3. Обратная инверсная характеристика релейного элемента

Увеличивая масштаб в окрестности  $-\frac{1}{W_{H3}(j\omega, A)} = -2$ , получим:

при  $b = 0,1$   $A = 2,545$ ;

при  $b = 0,7$   $A = 2,44$ ;

при  $b = 1$   $A = 2,291$ .

Таким образом, увеличение зоны нечувствительности приводит к снижению амплитуды колебаний при неизменной их частоте.

Проверим правильность расчетов при помощи имитационной модели (рис.4).

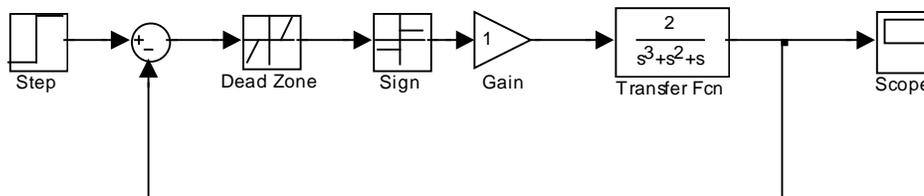


Рис.4. Имитационная модель системы

Релейный элемент в модели реализуется тремя блоками:

- 1) «Dead zone» (зона нечувствительности), в настройки входят значения  $b$  и  $-b$ ;
- 2) «Sign» (сигнум-реле) с возможными значениями на выходе 1, 0,  $-1$ ;
- 3) «Gain» (масштабный коэффициент) для задания уровня выходного сигнала реле, в нашем случае, равного единице.

В результате расчетов получены следующие значения амплитуд и частот колебаний:

при  $b = 0,1$   $A = 2,545$ ,  $\omega = 0,993$  рад/сек;

при  $b = 0,7$   $A = 2,451$ ,  $\omega = 0,997$  рад/сек;

при  $b = 1$   $A = 2,295$ ,  $\omega = 1,001$  рад/сек.

Сравнив полученные результаты с результатами расчетов по методу гармонической линеаризации, сделаем вывод об их достаточной близости, что подтверждает достоверность расчетов.

### **Задание**

Провести исследование релейной системы с однозначной статической характеристикой релейного элемента по программе, изложенной выше. Расчеты выполнить для трех значений зоны нечувствительности, среднее из которых, а также все остальные параметры системы заданы преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Исходные данные**

Передаточная функция объекта регулирования, параметры статической характеристики релейного элемента, заданные преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №23;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше.

### **Контрольные вопросы**

Контрольные вопросы приведены в указаниях для лабораторной работы №14.

## ***Лабораторная работа № 14. Моделирование релейных систем автоматического регулирования, ч.2***

### **Цель работы:**

- получение навыков моделирования и расчета релейных систем;
- «экспериментальная» проверка результатов расчетов по теме практического занятия №23.

### **Теоретические сведения**

Теоретические сведения приведены в пособии А.Н. Рыбалева [«Теория автоматического управления. Пособие к курсовому проектированию»](#), в

пунктах [6.3 «Особенности динамики релейных систем»](#) и [6.4 «Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации»](#). Основой для выполнения данной работы являются результаты самостоятельной работы по теме практического задания №23, а также результаты, достигнутые в ходе выполнения лабораторной работы №13.

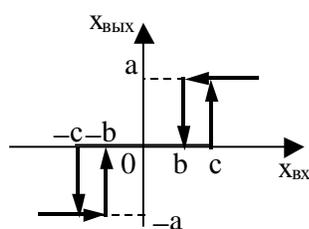
Пример

Проведем исследования на следующем примере:

– передаточная функция линейной части системы

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{2}{p^3 + p^2 + p}; \quad (1)$$

– статическая характеристика релейного элемента приведена на рис.1.



$$a = 1, b = 0,7, c = \text{var.}$$

Рис. 1. Статическая характеристика релейного элемента

Конечная цель исследований – выяснить влияние зоны неоднозначности релейного элемента на амплитуду и частоту автоколебаний системы.

Коэффициенты гармонической линеаризации релейного элемента при наличии зоны неоднозначности определяются следующим образом:

$$k_1(A) = \frac{2a}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} \right] \text{ при } A \geq c, \quad (2)$$

$$k_2(A) = -\frac{2ac}{\pi A^2} \left( 1 - \frac{b}{c} \right) \text{ при } A \geq c. \quad (3)$$

Обратная инверсная характеристика релейного элемента:

$$-\frac{1}{W_{\text{нз}}(j\omega, A)} = -\frac{1}{k_1(A) + jk_2(A)} = \frac{-k_1(A) + jk_2(A)}{k_1^2(A) + k_2^2(A)}. \quad (4)$$

С помощью следующего кода рассчитаем и построим АФЧХ линейной части, а также обратные инверсные характеристики релейного элемента при  $c = 1, 1,3, 1,6$  (рис. 2).

```
W = tf(2,[1 1 1 0]);
w = .8:.01:5;
[re,im] = nyquist(W,w); re = re(:); im = im(:);
a = 1; b = .7;
j = sqrt(-1);
c = 1;
```

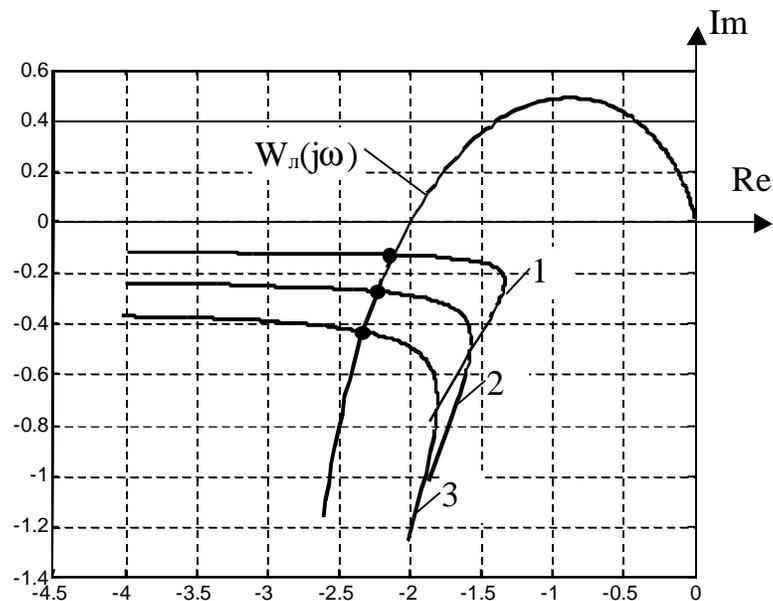
```

A1 = c:.01:5;
k1=2*a/pi./A1.*(sqrt(1-(b.^2)./(A1.^2))+...
    sqrt(1-(c.^2)./(A1.^2)));
k2 = -2*a*c/pi./A1./A1*(1-b/c);
Wi1 = (-k1+j*k2)./(k1.^2+k2.^2);

c = 1.3;
A2 = c:.01:5;
k1=2*a/pi./A2.*(sqrt(1-(b.^2)./(A2.^2))+...
    sqrt(1-(c.^2)./(A2.^2)));
k2 = -2*a*c/pi./A2./A2*(1-b/c);
Wi2 = (-k1+j*k2)./(k1.^2+k2.^2);

c = 1.6;
A3 = c:.01:5;
k1=2*a/pi./A3.*(sqrt(1-(b.^2)./(A3.^2))+...
    sqrt(1-(c.^2)./(A3.^2)));
k2 = -2*a*c/pi./A3./A3*(1-b/c);
Wi3 = (-k1+j*k2)./(k1.^2+k2.^2);
plot(real(Wi1),imag(Wi1),real(Wi2),imag(Wi2),real(Wi3),...
    imag(Wi3),re,im);grid

```



1 – обратная инверсная характеристика реле при  $c = 1$ ;  
 2 – то же при  $c = 1,3$ ; 3 – то же при  $c = 1,6$ .

Рис. 2. Определение параметров автоколебаний

Найдя координаты точек пересечения (достаточно значения по одной из осей, например, вещественной) можно определить амплитуду и частоту колебаний. Для этого достаточно построить «обращенные» характеристики вида

$$\omega = \omega(\operatorname{Re}[W_n(j\omega)], \quad A = A\left(\operatorname{Re}\left[-\frac{1}{W_{\text{НЭ}}(j\omega, A)}\right]\right), \quad (5)$$

с помощью кода (здесь приведен только для  $c = 1$ )

```
figure
subplot(2,1,1)
plot(real(Wi1),A1), grid
subplot(2,1,2)
plot(re,w), grid
```

Увеличивая полученные графики около интересующей нас точки, найдем искомые параметры автоколебаний.

В результате проведенных вычислений получены следующие значения:

- 1)  $c = 1$ :  $A = 2,55$ ,  $\omega = 0,969$  рад/сек.;
- 2)  $c = 1,3$ :  $A = 2,644$ ,  $\omega = 0,94$  рад/сек.;
- 3)  $c = 1,6$ :  $A = 2,722$ ,  $\omega = 0,911$  рад/сек.

Таким образом, при увеличении зоны неоднозначности наблюдается увеличение амплитуды и уменьшение частоты автоколебаний.

Проверим правильность расчетов при помощи имитационной модели (рис.4).

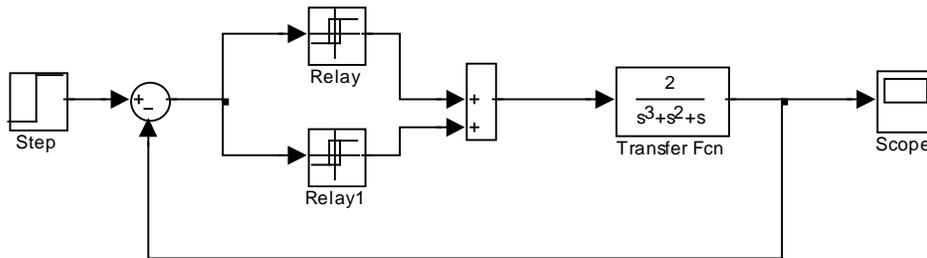


Рис.3. Имитационная модель системы

Релейный элемент в модели реализуется двумя блоками Relay, настроенными соответствующим образом. Ниже на рис. 4 показан вариант настройки блоков при  $c=1$ .

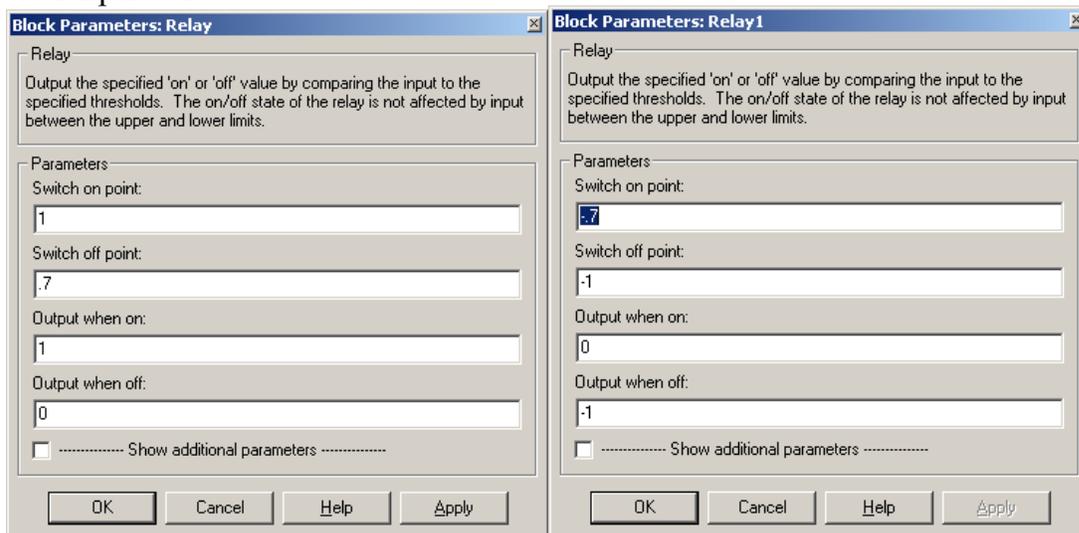


Рис. 4. Настройка блоков Relay и Relay1

В результате расчетов получены следующие значения амплитуд и частот колебаний:

- 1)  $c = 1$ :  $A = 2,562$ ,  $\omega = 0,967$  рад/сек.;
- 2)  $c = 1,3$ :  $A = 2,655$ ,  $\omega = 0,939$  рад/сек.;
- 3)  $c = 1,6$ :  $A = 2,728$ ,  $\omega = 0,91$  рад/сек.

Сравнив полученные результаты с результатами расчетов по методу гармонической линеаризации, сделаем вывод об их достаточной близости, что подтверждает достоверность расчетов.

### **Задание**

Провести исследование релейной системы с неоднозначной статической характеристикой релейного элемента по программе, изложенной выше. Расчеты выполнить для трех значений зоны неоднозначности, среднее из которых, а также все остальные параметры системы заданы преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Исходные данные**

Передаточная функция объекта регулирования, параметры статической характеристики релейного элемента, заданные преподавателем на практическом занятии № 23.

### **Содержание отчета**

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующее:

- 1) результаты выполнения самостоятельного задания по теме практического занятия №23;
- 2) результаты, достигнутые в ходе исследования системы по программе, изложенной выше.

### **Контрольные вопросы**

1. Назовите основное допущение метода гармонической линеаризации;
2. При каких условиях в замкнутой системе наступает гармонический баланс?
3. Для каких нелинейных элементов один из коэффициентов гармонической линеаризации равен нулю?
4. Какой критерий используется для нахождения параметров автоколебаний методом гармонического баланса?
5. Приведите выражение для обратной инверсной характеристики нелинейного элемента?
6. Функцией какого параметра является обратная инверсная характеристика нелинейного элемента?
7. Как решается вопрос об устойчивости автоколебаний, параметры которых найдены методом гармонического баланса?

### ***Лабораторная работа № 15. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза - классическое вариационное исчисление)***

Теоретические сведения и задания к лабораторной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. [«Теория автоматического управления. Оп-](#)

тимальные системы», в главе «Решение задач оптимального управления с помощью вариационного исчисления».

***Лабораторная работа № 16. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза - принцип максимума)***

Теоретические сведения и задания к лабораторной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. «Теория автоматического управления. Оптимальные системы», в главе «Решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума».

***Лабораторная работа №17. Моделирование оптимальной системы управления (метод синтеза - динамическое программирование)***

Теоретические сведения и задания к лабораторной работе содержатся в учебном пособии Рыбалева А.Н. «Теория автоматического управления. Оптимальные системы», в главе «Решение задач оптимального управления методом динамического программирования».

*Федеральное агентство по образованию Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*  
Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

*ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ЛАБОРАТОРНЫМ  
РАБОТАМ*

*Учебное пособие*

Благовещенск  
2006

ББК 32.965я73  
Р???

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
энергетического факультета  
Амурского государственного  
университета*

А.Н. Рыбалев

Теория автоматического управления. Оптимальные системы. Теоретические сведения с примерами решения задач и задания к практическим и лабораторным работам. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2006, 107 с.

Предназначено для студентов специальности 220301 и других, изучающих дисциплину «Теория автоматического управления» и выполняющих по данной дисциплине практические и лабораторные работы. Может быть использовано также при выполнении других работ, связанных с расчетами и моделированием систем автоматического управления.

*Рецензенты:*

Е.Л. Еремин – профессор кафедры информационных и управляющих систем, декан факультета математики и информатики АмГУ, докт. техн. наук.

С.Н. Воякин – зав. кафедрой электропривода, электроники и электрооборудования автомобилей и тракторов ДальГАУ, канд. техн. наук, доцент;

© Амурский государственный университет, 2005

## ВВЕДЕНИЕ

Пособие включает теоретические сведения и задания на практические и лабораторные работы по разделу «Оптимальное управление» курса «Теория автоматического управления». Оно охватывает следующие темы, изучаемые в данном разделе: постановка и классификация задач оптимального управления, вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование Беллмана.

Цель пособия – дать возможность студентам самостоятельно освоить теоретический материал одного из основных разделов «Теории автоматического управления». Содержание материала, изложенного в пособии, полностью соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта и рабочей программе данной дисциплины для специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств».

Изучение теории сопровождается комплексом практических и лабораторных работ, связанных с выполнением студентами индивидуальных заданий по всем темам курса (за исключением постановочной).

На практических занятиях ведется разбор задания, составляются необходимые уравнения и находятся их общие решения, проектируются модели и т.д.

Лабораторные работы выполняются с применением персональных компьютеров и включают численное решение уравнений и имитационное моделирование.

В первой главе излагаются вопросы, связанные с постановкой задач оптимального управления и их классификацией.

Вторая глава посвящена методам решения задач оптимального управления с помощью классического вариационного исчисления. Поскольку раздел «Вариационное исчисление» изучается студентами в рамках курса «Математика», теоретические сведения, приведенные в пособии, ограничиваются в основном вопросами применения теории к решению практических задач. С этой целью достаточно подробно проанализированы пять примеров задач, различных по постановке и набору ограничений.

В третьей главе рассмотрен принцип максимума Понтрягина и его применение к линейной задаче максимального быстродействия. Приведены два примера решения задачи на максимальное быстродействие с нахождением оптимальной программы и оптимальной стратегии управления.

Четвертая глава посвящена методу динамического программирования Беллмана. Подробно рассмотрена задача аналитического конструирования регулятора, минимизирующего квадратичный критерий. Показан вывод уравнения Риккати. Приведен пример решения задачи.

В пятой главе – примеры решения практических задач оптимального управления электроприводом постоянного тока. Задание по материалу главы может составлять часть задания на курсовой проект по курсу «Теория автома-

тического управления» (третья часть проекта) или выполняться независимо – в рамках практических и лабораторных работ по дисциплине.

Шестая глава содержит краткие сведения о средствах программной системы Matlab, которые использовались при решении задач оптимального управления, приведенных в примерах пособия. Эти средства будут использованы студентами при выполнении их индивидуальных заданий.

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Оптимальным называют наиболее целесообразное в некотором смысле управление. В большинстве случаев перевести объект управления из одного состояния в другое (из исходного в заданное) можно множеством способов. Эти способы реализуются с помощью различных законов управления. Часто среди них можно выбрать такой закон, чтобы переходной процесс был оптимальным по определенному критерию (критерию оптимальности). В качестве критерия может выступать, например, минимум энергии, затраченной на процесс перехода, или минимум времени перехода. Критерий оптимальности формализуется в виде некоторого функционала, экстремум которого (минимум или максимум) свидетельствует, что переходной процесс и управление оптимальны.

Общий вид функционала следующий:

$$J = g_0(X(t_0), X(t_k), t_0, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(X(t), U(t), t) dt, \quad (1)$$

где  $X$  – вектор переменных состояния объекта управления;  $U$  – вектор управляющих воздействий;  $t_0, t_k$  – начальный и конечный моменты времени переходного процесса.

Функция  $g_0$  определяет «качество» граничных состояний, в том числе, возможно, связанными величинами  $t_0, t_k$ . Функция  $f_0$  определяет «качество» траекторий  $X(t)$  и управления на интервале  $t_0 \dots t_k$ .

Задача, в которой отыскивается экстремум функционала (1), называется *задачей Больца*. В частных случаях функционал (1) может принимать виды:

$$J = g_0(X(t_0), X(t_k), t_0, t_k), \quad (2)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(X(t), U(t), t) dt. \quad (3)$$

В первом случае задача поиска экстремума называется *задачей Майера*, во втором – *задачей Лагранжа*.

Примерами задачи Майера являются: задача максимального быстродействия

$$J = t_k \rightarrow \min, \quad (4)$$

задача на максимальную «дальность» перемещения

$$J = x(t_k) \rightarrow \max. \quad (5)$$

В качестве примера задачи Лагранжа можно привести задачу на минимальное энергопотребление:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

Вид подынтегральной функции критерия (6) объясняется тем, что мощность управляющего сигнала, как правило, пропорциональна квадрату его амплитуды. Кроме того, использование второй, а не первой степени переменной  $u(t)$  позволяет учесть то обстоятельство, что в переходном процессе управление может быть отрицательным. В частных случаях, когда известно, что управление всегда положительно, функционал может быть и более простым:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} u(t) dt \rightarrow \min. \quad (7)$$

Можно показать, что задачи Майера и Лагранжа имеют одну и ту же степень общности, т.е. путем определенных преобразований можно задачу, записанную первоначально, например, в качестве задачи Лагранжа, представить в виде задачи Майера и наоборот [3].

Важным обстоятельством при решении задач оптимального управления является то, что компоненты векторов  $X$  и  $U$  не могут рассматриваться как независимые функции времени, способные принимать любые значения. На векторы  $X$  и  $U$  обязательно накладываются некоторые ограничения в виде уравнений связи, предельно допустимых значений и т.д. Как минимум, стоит указать на дифференциальные уравнения самого объекта управления, связывающие компоненты векторов  $X$ ,  $\dot{X}$  и  $U$ . Таким образом, задачи оптимального управления – это всегда задачи на условный экстремум.

Разделяют «классические» (в виде равенств) и «неклассические» (неравенства) ограничения. «Классические», в свою очередь, делятся на *голономные*, *неголономные* и *изопериметрические*.

Голономные ограничения представляют собой алгебраические уравнения связи искомых функций  $X(t)$  и  $U(t)$ , записанные для удобства в виде равенств нулю:

$$\varphi_i(X, U, t) = 0, \quad i = 1 \dots r. \quad (8)$$

Для задач оптимизации динамических режимов работы объектов голономные ограничения нетипичны. Кроме того, как правило, от этих ограничений можно избавиться еще на этапе формулировки задачи путем соответствующих преобразований. Поэтому в дальнейшем они не рассматриваются.

Неголономные ограничения представляют собой дифференциальные уравнения:

$$\varphi_i(X, \dot{X}, U, t) = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (9)$$

Это дифференциальные уравнения объекта управления, а также, возможно, и другие уравнения, позволяющие учесть дополнительные ограничения.

Изопериметрические ограничения имеют вид:

$$\int_{t_0}^{t_k} \varphi_i(X, U, t) dt = c_i = \text{const}, i = 1 \dots k. \quad (10)$$

В качестве примера такого ограничения можно привести ограничение на расход энергии в переходном процессе, которое можно представить в виде:

$$\int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt = c = \text{const}, \quad (11)$$

или, если заведомо известно, что  $u(t)$  принимает только положительные значения:

$$\int_{t_0}^{t_k} u(t) dt = c = \text{const}. \quad (12)$$

С помощью стандартного приема изопериметрические ограничения преобразуются в неголономные. Этот прием предполагает введение дополнительных переменных, производные которых по времени равны подынтегральным выражениям из (10)

$$\dot{x}_{n+i} = \varphi_i(X, U, t), i = 1 \dots k. \quad (13)$$

Условно говоря, новые переменные «расширяют» исходную систему уравнений объекта, представляющую неголономные связи, и поэтому обычно обозначаются как  $x_{n+1}$ ,  $x_{n+2}$  и т.д. Подставляя (13) в (10), получим:

$$\int_{t_0}^{t_k} \varphi_i(X, U, t) dt = \int_{t_0}^{t_k} \dot{x}_{n+i} dt = x_{n+i}(t_k) - x_{n+i}(t_0) = c_i. \quad (14)$$

Для упрощения полагают  $x_{n+i}(t_0) = 0$ , тогда  $x_{n+i}(t_k) = c_i$ .

Типичным примером неклассических ограничений является ограничение на максимальные значения управляющих величин (ограничение управления по модулю):

$$|u_i| \leq u_{i,\max}, i = 1 \dots m. \quad (15)$$

Другой вид дополнительных условий, накладываемых на задачу, – это *граничные условия*, определяющие значения переменных объекта в начальный и конечный моменты времени переходного процесса. По виду граничных условий различают *задачи с закрепленными концами*, когда  $X(t_0)$  и  $X(t_k)$  известны (заданы), и *задачи с подвижными концами*, когда часть или все компоненты этих векторов неизвестны (могут принимать произвольные значения, возможно, в ограниченной области). Среди последних, как наиболее часто встречающихся, выделяют *задачу со свободным правым концом*, в которой вектор  $X(t_k)$  неизвестен (полностью или частично). Примером является задача на максимальную дальность передвижения при ограничении на расход энергии.

В зависимости от определенности момента времени  $t_k$  задачи разделяют на *задачи с фиксированным и нефиксированным временем*. К последнему типу, очевидно, относится задача на максимальное быстроедействие.

Итак, задача оптимизации управления состоит в том, чтобы найти такие векторы  $U(t)$  и  $X(t)$ , которые доставляют экстремум функционалу критерия оптимальности с учетом всех ограничений и граничных условий. Эти векторы называются соответственно оптимальным управлением и оптимальной траекторией. В результате решения задачи оптимальное управление может быть найдено либо как *оптимальная программа*

$$U = U(t), \quad (16)$$

либо как *оптимальная стратегия*

$$U = U(X). \quad (17)$$

Для построения системы управления второе решение, очевидно, более предпочтительно, так как позволяет построить замкнутую систему, способную оптимальным образом функционировать при любых начальных условиях. Однако определить оптимальную стратегию, как правило, намного сложнее, чем оптимальную программу.

Решение задач оптимизации динамических режимов осуществляется различными методами, основными из которых являются:

- классическое вариационное исчисление;
- метод максимума Понтрягина;
- динамическое программирование Беллмана.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### 2.1. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем

Рассмотрим задачу поиска безусловного экстремума функционала вида

$$J(y(t), \mathfrak{z}(t), t) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y(t), \mathfrak{z}(t), t) dt. \quad (18)$$

где  $y(t)$  – некоторая функция независимой переменной  $t$  (в дальнейшем – времени).

Предположим, что функция  $y(t)$  доставляет экстремум функционалу (18). Дадим этой функции приращение  $\Delta y(t) \rightarrow 0$  – такое, что

$$\begin{cases} \Delta y(t_0) = 0, \\ \Delta y(t_k) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Определим приращение функционала (18), вызванное приращением функции  $\Delta y(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(y(t) + \Delta y(t)) - J(y(t)) = \\ &= \int_{t_0}^{t_k} [f_0(y(t) + \Delta y(t), \mathfrak{z}(t) + d\Delta y/dt, t) - f_0(y(t), \mathfrak{z}(t), t)] dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Разложив подынтегральное выражение (20) в ряд Тейлора и отбросив все слагаемые выше первого порядка малости, получим так называемую первую вариацию функционала

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y(t) + \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{z}} \frac{d\Delta y}{dt} \right] dt. \quad (21)$$

Первая вариация функционала является главной (линейной) частью его приращения и представляет собой дифференциал функционала.

Проинтегрируем второе слагаемое подынтегрального выражения (21) по частям:

$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{z}} \frac{d\Delta y}{dt} dt = \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{z}} \Delta y \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{z}} \Delta y(t) dt. \quad (22)$$

Принимая во внимание (19), получим:

$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{y}} \frac{d\Delta y}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{y}} \Delta y(t) dt. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21), запишем

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{y}} \right] \Delta y(t) dt.$$

Поскольку функция  $y(t)$  доставляет экстремум функционалу (18), его первая вариация, определенная на этой функции, должна быть равна нулю:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{y}} \right] \Delta y(t) dt = 0. \quad (24)$$

Равенство (24) должно иметь место для произвольных функций  $\Delta y(t)$ , удовлетворяющих граничным условиям (19). Это возможно, если функция  $\Delta y(t)$  умножается на нуль, т.е. выполняется равенство

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{y}} = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) называется *уравнением Эйлера*.

Таким образом, если существует такая функция  $y(t)$ , для которой функционал (18) достигает экстремума, то она удовлетворяет уравнению Эйлера (25).

Отметим, что уравнение (25) необходимое, но не достаточное условие экстремума функционала (18), подобно тому, как равенство нулю производной некоторой функции в некоторой точке не является достаточным условием экстремума функции в этой точке. Более того, если экстремум и достигается, то неизвестен его вид (минимум или максимум). Следовательно, решение, основанное на использовании (25), нуждается в проверке. Однако во многих случаях при решении реальных задач оптимального управления полученное решение и вид экстремума обосновываются физическими соображениями, и такую проверку не выполняют.

В случае, если функционал зависит от нескольких функций

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y_1(t), \mathfrak{y}_1(t), y_2(t), \mathfrak{y}_2(t), \dots, y_n(t), \mathfrak{y}_n(t)) dt, \quad (26)$$

необходимыми условиями его экстремума будут уравнения Эйлера, записанные относительно всех неизвестных функций:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{y}_i} = 0, \quad (27)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

При решении задач оптимального управления под функциями  $y_i(t)$ , очевидно, нужно понимать неизвестные траектории движения объекта  $X(t)$  и само управление  $U(t)$ . Поэтому в общем случае функционал может иметь вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, x_n(t), \mathbf{x}_n(t), u_1(t), \mathbf{u}_1(t), \dots, u_m(t), \mathbf{u}_m(t)) dt. \quad (28)$$

Однако производные компонентов вектора состояния  $X$  могут быть выражены через сами компоненты и управляющие воздействия с помощью уравнений объекта, а производные вектора управления в функционал в большинстве случаев не входят. Кроме того, в дальнейшем для упрощения будем считать управление скалярным. С учетом этого функционал запишем в виде:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) dt. \quad (29)$$

Таким образом, рассматривается задача Лагранжа.

На переменные состояния и управление наложены различные ограничения. В классическом вариационном исчислении рассматриваются ограничения в виде непрерывных функций. Применительно к задачам оптимизации динамических режимов эти функции связывают между собой переменные состояния объекта и управляющее воздействие и представляют собой не что иное, как дифференциальные уравнения объекта:

$$\mathbf{x}_i = f_i(X, u, t), \quad i = 1 \dots n. \quad (30)$$

Уравнения (30) могут быть представлены в виде неголономных ограничений следующим образом:

$$\varphi_i(X, \mathbf{x}, u, t) = f_i(X, u, t) - \mathbf{x}_i = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (31)$$

Для учета ограничений используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Согласно ему подынтегральная функция критерия расширяется путем включения в нее ограничений (в нашем случае – вида (31)). Полученная таким образом функция называется *функцией Лагранжа (лагранжианом)*:

$$L = f_0(X, u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(X, \mathbf{x}, u, t), \quad (32)$$

где  $\psi_i(t)$  – неизвестные функции, называемые множителями Лагранжа.

Отметим, что численно лагранжиан равен функции  $f_0(X, u(t))$ .

В дальнейшем при поиске экстремума вместо исходного функционала используется функционал

$$J^* = \int_{t_0}^{t_k} L(\dots) dt. \quad (33)$$

Уравнения Эйлера для функционала (33) примут вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0. \quad (35)$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение Эйлера для управления. Его простой вид следует из того, что в лагранжиан не входит производная управления и  $\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0$ .

Очевидны также следующие равенства:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i} = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (36)$$

представляющие собой неголономные ограничения.

Система уравнений (34–36) называется *уравнениями Эйлера-Лагранжа*.

На практике уравнения Эйлера-Лагранжа удобнее записывать через так называемую *функцию Гамильтона (гамильтониан)*:

$$H = f_0(X, u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(X, u, t) = L + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \mathfrak{F}_i. \quad (37)$$

$$\text{С учетом того, что } L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \mathfrak{F}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{F}_i} = -\psi_i,$$

уравнения (33,35) примут вид:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{d\psi_i}{dt} = 0, \quad (38)$$

или

$$\dot{\mathfrak{F}}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots n, \quad (39)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (40)$$

Очевидно также, что:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i(X, u, t), \quad i = 1 \dots n. \quad (41)$$

Уравнения (41) – это уравнения объекта, выраженные через гамильтониан. В дальнейшем вместо них можно непосредственно использовать (30).

Система уравнений (39) (41) называется *системой Гамильтона*. Она представляет собой  $2n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши (уравнения (39) и уравнения объекта (41)). Уравнение (40) после взятия производной становится алгебраическим и позволяет выразить управление  $u(t)$  через неизвестные функции  $\psi_i(t)$  и  $x_i(t)$ , тем самым «избавиться» от этой переменной.

Таким образом, если существует управление  $u(t)$  и траектории  $X(t)$ , такие, что при них достигается экстремум функционала (29), то существуют не равные одновременно нулю множители  $\psi_i(t)$ , удовлетворяющие уравнениям (39) –(41).

Чтобы найти оптимальное управление и оптимальные траектории необходимо решить систему Гамильтона. Для этого, как известно, требуется  $2n$  дополнительных условий. Если рассматривается задача с фиксированным временем и закрепленными концами, то в качестве дополнительных выступают граничные условия:  $X(t_0) = X_0$ ,  $X(t_k) = X_k$  (этих условий в точности  $2n$  штук).

Пример 1.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u, \end{cases} \quad (42)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(1) = 1$ ,  $x_2(1) = 0$  таким образом, чтобы обеспечить минимум потребления энергии:

$$J = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (43)$$

Запишем гамильтониан:

$$H = u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-3x_1 - x_2 + u). \quad (44)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\psi_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 3\psi_2, \quad (45)$$

$$\psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + \psi_2, \quad (46)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_2 = 0. \quad (47)$$

Из (47) получим

$$u = -0,5\psi_2. \quad (48)$$

Подставив (48) в уравнения объекта (42) и объединив последние с уравнениями (45), (46), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = 3\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2. \end{cases} \quad (49)$$

Система (49) однородна и может быть представлена в матричном виде

$$\hat{X} = A\hat{X}, \quad (50)$$

где  $\hat{X} = [x_1, x_2, \psi_1, \psi_2]^T$ , а матрица A в данном случае имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Структура решения системы, как известно, зависит от вида собственных чисел матрицы A ([1]). Определим их с помощью следующего кода Matlab:

```
A = [0 1 0 0;-3 -1 0 -.5;0 0 0 3;0 0 -1 1];
L = eig(A)

L =
-0.5000 + 1.6583i
-0.5000 - 1.6583i
 0.5000 + 1.6583i
 0.5000 - 1.6583i
```

В данном случае кратных корней нет, поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C_1\alpha_3^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_3^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_3^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C_1\alpha_4^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_4^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_4^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_4^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (51)$$

где  $\lambda_j$  ( $j = 1..4$ ) – собственные числа матрицы A (определенные выше);  $\mathbf{a}^{(j)} = [\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \alpha_4^{(j)}]^T$  – собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_j$ ;  $C_j$  – постоянные, определяемые через дополнительные условия.

Отметим, что в нашем случае все перечисленные величины – комплексные числа.

Определим собственные векторы матрицы A с помощью следующего вызова функции eig:

```
[V,D] = eig(A); V

v =
-0.1443-0.4787i  -0.1443+0.4787i  -0.0714  -0.0714
 0.8660  0.8660  -0.0357-0.1185i  -0.0357+0.1185i
 0  0  0.8571  0.8571
 0  0  0.1429+0.4738i  0.1429-0.4738i
```

Матрица  $v$  состоит из столбцов, каждый из которых – собственный вектор, определенный для соответствующего собственного числа. Матрица  $D$  нами не используется.

Для нахождения постоянных  $C_1 \dots C_4$  воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(1) = 1, x_2(1) &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений (51) получаем:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1\alpha_1^{(1)} + C_2\alpha_1^{(2)} + C_3\alpha_1^{(3)} + C_4\alpha_1^{(4)} = 0, \\ x_2(0) = C_1\alpha_2^{(1)} + C_2\alpha_2^{(2)} + C_3\alpha_2^{(3)} + C_4\alpha_2^{(4)} = 0, \\ x_1(1) = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2} + C_3\alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3} + C_4\alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4} = 1, \\ x_2(1) = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2} + C_3\alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3} + C_4\alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4} = 0, \end{cases} \quad (52)$$

или в матричной форме:

$$MC = N, \quad (53)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_2^{(4)} \\ \alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1} & \alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2} & \alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3} & \alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4} \\ \alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1} & \alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2} & \alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3} & \alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$N = [0, 0, 1, 0]^T. \quad (55)$$

$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$  – вектор, подлежащий определению.

Сформируем матрицы  $M$  и  $N$  и решим уравнение (53) в Matlab:

```
M = [V(1:2, :); V(1:2, :)*diag(exp(L))];
```

```
N = [0; 0; 1; 0];
```

```
C = M\N
```

```
C =
```

```
-1.4951 - 1.2951i
```

```
-1.4951 + 1.2951i
```

```
-5.6584 + 9.2247i
```

```
-5.6584 - 9.2247i
```

Перепишем систему (51) следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} + C'_{13}e^{\lambda_3 t} + C'_{14}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C'_{21}e^{\lambda_1 t} + C'_{22}e^{\lambda_2 t} + C'_{23}e^{\lambda_3 t} + C'_{24}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C'_{31}e^{\lambda_1 t} + C'_{32}e^{\lambda_2 t} + C'_{33}e^{\lambda_3 t} + C'_{34}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C'_{41}e^{\lambda_1 t} + C'_{42}e^{\lambda_2 t} + C'_{43}e^{\lambda_3 t} + C'_{44}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (56)$$

где  $C'_{i,j} = C_j \alpha_i^{(j)}$ .

Матрицу  $C'$  определим с помощью кода

```
C_ = v*diag(C)
```

```
C_ =
```

```
-0.4042+0.9026i    -0.4042-0.9026i    0.4042-0.6589i    0.4042+0.6589i
-1.2948-1.1216i    -1.2948+1.1216i    1.2948+0.3408i    1.2948 - 0.3408i
0                  0                  -4.8500+7.9069i    -4.8500 - 7.9069i
0                  0                  -5.1790-1.3631i    -5.1790 + 1.3631i
```

Далее получим решение в обыкновенном виде, перейдя от комплексных функций к действительным. Для этого рассмотрим, например, первые два слагаемых первого уравнения системы (56). Показатели степени экспонент  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексно сопряженные числа. Примем  $C'_{11} = a_1 + ib_1$ ,  $C'_{12} = a_2 + ib_2$ , тогда

$$\begin{aligned} C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} &= (a_1 + ib_1)e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t} + (a_2 + ib_2)e^{(\alpha_1 - i\beta_1)t} = \\ &= e^{\alpha_1 t} \left[ (a_1 + ib_1)e^{i\beta_1 t} + (a_2 + ib_2)e^{-i\beta_1 t} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Применим известные равенства

$$e^{i\beta_1 t} = \cos(\beta_1 t) + i \cdot \sin(\beta_1 t), \quad (58)$$

$$e^{-i\beta_1 t} = \cos(\beta_1 t) - i \cdot \sin(\beta_1 t). \quad (59)$$

Подставляя (58), (59) в (57), после преобразований получим

$$\begin{aligned} C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} &= e^{\alpha_1 t} \left[ (a_1 + a_2)\cos(\beta_1 t) + (-b_1 + b_2)\sin(\beta_1 t) + \right. \\ &\quad \left. + i(b_1 + b_2)\cos(\beta_1 t) + i(a_1 - a_2)\sin(\beta_1 t) \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Решение не должно содержать мнимой части, поэтому очевидно

$$a_2 = a_1, b_2 = -b_1, \quad (61)$$

что подтверждается предыдущим расчетом.

С учетом (61) окончательно запишем

$$C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha_1 t} [2a_1 \cos(\beta_1 t) - 2b_1 \sin(\beta_1 t)]. \quad (62)$$

Аналогично поступая со всеми слагаемыми решения, содержащими экспоненты комплексно сопряженных чисел, решение системы уравнений представим в виде

$$x_1 = e^{-0,5t}[-0,8084\cos(1,6583t)-1,8052\sin(1,6583t)]+ \\ + e^{0,5t}[0,8084\cos(1,6583t)+1,3178\sin(1,6583t)], \quad (63)$$

$$x_2 = e^{-0,5t}[-2,5964\cos(1,6583t)+2,2432\sin(1,6583t)]+ \\ + e^{0,5t}[2,5964\cos(1,6583t)-0,6816\sin(1,6583t)], \quad (64)$$

$$\psi_1 = e^{0,5t}[-9,7\cos(1,6583t)-15,8138\sin(1,6583t)], \quad (65)$$

$$\psi_2 = e^{0,5t}[-10,358\cos(1,6583t)+2,7262\sin(1,6583t)]. \quad (66)$$

Управление:

$$u = -0,5\psi_2 = e^{0,5t}[5,179\cos(1,6583t)-1,3631\sin(1,6583t)]. \quad (67)$$

Графики полученных оптимальных траекторий и оптимального управления приведены на рис. 1.

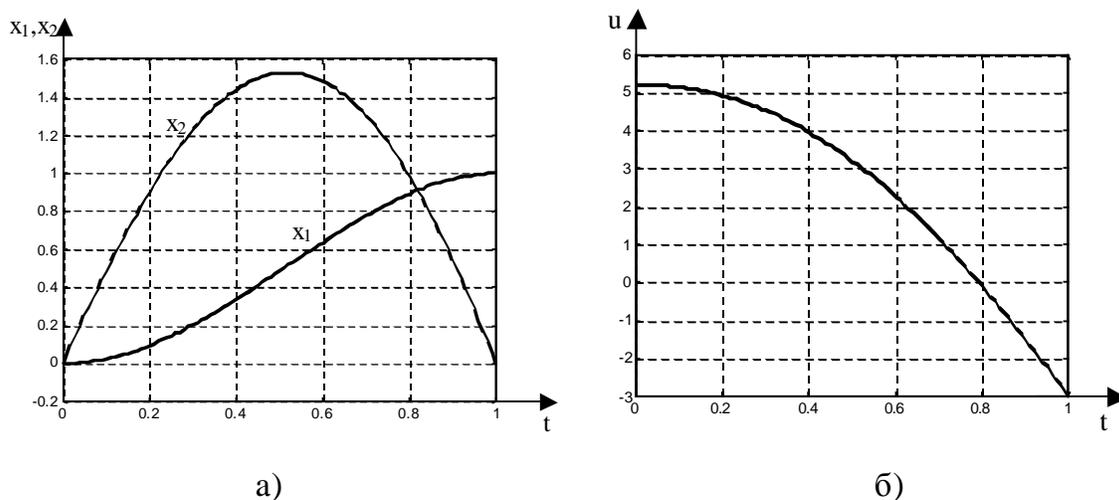


Рис. 1. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

Значение функционала определим численным интегрированием с помощью следующего кода Matlab:

```
t = 0:.01:1;
u = exp(.5*t).*(5.179*cos(1.6583*t)-1.3631*sin(1.6583*t));
J = trapz(t,u.*u)
J =
    12.2882
```

Здесь использовалась библиотечная функция `trapz`, выполняющая интегрирование методом трапеций.

## 2.2. Задача с незакрепленными концами и фиксированным временем

Как и раньше, рассмотрим сначала задачу поиска безусловного экстремума функционала одной функции

$$J(y(t), \mathfrak{z}(t), t) = g_0(y(t_0), y(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(y(t), \mathfrak{z}(t), t) dt. \quad (68)$$

Интегральная составляющая критерия определяет «качество»  $y(t)$  на промежутке времени  $t_0 \dots t_k$ . Функция  $g_0(\dots)$  определяет составляющую качества, связанную с незакрепленными левым и правым концами.

В соответствии с ранее приведенной классификацией задача поиска экстремума функционала (68) есть задача Больца.

Для определения необходимых условий экстремума функционала (68) необходимо найти его первую вариацию и приравнять ее к нулю. Отметим, что приращение  $\Delta y(t)$  в данном случае приводит к приращению интеграла и функции  $g_0(\dots)$ . Последнее связано с приращениями значений незакрепленных концов:

$$\begin{cases} \Delta y(t_0) \neq 0, \\ \Delta y(t_k) \neq 0. \end{cases} \quad (69)$$

Определим приращение функционала (68), вызванное приращением функции  $\Delta y(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta J = & g_0(y(t_0) + \Delta y(t_0), y(t_k) + \Delta y(t_k)) - g_0(y(t_0), y(t_k)) + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} [f_0(y(t) + \Delta y(t), \mathfrak{z}(t) + d\Delta y/dt, t) - f_0(y(t), \mathfrak{z}(t), t)] dt. \end{aligned} \quad (70)$$

Разложив в  $\Delta J$  ряд Тейлора и отбросив все слагаемые выше первого порядка малости, получим первую вариацию функционала:

$$\delta J = \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} \Delta y(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} \Delta y(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y(t) + \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{z}} \frac{d\Delta y}{dt} \right] dt. \quad (71)$$

Проинтегрировав второе слагаемое подынтегрального выражения (71) по частям, получим:

$$\begin{aligned} \delta J = & \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} \Delta y(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} \Delta y(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y(t) dt + \\ & + \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{z}} \Delta y \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{z}} \Delta y(t) dt. \end{aligned} \quad (72)$$

Поскольку функция  $y(t)$  доставляет экстремум функционалу (68), его первая вариация, определенная на этой функции, должна быть равна нулю. Сгруппировав слагаемые в (72), запишем:

$$\delta J = \left[ \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} - \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}}(t_0) \right] \Delta y(t_0) + \left[ \frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}}(t_k) \right] \Delta y(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} \right] \Delta y(t) dt = 0. \quad (73)$$

Равенство (73) должно выполняться при любых произвольных функциях  $\Delta y(t)$  и их граничных значениях  $\Delta y(t_0)$  и  $\Delta y(t_k)$ . Поэтому необходимые условия экстремума функционала (68) можно записать в виде:

$$\frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} - \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}}(t_0) = 0, \quad (74)$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}}(t_k) = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (76)$$

Уравнение (76) есть уравнение Эйлера, а уравнения (74), (75) называются *условиями трансверсальности*.

Условия трансверсальности связывают частные производные функций  $g_0(\dots)$  и  $f_0(\dots)$  и после их вычисления преобразуются в алгебраические уравнения.

В случае, когда функционал зависит от нескольких функций, уравнения Эйлера записываются для всех функций, а условия трансверсальности – для всех незакрепленных концов.

Применительно к задачам оптимального управления объектом, описываемым  $n$  дифференциальными уравнениями первого порядка, функционал качества приводится обычно к виду:

$$J = g_0(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), x_1(t_k), \dots, x_n(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) dt. \quad (77)$$

Как максимум, мы имеем  $n$  незакрепленных левых и  $n$  незакрепленных правых концов, что и отражено в (77). На практике число незакрепленных концов обычно меньше, и в  $g_0(\dots)$  является функцией менее чем  $2n$  переменных.

Для учета ограничений, накладываемых на функции  $x_i(t)$ , управление  $u(t)$  и незакрепленные концы, используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Исходный функционал (77) «расширяется» путем включения в него всех ограничений (в виде равенств нулю), помноженных на неопределенные множители:

$$J^* = G(\dots) + \int_{t_0}^{t_k} L(\dots) dt, \quad (78)$$

$$G = g_0(\dots) + \sum_{i=1}^r v_i g_i(\dots), \quad (79)$$

$$L = f_0(X, u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(X, \mathbf{x}, u, t), \quad (80)$$

где  $g_i(\dots) = 0$  – ограничения, накладываемые на незакрепленные концы (максимальное их количество равно числу незакрепленных концов);  $v_i$  – неопределенные множители.

Необходимыми условиями экстремума функционала (78) будут

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (81)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_j(t_H)} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right|_{t_H} = 0, \quad (82)$$

где  $j$  – индексы незакрепленных левых концов,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_s(t_K)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \right|_{t_K} = 0, \quad (83)$$

где  $s$  – индексы незакрепленных правых концов.

Уравнения (81) есть уравнения Эйлера-Лагранжа, а уравнения (82) и (83) – условия трансверсальности для функционала (78).

Учитывая, что  $L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i$ , уравнения (81) – (83) можно записать через функцию Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\varphi_i, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (84)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_j(t_H)} \right|_{t_H} = -\psi_j(t_H), \quad (85)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_s(t_K)} \right|_{t_K} = \psi_s(t_K). \quad (86)$$

Как уже указывалось, уравнения (84) совместно с уравнениями объекта образуют систему из  $2n$  дифференциальных уравнений первого порядка. Для их решения необходимо  $2n$  дополнительных условий. Если задача содержит  $r$  незакрепленных концов, то мы имеем  $2n - r$  граничных условий и  $r$  условий трансверсальности (85), (86). Таким образом, общее число дополнительных условий равно  $2n$ , и, следовательно, задача имеет решение.

Пример 2.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u, \end{cases} \quad (87)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в положение  $x_1(1) = 1$  таким образом, чтобы обеспечить минимум потребления энергии:

$$J = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (88)$$

Конечное значение координаты  $x_2(1)$  может быть любым (т.е. нас не интересует конечная скорость объекта).

В данной задаче имеется один незакрепленный правый конец –  $x_2(1)$ . Эта переменная не входит в функционал, а кроме того, на нее не наложено никаких ограничений. Поэтому в данном случае

$$g_0 = 0, G = 0. \quad (89)$$

Запишем гамильтониан:

$$H = u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-3x_1 - x_2 + u). \quad (90)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 3\psi_2, \quad (91)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + \psi_2. \quad (92)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_2 = 0. \quad (93)$$

Из (93) получим

$$u = -0,5\psi_2. \quad (94)$$

Подставив (94) во второе уравнение системы (87) и объединив последние с уравнениями (91), (92), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = 3\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2. \end{cases} \quad (95)$$

Для ее решения необходимо четыре дополнительных условия. Мы имеем три граничных условия:  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_1(1) = 1$ . Для нахождения четвертого условия используем уравнение трансверсальности для  $x_2(1)$ :

$$\frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = \psi_2(1). \quad (96)$$

Откуда с учетом (89) получим:  $\psi_2(1) = 0$ .

Дальнейшее решение производится аналогично решению задачи из примера 1.

Приведем решение для координат объекта и управления:

$$x_1 = e^{-0,5t}[-0,2208\cos(1,6583t) - 1,8052\sin(1,1932t)] + e^{0,5t}[0,2208\cos(1,6583t) + 1,06\sin(1,6583t)], \quad (97)$$

$$x_2 = e^{-0,5t}[-1,8682\cos(1,6583t) + 0,9626\sin(1,6583t)] + e^{0,5t}[1,8682\cos(1,6583t) + 0,164\sin(1,6583t)], \quad (98)$$

$$u = e^{0,5t}[3,7376\cos(1,6583t) + 0,3278\sin(1,6583t)]. \quad (99)$$

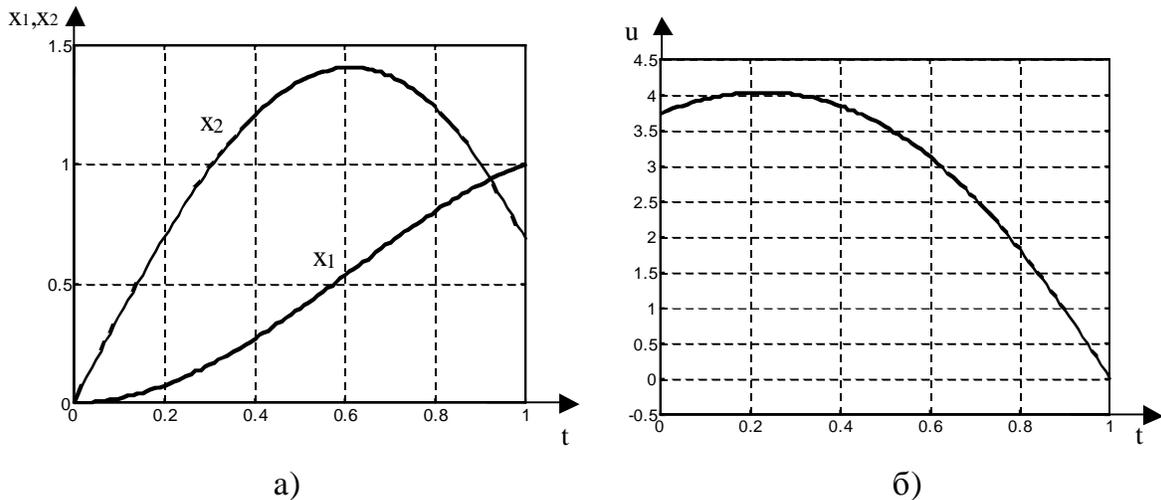


Рис. 2. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

Подставляя  $t = 1$  в (87), получим конечное значение координаты  $x_2(1)$ :

$$x_{2k} = \exp(-.5) * (-1.8682 * \cos(1.6583) + .9626 * \sin(1.6583)) + \dots \\ \exp(.5) * (1.8682 * \cos(1.6583) + .164 * \sin(1.6583))$$

$$x_{2k} = \\ 0.6808$$

Определим значение функционала:

$$t = 0 : .01 : 1 ; \\ u = \exp(.5 * t) .* (3.7366 * \cos(1.6583 * t) + .3278 * \sin(1.6583 * t)) ; \\ J = \text{trapz}(t, u .* u)$$

$$J = \\ 10.2553$$

Значение функционала меньше, чем в предыдущем примере. Очевидно, это связано с тем, что в данном случае не накладывалось ограничений на конечную скорость объекта, следовательно, и не потребовалось его торможение на заключительной стадии переходного процесса.

Пример 3.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u, \end{cases} \quad (100)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в положение  $x_1(1) = 1$  таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала:

$$J = 10x_2^2(1) + \int_0^1 u^2 dt. \quad (101)$$

В данной задаче требования к переходному процессу выражают компромисс между желанием обеспечить минимум потребления энергии (интегральная часть функционала) и желанием иметь как можно меньшую скорость объекта ( $x_2$ ) в конечный момент времени (алгебраическая часть функционала).

Запишем гамильтониан и функцию G.

$$H = u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-3x_1 - x_2 + u), \quad (102)$$

$$G = 10x_2^2(1). \quad (103)$$

Гамильтониан (102) полностью совпадает с гамильтонианами из примеров 1 и 2, поэтому воспользуемся полученными ранее решениями и сразу запишем систему уравнений, выражающую необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = 3\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2. \end{cases} \quad (104)$$

Решение системы уравнений имеет вид (см. пример 1):

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_1^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ x_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_2^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \psi_1 = C_1 \alpha_3^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_3^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_3^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_3^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \psi_2 = C_1 \alpha_4^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_4^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_4^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_4^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (105)$$

где  $\lambda_j$  ( $j = 1 \dots 4$ ) – собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -0.5000 + 1.6583i,$$

$$\lambda_2 = -0.5000 - 1.6583i,$$

$$\lambda_3 = 0.5000 + 1.6583i,$$

$$\lambda_4 = 0.5000 - 1.6583i,$$

$\mathbf{a}^{(j)} = [\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \alpha_4^{(j)}]^T$  – собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_j$ :

$$\alpha^{(1)} = [-0.1443-0.4787i, 0,866, 0, 0]^T,$$

$$\alpha^{(2)} = [-0.1443+0.4787i, 0,866, 0, 0]^T,$$

$$\alpha^{(3)} = [-0,0714, -0,0357-0,1185i, 0,8571, 0,1429+0,4738i]^T,$$

$$\alpha^{(4)} = [-0,0714, -0,0357+0,1185i, 0,8571, 0,1429-0,4738i]^T.$$

Для нахождения постоянных  $C_1 \dots C_4$  воспользуемся граничными условиями и условием трансверсальности:

$$\Psi_2(1) = \frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = 20x_2(1). \quad (106)$$

Из первых двух уравнений (105) получим:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1\alpha_1^{(1)} + C_2\alpha_1^{(2)} + C_3\alpha_1^{(3)} + C_4\alpha_1^{(4)} = 0, \\ x_2(0) = C_1\alpha_2^{(1)} + C_2\alpha_2^{(2)} + C_3\alpha_2^{(3)} + C_4\alpha_2^{(4)} = 0, \\ x_1(1) = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2} + C_3\alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3} + C_4\alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4} = 1. \end{cases} \quad (107)$$

Раскрывая (106) с учетом второго и четвертого уравнений (105), определим:

$$\begin{aligned} C_1\alpha_4^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_4^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_4^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_4^{(4)}e^{\lambda_4 t} = \\ = 20C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + 20C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} + 20C_3\alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3 t} + 20C_4\alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \end{aligned} \quad (108)$$

или

$$\begin{aligned} C_1(\alpha_4^{(1)} - 20\alpha_2^{(1)})e^{\lambda_1 t} + C_2(\alpha_4^{(2)} - 20\alpha_2^{(2)})e^{\lambda_2 t} \\ + C_3(\alpha_4^{(3)} - 20\alpha_2^{(3)})e^{\lambda_3 t} + C_4(\alpha_4^{(4)} - 20\alpha_2^{(4)})e^{\lambda_4 t} = 0. \end{aligned} \quad (109)$$

Объединяя (107) и (109), получим систему из четырех уравнений, решение которой позволяет определить постоянные  $C_1 \dots C_4$ . Представим эту систему в матричной форме:

$$MC = N, \quad (110)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_2^{(4)} \\ \alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1} & \alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2} & \alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3} & \alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4} \\ (\alpha_4^{(1)} - 20\alpha_2^{(1)})e^{\lambda_1} & (\alpha_4^{(2)} - 20\alpha_2^{(2)})e^{\lambda_2} & (\alpha_4^{(3)} - 20\alpha_2^{(3)})e^{\lambda_3} & (\alpha_4^{(4)} - 20\alpha_2^{(4)})e^{\lambda_4} \end{bmatrix}, (111)$$

$$N = [0, 0, 1, 0]^T. \quad (112)$$

$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$  – вектор, подлежащий определению.

Сформируем матрицы  $M$  и  $N$  и решим уравнение (99) в Matlab. Матрица  $V$  и вектор  $L$  содержат собственные векторы и собственные числа системы (94), см. пример 1.

```
M = [V(1:2, :); [V(1, :); V(4, :)-20*V(2, :)]*diag(exp(L))];
N = [0; 0; 1; 0];
C = M\N
```

```
C =
-1.3681 - 1.0697i
-1.3681 + 1.0697i
-4.4045 + 8.6746i
-4.4045 - 8.6746i
```

Перепишем систему (105) следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} + C'_{13}e^{\lambda_3 t} + C'_{14}e^{\lambda_4 t}, \\ x_2 = C'_{21}e^{\lambda_1 t} + C'_{22}e^{\lambda_2 t} + C'_{23}e^{\lambda_3 t} + C'_{24}e^{\lambda_4 t}, \\ \Psi_1 = C'_{31}e^{\lambda_1 t} + C'_{32}e^{\lambda_2 t} + C'_{33}e^{\lambda_3 t} + C'_{34}e^{\lambda_4 t}, \\ \Psi_2 = C'_{41}e^{\lambda_1 t} + C'_{42}e^{\lambda_2 t} + C'_{43}e^{\lambda_3 t} + C'_{44}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (113)$$

где  $C'_{i,j} = C_j \alpha_i^{(j)}$ .

Матрицу  $C'$  определим с помощью кода

```
C_ = v*diag(C)
```

```
C_ =
-0.3146+0.8093i -0.3146-0.8093i 0.3146-0.6196i 0.3146+0.6196i
-1.1848-0.9264i -1.1848+0.9264i 1.1848+0.2119i 1.1848-0.2119i
0 0 -3.7753+7.4354i -3.7753-7.4354i
0 0 -4.7393-0.8476i -4.7393+0.8476i
```

Как и в примере 1, перейдем к решению в обыкновенном виде, проведя соответствующие преобразования над парами слагаемых решения (113) (см. пример 1). В результате получим:

$$x_1 = e^{-0,5t}[-0,6292\cos(1,6583t)-1,6186\sin(1,6583t)]+ \\ + e^{0,5t}[0,6292\cos(1,6583t)+1,2392\sin(1,6583t)], \quad (114)$$

$$x_2 = e^{-0,5t}[-2,3696\cos(1,6583t)+1,8528\sin(1,6583t)]+ \\ + e^{0,5t}[2,3696\cos(1,6583t)-0,4238\sin(1,6583t)], \quad (115)$$

$$\psi_1 = e^{0,5t}[-7,5506\cos(1,6583t)-14,8708\sin(1,6583t)], \quad (116)$$

$$\psi_2 = e^{0,5t}[-9,4786\cos(1,6583t)+1,6952\sin(1,6583t)]. \quad (117)$$

Управление:

$$u = -0,5\psi_2 = e^{0,5t}[4,7393\cos(1,6583t)-0,8476\sin(1,6583t)]. \quad (118)$$

Графики полученных оптимальных траекторий и оптимального управления приведены на рис. 3.

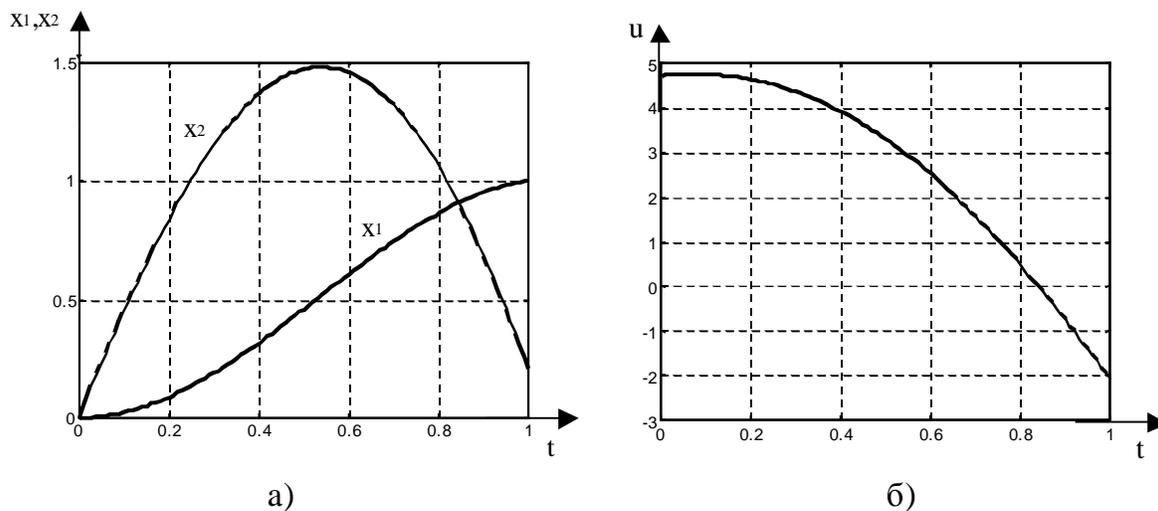


Рис. 3. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

Скорость движения объекта в момент времени  $t = 1$  определим в Matlab:

```
x2k = exp(-.5)*(-2.3696*cos(1.6583)+1.8528*sin(1.6583))+...
      exp(.5)*(2.3696*cos(1.6583)-.4238*sin(1.6583))
```

```
x2k =
    0.2076
```

Значение функционала:

```
t = 0:.01:1;
u = exp(.5*t).*(4.7393*cos(1.6583*t)-.8476*sin(1.6583*t));
J = 10*x2k+trapz(t,u.*u)
```

```
J =
    13.3140
```

При этом «потребление энергии» ( $\int_0^1 u^2 dt$ ) составило:

```
trapz(t, u.*u)
```

```
ans =
```

```
11.2380
```

Как и следовало ожидать, значение интеграла больше, чем в примере 2, где на конечную скорость объекта не накладывалось никаких ограничений, но меньше, чем в примере 1, в котором она должна была быть нулевой.

#### Пример 4.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u, \end{cases} \quad (119)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в состояние, характеризующее равенством

$$x_1(1) + x_2(1) = 1, \quad (120)$$

таким образом, чтобы обеспечить минимум потребления энергии:

$$J = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (121)$$

Физический смысл такой задачи может быть следующим.

Будем полагать, что уравнения (119) описывают две независимые системы. За время, равное единице, их нужно привести в «согласованное» состояние, заданное уравнением (120) с минимальным потреблением энергии.

В данном случае присутствует ограничение на правые концы траектории движения, которое вносится в функцию  $G$ :

$$G = v(x_1(1) + x_2(1) - 1), \quad (122)$$

где  $v$  – неопределенный множитель.

Запишем гамильтониан:

$$H = u^2 + \psi_1(-x_1 + u) + \psi_2(-2x_2 + u). \quad (123)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_1 + \psi_2 = 0, \quad (124)$$

$$\psi_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_1, \quad (125)$$

$$\psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 2\psi_2. \quad (126)$$

Из (124) получим

$$u = -0,5\psi_1 - 0,5\psi_2. \quad (127)$$

С учетом (127) полная система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 0,5\psi_1 - 0,5\psi_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 0,5\psi_1 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 = 2\psi_2. \end{cases} \quad (128)$$

Для ее решения потребуется четыре дополнительных условия. Мы имеем два граничных условия  $x_1(0) = 0$  и  $x_2(0) = 0$  и уравнение (120), связывающее  $x_1(1)$  и  $x_2(1)$ . Воспользуемся условиями трансверсальности

$$\frac{\partial G}{\partial x_1(1)} = \psi_1(1) = v, \quad (129)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = \psi_2(1) = v. \quad (130)$$

Собственно значение  $v$  нас не интересует, важно только, что

$$\psi_1(1) = \psi_2(1). \quad (131)$$

Таким образом, все четыре дополнительных условия нам известны.

Система (128) однородна и может быть представлена в матричном виде

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X}, \quad (132)$$

где  $\hat{X} = [x_1, x_2, \psi_1, \psi_2]^T$ , а матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & -2 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определим собственные числа матрицы  $A$  с помощью Matlab:

```
A = [-1 0 -0.5 -0.5; 0 -2 -0.5 -0.5 ; 0 0 1 0; 0 0 0 2];
L = eig(A)
```

```
L =
    -1
    -2
     1
     2
```

Кратных чисел нет, поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_1^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_2^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C_1 \alpha_3^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_3^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_3^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_3^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C_1 \alpha_4^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_4^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_4^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_4^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (133)$$

где  $\lambda_j$  ( $j = 1 \dots 4$ ) – собственные числа матрицы  $A$  (определенные выше);  $\mathbf{a}^{(j)} = [\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \alpha_4^{(j)}]^T$  – собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_j$ ;  $C_j$  – постоянные, определяемые через дополнительные условия.

Определим собственные векторы матрицы  $A$  с помощью следующего вызова функции `eig`:

```
[V,D] = eig(A); V
```

V =

```
1.0000    0   -0.2394   -0.1632
    0    1.0000   -0.1596   -0.1224
    0    0    0.9577    0
    0    0    0    0.9790
```

Матрица  $v$  состоит из столбцов, каждый из которых – собственный вектор, определенный для соответствующего комплексного числа. Матрица  $D$  нами не используется.

Для нахождения постоянных  $C_1 \dots C_4$  воспользуемся дополнительными условиями, которые в новых обозначениях будут следующими:

$$\begin{cases} \hat{X}_1(0) = 0, \\ \hat{X}_2(0) = 0, \\ \hat{X}_1(1) + \hat{X}_2(1) = 1, \\ \hat{X}_3(1) - \hat{X}_4(1) = 0. \end{cases} \quad (134)$$

Первые два уравнения (134) с учетом решения (133) следующие:

$$x_1(0) = C_1 \alpha_1^{(1)} + C_2 \alpha_1^{(2)} + C_3 \alpha_1^{(3)} + C_4 \alpha_1^{(4)} = 0, \quad (135)$$

$$x_2(0) = C_1 \alpha_2^{(1)} + C_2 \alpha_2^{(2)} + C_3 \alpha_2^{(3)} + C_4 \alpha_2^{(4)} = 0. \quad (136)$$

Третье и четвертое уравнения (134) примут вид:

$$\begin{aligned} x_1(1) + x_2(1) = C_1 (\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) e^{\lambda_1} + C_2 (\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) e^{\lambda_2} + \\ + C_3 (\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)}) e^{\lambda_3} + C_4 (\alpha_1^{(4)} + \alpha_2^{(4)}) e^{\lambda_4} = 1, \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(1) - \Psi_1(1) = & C_1(\alpha_3^{(1)} - \alpha_4^{(1)})e^{\lambda_1} + C_2(\alpha_3^{(2)} - \alpha_4^{(2)})e^{\lambda_2 t} + \\ & + C_3(\alpha_3^{(3)} - \alpha_4^{(3)})e^{\lambda_3 t} + C_4(\alpha_3^{(4)} - \alpha_4^{(4)})e^{\lambda_4 t} = 0. \end{aligned} \quad (138)$$

В матричной форме уравнения (135) – (138) запишутся:

$$MC = N, \quad (139)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_2^{(4)} \\ \left(\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}\right)e^{\lambda_1} & \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}\right)e^{\lambda_2} & \left(\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)}\right)e^{\lambda_3} & \left(\alpha_1^{(4)} + \alpha_2^{(4)}\right)e^{\lambda_4} \\ \left(\alpha_3^{(1)} - \alpha_4^{(1)}\right)e^{\lambda_1} & \left(\alpha_3^{(2)} - \alpha_4^{(2)}\right)e^{\lambda_2} & \left(\alpha_3^{(3)} - \alpha_4^{(3)}\right)e^{\lambda_3} & \left(\alpha_3^{(4)} - \alpha_4^{(4)}\right)e^{\lambda_4} \end{bmatrix}, \quad (140)$$

$$N = [0, 0, 1, 0]^T. \quad (141)$$

$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$  – вектор, подлежащий определению.

Сформируем матрицы M и N и решим уравнение (31) в Matlab:

```
M = [V(1:2, :); [V(1, :) + V(2, :); V(3, :) - V(4, :)] * diag(exp(L))];
N = [0; 0; 1; 1];
C = M \ N
C =
```

```
-0.1747
-0.1193
-0.5859
-0.2109
```

Перепишем систему (133) следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} + C'_{13}e^{\lambda_3 t} + C'_{14}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C'_{21}e^{\lambda_1 t} + C'_{22}e^{\lambda_2 t} + C'_{23}e^{\lambda_3 t} + C'_{24}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C'_{31}e^{\lambda_1 t} + C'_{32}e^{\lambda_2 t} + C'_{33}e^{\lambda_3 t} + C'_{34}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C'_{41}e^{\lambda_1 t} + C'_{42}e^{\lambda_2 t} + C'_{43}e^{\lambda_3 t} + C'_{44}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (142)$$

где  $C'_{i,j} = C_j \alpha_i^{(j)}$ .

Матрицу  $C'$  определим с помощью кода

```
C_ = V * diag(C)
```

```
C_ =
```

```
-0.1747      0      0.1403      0.0344
      0     -0.1193      0.0935      0.0258
      0         0     -0.5611         0
      0         0         0     -0.2064
```

Окончательно решение запишем в виде:

$$x_1 = -0,1747e^{-t} + 0,1403e^t + 0,0344e^{2t}, \quad (143)$$

$$x_2 = -0,1193e^{-2t} + 0,0935e^t + 0,0258e^{2t}, \quad (144)$$

$$\psi_1 = -0,5611e^t, \quad (145)$$

$$\psi_2 = -0,2064e^{2t}. \quad (146)$$

Управление

$$u = -0,5\psi_1 - 0,5\psi_2 = 0,2806e^t + 0,1032e^{2t}. \quad (147)$$

Графики координат объекта и управления приведены на рис. 4.

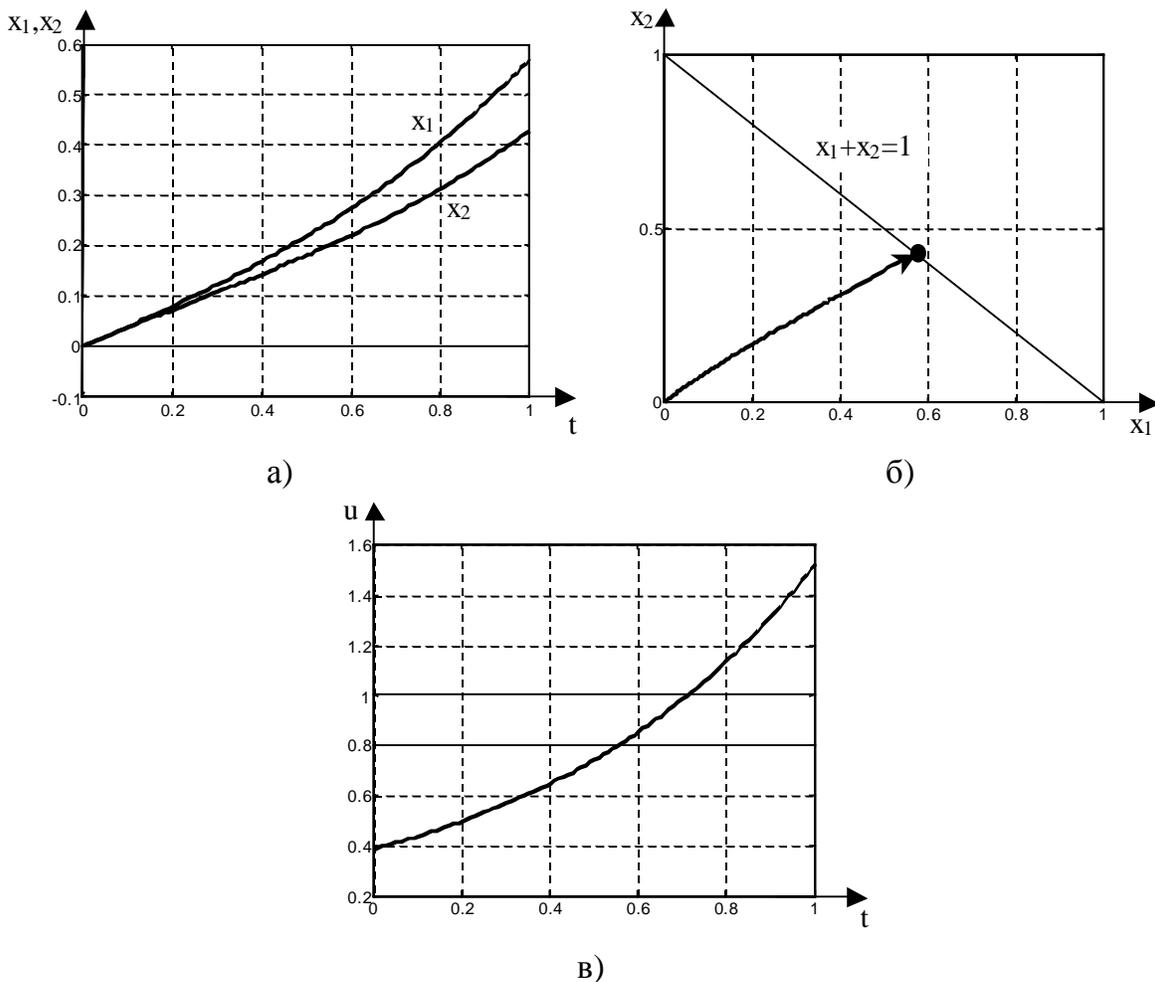


Рис. 4. Оптимальная траектория (а, б) и оптимальное управление (в)

Конечные значения координат:

$$x_{1k} = -0.1747 \cdot \exp(-1) + 0.1403 \cdot \exp(1) + 0.0344 \cdot \exp(2)$$

$$x_{1k} =$$

$$0.5713$$

$$x_{2k} = -0.1193 \cdot \exp(-2) + 0.0935 \cdot \exp(1) + 0.0258 \cdot \exp(2)$$

$$x_{2k} =$$

$$0.4287$$

Значение функционала:

$$t = 0 : .01 : 1;$$

$$u = .2806 \cdot \exp(t) + .1032 \cdot \exp(2t)$$

$$J = \text{trapz}(t, u .* u)$$

$$J =$$

$$0.7626$$

### Пример 5

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (148)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в положение  $x_2(1) = 0$  (конечная скорость равна нулю) таким образом, чтобы обеспечить максимум функционала:

$$J = x_1(1) \quad (149)$$

с учетом ограничения на энергоресурс

$$\int_0^1 u^2 dt = 12. \quad (150)$$

Из формулировки задачи видно, что это задача на максимальную дальность перемещения. Избавимся от изопериметрического ограничения (150), введя дополнительную переменную  $x_3$ , такую, что

$$\dot{x}_3 = u^2. \quad (151)$$

Примем  $x_3(0) = 0$ , тогда  $x_3(1) = 12$ .

Запишем гамильтониан и функцию G:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2, \quad (152)$$

$$G = x_1(1). \quad (153)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (154)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad (155)$$

$$\psi_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \quad (156)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 + 2\psi_3 u = 0. \quad (157)$$

Из (154) –(157) получим

$$\psi_1 = C_1 = \text{const}, \quad (158)$$

$$\psi_2 = -\psi_1 t + C_2 = -C_1 t + C_2, \quad (159)$$

$$\psi_3 = C_3 = \text{const}, \quad (160)$$

$$u = -\frac{\psi_2}{2\psi_3} = \frac{C_1 t - C_2}{2C_3}. \quad (161)$$

Применим условие трансверсальности

$$\Psi_1(1) = \frac{\partial G}{\partial x_1(1)} = 1, \quad (162)$$

следовательно,  $C_1 = 1$ . Подставляя это значение в (159) и (161), получим

$$\psi_2 = C_2 - t, \quad (163)$$

$$u = -\frac{\psi_2}{2\psi_3} = \frac{t - C_2}{2C_3}, \quad (164)$$

$$u^2 = \frac{t^2 - 2C_2 t + C_2^2}{4C_3^2}. \quad (165)$$

Интегрируя (151) с учетом (165), определим

$$x_3 = \frac{t^3}{12C_3^2} - \frac{C_2 t^2}{4C_3^2} + \frac{C_2^2 t}{4C_3^2} + C_4. \quad (166)$$

Из начального условия для  $x_3$  следует, что  $C_4 = 0$ . Конечное условие дает:

$$x_3(1) = \frac{1}{12C_3^2} - \frac{C_2}{4C_3^2} + \frac{C_2^2}{4C_3^2} = \frac{1 - 3C_2 + 3C_2^2}{12C_3^2} = 12, \quad (167)$$

откуда

$$C_3 = \pm \frac{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}{12}. \quad (168)$$

Необходимо выбрать знак в (168). Рассмотрим оба варианта. Первый:

$$C_3 = \frac{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}{12}, \quad (169)$$

$$u = \frac{t - C_2}{2C_3} = \frac{6(t - C_2)}{1 - 3C_2 + 3C_2^2} = k_1 t + k_2, \quad (170)$$

где

$$k_1 = \frac{6}{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}, \quad k_2 = -\frac{6C_2}{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}. \quad (171)$$

Из (148) с учетом (170) получим

$$x_2 = \frac{k_1}{2} t^2 + k_2 t + k_3. \quad (172)$$

Так как  $x_2(0) = 0$ ,  $k_3 = 0$ . Далее из того, что  $x_2(1) = 0$ , следует:

$$\frac{k_1}{2} + k_2 = 0, \quad (173)$$

откуда с учетом (171) получим:  $C_2 = 0,5$ . Подставляя это значение в (170), имеем

$$u = \frac{6(t - C_2)}{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}} = 12t - 6. \quad (174)$$

Интегрируя уравнения объекта с учетом (174) и нулевых начальных условий, получим:

$$x_2 = 6t^2 - 6t, \quad (175)$$

$$x_1 = 2t^3 - 3t^2. \quad (176)$$

Согласно (176) в момент времени  $t = 1$   $x_1 = -1$ .

Второй вариант:

$$C_3 = -\frac{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}{12}. \quad (177)$$

Проведя вычисления, аналогичные проведенным выше, в данном случае получим:

$$u = 6 - 12t, \quad (178)$$

$$x_2 = 6t - 6t^2, \quad (179)$$

$$x_1 = 3t^2 - 2t^3. \quad (180)$$

При этом  $x_1(1) = 1$ .

Сравнивая решения по двум вариантам, выбираем второе как обеспечивающее максимум функционала (149) (первое решение, очевидно, дает его ми-

нимум). Графики оптимальных траекторий и оптимального управления, построенные по формулам (178)–(180), приведены на рис. 5.

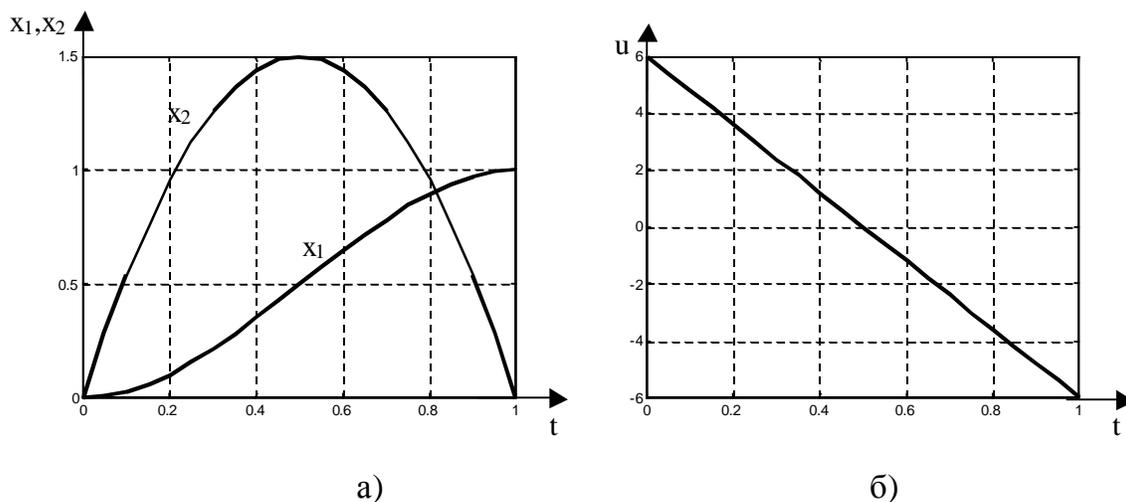


Рис. 5. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

В заключение отметим, что с помощью вариационного исчисления можно решать задачи и с нефиксированным временем, однако в данной работе для этой цели мы будем использовать принцип максимума.

### 2.3. Задания

Определить оптимальное управление, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из состояния  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  в состояние  $x_1(t_k)$ ,  $x_2(t_k)$  за заданное время  $t_k$  таким образом, чтобы достигался минимум функционала  $J$ .

Варианты:

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_k) = 2, x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, t_k = 2.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_k) = 2, x_2(t_k) = 0,5,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, t_k = 1.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_k) = 1, x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + x_2^2) dt, \quad t_k = 1.$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 5, \quad x_2(t_k) \text{ любое},$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 3.$$

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) \text{ любое}, \quad x_2(t_k) = 1,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 2.$$

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + 2x_2^2) dt, \quad t_k = 10.$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 2.$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = -1,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + x_1^2) dt, \quad t_k = 4.$$

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) + 2x_2(t_k) = 1,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + x_1^2) dt, \quad t_k = 2.$$

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1,$$

$x_2(t_k)$  неизвестно,

$$J = x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 1.$$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + x_2^2) dt, \quad t_k = 10.$$

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) \text{ неизвестно}, \\ x_2(t_k) = 5,$$

$$J = x_1^2(t_k) + \int_0^{t_k} 4u^2 dt, \quad t_k = 6.$$

$$13. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) + x_2(t_k) = 4,$$

$$J = x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 1.$$

$$14. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 2, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + x_2^2) dt, \quad t_k = 4.$$

$$15. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 3u^2) dt, \quad t_k = 2.$$

$$16. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) \text{ максимально},$$

$$x_2(t_k) = 0, \quad J = -x_1(t_k), \quad \int_0^{t_k} u^2 dt = 10, \quad t_k = 2.$$

$$17. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = 1,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 5.$$

$$18. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 0,$$

$$x_2(t_k) = \text{максимально}, \quad J = -x_2(t_k), \quad \int_0^{t_k} u^2 dt = 10, \quad t_k = 6.$$

$$19. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1,$$

$x_2(t_k)$  неизвестно,

$$J = 2x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 1.$$

$$20. \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad 3x_1(t_k) + 2x_2(t_k) = 1,$$

$$J = x_1^2(t_k) + 2x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} 3u^2 dt, \quad t_k = 2.$$

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

#### 3.1. Принцип максимума Понтрягина

Принципом максимума называют математический метод, разработанный академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками для решения задач оптимального управления. Этот метод позволяет определить необходимые условия *минимума* функционала вида

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(X(t), U(t)) dt, \quad (181)$$

где  $X$  – вектор переменных состояния объекта;  $U$  – вектор управляющих воздействий при наличии любых, в том числе неклассических (в виде неравенств) ограничений, накладываемых на векторы  $X$  и  $U$ .

Важно отметить, что при этом конечное время  $t_k$  неизвестно и подлежит определению при решении задачи.

В нашей работе мы будем рассматривать задачи оптимального управления, когда неклассические ограничения заданы только на вектор управления, чему соответствует вариант принципа максимума, наиболее часто используемый на практике. Будем считать, что этот вектор должен принадлежать некоторой известной области допустимых значений  $\Omega$ , т.е.  $U \subset \Omega$ . Область  $\Omega$  может быть задана, например, неравенствами вида

$$|u_i| \leq u_{i,\max}, \quad i = 1 \dots m, \quad (182)$$

что означает ограничение управляющих воздействий по модулю.

Для определения необходимых условий минимума функционала (181) принцип максимума, как и вариационное исчисление, использует функцию Гамильтона. Эта функция задается следующим образом:

$$H = \psi_0(t) f_0(X(t), U(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(X(t), U(t)), \quad (183)$$

где  $\psi_0 \dots \psi_n$  – неопределенные множители;  $f_i(X(t), U(t))$  – правые части дифференциальных уравнений объекта.

Отличием данной функции от гамильтониана, применяемого в вариационном исчислении, является присутствие множителя  $\psi_0$  перед подынтегральной функцией функционала.

При фиксированных значениях  $\psi_0 \dots \psi_n$  и  $x_1 \dots x_n$  функция  $H$  является функцией управления  $U$ . Следовательно, из области допустимых значений  $\Omega$  можно выбрать такой вектор управляющих воздействий, при котором гамильтониан достигает максимума. Обозначим верхнюю грань (максимум) значений  $H$  через  $M(\Psi, X)$ :

$$M(\Psi, X) = \sup_{U \subset \Omega} H(\Psi, X, U). \quad (184)$$

Сформулируем принцип максимума [3].

Для оптимальности управления и траектории  $X(t)$  необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\Psi(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]$ , соответствующей функциям  $U(t)$  и  $X(t)$ , что:

1) при любом  $t$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_k$  функция  $H(\Psi, X, U)$  переменного  $U \subset \Omega$  достигает при данном управлении  $U(t)$  максимума

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = M(\Psi(t), X(t)); \quad (185)$$

2) в конечный момент времени  $t_k$  выполняются соотношения

$$\psi_0(t_k) \leq 0; \quad M(\Psi(t_k), X(t_k)) = 0. \quad (186)$$

Кроме того, если  $\Psi(t), X(t), U(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots n \quad (187)$$

и условию (185), то функции  $\psi_0(t)$  и  $M(\Psi(t), X(t))$  переменного  $t$  являются постоянными и условие (186) выполняется в любой момент времени на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_k$ .

Отметим, что вектор  $\Psi(t)$  может быть определен с точностью до постоянного множителя, так как очевидно, что если некоторый вектор  $\Psi^*(t)$  удовлетворяет условиям принципа максимума, то вектор  $k\Psi^*(t)$ , где  $k = \text{const} > 0$ , также им удовлетворяет. Поэтому всегда при  $\psi_0(t) \neq 0$  можно положить  $\psi_0(t) = -1$ , что мы и будем делать (случай  $\psi_0(t) = 0$  является особым и нами не рассматривается).

### 3.2. Линейная задача максимального быстродействия.

#### Теорема об $n$ интервалах

Принцип максимума позволяет решать задачи оптимального управления, в которых в качестве критерия оптимизации выступает время переходного процесса. Это время должно быть минимальным, – другими словами, речь идет об обеспечении максимального быстродействия системы.

Теоретически любой линейный объект может быть переведен из любого начального состояния в любое конечное за сколь угодно малое время. Увеличение быстродействия достигается увеличением мощности управляющего сигнала. Однако на практике этот сигнал всегда ограничен (в данной работе рассматривается ограничение управления по модулю (182)). В таких условиях минимальное время перехода объекта из одного состояния в другое существует и конечно, т.е. задача оптимального управления имеет решение.

Пусть имеется линейный объект управления, описываемый матричным уравнением

$$\dot{X} = AX + BU. \quad (188)$$

Уравнение (188) эквивалентно системе из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k, \quad i=1\dots n, \quad (189)$$

где  $n$  – порядок системы;  $m$  – число управляющих воздействий.

Предположим, что система (189) является нормальной, т.е. матрицы

$$G_j = [b_j | Ab_j | A^2b_j | \dots | A^{n-1}b_j], \quad j=1\dots m, \quad (190)$$

где  $b_j$  –  $j$ -й столбец матрицы  $B$ , для всех  $j$  являются невырожденными. Это означает управляемость системы по всем управляющим воздействиям.

Пусть область допустимых значений управления  $U$  представляет собой  $m$ -мерный параллелепипед, задаваемый неравенствами

$$u_{j,\min} \leq u_j \leq u_{j,\max}, \quad j=1\dots m, \quad (191)$$

где  $u_{j,\min} < 0$ ,  $u_{j,\max} > 0$ .

Требуется определить управление, обеспечивающее максимальное быстроедействие системе (189) при переводе ее из состояния  $X(t_0)$  в состояние  $X(t_k)$ , т.е. доставляющее минимум функционалу:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} dt. \quad (192)$$

Составим гамильтониан:

$$H = -1 + \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k, \quad (193)$$

или в матричной форме

$$H = -1 + \Psi^T AX + \Psi^T BU. \quad (194)$$

Уравнения (187) примут вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -A^T \Psi. \quad (195)$$

Оптимальное управление доставляет максимум функции Гамильтона в каждый момент времени. Для этого оно должно максимизировать функцию  $\Psi^T BU$ , которую можно представить в виде:

$$\Psi^T BU = \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} \right] u_k. \quad (196)$$

Так как компоненты вектора  $u$  могут изменяться независимо друг от друга, максимум функции (196) достигается при следующих условиях:

$$u_k = \begin{cases} u_{k,\max}, & \text{если } \sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} > 0, \\ u_{k,\min}, & \text{если } \sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} < 0, \quad k = 1 \dots m. \end{cases} \quad (197)$$

Таким образом, оптимальные управления  $u_k(t)$  являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения  $u_{k,\min}$  и  $u_{k,\max}$ . Необходимо выяснить, определяются ли эти функции однозначным способом (за исключением конечного числа точек).

Как следует из (197),  $u_k(t)$  определяется неоднозначно, если

$$\sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} = 0. \quad (198)$$

Вектор-функция  $\Psi(t)$  – аналитическая функция, так как является решением системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами (195). Следовательно, аналитической является и функция  $\sum_{i=1}^n \psi_i(t) b_{ik}$ .

Предположим, что эта функция обращается в нуль на бесконечном множестве точек  $t$ , т.е.

$$\sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} \equiv 0. \quad (199)$$

Запишем это тождество в векторной форме:

$$\Psi^T(t) b_k \equiv 0, \quad (200)$$

где  $b_k$  –  $k$ -й столбец матрицы  $B$ .

Продифференцировав (200)  $n-1$  раз с учетом (195), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Psi^T(t) b_k \equiv 0, \\ \Psi^T(t) A b_k \equiv 0, \\ \dots \\ \Psi^T(t) A^{n-1} b_k \equiv 0. \end{cases} \quad (201)$$

Относительно вектора  $\Psi(t)$  уравнения (201) представляют систему линейных однородных алгебраических уравнений. Принимая во внимание (190), систему (201) можно переписать в компактной форме:

$$\Psi^T(t) G_k^T \equiv 0. \quad (202)$$

Определитель этой системы

$$\det(G_k^T) \neq 0, \quad (203)$$

так как система (189) является нормальной. Тогда тождество (202) может иметь место только в случае, если

$$\Psi^T(t) \equiv 0. \quad (204)$$

Однако это противоречит принципу максимума. Таким образом, предположение (199) неверно и оптимальное управление  $U(t)$  определяется однозначно за исключением конечного числа точек.

Для решения задач на максимальное быстроедействие часто полезно знать число точек, в которых наблюдается равенство (198), так как это число определяет количество переключений управляющих сигналов между максимальным и минимальным уровнями.

Пусть матрица  $A$  объекта имеет только вещественные (возможно, кратные) собственные числа, а уравнения  $u_j(t)$  доставляют минимум функционалу (192). Определим, сколько раз может обращаться в нуль функция  $\sum_{i=1}^n \psi_i(t)b_{ij}$ .

Пусть  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$  – различные собственные числа матрицы  $A$  ( $r \leq n$  за счет того, что среди собственных чисел имеются кратные). Тогда матрица  $-A^T$ , входящая в уравнение (184), имеет собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , где  $\lambda_v = -\rho_v$ ,  $v = 1 \dots r$ . Таким образом, собственные числа матрицы  $-A^T$  также являются вещественными. Обозначим кратность собственного числа  $\lambda_v$  как  $\rho_v$ . Очевидно, что  $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r = n$ .

Каждая функция  $\psi_i(t)$ ,  $i = 1 \dots n$ , является решением системы однородных линейных дифференциальных уравнений (184), которое имеет вид

$$\psi_i(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_r(t)e^{\lambda_r t}. \quad (205)$$

Входящие в (205) функции  $f_v(t)$ ,  $v = 1 \dots r$  представляют собой многочлены, причем степень каждого многочлена определяется кратностью соответствующего собственного числа  $\lambda_v$  и не превышает  $\rho_v - 1$ .

Очевидно, что линейная комбинация  $\sum_{i=1}^n \psi_i(t)b_{ij}$  будет иметь вид, аналогичный (205):

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t)b_{ij} = \sigma_1(t)e^{\lambda_1 t} + \sigma_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + \sigma_r(t)e^{\lambda_r t}, \quad (206)$$

где  $\sigma_v(t)$ ,  $v=1 \dots r$  – многочлены, имеющие ту же степень, что и многочлены  $f_v(t)$ .

Докажем следующее утверждение: выражение (206) может обращаться в нуль не более чем

$$(\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_r - 1) + (r - 1) = n - 1$$

раз.

В случае, если  $r = 1$ , утверждение справедливо, так как функция

$\sigma_1(t)e^{\lambda_1 t}$  обращается в нуль в точках, в которых обращается в нуль многочлен  $\sigma_1(t)$ , и, следовательно, имеет не более  $\rho_1 - 1$  нулей, а кроме того, в данном случае  $n = \rho_1$ .

Предположим, что утверждение справедливо, когда число слагаемых в (206) меньше  $r$ . Покажем, что оно справедливо и при  $r$  слагаемых. Это позволит нам, исходя из справедливости утверждения при  $r = 1$ , доказать его справедливость для случая  $r = 2$  и далее для любого  $r$ .

Предположим, что при  $r$  слагаемых наше утверждение неверно и функция (206) имеет, по крайней мере,  $(\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_r - 1) + r$  нулей. Умножим (206) на  $e^{-\lambda_r t}$ , что не изменит ее нулей. В результате получим функцию

$$\sigma_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_r)t} + \sigma_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_r)t} + \dots + \sigma_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)t} + \sigma_r(t). \quad (207)$$

Продифференцировав (207)  $\rho_r$  раз, получим

$$g_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_r)t} + g_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_r)t} + \dots + g_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)t}, \quad (208)$$

где  $g_v(t)$  – многочлены, имеющие ту же степень, что и многочлены  $\sigma_v(t)$ .

Поскольку между двумя нулями функции лежит, по крайней мере, один нуль ее производной, то при каждом дифференцировании может «теряться» не более одного нуля, т.е. функция (208) имеет не менее

$$\begin{aligned} (\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_r - 1) + r - \rho_r = \\ = (\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_{r-1} - 1) + r - 1 \end{aligned}$$

нулей. Но функция (208) имеет  $r - 1$  слагаемых, числа  $(\lambda_i - \lambda_r)$  – различны. По ранее сделанному предположению, для него справедливо наше утверждение и она должна иметь не более чем  $(\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_{r-1} - 1) + r - 2$  нулей. Полученное противоречие доказывает, что если наше утверждение справедливо для  $r - 1$  слагаемых, то оно справедливо и для  $r$  слагаемых. Далее: поскольку оно справедливо для одного слагаемого, оно справедливо для двух, трех и так далее для любого  $r$ .

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы:

*Если матрица состояния  $A$  линейного объекта имеет только вещественные собственные числа, а управления  $u_j, j = 1 \dots m$  удовлетворяет принципу*

*максимума и доставляет минимум функционалу  $J = \int_{t_0}^{t_k} dt$ , то каждое из управ-*

*лений  $u_j$  является кусочно-постоянной функцией, принимающей предельные значения  $u_{j,\min}$ ,  $u_{j,\max}$ , и имеет не более  $n - 1$  переключений, где  $n$  порядок системы.*

Данная теорема называется *теоремой о числе переключений*, или *теоремой об  $n$  интервалах* (управления). Впервые она была доказана А.А. Фельдбаумом.

В заключение отметим, что если среди собственных чисел матрицы  $A$  объекта имеются комплексно-сопряженные пары, оптимальное управление также описывается кусочно-непрерывными функциями, число интервалов также конечно, но зависит от начального и конечного состояний объекта.

Ниже приведены примеры решения задач на максимальное быстродействие с помощью принципа максимума с применением теоремы об  $n$  интервалах.

Пример 6.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u, \end{cases} \quad (209)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(t_k) = 1, x_2(t_k) = 0$  за минимальное время при ограничении на управление

$$|u| \leq 1. \quad (210)$$

Функционал качества будет иметь вид

$$J = t_k = \int_0^{t_k} dt \rightarrow \min. \quad (211)$$

Полагая  $\psi_0 = -1$ , запишем гамильтониан:

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_2 + u). \quad (212)$$

Уравнения (187) в данном случае будут иметь вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (213)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + \psi_2. \quad (214)$$

Из уравнений (213), (214) получаем

$$\psi_1 = C = \text{const}, \quad (215)$$

$$\dot{\psi}_2 = -C + \psi_2. \quad (216)$$

Из (212) найдем условия максимума гамильтониана по управлению:

$$\begin{cases} u = u_{\max} = 1 & \text{при } \psi_2 > 0, \\ u = u_{\min} = -1 & \text{при } \psi_2 < 0. \end{cases} \quad (217)$$

При  $\psi_2 = 0$  управление не определено. Из (216) видно, что при любых значениях  $C$  и  $\psi_2(0)$  функция  $\psi_2(t)$  меняет знак не более одного раза. Таким образом, управление будет формироваться не более чем двумя интервалами постоянного значения, что согласно теореме об  $n$  интервалах подтверждает правильность нашего решения.

Подставив (217) в (212), определим функцию  $M(\Psi, X)$ :

$$M = -1 + Cx_2 + \psi_2(-x_2 + \text{sign}(\psi_2)). \quad (218)$$

Согласно принципу максимума на всем интервале управления функция  $M(\Psi, X)$  постоянна и равна нулю. Из физических соображений ясно, что в начальный момент времени управление должно быть положительным, так как в противном случае объект начнет удаляться от цели. Поэтому  $\psi_2(0) > 0$  и из (218) получим

$$M(0) = -1 + Cx_2(0) + \psi_2(0)(-x_2(0) + 1) = -1 + \psi_2(0) = 0, \quad (219)$$

откуда  $\psi_2(0) = 1$ .

Для определения константы  $C$  по уравнениям (209), (212), (213), (214) и (217) составим Simulink-модель системы (рис. 6). Модель предусматривает вычисление координат объекта и функции  $\psi_2(t)$ , а также значения гамильтониана  $H$  при заданном  $C$ . Остановка вычислений производится с помощью библиотечного блока Stop Simulation в момент, когда  $x_2$  изменяет знак с положительного на отрицательный (т.е. становится практически равной нулю). При этом фиксируется значение  $x_1(t_k)$ . Подбирая значение  $C$ , добиваемся выполнения условия:  $x_1(t_k) = 1$ . Отметим: чтобы функция  $\psi_2(t)$  меняла знак, что требуется для изменения знака управления, согласно (216) необходимо, чтобы  $C > \psi_2(0)$ .

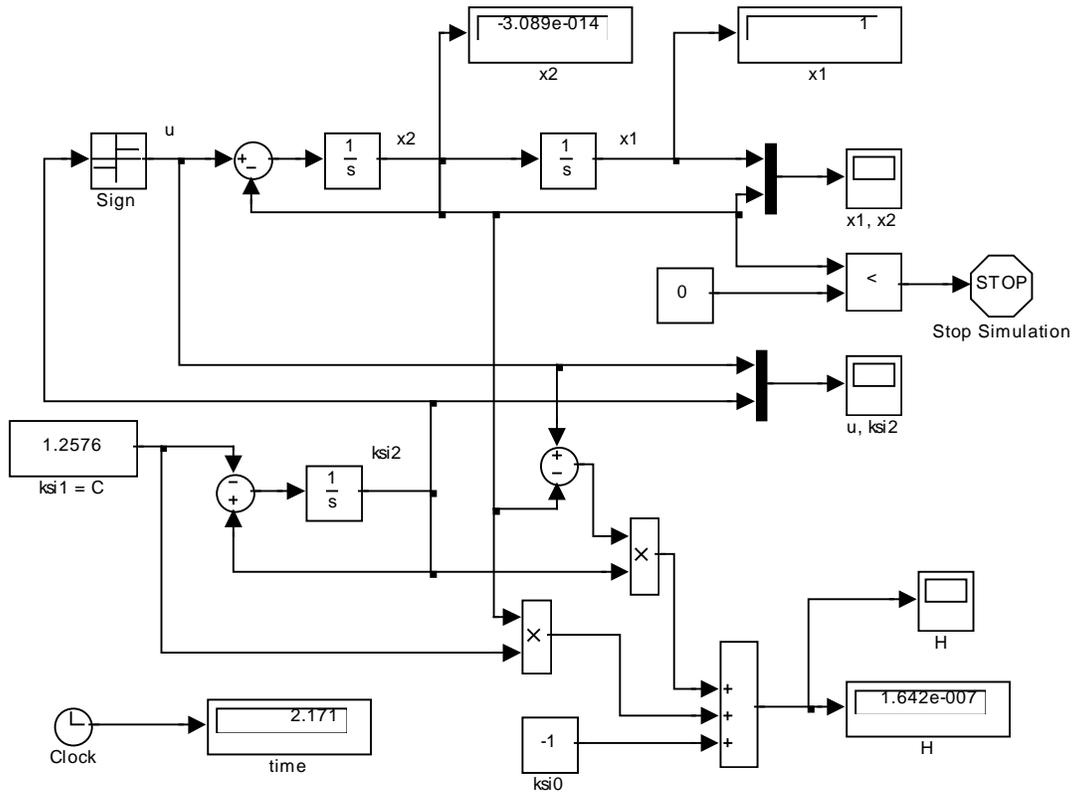


Рис. 6. Simulink-модель системы для определения постоянной  $C$

В результате моделирования найдено значение  $C = 1,2576$  и получены графики оптимальных траекторий и оптимального управления (рис. 7). Время процесса составило 2,171 сек. Из этого времени 1,586 сек. управление было положительным, 0,586 сек. – отрицательным.

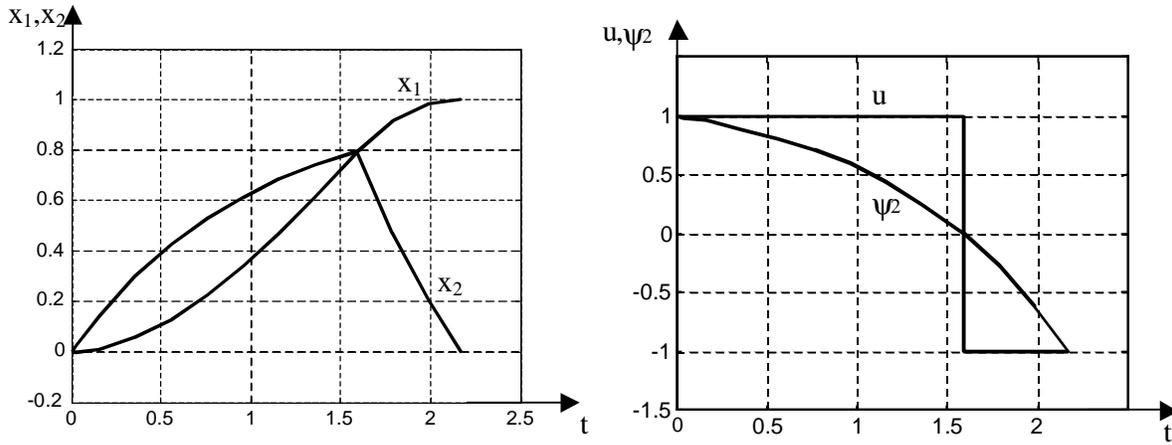


Рис. 7. Оптимальные траектории и оптимальное управление

#### Пример 7

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u, \end{cases} \quad (220)$$

перевести из любого начального состояния в состояние  $x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0$  за минимальное время при ограничении на управление

$$|u| \leq 1. \quad (221)$$

Постановка задачи отличается от предыдущего примера только тем, что начальное состояние объекта может быть любым. Поэтому определить оптимальное управление в форме оптимальной программы в данном случае невозможно. Будем искать решение в форме оптимальной стратегии.

Согласно теореме об  $n$  интервалах оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией и принимает максимальные по модулю значения на всех интервалах управления. Объект управления имеет второй порядок, корни характеристического полинома системы  $(-1, 0)$  – вещественные, поэтому число интервалов управления равно двум.

Определим фазовые траектории объекта при  $u = 1$ .

Решение системы (220) в данном случае имеет вид:

$$x_2 = C_1 e^{-t} + 1, \quad (222)$$

$$x_1 = \int_0^t x_2(\tau) d\tau = -C_1 e^{-t} + t + C_2, \quad (223)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями:

$$C_1 = x_2(0) - 1, \quad (224)$$

$$C_2 = x_1(0) + C_1 = x_1(0) + x_2(0) - 1. \quad (225)$$

Из (222) находим

$$t = -\ln\left(\frac{x_2 - 1}{C_1}\right). \quad (226)$$

Величина  $(x_2 - 1)/C_1$ , стоящая под знаком логарифма, положительна (точнее, она лежит в пределах от 0 до 1). Следовательно, (226) можно записать в виде

$$t = -\ln\left|\frac{x_2 - 1}{C_1}\right| = -\ln|x_2 - 1| + \ln|C_1|. \quad (227)$$

Подставляя (227) в (223), получим

$$x_1 = -x_2 + 1 - \ln|x_2 - 1| + \ln|C_1| + C_2. \quad (228)$$

Обозначив

$$k_1 = 1 + \ln|C_1| + C_2 = \ln|x_2(0) - 1| + x_1(0) + x_2(0), \quad (229)$$

окончательно получим:

$$x_1 = k_1 - x_2 - \ln|x_2 - 1|. \quad (230)$$

Проведя аналогичные вычисления для случая  $u = -1$ , получим

$$x_2 = C_3 e^{-t} - 1, \quad (231)$$

$$x_1 = \int_0^t x_2(\tau) d\tau = -C_3 e^{-t} + t + C_4, \quad (232)$$

где

$$C_3 = x_2(0) + 1, \quad (233)$$

$$C_4 = x_1(0) + C_3 = x_1(0) + x_2(0) + 1. \quad (234)$$

И далее

$$x_1 = -x_2 - 1 + \ln|x_2 + 1| - \ln|C_3| + C_4. \quad (235)$$

Обозначив

$$k_2 = -1 - \ln|C_3| + C_4 = -\ln|x_2(0) + 1| + x_1(0) + x_2(0), \quad (236)$$

окончательно получим:

$$x_1 = k_2 - x_2 + \ln|x_2 + 1|. \quad (237)$$

На рис. 8 показаны фазовые траектории объекта при  $u = 1$ , построенные для  $k_1 = -1, -0,5, 0$ , и при  $u = -1$ , построенные для  $k_2 = 0, 0,5, 1$ .

Из рисунка видно, что при  $u = 1$   $x_1 \rightarrow \infty$ ,  $x_2 \rightarrow 1$ , при  $u = -1$   $x_1 \rightarrow -\infty$ ,  $x_2 \rightarrow -1$ . Это следует непосредственно из (222),(223) и (231),(232).

При  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 0$  фазовые траектории проходят через начало координат, т.е. через конечную точку процесса. Обозначим через  $\gamma^+$  участок фазовой траектории при  $u = 1$ ,  $k_1 = 0$  до точки  $\{0,0\}$ , а через  $\gamma^-$  – участок фазовой траектории при  $u = -1$ ,  $k_2 = 0$  до точки  $\{0,0\}$  (рис.8).

Очевидно, что на втором (заключительном) этапе процесса движение объекта должно происходить либо по линии  $\gamma^+$ , либо по линии  $\gamma^-$ , так как в противном случае объект не попадет в начало координат.

Выйти на линию  $\gamma^+$  объект может только справа (с помощью отрицательного управления), а на линию  $\gamma^-$  – только слева (с помощью положительного управления). Таким образом, линия  $\gamma = (\gamma^-, \gamma^+)$ , «объединяющая»  $\gamma^-$  и  $\gamma^+$ , делит фазовую плоскость на две зоны: слева от нее находится зона, в которой управление должно быть положительным, справа – зона, в которой управление должно быть отрицательным. Поэтому линия  $\gamma$  называется линией переключения.

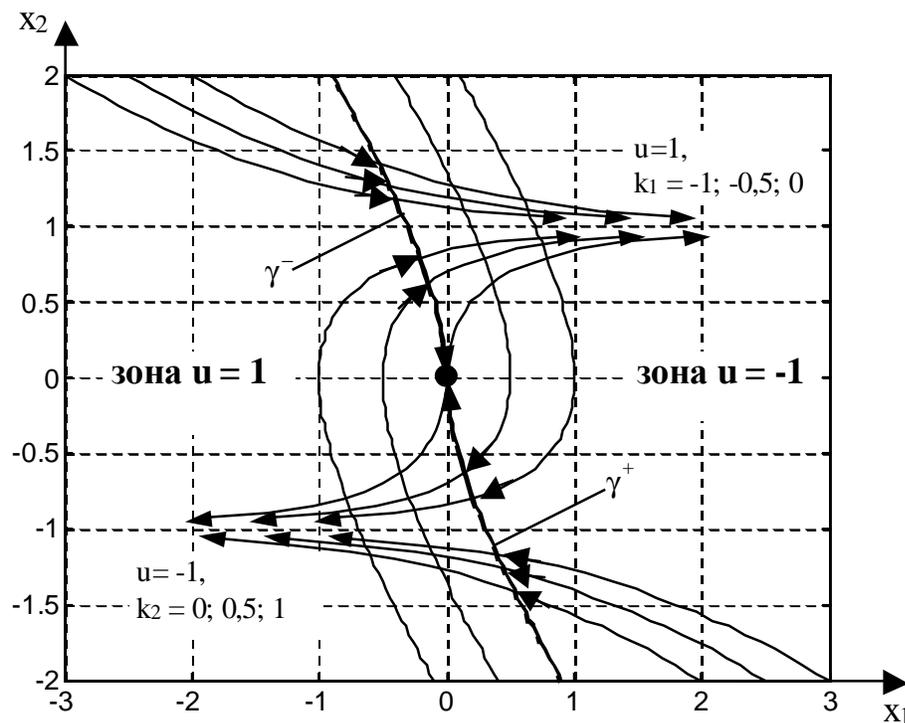


Рис. 8. Фазовые траектории объекта

Сформулируем полученные результаты. Для этого определим уравнение линии переключения. Это можно сделать, объединяя уравнения (230) и (237) при  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 0$ :

$$x_1 = \begin{cases} -x_2 - \ln|x_2 - 1| & \text{при } x_2 < 0, \\ -x_2 + \ln|x_2 + 1| & \text{при } x_2 > 0, \end{cases} \quad (238)$$

или

$$x_1 = -x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|. \quad (239)$$

Используя (239), запишем закон управления:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 + x_2 - \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)| < 0, \\ & x_1 + x_2 + \ln|x_2 - 1| = 0 \text{ и } x_2 < 0 \ (\gamma^+), \\ -1 & \text{при } x_1 + x_2 - \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)| > 0, \\ & x_1 + x_2 - \ln|x_2 + 1| = 0 \text{ и } x_2 > 0 \ (\gamma^-). \end{cases} \quad (240)$$

Для упрощения закона управления исключим из (240) условия, касающиеся движения по траекториям  $\gamma^-$ ,  $\gamma^+$ . Это оправдано также тем, что точно реализовать контроль нахождения объекта на этих траекториях технически невозможно, так как для этого потребуются абсолютно точные измерения. Окончательно получим:

$$\begin{aligned} u &= -\text{sign}(x_1 + x_2 - \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|) = \\ &= \text{sign}(-x_1 - x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|). \end{aligned} \quad (241)$$

Схема модели системы оптимального управления в Simulink, построенная по уравнениям (220), (241), показана на рис. 9. Фазовая траектория и графики переходного процесса при  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0,5$  приведены на рис. 10.

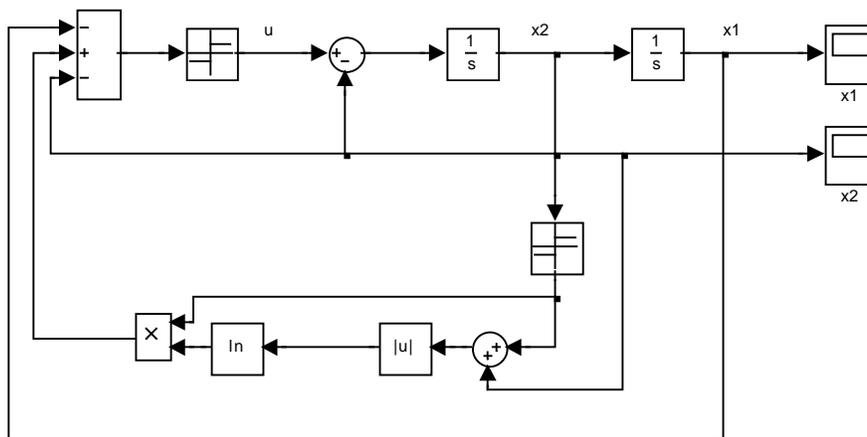


Рис. 9. Simulink-модель системы

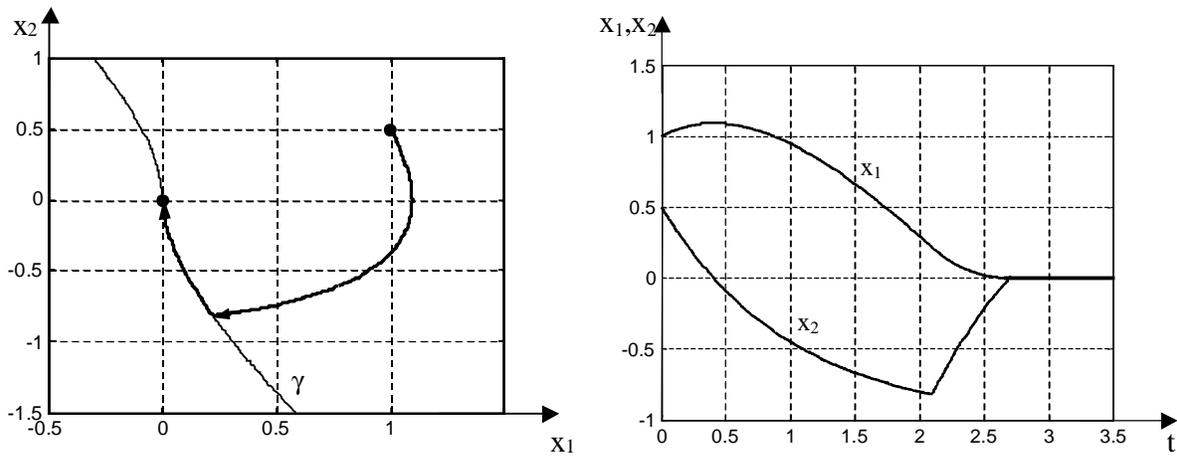


Рис. 10. Переходный процесс в системе

Далее рассмотрим, как полученные результаты могут быть использованы для построения оптимальной по быстродействию системы при задании конечной точки процесса вида  $x_1(t_k) = x_{1k} \neq 0$ ,  $x_2(t_k) = 0$ . В этом случае при нахождении линии переключения, очевидно, нужно принять  $k_1 = k_2 = x_{1k}$ . Тогда уравнение линии переключения и закон управления будут следующими:

$$x_1 = x_{1k} - x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|, \quad (242)$$

$$u = \text{sign}(x_{1k} - x_1 - x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|). \quad (243)$$

Схема модели системы оптимального управления в Simulink, построенная по уравнениям (220), (243), показана на рис. 11. Фазовая траектория и графики переходного процесса при  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_{1k} = 1$  приведены на рис. 12.

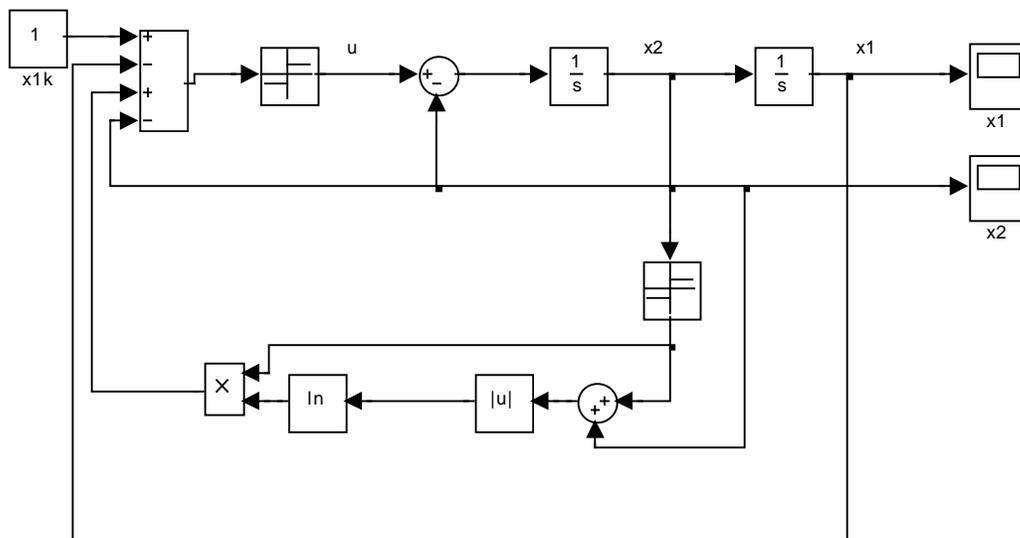


Рис. 11. Simulink-модель системы

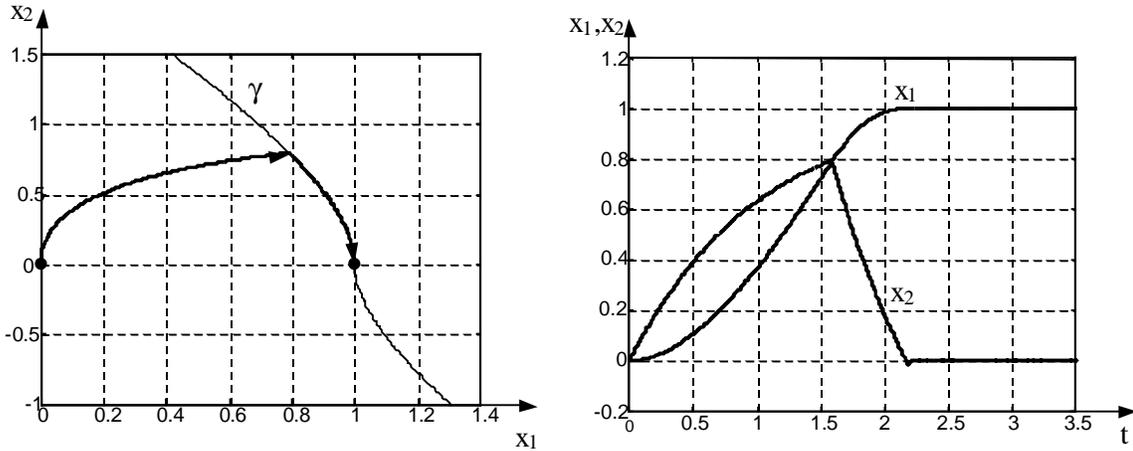


Рис. 12. Переходный процесс в системе

Как и следовало ожидать, решение задачи в данном случае полностью соответствует решению из примера 6.

### 3.3. Задания

Определить оптимальное управление в форме оптимальной программы, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из состояния  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(t_k) = x_{1k}, x_2(t_k) = 0$  за минимальное время  $t_k$  с учетом ограничения на управление  $|u| \leq u_{\max}$  (см. пример 6).

Определить оптимальное управление в форме оптимальной стратегии, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из любого начального состояния в состояние  $x_1(t_k) = x_{1k}, x_2(t_k) = 0$  за минимальное время  $t_k$  с учетом ограничения на управление  $|u| \leq u_{\max}$  (см. пример 7).

Варианты:

1.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{1k} = 2, u_{\max} = 1;$
2.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{1k} = 1, u_{\max} = 1;$
3.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{1k} = 5, u_{\max} = 4;$
4.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, x_{1k} = 3, u_{\max} = 2;$
5.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{1k} = 1, u_{\max} = 6;$

6.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 10$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ;
7.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 25$ ,  $u_{\max} = 1$ ;
8.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 0,2$ ,  $u_{\max} = 0,1$ ;
9.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 10$ ,  $u_{\max} = 3$ ;
10.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $u_{\max} = 4$ ;
11.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 12$ ,  $u_{\max} = 2$ ;
12.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 16$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ;
13.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,25 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 0,8$ ,  $u_{\max} = 1$ ;
14.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 20$ ,  $u_{\max} = 4$ ;
15.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 3$ ,  $u_{\max} = 3$ ;
16.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1,6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 4,8$ ,  $u_{\max} = 3,2$ ;
17.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 0,3$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ;
18.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,36 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $u_{\max} = 2,4$ ;
19.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,08 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 1,5$ ,  $u_{\max} = 1$ ;
20.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -42 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 5$ ,  $u_{\max} = 3$ ;

## 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### 4.1. Метод динамического программирования

Метод динамического программирования предложен Беллманом в основном для оптимизации дискретных многошаговых процессов, однако применяется и для непрерывных систем.

В отличие от вариационного исчисления и принципа максимума, изначально направленных на отыскание оптимального управления в виде оптимальной программы, метод динамического программирования ориентирован на поиск оптимальной стратегии.

В основу метода положен следующий принцип *оптимальности Беллмана*:

*Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что независимо от того, каким было первоначальное состояние системы и первоначальное решение (управление), последующие решения (последующее управление) должны быть оптимальны относительно состояния, которое возникло после принятия первого решения. Это означает, что оптимальная стратегия в любой момент времени определяется только тем состоянием, в котором находится система в этот момент.*

Рассмотрим применение метода для непрерывных систем. Для простоты будем полагать управление скалярным. Пусть движение объекта определяется уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u, t), \quad i = 1 \dots n, \quad (244)$$

или в векторной форме:

$$\dot{X} = f(X, u, t). \quad (245)$$

Необходимо определить оптимальную стратегию  $u = u(X)$ , минимизирующую функционал

$$J = \int_0^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt, \quad (246)$$

с учетом граничного условия  $X(t_k) = X_k$ .

Согласно методу за начальное состояние объекта можно принять любое состояние  $X$ . При этом минимальное значение функционала и оптимальное управление, переводящее объект из состояния  $X$  в состояние  $X_k$ , однозначно определяются состоянием  $X$ . Обозначим минимальное значение функционала как  $S(X)$ , где  $S$  – неизвестная функция:

$$S(X) = \min_{u \in U} \int_0^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt, \quad (247)$$

где  $U$  – область допустимых управлений.

Отметим, что  $S(X_k) = 0$ , что непосредственно следует из (247).

Интеграл, входящий в (247), можно представить в виде

$$\int_0^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt = \int_0^{\Delta t} f_0(X(t), u(t)) dt + \int_{\Delta t}^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt. \quad (248)$$

Допустим, на интервале  $t = 0 \dots \Delta t$  управление было оптимальным. В дальнейшем управление должно выбираться, исходя из принципа оптимальности:

$$\int_{\Delta t}^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt = S(X(\Delta t)), \quad (249)$$

т.е. должно быть оптимально относительно состояния  $X(\Delta t)$ .

Так как траектория  $X(t)$  непрерывна, то при  $\Delta t \rightarrow 0$  справедливо следующее:

$$X(\Delta t) \rightarrow X + \cancel{X} \Delta t = X + f(X, u) \Delta t, \quad (250)$$

$$\int_0^{\Delta t} f_0(X(t), u(t)) dt \rightarrow f_0(X, u) \Delta t, \quad (251)$$

где  $X, u$  – значения координат объекта и управления в начальный момент времени.

Подставим выражение (250) в (249). Результат совместно с (251) подставим в (248) и далее – в (246), (247):

$$J = f_0(X, u) \Delta t + S(X + f(X, u) \Delta t), \quad (252)$$

$$S(X) = \min_{u \in U} (f_0(X, u) \Delta t + S(X + f(X, u) \Delta t)). \quad (253)$$

Предположим, что  $S$  – непрерывно дифференцируемая по  $X$  функция, тогда при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$S(X + f(X, u) \Delta t) \rightarrow S(X) + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) \Delta t, \quad (254)$$

где

$$\frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) = \frac{\partial S}{\partial x_1} f_1(X, u) + \frac{\partial S}{\partial x_2} f_2(X, u) + \dots + \frac{\partial S}{\partial x_n} f_n(X, u). \quad (255)$$

Следовательно:

$$S(X) = \min_{u \in U} \left( f_0(X, u) \Delta t + S(X) + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) \Delta t \right). \quad (256)$$

Из (256) получим

$$0 = \min_{u \in U} \left( f_0(X, u) \Delta t + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) \Delta t \right). \quad (257)$$

Так как  $\Delta t \neq 0$ , окончательно запишем

$$0 = \min_{u \in U} \left( f_0(X, u) + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) \right). \quad (258)$$

Уравнение (258) называется *функциональным уравнением Беллмана*. Оно связывает  $S(X)$  с функциями  $u(t)$  и  $X(t)$ , обеспечивающими минимум функционала (246). Его решение позволяет определить не только функцию  $S(X)$ , но и оптимальные траектории, и оптимальное управление.

### Пример 8.

Требуется объект управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \end{cases} \quad (259)$$

перевести из любого начального состояния в состояние  $x_1(1) = x_2(1) = 0$  таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала

$$J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt. \quad (260)$$

Конечное время  $t_k$  не фиксируется.

Функциональное уравнение Беллмана в данном случае имеет вид:

$$0 = \min_{u \in U} \left( x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} (-x_1 - 2x_2 + u) \right). \quad (261)$$

Так как на управление не наложено никаких ограничений, то для определения минимума продифференцируем правую часть уравнения по  $u$  и приравняем результат нулю:

$$2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0, \quad (262)$$

откуда получим

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}. \quad (263)$$

Подставляя (263) в (261), получим

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} \left( -x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (264)$$

После преобразования:

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial S}{\partial x_2} x_1 - 2 \frac{\partial S}{\partial x_2} x_2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \quad (265)$$

Уравнение (265) – уравнение в частных производных, общего решения которого не существует. Будем искать частное решение в виде квадратичной формы

$$S(X) = C_1 x_1^2 + C_2 x_1 x_2 + C_3 x_2^2. \quad (266)$$

Напомним, что  $S(X)$  по сути есть минимальное значение функционала (260), по виду которого можно заключить, что  $S(X)$  должна быть неотрицательна при любых  $x_1, x_2$ .

Из (266) находим необходимые частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2C_1 x_1 + C_2 x_2, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = C_2 x_1 + 2C_3 x_2. \quad (267)$$

Подставляя (267) в (265), получим:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + 2C_1 x_1 x_2 + C_2 x_2^2 - C_2 x_1^2 - 2C_3 x_1 x_2 - \\ - 2C_2 x_1 x_2 - 4C_3 x_2^2 - \frac{1}{4} C_2^2 x_1^2 - C_2 C_3 x_1 x_2 - C_3^2 x_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (268)$$

Коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 - C_2 - \frac{1}{4} C_2^2 = 0, \\ 1 + C_2 - 4C_3 - C_3^2 = 0, \\ 2C_1 - 2C_3 - 2C_2 - C_2 C_3 = 0. \end{cases} \quad (269)$$

Решая с помощью Matlab первое уравнение системы, получаем

```
c2 = roots([-0.25 -1 1])
```

```
c2 =
```

```
-4.8284  
0.8284
```

Из второго уравнения для  $C_2 = -4,8284$ :

```
c31 = roots([-1 -4 1+c2(1)])
```

```
c31 =
```

```
-2.4142  
-1.5858
```

Для  $C_2 = 0,8284$ :

```
C32 = roots([-1 -4 1+C2(2)])
```

```
C32 =
```

```
-4.4142  
0.4142
```

Для того чтобы квадратичная форма (266) была неотрицательно определенной, очевидно, что  $C_3$  должна быть неотрицательной величиной. Следовательно, из полученных решений следует выбрать вариант  $C_2 = 0,8284$ ,  $C_3 = 0,4142$ . Тогда из третьего уравнения системы (269) получим:

$$C_1 = C_3 + C_2 + \frac{1}{2}C_2C_3 = 1,4142. \quad (270)$$

С помощью (263) и (266) определим оптимальную стратегию

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}C_2x_1 - C_3x_2 = -0,4142x_1 - 0,4142x_2. \quad (271)$$

Структура системы оптимального управления показана на рис. 13.

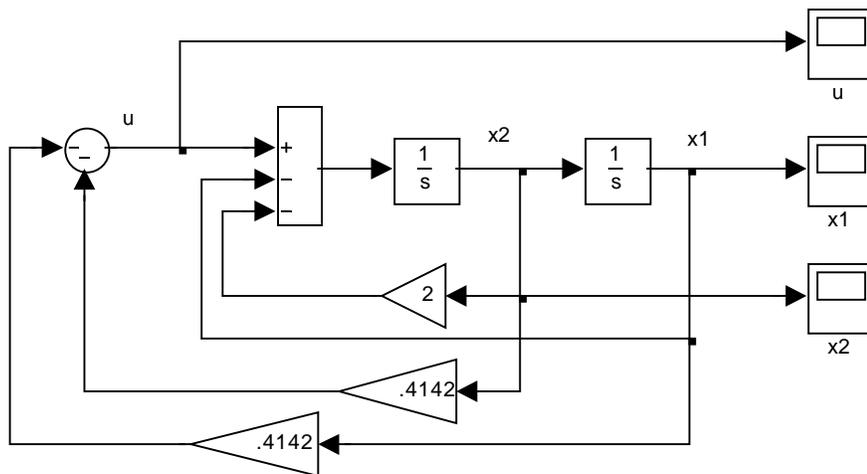


Рис. 13. Simulink-модель оптимальной системы

Графики оптимальных траектория и оптимального управления, рассчитанные для  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0,5$ , показаны на рис. 14.

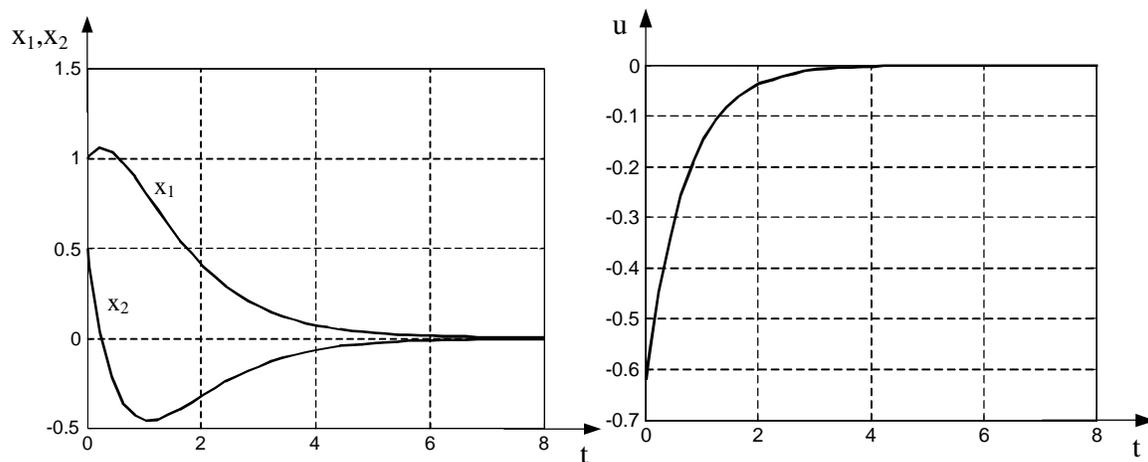


Рис. 14. Оптимальные траектории и оптимальное управление

#### 4.2. Задача об аналитическом конструировании регулятора

Задачей об аналитическом конструировании регулятора называется задача синтеза регулятора для линейного объекта, минимизирующего квадратичный критерий. К этому классу задач относится, в частности, рассмотренная в примере 8.

В общем случае постановка задачи следующая.

Имеется линейный объект управления

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (272)$$

где  $X$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $U$  –  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий;  $A$ ,  $B$  – постоянные матрицы.

Требуется определить управление, минимизирующее функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt, \quad (273)$$

где  $Q$  и  $R$  – постоянные матрицы, имеющие размеры  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно. Матрица  $Q$  является неотрицательно определенной, т.е. для любого  $X \neq 0$   $X^T Q X \geq 0$ , матрица  $R$  – положительно определенной, т.е. для любого  $U \neq 0$   $U^T R U > 0$ .

С помощью матриц  $Q$  и  $R$  задаются соответствующие квадратичные формы. Так как любую квадратичную форму можно задать симметрической матрицей, будем считать матрицы  $Q$  и  $R$  симметрическими, т.е.  $Q = Q^T$ ,  $R = R^T$ . В соответствии с критерием Сильвестра, для того чтобы симметрическая матрица была положительно определенной, необходимо, чтобы все ее ведущие главные миноры (определители «вдоль» главной диагонали) были положительны. Указанное обстоятельство позволяет формировать матрицы  $Q$ ,  $R$  для решения задач.

На управление  $U$  не наложено никаких ограничений. На правый конец траектории условия также не накладываются. Однако очевидно, что функционал (273) может быть конечным только в том случае, если при  $t \rightarrow \infty$   $X \rightarrow 0$ .

Составим уравнение Беллмана:

$$0 = \min_U \left( \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U + \frac{\partial S}{\partial X} (A X + B U) \right). \quad (274)$$

Найдем уравнение, минимизирующее правую часть уравнения (274). Для этого продифференцируем ее по  $U$  и приравняем полученную производную нулю. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial U} [U^T R U] = 2 U^T R, \quad (275)$$

$$\frac{\partial}{\partial U} \left[ \frac{\partial}{\partial X} B U \right] = \frac{\partial}{\partial X} B, \quad (276)$$

в результате получим:

$$U^T R + \frac{\partial S}{\partial X} B = 0. \quad (277)$$

Из уравнения (277) находим, что

$$U = - \left( \frac{\partial S}{\partial X} B R^{-1} \right)^T. \quad (278)$$

Используя известное матричное тождество  $(CM)^T = M^T C^T$ , перепишем (278) в виде

$$U = - (R^{-1})^T B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T. \quad (279)$$

Так как  $R$  – симметрическая матрица, то  $(R^{-1})^T = R^{-1}$ , и поэтому можно записать

$$U = - R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T. \quad (280)$$

Управление (280) доставляет экстремум правой части (274). Определим вид экстремума, взяв вторую производную этого выражения по  $U$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial U^2} \left[ \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U + \frac{\partial S}{\partial X} (A X + B U) \right] = \frac{\partial}{\partial U} [U^T R] = R. \quad (281)$$

Поскольку  $R$  – положительно определенная матрица, правая часть уравнения (274) может иметь только минимум.

Подставив оптимальное управление (280) в (274), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial X} B R^{-1} R R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T + \\ + \frac{\partial S}{\partial X} \left( A X - B R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \right) = 0, \end{aligned} \quad (282)$$

или

$$\frac{1}{2} X^T Q X - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial X} B R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T + \frac{\partial S}{\partial X} A X = 0. \quad (283)$$

Уравнение (283) представляет собой уравнение в частных производных относительно неизвестной функции  $S(X)$ . Будем искать его решение в виде положительно определенной квадратичной формы:

$$S(X) = \frac{1}{2} X^T P X, \quad (284)$$

где  $P = P^T > 0$  – симметрическая матрица.

Производная квадратичной формы:

$$\frac{\partial S}{\partial X} = X^T P. \quad (285)$$

Подставив (285) в (283), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} X^T Q X - \frac{1}{2} X^T P B R^{-1} B^T P^T X + X^T P A X = \\ = \frac{1}{2} X^T [Q - P B R^{-1} B^T P^T + 2 P A] X = 0. \end{aligned} \quad (286)$$

Рассмотрим выражение, стоящее в квадратных скобках (286). Матрица  $Q$  является симметрической. Покажем, что матрица  $P B R^{-1} B^T P^T$  также является симметрической. Действительно, в соответствии с матричным равенством  $(CM)^T = M^T C^T$  можно записать:

$$(P B R^{-1} B^T P^T)^T = (B^T P^T)^T (P B R^{-1})^T = P B (R^{-1})^T (P B)^T = P B R^{-1} B^T P^T. \quad (287)$$

Квадратичную форму  $X^T P A X$  также можно задать с помощью симметрической матрицы. Для этого представим ее в виде:

$$X^T P A X = X^T \left( \frac{1}{2} P A + \frac{1}{2} A^T P^T \right) X, \quad (288)$$

где  $\frac{1}{2} P A + \frac{1}{2} A^T P^T$  – симметрическая матрица.

Тогда (286) примет вид:

$$\frac{1}{2} X^T [Q - PBR^{-1}B^T P^T + PA + A^T P^T] X = 0. \quad (289)$$

Квадратичная форма, стоящая в левой части (289), может равняться нулю только в том случае, если ее матрица равняется нулю. Таким образом, получаем:

$$Q - PBR^{-1}B^T P^T + PA + A^T P^T = 0. \quad (290)$$

Уравнение (290) называется матричным уравнением Риккати. Оно позволяет определить искомую матрицу  $P$  и эквивалентно системе из  $n^2$  уравнений.

Матричное уравнение имеет не единственное решение. Из его решений необходимо выбрать такое, которое задает положительно определенную матрицу  $P$ . Эта матрица определяется однозначным образом и обеспечивает устойчивость системы управления.

Действительно, пусть  $P$  – положительно определенная матрица. В соответствии с (280) и (285) оптимальное управление задается равенством:

$$U = -R^{-1}B^T (X^T P)^T = -R^{-1}B^T P^T X. \quad (291)$$

По виду (291) можно заключить, что оптимальный регулятор является линейным. Определим устойчивость системы с помощью прямого метода Ляпунова. Для этого исследуем функцию (284).

В случае положительно определенной матрицы  $P$  эта функция является положительно определенной. Ее полная производная по времени, вычисленная в силу уравнений объекта с учетом (291), имеет вид:

$$\frac{d}{dt} S(X) = \frac{\partial S(X)}{\partial X} \frac{dX}{dt} = X^T P (AX + BU) = X^T PAX - X^T PBR^{-1}B^T P^T X. \quad (292)$$

Из уравнения (286) следует, что

$$X^T PAX = \frac{1}{2} X^T [PBR^{-1}B^T P^T - Q] X. \quad (293)$$

Подставив (293) в (292), получим

$$\frac{d}{dt} S(X) = -\frac{1}{2} X^T QX - \frac{1}{2} X^T PBR^{-1}B^T P^T X. \quad (294)$$

Из (291) получим:

$$U^T = -X^T PBR^{-1}. \quad (295)$$

Тогда, учитывая (291) и (295), (294) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} S(X) = -\frac{1}{2} X^T QX - \frac{1}{2} U^T R U. \quad (296)$$

Так как  $X^T Q X$  и  $U^T R U$  являются положительно определенными квадратичными формами,

$$\frac{d}{dt} S(X) < 0 \quad (297)$$

при всех  $X \neq 0$  и, следовательно, решение  $X = 0$  системы (272), (291) является асимптотически устойчивым.

Основную сложность при использовании метода аналитического конструирования регулятора составляет решение матричного уравнения Риккати. В настоящее время разработаны численные методы его решения. В частности, в пакете Control программы Matlab имеется функция `lqr`, решающая более общую по сравнению с рассмотренной выше задачу, в которой функционал задан в виде

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U + 2X^T N U) dt, \quad (298)$$

где  $N$  – некоторая постоянная матрица.

Функция `lqr` решает уравнение Риккати вида

$$Q - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) + PA + A^T P = 0, \quad (299)$$

а также вычисляет матрицу  $K$  и собственные числа матрицы состояний синтезированной системы  $A - BK$ .

Применяя простейший вариант функции `lqr` (без матрицы  $N$ ), решим задачу из примера:

$$\begin{aligned} A &= [0 \ 1; -1 \ -2]; \\ B &= [0; 1]; \\ Q &= [1 \ 0; 0 \ 1]; \\ R &= 1; \\ k &= \text{lqr}(A, B, Q, R) \\ k &= \end{aligned}$$

$$0.4142 \quad 0.4142$$

### 4.3. Задания

Определить оптимальное управление, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из любого начального состояния в начало координат  $x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0$  таким образом, чтобы достигался минимум функционала  $J$ .

Решение проверить в Matlab с помощью функции `lqr`.

Варианты:

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \int_0^{t_k} (x_2^2 + u^2) dt;$$

2.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + u^2) dt$ ;
3.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 3x_2^2 + u^2) dt$ ;
4.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 0,5u^2) dt$ ;
5.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -1,5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (2x_1^2 + x_2^2 + 5u^2) dt$ ;
6.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 2u^2) dt$ ;
7.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (2x_2^2 + u^2) dt$ ;
8.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 0,5u^2) dt$ ;
9.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -20 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 3u^2) dt$ ;
10.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (3x_1^2 + 2x_2^2 + 4u^2) dt$ ;
11.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + x_2^2 + 2u^2) dt$ ;
12.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 0,5u^2) dt$ ;
13.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (5x_1^2 + 2x_2^2 + 6u^2) dt$ ;
14.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (2x_1^2 + x_2^2 + 3u^2) dt$ ;
15.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (5x_1^2 + 10x_2^2 + 8u^2) dt$ ;

$$16. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \int_0^{t_K} (0,2x_1^2 + 0,3x_2^2 + u^2) dt;$$

$$17. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \int_0^{t_K} (2x_1^2 + x_2^2 + 0,3u^2) dt;$$

$$18. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \int_0^{t_K} (5x_1^2 + 4x_2^2 + 5u^2) dt;$$

$$19. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0,4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \int_0^{t_K} (x_2^2 + 0,8u^2) dt;$$

$$20. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -0,7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \int_0^{t_K} (5,5x_1^2 + 3x_2^2 + 2,5u^2) dt.$$

## 5. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 5.1. Схема системы автоматического управления и ее математическое описание

В данной главе рассматривается система непрерывного автоматического регулирования угла поворота исполнительного вала электропривода с двигателем постоянного тока и преобразователем напряжения (рис.15). Система обеспечивает отработку заданного угла поворота исполнительного вала. Элементы схемы описаны ниже.

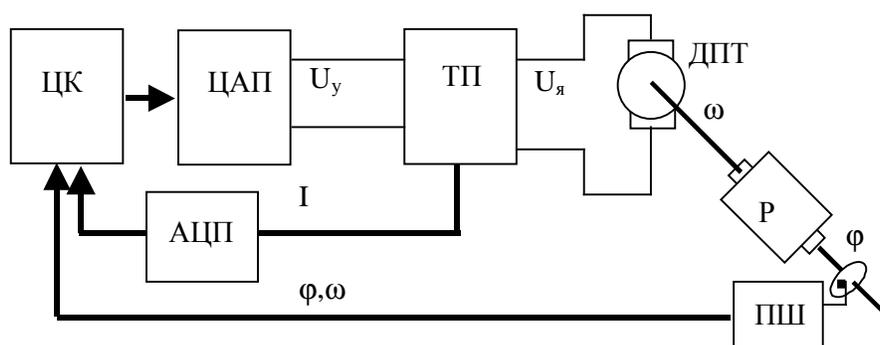


Рис. 15. Схема системы управления

ДПТ – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением серии 2П. Параметры двигателя для всех вариантов приведены в п. 5.4. Суммарный приведенный к валу момент инерции принимается равным 120% от момента инерции вала двигателя.

ТП – тиристорный преобразователь (управляемый выпрямитель). Построен на базе двух трехфазных выпрямительных тиристорных мостов. Обеспечивает работу двигателя в четырех квадрантах (двигательный и генераторный режимы работы машины с вращением в обоих направлениях). Максимальное выпрямленное напряжение 514 В. Допускает внешнее задание выходного напряжения аналоговым сигналом  $-10...+10$  В. Кроме того, выдает аналоговый выходной сигнал пропорциональный выходному току (току якоря).

Для сглаживания пульсаций выходных напряжения и тока используется индуктивно-емкостный фильтр. Описывается дифференциальным уравнением первого порядка (апериодическое звено). Постоянная времени определяется вариантом. Коэффициент передачи определяется исходя из линейности регулировочной характеристики.

Р – редуктор. Передаточное число рассчитывается исходя из того, что при номинальной скорости двигателя максимальный угол поворота ( $320^\circ$ ) выходного вала  $\Phi_{\max}$  должен быть отработан за заданное время, определяемое вариантом.

ПШ – поворотный шифратор – высокоточный датчик абсолютного значения угла поворота выходного вала. Выдает цифровой сигнал.

ЦК – цифровой контроллер. Принимает сигналы датчиков поворота и тока якоря и формирует через ЦАП сигнал управления тиристорным преобразователем. Обладает высокой производительностью и может с достаточной точностью реализовать любые законы регулирования. Допускает локальное задание угла поворота оператором и внешнее задание через промышленную сеть.

ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь. Преобразует цифровой сигнал контроллера в сигнал напряжения постоянного тока от  $-10$  до  $+10$ В.

АЦП – аналого-цифровой преобразователь. Преобразует сигнал напряжения постоянного тока от  $-10$  до  $+10$ В в цифровой сигнал, подаваемый на контроллер.

Рассмотрим математическое описание элементов системы.

*Тиристорный преобразователь* в диапазоне изменения выходного напряжения  $-514\dots+514$ В описывается уравнением:

$$T_{\text{п}} \frac{dU_{\text{я}}}{dt} + U_{\text{я}} = k_{\text{п}} U_{\text{у}}, \quad (300)$$

где  $U_{\text{я}}$ ,  $U_{\text{у}}$  – напряжение якоря ДПТ и напряжение управления преобразователем;  $T_{\text{п}}$ ,  $k_{\text{п}}$  – постоянная времени и коэффициент передачи преобразователя.

Превышение напряжением максимального значения по модулю технически невозможно, так как этот максимум достигается при нулевом угле открытия силовых вентилях (тиристоров). Таким образом:

$$|U_{\text{я}}| \leq 514\text{В}. \quad (301)$$

Данное обстоятельство должно учитываться при построении системы управления.

*Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением* описывается системой дифференциальных уравнений [5]:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I - \frac{C_e\Phi}{L}\omega + \frac{1}{L}U_{\text{я}}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{C_e\Phi}{J}I - \frac{1}{J}M_c, \end{cases} \quad (302)$$

где  $I$ ,  $\omega$  – ток и угловая скорость вращения якоря;  $L$ ,  $R$  – индуктивность и активное сопротивление якорной цепи;  $\Phi$  – магнитный поток машины;  $C_e$  – конструктивный коэффициент двигателя;  $J$ ,  $M_c$  – суммарные приведенные к валу двигателя моменты инерции и сил сопротивления.

Величины  $C_e$ , и  $\Phi$ , входящие в уравнения (302), неизвестны. Однако поскольку магнитный поток машины постоянен, произведение  $C_e\Phi$  можно заменить одним коэффициентом:

$$K_e = C_e\Phi. \quad (303)$$

Этот коэффициент находится из системы (301) при рассмотрении установившегося номинального режима работы двигателя:

$$\begin{cases} -\frac{R}{L}I_{\text{НОМ}} - \frac{K_e}{L}\omega_{\text{НОМ}} + \frac{1}{L}U_{\text{я,НОМ}} = 0, \\ \frac{K_e}{J}I_{\text{НОМ}} - \frac{1}{J}M_{\text{НОМ}} = 0, \end{cases} \quad (304)$$

где  $I_{\text{НОМ}}$  – номинальный ток двигателя, который определяется также при решении системы.

Важным с точки зрения будущего синтеза системы является то обстоятельство, что величины, описывающие состояние двигателя – ток и скорость в реальной системе должны быть искусственно ограничены по величине определенными предельными значениями.

Ток двигателя по условиям нормальной коммутации и неразрушения коллекторного узла во всех режимах не должен превышать по модулю трехкратного от номинального значения:

$$|I| \leq 3I_{\text{НОМ}}. \quad (305)$$

Скорость вращения вала в обоих направлениях не должна превышать 150% номинальной скорости по условию сохранения механической прочности:

$$|\omega| \leq 1,5\omega_{\text{НОМ}}. \quad (306)$$

*Редуктор* согласно принятым соглашениям преобразует скорость вращения вала двигателя в угол поворота исполнительного вала и поэтому описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{i}\omega, \quad (307)$$

где  $i$  – передаточное число редуктора.

Уравнения (300), (301), (302) и (306) совместно описывают объект управления. Управляющее устройство, реализуемое на цифровом контроллере, формирует управляющий сигнал  $U_y$  на основе задания по углу поворота, а также текущих значений этого угла, тока и скорости двигателя. При этом одной из функций системы является недопущение нарушения условий (305), (306).

Процесс отработки заданного угла поворота может быть оптимизирован по многим показателям, важнейшими из которых являются **время переходного процесса** и **потери энергии на процесс**. Первый показатель определяет быстродействие системы, второй – энергетическую эффективность привода. Если механизм, обслуживаемый системой, совершает циклическое движение (например, звено манипулятора), оба показателя в конечном итоге влияют на его максимальную производительность. Быстродействие задает возможную частоту включений привода по условию времени цикла отработки

заданного угла, а потери – возможную частоту включений по условиям нагрева двигателя. Поэтому при синтезе системы имеет смысл рассматривать комбинированный критерий, учитывающий как время процесса, так и потери энергии.

Для определения оптимального управления желательно иметь как можно более простое описание объекта. Анализируя уравнения (300), (302), (307) с учетом ограничений (301), (305), (306), можно сделать следующие выводы:

- 1) в общем случае объект не является линейным;
- 2) в линейном диапазоне функционирования, когда напряжение якоря, ток и скорость двигателя не достигают своих предельных значений, объект имеет четвертый порядок.

Принимая во внимание то обстоятельство, что оптимизация системы приносит ощутимые выгоды и имеет смысл только при отработке относительно больших начальных рассогласований, можно упростить описание объекта, пренебрегая его малыми инерционностями. Таковыми, очевидно, следует считать инерционность преобразователя напряжения (канал  $U_y \rightarrow U_a$ ) и электромагнитную инерционность двигателя ( $U_a \rightarrow I$ ). Поэтому будем полагать, что система управления способна «мгновенно» устанавливать требуемое значение тока якоря, а сам этот ток будем считать управляющим воздействием на объект. Помимо относительной малости соответствующих постоянных времени, такому допущению способствует наличие в составе системы управления внутреннего быстродействующего токового контура с воздействием на напряжение управления преобразователем  $U_y$ . Контур позволяет значительно увеличить скорость установки заданного тока двигателя, а его построение не вызывает особенных затруднений в техническом плане, учитывая, что сигнал по току уже заводится в контроллер, а максимальное выходное напряжение преобразователя более чем вдвое превосходит его номинальное значение и, следовательно, допустимая степень воздействия на ток достаточно велика.

Кроме того, будем считать приведенный к валу двигателя суммарный момент сил сопротивления равным нулю. Этому допущению способствует большое передаточное число редуктора.

С учетом сделанных допущений описание объекта примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = k_2 u, \end{cases} \quad (308)$$

$$|x_2| \leq x_{2\max}, \quad (309)$$

$$|u| \leq u_{\max}, \quad (310)$$

где  $x_1 = \varphi$ ;  $x_2 = \omega$ ;  $u = I$ ;  $k_1 = 1/i$ ;  $k_2 = K_e/J$ ;  $x_{2\max} = 1,5\omega_{\text{ном}}$ ;  $u_{\max} = 3I_{\text{ном}}$ .

## 5.2. Оптимизация системы по быстродействию

Рассмотрим задачу перевода системы (308) с учетом ограничений (309) и (310) из любого начального состояния в начало координат за минимальное

время. Необходимо найти такое управление, которое доставляло бы минимум функционалу

$$J = t_k = \int_0^{t_k} dt, \quad (311)$$

где  $t_k$  – время переходного процесса.

Поскольку постановка задачи содержит ограничения типа неравенств, для ее решения воспользуемся принципом максимума.

По уравнениям объекта составим гамильтониан:

$$H = -1 + \psi_1 k_1 x_2 + \psi_2 k_2 u. \quad (312)$$

Так как коэффициент  $k_2$  положителен, то при  $\psi_2 \neq 0$  максимум гамильтониану доставляет управление:

$$\begin{cases} u = u_{\max} & \text{при } \psi_2 > 0, \\ u = -u_{\max} & \text{при } \psi_2 < 0, \end{cases} \quad (313)$$

или то же самое в компактной форме

$$u = u_{\max} \operatorname{sign}(\psi_2). \quad (314)$$

Сопряженные уравнения:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (315)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -k_1 \psi_1. \quad (316)$$

Из (315), (316) получаем

$$\psi_1 = C_1, \quad (317)$$

$$\psi_2 = -k_1 C_1 t + C_2, \quad (318)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

При  $\psi_2 = 0$  управление не определено. Рассмотрим, какие значения оно может принимать в данном случае. Предположим, что функция  $\psi_2(t)$  равна нулю на некотором интервале времени. В течение этого интервала

$$H = -1 + \psi_1 k_1 x_2. \quad (319)$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (320)$$

$$\psi_1 = C_3 = \text{const}. \quad (321)$$

Поскольку функция  $\psi_1(t)$  непрерывна, то  $C_3 = C_1$ , т.е. функция  $\psi_1(t)$  постоянна в течение всего переходного процесса. Согласно принципу максимума при оптимальном управлении функция  $H(t)$  максимальна и равна нулю. Поэтому из (319) следует, что на интервале, когда  $\psi_2 = 0$ :

$$1) |x_2| = x_{2\max} = \text{const}, \quad (322)$$

$$2) |\psi_1| = \frac{1}{k_1 x_{2\max}}, \quad \text{sign}(\psi_1) = \text{sign}(x_2) \quad (323)$$

и в силу второго уравнения системы (308)

$$3) u = 0. \quad (324)$$

Кроме того, из постоянства  $\psi_1(t)$  следует, согласно (318), что функция  $\psi_2(t)$  может обращаться в нуль не более чем на одном интервале (рис.16).

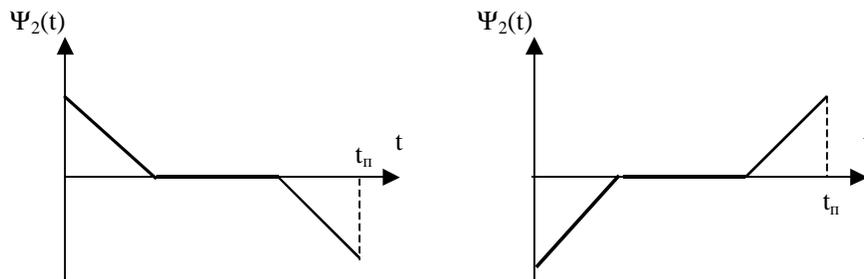


Рис. 16. Возможные графики зависимости  $\psi_2(t)$

Таким образом, установлено, что оптимальное управление может принимать три возможных значения:  $-u_{\max}$ ,  $0$ ,  $u_{\max}$ , и число интервалов его постоянного уровня не превышает трех. На последнем интервале управления должно принимать предельное значение, так как при  $u = 0$ ,  $|x_2| = x_{2\max}$  объект не сможет достигнуть начала координат.

Рассмотрим фазовые траектории объекта при всех возможных значениях управления.

При  $u = u_{\max}$  из (308) получим

$$x_2 = k_2 u_{\max} t + C_4, \quad (325)$$

$$x_1 = \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + k_1 C_4 t + C_5, \quad (326)$$

где  $C_4$ ,  $C_5$  – постоянные интегрирования, определяемые как начальные значения координат объекта на интервале.

Из (325) получим

$$t = \frac{x_2 - C_4}{k_2 u_{\max}}. \quad (327)$$

Подставим (327) в (326):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} \left( \frac{x_2 - C_4}{k_2 u_{\max}} \right)^2 + k_1 C_4 \frac{x_2 - C_4}{k_2 u_{\max}} + C_5 = \\
&= \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 - \frac{k_1 C_4^2}{2k_2 u_{\max}} + C_5 = \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 + C_6.
\end{aligned} \tag{328}$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке  $x_1 = C_6$ .

Аналогично можно показать, что при  $u = -u_{\max}$

$$x_1 = -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 + C_7. \tag{329}$$

При  $u = 0$  возможны два варианта движения системы:

$$1) \ x_2 = x_{2\max}, \quad x_1 = k_1 x_{2\max} t + C_8, \tag{330}$$

$$2) \ x_2 = -x_{2\max}, \quad x_1 = -k_1 x_{2\max} t + C_9. \tag{331}$$

На фазовой плоскости оба варианта представляются горизонтальными прямыми линиями, которые ограничивают область допустимых состояний объекта.

На рис. 17 показаны фазовые траектории объекта, рассчитанные при следующих значениях постоянных:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $x_{2\max} = 1$ ,  $u_{\max} = 1$ .

Постоянные интегрирования выбраны равными:

$$C_6 = -2, -1, 0 \text{ при } u = u_{\max},$$

$$C_7 = 0, 1, 2 \text{ при } u = -u_{\max}.$$

При  $C_6 = 0$  и  $C_7 = 0$  фазовые траектории проходят через начало координат, т.е. через конечную точку процесса. Обозначим через  $\gamma^+$  участок фазовой траектории при  $u = u_{\max}$ ,  $C_6 = 0$  до точки  $\{0,0\}$ , а через  $\gamma^-$  – участок фазовой траектории при  $u = -u_{\max}$ ,  $C_7 = 0$  до точки  $\{0,0\}$  (рис.17).

Очевидно, что на заключительном этапе процесса движение объекта должно происходить либо по линии  $\gamma^+$ , либо по линии  $\gamma^-$ , так как в противном случае объект не попадет в начало координат.

Выйти на линию  $\gamma^+$  объект может только справа (с помощью отрицательного или нулевого управления), а на линию  $\gamma^-$  – только слева (с помощью положительного или нулевого управления). Линия  $\gamma = (\gamma^-, \gamma^+)$ , «объединяющая»  $\gamma^-$  и  $\gamma^+$ , делит область допустимых состояний объекта на две зоны: слева находится зона, в которой управление должно быть положительным, справа – зона, в которой управление должно быть отрицательным. На линиях  $x_2 = x_{2\max}$  и  $x_2 = -x_{2\max}$  управление должно быть нулевым.

На рис. 17 также показана оптимальная траектория для начальных условий  $x_1(0) = -2$ ,  $x_2(0) = 0$  (кривая ABCO). Эта траектория включает участок положительного управления АВ (разгон), участок нулевого управления ВС (движение с постоянной скоростью) и участок отрицательного управления СО (торможение).

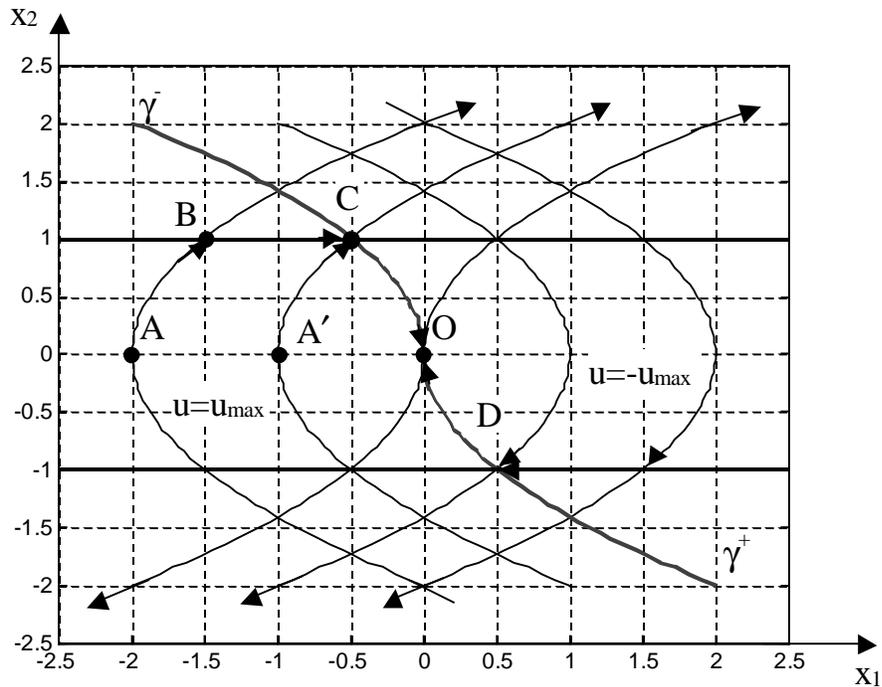


Рис. 17. Фазовые траектории объекта

Очевидно, что в общем случае число интервалов управления зависит от начального состояния объекта. Например, если смещать точку  $A$  вправо по оси  $x_1$ , длительность движения на участке нулевого управления будет уменьшаться. В предельном случае, когда процесс начинается с точки  $A'$ , эта длительность равна нулю (траектория  $A'CO$ ). При дальнейшем смещении начальной точки процесса к началу координат оптимальная траектория уже не будет содержать участка  $x_2 = x_{2\max}$ , а оптимальное управление – интервала  $u = 0$ . Наконец, в случае, когда начальная точка лежит на линии  $\gamma$ , оптимальная траектория состоит всего из одного участка.

Сформулируем полученные результаты, одновременно обобщив их для всех состояний объекта (включая и недопустимые состояния  $|x_2| > x_{2\max}$ ). Представление оптимального закона управления на фазовой плоскости показано на рис. 18. При его построении учитывалось, что управление должно «возвращать» объект в область допустимых состояний, если по каким-либо причинам последний его покинул.

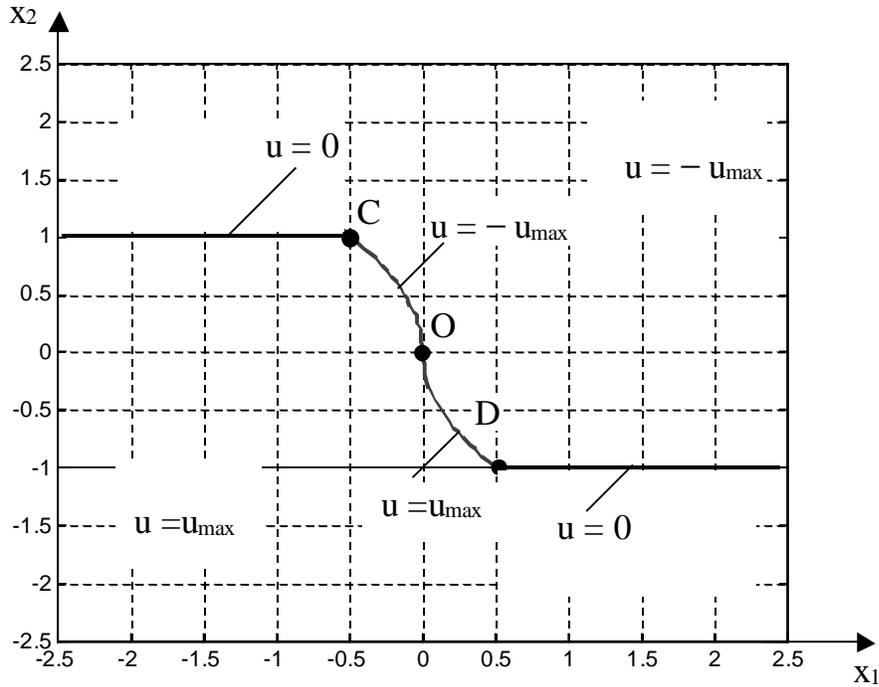


Рис. 18. Представление закона управления на фазовой плоскости

Составим алгоритм управления. Для этого определим уравнение линии  $\gamma$  и координаты точек C и D.

Уравнение линии  $\gamma$  найдем, объединяя уравнения (328) и (329) при  $C_6 = 0$  и  $C_7 = 0$ :

$$x_1 = \begin{cases} \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 & \text{при } x_2 < 0, \\ -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 & \text{при } x_2 > 0, \end{cases} \quad (332)$$

или

$$x_1 = -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2|. \quad (333)$$

Координаты точки C:  $x_1 = -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2$ ,  $x_2 = x_{2\max}$ .

Координаты точки D:  $x_1 = \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2$ ,  $x_2 = -x_{2\max}$ .

Алгоритм управления будет следующим.

$$\text{Если } x_1 < -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 :$$

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } x_2 < x_{2\max}, \\ 0 & \text{при } x_2 = x_{2\max}, \\ -u_{\max} & \text{при } x_2 > x_{2\max}. \end{cases} \quad (334)$$

$$\text{Если } -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 \leq x_1 \leq \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 :$$

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| < 0, \\ & x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| = 0 \text{ и } x_2 < 0 \ (\gamma^+), \\ -u_{\max} & \text{при } x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| > 0, \\ & x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| = 0 \text{ и } x_2 > 0 \ (\gamma^-). \end{cases} \quad (335)$$

$$\text{Если } x_1 > \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 :$$

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } x_2 < -x_{2\max}, \\ 0 & \text{при } x_2 = x_{2\max}, \\ -u_{\max} & \text{при } x_2 > -x_{2\max}. \end{cases} \quad (336)$$

Для упрощения закона управления исключим из алгоритма условия, касающиеся движения по траекториям  $\gamma^-$ ,  $\gamma^+$  и  $|x_2| = x_{2\max}$ , и сделаем кривую, изображенную на рис. 18 линией переключения управления с  $u = u_{\max}$  на  $u = -u_{\max}$ . Это оправдано по нескольким причинам. Во-первых, упрощается алгоритм управления. Во-вторых, технически невозможно точно реализовать контроль нахождения объекта на исключенных траекториях. В-третьих, «свободное» движение объекта при  $u = 0$  на практике не будет проходить по линии  $|x_2| = x_{2\max}$  вследствие действия на объект неучтенных возмущений. Применительно к рассматриваемой задаче оптимального управления электроприводом это означает следующее: при нулевом токе якоря момент, развиваемый двигателем, также равен нулю и не компенсирует приведенного момента нагрузки. В результате привод получает некоторое ускорение. В зависимости от знака приведенного момента изображающая точка вновь попадает либо в зону  $u = u_{\max}$ , либо в зону  $u = -u_{\max}$ . Таким образом, реализовать вариант управления  $u = 0$  не имеет смысла.

Схема модели системы оптимального управления в Simulink показана на рис. 19.

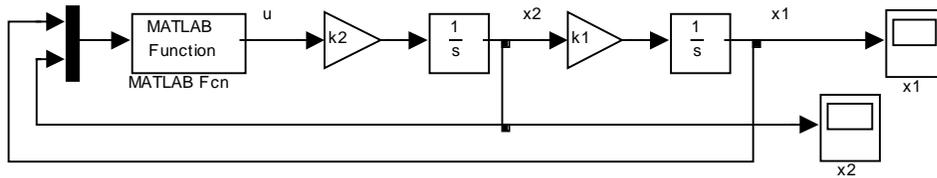


Рис.19. Модель оптимальной системы в Simulink

Модель содержит блок Matlab Fcn, вызывающий внешнюю функцию Matlab, которая в нашем случае реализует упрощенный алгоритм оптимального управления.

Эта функция помещена в отдельный файл, имя которого заносится в блок Matlab Fcn, и содержит следующий код:

```
function u = fun(x)
global k1 k2 umax x2max
x1 = x(1);
x2 = x(2);
if x1 < -k1/(2*k2*umax)*x2max*x2max
    if x2 < x2max, u = umax;
    else u = -umax;
    end
elseif x1 <= k1/(2*k2*umax)*x2max*x2max
    if x1+ k1/(2*k2*umax)*x2*abs(x2) <= 0, u = umax;
    else u=-umax;
    end
else
    if x2 < -x2max, u = umax;
    else u = -umax;
    end
end
end
```

Для простоты понимания код функции не оптимизирован. Глобальные переменные k1, k2, umax, x2max, содержащие значения соответствующих постоянных, могут быть определены как в командной строке Matlab, так и в отдельном script-файле.

Графики переходного процесса и фазовая траектория при  $x_1(0) = -2$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $x_{2max} = 1$ ,  $u_{max} = 1$  приведены на рис. 20.

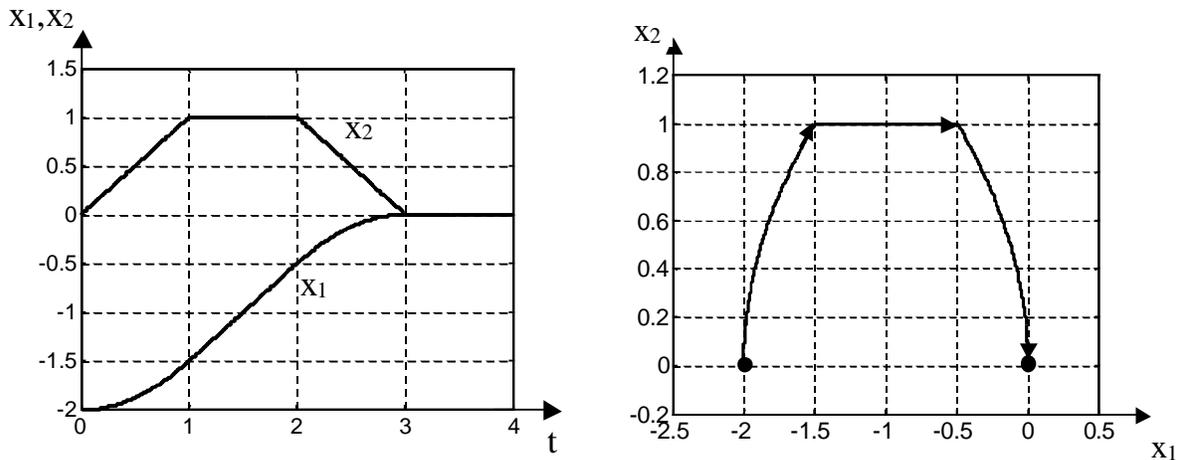


Рис. 20. Переходный процесс в системе

Подобно тому, как это сделано в примере 6, используем полученные результаты для построения оптимальной по быстродействию системы при задании конечной точки процесса вида  $x_1(t_k) = x_{1k} \neq 0$ ,  $x_2(t_k) = 0$ . Simulink-модель системы при этом подвергнется незначительной доработке (рис. 21).

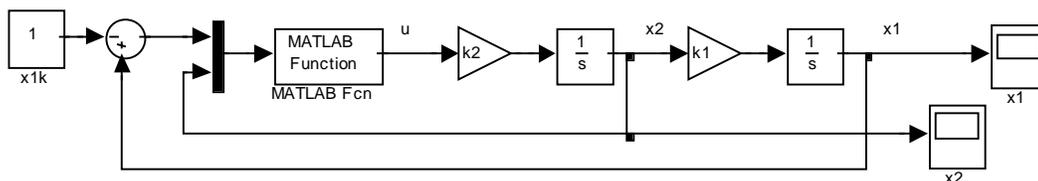


Рис.21. Модель оптимальной системы в Simulink

Анализируя построенную систему, приходим к выводу, что при всей относительной сложности алгоритма управления, по существу она относится к классу двухпозиционных релейных систем. Однако внутренняя реализация токового контура предполагает использование непрерывно изменяющегося выходного напряжения преобразователя. При работе привода на скоростях, меньших максимально допустимой, регулятор тока должен поддерживать максимальный по модулю ток якоря независимо от скорости. На участках ограничения скорости регулятор должен поддерживать неизменную максимальную скорость, и поэтому его уже следует считать регулятором скорости. Наша реализация такого регулятора с технической точки зрения не является наилучшей: поддержание скорости обеспечивается быстрыми переключениями максимально допустимых уровней тока. Очевидно, что для этого требуется быстрые переключения максимально допустимых уровней напряжения якоря. В таком случае большие нагрузки испытывают коллекторный узел двигателя и силовые ключи преобразователя напряжения. Кроме того, в двигателе и преобразователе выделяются необоснованно большие потери энергии.

Поэтому на участках движения с максимальной скоростью более рациональным представляется непрерывное ее регулирование с воздействием на напряжение якоря. Регулятор скорости может быть построен как обычный стабилизирующий регулятор, работающий по отклонению. В случае необходимости сигнал по току двигателя также можно использовать как дополнительный сигнал по возмущению с целью быстрой его компенсации.

### 5.3. Оптимизация системы по комбинированному критерию

Как уже было сказано, часто производительность обслуживаемого приводом механизма определяется не только быстродействием привода, но и потерями энергии, уходящими на нагрев двигателя и преобразователя в цикле работы. Поэтому в качестве критерия оптимизации системы может выступать минимум электрических потерь. Потери пропорциональны квадрату тока, поэтому минимизируемый функционал в наших обозначениях мог бы иметь вид:

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt. \quad (337)$$

Однако задача поиска управления для объекта (308), минимизирующего функционал (337), не имеет решения. Это можно строго доказать, но ограничимся здесь простыми соображениями.

Поскольку мы пренебрегли приведенным моментом сил сопротивления, движение с постоянной скоростью осуществляется при нулевом токе и не сопровождается выделением потерь. Поэтому потери на процесс тем меньше, чем меньше потери на участках разгона и торможения двигателя. Длительность этих участков можно свести к нулю, а максимальную скорость – к бесконечно малой величине. В итоге получаем, что наилучшим следует считать процесс с нулевыми потерями, занимающий бесконечное время.

Поэтому далее мы будем рассматривать комбинированный критерий, сочетающий как требования к быстродействию, так и требования к потерям:

$$J = \int_0^{t_k} (k_3 + u^2) dt. \quad (338)$$

Коэффициент  $k_3$ , входящий в функционал (338), есть весовой множитель, выражающий степень важности обеспечения быстродействия в общей структуре требований к процессу.

Составим гамильтониан:

$$H = -k_3 - u^2 + \psi_1 k_1 x_2 + \psi_2 k_2 u. \quad (339)$$

Применяя принцип максимума, проведем небольшое исследование с целью выяснить, какие значения может принимать оптимальное управление.

1. Если существуют участки оптимальной траектории объекта, на которых не вступают в действия ограничения и  $|x_2| < x_{2\max}$ ,  $|u| < u_{\max}$ , то для них

управление, доставляющее максимум гамильтониану, может быть найдено из условия:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 k_2 = 0, \quad (340)$$

откуда

$$u = \frac{k_2}{2} \psi_2. \quad (341)$$

Сопряженные уравнения:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (342)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -k_1 \psi_1. \quad (343)$$

Из (342), (343) получаем

$$\psi_1 = C_1, \quad (344)$$

$$\psi_2 = -k_1 C_1 t + C_2, \quad (345)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Из (345) видно, что функция  $\psi_2(t)$  может обращаться в нуль. В момент, когда  $\psi_2 = 0$ , управление согласно (341) равно нулю. Обозначим значение координаты  $x_2$  в этот момент как  $v$ . Тогда функция Гамильтона примет вид

$$H = -k_3 + \psi_1 k_1 v. \quad (346)$$

Поскольку при оптимальном управлении  $H(t) = 0$ , из (346) получим

$$\psi_1 = C_1 = \frac{k_3}{k_1 v} = \text{const}. \quad (347)$$

2. Если существуют интервалы, на которых  $\frac{k_2}{2} \psi_2 > u_{\max}$  или  $\frac{k_2}{2} \psi_2 < -u_{\max}$ , то, очевидно, что максимум гамильтониану доставляют соответственно управления  $u = u_{\max}$  и  $u = -u_{\max}$ .

3. Если оптимальная траектория содержит интервалы, на которых вступает в силу ограничение по скорости объекта и  $x_2 = \pm x_{2\max}$ , тогда на данных интервалах в силу уравнений объекта (308)  $u(t) = 0$ . Функция Гамильтона принимает вид

$$H = -k_3 \pm \psi_1 k_1 x_{2\max} = 0. \quad (348)$$

Из (348) получим

$$\psi_1 = C_1 = \pm \frac{k_3}{k_1 x_{2\max}} = \text{const}, \quad \text{sign}(\psi_1) = \text{sign}(x_2), \quad (349)$$

$$\psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \quad (350)$$

откуда  $\psi_2 = \text{const}$ .

Функция  $\psi_2(t)$  непрерывна. Поэтому, сопрягая отрезки оптимальной траектории, приходим к выводу, что на рассматриваемом интервале  $\psi_2 = 0$ . Кроме того, из постоянства  $\psi_1(t)$  следует согласно (345), что функция  $\psi_2(t)$  может обращаться в нуль не более чем на одном интервале.

Выше установлено, что зависимость  $\psi_2(t)$  в общем случае имеет тот же вид, что и в предыдущей задаче. Однако оптимальное управление формируется по-другому и имеет участки, на которых оно изменяется непрерывно. Это затрудняет нахождение управления в форме оптимальной стратегии.

Рассмотрим задачу поиска оптимальной программы перемещения объекта из состояния  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(t_k) = x_{1k}$ ,  $x_2(t_k) = 0$ . Пусть для определенности  $x_{10} < x_{1k}$ . Тогда очевидно, что на начальном участке траектории участке управление должно быть положительным.

Принимая во внимание результаты проведенного ранее исследования, заключаем, что возможны четыре варианта оптимального управления в зависимости от того, вступают ли в силу ограничения на само управление и на значение координаты  $x_2$ .

**Вариант 1.** Никакие ограничения не вступают в силу (рис. 22).

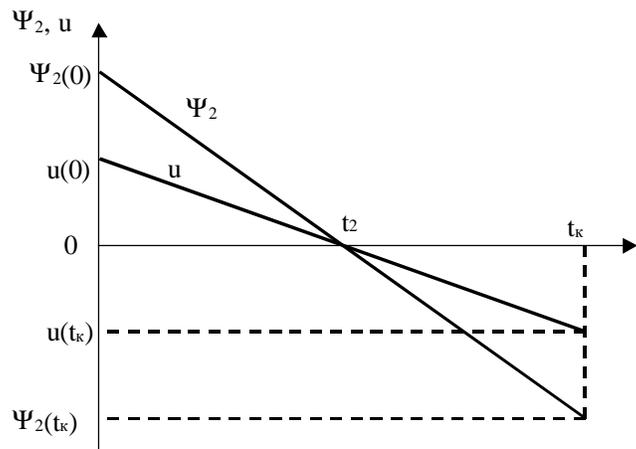


Рис. 22. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

Значение гамильтониана в начальный момент времени:

$$H(0) = -k_3 - u(0)^2 + \psi_2(0)k_2 u(0). \quad (351)$$

Если управление оптимально, функция Гамильтона равна нулю во время всего переходного процесса. Тогда из (351) получим:

$$\Psi_2(0) = \frac{k_3 + u(0)^2}{k_2 u(0)}. \quad (352)$$

Из (341) имеем

$$u(0) = \frac{k_2 \Psi_2(0)}{2}. \quad (353)$$

Отметим, что мы рассматриваем случай, когда  $u(0) < u_{\max}$ . Из (352) с учетом (341), (345) получим

$$C_2 = \frac{k_3 + k_2^2 C_2^2 / 4}{k_2^2 C_2 / 2}, \quad (354)$$

откуда

$$k_2^2 C_2^2 / 4 = k_3, \quad (355)$$

и далее

$$C_2 = \frac{2}{k_2} \sqrt{k_3}. \quad (356)$$

Начальное значение управления

$$u(0) = \frac{k_2 C_2}{2} = \sqrt{k_3}, \quad (357)$$

причем для данного варианта  $\sqrt{k_3} \leq u_{\max}$ .

Аналогично можно показать, что

$$\Psi_2(t_k) = -\frac{2}{k_2} \sqrt{k_3}, \quad (358)$$

$$u(t_k) = -\sqrt{k_3}. \quad (359)$$

Пусть в момент времени  $t = t_2$  координата  $x_2 = v \leq x_{2\max}$  (рис. 22). Тогда, учитывая (347):

$$\Psi_2(t) = -k_1 C_1 t + C_2 = -\frac{k_3}{v} t + \frac{2}{k_2} \sqrt{k_3}, \quad (360)$$

а управление формируется по закону

$$u(t) = \frac{k_2}{2} \Psi_2 = -\frac{k_2 k_3}{2v} t + \sqrt{k_3}. \quad (361)$$

Выразим величину  $t_k$  через  $v$  с помощью (359), (361):

$$t_k = \frac{4v}{k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (362)$$

Из (308), (361) с учетом того, что  $x_2(0) = 0$ , находим

$$x_2(t) = \int_0^t k_2 u(\tau) d\tau = -\frac{k_2^2 k_3}{4v} t^2 + k_2 \sqrt{k_3} t. \quad (363)$$

Подставив (362) в (363), убеждаемся, что  $x_2(t_k) = 0$ .

Из (308), (363) определим зависимость

$$x_1(t) = \int_0^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} t^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (364)$$

Подставив (362) в (364), найдем  $v$  и  $t_k$ .

$$x_{1k} = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} \frac{64v^3}{k_2^3 k_3 \sqrt{k_3}} + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2} \frac{16v^2}{k_2^2 k_3} + x_{10}, \quad (365)$$

или

$$x_{1k} = -\frac{16k_1 v^2}{3k_2 \sqrt{k_3}} + \frac{16k_1 v^2}{2k_2 \sqrt{k_3}} + x_{10} = \frac{16k_1 v^2}{6k_2 \sqrt{k_3}} + x_{10}, \quad (366)$$

откуда

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1} (x_{1k} - x_{10})}, \quad (367)$$

$$t_k = \frac{4v}{k_2 \sqrt{k_3}} = \sqrt{\frac{6}{k_1 k_2 \sqrt{k_3}} (x_{1k} - x_{10})}. \quad (368)$$

При этом  $v \leq x_{2\max}$ .

Таким образом, условиями формирования оптимального управления по рассматриваемому варианту будут:

$$\sqrt{k_3} \leq u_{\max}, \quad (369)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1} (x_{1k} - x_{10})} \leq x_{2\max}. \quad (370)$$

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 23. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1k} = 1$ .

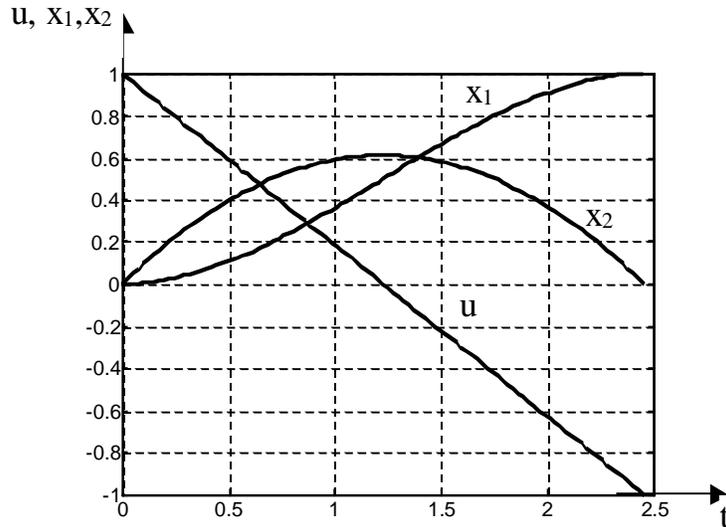


Рис. 23. Оптимальное управление и оптимальная траектория

**Вариант 2.** Величина  $x_2$  не достигает ограничения, управление ограничивается.

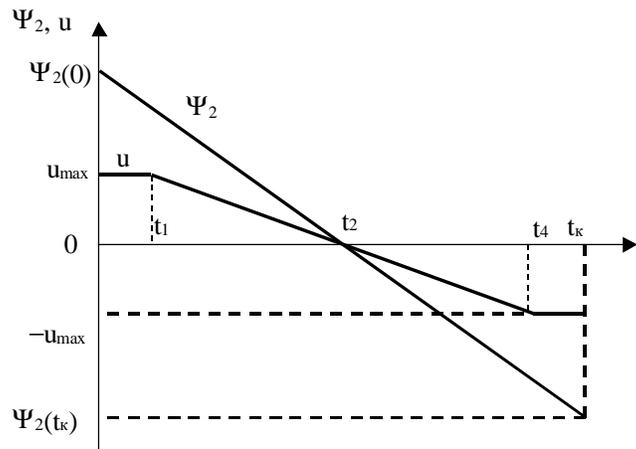


Рис. 24. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

На начальном участке траектории управление ограничено значением  $u_{\max}$ . Поэтому

$$H(0) = -k_3 - u(0)^2 + \psi_2(0)k_2u(0) = -k_3 - u_{\max}^2 + \psi_2(0)k_2u_{\max} = 0, \quad (371)$$

откуда

$$\psi_2(0) = C_2 = \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2u_{\max}}. \quad (372)$$

Аналогично можно показать, что

$$\Psi_2(t_k) = -\frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}}, \quad (373)$$

Пусть в момент времени  $t = t_2$  координата  $x_2 = v \leq x_{2\max}$ . Тогда, учитывая (347):

$$\Psi_2 = -k_1 C_1 t + C_2 = -\frac{k_3}{v} t + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}}. \quad (374)$$

Нетрудно убедиться, что в случае  $\sqrt{k_3} = u_{\max}$  применение формул (360) и (374) дает один и тот же результат.

Определим функцию  $u(t)$ :

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } |\Psi_2| > \frac{2}{k_2} u_{\max}, \\ u(t) = \frac{k_2}{2} \Psi_2(t) = -\frac{k_2 k_3}{2v} t + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{2u_{\max}} & \text{при } |\Psi_2| < \frac{2}{k_2} u_{\max}. \end{cases} \quad (375)$$

Выразим моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_4$  и  $t_k$  через  $v$ . Это можно сделать исходя из следующих условий:

$$\Psi_2(t_1) = -\frac{k_3}{v} t_1 + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = \frac{2u_{\max}}{k_2}, \quad (376)$$

$$\Psi_2(t_2) = -\frac{k_3}{v} t_2 + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = 0, \quad (377)$$

$$\Psi_2(t_4) = -\frac{k_3}{v} t_4 + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = -\frac{2u_{\max}}{k_2}, \quad (378)$$

$$\Psi_2(t_k) = -\frac{k_3}{v} t_k + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = -\frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}}. \quad (379)$$

Из (376) – (379) получим:

$$t_1 = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (380)$$

$$t_2 = \frac{(k_3 + u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (381)$$

$$t_4 = \frac{(k_3 + 3u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (382)$$

$$t_k = \frac{2(k_3 + u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}. \quad (383)$$

Зависимости  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  на интервале  $t = 0 \dots t_1$  имеют вид:

$$x_2(t) = \int_0^t k_2 u(\tau) d\tau = k_2 u_{\max} t, \quad (384)$$

$$x_1(t) = \int_0^t k_1 x_2(\tau) d\tau = \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (385)$$

Подстановкой (380) в (384), (385) получим:

$$x_2(t_1) = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)v}{k_3}, \quad (386)$$

$$x_1(t_1) = \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^2 v^2}{2k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (387)$$

На интервале  $t = t_1 \dots t_4$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_{t_1}^t k_2 u(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{k_2^2 k_3}{4v} (t^2 - t_1^2) + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}} (t - t_1) + x_2(t_1). \end{aligned} \quad (388)$$

Подставив (380), (386) в (388), после преобразований имеем:

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4v} t^2 + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}} t - \frac{(k_3 - u_{\max}^2)^2 v}{4k_3 u_{\max}^2}. \quad (389)$$

Подставив (381), (382) в (389), после преобразований получим:

$$x_2(t_2) = v, \quad (390)$$

$$x_2(t_4) = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)v}{k_3}. \quad (391)$$

При  $\sqrt{k_3} = u_{\max}$  формула (389) аналогична формуле (363). Это подтверждает правильность наших построений.

$$x_1(t) = \int_{t_1}^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} (t^3 - t_1^3) + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} (t^2 - t_1^2) - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 v}{4k_3 u_{\max}^2} (t - t_1) + x_1(t_1). \quad (392)$$

Подставив (381), (387) в (392), после преобразований, имеем:

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} t^3 + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} t^2 - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 v}{4k_3 u_{\max}^2} t + \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^3 v^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{10}. \quad (393)$$

Подставив (381), (382) в (393), после преобразований найдем

$$x_1(t_2) = \frac{k_1 (3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}, \quad (394)$$

$$x_1(t_4) = \frac{k_1 (3k_3^2 + 18k_3 u_{\max}^2 - 5u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (395)$$

Зависимости  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  на интервале  $t = t_4 \dots t_k$  имеют вид:

$$x_2(t) = \int_{t_4}^t k_2 u(\tau) d\tau = -k_2 u_{\max} (t - t_4) + x_2(t_4) = -k_2 u_{\max} t + \frac{2(k_3 + u_{\max}^2) v}{k_3}. \quad (396)$$

$$x_1(t) = \int_{t_4}^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} (t^2 - t_4^2) + \frac{2k_1 (k_3 + u_{\max}^2) v}{k_3} (t - t_4) = -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + \frac{2k_1 (k_3 + u_{\max}^2) v}{k_3} t + \frac{k_1 (-6k_3^2 - 12k_3 u_{\max}^2 - 14u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (397)$$

Подставив (383) в (396), (397), получим:

$$x_2(t_k) = 0, \quad (398)$$

$$x_{1k} = \frac{k_1 (6k_3^2 + 12k_3 u_{\max}^2 - 2u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10} = 2(x_1(t_2) - x_{10}) + x_{10}, \quad (399)$$

что и следовало ожидать.

Из (399) определим  $v$  и далее, с помощью (383),  $t_k$ :

$$v = k_3 \sqrt{\frac{6k_2 u_{\max} (x_1(t_2) - x_{10})}{k_1 (6k_3^2 + 12k_3 u_{\max}^2 - 2u_{\max}^4)}}, \quad (400)$$

$$t_k = \frac{2(k_3 + u_{\max}^2)}{\sqrt{k_2 u_{\max}}} \sqrt{\frac{6(x_1(t_2) - x_{10})}{k_1 (6k_3^2 + 12k_3 u_{\max}^2 - 2u_{\max}^4)}}. \quad (401)$$

При  $\sqrt{k_3} = u_{\max}$  формулы (399), (400) и (401) становятся тождественными формулам (366), (367) и (368), что также подтверждает правильность наших построений.

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 25. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $u_{\max} = 0,5$ .

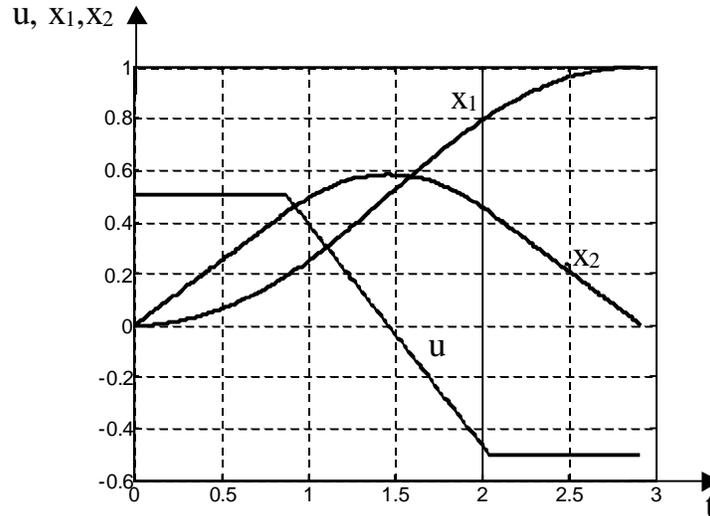


Рис. 25. Оптимальное управление и оптимальная траектория

**Вариант 3.** Ограничивается координата  $x_2$ , управление не достигает предельных значений (рис. 26). Как следует из проведенных ранее исследований, в данном случае:

$$\sqrt{k_3} \leq u_{\max}, \quad (402)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1}} (x_{1k} - x_{10}) > x_{2\max}. \quad (403)$$

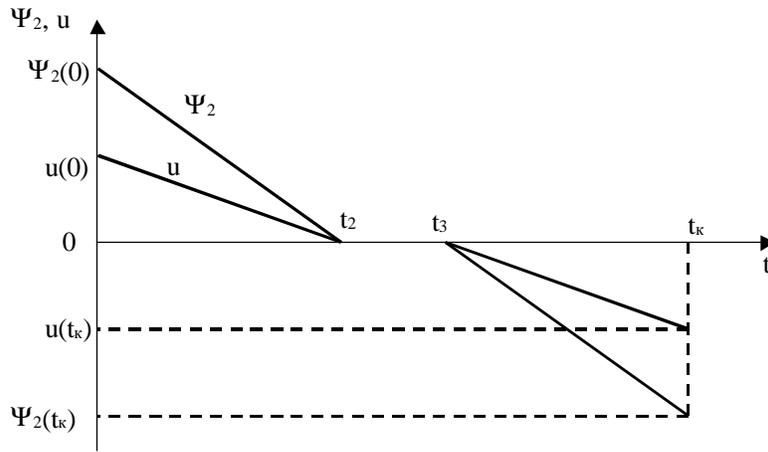


Рис. 26. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

Все необходимые выражения можно легко получить, используя результаты для первого случая (когда никакие ограничения не вступают в силу).

Функции  $u(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_1(t)$  на интервале  $t = 0 \dots t_2$  определим из (361), (363), (364), положив  $v = x_{2\max}$ :

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}} t + \sqrt{k_3}, \quad (404)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}} t^2 + k_2 \sqrt{k_3} t, \quad (405)$$

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}} t^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (406)$$

Момент времени  $t_2$  определим из условия  $u(t_2) = 0$ :

$$t_2 = \frac{2x_{2\max}}{k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (407)$$

Подставив (407) в (406), получим

$$x_1(t_2) = \frac{4k_1 x_{2\max}^2}{3k_2 \sqrt{k_3}} + x_{10}. \quad (408)$$

На интервале  $t = t_2 \dots t_3$  движение системы определяется следующими выражениями:

$$\begin{cases} u(t) = 0, \\ x_2(t) = x_{2\max}, \\ x_1(t) = k_1 x_{2\max} (t - t_2) + x_1(t_2). \end{cases} \quad (409)$$

Необходимо определить время окончания данного интервала.

Из анализа уравнений объекта (308), а также рис. 25 следует, что перемещение объекта на участке торможения равно его перемещению на участке разгона:

$$x_{1к} - x_1(t_3) = x_1(t_2) - x_{10} = \frac{4k_1 x_{2\max}^2}{3k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (410)$$

Отсюда следует, что перемещение на участке движения с постоянной скоростью

$$\begin{aligned} x_1(t_3) - x_1(t_2) &= (x_{1к} - x_{10}) - (x_{1к} - x_1(t_3)) - (x_1(t_2) - x_{10}) = \\ &= x_{1к} - x_{10} - \frac{8k_1 x_{2\max}^2}{3k_2 \sqrt{k_3}}. \end{aligned} \quad (411)$$

Из (411) определим

$$t_3 - t_2 = \frac{x_1(t_3) - x_1(t_2)}{k_1 x_{2\max}} = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1 x_{2\max}} - \frac{8x_{2\max}}{3k_2 \sqrt{k_3}}, \quad (412)$$

откуда с учетом (407) получим

$$t_3 = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1 x_{2\max}} - \frac{8x_{2\max}}{3k_2 \sqrt{k_3}} + t_2 = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1 x_{2\max}} - \frac{2x_{2\max}}{3k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (413)$$

С помощью (412) из (409) также определим

$$x_1(t_3) = k_1 x_{2\max} (t_3 - t_2) + x_1(t_2) = x_{1к} - \frac{4k_1 x_{2\max}^2}{3k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (414)$$

Выражение (414) показывает правильность предыдущих построений. Действительно, значение координаты  $x_1$  в момент времени  $t_3$  равно  $x_{1к}$  минус путь, пройденный объектом при торможении, который в свою очередь равен пути, пройденному им при разгоне (408).

Зная, что время пуска равно времени торможения, определим общее время переходного процесса:

$$t_к = t_2 + (t_3 - t_2) + (t_к - t_3) = 2t_2 + (t_3 - t_2) = t_2 + t_3. \quad (415)$$

Подставляя (407) и (413) в (415), получим

$$t_к = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1 x_{2\max}} - \frac{2x_{2\max}}{3k_2 \sqrt{k_3}} + \frac{2x_{2\max}}{k_2 \sqrt{k_3}} = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1 x_{2\max}} + \frac{4x_{2\max}}{3k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (416)$$

Формулы для оптимального управления и оптимальной траектории на интервале  $t = t_3 \dots t_к$  получим из (361), (363), (364) путем замены  $v = x_{2\max}$ , учитывая сдвиг по времени на величину  $t_3 - t_2$  и дополнительное приращение координаты  $x_1$  за время установившегося движения:

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2)) + \sqrt{k_3}, \quad (417)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2))^2 + k_2 \sqrt{k_3}(t - (t_3 - t_2)), \quad (418)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2}(t - (t_3 - t_2))^2 + x_{10} + \\ &+ (x_1(t_3) - x_1(t_2)) = \\ &= -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2}(t - (t_3 - t_2))^2 + x_{1k} - \frac{8k_1 x_{2\max}^2}{3k_2 \sqrt{k_3}}. \end{aligned} \quad (419)$$

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 27. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $x_{2\max} = 0,5$ .

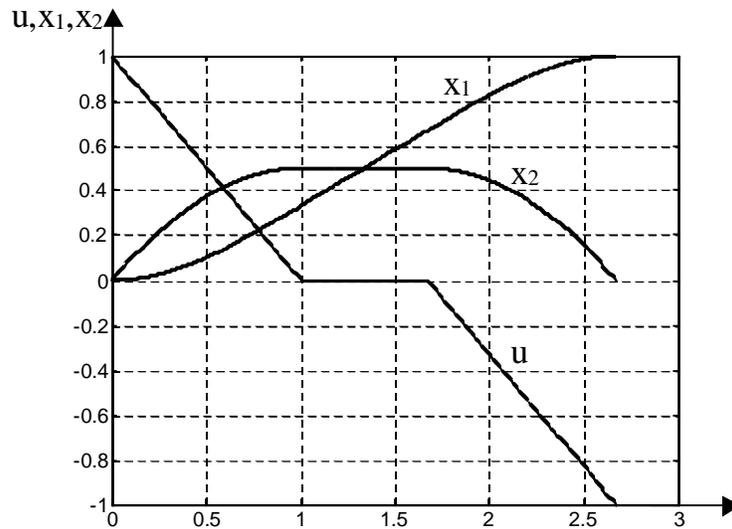


Рис. 27. Оптимальное управление и оптимальная траектория

**Вариант 4.** Ограничивается как координата  $x_2$ , так и управление (рис. 28). Из проведенных ранее исследований следует, что в данном случае

$$\sqrt{k_3} > u_{\max}, \quad (420)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1}} (x_{1k} - x_{10}) > x_{2\max}. \quad (421)$$

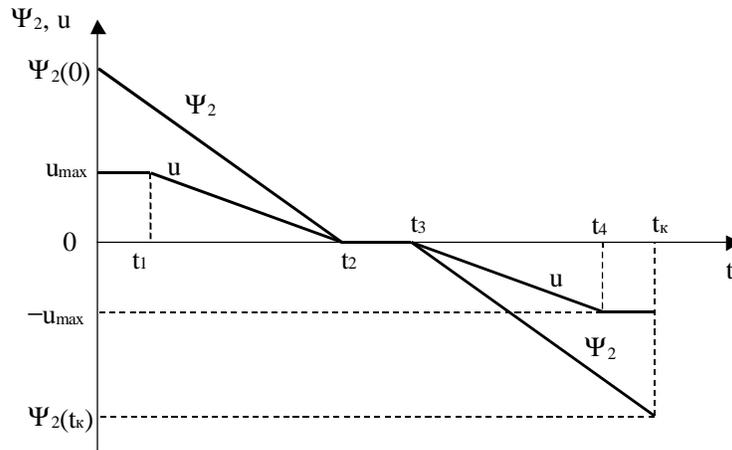


Рис. 28. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

Все необходимые выражения можно легко получить, используя результаты для второго варианта (когда ограничивается только управление).

Моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  определим из (380), (381) положив в них  $v = x_{2\max}$ :

$$t_1 = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (422)$$

$$t_2 = \frac{(k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_2 k_3 u_{\max}}. \quad (423)$$

Зависимости  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  на интервале  $t = 0 \dots t_1$  имеют вид:

$$x_2(t) = k_2 u_{\max} t, \quad (424)$$

$$x_1(t) = \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (425)$$

Подстановкой (422) в (424), (425) получим:

$$x_2(t_1) = k_2 u_{\max} t_1 = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_3}, \quad (426)$$

$$x_1(t_1) = \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}^2}{2k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (427)$$

На интервале  $t = t_1 \dots t_2$ :

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}} t + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{2u_{\max}}, \quad (428)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}}(t^2 - t_1^2) + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}}(t - t_1) + x_2(t_1). \quad (429)$$

Подставив (422), (426) в (429), после преобразований получим:

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}}t^2 + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}}t - \frac{(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}. \quad (430)$$

Подставив для проверки (423) в (430), после преобразований получим:

$$x_2(t_2) = x_{2\max}. \quad (431)$$

Определим зависимость  $x_1(t)$  на интервале:

$$x_1(t) = \int_{t_1}^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}(t^3 - t_1^3) + \frac{k_1 k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}}(t^2 - t_1^2) - \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}(t - t_1) + x_1(t_1). \quad (432)$$

Подставив (422), (427) в (432), после преобразований получим:

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}t^3 + \frac{k_1 k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}}t^2 - \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}t + \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^3 x_{2\max}^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{10}. \quad (433)$$

Подставив (423) в (433), найдем:

$$x_1(t_2) = \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4) x_{2\max}^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (434)$$

На интервале  $t = t_2 \dots t_3$  движение системы определяется следующими выражениями:

$$\begin{cases} u(t) = 0, \\ x_2(t) = x_{2\max}, \\ x_1(t) = k_1 x_{2\max}(t - t_2) + x_1(t_2). \end{cases} \quad (435)$$

Необходимо найти время окончания данного интервала.

Из анализа уравнений объекта (308), а также рис. 28 следует, что перемещение объекта на участке торможения равно его перемещению на участке разгона:

$$x_{1к} - x_1(t_3) = x_1(t_2) - x_{10} = \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4) x_{2\max}^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}}. \quad (436)$$

Отсюда следует, что перемещение на участке движения с постоянной скоростью

$$\begin{aligned} x_1(t_3) - x_1(t_2) &= (x_{1к} - x_{10}) - (x_{1к} - x_1(t_3)) - (x_1(t_2) - x_{10}) = \\ &= x_{1к} - x_{10} - \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{3k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (437)$$

Из (437) определим:

$$t_3 - t_2 = \frac{x_1(t_3) - x_1(t_2)}{k_1x_{2\max}} = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}}, \quad (438)$$

откуда с учетом (423) получим:

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}} + t_2 \\ &= \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} + \frac{(-3k_3u_{\max}^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (439)$$

С помощью (438) из третьего уравнения (435) также определим:

$$\begin{aligned} x_1(t_3) &= k_1x_{2\max}(t_3 - t_2) + x_1(t_2) = \\ &= x_{1к} - \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (440)$$

Выражение (440) показывает правильность предыдущих построений. Действительно, значение координаты  $x_1$  в момент времени  $t_3$  равно  $x_{1к}$  минус путь, пройденный объектом при торможении, который в свою очередь равен пути, пройденному им при разгоне (434).

Зная, что время пуска равно времени торможения, определим общее время переходного процесса:

$$t_к = t_2 + (t_3 - t_2) + (t_к - t_3) = 2t_2 + (t_3 - t_2) = t_2 + t_3. \quad (441)$$

Подставляя (423) и (439) в (441), получим

$$\begin{aligned} t_к &= \frac{(k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_2k_3u_{\max}} + \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{(3k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}} = \\ &= \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} + \frac{(3k_3^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (442)$$

Формулы для оптимального управления и оптимальной траектории на интервале  $t = t_3 \dots t_4$  получим из (375), (389), (393) путем замены  $v = x_{2\max}$ , учитывая сдвиг по времени на величину  $t_3 - t_2$  и дополнительное приращение координаты  $x_1$  за время установившегося движения:

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2)) + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{2u_{\max}}, \quad (443)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2))^2 + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}} (t - (t_3 - t_2)) - \frac{(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}, \quad (444)$$

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} (t - (t_3 - t_2))^2 - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2} (t - (t_3 - t_2)) + \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^3 x_{2\max}^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{10} + x_1(t_3) - x_1(t_2). \quad (445)$$

Учитывая (434), (440), перепишем (445) следующим образом:

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} (t - (t_3 - t_2))^2 - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2} (t - (t_3 - t_2)) + \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^3 x_{2\max}^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{1k} - \frac{k_1 (3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4) x_{2\max}^2}{3k_2 k_3^2 u_{\max}}. \quad (446)$$

Момент времени  $t_4$  найдем с помощью (382), заменив  $v$  на  $x_{2\max}$  и добавив необходимый сдвиг по времени:

$$t_4 = \frac{(k_3 + 3u_{\max}^2) x_{2\max}}{k_2 k_3 u_{\max}} + t_3 - t_2, \quad (447)$$

откуда с учетом (438) получим:

$$t_4 = \frac{x_{1k} - x_{10}}{k_1 x_{2\max}} + \frac{(3k_3 u_{\max}^2 + u_{\max}^4) x_{2\max}}{3k_2 k_3^2 u_{\max}}. \quad (448)$$

Воспользовавшись (391), (395) найдем:

$$x_2(t_4) = \frac{(k_3 - u_{\max}^2) x_{2\max}}{k_3}, \quad (449)$$

$$\begin{aligned}
x_1(t_4) &= \frac{k_1(3k_3^2 + 18k_3u_{\max}^2 - 5u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}} + x_{10} + x_1(t_3) - x_1(t_2) = \\
&= x_{1k} - \frac{k_1(3k_3^2 - 6k_3u_{\max}^2 + 3u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}}.
\end{aligned} \tag{450}$$

На участке  $t = t_4 \dots t_k$

$$u = -u_{\max}, \tag{451}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \int_{t_4}^t k_2 u(\tau) d\tau = -k_2 u_{\max} (t - t_4) + x_2(t_4) = \\
&= -k_2 u_{\max} t + \frac{k_2 u_{\max} (x_{1k} - x_{10})}{k_1 x_{2\max}} + \frac{(3k_3^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_3^2}.
\end{aligned} \tag{452}$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} (t - (t_3 - t_2))^2 + \frac{2k_1(k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_3} (t - (t_3 - t_2)) + \\
&+ \frac{k_1(-6k_3^2 - 12k_3u_{\max}^2 - 14u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}} + x_{10} + x_1(t_3) - x_1(t_2).
\end{aligned} \tag{453}$$

Из (453) с учетом (437) получим:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} (t - (t_3 - t_2))^2 + \frac{2k_1(k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_3} (t - (t_3 - t_2)) + \\
&+ x_{1k} - \frac{2k_1(k_3^2 + 2k_3u_{\max}^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{k_2k_3^2u_{\max}}.
\end{aligned} \tag{454}$$

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 29. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ,  $x_{2\max} = 0,5$ .

В заключение сделаем некоторые замечания относительно практической реализации оптимальной по комбинированному критерию системы управления.

1. Варианты 3 и 4 предусматривают движение с постоянной максимальной скоростью. По причинам, изложенным в п. 5.2, рациональная реализация таких режимов предполагает непрерывное регулирование скорости с воздействием на напряжение якоря.

2. При синтезе законов управления использовалось упрощенное описание объекта, не учитывающее малые инерционности и возмущения. Поэтому найденные оптимальные программы управления не в состоянии обеспечить удовлетворительную точность системы по углу поворота исполнительного вала. Для повышения точности следует предусмотреть переход системы в режим

непрерывного регулирования угла поворота по окончании оптимальной программы управления.

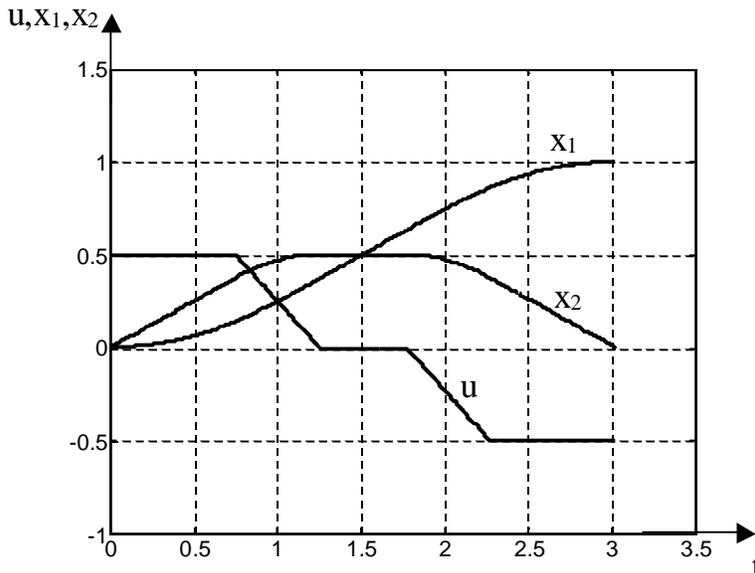


Рис. 29. Оптимальное управление и оптимальная траектория

#### 5.4. Задание

Данное задание может составлять часть задания на курсовой проект по курсу «Теория автоматического управления» (третья часть проекта) или выполняться независимо, в рамках практических и лабораторных работ по дисциплине.

1. Построить модель оптимальной по быстродействию системы управления электроприводом постоянного тока независимого возбуждения (см. п. 5.2).

1.1. Определить коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  для своего варианта. Исходные данные по вариантам приведены в таблице.

1.2. Построить упрощенную модель оптимальной системы, не учитывающую малые инерционности системы, в Simulink. С помощью модели получить графики изменения управления и координат объекта при отработке системой различных рассогласований. Рассмотреть варианты с тремя, двумя и одним интервалами постоянного управления.

1.3. Построить полную модель оптимальной системы в Simulink, учитывающую динамику всех входящих в нее звеньев (инерционность преобразователя напряжения и электромагнитную инерционность двигателя).

Реализовать быстродействующий токовый контур.

Предусмотреть переход в режим непрерывного регулирования скорости двигателя с воздействием на напряжение якоря на участках ограничения скорости.

Исследовать переходные процессы в системе и сделать выводы о влиянии неучтенных при синтезе закона управления инерционностей, а также возмущения приведенным к валу двигателя моментом нагрузки механизма.

2. Построить модель оптимальной по комбинированному критерию системы управления электроприводом постоянного тока независимого возбуждения (см. п. 5.3).

2.1. Определить «предельные» значения весового коэффициента  $k_3$  и начального рассогласования  $x_{1к}-x_{10}$ , разграничивающие четыре варианта оптимального управления, описанные в п. 5.3.

2.2. Рассчитать четыре варианта оптимального управления и оптимальных траекторий, описанные в п. 5.3, и построить соответствующие зависимости.

3.3. Построить полную модель оптимальной системы в Simulink, учитывая динамику всех входящих в нее звеньев (инерционность преобразователя напряжения и электромагнитную инерционность двигателя).

Реализовать быстродействующий токовый контур.

Предусмотреть переход в режим непрерывного регулирования скорости двигателя с воздействием на напряжение якоря на участках ограничения скорости.

Предусмотреть переход в режим непрерывного регулирования угла поворота исполнительного вала по окончании оптимальной программы управления.

Исследовать переходные процессы в системе и сделать выводы о влиянии неучтенных при синтезе закона управления инерционностей, а также возмущения приведенным к валу двигателя моментом нагрузки механизма.

#### *Исходные данные к курсовому проекту по вариантам*

№ вар.	Мощность, КВт	Номинальная частота вращения, об/мин	Сопротивление обмотки при 15° С, Ом		Индуктивность якоря, мГн	Момент инерции ротора, кг×м <sup>2</sup>	Постоянная времени ТП, сек.	Время полного поворота, сек.
			якоря	добавочных полюсов				
1	2	3	4	5	6	6	7	8
Тип 2ПБ100МУХЛ4, 2ПБ100МГУХЛ4								
<b>1</b>	0,26	800	12,76	8,35	461	0,011	0,02	20
<b>2</b>	0,37	1000	8,49	5,14	313		0,08	12
<b>3</b>	0,6	1600	4,38	2,62	150		0,06	11
1	2	3	4	5	6	6	7	8
<b>4</b>	0,85	2360	1,99	1,22	78		0,09	30
<b>5</b>	1,2	3150	1,325	0,7	45		0,04	15
Тип 2ПБ112МУХЛ4, 2ПБ112МГУХЛ4								
<b>6</b>	0,34	750	8,72	7,07	106	0,015	0,06	40
<b>7</b>	0,45	1060	5,07	4,5	66		0,09	35
<b>8</b>	0,75	1500	2,48	2,13	31		0,07	22
<b>9</b>	1,1	2200	1,29	1,12	16		0,10	25
<b>10</b>	1,4	3000	0,788	0,682	11		0,09	15
Тип 2ПФ132МУХЛ4, 2ПФ132МГУХЛ4								
<b>11</b>	2	750	1,693	1,26	33	0,038	0,11	40
<b>12</b>	3	1060	0,906	0,692	18,5		0,10	24

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	6	7	8
13	4	1500	0,472	0,308	9,7		0,12	16
14	6	2360	0,226	0,166	1,6		0,09	36
15	7,5	3000	0,14	0,094	2,85		0,13	22
Тип 2ПФ132ЛУХЛ4, 2ПФ132ЛГУХЛ4								
16	2,8	750	1,08	0,915	23	0,048	0,12	28
17	4,2	1000	0,67	0,445	14		0,14	34
18	5,5	1600	0,269	0,22	5,7		0,11	18
19	7,5	2120	0,167	0,124	3,5		0,15	15
20	11	3000	0,08	0,066	1,8		0,14	10
Тип 2ПФ160МУХЛ4, 2ПФ160МГУХЛ4								
21	4,2	750	0,516	0,407	14	0,083	0,08	22
22	6	1000	0,326	0,208	9		0,09	18
23	7,5	1500	0,145	0,101	4		0,11	10
24	13	2240	0,081	0,056	2,2		0,10	12
25	16	3150	0,037	0,024	0,99		0,15	9
Тип 2ПФ160ЛУХЛ4, 2ПФ160ЛГУХЛ4								
26	5,6	800	0,328	0,227	10,5	0,1	0,07	16
27	8	1000	0,216	0,175	7		0,13	18
28	11	1500	0,096	0,073	3,1		0,12	10
29	16	2360	0,044	0,031	1,4		0,10	8
30	18,5	3150	0,024	0,017	0,78		0,16	5
Тип 2ПФ180МУХЛ4, 2ПФ180МГУХЛ4								
31	9	750	0,286	0,206	22	0,2	0,15	24
32	12	1060	0,15	0,092	4,9		0,14	25
33	15	1500	0,084	0,056	2,7		0,09	16
34	26	3150	0,022	0,015	0,68		0,16	8
Тип 2ПФ180ЛУХЛ4, 2ПФ180ЛГУХЛ4								
35	10	750	0,203	0,145	7,3	0,23	0,10	18
36	14	1000	0,136	0,084	4,4		0,13	24
37	18,5	1500	0,065	0,044	2,2		0,11	14
38	25	2120	0,042	0,03	0,81		0,17	12
Тип 2ПФ200МУХЛ4, 2ПФ200МГУХЛ4								
39	22	1600	0,047	0,029	1,6	0,25	0,14	10
Тип 2ПФ200ЛУХЛ4, 2ПФ200ЛГУХЛ4								
40	15	750	0,125	0,08	4,6	0,3	0,13	18
41	20	1000	0,083	0,053	3,2		0,12	18
42	30	1500	0,031	0,02	1,2		0,15	8

Номинальное напряжение питания двигателя для всех вариантов – 220 В.

## 6. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ СИСТЕМЫ MATLAB

Matlab ориентирован на работу с данными, представленными в векторно-матричной форме. Следующие примеры поясняют правила задания матриц и выбора элементов из них:

1. Введение матрицы (пробел или запятая разделяют элементы строк, точка с запятой – строки):

```
M = [1,2 3;4 5 6]
```

```
M =  
    1     2     3  
    4     5     6
```

2. Выборка элемента матрицы:

```
N = M(2,1)
```

```
N =  
    4
```

3. Выборка строки (двоеточие следует читать как «все элементы строки»):

```
N = M(1,:) 
```

```
N =  
    1     2     3
```

3. Выборка столбца (двоеточие следует читать как «все элементы столбца»):

```
N = M(:,2)
```

```
N =  
    2
```

4. «Комбинированная» выборка элементов (2:3 следует читать как «столбцы со второго по третий»)

```
N = M(2,2:3)
```

```
N =  
    5     6
```

5. Задание строки-последовательности с единичным шагом:

```
N = 1:5
```

```
N =  
    1     2     3     4     5
```

6. Задание строки-последовательности с заданным шагом (в данном случае равным 2):

```
N = 1:2:5
```

```
N =  
    1     3     5
```

7. Объединение матриц (здесь добавление строки):

```
N = [M; [7 8 9]]
```

```
N =  
    1     2     3  
    4     5     6  
    7     8     9
```

8. Объединение матриц (здесь добавление столбца):

```
N = [[0;0] M]
```

```
N =  
    0     1     2     3  
    0     4     5     6
```

9. Транспонирование матрицы (знак «'»):

```
L = [1 2 3]
```

```
L =  
    1     2     3
```

```
N = L'
```

```
N =  
    1  
    2  
    3
```

Для работы с матрицами в Matlab определены основные арифметические операции над матрицами: сложение (+), вычитание (-), умножение (\*), «левое» деление (\), «правое» деление (/), возведение в степень (^). Сложение и вычитание производятся поэлементно, поэтому размерность матриц-операндов должна быть одинаковой. Умножение и деление матриц выполняются по правилам матричной арифметики, согласно которым число столбцов матрицы первого операнда должно быть равно числу строк матрицы второго операнда. «Левое» и «правое» деления реализуют алгоритмы решения системы линейных алгебраических уравнений.

Левое деление позволяет найти решение системы  $AX = B$  (т.е. определить  $X$ ):

$$A = [1 \ 2; \ 3 \ 4]$$

$$A = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$$

$$B = [2; \ 1]$$

$$B = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$X = A \setminus B$$

$$X = \begin{array}{c} -3.0000 \\ 2.5000 \end{array}$$

При этом  $X = A^{-1}B$ .

Правое деление решает задачу  $XA = B$ :

$$A = [1 \ 2; \ 3 \ 4]$$

$$A = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$$

$$B = [2 \ 1]$$

$$B = \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}$$

$$X = B/A$$

$$X = \begin{array}{cc} -2.5000 & 1.5000 \end{array}$$

При этом  $X = BA^{-1}$ .

Очевидно, что для выполнения данных операций необходимо, чтобы в обоих случаях матрица  $M$  была квадратной и ее определитель был не равен нулю.

Для выполнения операции возведения в степень требуется, чтобы матрица-операнд была квадратной.

Разрешаются операции сложения, вычитания, умножения и «правого» деления любых матриц со скалярной величиной, при этом соответствующая операция будет произведена над каждым элементом матрицы. Кроме того, реализованы также операции поэлементного умножения ( $.*$ ) и деления ( $./$ ) матриц одной размерности, а также возведение в степень всех элементов матрицы любой размерности ( $.^$ ).

Приведем краткие описания некоторых встроенных в систему Matlab функций для формирования и работы с матрицами. Большинство функций Matlab имеет несколько вариантов вызова, отличающихся числом входных и выходных параметров. Здесь дается описание только используемых в настоящем пособии вариантов. Полную информацию обо всех возможностях функций можно получить из справочной системы Matlab – например, с помощью команды help:

```
help имя_функции
```

### 1. Создание диагональной матрицы:

```
diag([1 2 3])
```

```
ans =  
    1     0     0  
    0     2     0  
    0     0     3
```

### 2. Определение собственных чисел и собственных векторов квадратной матрицы.

Вызов с одним выходным параметром (определение собственных чисел):

```
A = [1 2; 3 4]
```

```
A =  
    1     2  
    4     4
```

```
L = eig(A)
```

```
L =  
-0.3723  
 5.3723
```

Вызов с двумя выходными параметрами (определение собственных векторов и собственных чисел):

```
[V,D] = eig(A)
```

```
V =  
-0.8246 -0.4160  
 0.5658 -0.9094
```

```
D =  
-0.3723     0  
     0    5.3723
```

Собственные числа определяются как диагональные элементы второго возвращаемого параметра.

Определение корней полинома производится с помощью функции `roots`. Полином задается как вектор коэффициентов, начиная со старшей степени аргумента. Найдем, например, корни полинома  $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ :

```
%Задаем полином с помощью вектора коэффициентов:
p = [1 2 3 4]

p =
     1     2     3     4

roots(p)

ans =
    -1.6506
    -0.1747 + 1.5469i
    -0.1747 - 1.5469i
```

Определение экспоненты (с матрицами и векторами работает поэлементно):

```
t = [0 .5 1]

t =
     0     0.5000     1.0000

exp(t)

ans =
     1.0000     1.6487     2.7183
```

Вычисление определенного интеграла, заданного последовательностями значений аргумента и функции методом трапеций:

```
% Задаем вектор-последовательность аргумента:
x = 0:.1:1

x =
Columns 1 through 6
     0     0.1000     0.2000     0.3000     0.4000     0.5000
Columns 7 through 11
     0.6000     0.7000     0.8000     0.9000     1.0000

% вычисляем вектор-последовательность значения функции:
y = 1-x

y =
Columns 1 through 6
     1.0000     0.9000     0.8000     0.7000     0.6000     0.5000
Columns 7 through 11
     0.4000     0.3000     0.2000     0.1000         0

% Строим график функции (только для демонстрации):
plot(x,y),grid
```

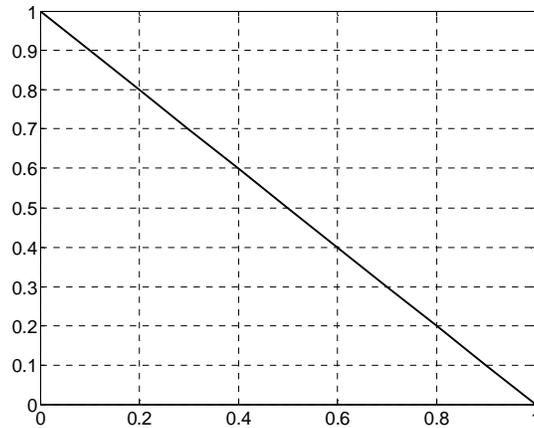


Рис. 30. Графическое окно

```
% Вычисляем интеграл – площадь «под прямой y(x)»
trapz(x,y)

ans =
    0.5000
```

### Библиографический список

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов. 4-е изд. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 1998. – 512 с.
2. Иващенко Н.И. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем: учебник для вузов; изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 3-х т. Рек. Минобразования РФ/ ред. Н.Д. Егупов. – М.: изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2000.
4. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: в 2 т. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 366 с.
5. Рыбалев А.Н. Теория автоматического управления: пособие к курсовому проектированию. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2004. – 145 с.
6. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – Л.: Энергия, 1969. – 375 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Введение</i>	3
1. Постановка задач оптимального управления и их классификация	5
2. Решение задач оптимального управления с помощью вариационного исчисления	9
3. Решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума	39
4. Решение задач оптимального управления методом динамического программирования	54
5. Практическая задача: управление электроприводом постоянного тока	66
6. Краткое описание используемых средств системы Matlab	99
<i>Библиографический список</i>	104

**Андрей Николаевич Рыбалев,**  
доцент кафедры АПП и Э АмГУ,  
канд. техн. наук

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.  
ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.**  
*Учебное пособие*

---

Изд-во АмГУ. Подписано к печати . Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,04, уч. - изд. л. 6,25. Тираж 100. Заказ .

*Министерство образования Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*  
Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*ПОСОБИЕ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ*

*Учебное пособие*

Благовещенск  
2004

ББК 32.965я73  
Р93

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
энергетического факультета  
Амурского государственного  
университета*

А.Н. Рыбалев

Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию. Учебное пособие. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2004, 145 с.

Предназначено для студентов специальности 210200 и других, изучающих дисциплину «Теория автоматического управления» и выполняющих по данной дисциплине курсовой проект. Может быть использовано также при выполнении других работ, связанных с расчетами и моделированием систем автоматического управления.

*Рецензенты:*

С.Н. Воякин – и.о. зав. кафедрой электропривода, электроники и электрооборудования автомобилей и тракторов ДальГАУ, канд. техн. наук, доцент;

В.И. Усенко – доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники АмГУ, канд. техн. наук.

© Амурский государственный университет, 2004

## ВВЕДЕНИЕ

Пособие включает задание на курсовой проект по курсу «Теория автоматического управления» и краткие теоретические сведения. Проект охватывает следующие темы, изучаемые в данном курсе: математическое описание объектов управления и систем управления; анализ линейных систем, в т. ч. определение устойчивости и построение переходных и частотных характеристик; синтез линейных систем, в т. ч. расчет регуляторов и корректирующих устройств; анализ нелинейных систем управления.

В первой главе представлены расчетные схемы, исходные данные и задание.

Во второй главе кратко излагаются основные понятия теории автоматического управления, описываются структура и состав типовых систем.

Третья глава посвящена математическому описанию линейных объектов и систем управления. Рассматриваются основные формы описания (уравнения в пространстве состояний, передаточные функции) и основные характеристики (переходные и частотные) линейных систем. Представляются также элементарные составляющие математического описания и их свойства, методы построения описания систем в целом.

В четвертой главе рассматриваются вопросы анализа линейных систем автоматического регулирования. Даются определения показателей качества систем в стационарных статическом и динамическом режимах. Приводятся понятие и критерии устойчивости линейных систем. Описываются прямые и косвенные показатели качества переходных процессов.

Пятая глава посвящена синтезу линейных систем. Кратко рассматриваются постановка задачи синтеза и типовые законы регулирования. Приводятся методы расчета типовых регуляторов на заданные частотный и корневой показатели колебательности, а также метод расчета корректирующих устройств по логарифмическим частотным характеристикам.

В шестой главе обсуждаются некоторые проблемы анализа нелинейных систем. Рассматриваются вопросы реализации и моделирования систем с ограничением внутренних координат, особенности динамики релейных систем. Описывается метод гармонической линеаризации, предназначенный для исследования автоколебаний в нелинейных системах.

Седьмая глава – применение программы Matlab для анализа и синтеза систем автоматического управления. Рассматриваются возможности системы по моделированию систем и исследованию моделей. Приведены методы синтеза систем, ориентированные на численное решение.

# 1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

## 1.1. Расчетные схемы системы автоматического регулирования

Курсовой проект формируется из трех частей. В первых двух рассматривается система непрерывного автоматического регулирования угла поворота исполнительного вала электропривода с двигателем постоянного тока и преобразователем напряжения (рис.1). Система обеспечивает отработку заданного угла поворота (задача слежения) и стабилизацию угла при нагрузках двигателя вплоть до номинального момента. Элементы схемы описаны ниже.

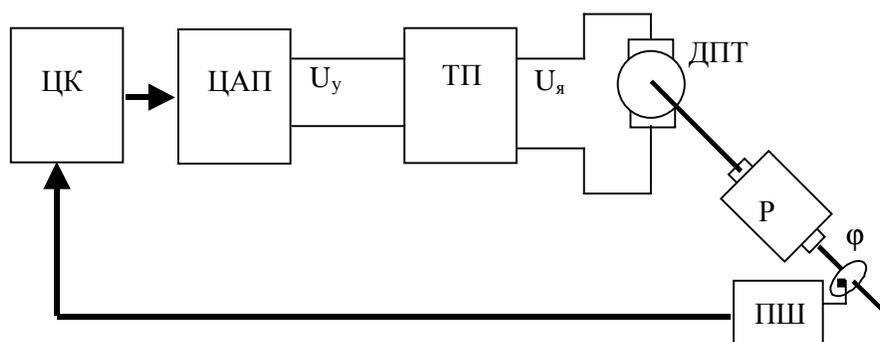


Рис. 1. Схема непрерывной следящей системы.

ДПТ – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением серии 2П. Параметры двигателя для всех вариантов приведены в табл.1 [6]. Суммарный приведенный к валу момент инерции принимается равным 120% от момента инерции вала двигателя. Благодаря применению независимой вентиляции, возможно нахождение машины под номинальным током при нулевой скорости вращения якоря.

ТП – тиристорный преобразователь (управляемый выпрямитель). Построен на базе двух трехфазных выпрямительных тиристорных мостов. Обеспечивает работу двигателя в четырех квадрантах (двигательный и генераторный режимы работы машины с вращением в обоих направлениях). Максимальное выпрямленное напряжение 514 В. Допускает внешнее задание выходного напряжения аналоговым сигналом  $-10...+10$  В. Имеет выходной индуктивно-емкостный фильтр. Описывается дифференциальным уравнением первого порядка (апериодическое звено). Постоянная времени определяется вариантом (см. табл.1). Коэффициент передачи определяется исходя из линейности регулировочной характеристики.

Р – редуктор. Передаточное число рассчитывается исходя из того, что при номинальной скорости двигателя максимальный угол поворота ( $320^\circ$ ) выходного вала  $\varphi_{\max}$  должен быть отработан за заданное время, определяемое вариантом.

ПШ – поворотный шифратор – высокоточный датчик абсолютного значения угла поворота выходного вала. Выдает цифровой сигнал.

ЦК – цифровой контроллер. Принимает сигнал датчика поворота и формирует через ЦАП сигнал управления тиристорным преобразователем. Обладает высокой производительностью и может очень точно реализовать любые законы регулирования. Допускает локальное задание угла поворота оператором и внешнее задание через промышленную сеть.

ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь. Преобразует цифровой сигнал контроллера в сигнал напряжения постоянного тока от  $-10$  до  $+10$ В.

Тактовые частоты и разрядность ЦК и ЦАП таковы, что сигнал  $U_y$  можно считать непрерывным.

В третьей части рассматриваются два варианта нелинейных систем: сначала та же техническая система, но уже с учетом всех ограничений, присущих ее элементам, далее – релейная система автоматического регулирования (рис. 2).

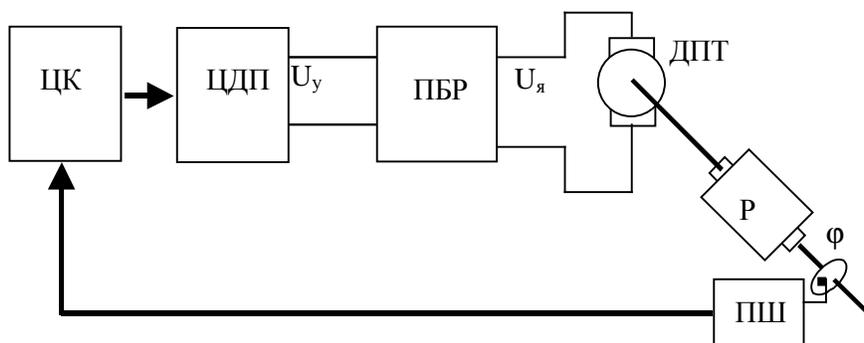


Рис. 2. Схема релейной следящей системы.

На рис. 2. присутствуют следующие обозначения:

ЦАП – цифро-дискретный преобразователь, преобразует выходные коды ЦК (включения, выключения, реверса) в сигнал управления электронным пускателем ПБР;

ПБР – пускатель бесконтактный реверсивный, служит для коммутации питания ДПТ. Уровни выходного напряжения  $-220, 0, +220$  В.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Исходные данные к курсовому проекту по вариантам

№ вар.	Мощность, КВт	Номинальная частота вращения, об/мин	Сопротивление обмотки при $15^\circ \text{C}$ , Ом		Индуктивность якоря, мГн	Момент инерции ротора, $\text{кг}\times\text{м}^2$	Постоянная времени ТП, сек.	Время полного поворота, сек.
			якоря	добавочных полюсов				
1	2	3	4	5	6	6	7	8
Тип 2ПБ100МУХЛ4, 2ПБ100МГУХЛ4								
1	0,26	800	12,76	8,35	461	0,011	0,02	20
2	0,37	1000	8,49	5,14	313		0,08	12
3	0,6	1600	4,38	2,62	150		0,06	11

1	2	3	4	5	6	6	7	8
4	0,85	2360	1,99	1,22	78		0,09	30
5	1,2	3150	1,325	0,7	45		0,04	15
Тип 2ПБ112МУХЛ4, 2ПБ112МГУХЛ4								
6	0,34	750	8,72	7,07	106	0,015	0,06	40
7	0,45	1060	5,07	4,5	66		0,09	35
8	0,75	1500	2,48	2,13	31		0,07	22
9	1,1	2200	1,29	1,12	16		0,10	25
10	1,4	3000	0,788	0,682	11		0,09	15
Тип 2ПФ132МУХЛ4, 2ПФ132МГУХЛ4								
11	2	750	1,693	1,26	33	0,038	0,11	40
12	3	1060	0,906	0,692	18,5		0,10	24
13	4	1500	0,472	0,308	9,7		0,12	16
14	6	2360	0,226	0,166	1,6		0,09	36
15	7,5	3000	0,14	0,094	2,85		0,13	22
Тип 2ПФ132ЛУХЛ4, 2ПФ132ЛГУХЛ4								
16	2,8	750	1,08	0,915	23	0,048	0,12	28
17	4,2	1000	0,67	0,445	14		0,14	34
18	5,5	1600	0,269	0,22	5,7		0,11	18
19	7,5	2120	0,167	0,124	3,5		0,15	15
20	11	3000	0,08	0,066	1,8		0,14	10
Тип 2ПФ160МУХЛ4, 2ПФ160МГУХЛ4								
21	4,2	750	0,516	0,407	14	0,083	0,08	22
22	6	1000	0,326	0,208	9		0,09	18
23	7,5	1500	0,145	0,101	4		0,11	10
24	13	2240	0,081	0,056	2,2		0,10	12
25	16	3150	0,037	0,024	0,99		0,15	9
Тип 2ПФ160ЛУХЛ4, 2ПФ160ЛГУХЛ4								
26	5,6	800	0,328	0,227	10,5	0,1	0,07	16
27	8	1000	0,216	0,175	7		0,13	18
28	11	1500	0,096	0,073	3,1		0,12	10
29	16	2360	0,044	0,031	1,4		0,10	8
30	18,5	3150	0,024	0,017	0,78		0,16	5
Тип 2ПФ180МУХЛ4, 2ПФ180МГУХЛ4								
31	9	750	0,286	0,206	22	0,2	0,15	24
32	12	1060	0,15	0,092	4,9		0,14	25
33	15	1500	0,084	0,056	2,7		0,09	16
34	26	3150	0,022	0,015	0,68		0,16	8
Тип 2ПФ180ЛУХЛ4, 2ПФ180ЛГУХЛ4								
35	10	750	0,203	0,145	7,3	0,23	0,10	18
36	14	1000	0,136	0,084	4,4		0,13	24
37	18,5	1500	0,065	0,044	2,2		0,11	14
38	25	2120	0,042	0,03	0,81		0,17	12
Тип 2ПФ200МУХЛ4, 2ПФ200МГУХЛ4								
39	22	1600	0,047	0,029	1,6	0,25	0,14	10
Тип 2ПФ200ЛУХЛ4, 2ПФ200ЛГУХЛ4								
40	15	750	0,125	0,08	4,6	0,3	0,13	18
41	20	1000	0,083	0,053	3,2		0,12	18
42	30	1500	0,031	0,02	1,2		0,15	8

Номинальное напряжение питания двигателя для всех вариантов 220 В.

## 1.2. Задание

### 1.2.1. Математическое описание линейной системы и ее анализ

1. Построить модель системы в пространстве состояний, принимая в качестве входных величин заданный угол поворота выходного вала  $\varphi_{\text{зад}}$  (задание) и приведенный к валу двигателя момент сил сопротивления нагрузки (возмущение). Выходная величина – действительный угол поворота выходного вала  $\varphi$ .

Переменными состояний будут напряжение якоря ДПТ, ток якоря, угловая скорость двигателя и угол  $\varphi$ .

При построении модели считать напряжение управления преобразователем  $U_y$  пропорциональным ошибке регулирования:

$$U_y = k_p e = k_p (\varphi_{\text{зад}} - \varphi), \quad (1)$$

где  $k_p$  – неизвестный пока коэффициент передачи пропорционального регулятора.

Для определения коэффициента  $K_e$  двигателя (см. 3.1) следует рассмотреть естественную механическую характеристику машины (зависимость скорости от момента при номинальном напряжении питания в установившемся режиме). Эту характеристику можно получить из уравнений динамики двигателя, приведенных в 3.1, если в них принять все производные равными нулю. Коэффициент  $K_e$  определяется исходя из того, что при номинальном моменте  $M_n$  двигатель должен развивать номинальную угловую скорость  $\omega_n$ . Номинальная скорость и номинальный момент устанавливаются через номинальные частоту вращения и номинальную мощность двигателя, приведенные в табл.1. При этом

$$M_n [\text{Н}\cdot\text{м}] = P_n [\text{Вт}] / \omega_n [\text{рад/с}]. \quad (2)$$

2. По уравнениям в пространстве состояний получить передаточную матрицу системы, состоящую из передаточных функций по заданию и возмущению.

3. Получить передаточные функции элементов системы – преобразователя, двигателя, редуктора. Построить структурную схему замкнутой системы с единичной обратной связью и регулятором.

Следует учесть, что ДПТ описывается двумя передаточными функциями: по каналу напряжение якоря – скорость, по каналу момент сопротивления – скорость.

Напряжение управления преобразователем формируется согласно (1).

4. По структурной схеме путем необходимых преобразований (см. 3.5.2) определить передаточные функции системы по заданию и возмущению.

5. Построить АФЧХ разомкнутой системы при  $k_p = 1$ , по которой определить критический коэффициент  $k_{p, \text{кр}}$ , соответствующий нахождению системы на границе устойчивости (см. 4.2.2).

6. Определить влияние коэффициента  $k_p$  на следующие показатели системы:

статическая ошибка при возмущении номинальным моментом нагрузки двигателя (см. 4.1.2);

ошибка по задающему воздействию, изменяющемуся со скоростью 1 град/сек (см. 4.1.3);

прямые показатели качества переходных процессов (время регулирования и перерегулирование, см. 4.2.3);

корневые показатели качества (степень устойчивости и показатель колебательности, см. 4.2.3);

частотные показатели качества (запасы устойчивости по фазе и амплитуде, частотный показатель колебательности, резонансная частота и частота среза, см. 4.2.3).

Построить соответствующие графики при изменении коэффициента передачи регулятора от  $k_p \rightarrow 0$  до  $k_p = k_{p,кр}$ .

7. Построить корневой годограф замкнутой системы в том же диапазоне изменения  $k_p$ . На годографе отметить расчетные точки (см. 4.2.4).

8. При фиксированных значениях коэффициента регулятора, соответствующих запасам устойчивости по амплитуде 0,2; 0,4; 0,6; 0,8, рассчитать и построить статическую характеристику системы по нагрузке (зависимость ошибки регулирования от приведенного момента сопротивления на валу). Максимальный момент сопротивления принять равным номинальному моменту двигателя.

9. При фиксированных значениях коэффициента регулятора, соответствующих запасам устойчивости по амплитуде 0,2; 0,4; 0,6; 0,8, рассчитать и построить переходные характеристики по заданию и возмущению и определить их показатели (время регулирования и перерегулирование).

### ***1.2.2. Синтез линейной системы***

В общем случае к синтезируемой системе предъявляются следующие требования:

статическая ошибка по возмущению номинальным моментом нагрузки не более 1 угл. мин;

ошибка по задающему воздействию, изменяющемуся со скоростью 1 град/сек, не более 1 угл. мин;

время регулирования – не более 150% от времени процесса с П-регулятором, для которого перерегулирование составляет 20-30%;

перерегулирование не более 30%.

Синтез системы предполагает расчет параметров настройки типового ПИД-регулятора различными методами, и определение структуры и параметров корректирующего устройства по ЛАЧХ.

Требуется:

1. Определить коэффициент передачи П-регулятора, обеспечивающий выполнение требований к точности системы в стационарных режимах. Проверить устойчивость системы при этих значениях коэффициента.

2. Рассчитать настройки ПИД-регулятора, применение которого гарантирует отсутствие статической ошибки по возмущению и ошибки по задаю-

щему воздействию, изменяющемуся с постоянной скоростью (см. 4.1.2, 4.1.3). Дополнительно к перечисленным требованиям настройки регулятора должны обеспечивать максимальное подавление низкочастотных возмущений (см. 5.2.2).

Метод расчета регулятора выбирается в зависимости от варианта:  
на заданное значение частотного показателя колебательности (см. 5.2.3);

на заданное значение корневого показателя колебательности (см. 5.2.4).

В качестве ориентира можно принять:  
по первому методу: значение частотного показателя колебательности 1,2, диапазон постоянных времени изодрома 0,3...0,7;  
по второму методу: значение корневого показателя колебательности 0,3, диапазон расчетных частот 0,5 ...5.

Возможно, в ходе выполнения задания возникнет необходимость в пересчетах, что естественно для задач синтеза.

Рассчитать и построить переходные характеристики системы с рассчитанным регулятором по задающему воздействию и возмущению.

3. С помощью логарифмических амплитудно-частотных характеристик рассчитать статическое (без интегрирующих звеньев) последовательное корректирующее устройство (см. 5.3).

Рассчитать и построить переходные характеристики скорректированной системы по задающему воздействию и возмущению.

4\*. Рассчитать настройки ПИД-регулятора на заданный частотный показатель колебательности для системы в случае, когда тиристорный преобразователь характеризуется запаздыванием  $\tau = 0,02$  сек.

5\*. Рассчитать настройки ПИД-регулятора на заданный частотный показатель колебательности численным методом (см. 7.3.2).

6\*. Вывести уравнения настроек ПИД-регулятора на заданный корневой показатель колебательности (см. 5.2.4).

7\*. Рассчитать корректирующее устройство методом динамической компенсации и упростить его оптимизационным методом в Matlab (см. 7.3.4).

8\*. Определить настройки ПИД-регулятора на заданное быстродействие и перерегулирование в Simulink с помощью блок-схемы NCD (см. 7.4.2).

*\*Примечание:* отмеченные пункты задания необязательны и вводятся преподавателем по его усмотрению.

### ***1.2.3. Анализ нелинейной САР***

1. Построить Simulink-модель рассчитанной системы с ПИД-регулятором или корректирующим устройством, с учетом ограничений по максимальному уровню сигнала управления тиристорным преобразователем и по току двигателя (трехкратный от номинального).

Ограничение по току двигателя реализовать с помощью «отсечки» (см. 6.2). Параметры «отсечки» выбрать экспериментально.

С помощью построенной модели исследовать переходные процессы в системе. Определить максимальное рассогласование, при котором система ведет себя как линейная. Показать работу всех ограничений при больших рассогласованиях. Определить влияние рассогласования на показатели качества переходных процессов (быстродействие и перерегулирование) и построить соответствующие графики.

2. Построить Simulink-модель релейной следящей системы (рис. 2).

ЦК, ЦДП и ПБР в данной системе совместно реализуют функцию идеального трехпозиционного реле.

3. С помощью метода гармонической линеаризации (см. 6.4) определить влияние зоны нечувствительности реле на качество процессов в системе (отсутствие или наличие автоколебаний и их параметры – частоту и амплитуду). Построить соответствующие графики. Проверить достоверность результатов расчетов моделированием.

Определить предельную зону нечувствительности, при которой автоколебания отсутствуют. Определить для нее максимальную ошибку слежения и исследовать процессы в системе при наличии возмущения. Определить влияние момента нагрузки двигателя на амплитуду и частоту колебаний. Построить соответствующие графики.

4. Ввести в релейную систему ограничение тока двигателя с помощью «отсечки», параметры которой подобрать экспериментально. Исследовать влияние ограничения на показатели качества переходных процессов при различных рассогласованиях. Построить соответствующие графики.

5\*. Построить двухконтурную систему непрерывного регулирования с внутренним токовым контуром и ограничением сигнала задания этому контуру (см. 6.2). Рассчитать настройки регуляторов тока и угла поворота. Построить и исследовать Simulink-модель.

6\*. Выполнить пункт 3 для реального двухпозиционного реле с зоной неоднозначности, равной 20% от зоны нечувствительности.

*\*Примечание:* отмеченные пункты задания являются необязательными и вводятся преподавателем по его усмотрению.

## 2. УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ

### 2.1. Основные понятия

Управление каким либо объектом – это процесс воздействия на него с целью обеспечения требуемого течения процессов в объекте или требуемого изменения его состояния. Основой управления является переработка информации о состоянии объекта в соответствии с целью управления. Управление, осуществляемое без участия человека, называется *автоматическим управлением*. Техническое устройство, с помощью которого осуществляется автоматическое управление объектом, называется *управляющим устройством*. Совокупность объекта управления и управляющего устройства образует *систему автоматического управления (САУ)*.

Для управления любым объектом, а также для построения системы автоматического управления необходимо знать *математическую модель объекта* и *цель управления*. Математическая модель объекта показывает, как можно управлять объектом, а цель управления – как (или для чего) нужно им управлять.

В общем случае объект управления представляется в следующем виде (рис. 3).

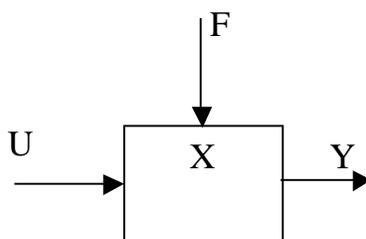


Рис. 3. К определению математического описания объекта управления

На рис. 3:

$X$  – вектор переменных, характеризующих состояние объекта;

$U$  – вектор управляющих воздействий, оказываемых на объект управляющим устройством;

$F$  – вектор возмущающих воздействий, оказываемых на объект внешней средой (другими системами);

$Y$  – вектор выходных (или измеряемых) переменных объекта.

Математическая модель объекта связывает между собой векторы  $X$ ,  $U$ ,  $F$ ,  $Y$ , т.е. показывает, как состояние объекта зависит от управляющих и возмущающих воздействий и как это отражается на измеряемых переменных объекта.

Теория автоматического управления в основном имеет дело с *динамическими объектами*, т.е. такими, состояние которых не только зависит от

выходных воздействий, но и является функцией времени. Это обусловлено, прежде всего, *инерционностью* объектов, связанной с их способностью накапливать энергию или вещество. Именно инерционность объектов создает основную трудность при построении системы управления, так как объекты реагируют на изменение управляющих воздействий не мгновенно, а с некоторой задержкой. С другой стороны, инерционность объектов является благоприятным фактором, поскольку препятствует быстрой реакции объектов на возмущающие воздействия. Это позволяет управляющему устройству скорректировать свое поведение и нейтрализовать действие возмущения прежде, чем оно вызовет значительное отклонение состояния объекта от желаемого.

Динамические объекты, как показано в следующей главе, описываются дифференциальными уравнениями и передаточными функциями.

Цель управления – это информация, с помощью которой можно определить желаемое состояние объекта в каждый момент времени. В общем случае цель управления формируется в виде определенного значения  $J^*$  некоторого функционала  $J$ , который называется критерием управления:

$$J = J(X, U, F). \quad (3)$$

Таким образом, цель управления можно представить как  $J = J^*$ .

На практике достичь точного выполнения цели управления чаще всего не удается и достаточно, чтобы модуль разности между достигнутым значением критерия  $J$  и желаемым  $J^*$  не превышал некоторой величины  $\delta$ :

$$|J - J^*| = |\Delta J| \leq \delta. \quad (4)$$

Величина  $\Delta J$  при этом характеризует качество управления.

В так называемых системах оптимального управления цель управления состоит в поиске максимума или минимума критерия, который в данном случае представляет собой критерий оптимальности. Таким образом, в оптимальных системах цель управления можно сформулировать как

$$J = J(X, U, F) \rightarrow \max(\min). \quad (5)$$

Зная цель управления и математическую модель объекта, можно решить *задачу управления*: найти и реализовать такие управляющие воздействия, чтобы обеспечивалось выполнение цели управления.

В системах автоматического управления управляющие воздействия формируются управляющим устройством, которое реализует так называемый *закон управления* – зависимость вида:

$$U = U(t, Y, F). \quad (6)$$

Таким образом, в общем случае управление формируется в функции времени, выходных переменных объекта и, возможно, возмущений, если последние измеряются.

Управление в функции времени подразумевает не только непосредственную зависимость управляющего воздействия от времени (управление по

программе), но и динамическую природу самого управляющего устройства. При этом в отличие от объекта динамические свойства управляющего устройства формируются «сознательно», с целью придания всей системе управления желаемых динамических свойств.

То, что управление осуществляется также в функции выходных (измеряемых) переменных объекта, является принципиально важным фактом. Большинство САУ являются *замкнутыми системами*, в которых «прямое» воздействие управляющего устройства на объект сопровождается «обратным» воздействием объекта на управляющее устройство. Это позволяет управляющему устройству получать информацию о текущем состоянии объекта, предсказывать его изменение, оценивать результаты управления и корректировать собственное поведение. Управление в функции выходных переменных объекта реализуется с помощью *обратных связей*, которые практически представляют собой измерительные преобразователи (датчики) и каналы передачи данных.

Формирование управления в функции возмущающих воздействий позволяет эффективно им противодействовать. При этом, если возмущения доступны для измерения, в ряде случаев теоретически возможно построить систему, вообще нечувствительную к ним.

*Регулирование* – частный случай управления, цель которого – поддержание заданного состояния объекта или его изменение в соответствии с заданием. Важно то, что в данном случае вектор желаемого состояния объекта в каждый момент времени известен. На практике желаемое состояние объекта вычисляется системами более высокого уровня или человеком. Системы автоматического регулирования (САР) находятся на самом нижнем уровне автоматизации производства.

Критерий регулирования можно записать в следующем виде:

$$J = e(t) = X^*(t) - X(t) \rightarrow \min, \quad (7)$$

где  $X^*(t)$  – вектор желаемого (заданного) состояния объекта;  $e(t)$  – так называемая *ошибка регулирования*.

Следовательно, цель регулирования состоит в минимизации ошибки регулирования, т.е. разницы между заданным и текущим состояниями объекта, в любой момент времени.

Системы автоматического регулирования разделяют на несколько классов по виду изменения задания.

В *системах стабилизации* заданное состояние объекта неизменно. Задача системы – поддержать это состояние, противодействуя возмущающим воздействиям, стремящимся его изменить. Системы стабилизации работают обычно в узком диапазоне изменения переменных объекта, что позволяет использовать для его описания простые модели.

В *системах воспроизведения* задание изменяется во времени. Задача системы – насколько это возможно, более быстрое и точное воспроизведение объектом заданного состояния. Системы воспроизведения делятся на *программные*, в которых заранее известна программа изменения переменных объ-

екта, и *следящие*, в которых эта программа неизвестна. Следящие системы являются наиболее сложными для проектирования, так как в данном случае математическое описание объекта должно быть адекватным во всем диапазоне изменения переменных, что во многих случаях требует применения сложных моделей.

## 2.2. Структура систем автоматического регулирования

Для наглядного представления системы автоматического регулирования как совокупности элементов и связей между ними используются структурные схемы. Под структурой системы понимают совокупность образующих ее частей, на которые система разделяется по тем или иным признакам, и связей между ними. Графическое изображение структуры называют структурной схемой.

В технике распространены три вида структурных схем:

- 1) *конструктивные*;
- 2) *функциональные*;
- 3) *алгоритмические*.

Составная часть конструктивной схемы – конструктивный блок, т.е. объединение ряда элементов в конструктивное целое.

Допустим, рассматривается система регулирования давления воды в трубопроводе на насосной станции (рис. 4).

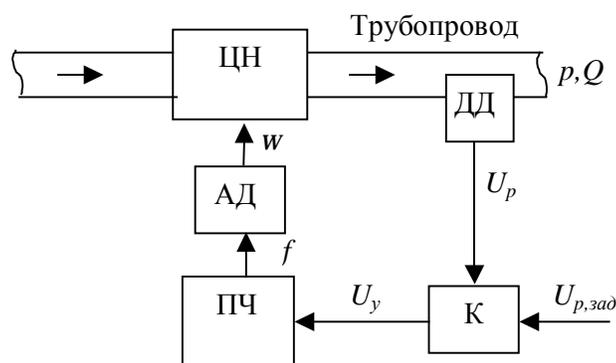


Рис. 4. Конструктивная схема САР.

Объектом регулирования являются трубопровод и подключенные к нему потребители воды. Регулируемая величина – давление в трубопроводе  $p$ . На объект оказывается возмущение в виде изменения расхода (потребления) воды  $Q$ , которое сказывается на давлении. При увеличении расхода давление падает и наоборот. Цель регулирования состоит в стабилизации давления для снижения числа аварий на трубопроводах и качественного водоснабжения потребителей.

Регулируют давление путем изменения производительности центробежного насоса ЦН, приводимого в движение асинхронным двигателем АД. Изменение угловой скорости вращения  $w$  двигателя осуществляется с помощью преобразователя частоты ПЧ, выходная частота которого  $f$  пропорцио-

нальна входному управляющему сигналу  $U_y$ . Этот сигнал формируется контроллером К в функции ошибки регулирования, т.е. разности между заданием по давлению  $U_{p,зад}$  и выходным сигналом  $U_p$  датчика давления ДД, пропорциональным действительному давлению в трубопроводе.

В функциональной схеме в блоки объединяются элементы, участвующие в выполнении определенной единой функции (сравнение, измерение, усиление, коррекция и т.п.). Таким образом, функциональная схема показывает, из каких функциональных элементов состоит САУ и как эти элементы связаны друг с другом.

На рис. 5 изображена функциональная схема типичной САР, которая подходит и для рассмотренной выше системы.

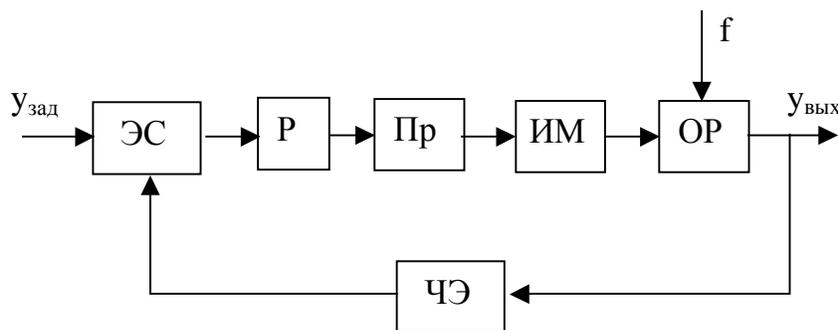


Рис. 5. Функциональная схема САР.

На рис. 5 используются следующие обозначения.

ОР – объект регулирования, его состояние характеризуется выходной величиной  $u_{вых}$ ;

ИМ – исполнительный механизм – техническое устройство, предназначено для непосредственного воздействия на объект; в нашем случае в качестве исполнительного механизма применяется центробежный насос, включая и приводящий его в движение асинхронный двигатель;

Пр – преобразователь, служит для управления исполнительным механизмом, его функцию в рассмотренной САР выполняет, очевидно, преобразователь частоты;

ЧЭ – чувствительный элемент, измерительное устройство, состоящее из первичного (датчика) и вторичного измерительных преобразователей, служащих для измерения выходной величины объекта; в нашем случае чувствительным элементом является датчик давления;

ЭС – элемент сравнения, сравнивает сигнал задания  $u_{зад}$  с сигналом чувствительного элемента и выдает сигнал разности между ними;

Р – регулятор, предназначен для формирования сигнала управления преобразователем.

Функции элемента сравнения и регулятора выполняет контроллер.

Частью алгоритмических структурных схем (или просто структурных схем) являются динамические звенья с выполняемыми ими математическими преобразованиями (рис. 6). Структурная схема составляется по уравнениям

звеньев системы, и по ней могут быть восстановлены уравнения всей САР. На структурной схеме звенья изображаются прямоугольниками; воздействия на них – подходящими к одной из сторон прямоугольника (входу) стрелками; выходные величины – стрелками, отходящими от противоположной стороны прямоугольника (выхода). Звену ставится в соответствие оператор преобразования входной величины в выходную (на рис.6 в качестве операторов используются *передаточные функции* звеньев, см. 3.2).

Сумматоры сигналов изображаются кружками, разделенными на секторы, слагаемые – стрелками, подходящими к секторам, сумма – стрелкой, отходящей от одного из секторов. Отрицательные слагаемые отмечаются или знаком минус у острия стрелки, или зачернением сектора, к которому подходит стрелка.

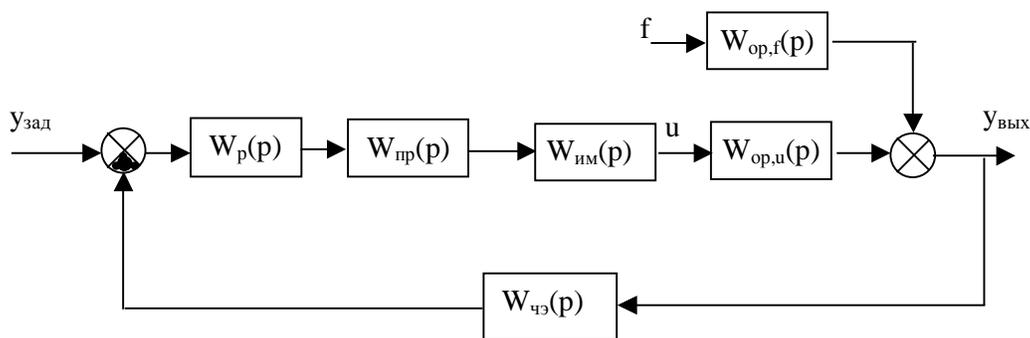


Рис. 6. Алгоритмическая схема САР.

Алгоритмическая схема может походить на функциональную. Но иногда для упрощения математических преобразований при исследовании ее изменяют, и внешнее сходство с функциональной схемой утрачивается.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

#### 3.1. Уравнения в пространстве состояний

Любой объект (система) описывается в пространстве состояний уравнениями вида:

$$\dot{X} = F_1(X, U), \quad (8)$$

$$Y = F_2(X, U), \quad (9)$$

где  $X$  – вектор независимых координат объекта (системы), однозначно описывающих его (ее) состояние (вектор переменных состояния);  $Y$  – вектор выходных (измеряемых) величин;  $U$  – вектор входных воздействий. В общем случае вектор  $U$  может включать как управляющие (задающие), так и возмущающие воздействия, однако часто возмущения «выносятся» в отдельный вектор.

Для линейных объектов и систем уравнения (8,9) принимают вид:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (10)$$

$$Y = CX + DU, \quad (11)$$

где  $A$  – квадратная матрица состояний;  $B$  – матрица управления;  $C$  – матрица выхода;  $D$  – так называемая матрица «прямого обхода» (управление  $U$  как бы «в обход» внутренних состояний непосредственно действует на выход  $Y$ ). Для реальных объектов и систем практически всегда  $D = 0$ .

Размеры матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяются размерностями векторов состояния, управления и выхода. Если  $X \in R^n$ ,  $U \in R^m$ ,  $Y \in R^l$ , то матрицы имеют следующие размеры:  $A - [n \times n]$ ,  $B - [n \times m]$ ,  $C - [l \times n]$ ,  $D - [l \times m]$ .

В качестве примера описания линейного объекта в пространстве состояний рассмотрим двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, регулируемый путем изменения напряжения якоря.

Ток якоря  $i$  и угловая скорость двигателя  $\omega$  измеряются датчиками, выходные сигналы которых прямо пропорциональны измеряемым величинам:

$$u_i = k_i i, \quad (12)$$

$$u_\omega = k_\omega \omega. \quad (13)$$

Нагрузка двигателя характеризуется моментом сил статического сопротивления  $M_c$  и суммарным приведенным моментом инерции  $J$ .

Уравнение электрического равновесия якорной цепи двигателя имеет вид:

$$u_{я} = L \frac{di}{dt} + Ri + C_e \Phi \omega = L \frac{di}{dt} + Ri + K_e \omega, \quad (14)$$

где  $L$ ,  $R$  – индуктивность и активное сопротивление якоря;  $\Phi$  – магнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения двигателя, который в нашем случае является постоянным;  $C_e$  – конструктивный коэффициент машины.

Уравнение механического равновесия моментов на валу двигателя:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(M - M_c) = \frac{1}{J}(C_e \Phi i - M_c) = \frac{1}{J}(K_e i - M_c), \quad (15)$$

где  $M$  – электромагнитный момент двигателя.

Анализ уравнений (14), (15) показывает, что в совокупности они описывают поведение двух непрерывно изменяющихся величин: тока якоря  $i$  и угловой скорости двигателя  $\omega$ . Эти величины и примем в качестве переменных состояния:

$$X = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Управление двигателем осуществляется путем изменения напряжения, приложенного к якорю, в качестве возмущения примем момент сопротивления на валу, поэтому вектор входных величин

$$U = \begin{pmatrix} u_{\text{я}} \\ M_c \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Выходными (измеряемыми) величинами являются выходные напряжения датчиков тока и скорости:

$$Y = \begin{pmatrix} u_i \\ u_{\omega} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Преобразуем уравнения (14), (15) к виду:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{K_e}{L}\omega + \frac{1}{L}u_{\text{я}}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{K_e}{J}i - \frac{1}{J}M_c. \end{cases} \quad (19)$$

В матричной форме система (19) представляется

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_e}{J} & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix} U. \quad (20)$$

Уравнение выхода:

$$Y = \begin{pmatrix} k_i & 0 \\ 0 & k_{\omega} \end{pmatrix} X + D = 0. \quad (21)$$

По уравнениям (20), (21) составим структурную схему системы в пространстве состояний (рис. 7).

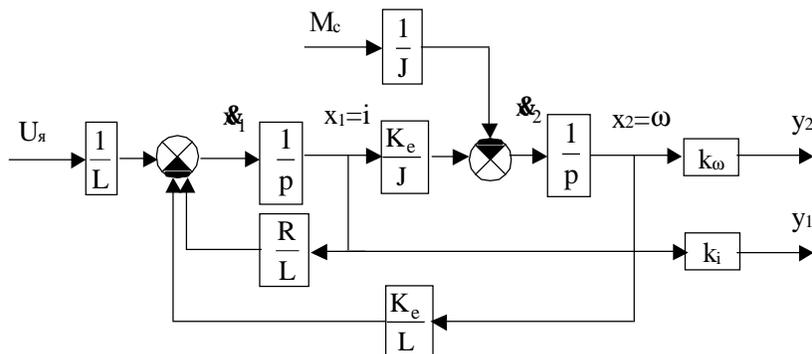


Рис. 7. Схема модели ДПТ.

Структурные схемы, подобные приведенной на рис. 7, строятся следующим образом. Сначала по числу переменных состояния системы выставляются блоки интегрирования (*интеграторы*), условно обозначенные на рис. 7 дробями  $1/p$ . Смысл данного обозначения будет понятен ниже. В общем случае рекомендуется располагать интеграторы вертикально один под другим, однако часто структура модели такова, что интеграторы располагаются «последовательно», как на рис. 7. На выходе каждого интегратора формируется соответствующая переменная состояния, а на входе – ее производная. Производные переменных состояний определяются правыми частями уравнений состояний, которые, в свою очередь, представляют суммы сигналов. Поэтому перед интеграторами обычно ставятся сумматоры. На эти сумматоры через соответствующие блоки коэффициентов подаются входные сигналы и сигналы состояния (обратные связи). Для формирования выходных сигналов системы также используются блоки коэффициентов.

### 3.2. Передаточные функции

*Передаточной функцией* звена или системы называют отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} \quad (22)$$

при

$$x_{\text{ВЫХ}}(0) = \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt}(0) = \frac{d^2x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2}(0) = \dots = \frac{d^{n-1}x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}}(0) = 0, \quad (23)$$

где  $n$  – порядок дифференциального уравнения, описывающего звено или систему;  $p$  – оператор Лапласа.

Как известно [1], изображение по Лапласу функции  $f(t)$  находят по формуле:

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (24)$$

Обратное преобразование вычисляется следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} f(p)e^{pt} dp. \quad (25)$$

Зная передаточную функцию звена (системы) и входное воздействие  $x_{вх}(t)$ , можно определить его (ее) реакцию на это воздействие при нулевых начальных условиях. Для этого нужно, предварительно рассчитав по (24) изображение входной величины  $x_{вх}(p)$ , определить изображение выходной величины

$$x_{вых}(p) = x_{вх}(p)W(p) \quad (26)$$

и далее с помощью обратного преобразования (25) вычислить  $x_{вых}(t)$ .

Линейные звенья и системы автоматического регулирования описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x_{вых}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{вых}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_{вых}}{dt} + a_0 x_{вых} = \\ = b_m \frac{d^m x_{вх}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{вх}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_{вх}}{dt} + b_0 x_{вх}. \end{aligned} \quad (27)$$

В соответствии с одной из теорем операционного исчисления изображение  $k$ -й производной функции  $f(t)$  при нулевых начальных условиях:

$$\frac{d^k f}{dt^k} \Rightarrow p^k f(p) \quad (28)$$

при

$$f(0) = \frac{df}{dt}(0) = \frac{d^2 f}{dt^2}(0) = \dots = \frac{d^{k-1} f}{dt^{k-1}}(0) = 0. \quad (29)$$

Кроме того, известно, что изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации изображений.

Поэтому, преобразовав по Лапласу левую и правую части уравнения (27), получим:

$$\begin{aligned}
 a_n p^n x_{\text{ВЫХ}}(p) + a_{n-1} p^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}(p) + \dots + a_1 p x_{\text{ВЫХ}}(p) + a_0 x_{\text{ВЫХ}}(p) = \\
 = b_m p^m x_{\text{ВХ}}(p) + b_{m-1} p^{m-1} x_{\text{ВХ}}(p) + \dots + b_1 p x_{\text{ВХ}}(p) + b_0 x_{\text{ВХ}}(p),
 \end{aligned}
 \quad (30)$$

откуда

$$W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (31)$$

Таким образом, зная дифференциальное уравнение линейного звена (системы), можно легко получить его передаточную функцию, и наоборот. С этой точки зрения дифференциальные уравнения и передаточные функции, – эквивалентные понятия. Однако, как мы увидим далее, передаточными функциями легче оперировать при построении математического описания системы по описанию его элементов.

Как видно из (31), передаточная функция представляет собой отношение двух полиномов и поэтому может быть представлена в виде

$$W(p) = k \frac{\prod_{i=1}^m (p + z_i)}{\prod_{j=1}^n (p + p_j)}, \quad (32)$$

где  $z_i$  – корни числителя передаточной функции, называемые ее нулями;  $p_j$  – корни ее знаменателя, называемые полюсами;  $k = \frac{b_m}{a_n}$  – «согласующий» коэффициент.

Нули и полюса передаточной функции полностью определяют динамику звена (системы). Они могут быть действительными числами или парами комплексно сопряженных чисел  $\alpha \pm j\beta$  (рис. 8). Нули и полюса, расположенные в левой части комплексной плоскости (имеющие отрицательные вещественные части), называются левыми, расположенные в правой полуплоскости – правыми. На рис. 8 левыми являются  $z_1, p_1, p_2$  и  $p_3$ , а правым –  $z_2, p_7$ . Кроме левых и правых, нули и полюса могут быть чисто мнимыми ( $p_4, p_5$ ) и нулевыми ( $p_6$ ).

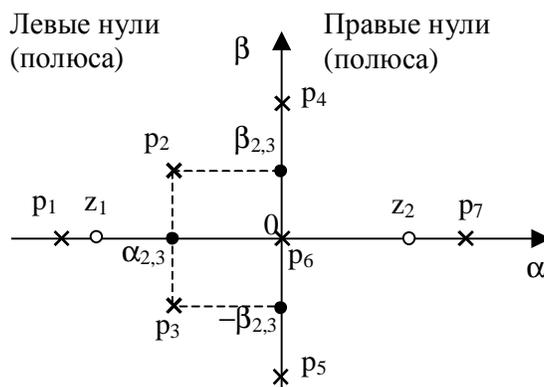


Рис. 8. Нули и полюса системы.

Имея передаточную функцию звена или системы, можно получить его (ее) описание в пространстве состояний в форме уравнений (10,11). Но поскольку передаточная функция не несет информации о внутренних координатах системы (переменных состояния), а лишь связывает ее входы и выходы, такое описание будет иметь формальный характер. Одной и той же передаточной функции соответствует бесконечное множество вариантов ее представлений уравнениями (10,11), различающихся набором переменных состояния (базисом). Выбор базиса зависит от метода преобразований.

Известно несколько таких методов. Рассмотрим один из них – метод прямого программирования, позволяющий получить уравнения в пространстве состояния с базисом, состоящим из *фазовых* координат. Фазовыми называют координаты, связанные между собой процедурами интегрирования–дифференцирования. Так, если речь идет о системе, одной из координат которой является перемещение (линейное или угловое), то другими будут скорость, ускорение и т.д. Число координат определяется порядком передаточной функции.

Пусть, например, имеется система с одним выходом и одним входом, описываемая передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{2p^2 + p + 4}. \quad (33)$$

Преобразования выполняются в несколько шагов.

1. Числитель и знаменатель  $W(p)$  разделим на слагаемое знаменателя, имеющее максимальную степень при  $p$ . Тем самым перейдем от операции дифференцирования к операции интегрирования:

$$W(p) = \frac{0,5 + p^{-1} + 2p^{-2}}{1 + 0,5p^{-1} + 2p^{-2}}. \quad (34)$$

2. Введем вспомогательную переменную  $E(p)$ , равную частному от деления изображения входа  $U(p)$  на знаменатель (34):

$$E(p) = \frac{U(p)}{1 + 0,5p^{-1} + 2p^{-2}}. \quad (35)$$

Из (35) получим:

$$E(p) = U(p) - 0,5p^{-1}E(p) - 2p^{-2}E(p). \quad (36)$$

3. Выразим выход системы через переменную  $E(p)$ . Для этого умножим эту переменную на числитель передаточной функции:

$$Y(p) = 0,5 \cdot E(p) + p^{-1}E(p) + 2p^{-2}E(p). \quad (37)$$

4. На основании (36) и (37) построим структурную схему системы.

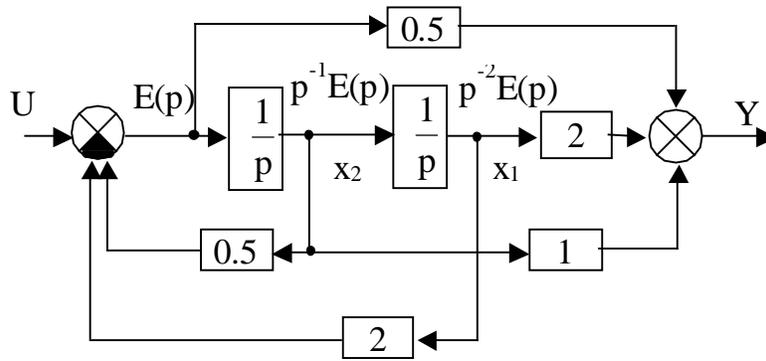


Рис. 9. Структурная схема системы.

На схеме обозначим сигналы на выходах интеграторов переменными  $x_1$  и  $x_2$  (порядок расстановки в общем случае произволен, однако рекомендуется принять его таким, как на схеме). Эти сигналы и будут сигналами по переменным состояниям.

По структурной схеме составим уравнения в виде (10,11):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0,5x_2 + U, \\ Y = 2x_1 + x_2 + 0,5x_2 = 2x_1 + x_2 + 0,5 \cdot (-2x_1 - 0,5x_2 + U) = \\ = x_1 + 0,75x_2 + 0,5U. \end{cases} \quad (38)$$

Эти же уравнения в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U, \\ Y = (1 \quad 0,75) X + 0,5 \cdot U. \end{cases} \quad (39)$$

Следовательно, матрицы описания объекта в пространстве состояний будут следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0,75), \quad D = 0,5. \quad (40)$$

Ценность рассмотренного метода состоит в том, что он позволяет понять принципы преобразования и построить структурную схему системы. На практике, если порядок числителя передаточной функции меньше порядка ее знаменателя, можно определить матрицы А, В, С и D непосредственно по передаточной функции, пользуясь знанием *канонического представления системы* с одним входом и одним выходом в пространстве состояний.

Система с одним входом и одним выходом с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{c_n p^{n-1} + c_{n-1} p^{n-2} + \dots + c_2 p + c_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1} \quad (41)$$

может быть описана уравнениями в пространстве состояний (10,11) с матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n), \quad D = 0. \quad (42)$$

Такое описание и является каноническим представлением.

### 3.3. Переходная и частотные характеристики

Переходная характеристика звена (системы)  $h(t)$  – это реакция системы на *единичное ступенчатое воздействие*  $I(t)$  при нулевых начальных условиях. Единичное ступенчатое воздействие описывается функцией времени:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (43)$$

Изображение такого входного сигнала [1]:

$$I(p) = \frac{1}{p}. \quad (44)$$

Следовательно, изображение переходной характеристики:

$$h(p) = \frac{W(p)}{p}. \quad (45)$$

Переходные характеристики полностью определяются свойствами звена или системы и поэтому используются для анализа качества переходных процессов. Для *устойчивых* линейных звеньев и систем (см. 4.2.1) они имеют вид, показанный на рис. 10.

Характеристики типа 1 называются *апериодическими*, характеристики типа 2 – *колебательными*.

Установившееся значение переходной характеристики можно определить непосредственно из дифференциального уравнения или передаточной функции звена. В первом случае в уравнении необходимо приравнять к нулю все производные входной и выходной величин. Тогда из (27), например, получим:

$$a_0 x_{\text{вых,уст}} = b_0 x_{\text{вх,уст}}, \quad (46)$$

где  $x_{\text{вх,уст}}$  и  $x_{\text{вых,уст}}$  – установившиеся значения входного и выходного сигналов звена (системы).

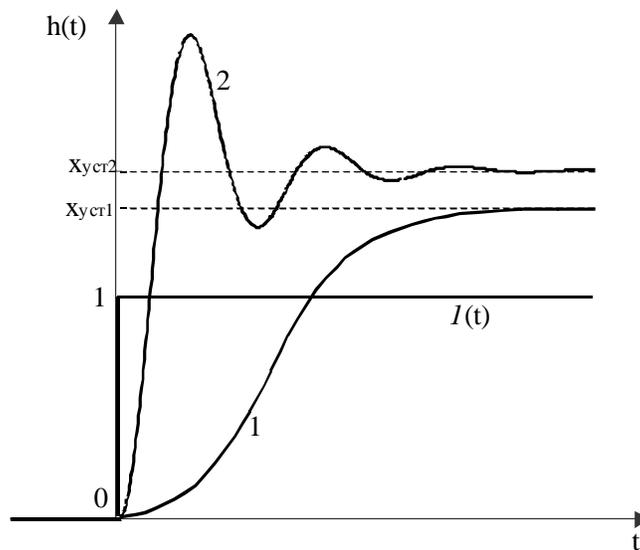


Рис. 10. Переходные характеристики устойчивых звеньев и систем.

Из (46) следует, что

$$x_{\text{ВЫХ,УСТ}} = \frac{b_0}{a_0} x_{\text{ВХ,УСТ}} = kx_{\text{ВХ,УСТ}} \quad (47)$$

Величина  $k$  называется *коэффициентом передачи* звена (системы). В нашем случае  $x_{\text{ВХ,УСТ}}=1$ , откуда следует важный факт: *установившееся значение переходной характеристики равно коэффициенту передачи системы.*

Чтобы определить установившееся значение переходной характеристики по передаточной функции, необходимо положить в ней  $p=0$  и тем самым получить коэффициент передачи.

Частными случаями, следующими из уравнения (47), являются:

1)  $b_0 = 0$ ,  $k = 0$ , т.е. переходная характеристика со временем стремится к нулю. Такие характеристики могут иметь системы автоматического регулирования, когда под  $x_{\text{ВХ}}$  понимается возмущающее воздействие, и это означает отсутствие влияния возмущения на установившееся значения выходной величины системы;

2)  $a_0 = 0$ ,  $k = \infty$ , т.е. переходная характеристика неограниченно возрастает во времени. В данном случае в структуре математического описания звена присутствует хотя бы один так называемый *свободный интегратор*, который непрерывно увеличивает входной сигнал, интегрируя постоянный по уровню сигнал на входе. Такие звенья называются *нейтральными* (см. 4.2.1).

Частотные характеристики описывают вынужденные колебания на выходе элемента (системы), вызванные гармоническим воздействием на его (ее) вход:

$$x_{\text{ВХ}} = x_{\text{ВХ,МАХ}} \sin(\omega t), \quad (48)$$

где  $x_{\text{ВХ,МАХ}}$  – амплитуда;  $\omega$  – частота колебаний.

Вынужденные колебания на выходе линейного элемента (системы) будут иметь ту же частоту, что и на входе, но отличаться амплитудой и фазой:

$$x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВЫХ,макс}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (49)$$

Амплитудно-частотной характеристикой  $A(\omega)$  называется зависимость отношения амплитуд  $x_{\text{ВЫХ,макс}}/x_{\text{ВХ,макс}}$  от частоты  $\omega$ :

$$A(\omega) = \frac{x_{\text{ВЫХ,макс}}(\omega)}{x_{\text{ВХ,макс}}(\omega)}. \quad (50)$$

Фазочастотной характеристикой  $\Phi\text{ЧХ}$  называется зависимость от частоты фазового сдвига выходных колебаний по отношению к входным –  $\varphi(\omega)$ .

На рис. 11 показаны АЧХ и ФЧХ звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}.$$

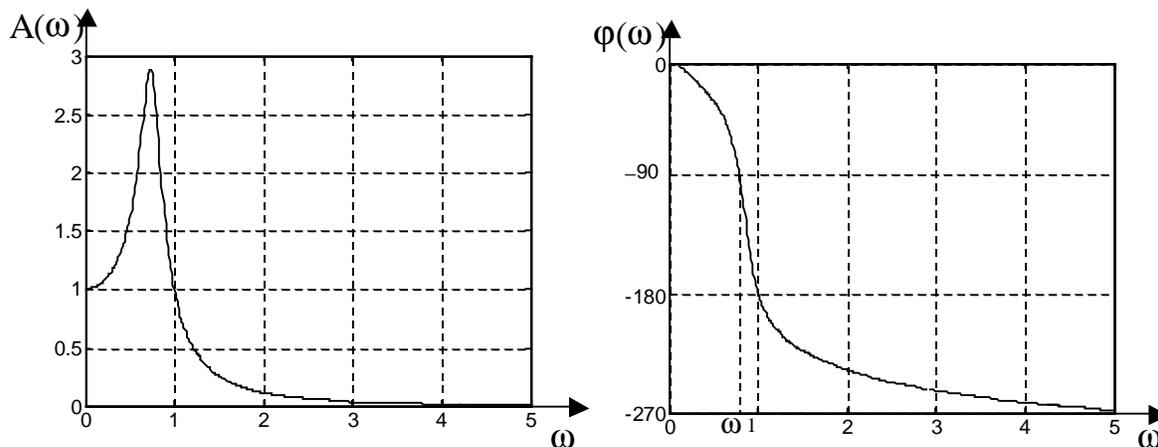


Рис. 11. АЧХ и ФЧХ звена.

Амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики можно объединить в одну амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ), используя их в качестве полярных координат (рис. 12):

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (51)$$

Характеристики  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  называются соответственно вещественной и мнимой частотными характеристиками.

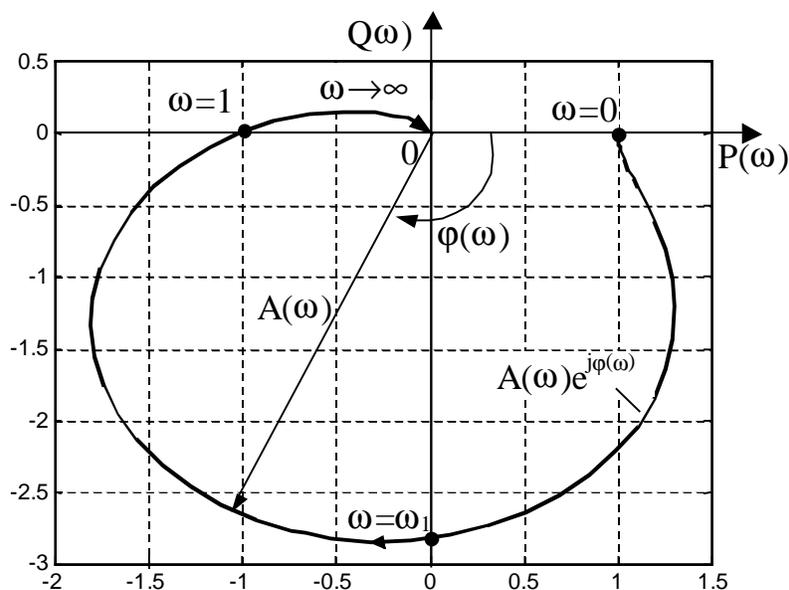


Рис. 12. АФЧХ звена.

Связь между характеристиками  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ , с одной стороны, и  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , – с другой, очевидна:

$$\begin{cases} P(\omega) = A(\omega) \cos(\varphi(\omega)); \\ Q(\omega) = A(\omega) \sin(\varphi(\omega)). \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \end{cases} \quad (53)$$

АФЧХ звена или системы можно получить непосредственно по передаточной функции, которая, как показано, представляет собой отношение двух полиномов

$$W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}. \quad (54)$$

Если под оператором « $p$ » понимать оператор дифференцирования, то дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции (54), можно записать следующим образом:

$$x_{\text{ВЫХ}} D(p) = x_{\text{ВХ}}(p) N(p). \quad (55)$$

Представим колебания на входе и выходе звена в виде:

$$x_{\text{ВХ}} = x_{\text{ВХ, max}} e^{j\omega t}, \quad (56)$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВЫХ, max}} e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (57)$$

Подставим (56) и (57) в (55). При этом учтем следующие очевидные выражения для  $k$ -х производных входного и выходного сигналов:

$$p^k x_{\text{вх}} = (j\omega)^k x_{\text{вх,макс}} e^{j\omega t}, \quad (58)$$

$$p^k x_{\text{вых}} = (j\omega)^k x_{\text{вых,макс}} e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (59)$$

Так как слева и справа в уравнении (55) стоят суммы производных, то в результате получим

$$D(j\omega)x_{\text{вых,макс}} e^{j(\omega t + \varphi)} = N(j\omega)x_{\text{вх,макс}} e^{j\omega t}, \quad (60)$$

откуда

$$\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{x_{\text{вых,макс}} e^{j(\omega t + \varphi)}}{x_{\text{вх,макс}} e^{j\omega t}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (61)$$

Следовательно:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (62)$$

Таким образом, АФЧХ линейного звена или САР в целом можно получить путем замены в передаточной функции оператора « $p$ » на оператор « $j\omega$ ».

Порядок преобразований при этом следующий. После подстановки  $p = j\omega$  получаем

$$W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{P_N(\omega) + jQ_N(\omega)}{P_D(\omega) + jQ_D(\omega)}. \quad (63)$$

Освобождаясь от мнимости в знаменателе, окончательно имеем

$$W(j\omega) = \frac{(P_N(\omega) + jQ_N(\omega))(P_D(\omega) - jQ_D(\omega))}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (64)$$

где

$$\begin{cases} P(\omega) = \frac{P_N(\omega)P_D(\omega) + Q_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}, \\ Q(\omega) = \frac{Q_N(\omega)P_D(\omega) - P_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}. \end{cases} \quad (65)$$

При исследовании динамических свойств и синтезе систем автоматического регулирования вместо АЧХ часто используется *логарифмическая амплитудно-частотная характеристика* (ЛАЧХ), получаемая через десятичный логарифм АЧХ. В таком случае ЛАЧХ и ФЧХ представляются совместно в виде графиков в прямоугольной системе координат. По оси абсцисс откладывается частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе, а по оси ординат – значения

ЛАЧХ в децибелах и углов ЛФХ в градусах (или радианах) в равномерном масштабе (рис. 13).

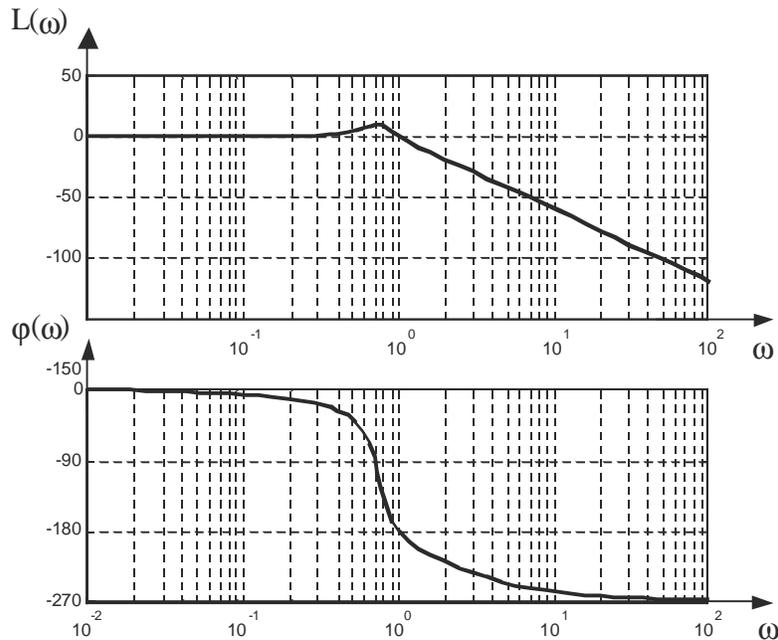


Рис. 13. Логарифмические частотные характеристики звена.

Терминология, которой пользуются при построении логарифмических частотных характеристик, заимствована теорией автоматического регулирования из акустики.

Для измерения отношения двух величин, изменяющихся в широком диапазоне, используется логарифмическая шкала, на которой равномерной единицей является *октава* или *декада*.

Если две частоты отличаются друг от друга в два раза, т.е.  $\omega_2/\omega_1 = 2$ , то говорят, что частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отличаются друг от друга на одну октаву. Если это отношение равно десяти, т.е.  $\omega_2/\omega_1 = 10$ , то говорят, что эти частоты отличаются на одну декаду.

При измерении отношений двух мощностей  $N_1$  и  $N_2$  говорят, что они отличаются на один «бел», если  $\lg \frac{N_2}{N_1} = 1$ . Это сравнительно большая единица измерения. При рассмотрении конкретных задач приходится иметь дело с более мелкой единицей, называемой децибелом. Данная величина определяется следующим равенством:

$$10 \lg \frac{N_2}{N_1} = 1. \quad (66)$$

В этом случае говорят, что  $N_1$  и  $N_2$  отличаются на один децибел. От измерения мощности можно перейти к измерению амплитуды сигнала. Как известно, мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды:

$$N_1 \equiv x_1^2; N_2 \equiv x_2^2. \quad (67)$$

Если

$$10\lg \frac{N_2}{N_1} = 10\lg \frac{x_2^2}{x_1^2} = 1, \quad (68)$$

то для отношения амплитуд сигналов, отличающихся на один децибел, получаем:

$$20\lg \frac{x_2}{x_1} = 1. \quad (69)$$

Поэтому ЛАЧХ определяется следующим образом:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega). \quad (70)$$

Существует класс линейных систем, динамические свойства которых полностью описываются одной из двух характеристик:  $A(\omega)$  ( $L(\omega)$ ) или  $\varphi(\omega)$ . Другими словами, между этими характеристиками существует однозначная связь. Это класс так называемых *минимально-фазовых систем*. Свое название такие системы получили по той причине, что имеют минимальную (по модулю)  $\varphi(\omega)$  среди всех систем, обладающих одной и той же амплитудно-частотной характеристикой. Доказано, что минимально-фазовые системы описываются передаточными функциями, имеющими только левые нули и полюса. Отметим, что для всех линейных систем (необязательно минимально-фазовых) однозначно зависящими между собой характеристиками являются  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ .

### 3.4. Элементарные динамические звенья САР

Элементарными будем называть динамические звенья, имеющие неразложимые на множители передаточные функции первого или второго порядков. Часто такими звеньями представляются многие реальные элементы САР, хотя в большинстве случаев подобное описание является упрощенным.

Усилительное (безынерционное) звено описывается уравнением

$$x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}. \quad (71)$$

Коэффициент  $k$  называется коэффициентом усиления, если  $x_{\text{вх}}$  и  $x_{\text{вых}}$  – сигналы одной физической природы, или коэффициентом передачи, если физическая природа этих сигналов различна. Согласно уравнению звена выходной сигнал повторяет входной, усиленный по модулю в  $k$  раз. Строго говоря, реальных безынерционных звеньев не бывает – любые процессы преобразования энергии или информации занимают некоторое время. Однако если инерционность некоторого звена системы намного меньше инерционности других

звеньев, ею целесообразно пренебречь, так как это упростит математическое описание системы, не снижая его адекватности. Например, присутствующие во многих САР полупроводниковые усилители можно считать безынерционными звеньями, так как время преобразования (усиления) сигнала в них на несколько порядков меньше времени реакции на управляющий сигнал объектов управления и исполнительных механизмов.

Передаточная функция усилительного звена не имеет нулей и полюсов:

$$W(p) = k. \quad (72)$$

Амплитудно-частотная характеристика усилительного звена:

$$W(j\omega) = k. \quad (73)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg k. \quad (74)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = 0. \quad (75)$$

Интегрирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = kx_{\text{ВХ}}. \quad (76)$$

Как видно из (76), выходной сигнал интегрирующего звена пропорционален интегралу от входного:

$$x_{\text{ВЫХ}} = k \int_0^t x_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau. \quad (77)$$

Передаточная функция звена не имеет нулей, но имеет один нулевой полюс:

$$W(p) = \frac{k}{p}. \quad (78)$$

Переходная характеристика звена определяется уравнением

$$x_{\text{ВЫХ}} = kt \quad (79)$$

и представляет собой линейно возрастающий во времени сигнал.

Амплитудно-частотная характеристика звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}. \quad (80)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (81)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (82)$$

Это прямая, пересекающая ось абсцисс при частоте  $\omega = k$ . Определим ее наклон. Для этого сравним значения  $L(\omega)$  на двух частотах, отличающихся на одну декаду:  $\omega_1$  и  $\omega_2 = 10\omega_1$ .

$$L(\omega_1) - L(\omega_2) = -20 \lg(T\omega_1) + 20 \lg(T\omega_2) = -20 \lg(T\omega_1) + 20 + 20 \lg(T\omega_1) = 20. \quad (83)$$

Следовательно, наклон прямой равен  $-20$  дБ/дек (рис. 14).

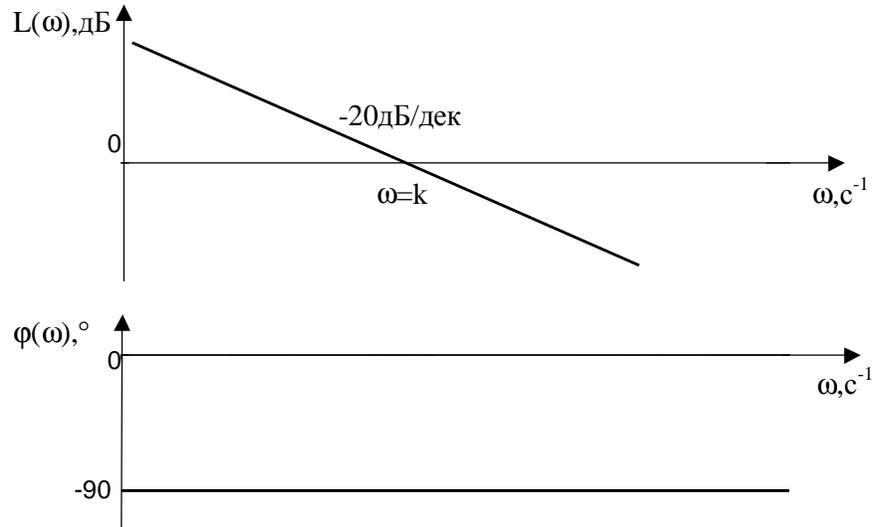


Рис. 14. Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена.

Апериодическое звено (инерционное звено первого порядка) описывается дифференциальным уравнением вида

$$T \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}, \quad (84)$$

где  $T$  – постоянная времени звена  $\text{с}^{-1}$ ;  $k$  – его коэффициент передачи (усиления).

Передаточная функция аperiодического звена:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (85)$$

Она имеет единственный полюс  $p = -1/T$ .

Переходная характеристика звена показана на рис. 15.

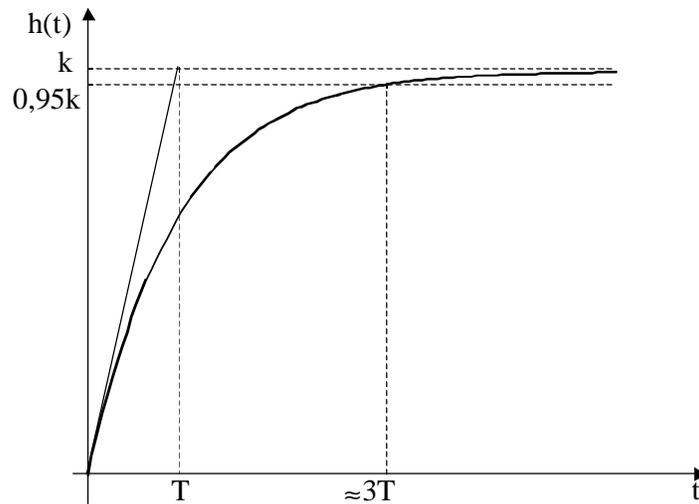


Рис. 15. Переходная характеристика аperiodического звена.

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (86)$$

Постоянная времени аperiodического звена имеет определенный физический смысл – это время, в течение которого выходная величина достигла бы установившегося значения, если бы изменялась с постоянной начальной скоростью. Действительно, из (84) при  $x_{вх} = 1$ ,  $x_{вых} = 0$  получаем

$$\frac{dx_{вых}}{dt}(0) = \frac{k}{T}. \quad (87)$$

Откуда время достижения установившегося состояния

$$t_y = k / \frac{dx_{вых}}{dt}(0) = T. \quad (88)$$

Амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}. \quad (89)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T\omega). \quad (90)$$

Логарифмируя (89), получим ЛАЧХ аperiodического звена:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}. \quad (91)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- 1) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20\lg k$  ;
- 2) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20\lg k - 20\lg(T\omega)$ .

Первая асимптота – горизонтальная линия на уровне  $20lgk$ , вторая – прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек.

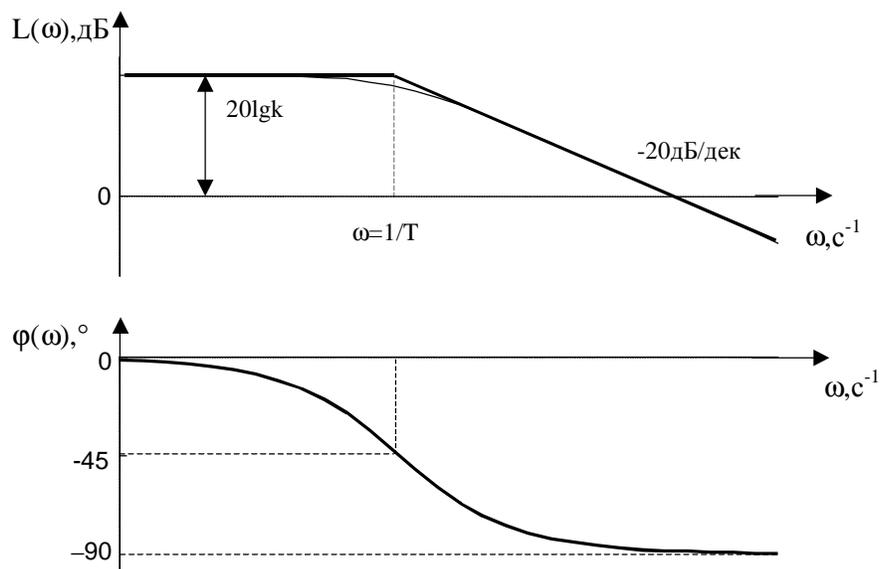


Рис. 16. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена.

Пересекаются асимптоты в точке  $\omega=1/T$ . На этой же частоте сама ЛАХ в наибольшей степени отличается от асимптот (отличие  $\Delta L \approx 3$  дБ).

Колебательное звено описывается дифференциальным уравнением второго порядка, которое можно привести к виду

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + 2T\xi \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad (92)$$

где  $T$  – постоянная времени звена,  $s^{-1}$ ;  $k$  – коэффициент передачи звена;  $\xi$  – коэффициент демпфирования.

Из (92) получим передаточную функцию звена

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (93)$$

Передаточная функция имеет пару комплексно сопряженных полюсов

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad (94)$$

где

$$\alpha = -\frac{\xi}{T}, \quad \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}. \quad (95)$$

Переходная характеристика колебательного звена может быть выражена через его полюса:

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin \left( \beta t - \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right) \quad (96)$$

или через параметры передаточной функции:

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right). \quad (97)$$

Как видно из (96), переходная характеристика колебательного звена представляет собой сумму постоянной величины, равной коэффициенту передачи  $k$ , и затухающей синусоиды с частотой  $\beta$ . Скорость затухания синусоиды определяется вещественной частью полюсов  $\alpha$ .

Переходные характеристики колебательных звеньев при различных значениях постоянных времени и коэффициента демпфирования показаны на рис. 17.

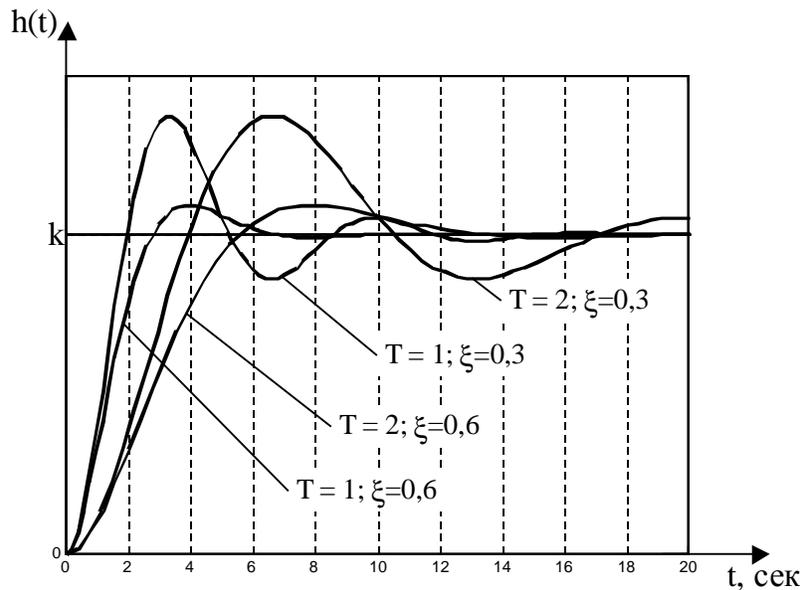


Рис. 17. Переходные характеристики колебательных звеньев.

Анализ выражения (97), а также рис. 17 показывают влияние параметров передаточной функции на вид переходной характеристики.

Увеличение постоянной времени  $T$  ведет к снижению скорости затухания и частоты колебаний, что в свою очередь дает увеличение длительности переходной характеристики. Размах колебаний остается неизменным.

Увеличение коэффициента демпфирования  $\xi$  ведет к увеличению скорости затухания колебаний и уменьшению их размаха и частоты, т.е. к подавлению (демпфированию) колебаний.

Отметим, что при  $\xi \geq 1$  полюса звена становятся отрицательными вещественными числами:

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T}, \quad (98)$$

и, следовательно, передаточную функцию (93) можно представить в виде произведения двух аperiodических звеньев:

$$W(p) = \frac{-kp_1}{p-p_1} \cdot \frac{-p_2}{p-p_2} = \frac{k}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 p + 1}, \quad (99)$$

где  $T_1 = |1/p_1|$ ;  $T_2 = |1/p_2|$ .

Такое звено называется *aperiodическим второго порядка* и, очевидно, не является элементарным.

С другой стороны, при  $\xi=0$  из (97) получаем:

$$h(t) = k \left( 1 - \sin \left( \frac{1}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) \right) = k \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{T} t \right) \right). \quad (100)$$

Это уравнение незатухающих колебаний относительно уровня  $h = k$  с частотой  $\omega = 1/T$  и амплитудой, равной коэффициенту передачи.

Звено, у которого  $\xi=0$ , называется *консервативным*.

Амплитудно-частотная характеристика колебательного звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}. \quad (101)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(j\omega) = -\arctg \left( \frac{2\xi T \omega}{1-T^2\omega^2} \right). \quad (102)$$

ЛАЧХ звена имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \quad (103)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

а) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;

б) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 40 \lg T \omega$ .

Первая асимптота является горизонтальной прямой, уровень которой  $20 \lg k$ , вторая – прямая с наклоном  $-40$  дБ/дек (рис.18).

При значениях коэффициента демпфирования  $0,5 < \xi < 1$  характеристика близка к ломаной, образованной двумя этими асимптотами. Если же  $\xi < 0,5$ , то имеет место заметный «горб» в ЛАХ на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (104)$$

который может быть рассчитан следующим образом:

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (105)$$

В упрощенных расчетах можно принять

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi}, \quad \omega_k = \frac{1}{T}. \quad (106)$$

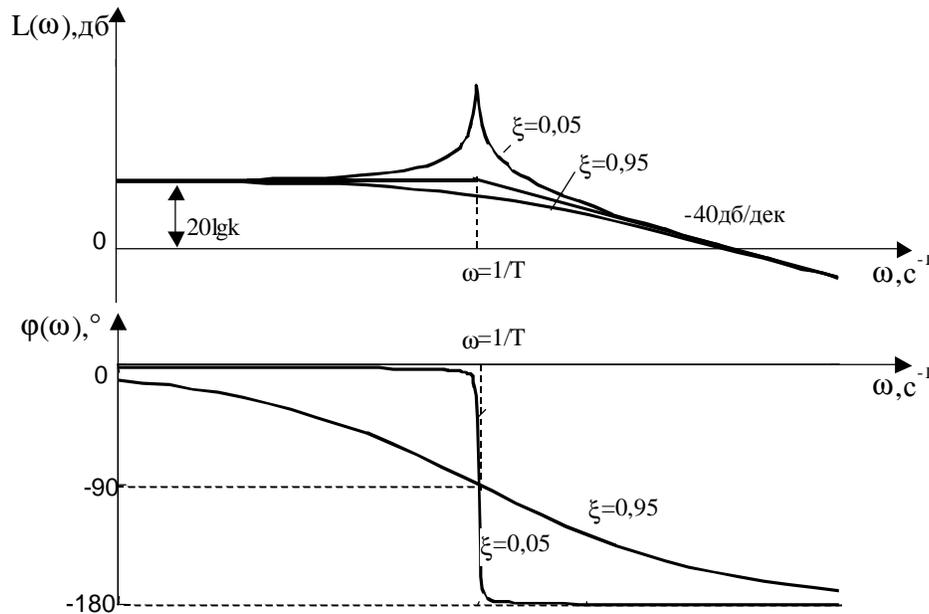


Рис. 18. Логарифмические частотные характеристики колебательного звена.

Выше рассмотрены элементарные звенья, передаточные функции которых имеют только полюса. Из них с помощью последовательного соединения может быть составлена система с передаточной функцией, заданной любым набором левых полюсов.

Далее рассмотрим звенья, передаточные функции которых имеют только нули. Это так называемые *дифференцирующие звенья*. Порядки числителей их передаточных функций больше порядков знаменателей, и, следовательно, «в чистом виде» эти звенья не реализуемы. Они не могут быть представлены в пространстве состояний, а их переходные характеристики в момент времени  $t = 0$  равны бесконечности. Однако поскольку в общем случае передаточные функции реальных звеньев или САР в целом имеют нули, дифференцирующие звенья представляют определенный интерес. В частности, представляют интерес их частотные характеристики, которыми в дальнейшем мы и ограничимся.

При этом необходимо заметить, что поскольку передаточные функции звеньев, имеющих только нули, обратны передаточным функциям, имеющим только полюса, в том же отношении стоят и их частотные характеристики. Действительно, пусть:

$$W_1(p) = \frac{1}{W_2(p)}. \quad (107)$$

Тогда

$$W_1(j\omega) = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} = \frac{1}{W_2(j\omega)} = \frac{1}{A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}} = (A_2(\omega))^{-1}e^{-j\varphi_2(\omega)}, \quad (108)$$

и, следовательно:

$$A_1(\omega) = (A_2(\omega))^{-1}; \quad (109)$$

$$\varphi_1(\omega) = -\varphi_2(\omega). \quad (110)$$

Из (109) очевидно, что  $L(\omega_1) = -L(\omega_2)$ .

Идеальное дифференцирующее звено описывается дифференциальным уравнением:

$$x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}. \quad (111)$$

Его передаточная функция

$$W(p) = kp. \quad (112)$$

Амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего звена:

$$A(\omega) = k\omega. \quad (113)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (114)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega. \quad (115)$$

Это прямая с наклоном 20 дБ/дек, проходящая через ось абсцисс при частоте  $\omega=1/k$ .

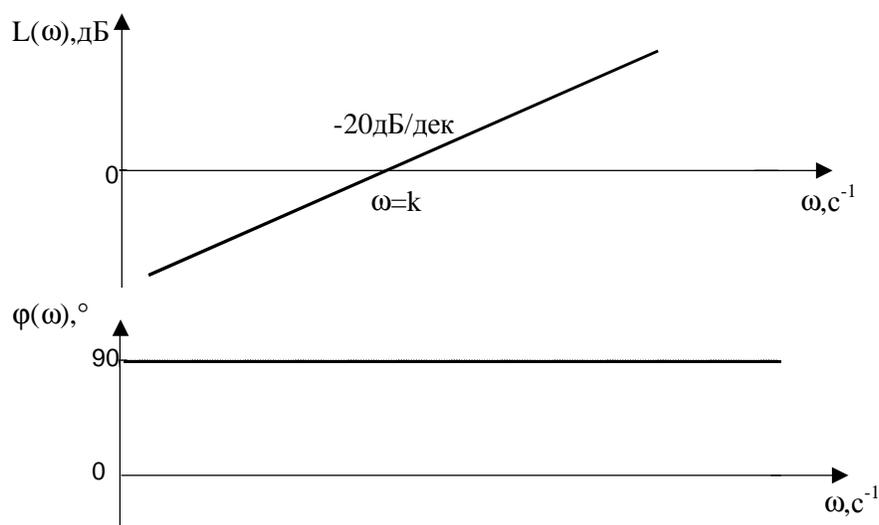


Рис. 19. Логарифмические частотные характеристики идеального дифференцирующего звена.

Идеальное форсирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$x_{\text{вых}} = k \left( T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + 1 \right). \quad (116)$$

Звено имеет передаточную функцию

$$W(p) = k(Tp + 1). \quad (117)$$

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = k \cdot \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}. \quad (118)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(T\omega). \quad (119)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg T\omega. \quad (120)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- 1) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;
- 2) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k + 20 \lg T\omega$ .

Первая асимптота – горизонтальная прямая, вторая – прямая с наклоном +20 дБ/дек (рис.20).

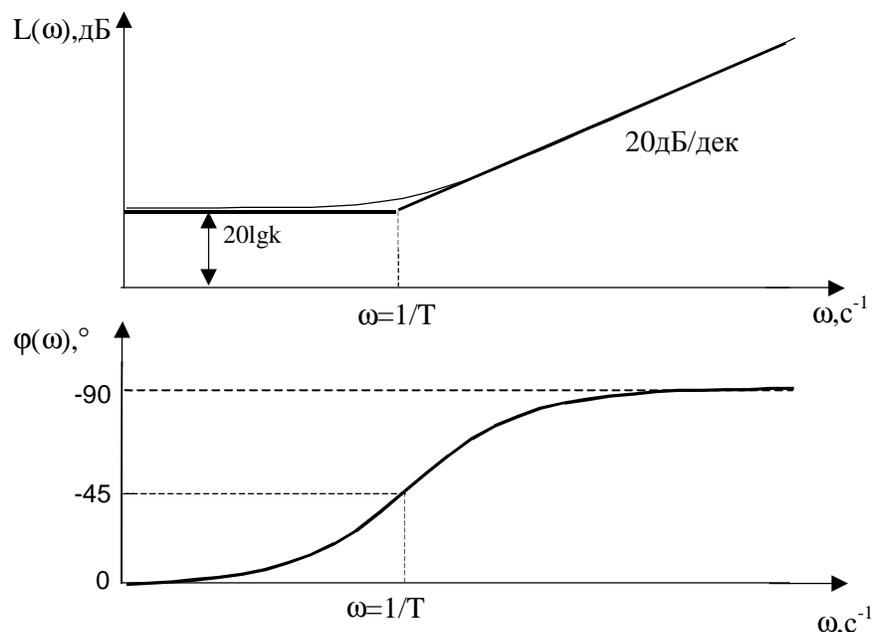


Рис. 20. Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена.

Пересекаются асимптоты в точке  $\omega=1/T$ . Наибольшее отличие ЛАЧХ от асимптот наблюдается на частоте  $\omega=1/T$  и составляет  $\Delta L \approx 3\text{дБ}$ .

Идеальное форсирующее звено второго порядка описывается дифференциальным уравнением

$$x_{\text{вых}} = k \left( T^2 \frac{d^2 x_{\text{вх}}}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}} \right), \quad 0 \leq \xi < 1. \quad (121)$$

Передаточная функция такого звена:

$$W(p) = k(T^2 p + 2\xi T p + 1). \quad (122)$$

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = k \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \quad (123)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \arctg \left( \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} \right). \quad (124)$$

ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \quad (125)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

а) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;

б) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 40 \lg T \omega$ .

Первая асимптота является горизонтальной прямой, уровень которой  $20lgk$ , вторая – прямая с наклоном 40 дБ/дек (рис.21).

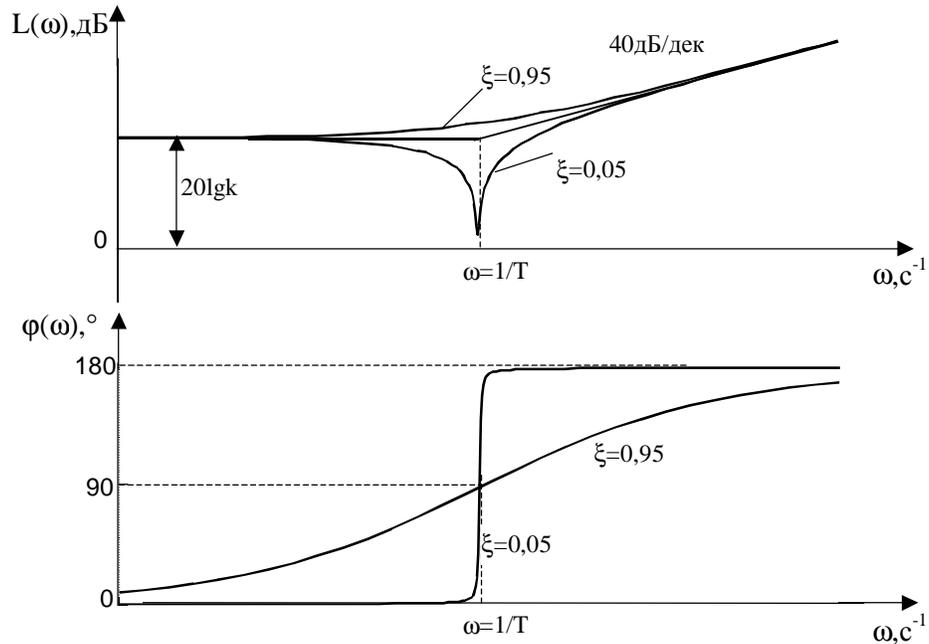


Рис. 21. Логарифмические частотные характеристики колебательного звена.

При значениях коэффициента демпфирования  $0,5 < \xi < 1$  характеристика близка к ломаной, образованной двумя этими асимптотами. При  $\xi < 0,5$  имеет место заметный отрицательный «горб» на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (126)$$

который может быть рассчитан как:

$$\Delta L = -20lg \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (127)$$

В упрощенных расчетах можно считать

$$\Delta L = -20lg \frac{1}{2\xi}, \quad \omega_k = \frac{1}{T}. \quad (128)$$

Кроме звеньев, описываемых линейными дифференциальными уравнениями и рассмотренных выше, к элементарным линейным звеньям можно также отнести *звено запаздывания*.

Звено запаздывания – это звено, у которого сигнал на выходе пропорционален сигналу на входе, но отстает от него на время  $\tau$ :

$$x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}(t - \tau). \quad (129)$$

Таким звеном, например, может быть описан транспортер, перемещающий сыпучий материал, если в качестве входной величины принять положение шибера (заслонки), регулирующего подачу этого материала, а в качестве выходной – сигнал электронных весов, расположенных на некотором расстоянии от зоны загрузки транспортера.

Согласно теореме операционного исчисления о запаздывании оригинала [1] изображение по Лапласу правой части уравнения (129):

$$x_{\text{ВХ}}(t - \tau) \Rightarrow x_{\text{ВХ}}(p)e^{-\tau p}. \quad (130)$$

Следовательно, передаточная функция звена:

$$W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = ke^{-\tau p}. \quad (131)$$

Переходная характеристика звена представляет собой ступенчатый сигнал величины  $k$ , «сдвинутый» от нулевого момента времени вправо на величину  $\tau$ :

$$h(t) = k \cdot I(t - \tau). \quad (132)$$

Частотные характеристики звена можно получить с помощью преобразования:

$$W(j\omega) = ke^{-j\tau\omega} = k(\cos(\tau\omega) - j\sin(\tau\omega)). \quad (133)$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики звена:

$$P(\omega) = k \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -k \sin(\tau\omega). \quad (134)$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики:

$$A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega. \quad (135)$$

Таким образом, звено характеризуется отрицательным фазовым сдвигом, пропорциональным величине запаздывания  $\tau$  и частоте  $\omega$ .

В заключение отметим, что запаздывание часто появляется в математическом описании многих процессов в результате аппроксимации их динамических характеристик, полученных экспериментальным путем, передаточными функциями низких порядков. Например, динамические характеристики многих тепловых объектов приближенно получают обработкой так называемой *кривой разгона* – экспериментально снятой кривой реакции выходной величины на ступенчатое изменение входной (рис. 22).

В простейшем случае объект описывают передаточной функцией первого порядка с запаздыванием:

$$W(p) = \frac{\Delta x_{\text{ВЫХ}}(p)}{\Delta x_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{k}{Tp + 1} e^{-\tau p}. \quad (136)$$

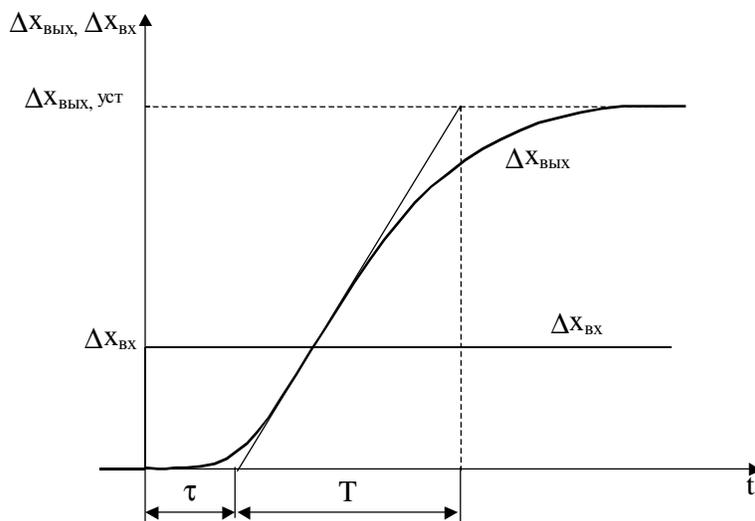


Рис. 22. Использование запаздывания для аппроксимации разгонных характеристик.

Временные параметры передаточной функции  $\tau$  и  $T$  определяют непосредственно по разгонной кривой (рис. 22), а коэффициент передачи рассчитывают как

$$k = \frac{\Delta x_{\text{вых,уст}}}{\Delta x_{\text{вх}}}. \quad (137)$$

### 3.5. Определение математического описания САР

#### 3.5.1. Передаточная матрица системы

Как и любые реальные звенья, система автоматического регулирования в целом может быть описана уравнениями в пространстве состояний, связывающими переменные состояния, входные и выходные величины системы. Для построения такого описания достаточно объединить уравнения всех звеньев, входящих в систему, избавившись тем самым от «ненужных» в конечном итоге промежуточных входов и выходов отдельных элементов САР.

Для построения переходных и частотных характеристик могут потребоваться передаточные функции системы, связывающие ее входы и выходы. Эти передаточные функции формируют так называемую *передаточную матрицу*.

Передаточная матрица  $W(p)$  связывает между собой вектор изображений Лапласа входных величин  $U(p)$  и вектор изображений Лапласа выходных величин  $Y(p)$  при нулевых начальных условиях:

$$Y(p) = W(p) \cdot U(p). \quad (138)$$

При этом в качестве входных могут быть как задающие, так и возмущающие воздействия, а в качестве выходных – любые интересующие исследователя сигналы.

Если вектор  $U$  включает  $m$  компонентов, а вектор  $Y$  –  $l$  компонентов, размер передаточной матрицы  $[l \times m]$ :

$$\begin{pmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \\ \dots \\ y_l(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1(p)}{u_1(p)} & \frac{y_1(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_1(p)}{u_m(p)} \\ \frac{y_2(p)}{u_1(p)} & \frac{y_2(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_2(p)}{u_m(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_l(p)}{u_1(p)} & \frac{y_l(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_l(p)}{u_m(p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ \dots \\ u_m(p) \end{pmatrix}. \quad (139)$$

Таким образом, элементами передаточной матрицы являются передаточные функции по отдельным каналам управления и возмущения.

Передаточную матрицу системы можно определить по ее уравнениям в пространстве состояний (10, 11). Запишем уравнение состояний (10) в операторной форме и выразим из него вектор изображений переменных состояния:

$$pX(p) = AX(p) + BU(p), \quad (140)$$

откуда

$$X(p) = (pE - A)^{-1}BU(p), \quad (141)$$

где  $E$  – единичная диагональная матрица размером  $[n \times n]$ .

Подставив (141) в уравнение выхода, получим:

$$Y(p) = C(pE - A)^{-1}BU(p) + DU(p) = (C(pE - A)^{-1}B + D)U(p), \quad (142)$$

откуда видно, что

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D, \quad (143)$$

или

$$W(p) = \frac{C(pE - A)^+ B + D \det(pE - A)}{\det(pE - A)}, \quad (144)$$

где  $(pE - A)^+$  – так называемая присоединенная к  $pE - A$  матрица. Знаменатель (144) представляет собой характеристический полином матрицы  $A$ . Так как этот полином – величина скалярная, знаменатели передаточных функций – элементов передаточной матрицы, т.е. знаменатели передаточных функций всех каналов управления и возмущения системы – будут одинаковыми:

$$\text{den}(p) = \det(pE - A). \quad (145)$$

Числители же определяются матрицей

$$\text{num}(p) = C(pE - A)^+ B + D \det(pE - A). \quad (146)$$

Это обстоятельство подчеркивает то, что внутренние свойства системы (ее динамика по переменным состояниям, устойчивость и т.д.) определяются только уравнением состояний (10), точнее, матрицей  $A$ .

Однако если система представляет собой объединение нескольких независимых подсистем, соответствующие элементы передаточной матрицы, – передаточные функции каналов управления, – должны иметь, очевидно, различные знаменатели, так как эти каналы принадлежат подсистемам с различными свойствами. В таком случае числители (146) и знаменатель (145) передаточных функций матрицы имеют общие множители–полиномы, сокращая которые, можно получить «реальные» числители и знаменатели.

### 3.5.2. Структурные преобразования модели САР

Рассмотренные ниже правила структурных преобразований позволяют получить передаточные функции САР по передаточным функциям ее звеньев, а также представить структуру системы в удобном для анализа виде.

Формулы преобразований легко выводятся путем сопоставления передаточных функций структур до и после преобразований.

#### 1. Последовательное соединение звеньев (рис. 23).

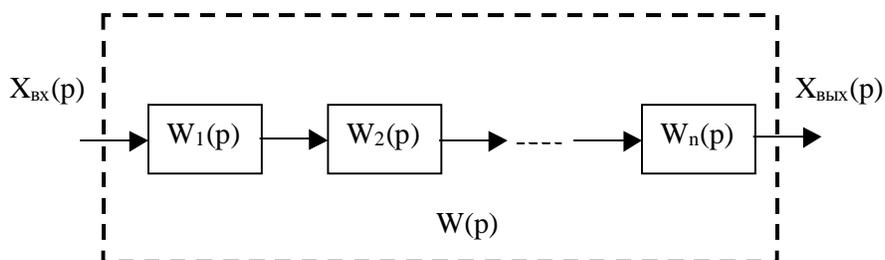


Рис. 23. Последовательное соединение звеньев.

Передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению их передаточных функций

$$W(p) = \prod_{i=1}^{i=n} W_i(p). \quad (147)$$

#### 2. Параллельное соединение звеньев (рис. 24).

Передаточная функция системы, состоящих из параллельно соединенных звеньев, равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \sum_{i=1}^{i=n} W_i(p). \quad (148)$$

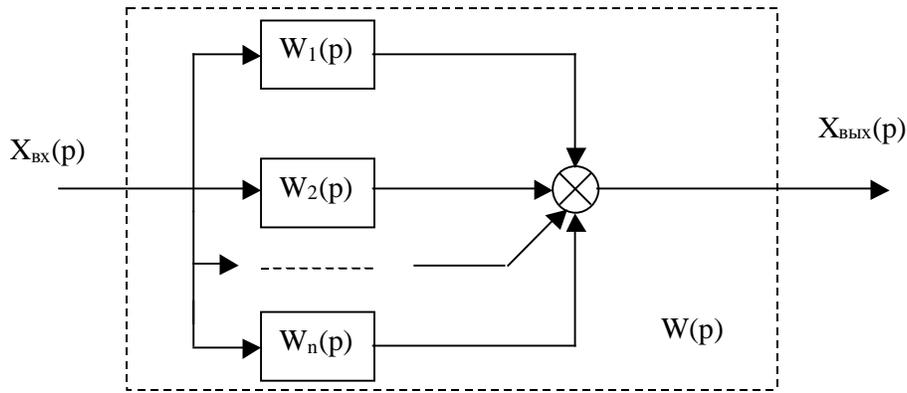


Рис. 24. Параллельное соединение звеньев.

3. Соединение звеньев в виде обратной связи (рис. 25).

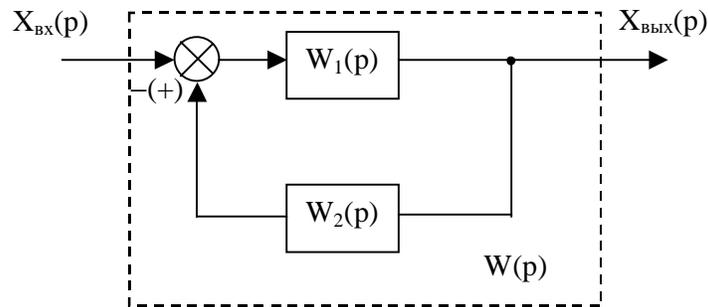


Рис. 25. Соединение звеньев в виде обратной связи.

Передаточная функция звена, охваченного обратной связью, равна дроби, числитель которой есть передаточная функция самого звена, а знаменатель – единица плюс /минус/ произведение передаточной функции звена и передаточной функции обратной связи:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{oc}(p)}. \quad (149)$$

Знак «+» относится к отрицательной обратной связи, а знак «-» – к положительной.

4. Переносы сумматора.

а) с выхода звена на его вход (рис. 26).

Внешнее воздействие  $F(p)$ , приложенное к выходу звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ , можно перевести на его вход, поместив между воздействием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией  $1/W_1(p)$ .

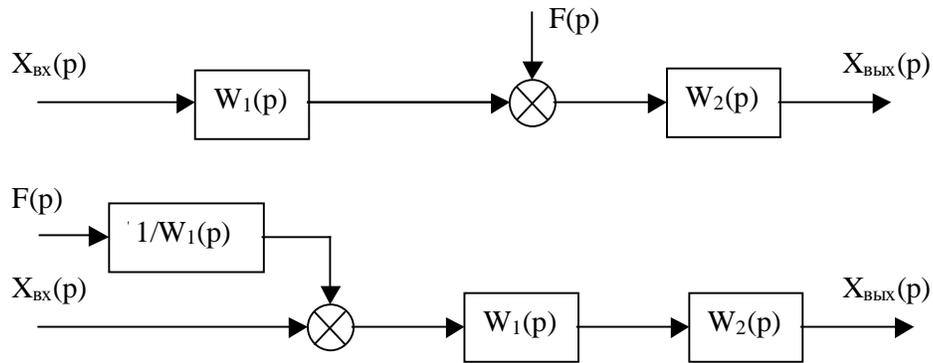


Рис. 26. Перенос сумматора с выхода на вход звена.

б) с входа звена на его выход (рис.27).

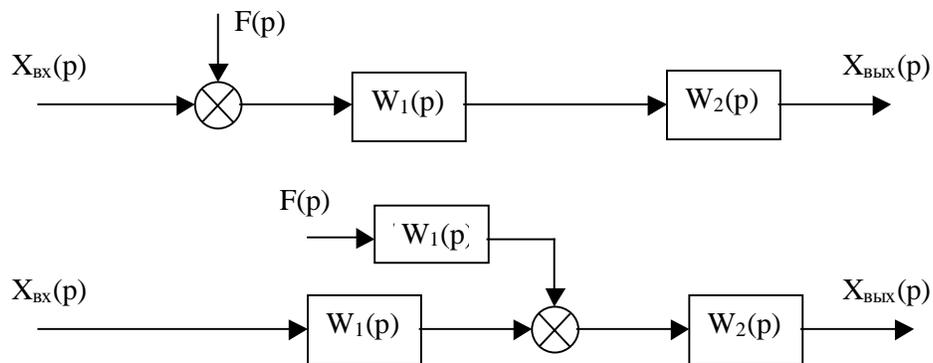


Рис. 27. Перенос сумматора с входа на выход звена.

Внешнее воздействие  $F(p)$ , приложенное к входу звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ , можно перевести на его выход, поместив между воздействием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией  $W_1(p)$ .

### 5. Переносы линии связи.

а) с выхода звена на его вход (рис. 28).

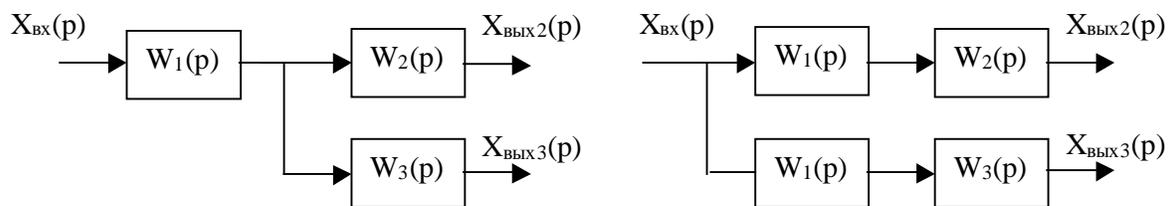


Рис. 28. Перенос линии связи с выхода звена на вход.

Точку присоединения любой структурной связи к выходу звена, имеющего передаточную функцию  $W_1(p)$ , можно перенести на его вход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией  $W_1(p)$ .

б) с входа звена на его выход (рис.29).

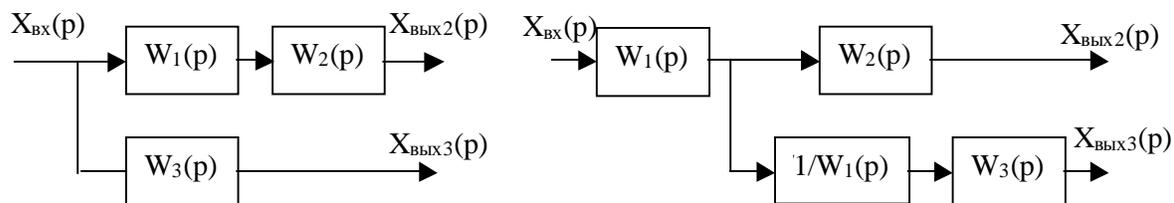


Рис. 29. Перенос линии связи с входа звена на выход.

Точку присоединения любой структурной связи к входу звена, имеющего передаточную функцию  $W_1(p)$ , можно перенести на его выход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией  $1/W_1(p)$ .

## 4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ САР

### 4.1. Показатели качества САР в стационарных режимах

#### 4.1.1. Определение стационарных режимов

Стационарные режимы работы систем автоматического регулирования разделяют на *случайные* и *детерминированные*.

В случайных стационарных режимах к системе приложены внешние воздействия, которые являются случайными, но стационарными функциями времени. Это означает, что характеристики случайных воздействий (параметры законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей) остаются неизменными во времени.

В детерминированных стационарных режимах входные воздействия детерминированы. При этом рассматривается только вынужденное движение системы, свободное движение не учитывается.

Детерминированные режимы, в свою очередь, разделяют на *статические* и *динамические*.

В статических режимах система находится в состоянии покоя вследствие того, что внешние воздействия и параметры системы неизменны.

В динамических стационарных режимах система находится в состоянии вынужденного движения под действием возмущений, изменяющихся по установившемуся закону.

В этой работе рассматриваются только детерминированные стационарные режимы.

#### 4.1.2. Качество САР в статических режимах

Качество САР в статике оценивается величиной *статической ошибки* – разности между заданным значением выходной величины и ее действительным значением в установившемся режиме при постоянных внешних воздействиях.

Любую одноконтурную линейную САР можно описать структурной схемой, приведенной на рис. 30.

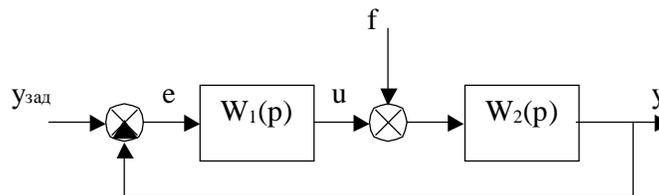


Рис. 30. Структура системы.

Получим зависимость статической ошибки от величины задающего воздействия, а также структуры и параметров передаточных функций системы. Для

этого положим  $f = 0$ . Передаточная функция ошибки по задающему воздействию:

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{y_{\text{зад}}(p)} = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (150)$$

В статике

$$e = \frac{y_{\text{зад}}}{1 + W_1(0)W_2(0)}. \quad (151)$$

Если  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  не имеют нулевых полюсов, то

$$e = \frac{1}{1 + k_1k_2} y_{\text{зад}}, \quad (152)$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты передачи звеньев  $W_1(p), W_2(p)$ , рассчитываемые как отношения свободных коэффициентов числителей к свободным коэффициентам знаменателей.

Из (152) видно, что статическая ошибка в данном случае тем меньше, чем больше общий коэффициент усиления в системе.

Системы, в которых есть статическая ошибка, называются *статическими*.

Если  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  имеют хотя бы один нулевой полюс, произведение  $W_1(0)W_2(0) = \infty$  и статическая ошибка равна нулю.

Отсутствие ошибки легко можно показать по структурной схеме системы. Вынесем один нулевой полюс из произведения передаточных функций  $W_1(p)W_2(p)$  в отдельный интегратор и представим схему системы в виде (рис. 31).

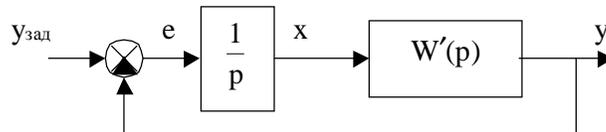


Рис. 31. Структура астатической системы.

В статике все переменные системы неизменны, поэтому выходной сигнал интегратора  $x = \text{const}$ . Это возможно только, если  $e = 0$ .

Системы, в которых статическая ошибка равна нулю, называются *астатическими*.

Рассмотрим теперь влияние возмущения на статическую ошибку. Положив  $u_{\text{зад}} = 0$ , получим  $e = -y$ .

Передаточная функция ошибки по возмущению:

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{f(p)} = -\frac{y(p)}{f(p)} = -\frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (153)$$

В статике

$$e = -\frac{W_2(0)f}{1 + W_1(0)W_2(0)}. \quad (154)$$

Если  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  не имеют нулевых полюсов,

$$e = -\frac{k_2}{1 + k_1k_2} f. \quad (155)$$

Из (155) видно, что статическая ошибка в данном случае тем меньше (по модулю), чем больше коэффициент  $k_1$ .

Если  $W_1(p)$  не имеет нулевых полюсов, а  $W_2(p)$  имеет хотя бы один нулевой полюс, то, формально полагая  $W_2(0) = \infty$ , из (154) получим:

$$e = -\frac{1}{k_1} f. \quad (156)$$

Этого же результата можно добиться из анализа структурной схемы системы, которая в данном случае может быть приведена к следующему виду:

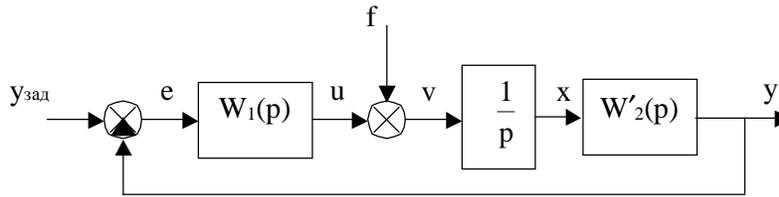


Рис. 32. К определению статической ошибки.

Действительно, в статике  $x = \text{const}$ ; следовательно:  $v = 0$ , откуда  $u = -f$  и  $e = u/k_1 = -f/k_1$ .

Если, наконец,  $W_1(p)$  имеет нулевые полюса, из (154) следует, что  $e = 0$ , независимо от того, имеются ли нулевые полюса в  $W_2(p)$  или нет. Это также видно по структурной схеме, приведенной на рис. 33.

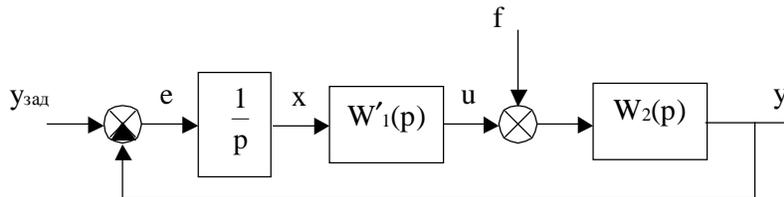


Рис.33. К определению статической ошибки.

Действительно, в статике, когда  $x = \text{const}$ ,  $e = 0$  независимо от вида передаточной функции  $W_2(p)$ .

Таким образом, условием отсутствия установившейся ошибки, обусловленной возмущением, является наличие нулевых полюсов («свободных интеграторов») в звеньях системы, расположенных в прямом канале до места приложения возмущения.

### 4.1.3. Качество САР в стационарных динамических режимах

Стационарный динамический режим характеризуется вынужденным движением системы под влиянием воздействий, изменяющихся по установившемуся закону. В качестве такого закона рассматривают гармонический закон, закон изменения с постоянной скоростью, ускорением, высшими производными входного сигнала и др.

Реакция системы на гармонический сигнал описывается ее частотными характеристиками (см. 3.3).

Рассмотрим стационарный динамический режим, вызванный подачей на вход системы сигнала с постоянной  $k$ -й производной. Изображение по Лапласу такого сигнала при нулевых начальных условиях:

$$y_{\text{зад}}(p) = y_{\text{зад}}^{(k)}(p) \frac{1}{p^k} = \frac{c}{p} \frac{1}{p^k}, \quad (157)$$

где  $y_{\text{зад}}^{(k)}(p) = c/p$  – изображение  $k$ -й производной задающего воздействия;  $c = \text{const}$  – значение этой производной.

Величина  $k$  называется *порядком воздействия*. Так, при  $k = 0$  имеем постоянное воздействие, при  $k = 1$  – воздействие с постоянной скоростью,  $k = 2$  – воздействие с постоянным ускорением и т.д.

С учетом (157) структурную схему системы можно представить в виде изображенной на рис. 34.

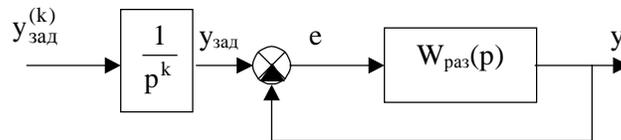


Рис. 34. Структурная схема САР при входном воздействии, изменяющемся с постоянной производной.

Определим передаточную функцию ошибки по  $k$ -й производной задающего сигнала:

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{y_{\text{зад}}^{(k)}(p)} = \frac{1}{p^k} \times \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(p)}. \quad (158)$$

Предположим, что передаточная функция  $W_{\text{раз}}(p)$  имеет  $s$  нулевых полюсов (интегрирующих звеньев). Тогда ее можно представить следующим образом:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{1}{p^s} W'_{\text{раз}}(p), \quad (159)$$

а (158) переписать в виде

$$W_e(p) = \frac{1}{p^k + W'_{\text{раз}}(p)p^{k-s}}. \quad (160)$$

Величина  $s$  называется *порядком астатизма системы*.

Предположим, что в интересующем нас режиме ошибка постоянна и ограничена. Учитывая, что  $y_{\text{зад}}^{(k)} = c = \text{const}$ , можно считать, что система, входом которой является  $y_{\text{зад}}^{(k)}$ , а выходом – ошибка  $e$ , находится в статике. Поэтому

$$e = W_e(0) \times c = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{k'_{\text{раз}} p^{k-s}} \times c, \quad (161)$$

где  $k'_{\text{раз}} = W'_{\text{раз}}(0)$ .

Из (161) следует, что при  $k < s$   $e = 0$ .

Таким образом, *ошибка равна нулю, если порядок астатизма системы больше порядка воздействия*.

При  $k = s$

$$e = \frac{c}{k'_{\text{раз}}}. \quad (162)$$

*Ошибка конечна, прямо пропорциональна постоянной производной входного воздействия и обратно пропорциональна коэффициенту разомкнутой системы, если порядок астатизма системы равен порядку воздействия*.

При  $k > s$ , согласно (161),  $e \rightarrow \infty$ , и, следовательно, наше предположение не подтверждается. Фактически это означает, что в данном случае ошибка неограниченно возрастает.

На рис. 35 показаны возможные переходные процессы изменения выходной координаты системы, вызванные линейно нарастающим со скоростью  $v$  задающим сигналом ( $k = 1$ ), при различных порядках астатизма  $s$ .

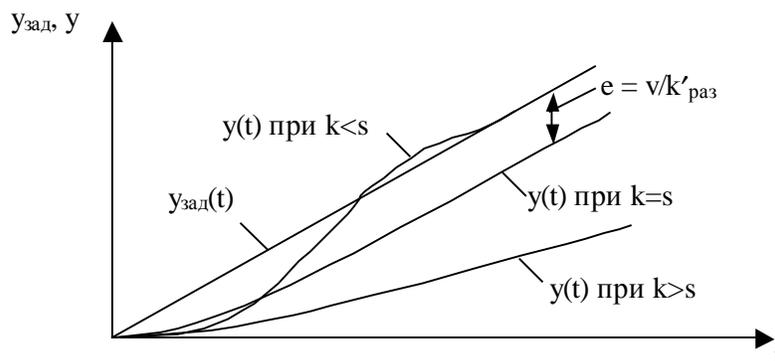


Рис. 35. Реакция системы на линейно нарастающий сигнал.

Аналогично можно провести анализ влияния на величину ошибки возмущений, изменяющихся с постоянной производной. В этом случае, как и для статических режимов, важно наличие интеграторов «до возмущения».

## 4.2. Устойчивость САР и показатели качества переходных процессов

### 4.2.1. Понятие устойчивости.

#### Условие устойчивости линейных САР.

Кроме необходимой точности в статике и в стационарных динамических режимах, система должна обладать хорошими динамическими характеристиками и, прежде всего, быть *устойчивой*.

Общее определение устойчивости можно сформулировать следующим образом.

*Система устойчива, если ее координаты (переменные состояния, выходные величины) остаются ограниченными в условиях действия на систему ограниченных по величине воздействий.*

Отметим, что неустойчивая система неработоспособна, так как любое внешнее воздействие приводит к теоретически неограниченному изменению ее переменных и поэтому САР не может выполнить ни задачу стабилизации, ни задачу слежения. На практике все переменные системы ограничены своими предельными значениями, что, однако, не меняет сути дела.

Для линейных систем справедливы следующие утверждения:

1. Устойчивость системы – ее внутреннее свойство, которое не зависит от величины и характера приложенных к системе воздействий.

2. Устойчивость определяется для системы в целом: не может одна часть системы быть устойчивой, а другая – неустойчивой. Если все же такой эффект имеет место, то это свидетельствует о том, что исследуется не одна, а две системы – либо полностью независимые друг от друга, либо с односторонним влиянием устойчивой системы на неустойчивую.

Приведенные утверждения становятся понятными, если вспомнить, что любая линейная система может быть описана линейными дифференциальными уравнениями, каждое из которых связывает между собой один вход и один выход системы. Эти уравнения непосредственно определяются из ее передаточной матрицы, причем, поскольку все элементы последней имеют один и тот же знаменатель, левые части всех уравнений будут одинаковыми.

Известно, что решение линейного дифференциального уравнения состоит из двух частей. Первая представляет собой решение соответствующего однородного уравнения и описывает свободное движение выходной координаты:

$$y_{св}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (163)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – постоянные интегрирования;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни характеристического уравнения.

Кратным корням  $p_i = p_{i+1} = p_{i+2} = \dots = p_{i+k}$  в решении соответствует сумма

$$C_i e^{p_i t} + C_{i+1} t e^{p_i t} + C_{i+1} t^2 e^{p_i t} + \dots + C_n t^k e^{p_i t}. \quad (164)$$

Корни характеристического уравнения могут быть вещественными и комплексно сопряженными:  $p_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ . В последнем случае в решении появляются слагаемые вида

$$C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t) + C_{i+1} e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t). \quad (165)$$

Из (163) видно, что независимо от значений постоянных интегрирования свободная составляющая будет с течением времени стремиться к нулю (затухать), если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, характер свободного движения определяется только коэффициентами левой части дифференциального уравнения и поэтому не зависит от внешнего воздействия. Так как для всех каналов воздействия однородное дифференциальное уравнение одно и то же, то и характер свободного движения всех выходных координат системы одинаков, – величина  $u_{св}$  либо стремится к нулю, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, либо неограниченно увеличивается – в случае, если среди корней есть корни с положительной вещественной частью.

Вторая часть решения линейного дифференциального уравнения представляет собой частное решение неоднородного уравнения; применительно к САР оно описывает «вынужденное движение» выходной координаты под действием входного сигнала. Вынужденное движение определяется в основном входным сигналом и его производными (т.е. правой частью дифференциального уравнения). Если входной сигнал ограничен, а свободное движение выходной координаты затухает, то и частное решение неоднородного уравнения также ограничено.

Таким образом, *необходимым и достаточным условием устойчивости линейной системы является отрицательность вещественных частей всех корней ее характеристического полинома.*

Особыми являются следующие два случая:

1) среди корней характеристического полинома имеются нулевые. Таковую систему называют *нейтральной*. Как следует из (163), свободное движение такой системы со временем стремится к некоторой постоянной величине. Вынужденное движение нейтральной системы определяется присутствием в ее структуре интегрирующих звеньев, которые и дают нулевые корни. При входном сигнале, отличном от нуля и имеющем постоянный знак, выходная величина неограниченно увеличивается по модулю, а при снятии входного сигнала – не уменьшается до нуля, а устанавливается на достигнутом уровне. Очевидно, что нейтральная САР неработоспособна. Однако в состав устойчивой системы вполне могут входить нейтральные элементы. Примеры таких элементов – исполнительные механизмы, скорость перемещения которых пропорциональна входному сигналу (напряжению, давлению и т. д.), а положение – его интегралу по времени;

2) среди корней характеристического полинома имеются пары чисто мнимых корней  $p_{i,i+1} = \pm j\beta_i$ . В данном случае свободное движение системы

включает незатухающие гармонические составляющие с угловой частотой колебаний, равной  $\beta_i$ . Поэтому если систему вывести из положения равновесия, то через некоторое время в ней устанавливаются незатухающие колебания даже при отсутствии внешних воздействий. Эти колебания называют *автоколебаниями*, а про САР говорят, что она находится *на границе устойчивости*. При небольших изменениях параметров такой системы (постоянных времени, коэффициентов передач и т.д.) она может стать как устойчивой, так и неустойчивой в зависимости от того, какого знака вещественные части появятся у ранее чисто мнимых пар корней. САР, находящаяся на границе устойчивости, неработоспособна.

Рассмотрим физические аспекты устойчивости систем автоматического регулирования. Входящие в САР технические объекты регулирования в большинстве случаев устойчивы или нейтральны. Другие элементы системы (датчики, преобразователи, усилители, регуляторы, исполнительные механизмы и т.д.) не могут быть неустойчивыми в силу своего назначения. Поэтому интересно рассмотреть причину появления неустойчивости САР в целом. Ясно, что система, состоящая из последовательного соединения устойчивых или нейтральных звеньев, не может быть неустойчивой, так как корни ее характеристического полинома – это корни знаменателей передаточных функций всех звеньев, входящих в соединение. Следовательно неустойчивой система может стать только при ее замыкании обратной связью.

Вспомним, что основным принципом регулирования является регулирование по отклонению, согласно которому управляющее воздействие  $u(t)$  формируется в общем случае как функция ошибки регулирования  $e(t)$ . В простейшем случае применяется так называемый пропорциональный регулятор, формирующий управление по закону

$$u(t) = k_p e(t), \quad (166)$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи (усиления) регулятора. В качестве регулятора в данном случае может использоваться дифференциальный усилитель.

На рис. 36 показана переходная характеристика неустойчивой системы с П-регулятором.

При подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия появляется ошибка  $e(0) = u_{\text{зад}} - u(0) = 1$ . Регулятор формирует пропорциональное ей воздействие на объект, которое заставляет увеличиваться его выходную величину. В момент времени  $t_1$  величина  $y(t)$  достигает значения единицы и ошибка регулирования становится равной нулю. Однако из-за инерционности объекта движение системы на этом не останавливается, и выходная величина продолжает увеличиваться, что приводит к изменению знаков ошибки и управляющего воздействия. Спустя некоторое время выходная величина начинает уменьшаться и в момент времени  $t_2$  вновь становится равной единице. Далее рассмотренный процесс повторяется. При этом, если регулятор излишне энергично воздействует на объект, то, как показано на рис. 36, каждое новое отклонение превышает предыдущее и переходный процесс имеет вид расходящихся колебаний. Таким образом, неустойчивость системы – это, по сути,

неустойчивость замкнутого контура, включающего инерционный объект и «слишком активный» регулятор. В 4.2.4. влияние коэффициента передачи регулятора на устойчивость системы рассмотрено более подробно.

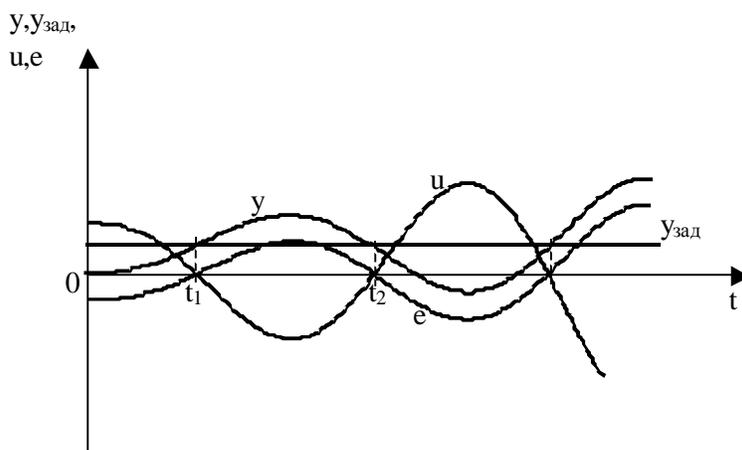


Рис. 36. Переходная характеристика неустойчивой системы с П-регулятором.

#### 4.2.2. Критерии устойчивости линейных САР

Как было показано, для проверки устойчивости линейной системы достаточно определить корни ее характеристического полинома. В настоящее время это не представляет трудности в связи с развитием вычислительной техники и появлением математических пакетов прикладных программ. А раньше, когда ЭВМ не существовало или они были редкими, для проверки устойчивости использовались так называемые *критерии устойчивости*, позволяющие судить об устойчивости, не прибегая к вычислению корней характеристического полинома системы. Хотя сейчас эти критерии потеряли актуальность в качестве средств определения устойчивости, большинство их активно используется уже как средство синтеза системы.

Критерии устойчивости разделяют на *алгебраические* и *частотные*.

Алгебраические критерии определяют устойчивость системы с помощью некоторых вычислений над коэффициентами ее характеристического полинома. К ним относятся критерии Рауса и Гурвица (которые по сути представляют собой один критерий, изложенный в различных формах) [7]. Критерии позволяют определять устойчивость, однако для синтеза систем малоприменимы. Поэтому ограничимся здесь одним только следствием из этих критериев, а именно необходимым условием устойчивости системы: *для устойчивости системы необходимо (но недостаточно), чтобы все коэффициенты характеристического полинома были отличны от нуля и имели один и тот же знак*. Это условие имеет большую практическую значимость, так как позволяет судить о возможности построения устойчивой системы исходя только из

структур объекта и регулирующего устройства (структурной устойчивости). Для демонстрации приведем следующий пример.

Пусть имеется объект регулирования с передаточной функцией

$$W_{об} = \frac{k_{об}}{p(T_{об}p + 1)}. \quad (167)$$

На объект оказывает воздействие исполнительный механизм с передаточной функцией

$$W_{им} = \frac{k_{им}}{p}. \quad (168)$$

Требуется построить замкнутую систему регулирования.

Самым простым решением видится применение усилителя с дифференциальным входом, который будет управлять исполнительным механизмом с помощью усиленного сигнала разности между заданным и фактическим значениями выходной величины (рис. 37).

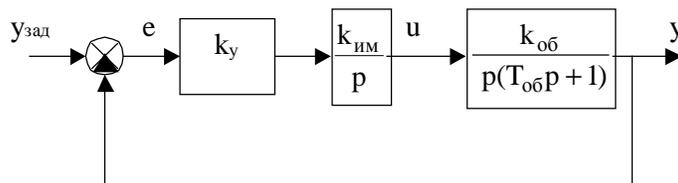


Рис. 37. Структурная схема системы.

Построенный таким образом регулятор, включающий усилитель и исполнительный механизм, реализует интегральный закон регулирования – управляющее воздействие пропорционально интегралу ошибки (см. 5.2.1).

Проверим устойчивость системы. Передаточная функция замкнутого контура

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{k_y k_{им} k_{об}}{T_{об} p^3 + p^2 + k_y k_{им} k_{об}}. \quad (169)$$

Из (169) видно, что в характеристическом полиноме системы отсутствует слагаемое с «р» в первой степени, или, другими словами, соответствующий коэффициент полинома равен нулю. Это противоречит необходимому условию устойчивости и означает, что система будет неустойчивой при любых  $k_y$ , какими бы ни были другие ее параметры ( $k_{об}$ ,  $T_{об}$ ,  $k_{им}$ ). Следовательно, предлагаемая структура неработоспособна и необходимо выбрать другой закон регулирования.

Приведенный пример демонстрирует понятие *структурной неустойчивости* и, кроме того, доказывает известное утверждение, что для астатических объектов интегральный закон регулирования неприемлем.

Частотные критерии определяют устойчивость системы по различным ее частотным характеристикам. К таким критериям относятся *критерии Ми-*

хайлова и Найквиста. Они широко используются при синтезе систем, поэтому остановимся на них подробнее.

Критерий устойчивости Михайлова основан на рассмотрении характеристического полинома замкнутой системы

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (170)$$

Заменой оператора «р» на оператор «jω» в (170) получаем частотную характеристику

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0, \quad (171)$$

которую можно представить в виде

$$D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (172)$$

Построив характеристику  $D(j\omega)$  на комплексной плоскости, получаем так называемый годограф Михайлова. Критерий формулируется следующим образом.

*Система устойчива, если годограф Михайлова, начинаясь на действительной положительной полуоси, огибает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно столько квадрантов, каков порядок системы, и уходя в бесконечность в последнем квадранте.*

Условием нахождения системы на границе устойчивости является прохождение годографа Михайлова через начало координат. Действительно, в данном случае уравнение  $D(j\omega) = 0$  имеет решение в виде пары сопряженных мнимых корней  $p = \pm j\omega^*$ , что означает наличие в системе незатухающих колебаний с частотой  $\omega^*$ .

Рис. 38 демонстрирует применение критерия Михайлова для системы третьего порядка.

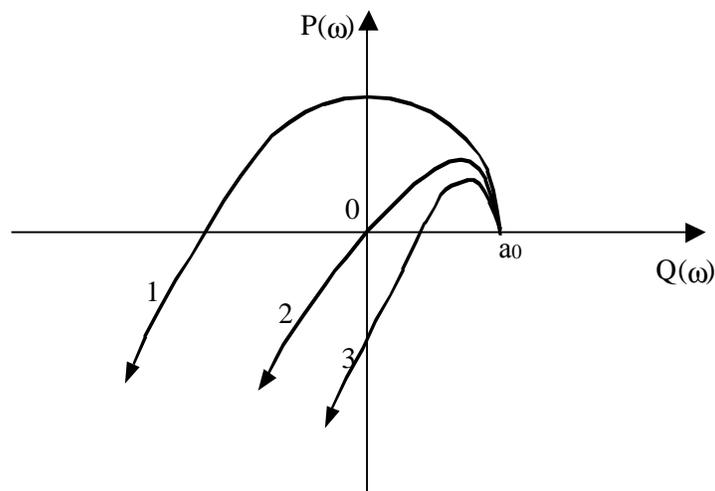


Рис. 38. Годографы Михайлова для систем третьего порядка: 1 – устойчивой; 2 – на границе устойчивости; 3 – неустойчивой.

Критерий Михайлова применяется при синтезе линейных систем. В частности, он положен в основу так называемого метода D-разбиения [2,7].

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по АФЧХ разомкнутой. Частотные характеристики разомкнутых систем легко строятся по характеристикам входящих в них звеньев и легко выражаются через параметры последних. Это определило большую практическую значимость критерия в качестве вспомогательного средства синтеза систем (см., например, 5.2.3).

Прежде чем сформулировать критерий, рассмотрим свойства АФЧХ разомкнутых систем. При этом будем полагать, что все звенья, входящие в систему, являются минимально-фазовыми, т.е. имеют только «левые» нули и «левые» (и, возможно, нулевые) полюса. Большинство реальных систем удовлетворяет этому требованию. Передаточная функция разомкнутой системы в общем случае имеет вид:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^k (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1)}, \quad (173)$$

где  $m$  – порядок числителя;  $k$  – число нулевых полюсов или порядок астатизма системы;  $n+k$  – порядок знаменателя.

Отметим, что для всех реальных систем порядок числителя  $W_{\text{раз}}(p)$  меньше порядка знаменателя, т.е.  $m < k+n$ . Величина  $v = k+n-m$  называется *относительным порядком передаточной функции*.

В случае статической системы, когда  $k=0$ ,  $W_{\text{раз}}(j0) = b_0$ . Следовательно, АФЧХ начинается на положительной вещественной полуоси в точке, ордината которой равна коэффициенту передачи разомкнутой системы.

Для астатических систем  $k>0$  и  $W_{\text{раз}}(j0) = \infty$ . При этом фазовый сдвиг на нулевой частоте определяется порядком астатизма:

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}k. \quad (174)$$

Это объясняется тем, что каждое интегрирующее звено, входящее в структуру  $W_{\text{раз}}(p)$ , дает при  $\omega=0$  фазовый сдвиг, равный  $-\pi/2$ . Другие звенья на нулевой частоте фазового сдвига не дают.

Таким образом, при  $\omega \rightarrow 0$  АФЧХ стремится к прямой линии, параллельной той координатной полуоси, угол между которой и действительной положительной полуосью определяется согласно (174).

При  $\omega \rightarrow \infty$  АФЧХ системы стремится к началу координат. Это следует из того, что при  $\omega \rightarrow \infty$  амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы  $A_{\text{раз}}(\omega) \rightarrow 0$ , так как порядок знаменателя  $W_{\text{раз}}(p)$  больше порядка числителя.

Предельный фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  может быть определен по формуле:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \nu = -\frac{\pi}{2} (k + n - m). \quad (175)$$

Смысл выражения (175) вполне понятен, если вспомнить, что при  $\omega \rightarrow \infty$  суммарный фазовый сдвиг  $k$  интегрирующих звеньев равен  $-k\pi/2$  рад, аperiodические и колебательные звенья, формирующие «скобку» знаменателя  $W_{\text{раз}}(p)$ , сдвигают фазу на  $-\pi/2$  рад, а форсирующие звенья числителя в сумме дают сдвиг  $+m\pi/2$  рад.

При  $\omega \rightarrow \infty$  направление АФЧХ совпадает с направлением той полуоси комплексной плоскости, угол между которой и действительной положительной полуосью определяется согласно (175).

Вернемся к критерию Найквиста. Для систем, устойчивых и нейтральных в разомкнутом состоянии, о которых шла речь, критерий формулируется следующим образом: *замкнутая система устойчива, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами  $(-1, 0)$* . Если АФЧХ проходит через данную точку, замкнутая система находится на границе устойчивости.

Рассмотрим примеры АФЧХ различных разомкнутых систем. На рис. 39 приведены АФЧХ статических систем.

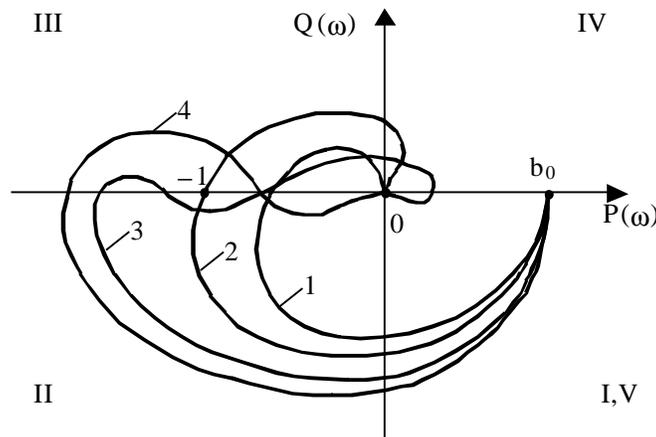


Рис. 39. АФЧХ разомкнутых статических систем.

Характеристика 1 соответствует устойчивой системе, так как не охватывает точку с координатами  $(-1, 0)$ . Относительный порядок передаточной функции разомкнутой системы равен трем, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-3\pi/2$ .

Характеристика 2 проходит через точку с координатами  $(-1, 0)$  и поэтому соответствует системе, находящейся на границе устойчивости. Относительный порядок  $W_{\text{раз}}(p)$  здесь также равен трем, однако порядок знаменателя не менее четырех, о чем свидетельствует то, что характеристика приходит в начало координат в четвертом квадранте. Очевидно, что на высоких частотах сказывается влияние как минимум одного форсирующего звена с малой постоянной времени, дающего положительный фазовый сдвиг.

Характеристика 3 соответствует устойчивой системе. Относительный порядок передаточной функции равен четырем, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-2\pi$ . Порядок числителя  $W_{\text{раз}}(p)$  в данном случае не меньше двух и, следовательно, знаменателя – не меньше шести. Об этом свидетельствуют «временное» увеличение  $\varphi(\omega)$  на средних частотах, вызванное действием как минимум одного форсирующего звена со средней постоянной времени, и увеличение  $\varphi(\omega)$  на высоких частотах, вызванное действием как минимум одного форсирующего звена с малой постоянной времени.

Характеристика 4 соответствует неустойчивой системе, так как охватывает точку с координатами  $(-1,0)$ . Передаточная функция разомкнутой системы имеет относительный порядок, равный двум, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-\pi$ . На средних частотах заметно влияние форсирующего звена (звеньев), поэтому порядок числителя  $W_{\text{раз}}(p)$  в данном случае не меньше одного, а знаменателя – не меньше трех.

На рис. 40 приведены примеры АФЧХ астатических систем.

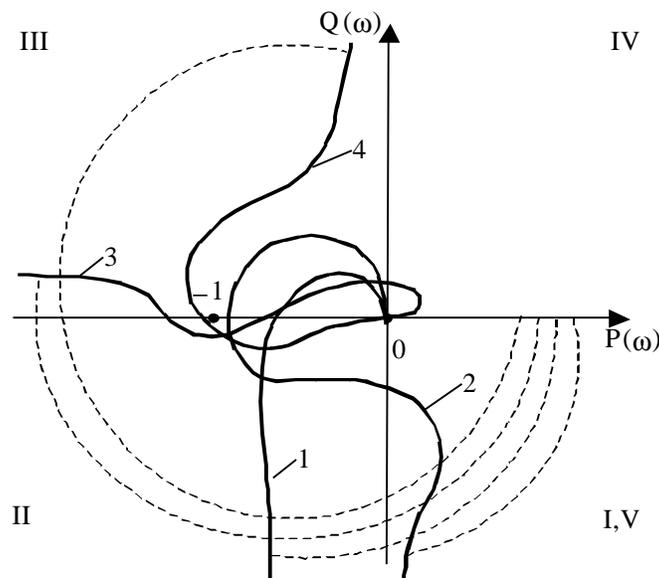


Рис. 40. АФЧХ разомкнутых систем с астатизмом первого (1,2), второго (3) и третьего (4) порядков.

Отметим, что судить об устойчивости астатических систем с помощью приведенного выше критерия можно, если мысленно соединить «начала» АФЧХ с положительной вещественной полуосью, как это и показано прерывистыми линиями на рис. 40.

Характеристики 1 и 2 соответствуют устойчивым системам с астатизмом первого порядка ( $\varphi(0) = -\pi/2$ ). Относительный порядок передаточных функций разомкнутых систем равен трем (при  $\omega \rightarrow \infty \varphi(\omega) \rightarrow -3\pi/2$ ). О характеристике 2 можно также сказать, что соответствующая ей передаточная функция содержит как минимум одно форсирующее звено с большой постоянной

времени. Действием этого звена обусловлено временное повышение фазового сдвига на низких частотах.

Характеристика 3 соответствует устойчивой системе с астатизмом второго порядка ( $\varphi(0) = -\pi$ ). Относительный порядок передаточной функции равен четырем, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-2\pi$ . В структуре  $W_{раз}(p)$  присутствует как минимум одно форсирующее звено, дающее увеличение фазы на средних частотах. Из рис. 40 видно, что при отсутствии этого звена невозможно обеспечить устойчивость системы с астатизмом второго порядка. Это также легко можно показать с помощью анализа передаточной функции замкнутой системы (см. пример системы, изображенной на рис. 37).

Характеристика 4 соответствует устойчивой системе с астатизмом третьего порядка ( $\varphi(0) = -3\pi/2$ ). Относительный порядок передаточной функции равен двум (при  $\omega \rightarrow \infty$   $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi$ ). АФЧХ проходит в третьем и втором квадрантах. Во втором квадранте  $\varphi(\omega) > -\pi$ . Таким образом, фазовый сдвиг увеличивается, начиная с частоты  $\omega=0$ , более чем на  $\pi/2$  рад. Следовательно, в структуре передаточной функции присутствуют как минимум два форсирующих звена.

Отметим, что без этих звеньев невозможно обеспечить устойчивость системы с астатизмом третьего порядка, что также легко показать из анализа передаточной функции замкнутой системы.

Критерий Найквиста можно интерпретировать с помощью амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик разомкнутой системы: *система, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива при замыкании, если при частоте, на которой  $A(\omega)$  окончательно становится меньше единицы (частоте среза), значение  $j(\omega)$  будет больше  $-p$* . (рис.41).

Важнейшими параметрами АФЧХ, связанными с критерием Найквиста, являются *запасы устойчивости по фазе и по амплитуде*.

Запас устойчивости по фазе определяется величиной  $\Delta\varphi$ , на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза  $\omega_c$ , чтобы она оказалась на границе устойчивости (рис. 41).

Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной  $\Delta A$ , на которую должен увеличиться модуль вектора АФЧХ на частоте, соответствующей фазовому сдвигу  $-\pi$  рад, чтобы система оказалась на границе устойчивости.

Запасы устойчивости могут быть определены также по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы (рис.41б). При этом запас устойчивости по амплитуде выражается в децибелах:

$$\Delta L = |20 \lg(1 - \Delta A)|. \quad (176)$$

Чем больше запасы устойчивости, тем менее колебательной является переходная характеристика системы. При расчете систем рекомендуется выбирать  $\Delta\varphi \geq 30^\circ$ ,  $\Delta A \geq 0,5$  ( $\Delta L \geq 6\text{дБ}$ ) [7].

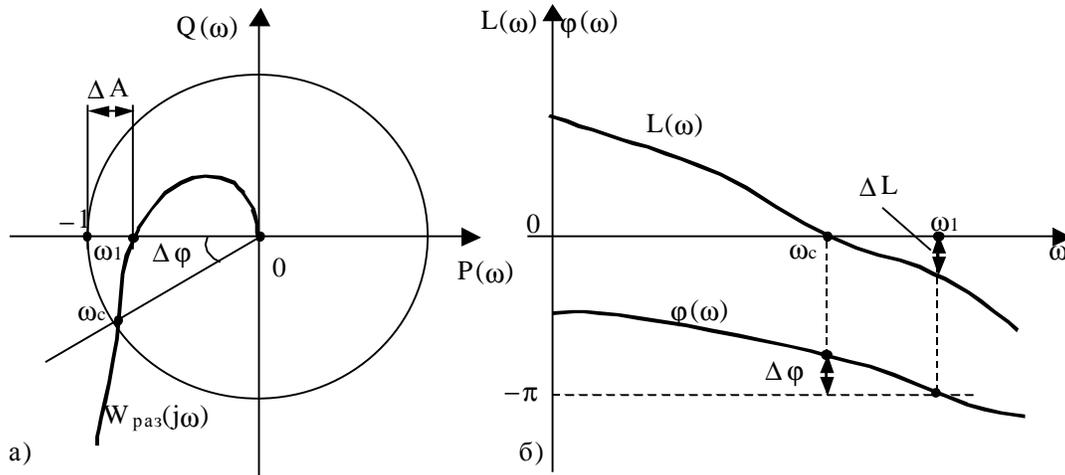


Рис. 41. К определению запасов устойчивости по АФЧХ (а) и по ЛАЧХ и ФЧХ (б) разомкнутой системы.

С помощью АФЧХ разомкнутой системы можно легко определить коэффициент передачи пропорционального регулятора, обеспечивающий любой заданный запас устойчивости по амплитуде, в том числе и *критический коэффициент*, при котором система находится на границе устойчивости.

АФЧХ разомкнутой системы с пропорциональным регулятором пропорциональна АФЧХ объекта:

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = k_p W_{\text{об}}(j\omega), \quad (177)$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи регулятора.

Следовательно, на любой частоте вектор АФЧХ системы совпадает по направлению с вектором АФЧХ объекта, но отличается от него по модулю в  $k_p$  раз.

Коэффициент передачи регулятора, соответствующий запасу устойчивости  $\Delta A$ , может быть определен через модуль вектора  $W_{\text{об}}(j\omega)$  на частоте, для которой фазовый сдвиг АФЧХ равен  $-\pi$  рад (рис. 42):

$$k_{\text{кр}} = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OB}|} = \frac{1 - \Delta A}{|\overline{OB}|}. \quad (178)$$

Очевидно, что критический коэффициент определяется из (178), если положить  $\Delta A = 0$ .

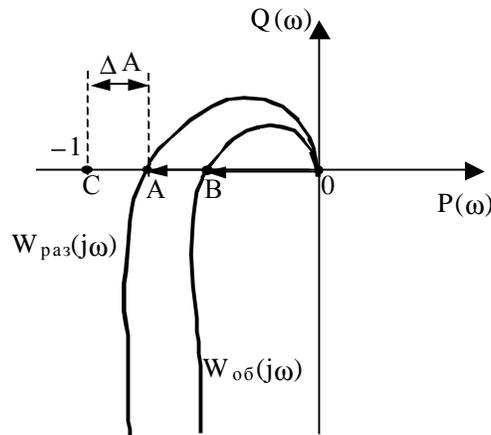


Рис. 42. К определению коэффициента передачи регулятора.

### 4.2.3. Показатели качества переходных процессов

Качество переходных процессов показывается характером их протекания – длительностью и колебательностью. Переходные процессы в линейной системе описываются функциями времени, которые являются решениями дифференциальных уравнений системы и в общем случае имеют вид:

$$y(t) = y_{\text{вын}}(t) + \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (179)$$

где  $y_{\text{вын}}(t)$  – вынужденная составляющая движения выходной величины, определяемая в основном внешним воздействием;  $C_i$  – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий;  $p_i$  – корни характеристического полинома системы;  $n$  – порядок системы.

Таким образом, вид переходного процесса зависит от внешнего воздействия, свойств системы и ее начального состояния. Чтобы оценка качества процесса была информативной, необходимо уменьшить количество факторов, которые его определяют. С этой целью качество переходных процессов обычно оценивают по переходной характеристике системы – ее реакции на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Как известно, данная характеристика целиком зависит от свойств системы.

К основным показателям качества относятся: *время переходного процесса, максимальное отклонение, перерегулирование и колебательность*. Все они непосредственно определяются по переходной характеристике системы (рис.43) и поэтому называются *прямыми показателями качества переходных процессов*.

Время переходного процесса  $t_{\text{п}}$  характеризует быстроедействие системы и определяется как интервал времени от начала переходного процесса до мо-

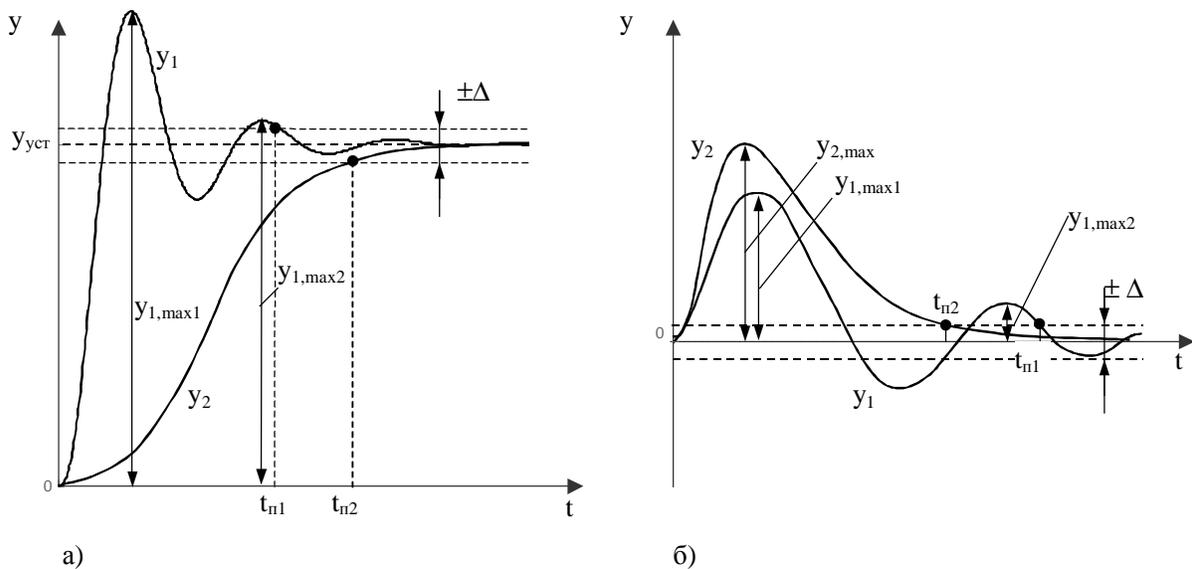


Рис. 43. Переходные характеристики системы по заданию (а) и возмущению (б).

мента, когда отклонение выходной величины от ее нового установившегося значения становится меньше определенной достаточно малой величины  $\Delta$  [7]. В качестве последней часто используется 5% от установившегося (либо номинального, среднего и т.д.) значения выходной величины. На практике  $\Delta$  может быть принята равной, например, максимальной абсолютной погрешности или пределу чувствительности измерительного преобразователя.

Максимальное отклонение определяется для переходной характеристики системы по возмущению и равно максимальному за время переходного процесса значению выходной величины. На рис. 43б для процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  максимальное отклонение обозначено соответственно как  $y_{1,max1}$  и  $y_{2,max}$ .

Перерегулирование определяется для переходных характеристик по задающему воздействию. Оно равно отношению максимального отклонения выходной величины от установившегося значения к самому установившемуся значению. Обычно перерегулирование выражают в процентах:

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}} 100\% . \quad (180)$$

Для процесса  $y_1(t)$  (рис. 43а)  $y_{max} = y_{1,max1}$ .

Для апериодических (неколебательных) процессов ( $y_2(t)$ ) на рис. 43а) перерегулирование равно нулю. Часто о таких процессах говорят как о *процессах без перерегулирования*.

Колебательность характеризует скорость затухания колебаний переходного процесса. Обычно колебательность определяют числом колебаний, равным числу минимумов кривой переходного процесса за время  $t_n$ . Иногда колебательность оценивают через отношение двух соседних максимальных

отклонений кривой от установившегося значения, которое либо выражают в процентах:

$$\frac{\Delta y_{\max 1}}{\Delta y_{\max 2}} 100\% = \frac{y_{\max 1} - y_{\text{уст}}}{y_{\max 2} - y_{\text{уст}}} 100\%, \quad (181)$$

либо используют для вычисления так называемого *логарифмического декремента затухания системы*

$$d_c = \ln \frac{\Delta y_{\max 1}}{\Delta y_{\max 2}}. \quad (182)$$

Кроме прямых показателей качества переходных процессов, существуют *косвенные* показатели. В частности, к ним относятся *интегральные, корневые* и *частотные*. Следует отметить, что все косвенные показатели являются средством синтеза, а не анализа САР, так как применяются в основном для настройки параметров регулирующих устройств.

Интегральные показатели являются интегралами в пределах от 0 до  $\infty$  некоторых функций, включающих  $y(t)$ . Наиболее часто используется так называемая *квадратичная интегральная оценка*:

$$I = \int_0^{\infty} (y_{\text{зад}}(t) - y(t))^2 dt, \quad (183)$$

которая представляет собой качественную оценку площади, заключенной между кривыми  $y_{\text{зад}}(t)$  и  $y(t)$ . Чем меньше величина  $I$ , тем меньше эта площадь и тем предпочтительнее переходной процесс.

Разработаны методы расчета оптимальных настроек регуляторов на минимум показателя  $I$ , которые получили название *методов расчета на минимальный интегральный критерий*.

Корневые показатели основаны на оценке качества переходных процессов по значениям полюсов и нулей передаточной функции системы. Основными из них являются *степень устойчивости* и *корневой показатель колебательности*.

Степень устойчивости  $\eta$  определяется минимальной по модулю вещественной частью полюса среди всех полюсов передаточной функции системы:

$$\eta = \min |\alpha_i|, \quad i = 1 \dots n, \quad (184)$$

где  $n$  – порядок знаменателя передаточной функции.

Согласно (179) полюс либо пара комплексно-сопряженных полюсов, имеющих вещественную часть равную  $-\eta$ , соответствуют самой длительной свободной составляющей переходной характеристики, поэтому степень устойчивости показывает быстродействие системы. Зная  $\eta$ , можно оценить время переходного процесса:

$$t_{\text{п}} \leq \frac{3}{\eta}. \quad (185)$$

Существует возможность использовать степень устойчивости как показатель, на который настраиваются параметры регулятора при синтезе системы. Однако следует отметить, что настройка системы на требуемое быстродействие, без учета других показателей, обычно приводит к тому, что синтезированная система обладает слишком большой колебательностью.

Корневым показателем колебательности  $m$  называется минимальное по модулю среди всех пар комплексно-сопряженных корней характеристического полинома замкнутой системы отношение действительной части корня к мнимой:

$$m = \min \left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right|, \quad i = 1 \dots k, \quad (186)$$

где  $k$  – число пар комплексно-сопряженных корней характеристического полинома замкнутой системы.

Расположение корней на комплексной плоскости иллюстрируется рис. 44. Легко показать, что если система обладает показателем колебательности  $m$ , то одна пара корней ее характеристического полинома лежит на лучах АО и ОВ, проведенных из начала координат под углом  $\arctg m$  к мнимой оси, а все остальные корни – внутри сектора АОВ.

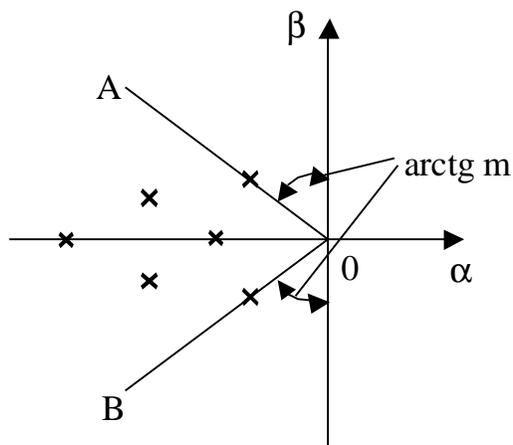


Рис. 44. К определению корневого показателя колебательности.

Корневой показатель колебательности служит оценкой колебательности переходной характеристики системы. Эта характеристика, как известно, формируется в виде суммы элементарных составляющих: аperiodических, соответствующих вещественным корням характеристического полинома, и гармонических, соответствующих комплексно-сопряженным парам корней.

Рассмотрим элементарную гармоническую составляющую

$$h_i = C_i e^{\alpha_i} \sin(\beta_i t + \varphi_i), \quad (187)$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  – вещественная и мнимая части корней пары  $\alpha_i \pm j\beta_i$  (для устойчивости системы, очевидно, необходимо, чтобы  $\alpha_i < 0$ );  $C_i$  – постоянная интегрирования;  $\varphi_i$  – фазовый сдвиг составляющей.

Определим колебательность данной составляющей как отношение двух соседних ее максимумов (рис. 45):

$$\frac{h_{i,\max 1}}{h_{i,\max 2}} = e^{\alpha_i \tau_i} = e^{\frac{2\pi\alpha_i}{\beta_i}} = e^{-2\pi \frac{|\alpha_i|}{|\beta_i|}} = e^{-2\pi m_i}, \quad (188)$$

где  $\tau_i = \frac{2\pi}{\beta_i}$  – период колебаний, а  $m_i = \frac{|\alpha_i|}{|\beta_i|}$  – показатель колебательности составляющей.

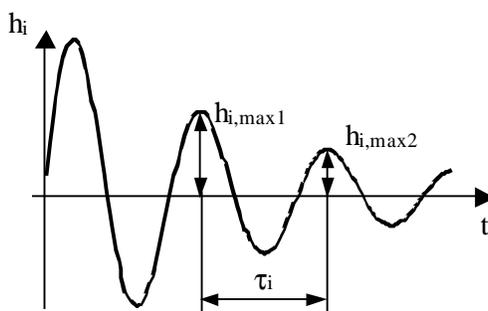


Рис. 45. К определению корневого показателя колебательности.

Таким образом, чем больше  $m_i$ , тем быстрее затухает данная составляющая характеристики. При этом минимальное значение  $m_i$  среди всех гармонических составляющих может служить оценкой колебательности всей переходной характеристики, так как соответствует наиболее медленно затухающей составляющей.

Значение  $m$  обычно задается в пределах 0,25...0,4.

Метод расчета регуляторов на заданное значение корневого показателя колебательности широко применяется на практике и поэтому подробно изложен в 5.2.4.

Частотные показатели качества переходных процессов позволяют судить о качестве по частотным характеристикам САР. При этом могут использоваться различные характеристики как замкнутой, так и разомкнутой системы.

Для минимально-фазовых систем качество переходных процессов может быть оценено по АЧХ замкнутой системы. Как известно, для таких систем АЧХ и ФЧХ однозначно связаны, и поэтому все свойства системы можно определить по одной амплитудной характеристике. Колебательность системы определяется по *частотному показателю колебательности*.

Частотный показатель колебательности есть отношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы к значению этой характеристики при нулевой частоте:

$$M = \frac{A_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})}{A_{\text{зам}}(0)} = \frac{|W_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})|}{W_{\text{зам}}(0)}, \quad (189)$$

где  $\omega_{\text{рез}}$  – резонансная частота, при которой и наблюдается максимум АЧХ системы (рис. 46).

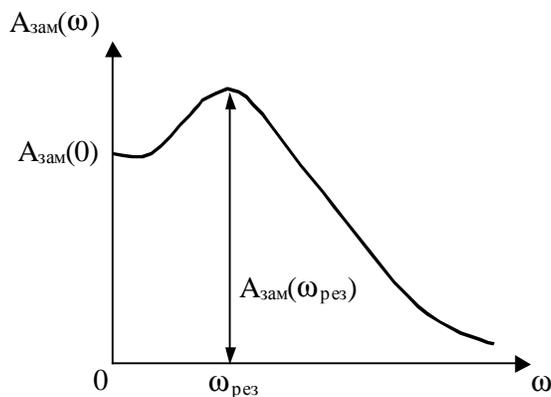


Рис. 46. К определению частотного показателя колебательности.

Частотный показатель колебательности косвенно оценивает колебательность системы. Чем больше  $M$ , тем более колебательной является ее переходная характеристика. При  $M = 1$  колебания в системе отсутствуют. При  $M \rightarrow \infty$  в системе присутствуют незатухающие колебания с частотой  $\omega_{\text{рез}}$ . Оптимальным обычно считается  $M = 1,1 \dots 1,5$ .

Методика расчета регуляторов на заданный частотный показатель колебательности приведена в 5.2.3.

Длительность переходного процесса определяется шириной  $A_{\text{зам}}(\omega)$ . При этом наблюдается «обратная» зависимость: чем «шире» частотная характеристика системы, тем короче ее переходная характеристика, т.е. тем меньше  $t_{\text{п}}$ . В первом приближении время переходного процесса может быть оценено по резонансной частоте  $\omega_{\text{р}}$ . Так как частота колебаний переходной характеристики равна примерно  $\omega_{\text{р}}$ , то время достижения первого максимума переходной характеристики близко половине периода колебаний этой частоты:

$$t_{\text{max1}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{р}}}. \quad (190)$$

Если предположить, что переходная характеристика в течение  $t_{\text{п}}$  имеет 1–2 колебания, то:

$$t_{\Pi} = (1..2) \frac{2\pi}{\omega_p}. \quad (191)$$

Качество переходных процессов может быть также определено по частотным характеристикам разомкнутых систем.

В первом приближении длительность и колебательность переходной характеристики могут быть оценены по частоте среза и величинам запасов по фазе и по амплитуде, определенных по АФЧХ или по ЛАЧХ и ФЧХ. При этом в случае колебательной переходной характеристики резонансная частота  $\omega_p$  АЧХ замкнутой системы близка к частоте среза  $\omega_c$ , и значения  $t_{\max 1}$  и  $t_{\Pi}$  могут быть определены по формулам (190) и (191) при подстановке в них  $\omega_p \approx \omega_c$ . В случае неколебательной переходной характеристики:

$$t_{\Pi} \approx \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (192)$$

Колебательность системы, как уже отмечалось, считается приемлемой, если запас по фазе не менее  $30^\circ$ , а по амплитуде не менее 0,5 (что соответствует 6 дБ по ЛАЧХ).

Существуют методы расчета регуляторов на заданные запасы устойчивости.

В случае минимально-фазовой системы для оценки качества переходных процессов может использоваться одна ЛАЧХ. Этот факт позволяет применять ЛАЧХ как средство синтеза. В частности широко используется метод, в котором структура и параметры регулятора определяются путем сопоставления желаемой (эталонной) ЛАЧХ разомкнутой системы и ЛАЧХ объекта регулирования (см. 5.3).

#### **4.2.4. Влияние коэффициента усиления разомкнутой системы на устойчивость и качество переходных процессов**

Рассмотрим влияние коэффициента регулятора на устойчивость и качество переходных процессов на примере системы, приведенной на рис. 47.

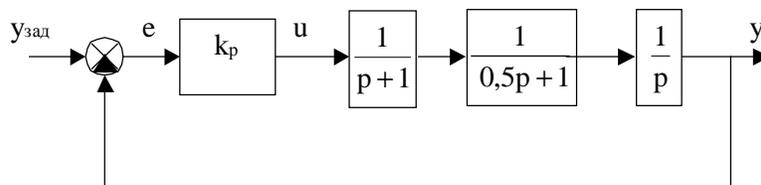


Рис. 47. Структурная схема САР.

Разомкнутая система нейтральна, так как состоит из устойчивых звеньев и одного нейтрального. Ее передаточная функция равна

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p}. \quad (193)$$

Корни характеристического полинома разомкнутой системы  $0, -1, -2$ .  
 Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2k_p}. \quad (194)$$

На рис. 48 приведен корневой годограф системы – зависимость положения ее полюсов на комплексной плоскости от коэффициента передачи регулятора.

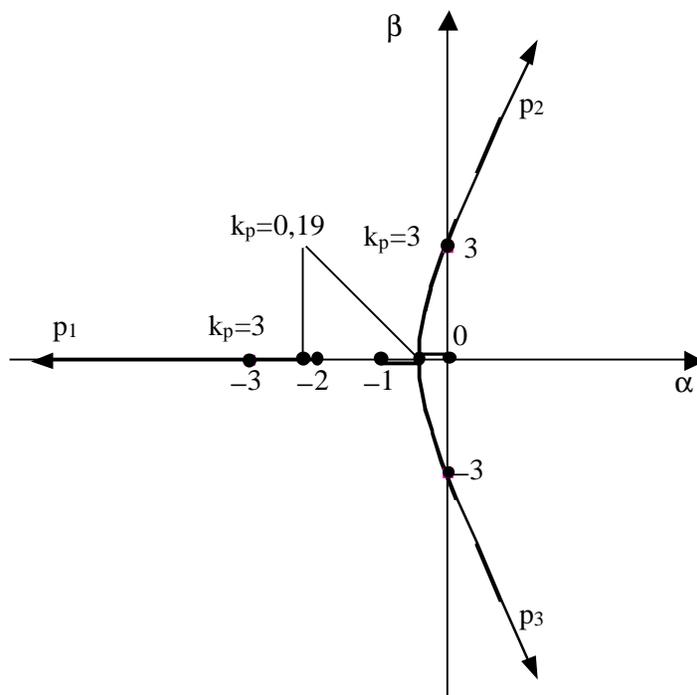


Рис. 48. Корневой годограф системы.

На рис. 49, 50 показаны переходные характеристики системы с различными значениями  $k_p$ .

Прокомментируем полученные результаты.

При  $k_p \rightarrow 0$ . Корни характеристического полинома замкнутой системы, как это видно из (194), стремятся к полюсам  $W_{\text{раз}}(p)$ :  $0, -1, -2$ .

В диапазоне коэффициентов передачи от  $k_p = 0$  до  $k_p \approx 0,19$  происходит «сближение» полюсов  $p_2$  и  $p_3$  и уменьшение полюса  $p_1$ . Переходные характеристики системы носят аperiodический характер, причем с увеличением  $k_p$  быстродействие системы растет.

При  $k_p \approx 0,19$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся равными  $-0,42$ . Полюс  $p_1$  принимает значение  $-2,15$ . Дальнейшее увеличение  $k_p$  приводит к тому, что полюса  $p_2$  и  $p_3$  вновь «расходятся», становясь комплексно-сопряженными. вещественные части полюсов и модуль мнимых частей увеличиваются. Полюс  $p_1$  по-прежнему уменьшается, оказывая все меньшее влияние на характер движения системы. Переходная характеристика становится колебательной, причем

перерегулирование и частота колебаний с ростом  $k_p$  увеличиваются. Время регулирования сначала уменьшается и достигает минимума при  $k_p \approx 0,3$ , когда колебания системы укладываются в 5% коридор. В дальнейшем время регулирования вновь увеличивается из-за возрастающей колебательности системы.

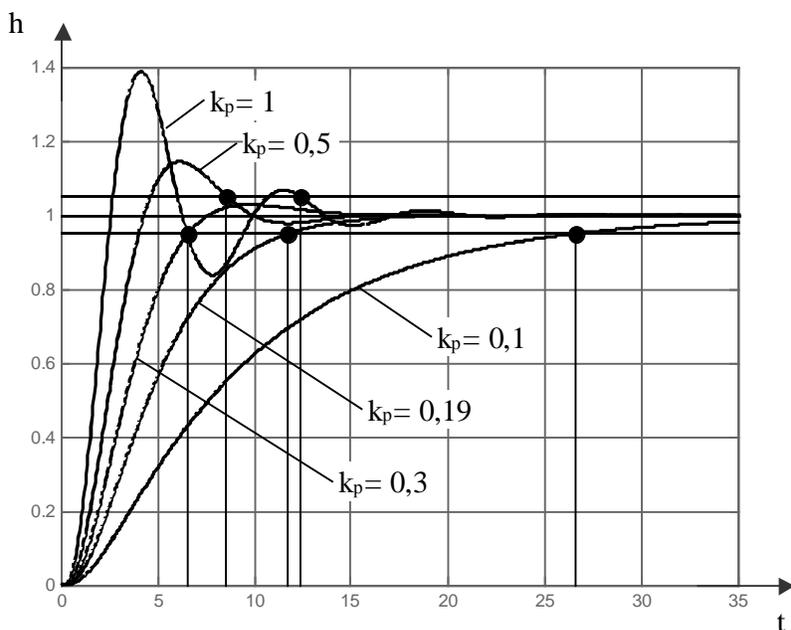


Рис. 49. Переходные характеристики системы при  $k_p = 0,1$ ; 0,19; 0,3; 0,5; 1.

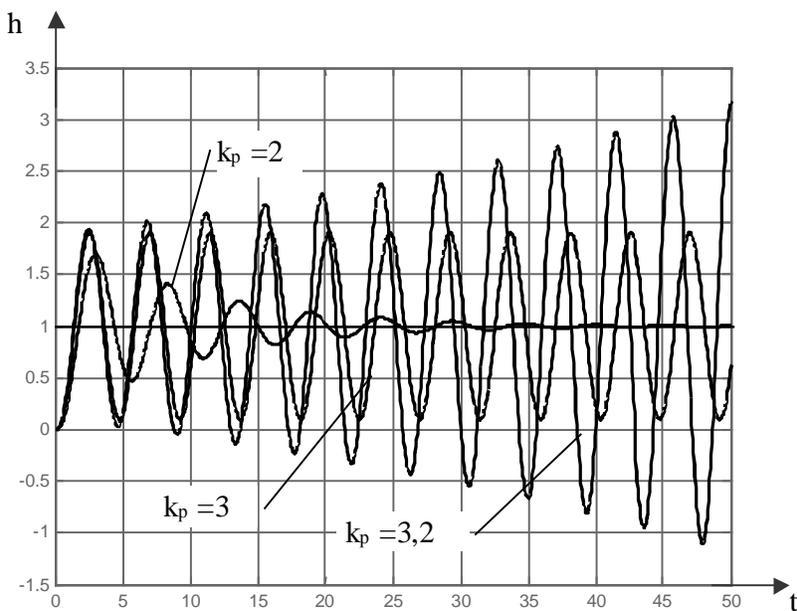


Рис. 50. Переходные характеристики системы при  $k_p = 2$ ; 3; 3,2.

При  $k_p = 3$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся чисто мнимыми, равными  $\pm 3j$ , и система выходит на границу устойчивости. Ее переходная характеристика принимает вид незатухающих колебаний с угловой частотой  $\omega = 3$  рад/сек.

Дальнейшее увеличение коэффициента передачи делает систему неустойчивой. При этом ее поведение определяется в основном парой правых комплексно-сопряженных корней  $p_2$  и  $p_3$ .

Приведенный пример позволяет сделать выводы, которые, хотя и являются частными, тем не менее справедливы для большинства САР.

*Увеличение коэффициента усиления разомкнутой системы, вызванное увеличением коэффициента передачи регулятора, приводит к тому, что все возрастающую роль при формировании переходной характеристики играет пара комплексно-сопряженных полюсов системы. вещественная часть полюсов этой пары уменьшается по модулю, а мнимая, наоборот, возрастает. Как следствие, увеличиваются частота колебаний и перерегулирование переходной характеристики, т.е. повышается колебательность системы. Время переходного процесса сначала уменьшается до определенного значения, потом вновь увеличивается. Максимальное быстродействие наблюдается для процессов с небольшим перерегулированием.*

*При определенном (критическом) значении коэффициента усиления два полюса системы становятся чисто мнимыми и система выходит на границу устойчивости. Дальнейшее увеличение коэффициента делает систему неустойчивой. Переходные процессы имеют вид расходящихся колебаний.*

## 5. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОЙ САР

### 5.1. Постановка задачи синтеза системы

Синтез системы состоит в выборе и настройке технических средств регулирования: первичных и вторичных измерительных преобразователей, контроллеров, усилителей, силовых преобразователей, исполнительных механизмов и т.д.

«Технический» этап синтеза, т.е. собственно выбор технических средств, проводится исходя из требований, предъявляемых технологическим процессом и других, в частности экономических, требований.

На «математическом» этапе синтеза рассматривается модель системы и определяются структура и параметры закона регулирования.

Обычно «технический» этап предшествует «математическому», т.е. закон регулирования реализуется на базе уже имеющихся технических средств. Этому способствует то, что современные микропроцессорные контроллеры «обслуживают», как правило, сразу несколько САР (на крупном производстве – до нескольких сот) и за счет гибкой логики могут «поддерживать» практически любые законы регулирования. Однако в особо ответственных случаях возможен и обратный порядок синтеза, когда сначала определяется закон регулирования, а потом «под него» выбирается техническое обеспечение.

Для определения закона регулирования, прежде всего, необходимо составить расчетную схему САР, в которой четко отделены друг от друга ее *неизменяемая* и *изменяемая части*.

К неизменяемой части, кроме объекта регулирования, относят все те технические средства, параметры которых не подлежат изменению. Эту часть в процедурах синтеза принято называть просто «объектом». Таким образом, «математический» объект следует отличать от «технического» объекта. В него, помимо математического описания собственно объекта регулирования, может входить математическое описание датчиков, исполнительных механизмов и других средств.

Изменяемая часть системы называется регулятором, или корректирующим устройством. Кроме алгоритмической схемы контроллера, в ее реализации могут участвовать и другие элементы САР. Часто, например, закон регулирования формируется совместно контроллером и исполнительным механизмом.

Таким образом, в простейшем случае расчетная схема САР включает всего два элемента: объект и регулятор. При расчете линейных одноконтурных систем эта схема обычно имеет вид, показанный на рис. 51.

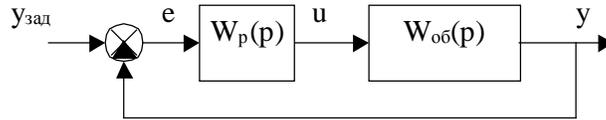


Рис.51. Расчетная схема САР.

Задача синтеза может быть сформулирована следующим образом: для объекта с передаточной функцией  $W_{об}(p)$  определить передаточную функцию регулятора  $W_p(p)$  – такую, чтобы обеспечивалось требуемое (либо наилучшее при заданных ограничениях) качество САР. Качество системы оценивается показателями, описанными в предыдущей главе.

Различают задачи *параметрического и структурно-параметрического синтеза* системы. В первом случае структура передаточной функции  $W_p(p)$  известна и необходимо найти только ее параметры, во втором требуется определить и структуру, и параметры  $W_p(p)$ .

## 5.2. Расчет промышленного регулятора

### 5.2.1. Типовые законы регулирования

На практике широкое распространение получили линейные регуляторы, реализующие один из так называемых типовых законов регулирования: пропорциональный (П), интегральный (И), пропорционально-интегральный (ПИ), пропорционально-дифференциальный (ПД), пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД).

Рассмотрим ПИД-закон регулирования, – другие законы можно считать его частными случаями. Идеальный ПИД-регулятор имеет передаточную функцию

$$W_p(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_{из}p} + T_d p \right) \quad (195)$$

и формирует управляющее воздействие на объект:

$$u(t) = k_p \left( e(t) + \frac{1}{T_{из}} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (196)$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи регулятора;  $T_{из}$  – изодромная постоянная времени;  $T_d$  – постоянная времени дифференцирования.

Отметим, что передаточная функция ПИД-регулятора (195) и его воздействие (196) в чистом виде нереализуемы, так как предполагают использование производной входного сигнала. Поэтому такой регулятор и назван идеальным. Реальные ПИД-регуляторы формируют приведенный выше закон регулирования приближенно.

Из (196) видно, что управляющее воздействие пропорционально сумме ошибки регулирования, интеграла ошибки и ее производной по времени. Отсюда становится ясным название ПИД-закона.

Воздействие на объект пропорционально разности между заданным и текущим значениями выходной величины является общим принципом автоматического (да и ручного) регулирования.

Введение в закон регулирования интегральной составляющей позволяет устранить статическую ошибку в САР. При этом, поскольку интегратор вводится в систему до места приложения всех возмущающих воздействий, в статике система будет нечувствительной ко всем возмущениям. Постоянная времени изодрома имеет определенный физический смысл – это время, в течение которого величина выходного сигнала регулятора удваивается при постоянном входном сигнале, подаваемом на регулятор.

Дифференциальная составляющая ПИД-закона призвана ускорить реакцию регулятора на изменения задающего и возмущающих воздействий. Это достигается за счет того, что в начальный момент переходного процесса, вызванного изменением какого-либо воздействия, когда величина ошибки  $e(t)$  еще мала, чтобы пропорциональная, а тем более интегральная составляющие регулятора смогли ее «почувствовать», скорость изменения ошибки уже достаточна, и дифференциальная составляющая эффективно реагирует на нее.

Как уже было сказано, П, И, ПИ и ПД законы являются частными случаями ПИД-закона регулирования. Так, полагая в (195)  $T_d = 0$ , получим ПИ-закон, полагая  $T_{из} = \infty$ , получим ПД-закон, при  $T_{из} = \infty, T_d = 0$  получим пропорциональный регулятор, а если принять  $k_p = 1, T_d = 0$  либо  $T_{из} = 1, T_d = 0$ , получим интегральный регулятор (передаточную функцию И-регулятора можно представить как  $\frac{1}{T_{из}p}$  либо как  $\frac{k_p}{p}$ ). Стоит отметить, что чисто дифференциальный («Д») закон не применяется, так как САР с таким регулятором неработоспособна. Это объясняется тем, что дифференциальный регулятор не реагирует на постоянную ошибку.

Естественно, исключая из ПИД-закона ту или иную составляющую, мы лишаемся и тех преимуществ, которые были с ней связаны. Так, в системах с П- и ПД-регуляторами присутствует статическая ошибка регулирования, а ПИ-регулятор является более медленным, чем ПИД-регулятор. Однако упрощение структуры регулятора в ряде случаев бывает оправданным, так как ведет к уменьшению стоимости системы. Если, например, оказывается, что пропорциональный или интегральный законы регулирования вполне удовлетворяют предъявляемым к системе требованиям, то иногда можно отказаться от регулятора как отдельного технического устройства. При этом функцию П-регулятора будет выполнять усилитель, который, как правило, необходимо присутствует в системе, а интегральный закон регулирования может быть реализован с помощью исполнительного механизма.

С другой стороны, современные регулирующие контроллеры, построенные на базе микропроцессорной техники, могут реализовать достаточно сложные алгоритмы обработки сигналов. Поэтому при расчете систем имеет смысл ориентироваться на более сложные и поэтому более эффективные законы регулирования.

### 5.2.2. Определение требований к оптимальным настройкам регулятора по критерию максимального подавления низкочастотных возмущений

Помимо управляющего воздействия, на объект регулирования действуют и возмущения. С учетом этого расчетную схему системы, приведенную на рис. 51, следует дополнить (рис. 52).

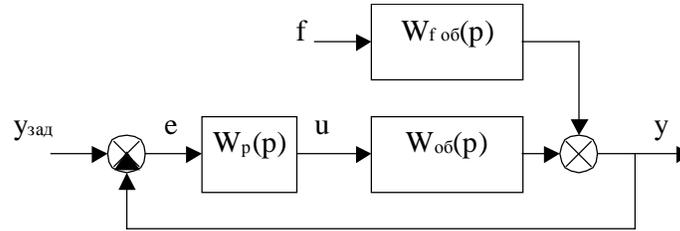


Рис. 52. Структура системы с учетом возмущения.

На рис. 51 обозначено:  $f$  – возмущающее воздействие;  $W_{f\text{ об}}(p)$  – передаточная функция объекта по данному воздействию. В общем случае возмущений и, соответственно, передаточных функций может быть несколько.

Преобразуем схему системы автоматического регулирования и представим ее в следующем виде (рис. 53).

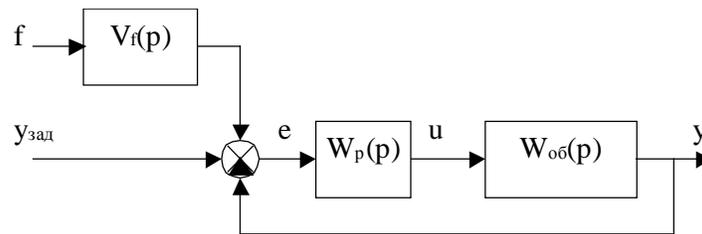


Рис. 53. К определению оптимальных настроек регуляторов.

Передаточная функция  $V_f(p)$  согласно правилам структурных преобразований равна

$$V_f(p) = \frac{W_{f\text{ об}}(p)}{W_{\text{ об}}(p)W_p(p)}. \quad (197)$$

Предположим, что возмущающее воздействие  $f$  имеет низкочастотную и высокочастотную составляющие. Будем считать, что высокочастотная составляющая возмущения подавляется самим объектом. Реакцию системы на низкочастотную составляющую необходимо минимизировать за счет оптимального выбора настроек регулятора. Для этого достаточно, чтобы эта составляющая не пропусклась фильтром  $V_f(p)$ , что и определяет требования к настройкам.

Разложим амплитудно-частотную характеристику  $|V_f(j\omega)|$  в ряд Тейлора вблизи нулевой частоты:

$$|V_f(j\omega)| = |V_f(j0)| + \left. \frac{d|V_f(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=0} \Delta\omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2|V_f(j\omega)|}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} \Delta\omega^2 + \dots \quad (198)$$

Для наилучшего подавления системой низкочастотных возмущений необходимо добиться выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} |V_f(j0)| = 0; \\ \left. \frac{d|V_f(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0; \\ \left. \frac{d^2|V_f(j\omega)|}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = 0; \\ \dots \end{cases} \quad (199)$$

Чем больше коэффициентов разложения обращается в нуль, тем лучше подавляются низкочастотные возмущения. Для системы с ПИД-регулятором АЧХ фильтра

$$|V_f(j\omega)| = \left| \frac{W_f(j\omega)}{W_{об}(j\omega)} \right| \frac{1}{k_p} \frac{T_{из}\omega}{\sqrt{(1 - T_d T_{из}\omega^2)^2 + T_{из}^2\omega^2}}. \quad (200)$$

Как видно из (200),  $|V_f(j0)| = 0$ . Производные выражения (198) при  $\omega=0$  принимают значения [3]:

$$\begin{cases} \left. \frac{d|V_f(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \frac{k_f}{k_{об}} \frac{T_{из}}{k_p}; \\ \left. \frac{d^2|V_f(j\omega)|}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = 0; \\ \left. \frac{d^3|V_f(j\omega)|}{d\omega^3} \right|_{\omega=0} = 0 \text{ при } T_d = 0,5T_{из}, \end{cases} \quad (201)$$

где  $k_{об}$ ,  $k_f$  – коэффициенты передачи объекта по управляющему и возмущающему воздействиям (в случае астатического объекта эти коэффициенты получаются при «исключении» свободных интеграторов из структуры объекта). Дальнейшие вычисления производных дают те же значения, что и первые три.

Таким образом, наилучшее подавление низкочастотных возмущений системой с ПИД-регулятором достигается при максимальном отношении коэффициента передачи регулятора к постоянной времени изодрома  $k_p/T_{из}$ . Постоянная времени дифференцирования  $T_d$  должна составлять половину  $T_{из}$ .

Аналогичным путем можно показать, что по принятому критерию для ПИ-регулятора оптимальным вариантом настройки будет тот, для которого

отношение  $k_p/T_{из}$  максимально. В пропорциональном, интегральном и ПД- регуляторах наилучшему подавлению низкочастотных возмущений соответствует максимально возможный коэффициент передачи регулятора.

### 5.2.3. Расчет регулятора на заданное значение частотного показателя колебательности

Определение частотного показателя колебательности приведено в 4.2.3.

Излагаемый ниже метод, строго говоря, ориентирован на обеспечение требуемого значения максимума АЧХ  $A_{зам}(\omega_{рез})$ , а не показателя колебательности. Однако для реальных систем эти величины практически совпадают, так как  $A_{зам}(0)$  равно или близко к единице. Для статических систем  $A_{зам}(0)$  обычно немного меньше единицы, что объясняется присутствием в них статической ошибки. В астатических системах статическая ошибка отсутствует и  $A_{зам}(0) = 1$ .

Рассмотрим связь частотных характеристик разомкнутой и замкнутой систем. Как известно, АФЧХ замкнутой системы выражается через АФЧХ разомкнутой следующим образом:

$$W_{зам}(j\omega) = \frac{W_{раз}(j\omega)}{1 + W_{раз}(j\omega)}. \quad (202)$$

Из (202) получим

$$W_{зам}(j\omega) = \frac{1}{1/W_{раз}(j\omega) + 1} = \frac{1}{1 - V(j\omega)}, \quad (203)$$

где  $V(j\omega) = -\frac{1}{W_{раз}(j\omega)}$  – инверсная обратная характеристика разомкнутой системы.

На рис. 54 показан фрагмент  $V(j\omega)$ , по которому из геометрических соображений определяются резонансная частота  $\omega_{рез}$  и максимальное значение АЧХ замкнутой системы  $A_{зам}(\omega_{рез})$ .

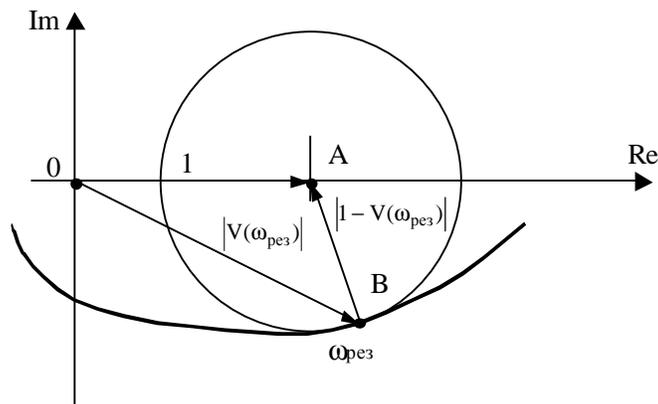


Рис. 54. Определение резонансной частоты по  $V(j\omega)$ .

Из (203) получаем:

$$A_{\text{зам}}(\omega) = \frac{1}{|1 - V(j\omega)|} = \frac{1}{|\overline{BA}|}. \quad (204)$$

Следовательно, максимуму  $A_{\text{зам}}(\omega)$  соответствует минимум модуля вектора  $\overline{BA}$  (см. рис. 54). Для определения положения точки В, которое обеспечит этот минимум, необходимо из точки А провести окружность, касающуюся кривой  $V(j\omega)$ . Точка касания и будет соответствовать резонансной частоте.

Пусть теперь  $A_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})$  задано и равно  $\Lambda$ . Определим требования к АФЧХ разомкнутой системы, обеспечивающие заданное значение  $A_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})$ .

$$\Lambda = \frac{1}{|1 - V(j\omega)|} = \frac{1}{\left|1 + \frac{1}{P(\omega) + jQ(\omega)}\right|} = \frac{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}{\left|P^2(\omega) + Q^2(\omega) + P(\omega) - jQ(\omega)\right|}, \quad (205)$$

где  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  – вещественная и мнимая частотные характеристики разомкнутой системы.

Из (205) получим

$$\Lambda^2 = \frac{(P^2(\omega) + Q^2(\omega))^2}{(P^2(\omega) + Q^2(\omega) + P(\omega))^2 + Q^2(\omega)}, \quad (206)$$

откуда после несложных преобразований

$$\Lambda^2 = \frac{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}{(P(\omega) + 1)^2 + Q^2(\omega)}, \quad (207)$$

или

$$P^2(\omega) + 2P(\omega) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - 1} + Q^2(\omega) = \frac{\Lambda^2}{1 - \Lambda^2}. \quad (208)$$

Прибавим к левой и правой частям уравнения (208)  $\frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 - 1)^2}$  и окончательно получим

$$\left(P(\omega) + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - 1}\right)^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^2 - 1}\right)^2. \quad (209)$$

Уравнение (209) описывает окружность с радиусом

$$r^* = \frac{\Lambda}{\Lambda^2 - 1}, \quad (210)$$

с центром, лежащим на отрицательной вещественной полуоси и отстоящим от начала координат на расстояние

$$R^* = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - 1}. \quad (211)$$

Этой окружности должна касаться АФЧХ разомкнутой системы, чтобы максимум АЧХ замкнутой системы был равен  $\Lambda$ .

Перейдем теперь к методике расчета регуляторов.

Исходную систему приводят к расчетной схеме, изображенной на рис. 55.

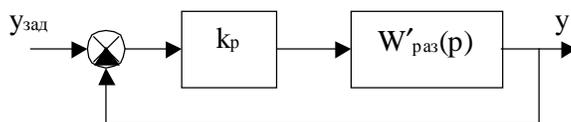


Рис. 55. Расчетная схема системы.

Искомой величиной является коэффициент передачи регулятора  $k_p$ . Передаточная функция  $W'_{раз}(p)$  представляет собой передаточную функцию последовательного соединения всех элементов САУ, в том числе и регулятора (с единичным коэффициентом передачи).

Например, если рассчитывается ПИД-регулятор с передаточной функцией (195), то подлежит определению только величина  $k_p$ . Постоянные времени  $T_{из}$  и  $T_d$  задаются, а множитель  $\left(1 + \frac{1}{T_{из}p} + T_d p\right)$  вносится в  $W'_{раз}(p)$ .

Для определения коэффициента передачи регулятора  $k_p$  на комплексной плоскости строят АФЧХ разомкнутой системы  $W'_{раз}(j\omega)$  (рис. 56).

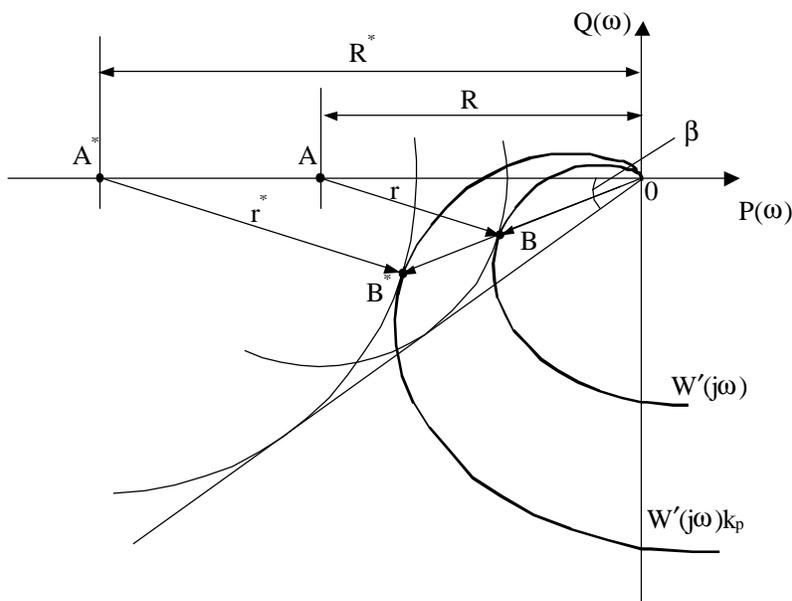


Рис. 56. Определение коэффициента передачи регулятора по заданному частотному показателю колебательности.

Из начала координат под углом  $\beta = \arcsin \frac{1}{\Lambda}$  к отрицательной вещественной полуоси проводят луч. Затем циркулем чертят окружность с центром на вещественной отрицательной полуоси, касающуюся одновременно АФЧХ системы и луча (на рис. 55 центр построенной окружности лежит в точке А).

Радиус этой окружности  $r$  связан с коэффициентом передачи регулятора следующим соотношением:

$$k_p = \frac{r^*}{r} = \frac{\Lambda}{(\Lambda^2 - 1)r}. \quad (212)$$

Можно также определить  $k_p$  через  $R$ :

$$k_p = \frac{R^*}{R} = \frac{\Lambda^2}{(\Lambda^2 - 1)R}. \quad (213)$$

Приведем краткое объяснение изложенной методики. Упомянутый выше луч строят для того, чтобы обеспечить требуемое отношение  $\frac{r}{R} = \frac{r^*}{R^*} = \frac{1}{\Lambda}$  для проводимой окружности. Формулы (212), (213) следуют из подобия треугольников  $A^*B^*O$  и  $ABO$ .

Рассмотрим вопросы применения рассмотренной методики для различных типов регуляторов.

При расчете П-регулятора  $W'_{раз}(p) = W_{об}(p)$  и поэтому приведенных построений достаточно, чтобы определить единственный коэффициент его настройки  $k_p$ . Для других регуляторов, очевидно, необходимо перед расчетом  $k_p$  найти  $W'_{раз}(p)$ . Кроме того, так как ПИ-, ПД- и ПИД-регуляторы имеют несколько параметров настройки, расчет таких регуляторов на требуемый частотный показатель колебательности не может дать однозначного решения и, следовательно, необходимо использовать дополнительные критерии выбора вариантов настройки.

Если применяют И-регулятор, то АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{раз}(j\omega) = \frac{k_p}{j\omega} W_{об}(j\omega) = \frac{k_p W_{об}(j\omega)}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (214)$$

При  $k_p = 1$

$$W'_{раз}(j\omega) = \frac{W_{об}(j\omega)}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (215)$$

т. е. для того, чтобы получить требуемую АФЧХ разомкнутой системы, необходимо каждый вектор АФЧХ объекта повернуть на  $90^\circ$  по ходу часовой стрелки, одновременно уменьшив его в  $\omega$  раз (рис. 57).

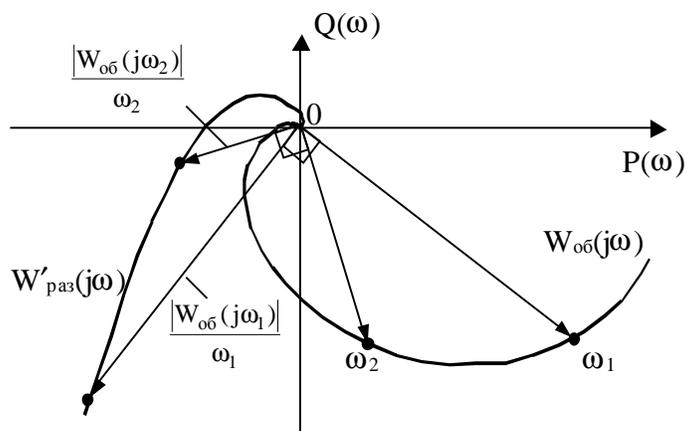


Рис. 57. Построение АФЧХ разомкнутой системы с И-регулятором.

При использовании ПИ-регулятора АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = k_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_{\text{из}}} \right) W_{\text{об}}(j\omega), \quad (216)$$

следовательно:

$$W'_{\text{раз}}(j\omega) = W_{\text{об}}(j\omega) + \frac{W_{\text{об}}(j\omega)}{\omega T_{\text{из}}} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (217)$$

т.е. к каждому вектору АФЧХ объекта (для определенной частоты  $\omega_i$ ) необходимо прибавить вектор, повернутый относительно вектора  $W_{\text{об}}(j\omega_i)$  на  $90^\circ$  по ходу часовой стрелки, модуль которого равен  $\frac{|W_{\text{об}}(j\omega_i)|}{\omega_i T_{\text{из}}}$ .

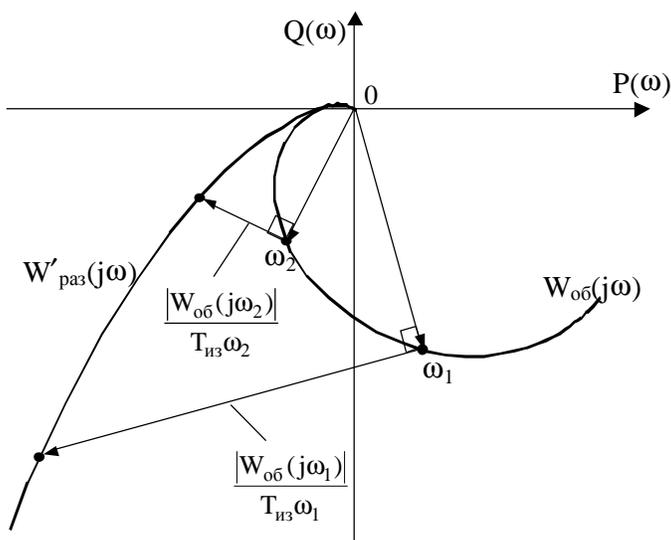


Рис. 58. Построение АФЧХ разомкнутой системы с ПИ-регулятором.

В данном случае строят семейство характеристик для нескольких значений времени изодрома:  $T_{из1}, T_{из2}, \dots, T_{изn}$  (значениями времени изодрома задаются). Для каждого  $T_{из1}, T_{из2}, \dots, T_{изn}$  по найденному радиусу  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , используя выражение (212), определяют значение коэффициентов  $k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pn}$  передачи регулятора.

Окончательный выбор варианта настроек осуществляется по дополнительным критериям. Если в качестве такого критерия применяется критерий наилучшего подавления системой низкочастотных возмущений, то оптимальным вариантом будет тот, для которого отношение  $k_p/T_{из}$  максимально.

При использовании ПД-регулятора АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{раз}(j\omega) = k_p(1 + j\omega T_d)W_{об}(j\omega), \quad (218)$$

откуда

$$W'_{раз}(j\omega) = W_{об}(j\omega) + T_d \omega W_{об}(j\omega) e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (219)$$

Из (219) видно, что при построении АФЧХ разомкнутой системы к каждому вектору АФЧХ объекта  $W_{об}(j\omega_i)$  добавляется вектор, повернутый относительно последнего на  $90^\circ$  против часовой стрелки, модуль которого равен  $T_d \omega |W_{об}(j\omega_i)|$ .

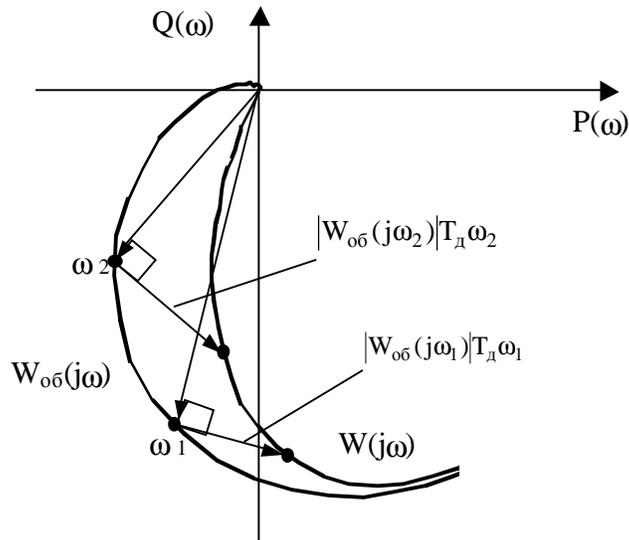


Рис. 59. Построение АФЧХ разомкнутой системы с ПД-регулятором.

В данном случае строят семейство характеристик для нескольких значений постоянной времени дифференцирования:  $T_{д1}, T_{д2}, \dots, T_{дn}$  (постоянными времени дифференцирования задаются). Для каждого  $T_{д1}, T_{д2}, \dots, T_{дn}$  по найденному радиусу  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , используя выражение (212), определяют значение коэффициентов  $k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pn}$  передачи регулятора.

Окончательный выбор варианта настроек осуществляется по дополнительным критериям. Если в качестве такого критерия применяется критерий наилучшего подавления системой низкочастотных возмущений, то оптимальным вариантом будет тот, для которого значение  $k_p$  максимально.

При использовании ПИД-регулятора АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = k_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_{\text{из}}} + j\omega T_{\text{д}} \right) W_{\text{об}}(j\omega), \quad (220)$$

откуда

$$W'_{\text{раз}}(j\omega) = W_{\text{об}}(j\omega) \left( 1 + j \times \left( \frac{T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega^2 - 1}{\omega T_{\text{из}}} \right) \right). \quad (221)$$

Таким образом, чтобы получить АФЧХ разомкнутой системы с ПИД-регулятором, нужно к каждому вектору АФЧХ объекта (для определенной частоты  $\omega_i$ ) прибавить вектор, повернутый относительно вектора  $W_{\text{об}}(j\omega_i)$  на  $90^\circ$ , модуль которого равен  $|W_{\text{об}}(j\omega_i)| \left( \frac{T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega_i^2 - 1}{\omega_i T_{\text{из}}} \right)$ . Направление поворота

этого вектора определяется следующим образом:

при  $T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega_i^2 - 1 < 0$  – по часовой стрелке,

при  $T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega_i^2 - 1 > 0$  – против часовой стрелки.

Из выражения (221) также видно, что на малых частотах ( $\omega \rightarrow 0$ ) АФЧХ разомкнутой системы приближается к АФЧХ разомкнутой системы с ПИ-регулятором:

$$W(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} W_{\text{об}}(j\omega) \left( 1 - j \frac{1}{\omega T_{\text{из}}} \right). \quad (222)$$

На больших частотах ПИД-регулятор ведет себя как ПД-регулятор:

$$W(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} W_{\text{об}}(j\omega) (1 + j\omega T_{\text{д}}). \quad (223)$$

На частоте  $\omega = \sqrt{\frac{1}{T_{\text{из}} T_{\text{д}}}}$  ПИД-регулятор «становится» П-регулятором, а

АФЧХ разомкнутой системы с учетом того, что  $k_p = 1$ , совпадает с АФЧХ объекта (рис. 60).

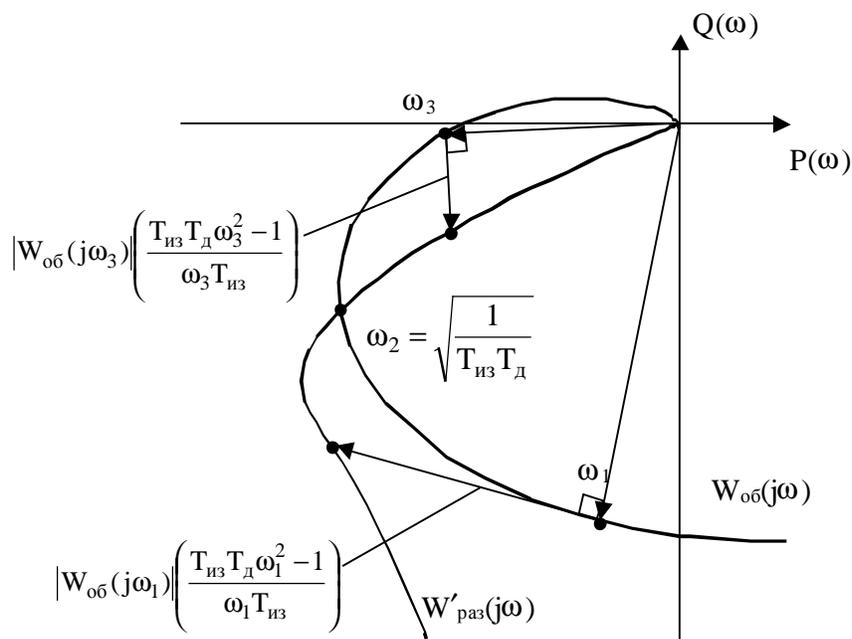


Рис. 60. Построение АФЧХ разомкнутой системы с ПИД-регулятором.

В данном случае для построения АФЧХ разомкнутой системы необходимо задаваться двумя величинами –  $T_{из}$  и  $T_{д}$ . Упростить задачу можно, если воспользоваться критерием максимального подавления низкочастотных возмущений, который, как показано ранее, устанавливает связь между постоянными времени:  $T_{д} = 0,5T_{из}$ . Далее, как и для ПИ-регулятора, задавшись несколькими значениями  $T_{из}$ , строят семейство характеристик, по которым определяют несколько вариантов  $k_p$ . Оптимальным будет вариант, для которого отношение  $k_p/T_{из}$  максимально.

#### 5.2.4. Расчет параметров настройки регуляторов на заданный корневой показатель колебательности

Определение корневого показателя колебательности изложено в 4.2.3.

Покажем, как этот показатель может быть использован при синтезе САУ. Для этого осуществим преобразование координат на комплексной плоскости, в которой располагаются корни характеристического полинома замкнутой системы. Перейдем от системы координат  $p = \alpha + \beta j$  к системе  $q = \alpha' + \beta' j$  с помощью преобразования

$$q = \frac{p}{\sqrt{m^2 + 1}} \times e^{-j \cdot \arctg m} \quad (224)$$

Первый множитель выражения (224) соответствует уменьшению модуля вектора в новой системе в  $\sqrt{m^2 + 1}$  раз, а второй – повороту вектора на угол  $\arctg m$  по часовой стрелке.

Поворот вектора означает, что если в старой системе координат имелись пара корней, расположенных на лучах АО и ОВ (см. рис. 44) и харак-

теризующихся показателем колебательности  $m$ , то в новой системе корень, ранее лежащий на луче АО, попадет на мнимую ось, что соответствует выходу САР «на границу устойчивости» (термин «граница устойчивости» для преобразованной системы имеет условный характер).

Рассмотрим обратное преобразование:

$$p = q \times \sqrt{m^2 + 1} \times e^{j \cdot \arctg m} = q \times (1 + jm). \quad (225)$$

Для использования частотных методов исследования САР в новой системе координат заменим  $q$  на  $j\omega$ , тогда:

$$p = j\omega \times (1 + jm) = (j - m)\omega. \quad (226)$$

Таким образом, частотные характеристики САР в новой системе координат можно получить путем замены в соответствующих передаточных функциях САР оператора  $p$  на оператор  $(j - m)\omega$ . При этом важно для синтеза системы то, что *если в старой системе координат САР имеет показатель колебательности  $m$ , то преобразованная система находится «на границе устойчивости»*. Это обстоятельство позволяет сформулировать следующий порядок расчета регуляторов на заданный корневой показатель колебательности:

1) задаваясь требуемым значением  $m$ , заменяем в передаточной функции САР оператор  $p$  на оператор  $(j - m)\omega$  и получаем частотную характеристику системы в новой системе координат как функцию неизвестных настроек регулятора;

2) выбором коэффициентов настройки регулятора добиваемся, чтобы частотная характеристика САР в новой системе координат соответствовала нахождению системы управления «на границе устойчивости».

На втором этапе используются хорошо известные частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста. Так, если используется критерий Михайлова, расчет настроек регулятора производится из условия

$$D((j - m)\omega) = 0, \quad (227)$$

где  $D((j - m)\omega)$  – частотная характеристика (годограф) Михайлова, которая в данном случае рассчитывается путем замены в характеристическом полиноме замкнутой системы оператора  $p$  на оператор  $(j - m)\omega$ .

Очевидно, что выражение (227) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D((j - m)\omega)] = 0, \\ \operatorname{Im}[D((j - m)\omega)] = 0. \end{cases} \quad (228)$$

В случае применения критерия Найквиста используется уравнение

$$W_{\text{раз}}((j - m)\omega) = W_{\text{об}}((j - m)\omega)W_p((j - m)\omega) = -1, \quad (229)$$

где  $W_{\text{раз}}((j - m)\omega)$ ,  $W_{\text{об}}((j - m)\omega)$ ,  $W_p((j - m)\omega)$  – АФЧХ разомкнутой САУ, объекта регулирования и регулятора в новой системе координат. Данные ха-

рактические характеристики получили название *расширенных амплитудно-фазовых частотных характеристик (РАФЧХ)*. Поэтому метод расчета регуляторов на заданный корневой показатель колебательности с помощью критерия Найквиста называется *методом расчета по РАФЧХ*.

Выражение (229) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[W_{об}(m, j\omega)W_p(m, j\omega)] = -1, \\ \operatorname{Im}[W_{об}(m, j\omega)W_p(m, j\omega)] = 0. \end{cases} \quad (230)$$

Таким образом, для расчета коэффициентов настройки регулятора необходимо решить одну из систем из двух алгебраических уравнений (228 или 230).

При расчете П- или И-регулятора имеем две неизвестные величины: коэффициент передачи регулятора  $k_p$  (либо постоянная времени интегрирования  $T_i$  для И-регулятора) и частоту  $\omega$ . Поэтому системы (228), (230) имеют единственное решение.

Так, для П-регулятора система (230) принимает вид:

$$\begin{cases} P_{об}(\omega, m)k_p = -1, \\ Q_{об}(\omega, m)k_p = 0, \end{cases} \quad (231)$$

где  $P(\omega, m)$  и  $Q(\omega, m)$  – вещественная и мнимая части РАФЧХ объекта.

Из второго уравнения системы (231) для заданного  $m$  определяется частота  $\omega$ . Подставляя  $\omega$  в первое уравнение, находим  $k_p$ .

Для И-регулятора с передаточной функцией  $W_p = \frac{k_p}{p}$  систему (230)

можно представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{(Q_{об}(\omega, m) - P_{об}(\omega, m)m)k_p}{(m^2 + 1)\omega} = -1, \\ -\frac{(P_{об}(\omega, m) + Q_{об}(\omega, m)m)k_p}{(m^2 + 1)\omega} = 0. \end{cases} \quad (232)$$

Последовательность решения системы в данном случае такая же, как и для П-регулятора.

При использовании ПИ и ПД законов регулирования число неизвестных равняется трем: для ПИ-регулятора необходимо определить  $k_p$ ,  $T_{из}$  и  $\omega$ , для ПД-регулятора –  $k_p$ ,  $T_d$  и  $\omega$ . Таким образом, системы не имеют однозначного решения и одному значению показателя  $m$  соответствует множество пар значений настроек регулятора, различающихся частотами  $\omega$ . Поэтому необходимо рассчитать несколько вариантов настроек для различных частот, а для выбора оптимального варианта – воспользоваться каким-либо другим критерием, – например, критерием максимального подавления низкочастотных помех. Напомним, что согласно этому критерию наилучшему подавлению низ-

кочастотных возмущений системой соответствуют максимум отношения  $k_p/T_{из}$  для ПИ-регулятора и максимум  $k_p$  – для ПД-регулятора.

Ниже приведены формулы для расчета настроек ПИ- и ПД-регуляторов на заданный показатель колебательности  $m$ . Эти формулы получены непосредственно из решения системы (230).

$$\text{Для ПИ-регулятора с передаточной функцией } W_p = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_{из}p} \right)$$

$$k_p = -\frac{P_{об}(\omega, m) + Q_{об}(\omega, m)m}{P_{об}^2(\omega, m) + Q_{об}^2(\omega, m)}, \quad T_{из} = \frac{P_{об}(\omega, m) + Q_{об}(\omega, m)m}{Q_{об}(\omega, m)\omega(m^2 + 1)}. \quad (233)$$

$$\text{Для ПД-регулятора с передаточной функцией } W_p = k_p(1 + T_d p)$$

$$k_p = \frac{Q_{об}(\omega, m)m - P_{об}(\omega, m)}{P_{об}^2(\omega, m) + Q_{об}^2(\omega, m)}, \quad T_d = \frac{Q_{об}(\omega, m)}{(Q_{об}(\omega, m)m - P_{об}(\omega, m))\omega}. \quad (234)$$

При расчете ПИД-регулятора неизвестными, подлежащими определению, являются четыре переменных:  $k_p$ ,  $T_{из}$ ,  $T_d$  и  $\omega$ . Применяя в качестве дополнительного критерий максимального подавления низкочастотных помех, можно сформулировать два ограничения на решение систем (228),(230):

$$k_p/T_{из} \rightarrow \max, \quad (235)$$

$$T_d = 0,5T_{из}. \quad (236)$$

Условие (236) позволяет «избавиться» от переменной  $T_d$  при решении задачи, а (235) дает возможность окончательного выбора варианта настроек. Примем для общности  $T_d = \alpha T_{из}$ . Тогда из решения системы (230) для ПИД-регулятора получаем:

$$k_p = -\left( P_{об}(\omega, m) - \alpha T_{из} \omega (Q_{об}(\omega, m) + P_{об}(\omega, m)m) + \frac{Q_{об}(\omega, m) - P_{об}(\omega, m)m}{T_{из} \omega (m^2 + 1)} \right)^{-1},$$

$$T_{из} = \frac{-Q_{об}(\omega, m) \pm \sqrt{Q_{об}^2(\omega, m) + \frac{4\alpha(P_{об}^2(\omega, m) - Q_{об}^2(\omega, m)m^2)}{m^2 + 1}}}{2\alpha\omega(P_{об}(\omega, m) - Q_{об}(\omega, m)m)}. \quad (237)$$

Результаты многочисленных расчетов показывают, что для построения устойчивой системы при расчете  $T_{из}$  по (237) следует использовать знак «-».

В заключение отметим, что расчет регуляторов по расширенным АФЧХ в общем случае не гарантирует обеспечения требуемого значения корневого показателя колебательности для замкнутой системы. Гарантируется лишь прохождение РАФХ через точку  $\{-1,0\}$ , что, очевидно, означает, что одна из пар

комплексно сопряженных полюсов замкнутой системы будет характеризоваться заданным показателем колебательности  $m$ . Другие пары полюсов могут иметь большие отношения  $\left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right|$  и даже быть правыми. Это следует из логики

обоснования метода и, кроме того, объясняется тем, что РАФХ в некотором смысле искусственная характеристика, для которой, как уже отмечалось, понятие границы устойчивости по критерию Найквиста имеет лишь условный характер. Поэтому результаты расчета всегда нуждаются в проверке. Однако чаще всего заданному показателю колебательности соответствует пара полюсов, наиболее близкая к мнимой оси, а другие полюса оказываются расположенными намного левее и, следовательно, намного меньше влияют на переходные процессы в системе. Поэтому расчет настроек регулятора по РАФЧХ в большинстве случаев дает удовлетворительные результаты.

### 5.3. Расчет корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик

Метод предложен В.В. Солодовниковым и предполагает определение структуры и параметров корректирующего устройства путем сопоставления логарифмической амплитудно-частотной характеристики исходной системы (объекта) с желаемой характеристикой. Расчетная схема системы представлена на рис. 61.

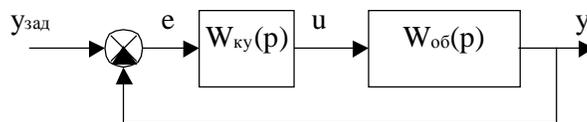


Рис. 61. Расчетная схема САР.

Здесь, как и ранее, под объектом подразумевается вся неизменяемая часть системы, включая собственно объект управления, исполнительные механизмы, усилители, датчики и т.д. Необходимо определить передаточную функцию корректирующего устройства  $W_{кy}(p)$  – такую, чтобы логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы была равна или близка заданной (желаемой). Таким образом, необходимо решить две задачи: 1) определить желаемую характеристику системы; 2) рассчитать корректирующее устройство, которое эту характеристику обеспечит.

При построении желаемой характеристики скорректированной системы автоматического регулирования следует исходить из следующих требований:

1) скорректированная система должна удовлетворять заданным показателям качества (допустимые значения ошибок в установившихся режимах, величина перерегулирования « $\sigma$ » и время регулирования  $t_p$  в динамических режимах);

2) желаемая ЛАЧХ для простоты исполнения корректирующего устройства должна по возможности меньше отличаться от характеристики исходной системы;

3) передаточная функция корректирующего устройства должна быть физически реализуема: порядок ее числителя не должен быть больше порядка знаменателя. Это означает, что наклон высокочастотной части желаемой характеристики не может быть меньше (по модулю) наклона ЛАЧХ исходной системы.

Существуют общие рекомендации к построению желаемой ЛАЧХ системы [2,4,7].

Следует стремиться к тому, чтобы желаемая ЛАЧХ пересекала ось частот с наклоном  $-20$  дБ/дек. Наклон первой (низкочастотной) асимптоты характеристики определяется порядком астатизма и может быть равен:  $0$  дБ/дек,  $-20$  дБ/дек,  $-40$  дБ/дек. Уровень этой асимптоты определяется требованиями к точности САР в стационарных режимах. Участок характеристики, сопрягающий среднечастотную часть с низкочастотной асимптотой, может иметь наклон:  $-20$  дБ/дек;  $-40$  дБ/дек;  $-60$  дБ/дек. На высоких частотах желаемая ЛАЧХ не должна проходить выше ЛАЧХ нескорректированной системы более чем на  $20$  дБ и должна строиться с учетом простоты реализации корректирующего устройства.

Примерный вид желаемой ЛАЧХ с учетом этих рекомендаций приведен на рис.62.

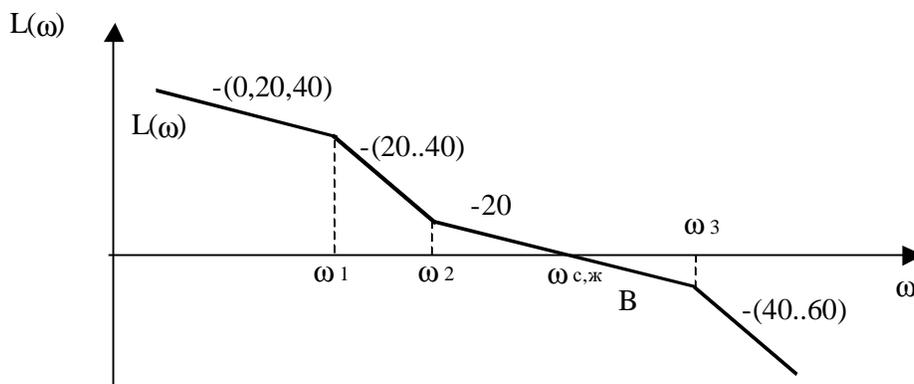


Рис. 62. Желаемая ЛАЧХ разомкнутой системы.

Желаемая частота среза определяется по приближенной формуле:

$$\omega_{с,ж} = (1 \div 2) \frac{2\pi}{t_p}, \quad (238)$$

где  $t_p$  – заданное время регулирования в переходном процессе при единичном скачкообразном входном воздействии и нулевых начальных условиях.

Частоты излома  $\omega_1$  и  $\omega_2$  среднечастотной части ЛАХ можно определить из приближенных соотношений:

$$\omega_3 \approx (2..4)\omega_{с,ж}, \quad (239)$$

$$\omega_2 \approx \frac{\omega_{с,ж}^2}{\omega_3}. \quad (240)$$

Построенная таким образом ЛАЧХ соответствует системе с колебательной переходной характеристикой, имеющей перерегулирование до 30 – 40%. Длительность переходной характеристики определяется заданной частотой среза (192, 238).

Если требуется задавать характеристики проектируемой системы более точно, применяются так называемые типовые ЛАЧХ, параметры которых определяют с помощью номограмм по требуемым показателям качества.

На рис. 63 показана типовая ЛАЧХ  $L(\omega)$  разомкнутой системы с астатизмом первого порядка, по которой ниже определяется качество переходной характеристики  $h(t)$  замкнутой системы [7].

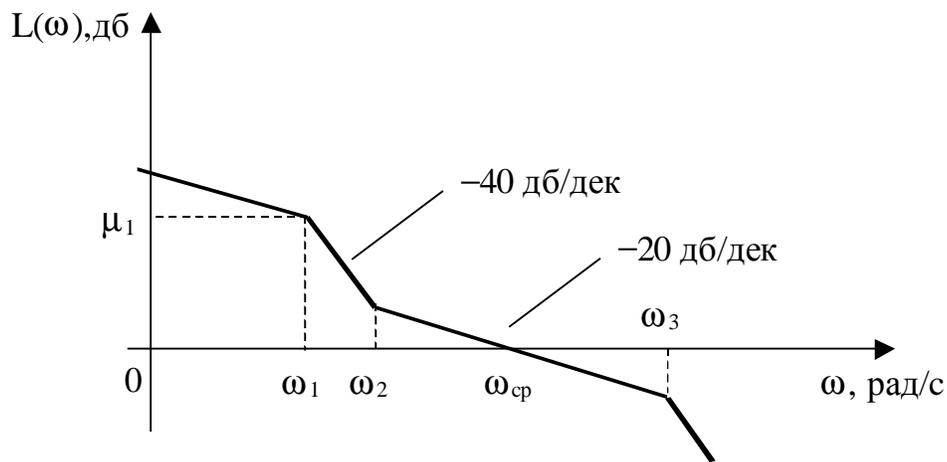


Рис. 63. Типовая ЛАЧХ с астатизмом первого порядка.

Передаточная функция разомкнутой системы, соответствующая данной характеристике:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}. \quad (241)$$

Через  $\mu_1$  обозначена величина ординаты при  $\omega = \omega_1 = 1/T_1$ .

На рис.64–66 приведены номограммы для определения:  $h_{\text{макс}}$  – максимума переходной характеристики (сплошные линии) и  $A_{з, \text{макс}}/A_{з, (0)}$  – относительного максимума амплитудной частотной характеристики замкнутой системы – частотного показателя колебательности (пунктир). На нижней половине рисунков изображены номограммы для определения:  $t_{\text{п}}$  – длительности переходной характеристики (штрих-пунктир);  $\omega_{\text{т}}$  – частоты ее колебаний (сплошные линии);  $t_1$  – времени максимума переходной характеристики (спадающие пунктирные линии);  $\omega_{\text{р}}$  – резонансной частоты  $A_3(\omega)$  (поднимающиеся пунктирные линии).

Согласно рис.63 не указанная на номограммах частота  $\omega_2=1/T_2$  определяется через  $\mu_1$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_c$ :

$$\lg \omega_2 = \frac{\mu_1}{20} + \lg \frac{\omega_1^2}{\omega_c} \quad (242)$$

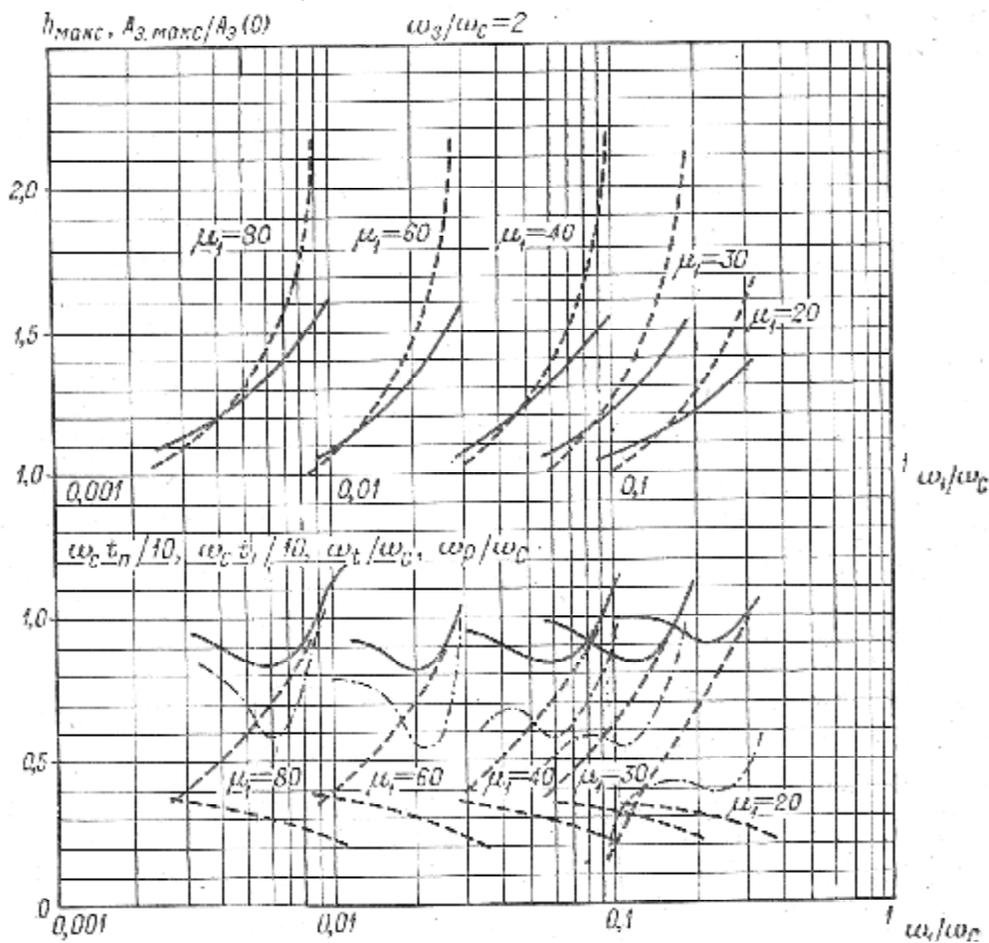


Рис. 64. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = 2$ ).

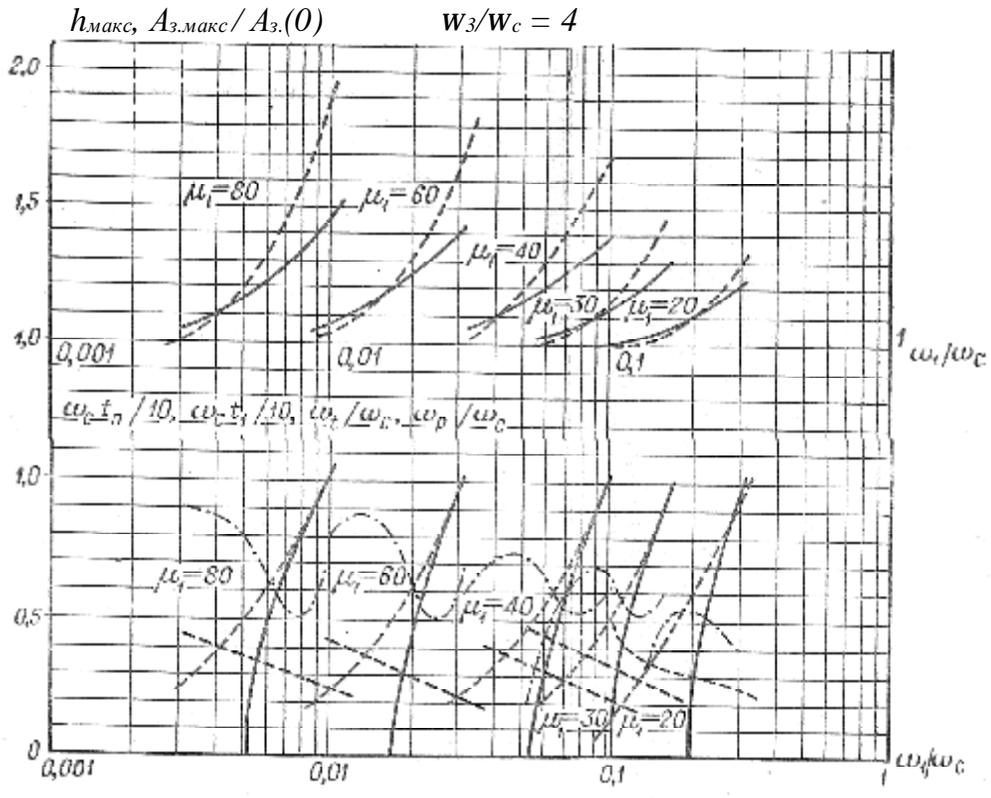


Рис. 65. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = 4$ ).

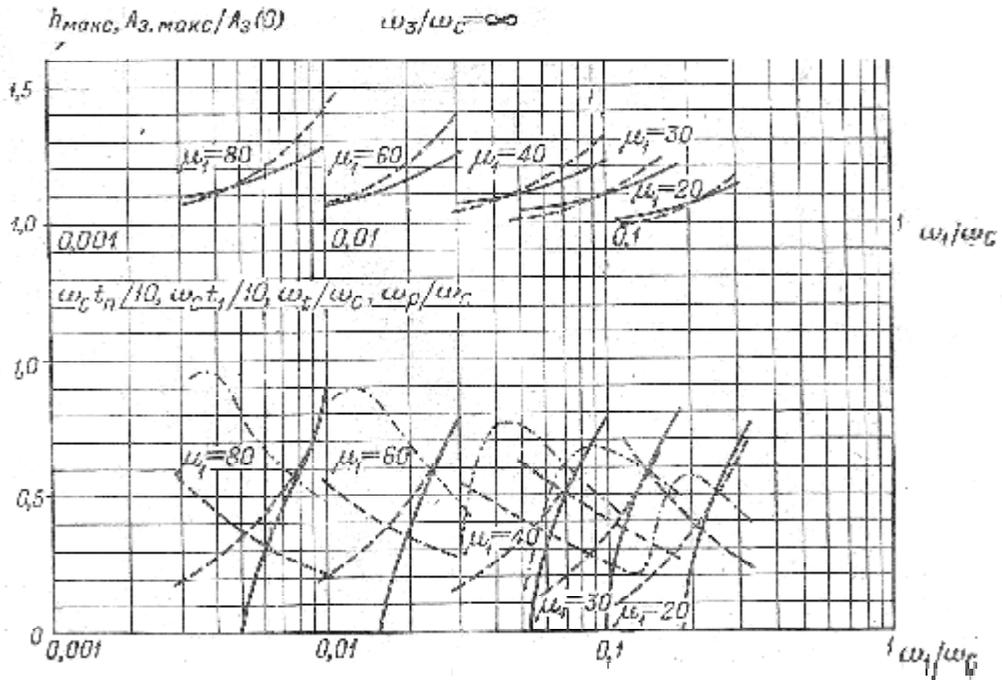


Рис. 66. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = \infty$ ).

Приведенные номограммы пригодны также для систем более высокого порядка, если новые постоянные времени достаточно малы, так что определяемые ими сопрягающие частоты соответствуют значению  $L < -20$  дБ. Номограммы годятся и для ориентировочных оценок качества статических снегом и астатических систем с более высоким порядком астатизма, если их ЛАЧХ отличаются от приведенной на рис. 63 типовой ЛАЧХ только на малых частотах, когда  $L > 20$  дБ [7].

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика корректирующего устройства находится вычитанием ординат ЛАЧХ исходной системы из ординат желаемой ЛАЧХ:

$$20\lg W_{\text{кy}}(\omega) = 20\lg W_{\text{ж}}(\omega) - 20\lg W_{\text{об}}(\omega). \quad (243)$$

Передаточная функция корректирующего звена определяется по правилам, аналогичным сформулированным при построении логарифмических частотных характеристик. Для корректирующих устройств, ЛАЧХ которых изображены на рис.67, передаточные функции имеют вид:

$$W_{\text{кy1}}(p) = \frac{k_1(T_1p+1)^2}{(T_2p+1)(T_3p+1)}, \quad W_{\text{кy2}}(p) = \frac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{(T_3p+1)(T_4p+1)},$$

$$W_{\text{кy3}}(p) = \frac{k_3(T_2p+1)(T_3p+1)}{p(T_4p+1)} \quad (244)$$

где  $k_1 = 10^{\frac{L_1}{20}}$ ,  $k_3 = \omega_1$ ,  $T_i = 1/\omega_i$

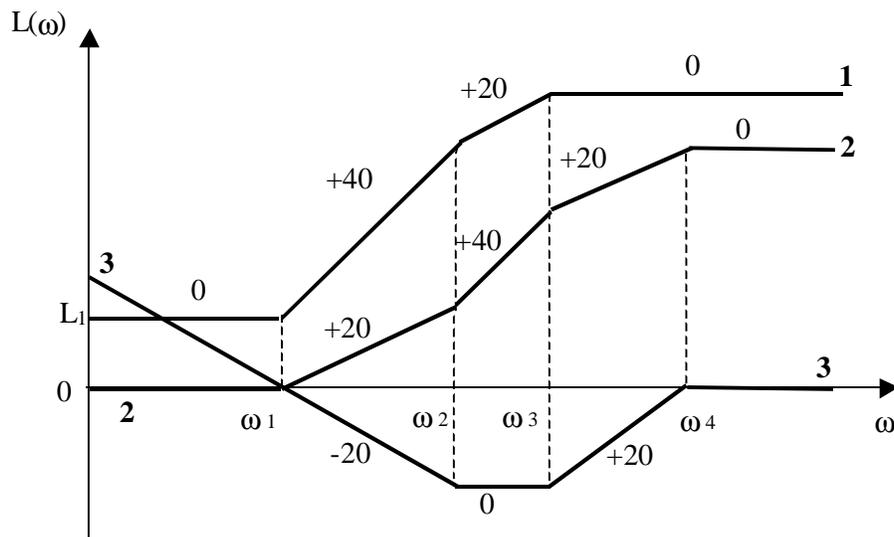


Рис. 67. Примеры ЛАЧХ корректирующих устройств.

Рассмотрим приведенные примеры подробнее.

ЛАЧХ №1 соответствует *активному корректирующему устройству*, т.е. имеющему отличный от единицы коэффициент передачи. Этот коэффициент определяется уровнем низкочастотной асимптоты характеристики. На час-

тоте  $\omega_1$  происходит изменение наклона ЛАЧХ до +40 дБ/дек, что обеспечивается введением в передаточную функцию корректирующего устройства двух форсирующих звеньев с одинаковыми постоянными времени  $T_1 = 1/\omega_1$ . Следует отметить, что такого же эффекта можно достигнуть путем использования форсирующего звена второго порядка с передаточной функцией  $T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1$ . Более того, второй подход предпочтительнее, если увеличение наклона на +40 дБ/дек связано с компенсацией действия колебательного звена, входящего в структуру исходной системы. Выбирая коэффициент  $\xi$  равным коэффициенту демпфирования колебательного звена, мы добиваемся полной компенсации действия последнего, тогда как использование двух форсирующих звеньев первого порядка не приносит ожидаемого результата. Это особенно заметно при малых значениях коэффициента демпфирования колебательного звена, когда его ЛАЧХ значительно отличается от асимптотического ее представления из-за большого резонансного пика. На частоте  $\omega_2$  наклон ЛАЧХ №1 снижается до +20дБ/дек, а на частоте  $\omega_3$  – до нуля, что достигается введением в структуру корректирующего устройства двух апериодических звеньев с соответствующими постоянными времени и коэффициентами передачи равными единице.

ЛАЧХ №2 описывает *пассивное корректирующее устройство*, которое имеет единичный коэффициент передачи. Требуемые наклоны асимптот характеристики легко формируются с помощью звеньев первого порядка: форсирующих и апериодических.

ЛАЧХ №3 соответствует корректирующему устройству с астатизмом первого порядка, так как наклон ее низкочастотной асимптоты равен –20дБ/дек. В структуре устройства имеется интегрирующее звено с передаточной функцией  $k_3/p$ . Коэффициент  $k_3$  определяется через частоту пересечения ЛАЧХ интегрирующего звена оси абсцисс. Дальнейшее построение передаточной функции не должно представлять затруднений.

В заключение отметим, что при использовании типовых ЛАЧХ рассчитанное корректирующее устройство часто оказывается физически нереализуемым. Сделать его физически реализуемым без существенного ухудшения динамики системы можно, если добавить в структуру устройства апериодические звенья с малыми постоянными времени.

## 6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

### 6.1. Математическое описание и устойчивость нелинейных САР

Нелинейной является система, содержащая хотя бы одно нелинейное звено.

Все реальные САР нелинейны, однако часто имеется возможность свести задачу анализа к исследованию линейной модели реальной системы путем *линеаризации*. Методы линеаризации зависят от типа нелинейности, диапазона изменения координат системы и условий ее функционирования.

Так, если рассматривается система стабилизации, исходят из предположения, что диапазон изменения ее координат будет небольшим, и поэтому математическое описание системы *в отклонениях от установившегося режима* считают достаточно адекватным.

В случае, когда известна «точная» модель системы в виде нелинейных дифференциальных уравнений, линеаризацию последних часто проводят путем их разложения в ряд Тейлора. Пусть, например, реакция системы на задающее воздействие описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$F\left(y_{\text{зад}}, \frac{dy_{\text{зад}}}{dt}, \frac{d^2y_{\text{зад}}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y_{\text{зад}}}{dt^m}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0. \quad (245)$$

Разложив данное уравнение в ряд Тейлора в окрестности точки «0» ( $y = y_{\text{зад}} = \text{const}$ ) и отбросив все члены выше первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial F}{\partial y_{\text{зад}}}\right|_0 \Delta y_{\text{зад}} + \left. \frac{\partial F}{\partial (dy_{\text{зад}}/dt)}\right|_0 \frac{d\Delta y_{\text{зад}}}{dt} + \left. \frac{\partial F}{\partial (d^2y_{\text{зад}}/dt^2)}\right|_0 \frac{d^2\Delta y_{\text{зад}}}{dt^2} + \dots \\ & + \left. \frac{\partial F}{\partial (d^m y_{\text{зад}}/dt^m)}\right|_0 \frac{d^m \Delta y_{\text{зад}}}{dt^m} + \left. \frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left. \frac{\partial F}{\partial (dy/dt)}\right|_0 \frac{d\Delta y}{dt} + \\ & \left. \frac{\partial F}{\partial (d^2y/dt^2)}\right|_0 \frac{d^2\Delta y}{dt^2} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial (d^n y/dt^n)}\right|_0 \frac{d^n \Delta y}{dt^n} = 0. \end{aligned} \quad (246)$$

Таким образом, найдено линейное дифференциальное уравнение, связывающее отклонения  $\Delta y$  и  $\Delta y_{\text{зад}}$ . Чем меньше отклонения, тем точнее это уравнение будет описывать динамику системы. По нему можно определить передаточную функцию САР и все ее характеристики. Аналогично можно по-

лучить линеаризованные уравнения САР в пространстве состояний вида (10,11), если разложению подвергнуть исходные нелинейные уравнения (8,9).

А.М. Ляпуновым доказано, что если линеаризованная система устойчива, исходная система также будет устойчивой при достаточно малых отклонениях величин от установившегося режима (*устойчива в малом*).

Необходимо отметить, что описанный способ линеаризации применим только в случае так называемых *несущественных нелинейностей*, т.е. таких, для которых частные производные уравнения (246) при  $y = y_{\text{зад}} = \text{const}$  существуют и принимают конечные значения. Данный способ не годится, например, для исследования релейных систем, так как релейные характеристики являются существенно нелинейными.

На практике точное математическое описание некоторых элементов (в первую очередь объектов регулирования) системы часто неизвестно. В таком случае прибегают к экспериментальным способам определения дифференциальных уравнений, в частности к снятию и обработке кривых разгона, что также позволяет получить линейные уравнения в отклонениях (см. 3.4).

Если нелинейная система регулирования работает в условиях действия на нее случайных воздействий, используют так называемую *статистическую линеаризацию*, идея ее заключается в том, что нелинейные элементы заменяют линейными, реакция которых на случайный сигнал близка реакции нелинейных элементов. В качестве меры близости могут использоваться математическое ожидание и дисперсия выходного сигнала звена.

Для исследования автоколебательных режимов, характерных для релейных систем, широко применяется *гармоническая линеаризация*, рассмотренная в 6.4.

Существуют и другие способы линеаризации математического описания САР. Разработано также множество методов исследования нелинейных САР, основанных на использовании линеаризованных моделей. Необходимо отметить, что они по существу являются приближенными, так как используют «неточное» математическое описание.

Другой подход к исследованию нелинейных систем предполагает применение «исходного» нелинейного описания. Нелинейные системы характеризуются чрезвычайным многообразием. Поэтому не существует общей теории нелинейных систем, позволяющей решить все проблемы их анализа и синтеза, подобной теории линейных систем. Наиболее общие методы исследования в основном дают возможность определить только устойчивость нелинейных систем, а основанные на них методы синтеза – построить устойчивые системы. Добиться обеспечения требуемых показателей качества удастся, как правило, только подбором коэффициентов при имитационном моделировании на ЭВМ. Среди «общих» методов наиболее важными являются второй (прямой) метод А.М. Ляпунова и критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова [2,7].

## 6.2. Ограничение сигналов в САР

Исследуя любую реальную систему автоматического управления, мы всегда имеем дело с ограниченными сигналами. Непрерывные, в том числе

линейные, модели не учитывают данного обстоятельства и поэтому точно описывают поведение системы только в том диапазоне изменения переменных, в котором ограничения сигналов не вступают в силу. Часто предельные значения величин не достигаются и в реально работающей системе в нормальном режиме ее функционирования. Это касается в основном систем стабилизации, работающих при небольших отклонениях сигналов от номинальных значений. В других случаях, – например, при анализе следящих систем, ограничения сигналов необходимо учитывать, так как возможно, что большую часть времени переменные системы находятся на предельных уровнях. В таких условиях судить о качестве системы по ее переходной характеристике нельзя.

Ограничение сигналов в САР бывает двух видов. Во-первых, физически ограничены выходные сигналы всех реальных устройств: напряжение электрического преобразователя, ход исполнительного механизма и т.д. Во-вторых, некоторые величины ограничивают специально с целью предотвращения выхода из строя элементов системы, повышения ее надежности и т.д. Примером этого может служить ограничение токов исполнительных двигателей.

Рассмотрим ограничения первого вида. Пусть имеется некоторый преобразователь, рабочий участок характеристики которого линеен, а динамика описывается передаточной функцией  $W_n(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ .

Статическая характеристика преобразователя имеет *участки насыщения* (рис. 68), которые и ограничивают его выходной сигнал.

При построении модели такого преобразователя можно использовать различные подходы. На рис. 69 приведено три варианта моделей, построенных в Simulink (см. 7.4). В первой модели звено, формирующее ограничение, находится «на выходе» динамического звена, во второй – «на входе». В обоих случаях наклон характеристики статического звена на линейной ее части соответствует единичному коэффициенту передачи, т.е.  $a = b$ . При этом в первой модели ограничение равно предельному значению выходной величины ( $a = x_{\text{вых, макс}}$ ), а во второй в  $k$  раз меньше ( $a = x_{\text{вых, макс}}/k$ ).

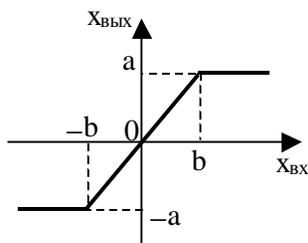


Рис. 68. Характеристика звена с ограничением.

Третья модель использует представление аperiодического звена с помощью интегратора, сумматора и блоков усиления, т.е. это модель в пространстве состояний. Ограничение выходной величины здесь осуществляется путем остановки интегрирования при достижении предельных значений.

На рис. 70 показаны результаты моделирования в виде реакции всех трех моделей на прямоугольные импульсы при следующих параметрах:  $k = 1$ ;  $T = 1$ ;  $a = 0,5$ . Как видно из рисунка, кривые процессов существенно различаются, и возникает вопрос об адекватности моделей. Поэтому очевидно, что при выборе подхода нужно руководствоваться дополнительными сведениями,

полученными из анализа физических процессов, протекающих в техническом устройстве.

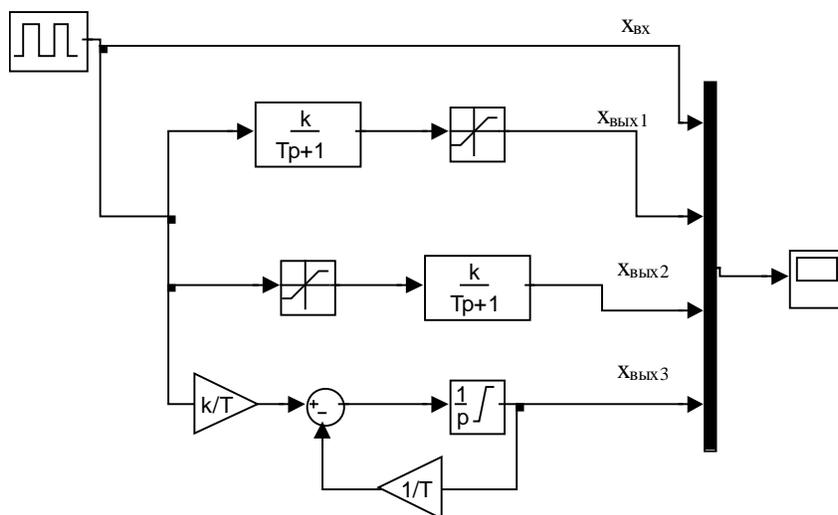


Рис. 69. Модели звена с ограничением.

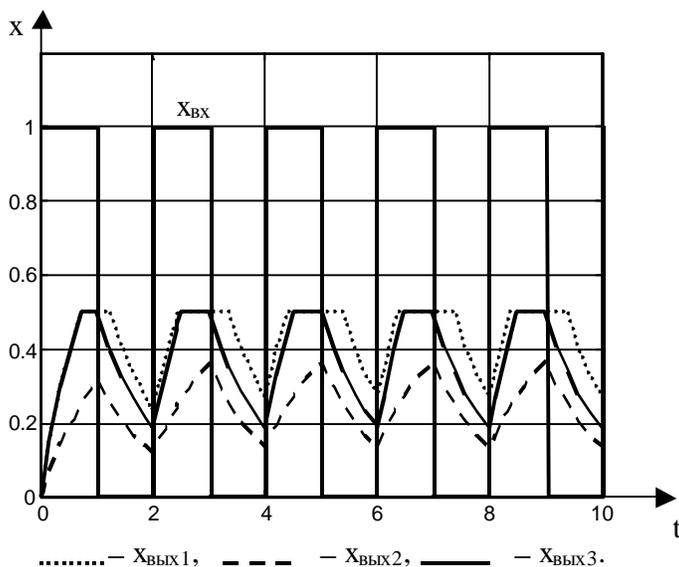


Рис. 70. Результаты моделирования звена с ограничением.

Пусть, например, рассматривается тиристорный преобразователь напряжения, основная инерционность которого – это инерционность выходного индуктивного (или емкостного) фильтра. Ограничение выходного напряжения связано, напротив, с работой блока тиристорov: оно не может превышать некоторого уровня, соответствующего их минимальному углу открытия. Отсюда следует, что для описания преобразователя лучше других подойдет вторая мо-

дель, так как звено ограничения в данном случае «предшествует» динамическому звену в направлении передачи сигнала.

Для моделирования ограничений, реализуемых цифровыми регуляторами, очевидно, лучше использовать подход, примененный в третьей модели, так как физически ограничение связано в данном случае в «прекращении» интегрирования (счета) (см. 7.4.3).

Рассмотрим ограничения второго вида, т.е. вводимые в систему намеренно.

Ограничить выходной сигнал некоторого устройства можно, только соответствующим образом воздействуя на его вход. Это воздействие организуется с применением дополнительных обратных связей по ограничиваемым переменным. Существует несколько вариантов использования таких связей, основными среди которых являются так называемые «отсечки» и построение многоконтурной системы.

«Отсечкой» называется обратная связь, статическая характеристика которой имеет вид, показанный на рис. 71.

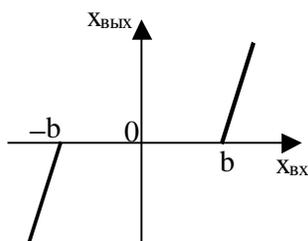


Рис. 71. Характеристика «отсечки».

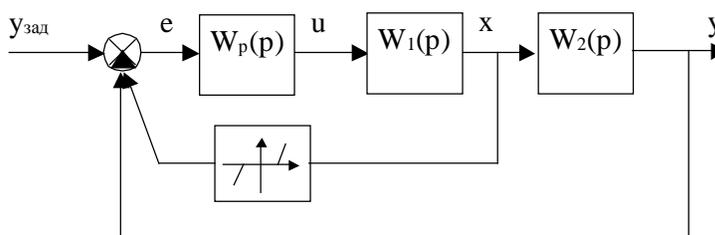


Рис. 72. Ограничение внутренней координаты с помощью «отсечки».

«Отсечка» включается параллельно основной обратной связи системы и воздействует на основной регулятор (рис. 72). Ее характеристика такова, что пока  $|x| < b$  она не оказывает никакого влияния на процессы, протекающие в системе. При выходе ограничиваемой переменной из зоны нечувствительности «отсечки» на регулятор подается дополнительный сигнал, который снижает модуль управляющего воздействия, следствием чего и является ограничение внутренней координаты.

Крутизна рабочих участков характеристики «отсечки» определяет эффективность ограничения.

Другой способ ограничения внутренних координат подразумевает применение дополнительных контуров регулирования с отдельными регуляторами.

Рассмотрим систему автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 73.

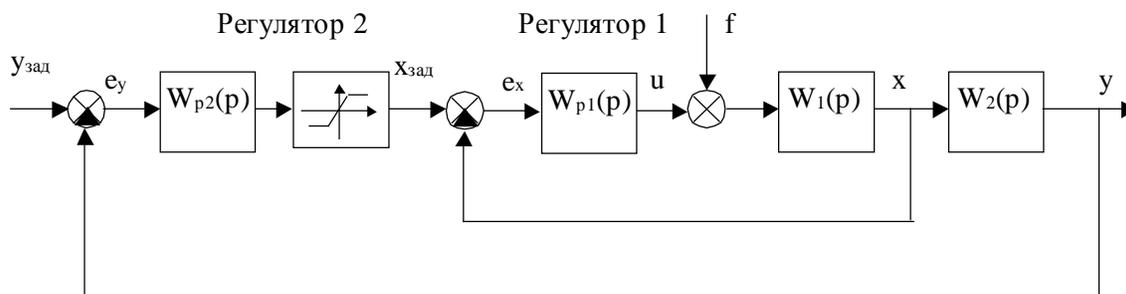


Рис. 73. Двухконтурная система автоматического регулирования.

Для регулирования внутренней координаты  $x(t)$  используется дополнительный регулятор с передаточной функцией  $W_{p1}(p)$ . Сигнал задания этому регулятору  $x_{зад}(t)$  формирует регулятор выходной величины системы. Ограничение этого сигнала и позволяет ограничить внутреннюю координату. Физически оба регулятора могут реализоваться на одном контроллере, а ограничение – программно.

Применение нескольких контуров, кроме прочего, повышает качество регулирования. В большинстве случаев внутренний контур системы является менее инерционным (более быстродействующим), чем внешний. Поэтому реакция внутреннего контура на изменения возмущений, действующих в нем, может быть настолько быстрой, что выходная величина системы не успеет значительно отклониться от задания. Таким образом, стабилизация внутренних координат делает систему менее чувствительной к возмущениям.

Расчет регуляторов многоконтурных систем осуществляется теми же методами, что и одноконтурных. Начинают расчет с самого внутреннего контура. Определив параметры (или даже структуру) внутреннего регулятора, рассчитывают передаточную функцию контура. Далее определяется передаточная функция эквивалентного объекта для внешнего регулятора и рассчитывается он сам.

В заключение отметим, что ограничение сигналов в САР безусловно сказывается на качестве процессов регулирования. В реальных системах оно приводит к замедлению реакции САР на достаточно большие задающие и возмущающие воздействия. В то же время из общих соображений можно сделать вывод, что влияние ограничений на устойчивость системы должно иметь положительный характер. Этот вывод можно обосновать и строго математически, используя, например, критерий Попова [2,7].

### 6.3. Особенности динамики релейных систем

Релейными называются системы, в которых осуществляется квантование сигналов по уровню (но не по времени). В состав таких систем входят элементы, имеющие статические характеристики релейного типа, основные из которых перечислены ниже.

1. Идеальное двухпозиционное реле имеет характеристику, приведенную на рис. 74.

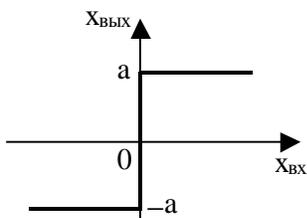


Рис. 74.

$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > 0;$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < 0.$$

При  $x_{\text{ВХ}} = 0$  значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено.

2. Реальное двухпозиционное реле (двухпозиционное реле с зоной неоднозначности).

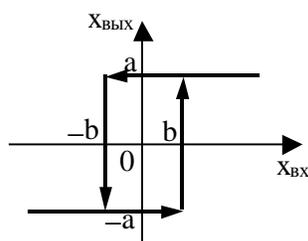


Рис. 75.

$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > b,$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < -b,$$

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) \text{ при } -b < x_{\text{ВХ}}(t) < b,$$

где  $\Delta \rightarrow 0$ .

При  $x_{\text{ВХ}} = b$  и  $x_{\text{ВХ}} = -b$  значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено.

3. Идеальное трехпозиционное реле.

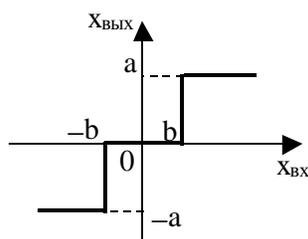


Рис. 76.

$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > b;$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < -b;$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = 0 \text{ при } -b < x_{\text{ВХ}} < b.$$

При  $x_{\text{ВХ}} = b$  и  $x_{\text{ВХ}} = -b$  значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено.

4. Реальное трехпозиционное реле (трехпозиционное реле с зоной неоднозначности).

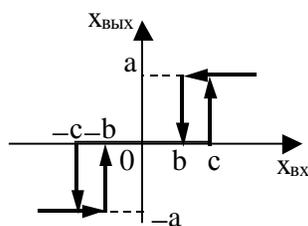


Рис. 77.

$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > c,$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < -c;$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = 0 \text{ при } -b < x_{\text{ВХ}} < b;$$

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) \text{ при } -b > x_{\text{ВХ}}(t) > -c, \quad b < x_{\text{ВХ}}(t) < c,$$

где  $\Delta \rightarrow 0$ .

В следующих случаях значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено:

$$x_{\text{ВХ}}(t) = -c \text{ и } x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = 0,$$

$$x_{\text{ВХ}}(t) = -b, \quad x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = -a,$$

$$x_{\text{ВХ}}(t) = b, \quad x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = a,$$

$$x_{\text{ВХ}}(t) = c, \quad x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = 0.$$

Характеристики 1 и 3 являются *однозначными*, их выходные сигналы зависят только от сигналов на входе.

Характеристики 2 и 4 имеют *зоны неоднозначности*. Для характеристики 2 эта зона определяется неравенством  $-b < x_{вх} < b$ , для характеристики 4 – неравенствами  $b < x_{вх}(t) < c$ ,  $-b > x_{вх}(t) > -c$ . Поведение релейных элементов  $x_{вых}(t)$  в зонах неоднозначности определяется их предшествующим состоянием  $x_{вых}(t-\Delta)$ . Таким образом, эти элементы проявляют динамические свойства. Отметим, что все реальные релейные элементы имеют зоны неоднозначности.

Кроме того, характеристики 3 и 4 имеют *зоны нечувствительности*, в которых выходной сигнал равен нулю. Для характеристики 3 эта зона определяется неравенством  $-b < x_{вх} < b$ , а для характеристики 4 она зависит от текущего состояния элемента. Например, при  $x_{вх}(t) = 0$  зона нечувствительности максимальна и определяется неравенством  $-c < x_{вх} < c$ .

Релейные одноконтурные САР, как правило, можно представить структурной схемой, приведенной на рис. 78.

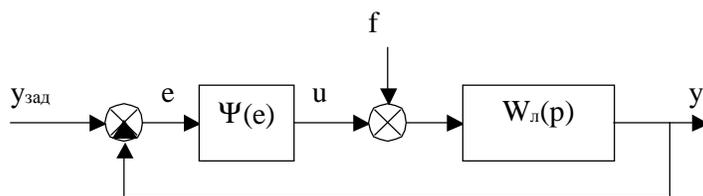


Рис. 78. Структурная схема релейной САР.

На рис. 78 обозначены:  $\Psi(e)$  – статическая характеристика релейного элемента (одна из характеристик 1–4);  $W_{л}(p)$  – передаточная функция линейной части системы;  $f$  – возмущающее воздействие (для простоты приведено к входу линейной части).

Выходной сигнал релейного элемента (РЭ) может принимать значения  $u = \pm a$  и, возможно,  $u = 0$ . Линейная часть системы устойчива или нейтральна, т.е.  $W_{л}(p)$  имеет левые и, возможно, нулевые полюса.

Рассмотрим характеристики системы при некоторых вариантах релейного элемента и линейной части.

1. Пусть  $W_{л}(p)$  не имеет нулевых полюсов и имеет коэффициент передачи  $k_{л}$ .

Предположим, что при  $u_{зад} = \text{const}$ ,  $f = \text{const}$  система находится в статическом режиме. Выходная величина системы может принимать лишь фиксированные значения, соответствующие уровням сигнала релейного элемента. Например, если релейный элемент имеет характеристику 1, в статике  $y = (f \pm a)k_{л}$ . Теоретически такой режим возможен при определенном отношении величин  $u_{зад}$ ,  $a$ ,  $f$ , и  $k_{л}$ , однако он не имеет никакого практического значения: поскольку выходная величина не зависит от задания, система не может выполнять задачу регулирования.

Поэтому единственно возможным реальным режимом функционирования рассматриваемой системы является динамический режим колебаний вы-

ходной величины около заданного уровня. Колебания обеспечиваются периодическими срабатываниями релейного элемента, которые, в свою очередь, вызываются периодическим изменением знака сигнала ошибки. Чтобы это было возможно, линейная часть системы должна обладать достаточно большим коэффициентом передачи (либо релейный элемент должен быть достаточно «мощным»). Кроме того, для подавления возмущения требуется, чтобы выходной сигнал релейного элемента значительно превосходил по модулю максимальное значение  $f$ .

Определим характер колебаний. Прежде всего очевидно, что они не могут быть неустойчивыми (расходящимися), так как их амплитуда ограничена. Действительно, модуль выходного сигнала системы:

$$|y| \leq (|f| + a)k_{\text{л}}. \quad (247)$$

Параметры колебаний (частота и амплитуда) определяются свойствами нелинейного элемента и линейной части. Рассмотрим процесс регулирования, изображенный на рис. 79.

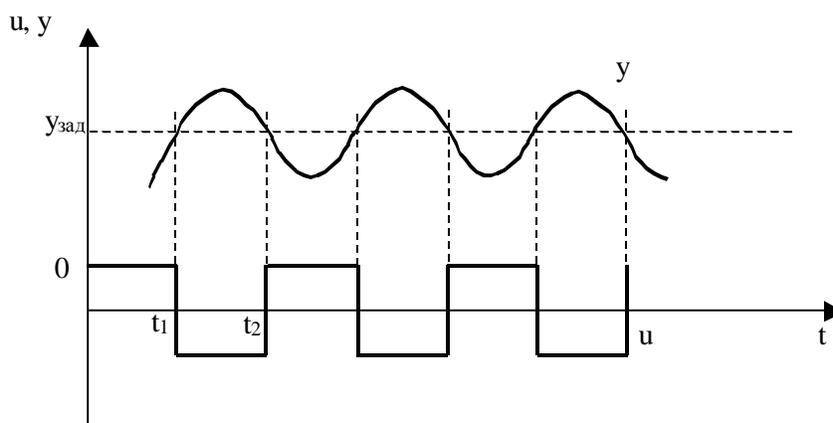


Рис. 79. Процесс регулирования в САР с идеальным двухпозиционным реле.

Такой процесс имеет место, если в качестве релейного элемента используется идеальное двухпозиционное реле. В момент времени  $t_1$  регулируемая величина системы достигает заданного значения и происходит переключение релейного элемента. Однако в силу инерционности, присущей линейной части, выходная величина продолжает увеличиваться. В некоторый момент времени она становится максимальной и далее начинает снижаться под действием отрицательного сигнала  $u$ . В момент времени  $t_2$  выходная величина вновь достигает  $y_{\text{зад}}$  и происходит «обратное» переключение релейного элемента. Впоследствии рассмотренный процесс продолжается. Таким образом, причиной колебаний в данном случае является инерционность линейной части системы: чем она выше, тем больше амплитуда и меньше частота колебаний.

Однако не всякая инерционность порождает колебания. Если, например, линейная часть описывается дифференциальным уравнением первого по-

рядка, т.е. имеет передаточную функцию  $W_{л}(p) = \frac{k_{л}}{Tp + 1}$ , колебаний в системе

не будет, каким бы большим ни было значение постоянной времени  $T$ . Дело в том, что звено первого порядка «может» мгновенно изменять скорость выходного сигнала при изменении входного. Другими словами, обладая инерционностью по состоянию, звено безынерционно по скорости его изменения. В результате переключение релейного элемента вызывает мгновенную реакцию линейной части, что в свою очередь является причиной нового переключения. Таким образом, в системе будут происходить бесконечно быстрые переключения релейного элемента, амплитуда колебаний выходной величины будет бесконечно малой (нулевой), а частота – бесконечно большой. С точки зрения точности регулирования такой процесс можно считать идеальным.

Итак, одной из причин возникновения колебаний является инерционность линейной части по скорости выходного сигнала. Ею обладают все линейные системы порядка выше первого. Другая причина – «неидеальность» релейного элемента, т.е. присутствие в его статической характеристике зоны неоднозначности.

Так, если релейный элемент имеет характеристику 2, колебания в системе будут наблюдаться даже в случае, когда линейная часть описывается передаточной функцией первого порядка. Объясняется это тем, что срабатывания релейного элемента будут происходить с некоторым запаздыванием относительно времени пересечения кривой процесса уровня  $y = u_{зад}$  (рис. 80).

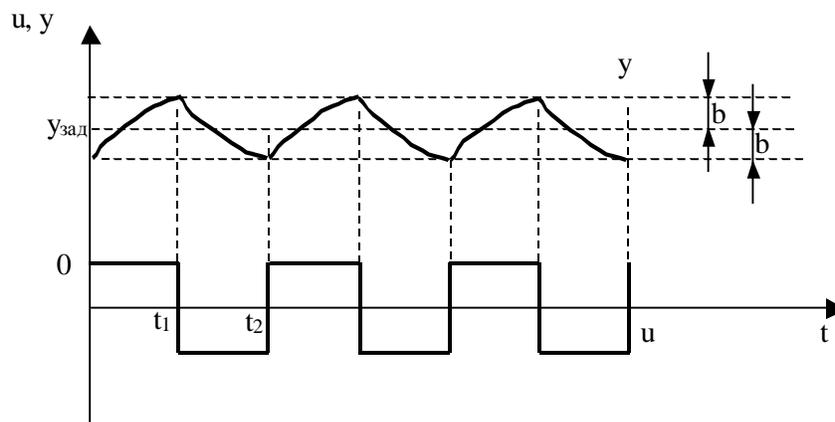


Рис. 80. Процесс регулирования в САР с реальным

двухпозиционным реле и  $W_{л}(p) = \frac{k_{л}}{Tp + 1}$ .

Влияние зоны нечувствительности на процесс регулирования имеет более сложный характер. Отметим лишь, что если амплитуда колебаний меньше зоны нечувствительности  $2b$ , колебания происходят не около заданного уровня  $u_{зад}$ , а около того уровня, при котором осуществляются переключения релейного элемента. В зависимости от значения сигнала возмущения и начального состояния системы это может быть  $u_{зад} - b$  или  $u_{зад} + b$ . Таким образом, в данном

случае трехпозиционное реле ведет себя как двухпозиционное, один из уровней сигнала которого равен нулю. Кроме того, так как часть времени процесса выходной сигнал реле равен нулю, «суммарное» воздействие на линейную часть меньше, что приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

Если передаточная функция линейной части имеет первый порядок, а реле не имеет зоны неоднозначности, колебания, как и в случае идеального процесса, будут бесконечно малыми.

2. Пусть  $W_{л}(p)$  имеет один нулевой полюс. Тогда структуру системы можно представить в виде (рис. 81).

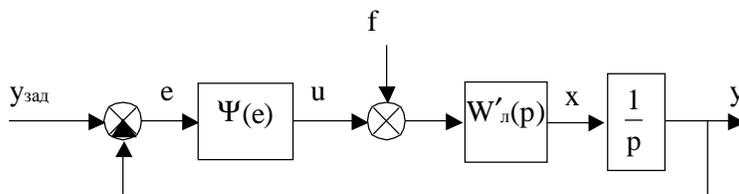


Рис. 81. Структурная схема релейной САР.

На рис. 81  $W'_{л}(p)$  – статическая передаточная функция, определяемая из условия

$$W_{л}(p) = W'_{л}(p) \frac{1}{p}. \quad (248)$$

Она имеет только левые полюса, ее коэффициент передачи равен  $k'_{л}$ .

Рассмотрим процесс регулирования в такой системе, если в качестве релейного элемента применяется идеальное двухпозиционное реле (рис. 82).

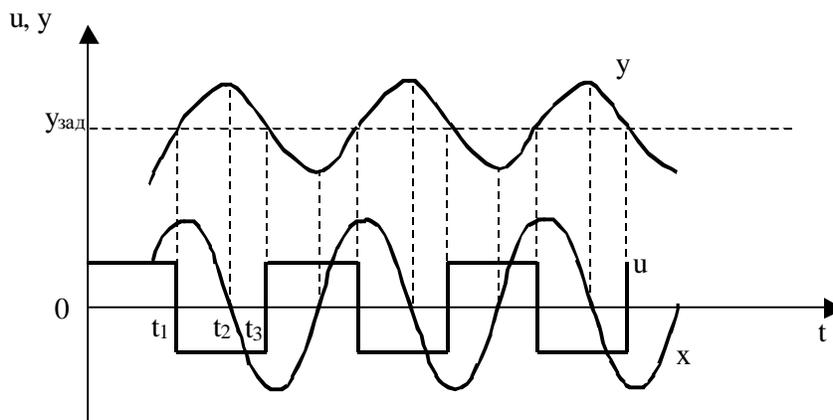


Рис. 82. Процесс регулирования в САР с идеальным двухпозиционным реле.

На промежутке времени  $t_1-t_3$  выходная величина САР превышает заданное значение. Это превышение вызвано тем, что при переключении реле в момент времени  $t_1$  промежуточная величина  $x$  изменяется не мгновенно, а с некоторой задержкой, обусловленной инерционными свойствами  $W'_{л}(p)$ . В момент времени  $t_2$  промежуточный сигнал становится равным нулю и рост ре-

гулируемой величины прекращается. В дальнейшем под действием отрицательного значения  $x(t)$  выходная величина снижается и в момент времени  $t_3$  вновь достигает заданного уровня, что вызывает новое срабатывание релейного элемента.

Очевидно, что рассматриваемая система не может быть неустойчивой. Неустойчивость системы предполагает непрерывное увеличение амплитуды колебаний регулируемой переменной. Как видно из рис. 82, причиной этого может быть только непрерывное увеличение амплитуды выходных колебаний звена  $W'_л(p)$ . Однако сигнал  $x(t)$  есть реакция устойчивой системы на ограниченное воздействие и поэтому его амплитуда не может увеличиваться бесконечно. Максимальное ее значение соответствует случаю, когда при достаточно малой частоте  $x(t)$  успевает достигнуть установившегося значения к моменту очередного переключения реле.

Если  $W'_л(p)$  не обладает инерционностью, колебания в системе будут иметь теоретически бесконечно малую амплитуду и бесконечно большую частоту. Как и в ранее рассмотренном случае, присутствие в характеристике реле зоны неоднозначности увеличивает амплитуду колебаний.

Важным свойством системы (рис. 81) является возможность установления в ней статического режима. Для этого необходимо, чтобы реле имело достаточно большую зону нечувствительности, а возмущение отсутствовало. Тогда при попадании выходной величины в зону нечувствительности входной сигнал звена  $W'_л(p)$  становится равным нулю, что приводит к тому, что сигнал  $x(t)$  через некоторое время также устанавливается на нуле. Если за это время разность  $y_{зад} - y(t)$  не успеет выйти из зоны нечувствительности, изменение переменных прекращается.

3. Пусть  $W'_л(p)$  имеет два нулевых полюса. Тогда структуру системы можно представить в виде (рис. 83)

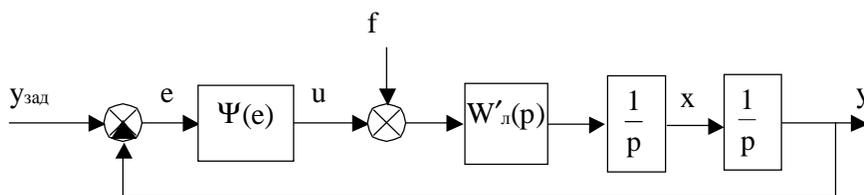


Рис. 83. Структурная схема релейной САР.

Рассмотрим случай, когда  $W'_л(p) = k'_л$ , а релейный элемент имеет характеристику идеального двухпозиционного реле. Процесс регулирования, соответствующий этому случаю, показан на рис. 84 кривыми  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Он представляет собой незатухающие колебания, характер которых легко понять, если проанализировать уравнения, связывающие эти величины:

$$\begin{cases} u = a \cdot \text{sign}(y_{\text{зад}} - y), \\ x = k'_{\text{л}} \int_0^t (u(\tau) + f) d\tau, \quad f = \text{const}, \quad |u| > |f|, \\ y = \int_0^t x(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (249)$$

Амплитуда и частота колебаний определяются значением сигнала  $x(t)$ , достигнутого к моменту переключения реле.

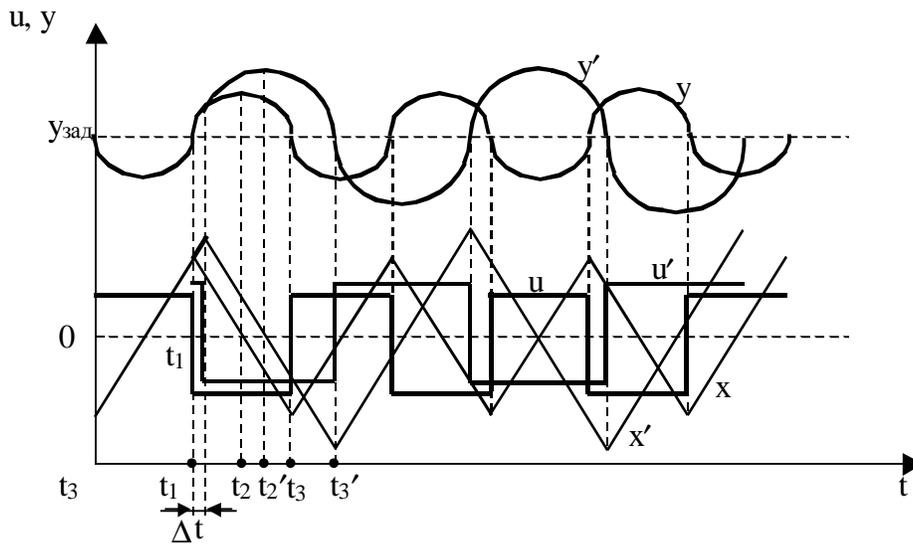


Рис. 84. К определению устойчивости релейной САР.

Допустим, на некотором периоде колебаний по каким-либо причинам «направление» интегрирования первого интегратора изменилось не мгновенно, в момент времени  $t_1$  (см. рис. 84), а через некоторое время  $\Delta t$ . Это может произойти, например, если возникла задержка при переключении реле, как и показано на рисунке. В результате выходной сигнал первого интегратора на пике своей характеристики достигнет большего значения по сравнению с исходным вариантом. Далее он начинает уменьшаться и в момент времени  $t_2'$  станет равным нулю. Заметим, что  $t_2' - t_2 > \Delta t$ . Очевидно, что поскольку  $t_2' - t_1 > t_2 - t_1$ , выходная величина системы также достигнет большего максимального значения:  $y'(t_2') > y(t_2)$ . Поэтому для уменьшения выходной величины до нуля потребуется большее время:  $t_3' - t_2' > t_3 - t_2$ . Это означает, что при очередном переключении реле выходной сигнал первого интегратора будет меньше по сравнению с исходным вариантом:  $x'(t_3') < x(t_3)$ . Ясно, что в последующих периодах колебаний амплитуды сигналов не изменятся.

Таким образом, единичная задержка при изменении «направления» интегрирования первого интегратора приводит к увеличению амплитуды и

уменьшению частоты колебаний. Если такая задержка будет происходить в каждом периоде, амплитуда будет расти, а частота уменьшаться непрерывно, и, следовательно, система будет неустойчивой.

Причиной рассмотренного эффекта может быть неидеальность реле, т.е. присутствие в ее характеристике зоны неоднозначности. Кроме того, задержка, о которой шла речь выше, всегда будет иметь место, если звено  $W'_л(p)$  обладает инерционностью. Действительно, в данном случае даже при «своевременном» срабатывании реле потребуется некоторое время для того, чтобы входной сигнал первого интегратора изменил свою полярность, в выходной – «направление» интегрирования.

Подобное исследование системы для случая трехпозиционного реле приводит к аналогичным выводам.

Как уже было сказано, характеристики всех реальных реле имеют зоны нечувствительности. Кроме того, никакая реальная линейная часть системы не может содержать только интегрирующие звенья, так как в ней обязательно присутствуют некая инерционность (пусть даже и небольшая). Поэтому из всего сказанного следует, что *реальная релейная система, линейная часть которой имеет два нулевых полюса, неустойчива.*

Отметим, что если в линейную часть входят три или более интеграторов, система будет неустойчива при любых условиях.

#### 6.4. Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации позволяет определять условия существования и параметры возможных автоколебаний в нелинейных системах.

Согласно методу схема системы автоматического регулирования приводится к следующей виду (рис. 85).

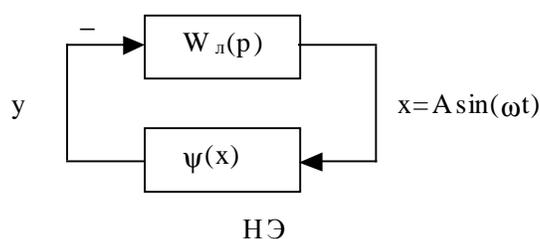


Рис. 85. Расчетная схема системы.

Отсутствие входов у системы, изображенной на рис. 85, объясняется тем, что данная расчетная схема предназначена для исследования именно автоколебаний, – т.е. колебаний, амплитуда и частота которых не зависят от входных воздействий, а определяются только свойствами системы. В реальной системе эти колебания будут происходить относительно уровня, определяемого входными сигналами.

Система состоит из линейной части  $W'_л(p)$  и нелинейного элемента, заданного статической характеристикой  $\psi(x)$ . В реальных САУ, в частности ре-

лейных, эта характеристика, как правило, симметрична относительно осей координат. Поэтому в дальнейшем и будем полагать ее таковой.

Предполагается, что в системе существуют автоколебания, поэтому величины  $x$  и  $y$  являются периодическими функциями времени. Основным допущением метода является то, что колебания на входе нелинейного элемента считаются синусоидальными:

$$x = A \sin(\omega t), \quad (250)$$

где  $A$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний.

В действительности же эти колебания несинусоидальны вследствие искажения их формы нелинейным звеном. Однако если предположить, что линейная часть системы близка по своим свойствам к фильтру низких частот и значительно ослабляет высшие гармоники входного сигнала, пропуская лишь первую гармонику, то сделанное допущение вполне оправдано. Отсюда следует, что для анализа системы достаточно знать только первую гармонику выходного сигнала нелинейного элемента. Для ее определения разложим выходные колебания  $y(t)$  в ряд Фурье и отбросим высшие гармоники. В результате получим

$$y(t) = \psi(x) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \quad (251)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \sin(\omega t) d(\omega t), \quad (252)$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \cos(\omega t) d(\omega t). \quad (253)$$

Из (250)

$$\sin(\omega t) = \frac{x}{A}. \quad (254)$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$\cos(\omega t) = \frac{p x}{A \omega}, \quad (255)$$

где  $p$  – оператор дифференцирования.

Подставив (254) и (255) в (251), получим

$$y = \left( k_1 + \frac{k_2}{\omega} p \right) x, \quad (256)$$

где

$$\begin{cases} k_1 = \frac{C_1}{A}, \\ k_2 = \frac{C_2}{A}. \end{cases} \quad (257)$$

Коэффициенты  $k_1(A)$  и  $k_2(A)$  называются *коэффициентами гармонической линейзации*, или *гармоническими коэффициентами передачи*. Коэффициент  $k_1(A)$  определяет выходную гармоническую составляющую, совпадающую по фазе с входным гармоническим сигналом, а коэффициент  $k_2(A)$  – выходную составляющую, сдвинутую по фазе относительно входного сигнала на  $\pi/2$  вперед или назад в зависимости от знака  $k_2(A)$ . Этот коэффициент появляется в (256) только в случае неоднозначных характеристик. Неоднозначность  $\psi(x)$  приводит к тому, что при изменении знака входного сигнала происходит запаздывание в изменении выходного сигнала в связи с переходом на другую ветвь характеристики. В результате при гармоническом входном воздействии возникает запаздывание по фазе первой гармоники относительно входного сигнала.

Коэффициенты гармонической линейзации многих нелинейностей, часто встречающихся в системах, рассчитаны и приведены в соответствующей литературе [2,7]. Ниже даны коэффициенты для четырех типов релейных характеристик, описанных ранее.

1. Идеальное двухпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A}, \quad k_2(A) = 0. \quad (258)$$

2. Реальное двухпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b, \quad k_2(A) = -\frac{4ab}{\pi A^2} \text{ при } A \geq b. \quad (259)$$

3. Идеальное трехпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b, \quad k_2(A) = 0. \quad (260)$$

4. Реальное трехпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{2a}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} \right] \text{ при } A \geq c,$$

$$k_2(A) = -\frac{2ac}{\pi A^2} \left( 1 - \frac{b}{c} \right) \text{ при } A \geq c, \quad (261)$$

Из (256) получаем передаточную функцию гармонически линейзованного нелинейного элемента

$$W_{нэ}(p) = k_1 + \frac{k_2}{\omega} p. \quad (262)$$

Отметим, что в отличие от передаточных функций линейных звеньев параметры  $W_{нэ}(p)$  зависят от частоты  $\omega$  и амплитуды  $A$  гармонического сигнала.

Передаточная функция (262) используется для описания нелинейного элемента при исследовании системы на предмет определения возможности и параметров автоколебаний. При этом применяются рассмотренные ранее критерии устойчивости. В частности, если используется критерий Найквиста, условие нахождения системы на границе устойчивости будет

$$W_{раз}(j\omega) = W_{л}(j\omega)W_{нэ}(j\omega, A) = -1. \quad (263)$$

Из (263) следует, что автоколебания в системе возможны при таких  $A$  и  $\omega$ , когда

$$W_{л}(j\omega) = -\frac{1}{W_{нэ}(j\omega, A)}. \quad (264)$$

Характеристика  $-\frac{1}{W_{нэ}(j\omega, A)}$  называется *инверсной характеристикой гармонически линеаризованного нелинейного элемента*. Она определяется через передаточную функцию (262):

$$-\frac{1}{W_{нэ}(j\omega, A)} = -\frac{1}{k_1(A) + jk_2(A)} = \frac{-k_1(A) + jk_2(A)}{k_1^2(A) + k_2^2(A)}. \quad (265)$$

Как видно из (265) в отличие от  $W_{л}(j\omega)$ , инверсная характеристика нелинейного элемента есть функция амплитуды, а не частоты колебаний.

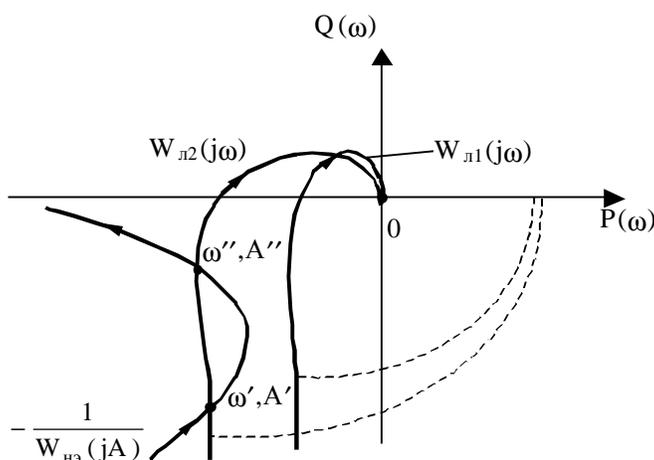


Рис. 86. К определению возможности и параметров автоколебаний.

Для определения возможности и параметров автоколебаний необходимо на комплексной плоскости построить АФЧХ линейной части и инверсную характеристику нелинейного элемента (рис.86).

Точки пересечения двух годографов определяют параметры возможных автоколебаний. Их частота определяется по  $W_{л}(j\omega)$ , амплитуда – по инверсной характеристике нелинейного элемента.

Так, если линейная часть системы имеет АФЧХ  $W_{л1}(j\omega)$  (рис. 86), автоколебания в системе отсутствуют. В случае, когда АФЧХ линейной части равна  $W_{л2}(j\omega)$ , возможны два варианта автоколебательных режимов, различающихся частотами и амплитудами. Необходимо определить, какой из этих вариантов соответствует реальным устойчивым автоколебаниям, а какой – неустойчивым колебаниям. Для этого можно воспользоваться критерием, предложенным Е.П. Поповым: *если при увеличении амплитуды инверсная характеристика нелинейного элемента выходит из зоны охвата АФЧХ линейной части системы, автоколебания устойчивы*. В противном случае колебания в системе неустойчивы.

В нашем случае устойчивые автоколебания характеризуются частотой  $\omega''$  и амплитудой  $A''$ . Колебания с частотой  $\omega'$  неустойчивы.

## 7. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ MATLAB ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

### 7.1. Обзор системы

Эффективным средством исследования и синтеза систем управления являются специализированные математические программы. Безусловный лидер среди них – система Matlab фирмы MathSoft. Наиболее важными ее достоинствами являются:

наличие мощного языка программирования, поддерживающего множество типов данных, объектно-ориентированное программирование, разнообразные управляющие конструкции и полноценный графический интерфейс;

наличие подсистемы имитационного моделирования Simulink, позволяющей естественным образом строить и исследовать модели самых сложных систем управления (и не только управления).

Эти достоинства определили развитие системы – на сегодняшний день разработано несколько десятков пакетов прикладных программ (Toolboxes), написанных на языке Matlab, а также наборов блоков (Blocksets), расширяющих базовую библиотеку Simulink. Они предназначены для решения самых разнообразных задач в различных отраслях знаний. Перечислим пакеты и наборы блоков, назначение которых прямо или косвенно связано с проблемами управления:

- Control Systems – непрерывные и дискретные линейные системы;
- Filter Design – анализ и синтез дискретных фильтров;
- Fuzzy Logic – управление на основе нечеткой логики;
- LMI Control – анализ, синтез и оптимизация систем с помощью линейных матричных неравенств (linear matrix inequalities);
- Model Predictive Control – оптимальное управление системами, имеющими ограничения на вектор состояния и выходные переменные;
- Mu-Analysis and Synthesis и Robust Control – анализ и синтез робастных (нечувствительных к изменению параметров) систем управления;
- Neural Network – моделирование нейронных сетей;
- Optimization – решение оптимизационных задач;
- Signal Processing – обработка непрерывных и дискретных сигналов;
- System Identification – идентификация систем (построение моделей на основе опытных данных);
- Simulink (базовая библиотека блоков) – имитационное моделирование систем управления с помощью методов численного интегрирования;
- DSP Blockset и Fixed Point Blockset – цифровая обработка сигналов (digital signal processing);
- Nonlinear Control Design – синтез систем управления с помощью оптимизационных методов.

Хотя дальнейшее изложение предполагает знание основ языка программирования Matlab, его изучение выходит за рамки данного пособия. Самостоятельно освоить язык и интерфейсы системы можно с помощью справочной системы и многочисленных учебных пособий, в частности [5].

## **7.2. Математическое описание и характеристики линейных систем**

### **7.2.1. Пакет Control для исследования линейных объектов и систем**

Пакет прикладных программ Control Systems предназначен для решения разнообразных задач, связанных с анализом и синтезом линейных систем автоматического управления. Как и многие другие, пакет построен на основе объектно-ориентированной технологии и включает несколько классов, представляющих математическое описание линейных объектов:

`tf` (transfer function) – передаточные функции;  
`ss` (state space) – описание в пространстве состояний;  
`zpk` (zero-pole-gain) – описание в виде нулей, полюсов и коэффициентов передаточных функций.

Все эти классы являются потомками виртуального класса `lti` (linear time-invariant – линейные системы с постоянными параметрами) и наследуют от него поля (свойства) для описания объектов и методы (функции) для работы с ними.

Объекты `tf`, `ss`, `zpk` описываются соответствующими структурами, поля которых включают свойства объекта. Набор свойств для всех классов можно просмотреть введя:

```
help ltiprop
```

Доступ к полям объектов в Matlab осуществляется с помощью функций `set` (установить) и `get` (получить) и путем непосредственного обращения к полю. Однако в большинстве случаев необходимости в этом нет, так как основные поля заполняются и изменяются функциями пакета.

Для детального ознакомления с функциями воспользуйтесь справочной системой:

меню окна управления Matlab;  
командами помощи: `help control`, `help 'function_name'`;  
командой демонстрации: `demo`.

Большинство функций пакета Control работает со всеми тремя классами объектов, меняя алгоритм своей работы в зависимости от типа объекта. Для создания объектов применяется функции-конструкторы, название которых совпадает с именем класса: `tf`, `ss`, `zpk`.

Для освоения техники работы с объектами классов рекомендуем выполнить приведенные ниже упражнения.

#### Упражнение 1. Передаточные функции.

Объекты класса `tf`, описывают с помощью передаточных функций систему с несколькими входами и выходами, – возможно, с запаздыванием по управляющим входам.

Создадим SISO-объект (single input – single output: "один вход – один выход"):

```
sys = tf([1 2],[1 2 2 1])
```

Добавим запаздывание:

```
sys.Td = 0.5
```

Посмотрим свойства:

```
get(sys)
```

Посмотрим возможный набор свойств:

```
set(sys)
```

Создадим объект ММО (many inputs – many outputs: "много входов – много выходов") 2 на 2 (здесь используются так называемые *cell-массивы*, или *массивы ячеек* – базовый тип системы Matlab):

```
sys1 = tf({1, 2; 4, [1 3]}, {[1 2], [2 1]; 1, [1 2 1]})
```

Добавим запаздывание по второму управлению:

```
sys1.Td = [0 .3]
```

Пакет Control позволяет легко проводить любые структурные преобразования системы. Для упрощения преобразований переопределены основные арифметические операции для работы с объектами tf: умножение, деление и т.д. Введем две передаточные функции:

```
sys1 = tf(1,[1 1])
```

```
sys2 = tf([1 1],[1 2 1])
```

Передаточная функция последовательного соединения звеньев sys1 и sys2 определяется:

```
sys = sys1*sys2
```

Параллельное соединение:

```
sys = sys1+sys2
```

Деление (вспомогательная операция):

```
sys = sys1/sys2
```

Соединение в виде отрицательной обратной связи:

```
sys = sys1/(1+sys1*sys2)
```

Однако лучше воспользоваться функцией feedback:

```
sys = feedback(sys1,sys2)
```

После преобразований иногда полезно упростить модель с помощью функции minreal (минимальная реализация). Например, сравните:

```
sys = sys1*sys2
```

```
sys = minreal(sys)
```

Переопределим переменную sys:

```
sys = tf([1 1], [2 9 14 8])
```

Нули передаточной функции:

```
tzero(sys)
```

Полюса передаточной функции:

```
pole(sys)
```

Коэффициент передачи:

```
dcgain(sys)
```

Переходная характеристика системы *sys*:

```
step(sys)
```

Посмотрим возможные варианты использования функции

```
help step
```

Функция позволяет строить переходные характеристики нескольких систем, задавать вектор расчетных точек по времени, в случае необходимости функция возвращает результаты вычислений (при этом она не строит графики).

Расчет реакции системы на произвольное воздействие осуществляется с помощью процедуры в три шага:

1) задается вектор моментов времени, – например, от нуля до единицы с шагом 0,1:

```
t = 0:.1:10
```

2) задается вектор (для SISO) или матрица (для MIMO) значений входных воздействий в расчетные моменты времени, – например,  $u = 10$  при  $t = 0..5$  и  $u = 20$  при  $t = 5..10$ :

```
u = [10*ones(1,50), 20*ones(1,51)]
```

3) рассчитывается и строится переходной процесс:

```
lsim(sys,u,t)
```

Смотрите также

```
help lsim
```

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

```
nyquist(sys)
```

Смотрите также

```
help nyquist
```

Логарифмические частотные характеристики:

```
bode(sys)
```

Смотрите также

```
help bode
```

Следует обратить внимание на то, что функция `bode` в случае вызова ее в виде:

```
[a, f, w] = bode(sys)
```

возвращает значения амплитудно-частотной `a` и фазочастотной `f` характеристик, а также вектор расчетных частот `w`. При этом переменные `a` и `f` представляют собой трехмерные массивы, в которых первые две размерности задают канал системы (номер входа, номер выхода), а третья соответствует расчетным точкам. Если исследуется «одноканальная» SISO-система, эти переменные можно преобразовать в векторы:

```
a = a(:); f = f(:);
```

В таком формате их в дальнейшем проще использовать (например, в качестве параметров функции `plot`).

Аналогичная ситуация имеет место и с функцией `nyquist`, с помощью которой можно вычислить вещественную и мнимую частотные характеристики.

Структура объекта `tf` позволяет учесть только запаздывание по управлению. Запаздывание по состоянию (появляется, например, при замыкании разомкнутой системы с запаздыванием по управлению) можно учесть с помощью аппроксимации Паде. Например, аппроксимация запаздывания 2 сек. передаточной функцией 5-го порядка:

```
[numd, dend] = pade(2, 5)
td = tf(numd, dend)
```

Проверим ее эффективность:

```
sys = tf(1, [1 1])
step(sys, sys*td)
```

Другие функции можно самостоятельно освоить, используя справочную систему.

### Упражнение 2. Описание систем в пространстве состояний.

State Space-объект описывает с помощью матриц уравнений состояний и выхода систему с несколькими входами и выходами, – возможно, с запаздыванием по управляющим входам.

Смотрите

```
help ss
```

Зададим матрицы описания SISO-объекта 2-го порядка:

```
A = [0 1; -2 -3]
B = [0; 1]
C = [2 1]
D = 0
```

Соответствующая state-space модель:

```
sys = ss(A, B, C, D)
```

Передаточная функция этого объекта:

```
tf(sys)
```

Посмотрим свойства:

```
get(sys)
```

Посмотрим возможный набор свойств:

```
set(sys)
```

Зададим матрицы описания ММО-объекта 2-го порядка с двумя входами и двумя выходами:

```
A = [0 1;-2 -3]
```

```
B = [1 0 ;0 1]
```

```
C = [2 1;2 3]
```

```
D = [0 0;0 1]
```

Соответствующая state-space модель:

```
sys = ss(A,B,C,D)
```

Передаточные функции по всем каналам

```
tf(sys)
```

Все рассмотренные выше функции для tf-моделей работают и с ss-моделями, – например:

```
step(sys)
```

```
nyquist(sys)
```

Преобразование  $tf \rightarrow ss$  в отличие от  $ss \rightarrow tf$  неоднозначно. Пусть

```
sys =tf([1 1], [1 2 2 1])
```

1. Получим представление системы в виде фазовых переменных. Извлечем числитель и знаменатель передаточной функции. Обратите внимание на преобразование типа переменной `num` из массива ячеек в «обыкновенный» массив:

```
num = sys.num, num = num{1}
```

```
den = sys.den, den = den{1}
```

Получим матрицы описания:

```
[a,b,c,d] = tf2ss(num,den)
```

Сформируем объект:

```
sys1 = ss(a,b,c,d)
```

2. Получим представление в виде координат, пропорциональных фазовым. Для этого используем конструктор `ss`:

```
sys1 = ss(sys)
```

3. Представление в каноническом "модальном" виде:

```
sys1 = canon(sys, 'modal')
```

4. Представление в каноническом "companion" виде:

```
sys1 = canon(sys, 'companion')
```

### Упражнение 3. ZPK-модели.

ZPK-объект описывает с помощью наборов нулей, полюсов и коэффициентов систему с несколькими входами и выходами, – возможно, с запаздыванием по управляющим входам.

Смотрите:

```
help zpk
```

Пусть имеем объект с передаточной функцией

```
sys = tf([1 2],[ 1 2 2 1])
```

Его нули и полюса:

```
tzero(sys), pole(sys)
```

Соответствующая zpk-модель:

```
sys1 = zpk(sys)
```

Просмотрим свойства:

```
get(sys1)
```

Просмотрим возможный набор свойств:

```
set(sys1)
```

Зададим zpk-объект с нулями -1,-2 и полюсами -2,  $-.5+2j$ ,  $-.5-2j$  и коэффициентом 4:

```
sys2 = zpk([-1 -2],[-2, -.5+2i, -.5-2i],4)
```

Его передаточная функция:

```
tf(sys2)
```

### ***7.2.2. Символьные вычисления в Matlab. Получение математического описания САР с неизвестными коэффициентами***

При выполнении некоторых расчетов приходится строить математическое описание системы в ситуации, когда некоторые коэффициенты системы неизвестны. К сожалению, пакет Control Systems не поддерживает данные с неопределенными значениями и символьные вычисления. Поэтому приходится пользоваться другими возможностями системы, в основном пакетом символьной математики Symbolic Math. Этот пакет позволяет производить простейшие символьные операции и предоставляет доступ к ядру широко известной программы Maple. Хотя средства пакета существенно ограничены по сравнению с Maple, их вполне хватает для решения многих задач.

Предлагаем проделать следующее упражнение.

Требуется построить модель системы, структура которой приведена на рис. 87, в пространстве состояний, получить передаточную матрицу системы и построить переходные характеристики при определенном значении варьируемого коэффициента (например, при  $k = 10$ ).

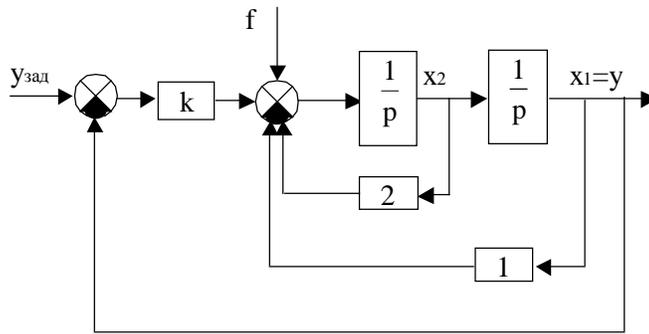


Рис. 87. Структурная схема системы.

Уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + k(y_{\text{зад}} - x_1) + f, \end{cases} \quad (266)$$

$$y = x_1.$$

Зададим символьные переменные:

```
syms k p
```

По уравнениям (266) зададим матрицы описания системы:

$$A = [0 \ 1; -1-k \ -2]$$

$$B = [0 \ 0; k \ 1]$$

$$C = [1 \ 0]$$

Вспомогательная единичная матрица:

$$E = [1 \ 0; 0 \ 1]$$

Передаточная матрица системы (в символьном виде):

$$W = C * (p * E - A)^{-1} * B$$

Подставим в нее  $k = 10$ :

$$W = \text{subs}(W, k, 10)$$

Выделим числители и знаменатели передаточной матрицы:

$$[n, d] = \text{numden}(W)$$

Переменные  $n$  и  $d$  – это массивы ячеек, содержащие символьные выражения числителей и знаменателей передаточной матрицы. Конструктор класса `tf` требует в качестве параметров массивы ячеек, содержащие векторы коэффициентов числителя и знаменателя (массивы чисел). С помощью специальной функции преобразования изменим формат данных:

$$n = \{\text{sym2poly}(n(1)), \text{sym2poly}(n(2))\}$$

$$d = \{\text{sym2poly}(d(1)), \text{sym2poly}(d(2))\}$$

Теперь переменные  $n$  и  $d$  могут служить параметрами конструктора `tf`:

$$W = \text{tf}(n, d)$$

Имея объект класса `tf`, можно использовать все возможности пакета `Control`. Согласно заданию построим переходные характеристики системы:

```
step(W)
```

### 7.3. Анализ и синтез линейных систем

#### 7.3.1. Анализ и синтез линейных систем с помощью программы *SisoTool*.

В состав пакета `Control Systems`, наряду с «низкоуровневыми» средствами представления и исследования линейных объектов и систем, описанными в 7.2.1, входит программа `SisoTool`, представляющая собой достаточно мощный инструмент анализа и синтеза одномерных линейных систем с типовыми структурами. Программа написана на языке `Matlab`, что демонстрирует не только «вычислительные» возможности языка, но и его возможности в плане построения полноценного пользовательского интерфейса. Запустить программу можно, введя в командном окне:

```
sisotool
```

Внешний вид главного окна программы показан на рис. 88.

Программа позволяет анализировать четыре типовые структуры линейных систем. Структура исследуемой системы показана в верхней правой части окна. Изменение структуры производится с помощью кнопки `FS` (см. рис. 88). Четыре блока, формирующие структуру системы, имеют следующее назначение: `G` – объект регулирования (в широком понимании этого термина); `H` – датчик обратной связи; `F` – предварительный фильтр; `C` – компенсатор (регулятор, корректирующее устройство и т.д.). Математическое описание этих блоков может быть представлено в виде `SISO`-объектов классов `ss`, `tf`, `zpk`. Объекты загружаются в программу из рабочей области (`WorkSpace`) `Matlab`, `MAT`-файла, или `Simulink`-диаграммы с помощью функции `Import` меню `File`. Особое место среди блоков занимают блоки `F` и `C`: после предварительной загрузки их математическое описание можно редактировать путем изменения, добавления и удаления полюсов и нулей передаточных функций, а также изменения коэффициентов. Это можно сделать с помощью меню `Compensators` или двойного щелчка мыши непосредственно на блоках. Кроме того, параметры компенсатора `C` выводятся в области `Current Compensator` главного окна программы. Для задания коэффициента компенсатора эта область имеет поле ввода. Нули и полюса компенсатора можно добавлять и удалять с помощью панели инструментов.

По умолчанию в главном окне программы `SisoTool` располагаются редактор размещения полюсов замкнутой системы и редактор частотных характеристик разомкнутой системы.

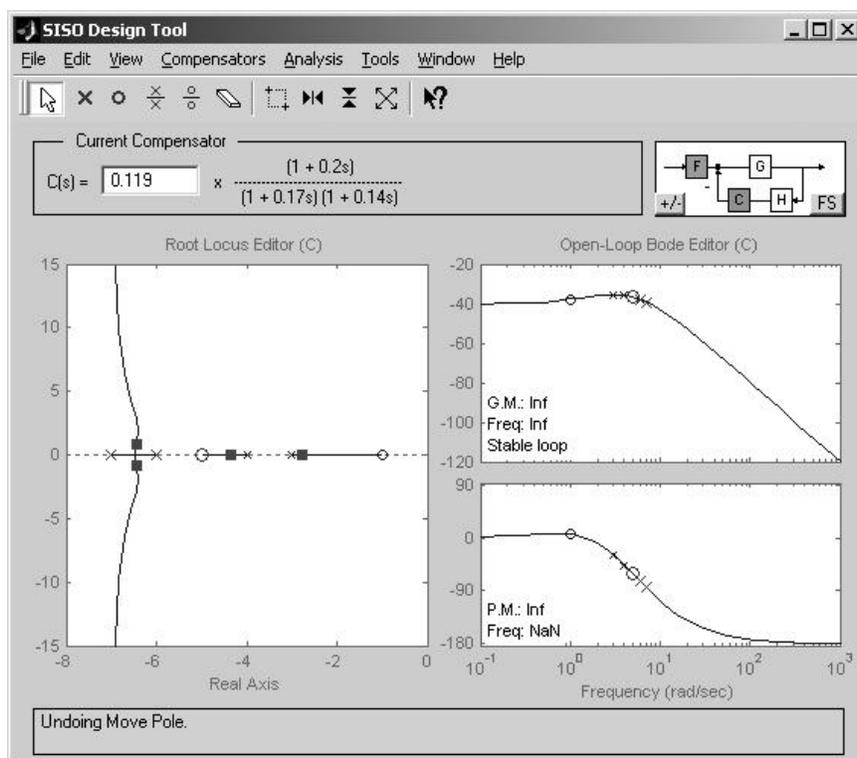


Рис. 88. Окно программы SisoTool

Редактор размещения полюсов представляет собой карту нулей и полюсов компенсатора (красные «кружочки» и «крестики») и полюсов замкнутой системы (красные «квадратики»). С помощью мыши можно изменять положение нулей и полюсов компенсатора, одновременно наблюдая изменение полюсов замкнутой системы. На карте также показаны траектории движения последних при изменении коэффициента компенсатора. Передвигая по ним полюса, можно наблюдать изменение текущего значения этого коэффициента.

Редактор частотных характеристик разомкнутой системы включает ее ЛАЧХ и ФЧХ, на которых «кружочками» и «крестиками» отмечены частоты, соответствующие нулям и полюсам. «Кружочки» и «крестики», относящиеся к компенсатору, выделены красным, их положение можно изменять с помощью мыши. Кроме отображения характеристик, редактор предоставляет информацию об устойчивости системы, выдавая значения запасов устойчивости по амплитуде и фазе.

Изменить содержание главного окна программы можно с помощью меню View.

Меню Analysis предоставляет широкие возможности по анализу САП путем построения различных временных и частотных ее характеристик в отдельных окнах. Следует отметить, что временные характеристики могут быть построены не только по каналу задание – выход, но и по другим каналам, связывающим входные воздействия с «промежуточными» величинами системы (см. пункт меню Other Loop Responses). При этом изменение параметров системы в главном окне ведет к автоматическому пересчету характеристик во всех открытых окнах. Таким образом, можно, например, изменяя нули и полю-

са системы или компенсатора, наблюдать за изменением переходной характеристики системы.

Меню Tools предлагает дополнительные инструменты, в частности для построения Simulink-модели системы.

Результаты работы в программе SisoTool в виде передаточных функций компенсатора, предварительного фильтра и системы в целом могут быть сохранены как в рабочей области Matlab (пункт Export меню File), так и в MAT-файле (пункт Save Session).

Более подробно ознакомится с программой можно по справочной системе или путем непосредственного экспериментирования.

### ***7.3.2. Численное решение задач оптимизации в Matlab.***

#### ***Расчет регулятора на заданный частотный показатель колебательности.***

Система Matlab включает множество функций, реализующих численные методы решения самых разнообразных задач. В качестве примера рассмотрим возможность численного определения настроек типовых регуляторов на заданный частотный показатель колебательности.

Графическое решение этой задачи описано в 5.2.3. Напомним, что оно предполагает определение единственного параметра настройки, а именно коэффициента передачи регулятора. Другие параметры (в общем случае – постоянные времени изодрома и дифференцирования) задаются. Согласно методу АФЧХ разомкнутой системы, включающей в себя регулятор, должна касаться окружности с уравнением (209).

Аналитическое решение задачи затруднено тем, что неизвестна частота, на которой АФЧХ должна касаться этой окружности. В то же время решить задачу численными методами можно достаточно просто, а учитывая возможности современных компьютеров, – и достаточно быстро. При этом вообще не требуется никаких дополнительных построений и выводов, подобных приведенным в 5.2.3.

Идея численного решения многих задач состоит в применении методов оптимизации. Допустим, необходимо решить некоторое уравнение вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (267)$$

это, очевидно, означает, что необходимо найти такой набор (или такие наборы) значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые обеспечивают выполнение (267).

Соответствующая задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – такие, что

$$(F(x_1, x_2, \dots, x_n))^2 \rightarrow \min. \quad (268)$$

Это так называемая *задача на безусловный экстремум*. Численное ее решение предполагает целенаправленный поиск экстремума (т.е. минимума функции  $(F(x_1, x_2, \dots, x_n))^2$ ) с помощью специальных алгоритмов, обеспечивающих пошаговое движение в пространстве координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Отметим важные особенности численного решения: 1) оно всегда является приближенным; 2) оно требует задания *начального приближения* - точки в пространстве координат  $x_1, x_2 \dots x_n$ , с которой начнется поиск. Эти особенности вытекают из существа самих методов численной оптимизации. Поэтому решение обычно проверяется прямой подстановкой найденных значений в функцию  $F(\dots)$ , а в случае, когда уравнение (267) может иметь несколько решений, организуется несколько процедур поиска с разными начальными приближениями.

Кроме задач на безусловный экстремум, существуют задачи на *условный экстремум*, в которых дополнительно накладываются ограничения на пространство поиска в виде предельных значений координат либо уравнений связи между ними.

Система Matlab содержит пакет прикладных программ Optimization, функции которого позволяют численно решать задачи как на безусловный, так и на условный экстремум. Причем благодаря тому, что сама система ориентирована на векторно-матричные вычисления, ограничений на размерность задачи (количество искомых переменных) практически нет. В нашем случае достаточно возможностей «простой» функции `fminbnd`, входящей в базовый пакет Matlab. Эта функция ищет минимум функции одной переменной на заданном диапазоне ее (переменной) значений. Для ознакомления с возможностями функции и ее интерфейсом введите в командном окне системы:

```
help fminbnd
```

В простейшем случае формат вызова функции следующий:

```
x = fminbnd(FUN, xmin, xmax)
```

Функция принимает три параметра: `FUN` – строка с именем файла-функции, вычисляющей значение минимизируемой функции при заданном значении аргумента; `xmin` и `xmax` – минимальное и максимальное значение переменной. Возвращается значение аргумента, при котором достигается минимум функции.

Более сложные варианты вызова `fminbnd` предусматривают задание точности вычислений, дополнительных параметров и др.

Решим следующую задачу: необходимо найти радиус окружности, при котором площадь, заключенная между этой окружностью и вписанным в нее квадратом, будет равной единице:

$$S_c(r) - S_s(r) = 1, \quad (269)$$

где  $r$  – радиус окружности;  $S_c$  – площадь окружности;  $S_s$  – площадь квадрата.

Эта задача, очевидно, имеет простое аналитическое решение. Однако решим ее численно. Задачу оптимизации в данном случае можно представить в виде:

$$F(r) = (S_c(r) - S_s(r) - 1)^2 \rightarrow \min. \quad (270)$$

Напишем функцию Matlab, вычисляющую минимизируемую функцию. Назовем эту функцию `minfun` (минимизируемая функция) и помести ее в файл `minfun.m`

```
function F = minfun(r)
% Площадь круга
Sc = pi*r*r;
% Площадь квадрата
Ss = 2*r*r;
% Возвращаемое значение
F = (Sc-Ss-1)^2;
```

Как видно, минимизируемая функция может представлять собой не просто некоторую формулу, но и совокупность вычислений. Среди них могут быть условные, циклические и любые другие операции Matlab, вызовы других функций и т. п.

Вызов функции `fminbnd`, которая собственно и будет искать минимум  $F(r)$ , используя функцию `minfun`, может быть сделан из командного окна или из какой-либо программы. Предполагая, что искомый радиус лежит в диапазоне от 0 до 4, определим его:

```
r = fminbnd('minfun',0,4)
r =
    0.9359
```

Проверим правильность вычислений:

```
Sc = pi*r*r;
Ss = 2*r*r;
Sc-Ss
ans =
    1.0000
```

Вернемся к нашей задаче. Нам необходимо определить такой коэффициент передачи регулятора, при котором максимум амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы был равен заданному значению  $\Lambda$ :

$$\max(A_{\text{зам}}(k_p)) = \Lambda. \quad (271)$$

Соответствующая задача оптимизации

$$(\max(A_{\text{зам}}(k_p)) - \Lambda)^2 \rightarrow \min. \quad (272)$$

Передаточную функцию замкнутой системы при заданном значении  $k_p$  определить несложно. АЧХ системы можно найти с помощью функции `bode`, а ее максимум – с помощью встроенной функции `max`.

Напишите программу самостоятельно.

### 7.3.3. Операции над комплексными числами в Matlab. Реализация метода расчета регуляторов по РАФЧХ

В Matlab нет специального типа данных для представления комплексных чисел, – все числа по умолчанию считаются комплексными. Действительные числа рассматриваются как комплексные с нулевой мнимой частью.

При запуске программы автоматически инициализируются мнимыми единицами две переменные:  $i$  и  $j$ . В дальнейшем они могут использоваться в этом качестве, а могут быть и переопределены. Определение любой переменной значением мнимой единицы может быть выполнено следующим образом:

```
i = sqrt(-1)
```

С такой переменной можно задать любое комплексное число:

```
a = 2+i, b = 1+2*i, c = exp(4+2*i)
```

Альтернативный способ задания комплексных чисел не использует специальных переменных (и знаков умножения) и поэтому является более универсальным:

```
a = 2+1i, b = 1+2j, c = exp(4+2i)
```

В данном случае  $i$  и  $j$  – это не переменные, а просто символы.

Обратимся к задаче настройки типовых регуляторов на заданный корневой показатель колебательности. В 5.2.4. приведены формулы для расчета настроек ПИ-, ПД- и ПИД-регулятора (233, 234 и 237 соответственно). Единственная проблема, которая может возникнуть при их вычислении в Matlab, – определение расширенных характеристик объекта  $P_{об}(\omega, m)$  и  $Q_{об}(\omega, m)$ . В следующем примере показано, как их можно рассчитать.

Пусть имеется объект с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}.$$

Определим его расширенную АФЧХ для диапазона частот от  $\omega = 0,1$  до  $\omega = 10$  с шагом 0,1. Корневой показатель колебательности  $m$  примем равным 0,4.

```
w = .1:.1:10;  
m = .4;  
p = (1i-m)*w;  
% Расширенная АФЧХ  
W = 1./(p.^3 + 3*p.^2 + 3*p + 1);  
% Расширенная ВЧХ  
P = real(W)  
% Расширенная МЧХ  
Q = imag(W)
```

Обратите внимание на использование «точек» при вычислении расширенной АФЧХ, – они необходимы, так как над вектором  $p$  производятся не матричные, а поэлементные операции. Такие операции следует использовать и далее, при расчете настроек регулятора по формулам (233),(234),(237).

Результатом расчета будут векторы настроек для заданных расчетных частот. Из этих векторов нужно выбрать только те варианты настроек, для которых коэффициенты регулятора – положительные действительные числа (варианты, для которых это требование не выполняется, соответствуют случаям, когда для данной частоты не существует искомым настроек).

#### **7.3.4. Расчет корректирующего устройства методом динамической компенсации в Matlab**

Рассмотренный в 5.3. метод расчета корректирующих устройств по ЛАЧХ в основном ориентирован на «ручное» (графическое) применение. Автоматизировать его в чистом виде не имеет большого смысла, так как при этом пропадают все те моменты, связанные с искусством проектировщика, которые позволяют получить наиболее простое устройство коррекции. Поэтому здесь рассмотрим другой метод, по сути, очень близкий методу расчета по ЛАЧХ и в то же время позволяющий использовать вычислительную технику.

Идея метода динамической компенсации [4] очень проста. Пусть имеется объект с передаточной функцией  $W_{об}(p)$ . Под объектом, как и ранее, здесь понимается вся неизменяемая часть системы. Передаточная функция разомкнутой системы с корректирующим устройством:

$$W_{раз}(p) = W_{ку}(p)W_{об}(p), \quad (273)$$

где  $W_{ку}(p)$  – передаточная функция корректирующего устройства.

Потребуем, чтобы разомкнутая система описывалась некоторой известной *эталонной* передаточной функцией  $W_{раз,эт}(p)$ , обеспечивающей требуемое качество замкнутой системы. Эта передаточная функция может быть определена, например, по эталонной передаточной функции замкнутой системы [4] либо взята для разомкнутой системы с типовой ЛАЧХ (см. 5.3.).

Тогда

$$W_{ку}(p) = \frac{W_{раз,эт}(p)}{W_{об}(p)}. \quad (274)$$

Из (274) видно: для того, чтобы корректирующее устройство было физически реализуемым, относительный порядок  $W_{раз,эт}(p)$  должен быть не меньше относительного порядка  $W_{об}(p)$ . Только в таком случае порядок числителя  $W_{ку}(p)$  будет меньше или равен порядку знаменателя. Это накладывает определенные требования на выбор  $W_{раз,эт}(p)$ . Кроме того, очевидно, что порядок числителя  $W_{ку}(p)$  будет не меньше порядка знаменателя  $W_{об}(p)$ , а порядок знаменателя – не меньше порядка знаменателя  $W_{раз,эт}(p)$ . Это свидетельствует о том, что построенное по (274) корректирующее устройство является достаточно сложным.

Следует также отметить, что если объект является устойчивым, но не минимально-фазовым, реальная система с корректирующим устройством будет неустойчивой. Это связано с тем, что правые нули  $W_{об}(p)$  «попадут» в полюса  $W_{ку}(p)$ . Хотя теоретически в передаточной функции разомкнутой систе-

мы данные полюса будут «сокращаться» с нулями  $W_{об}(p)$ , на практике подобного сокращения в точности добиться невозможно, поскольку невозможно идеально точно реализовать передаточную функцию корректирующего устройства. Поэтому в дальнейшем ограничимся случаем, когда объект является минимально-фазовым.

Основными проблемами при построении корректирующего устройства, как показано выше, являются его сложность и физическая реализуемость. Во многих случаях существует возможность упростить  $W_{ку}(p)$  и сделать ее физически реализуемой без существенного ухудшения качества системы. Упрощенное корректирующее устройство будем называть *реальным*, а устройство с передаточной функцией, определенной по (274), – *идеальным*.

Пусть структура передаточной функции реального корректирующего устройства задана. Определить ее коэффициенты можно, например, путем аппроксимации частотной характеристики  $W_{ку}(j\omega)$  в области малых и средних частот оптимизационным методом (известно, что высокочастотная часть характеристики не оказывает существенного влияния на переходные процессы в системе). Соответствующая задача оптимизации формально описывается следующим образом:

$$\int_0^{\omega_{гр}} (W_{ку}(j\omega) - W_{ку,реал.}(j\omega))^2 d\omega \rightarrow \min, \quad (275)$$

где  $\omega_{гр}$  – некоторая граничная частота, задающая диапазон частот аппроксимации;  $W_{ку,реал.}(j\omega)$  – АФЧХ реального корректирующего устройства.

Однако так как важны не столько свойства корректирующего устройства, сколько свойства разомкнутой системы, лучше задачу сформулировать так:

$$\int_0^{\omega_{гр}} (W_{раз,эт}(j\omega) - W_{раз,реал.}(j\omega))^2 d\omega \rightarrow \min, \quad (276)$$

где  $W_{раз,реал.}(j\omega)$  – АФЧХ разомкнутой системы с реальным корректирующим устройством.

Решить задачу в Matlab можно с помощью функции `fminsearch`, осуществляющей минимизацию функции нескольких переменных симплекс-методом. Очевидно, что под этими переменными следует понимать параметры передаточной функции  $W_{ку,реал.}(p)$ . В простейшем случае формат вызова функции следующий:

```
X = fminsearch('F', X0)
```

где `F` – имя файла-функции, вычисляющей значение минимизируемой функции; `X` – вектор искоемых параметров; `X0` – вектор их начальных приближений.

Так как частотные характеристики  $W_{раз,эт}(j\omega)$  и  $W_{раз,реал.}(j\omega)$  рассчитываются для фиксированных значений частот и являются комплексными, функция `F` должна вычислять не интеграл (276), а сумму:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \left[ \operatorname{Re}(W_{\text{раз,эт}}(j\omega_i)) - \operatorname{Re}(W_{\text{раз,реал.}}(j\omega_i)) \right]^2 + \left[ \operatorname{Im}(W_{\text{раз,эт}}(j\omega_i)) - \operatorname{Im}(W_{\text{раз,реал.}}(j\omega_i)) \right]^2 \right), \quad (277)$$

где  $n$  – индекс частоты  $\omega_{\text{гр}}$ .

Под  $x$  в нашем случае нужно понимать коэффициенты числителя и знаменателя  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$ . Начальное приближение  $x_0$  для этих коэффициентов можно определить через нули и полюса идеального корректирующего устройства. При этом если числитель  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$  имеет порядок  $m$ , а знаменатель – порядок  $n$ , в расчет нужно брать  $m$  наименьших по модулю нулей и  $n$  наименьших по модулю полюсов  $W_{\text{ку}}(p)$ , так как именно они в большей степени определяют характеристику  $W_{\text{ку}}(j\omega)$  в диапазоне низких и средних частот. По этим нулям и полюсам с учетом согласующего коэффициента и рассчитывается начальное приближение для  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$ .

В заключение можно привести следующую рекомендацию к расчету  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$ . Начинать расчет нужно с максимально простого устройства коррекции, имеющего первый или второй порядок и нулевой или первый относительный порядок. Если рассчитанное устройство не в состоянии обеспечить требуемое качество регулирования, следует повторить расчет уже для более сложной структуры. В любом случае последовательное усложнение устройства приведет к цели, так как качество системы с идеальным корректирующим устройством «гарантировано».

## 7.4. Система имитационного моделирования Simulink

### 7.4.1. Общая характеристика

Система Simulink – программный продукт семейства Matlab, предназначенный для моделирования динамических систем. Она работает в тесном взаимодействии со средой Matlab, обмениваясь с ней данными. Создание модели системы в Simulink происходит в наиболее простой и естественной форме – путем сборки модели из блоков, представляющих динамические звенья, статические характеристики и другие алгоритмы преобразования сигналов (в том числе и нелинейные). Расчет моделей производится с помощью методов численного интегрирования.

При работе с системой Simulink необходимо открыть пустое окно для набора модели системы и окно библиотеки блоков Simulink. Библиотека состоит из наборов блоков (blocksets). Базовый набор, который называется Simulink, содержит несколько разделов. Основные из них:

- Continues – блоки непрерывной обработки сигналов;
- Discontinuities – блоки «разрывных» функций;
- Discrete – блоки дискретной обработки;
- Look-Up Tables – блоки с табличным заданием характеристик;
- Math Operations – блоки математических операций;
- Ports & Subsystems – блоки-подсистемы;

Signal Routing – вспомогательные блоки, поддерживающие группировку, разгруппировку сигналов и другие подобные операции;

Sinks – блоки-приемники сигналов;

Sources – блоки-источники сигналов;

User-Defined Functions – блоки, представляющие пользовательские функции.

Пакеты прикладных программ Matlab добавляют свои наборы блоков.

Модель системы набирается перетаскиванием мышью блоков из разделов библиотеки в окно набора модели и внутри его с последующим соединением блоков стрелками, показывающими распространение сигналов от блока к блоку. Копирование блоков в пределах окна модели осуществляется также перетаскиванием с помощью правой кнопки мыши.

Модель обязательно должна содержать хотя бы один блок-источник сигналов из раздела Sources, – например, блок Step (ступенчатое изменение входного сигнала). Для «измерения» и запоминания контролируемых переменных (сигналов) модели применяются блоки-«приемники сигналов» раздела Sinks, чаще всего блок Scope (вывод временного графика изменения сигнала).

После помещения необходимых блоков в окно набора модели необходимо задать их параметры: значения коэффициентов, временные задержки и т.д. Доступ к параметрам возможен по двойному щелчку левой кнопкой мыши на интересующем блоке. При щелчке правой кнопкой мыши появляется меню, позволяющее работать с буфером обмена Windows, а также настроить внешний вид блока (например, изменить его ориентацию в окне модели).

Линии связи (стрелки), соединяющие блоки модели, могут показывать направление передачи как одного (скалярного), так и нескольких сигналов (вектора). В последнем случае блоки, как правило, обрабатывают одинаковым образом все компоненты вектора. Некоторые блоки, однако, предназначены специально для обработки векторов, – например, операции матричного умножения или свертки векторов. Просмотреть «ширину» линии можно пометив пункт Signal dimensions меню Format. Выделить векторные линии жирным можно пометив пункт Wide nonscalar lines.

После набора модели можно запустить процедуру расчета, предварительно задав ее параметры (при необходимости). Под параметрами в данном случае понимаются название функции-решателя, начальное и конечное время интегрирования, а также параметры обмена данными между системой Simulink и средой Matlab.

В Simulink используются два типа функций-решателей (методов численного интегрирования): с постоянным и с переменным шагом. При выборе первого типа пользователь может задать величину шага, которая и будет определять точность расчета. Для методов с переменным шагом можно задать максимальное и минимальное значения шага, а также абсолютную и относительную точность вычислений. Методы с переменным шагом условно разделяются на методы решения «нежестких» и «жестких» задач. В названии последних присутствует буква “s”.

Все методы, доступные в Simulink, отличаются друг от друга точностью и скоростью вычислений. В качестве практической рекомендации по их выбору можно привести следующее. Если модель не содержит разрывных функций (нежесткая задача) следует пользоваться методами ode45 или ode23 (методы Рунге-Кутты 4-5-х и 2-3-х порядков соответственно), в противном случае (жесткая задача) следует пользоваться методами ode15s и ode23s, разработанными специально для жестких систем. И, наконец, если в модели возможны переключения с теоретически бесконечной скоростью (скользящие режимы), единственным решением будет применение методов с постоянным шагом, так как другие останавливают вычисления, бесконечно уменьшая шаг.

Подробнее о методах см. справочную систему Matlab.

Запуск, приостановка расчета и досрочная остановка вычислений осуществляются с помощью кнопок панели инструментов окна модели. Просмотреть графики изменения переменных в окнах блоков Scope можно как по окончании процедуры вычисления, так и во время ее выполнения.

Модели Simulink хранятся в текстовых файлах специального формата с расширением mdl. Запуск системы и открытие окна модели производится путем ввода имени модели в командной строке Matlab.

В качестве упражнения постройте модель системы, приведенной на рис. 87, и осуществите расчет ее реакции на ступенчатое изменение сначала задающего, а потом и возмущающего воздействий. Обратите внимание, что для этого необходимо настроить параметры блоков Step.

Окно модели показано на рис. 89.

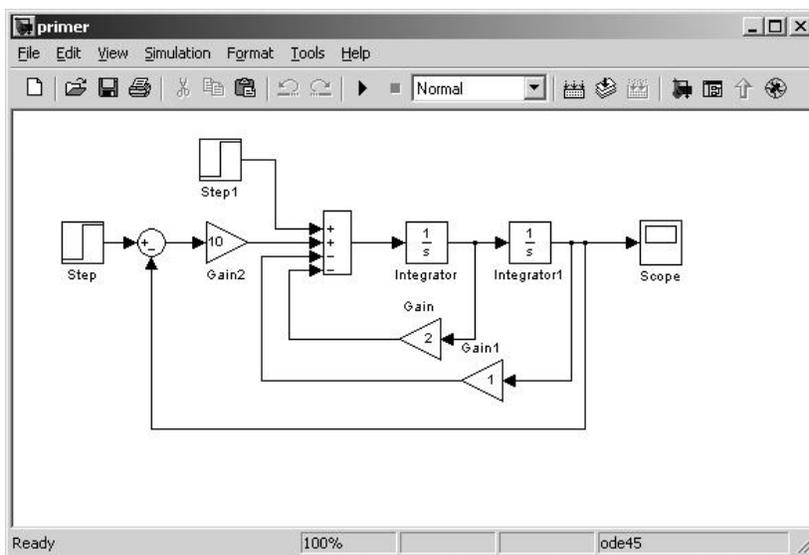


Рис. 89. Окно модели системы в Simulink.

Расчет производился при следующих параметрах:

Step: Step time = 0, Initial Value = 0, Final value = 1;

Step1: Step time = 10, Initial Value = 0, Final value = 1;

Simulation parameters: Start time = 0, Stop time = 20, Solver Type – ode45,  
Relative tolerance = 1e-6.

Результаты расчета приведены на рис. 90.

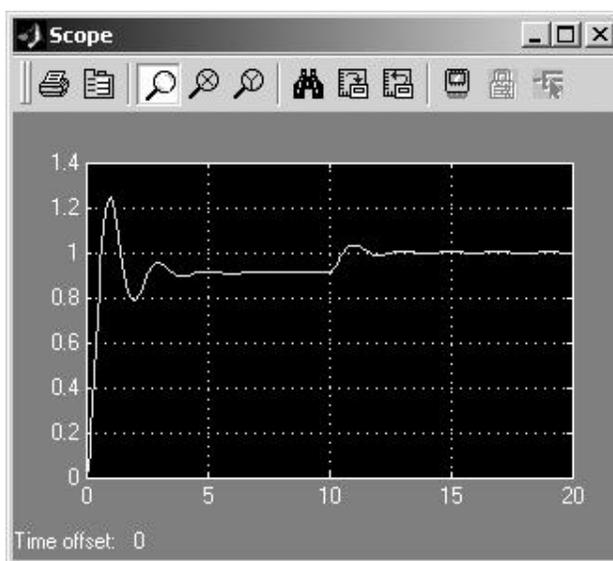


Рис. 90. Результаты моделирования в окне блока Scope.

#### 7.4.2. Блок-схема *Nonlinear Control Design (NCD)*

Блок-схема *Nonlinear Control Design* («нелинейное проектирование управления») входит в набор блоков *NCD Blockset* и используется в среде *Simulink* для расчета параметров регулирующих устройств с помощью численных методов оптимизации.

Блок *NCD-Output* непосредственно подключается к модели системы, набранной в *Simulink*, к линии выхода (контролируемой координаты). Модель должна содержать блоки, параметры которых подлежат определению в результате процедуры оптимизации – блоки моделей регуляторов, корректирующих устройств и т.п. Такие параметры задаются в модели не численными значениями, а именами и заранее инициализируются в среде *Matlab* из командной строки или путем выполнения соответствующего файла.

Кроме того, модель может содержать блоки с параметрами, точное значение которых неизвестно, но известен диапазон их изменения (как правило, блоки, моделирующие объект управления). Эти параметры также задаются в модели своими именами, но не инициализируются, а описываются в блоке *NCD-Output*.

В ходе выполнения процедуры оптимизации программа *NCD* оценивает качество функционирования системы непосредственно по виду переходного процесса, т.е. по степени близости реального процесса желаемому, вид которого задается пользователем.

На вход(ы) *Simulink*-модели системы путем подключения соответствующих блоков подается заданное воздействие, – например, ступенчатое. На выходе, в блоке *NCD*, пользователь формирует границы переходного процесса (или процессов) по времени и значению контролируемой переменной. Грани-

цы могут быть двух видов: «непересекаемые» (limiting constraints), за которые кривая процесса выходить не должна, и «пересекаемые» (overachieving constraints). При пересечении последних на оценку качества процесса накладывается штраф, пропорциональный удалению от границы и весовому коэффициенту, заданному пользователем для данной границы.

Цель оптимизации состоит в определении таких значений параметров регулирующих устройств, при которых: 1) кривая переходного процесса не выходит за «непересекаемые» границы; 2) за пересечения «пересекаемых» границ наложен минимальный штраф (в идеале равный нулю).

При первом запуске программы по умолчанию формируются границы, соответствующие некоторой желаемой реакции системы на единичное ступенчатое воздействие в момент времени  $t=0$  с 20-процентным перерегулированием. Изменить положение границ можно перемещая их мышью при нажатой левой кнопке. Задать точные координаты границы, ее тип (limiting/overachieving) и весовой коэффициент для штрафа при пересечении можно щелкнув по границе правой кнопкой мыши. Для разделения границы на две самостоятельные части нужно выделить ее мышью и нажать кнопку «Split».

Существует также возможность автоматического формирования стандартной системы границ реакции на входное ступенчатое воздействие. Показатели качества процесса при этом задаются с использованием пункта Step response... меню Options.

Параметры системы, подлежащие определению, обязательно должны быть описаны до запуска процедуры оптимизации (пункт Parameters меню Optimization). Здесь задаются: имена переменных, верхние и нижние пределы их изменения (в случае ограничений), ряд параметров, определяющих точность вычислений и некоторые характеристики процесса оптимизации.

Параметры системы, изменяющиеся в заданных пределах («дрейфующие»), описываются в пункте Uncertainty меню Optimization. Здесь задаются: имена переменных, верхние и нижние пределы их изменения (обязательно), а также то, какие именно значения этих переменных будут использоваться в процедуре оптимизации (номинальные, максимальные, минимальные, случайные в заданном диапазоне).

Запуск процедуры оптимизации возможен лишь после инициализации системы, включающей инициализацию переменных и загрузку структуры границ.

Процесс оптимизации описывается в рабочей области памяти Matlab структурой NcdStruct, содержащей информацию о границах, переменных системы и параметрах оптимизации, и вспомогательными переменными OPT\_STEP, OPT\_STOP.

Кроме того, в рабочей области должны присутствовать переменные, подлежащие определению, с их начальными значениями.

Инициализацию системы можно провести в командной строке Matlab или путем загрузки соответствующего mat-файла, используя пункт Load меню File. Последний способ предпочтителен, так как позволяет использовать результаты предыдущей работы.

Запуск процедуры оптимизации осуществляется с помощью кнопки Start. После запуска в окне команд Matlab выводится соответствующая информация. Если установлена опция «Display optimization information» в пункте Parameters меню Optimization, выводится также информация о каждом шаге вычислений.

Процедура заканчивается успешно, если достигнут минимум штрафа и кривая переходного процесса не вышла за «непересекаемые» границы. Если достичь этого не удастся, также выводится соответствующее сообщение. «Досрочная» остановка процедуры – с помощью кнопки Stop.

Текущие значения определяемых переменных можно получить в командном окне. Сохранить полученные значения, а также параметры системы можно используя Save меню File. При выходе из программы это сделать будет предложено автоматически.

Кроме описанного, программа NCD предлагает ряд сервисных услуг: управление осями (пункты Time range и Y-axis меню Options), вывод начального (до оптимизации параметров) отклика системы (пункт Initial response меню Options), печать графика и др.

В случае, если проектируется система с несколькими выходами, система границ задается по каждой выходной координате, переключение между которыми осуществляется с помощью поля ввода Port.

В качестве примера определим параметры ПИ-регулятора для системы с объектом управления, описываемым передаточной функцией третьего порядка (рис. 91). Кроме управляющего воздействия, объект подвергается возмущению, противодействующему управлению. Поэтому Simulink-модель системы содержит два блока входных сигналов.

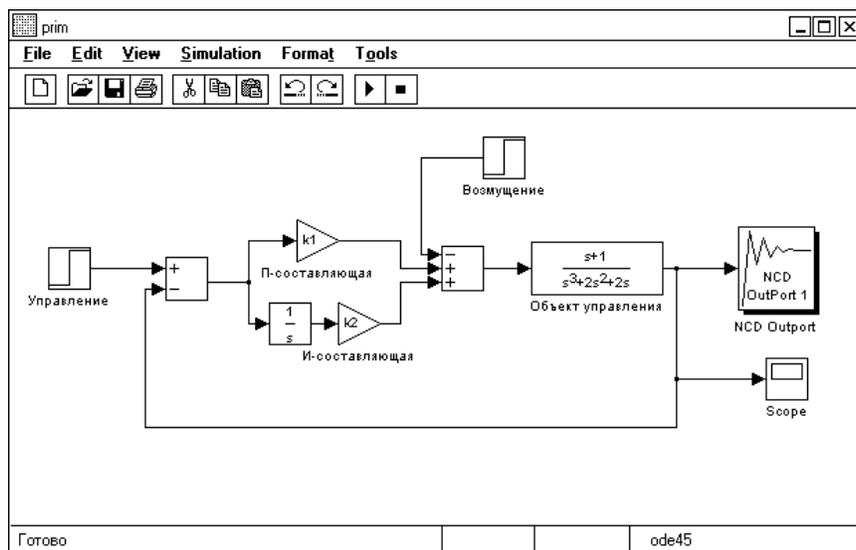


Рис.91. Модель системы.

Предположим, что характер воздействий на систему достаточно полно учитывается в модели при следующих параметрах входных сигналов: единичное управление скачкообразно подается в момент времени  $t=0$ ; возмущение,

максимальное по модулю и равное единице, подается в момент времени  $t=10$ . При этом считается, что к моменту подачи возмущения переходный процесс по управлению должен завершиться.

При описанных входных воздействиях требования к системе сформируем следующим образом: быстродействие системы при обработке управляющего сигнала и возмущения не больше 4 сек. («трубка допуска»  $\pm 5\%$ ), перерегулирование по управлению – не больше 40 %, максимальное отклонение при нанесении возмущения – не более 50%.

Изменяя коэффициенты регулятора с достаточно крупным шагом (например, равным 1), исследуем переходные процессы в системе, наблюдая их с помощью блока Scope. По результатам исследований определим первое (наилучшее) приближение для параметров регулятора:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ .

В блоке NCD строим систему границ процесса (рис. 90). Все границы имеют тип limiting. В поле ввода Tunable Variables пункта Parameters меню Optimization введем имена переменных, подлежащих определению ( $k_1$ ,  $k_2$ ).

С помощью кнопки Start запустим процесс оптимизации. За его ходом будем наблюдать по изменению графика процесса в окне NCD и по информации в окне команд Matlab.

По окончании процесса, введя в окне команд имена переменных, получим их окончательные значения:  $k_1 = 1.79$ ,  $k_2 = 0.93$ .

На рис. 92 показаны графики переходных процессов для первого приближения и окончательного варианта значений параметров регулятора.

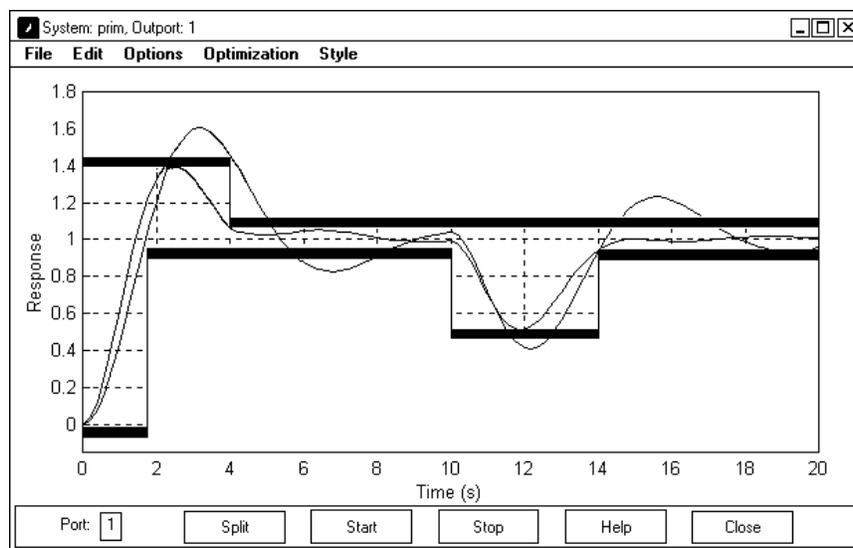


Рис. 92. Результаты оптимизации.

Приведенный пример, конечно, не претендует на какую-либо практическую значимость или полноту освещения возможностей программы NCD, но показывает этапы подготовки модели и основные принципы работы с программой. Для более глубокого изучения рекомендуется использовать набор демонстрационных примеров.

В заключение приведем несколько рекомендаций по использованию программы.

1. Перед применением программы следует определить, насколько это возможно, лучшее первое приближение для параметров, подлежащих определению. Иначе может возникнуть ситуация, когда в ходе процедуры оптимизации будут определены параметры, соответствующие некоторому локальному минимуму оптимизируемой функции, не удовлетворяющие предъявляемым требованиям.

С целью получить наилучшее первое приближение рекомендуется исследовать систему известными аналитическими или другими методами, предварительно упростив ее. Другой вариант – подбор неизвестных значений при моделировании непосредственно в Simulink.

2. При заметном замедлении скорости вычислений рекомендуется остановить процесс и, если достигнутые результаты не удовлетворительны, повторить его с новым начальным приближением.

### 7.4.3. Моделирование ограничений и релейных характеристик

Ограничения и релейные характеристики в Simulink-моделях можно представить с помощью блоков раздела Discontinuities базового набора.

Ограничение сигнала задается блоком Saturation. Его параметрами являются верхний и нижний пределы выходного сигнала. На линейной части характеристики блок имеет единичный коэффициент передачи. Если требуется другой коэффициент, следует предварительно усилить сигнал с помощью блока Gain из раздела Math Operations (см. рис. 93).

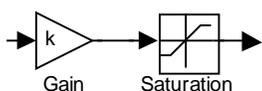


Рис. 93. Модель ограничения.

(см. рис. 93).

В ряде случаев требуется более сложные схемы ограничения. Часто, например, ограничение выходного сигнала какого-либо устройства физически связано с ограничением его внутренних сигналов. Рассмотрим Simulink-модель ПИД-регулятора, предлагаемую автором (рис. 94).

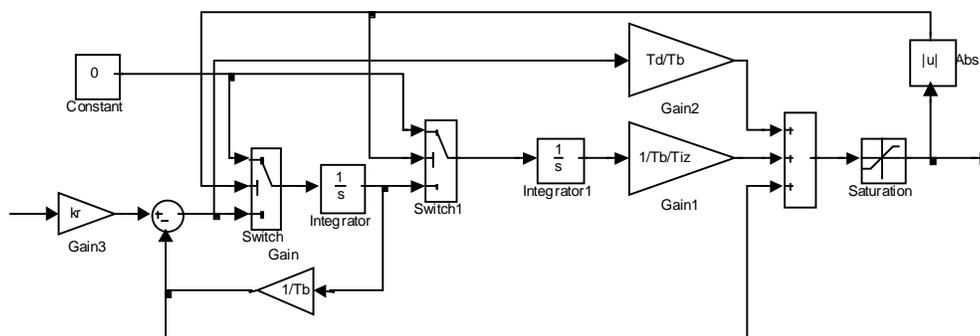


Рис. 94. Модель ПИД-регулятора.

Модель построена по уравнениям в пространстве состояний физически реализуемого ПИД-регулятора с учетом ограничения выходного сигнала. На линейном участке характеристики его передаточная функция

$$W_p(p) = k_p \frac{T_d T_{из} p^2 + T_{из} p + 1}{T_{из} p (T_б p + 1)}, \quad (228)$$

где  $T_б$  – постоянная времени «балластного» апериодического звена, введенного в структуру регулятора для его физической реализуемости. Чем меньше эта постоянная, тем ближе характеристики регулятора к характеристикам идеального ПИД-регулятора с передаточной функцией (195).

Ограничение выходного сигнала производится с помощью блока Saturation на выходе регулятора. Кроме того, при достижении выходным сигналом предельных уровней производится «замораживание» переменных состояния регулятора путем обнуления сигналов на входах интеграторов. Эту задачу выполняют переключатели Switch и Switch1 (раздел Signal Routing), которые подключают к входам интеграторов постоянный нулевой сигнал, если модуль выходного сигнала достигает уровня ограничения. «Замораживание» состояния регулятора позволяет ему «безударно» включиться в работу после выхода из зоны ограничения.

Моделирование «отсечек» производится с помощью блока Dead Zone.

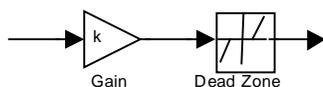


Рис. 95. Моделирование «отсечки».

На линейных частях характеристики блок имеет единичный коэффициент передачи. Если требуется другой коэффициент, следует предварительно усилить сигнал с помощью блока Gain (рис. 95).

Двухпозиционные реле представляются блоком Relay. Параметры блока задают «точки» (значения входного сигнала) включения и выключения реле и уровни выходного сигнала во «включенном» и «выключенном» состояниях. В окне настройки блока Relay, приведенном на рис. 97, показаны значения настроек, соответствующих статической характеристике реального двухпозиционного реле, показанной на рис. 75. Очевидно, что для моделирования идеального двухпозиционного реле параметры Switch on point и Switch off point нужно задать нулевыми.

Трехпозиционные реле можно представить в виде параллельного соединения двух блоков Relay (рис. 96). Для моделирования статической характеристики реального трехпозиционного реле, показанной на рис. 77, настройки блоков Relay и Relay1 должны быть такими, как показано на рис. 98. Если необходимо исключить зону неоднозначности, следует ввести  $b=c$ .

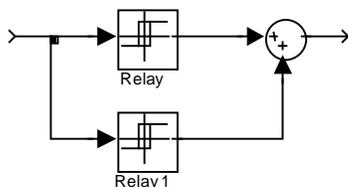


Рис. 96. Модель трехпозиционного реле.

Для моделирования статической характеристики реального трехпозиционного реле, показанной на рис. 77, настройки блоков Relay и Relay1 должны быть такими, как показано на рис. 98. Если необходимо исключить зону неоднозначности, следует ввести  $b=c$ .

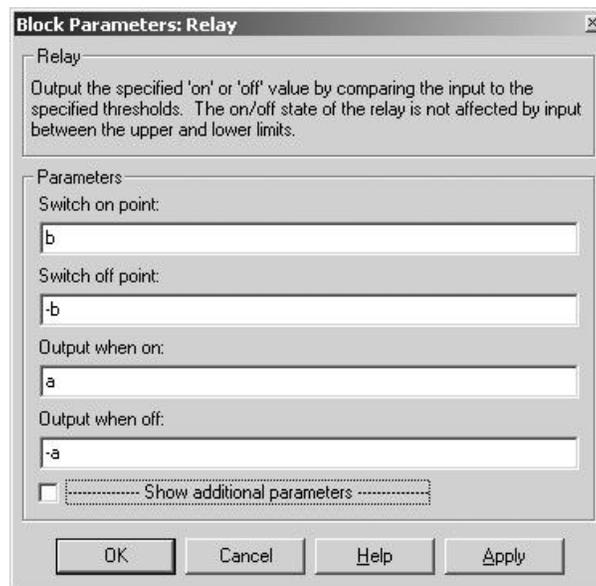


Рис. 97. Настройки блока Relay для моделирования двухпозиционного реле.

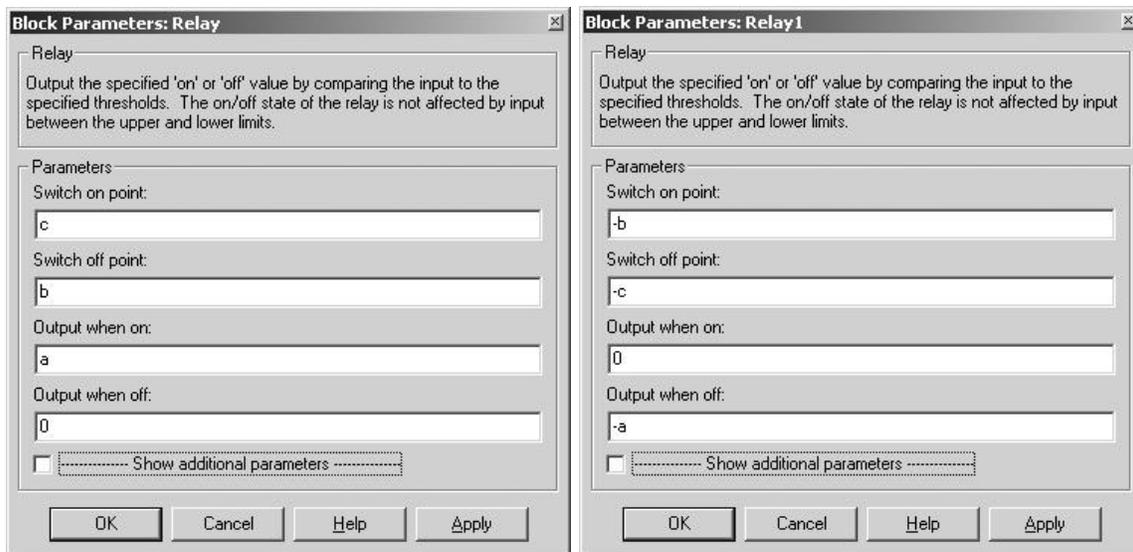


Рис. 98. Параметры блоков модели трехпозиционного реле.

В заключение отметим, что для расчета моделей релейных систем необходимо пользоваться процедурами численного интегрирования, предназначенными для «жестких» задач или (что лучше) с постоянным шагом.

### *Библиографический список*

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. 4-е изд. Ростов н/Д: изд-во Феникс, 1998. 512 с.
2. *Иващенко Н.И.* Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. Учебник для вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1978. 736 с.
3. *Магергут В.З., Вент Д.П., Кацер И.А.* Инженерные методы выбора и расчета оптимальных настроек промышленных регуляторов. Новомосковск.: НФ РХТУ им. Д.И. Менделеева, 1994. 158 с.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т.: Учебник. Рек. Минобразования РФ/ Ред. Н.Д. Егупов. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2000.
5. *Потемкин В.Г.* Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: В 2 т. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999, 366 с.
6. Справочник по электрическим машинам: В 2 т./ Под общ. ред. И.П. Копылова и Б.К. Клокова. Т.1. М.: Энергоатомиздат, 1988. 456 с.: ил.
7. *Юревич Е.И.* Теория автоматического управления. Л.: Энергия, 1969. 375 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>1.ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ</b>	<b>4</b>
1.1. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	4
1.2.    ЗАДАНИЕ	7
1.2.1. Математическое описание линейной системы и ее анализ	7
1.2.2. Синтез линейной системы	8
1.2.3. Анализ нелинейной САР	9
<b>2. УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ</b>	<b>11</b>
2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	11
2.2. СТРУКТУРА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	14
<b>3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ</b>	<b>17</b>
3.1. УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ	17
3.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ	19
3.3. ПЕРЕХОДНАЯ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	24
3.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ САР	30
3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ САР	43
3.5.1. Передаточная матрица системы	43
3.5.2. Структурные преобразования модели САР	45
<b>4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ САР</b>	<b>49</b>
4.1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА САР В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ	49
4.1.1. Определение стационарных режимов	49
4.1.2. Качество САР в статических режимах	49
4.1.3. Качество САР в стационарных динамических режимах	52
4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ САР И ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	54
4.2.1. Понятие устойчивости.	
Условие устойчивости линейных САР.	54
4.2.2. Критерии устойчивости линейных САР	57
4.2.3. Показатели качества переходных процессов	65
4.2.4. Влияние коэффициента усиления разомкнутой системы на устойчивость и качество переходных процессов	71
<b>5. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОЙ САР</b>	<b>75</b>
5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ	75
5.2. РАСЧЕТ ПРОМЫШЛЕННОГО РЕГУЛЯТОРА	76
5.2.1. Типовые законы регулирования	76
5.2.2. Определение требований к оптимальным настройкам регулятора по критерию максимального подавления низкочастотных возмущений	78

5.2.3. Расчет регулятора на заданное значение частотного показателя колебательности	80
5.2.4. Расчет параметров настройки регуляторов на заданный корневой показатель колебательности	87
5.3. РАСЧЕТ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	91
<b>6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ</b>	<b>98</b>
6.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ САР	98
6.2. ОГРАНИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ В САР	99
6.3. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ	103
6.4. АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ	111
<b>7. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ МАТЛАВ ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ</b>	<b>116</b>
7.1. ОБЗОР СИСТЕМЫ	116
7.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	117
7.2.1. Пакет Control для исследования линейных объектов и систем	117
7.2.2. Символьные вычисления в Matlab. Получение математического описания САР с неизвестными коэффициентами	122
7.3. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	124
7.3.1. Анализ и синтез линейных систем с помощью программы SisoTool.	124
7.3.2. Численное решение задач оптимизации в Matlab. Расчет регулятора на заданный частотный показатель колебательности.	126
7.3.3. Операции над комплексными числами в Matlab. Реализация метода расчета регуляторов по РАФЧХ	129
7.3.4. Расчет корректирующего устройства методом динамической компенсации в Matlab	130
7.4. СИСТЕМА ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ SIMULINK	132
7.4.1. Общая характеристика	132
7.4.2. Блок-схема Nonlinear Control Design (NCD)	135
7.4.3. Моделирование ограничений и релейных характеристик	139
<b>Библиографический список</b>	<b>142</b>
<b>СОДЕРЖАНИЕ</b>	<b>143</b>

**Андрей Николаевич Рыбалев,**  
доцент кафедры АПП и Э АмГУ  
канд. техн. наук

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПОСОБИЕ К КУРСОВО-  
МУ ПРОЕКТУ**  
*Учебное пособие*

---

Изд-во АмГУ. Подписано к печати ?.?.2002. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,37, уч. - изд. л. 8,5. Ти-  
раж 150. Заказ 264.

*Федеральное агентство по образованию Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*  
Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ**

**Благовещенск**  
**2007**

## Содержание

<i>Введение</i> .....	3
<i>Раздел 1. Типовые звенья САР</i> .....	4
<i>Раздел 2. Структурные схемы САР</i> .....	6
<i>Раздел 3. Устойчивость линейных САР</i> .....	8
<i>Раздел 4. Статические характеристики нелинейных систем</i> .....	13
<i>Раздел 5. Фазовые портреты</i> .....	18
<i>Раздел 6. Прохождение гармонического сигнала через нелинейный элемент</i>	20
<i>Раздел 7. Критерий абсолютной устойчивости</i> .....	21
<i>Раздел 8. Метод гармонической линеаризации</i> .....	22
<i>Билеты для проверки остаточных знаний</i> .....	23

## *Введение*

Приведенные в пособии задачи используются для проверки знаний студентов специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств» по дисциплине «Теория автоматического управления».

Задачи охватывают следующие основные темы, изучаемые студентами в данном курсе, и сгруппированы по разделам:

1. Типовые звенья САР;
2. Структурные схемы САР;
3. Устойчивость линейных САР;
4. Статические характеристики нелинейных систем;
5. Фазовые портреты;
6. Прохождение гармонического сигнала через нелинейный элемент;
7. Критерий абсолютной устойчивости;
8. Метод гармонической линеаризации.

Решение задач является составной частью процедуры промежуточного контроля знаний (в ходе изучения дисциплины), а также используется для контроля остаточных знаний (после окончания изучения дисциплины).

## Раздел 1. Типовые звенья САР

**Задача 1.** По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САР.

$$1. W(p) = \frac{0.1p(1+0.1p)}{0.01p^2 + 0.2p + 1}$$

$$2. W(p) = \frac{10p(1+p)}{p^3 + 2p + p}$$

$$3. W(p) = \frac{(1+0.5p)}{0.01p^2 + 0.2p + 1}$$

$$4. W(p) = \frac{0.1p}{p^2 + 2p + 1}$$

$$5. W(p) = \frac{0.5p}{p^2 + p + 1}$$

$$6. W(p) = \frac{1+p}{p^3 + 2p^2 + p}$$

$$7. W(p) = \frac{2+p}{p^3 + 2p^2 + p}$$

$$8. W(p) = \frac{4p^2 + 2p + 2}{2p^3 + p^2 + p}$$

$$9. W(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}$$

$$10. W(p) = \frac{4+0.4p}{p^2 + 0.1p^3}$$

$$11. W(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p}$$

$$12. W(p) = \frac{2(1+p)}{p^3 + 2p^2 + p}$$

$$13. W(p) = \frac{p^2(1+0.1p)^2}{2p+1}$$

$$14. W(p) = \frac{p^2}{4p^2 + 2p + 2}$$

$$15. W(p) = \frac{1+p}{p^4 + 2p^3 + p^2}$$

$$16. W(p) = \frac{2p(1+2p+p^2)^2}{4p+2}$$

$$17. W(p) = \frac{0.1}{p^2 + 0.2p + 1}$$

$$18. W(p) = \frac{2}{0.01p^2 + 0.2p + 1}$$

$$19. W(p) = \frac{10(1+p)}{p(10+p)}$$

$$20. W(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{2p+1}$$

**Задача 2.** По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

1.  $W(p) = \frac{K}{Tp+1}$   $h(t), L(\omega), P(\omega)$

2.  $W(p) = \frac{K}{p}$   $h(t), K(\omega), \varphi(\omega)$

3.  $W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$   $h(t), K(\omega), L(\omega)$

4.  $W(p) = \frac{2}{p^2 + 2p + 1}$   $h(t), K(\omega), Q(\omega)$

5.  $W(p) = \frac{10}{0,1p+1}$   $h(t), K(\omega), P(\omega)$

6.  $W(p) = 0,1(1+p)$   $L(\omega), K(\omega), Q(\omega)$

7.  $W(p) = \frac{2}{p^2 + p + 1}$   $h(t), K(\omega), P(\omega)$

8.  $W(p) = \frac{2}{p+1}$   $h(t), K(\omega), L(\omega)$

9.  $W(p) = 4p^2$   $h(t), L(\omega), \varphi(\omega)$

10.  $W(p) = \frac{10}{p+1}$   $P(\omega), K(\omega), L(\omega)$

## Раздел 2. Структурные схемы САП

**Задача 1.** По приведенным уравнениям составить структурную схему

1.  $y''(t) + y'(t) + y(t) = x(t)$   $W_{yx}(p)=?$

2.  $y'(t) = 10z(t)$   $W_{yn}(p)=?$   
 $z(t) = x(t) - 2x'(t) - [y(t) + n(t)]$

3.  $z_1(t) = z(t) + z'(t)$   $W_{zx}(p)=?$   
 $y'(t) = 10z_1(t)$   
 $x(t) - y(t) = z(t)$

4.  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = x'(t) + 2x(t)$   $W_{yx}(p)=?$

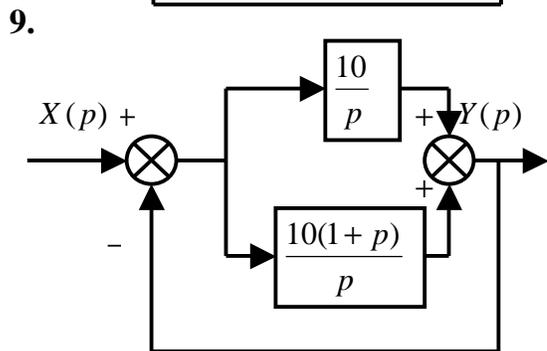
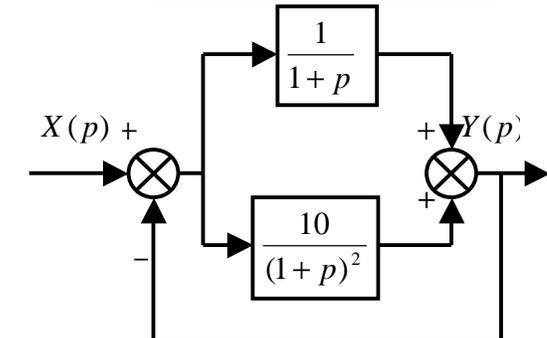
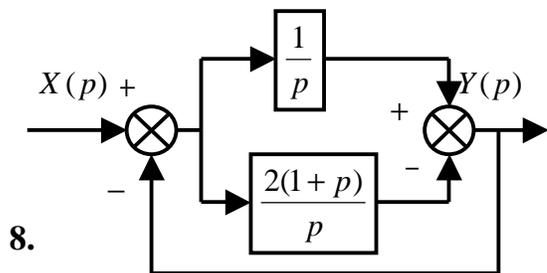
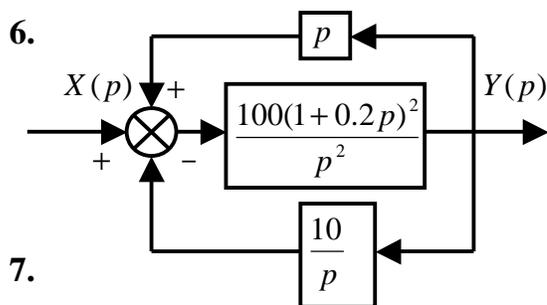
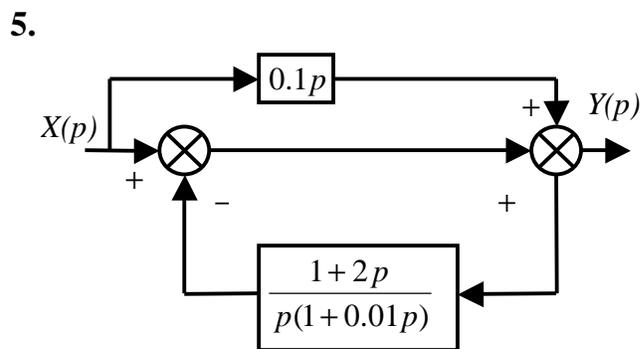
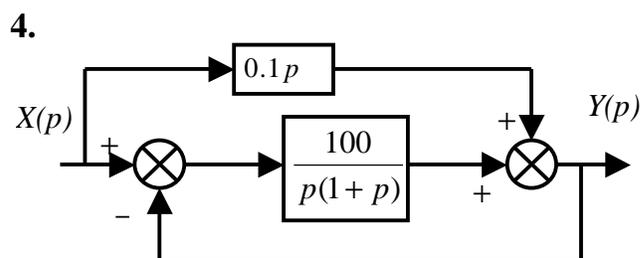
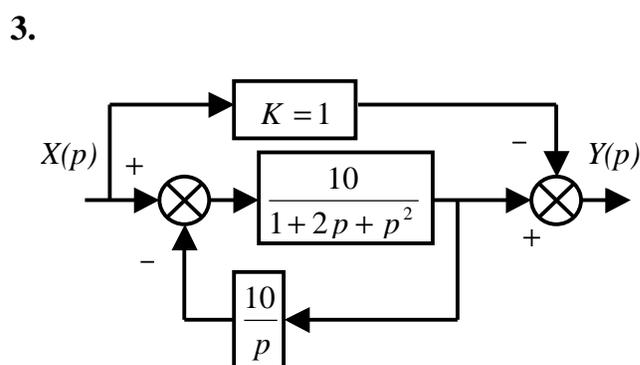
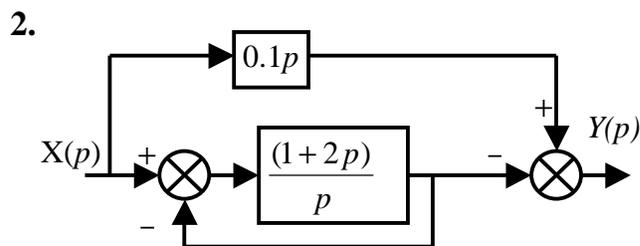
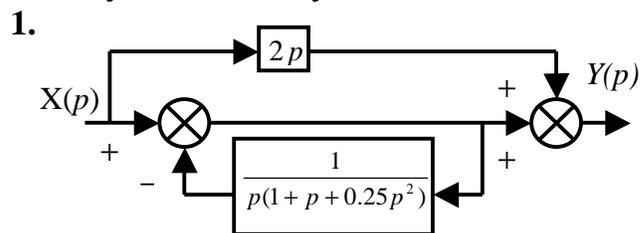
5.  $y(t) = 2 \int_0^t x(t) dt + n_1(t)$   $W_{yn2}(p)=?$   
 $z(t) = x(t) - [y(t) + n_2(t)]$

6.  $y(t) = 10 \int_0^t z(t) dt + n(t)$   $W_{yx}(p)=?$   
 $z(t) = x(t) + y(t)$

7.  $z(t) = x(t) - y(t)$   $W_{yz}(p)=?$   
 $z_1(t) = K_1 z(t) + K_2 z'(t) + n(t)$   
 $y'(t) = Tz_1'(t) + z_1(t)$

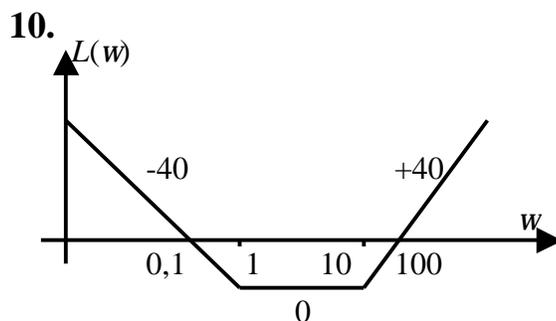
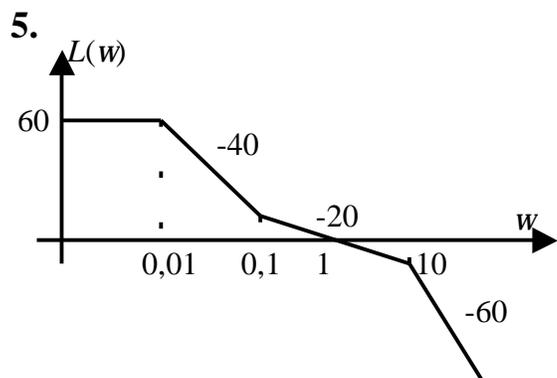
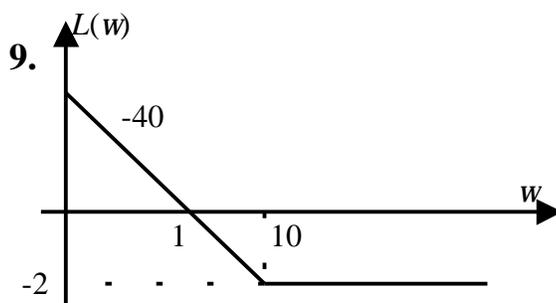
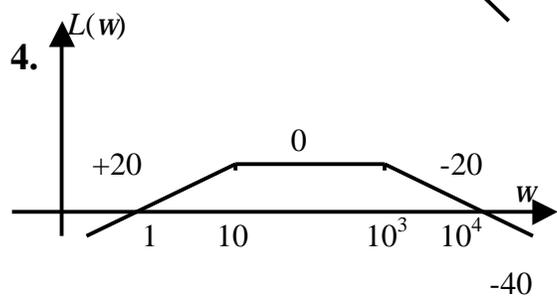
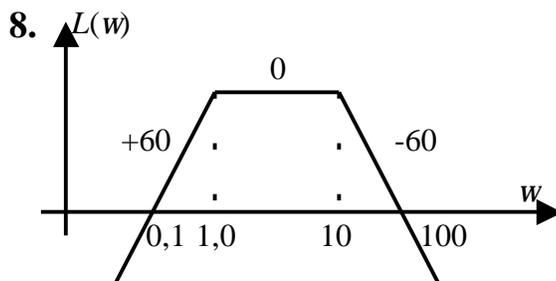
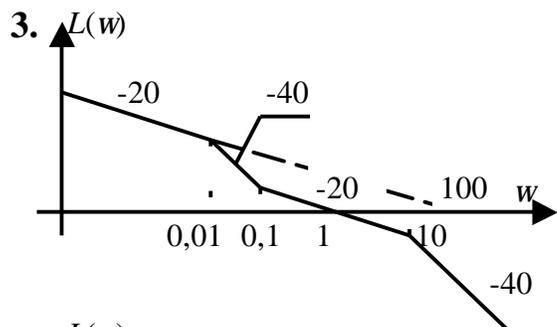
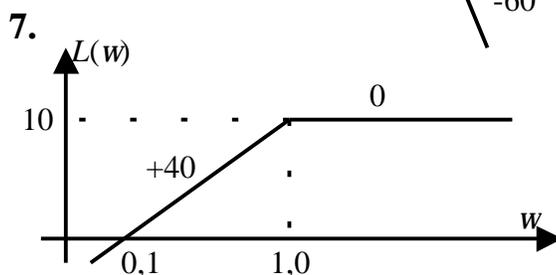
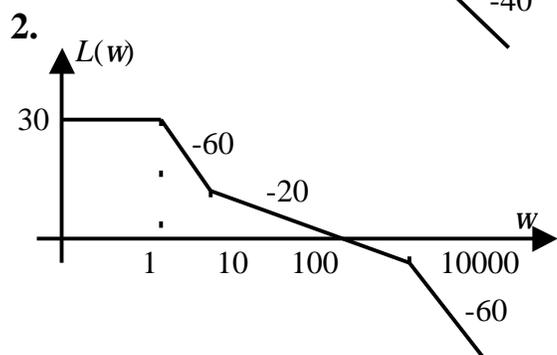
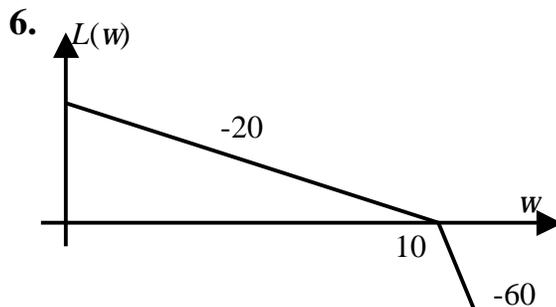
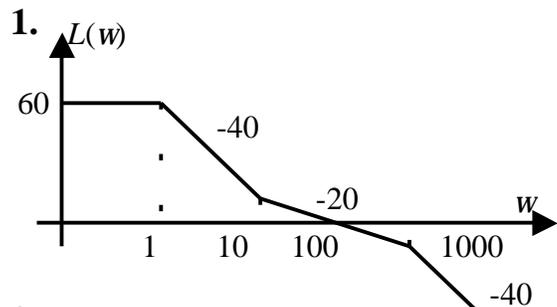
8.  $y'(t) = 5z(t)$   $W_{yx}(p)=?$   
 $z(t) = x(t) + 2x'(t) - y(t)$

**Задача 2.** По структурной схеме определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой САУ.



### Раздел 3. Устойчивость линейных САУ

**Задача 1.** По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании.



**Задача 2.** Используя алгебраические критерии, определить устойчивость САУ при замыкании

$$1. W_{раз}(p) = \frac{p}{p^3 + p^2 + p + 1}$$

$$11. W_{раз}(p) = \frac{20(1+2p)}{p^3 + p^2 + 4p + 1}$$

$$2. W_{раз}(p) = \frac{p^3 + p^2 + 1}{p^3 + p^2 + 2p + 1}$$

$$12. W_{раз}(p) = \frac{40(1+0.5p)}{p^2(1+0.1p)}$$

$$3. W_{раз}(p) = \frac{0.5p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

$$13. W_{раз}(p) = \frac{100}{(p+1)^3}$$

$$4. W_{раз}(p) = \frac{5p^2 + 2p + 1}{p^3 + 2p^2 + 5p + 3}$$

$$14. W_{раз}(p) = \frac{5+0.1p}{(p^2+1)^2}$$

$$5. W_{раз}(p) = \frac{120}{p^2(1+0.1p)}$$

$$15. W_{раз}(p) = \frac{10(1+0.1p)}{p^4 + 8p^3 + 6p^2 + 4p + 1}$$

$$6. W_{раз}(p) = \frac{10p+10}{p^3 + p^2 + 5p + 9}$$

$$16. W_{раз}(p) = \frac{5p^2 + 2p + 3}{p^4 + p^3 + 4p^2 + 3p + 1}$$

$$7. W_{раз}(p) = \frac{5p}{(p+1)^2}$$

$$17. W_{раз}(p) = \frac{10}{p(1+p)}$$

$$8. W_{раз}(p) = \frac{10}{p^3 + p^2 + p + 1}$$

$$18. W_{раз}(p) = \frac{120}{0.031p^2 + 1.67p + 1}$$

$$9. W_{раз}(p) = \frac{20}{p}$$

$$19. W_{раз}(p) = \frac{10(1+p)}{10p+1}$$

$$10. W_{раз}(p) = \frac{5(1+0.1p)}{p(1+5p)}$$

$$20. W_{раз}(p) = \frac{(1+0.1p)^2}{(0.01p+1)^3}$$

**Задача 3.** Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая САУ устойчива

$$1. W_{раз}(p) = \frac{1+p}{0,01T_1p^3 + p^2 + 2p + 1}$$

$$11. W_{раз}(p) = \frac{10(1+p)}{p^2(1+T_1p)}$$

$$2. W_{раз}(p) = \frac{1+p}{0,5p^3 + Tp^2 + 3p + 1}$$

$$12. W_{раз}(p) = \frac{100(1+Tp)}{p(1+10p)}$$

$$3. W_{раз}(p) = \frac{1}{p(1+pT_1)(1+p)}$$

$$13. W_{раз}(p) = \frac{0,1(1+p)}{p(1+Tp)}$$

$$4. W_{раз}(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)(1+T_2p)}$$

$$14. W_{раз}(p) = \frac{1}{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

$$5. W_{раз}(p) = \frac{10}{3p^3 + 2p^2 + Tp + 1}$$

$$15. W_{раз}(p) = \frac{K}{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

$$6. W_{раз}(p) = \frac{5}{3p^3 + 5p^2 + p + K}$$

$$16. W_{раз}(p) = \frac{1+Tp}{p^2 + 2p + 1}$$

$$7. W_{раз}(p) = \frac{5(1+2p)}{p^2 + Tp + 1}$$

$$17. W_{раз}(p) = \frac{K(1+p)^2}{p^3}$$

$$8. W_{раз}(p) = \frac{1+p}{p^3 + Tp^2 + p + 10}$$

$$18. W_{раз}(p) = \frac{K}{p(1+10p)^2}$$

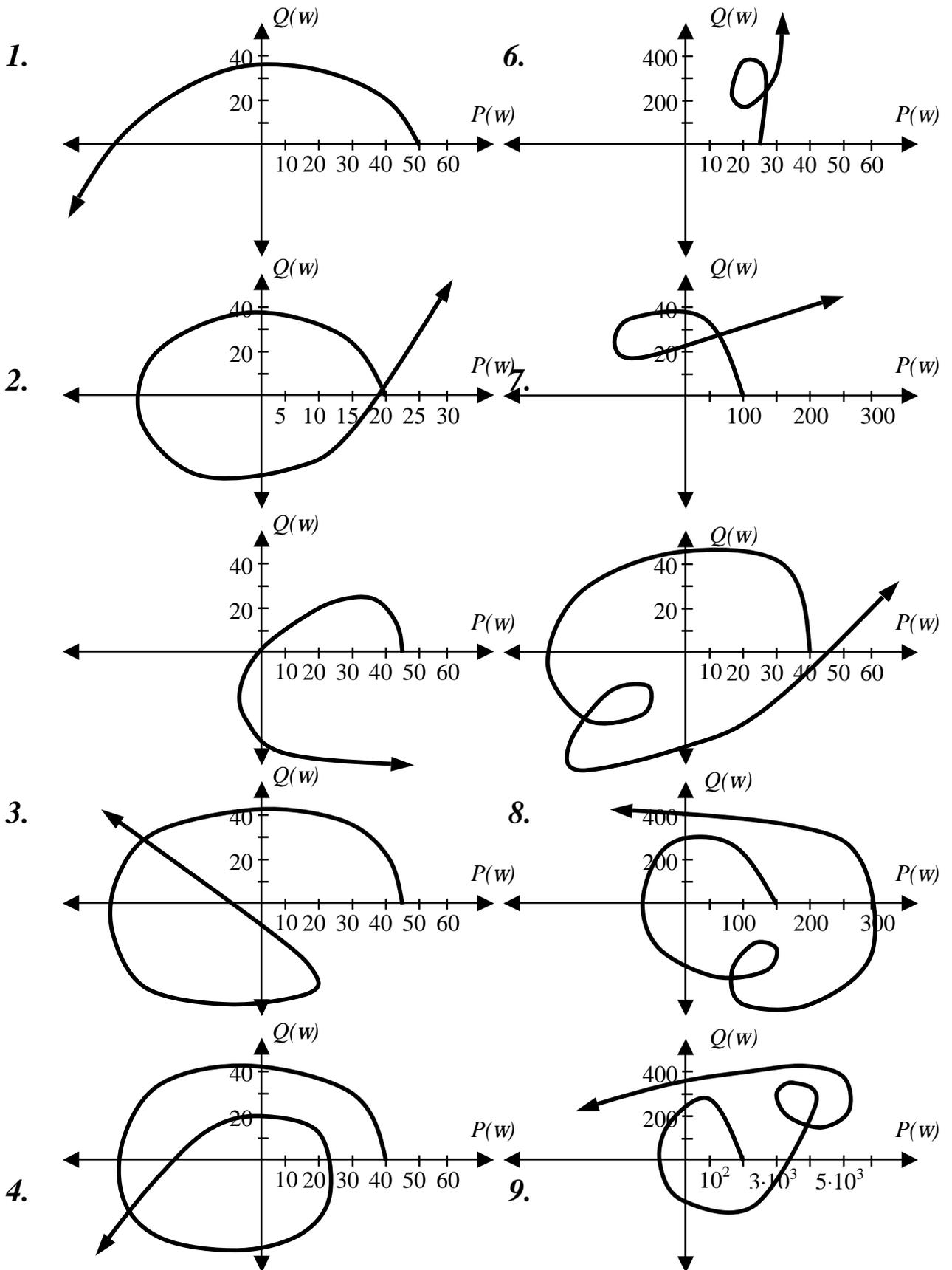
$$9. W_{раз}(p) = \frac{15}{3p^3 + 4p^2 + Tp + 10}$$

$$19. W_{раз}(p) = \frac{1+Tp}{p^2(1+2p)}$$

$$10. W_{раз}(p) = \frac{2p}{p^3 + p^2 + 10p + K}$$

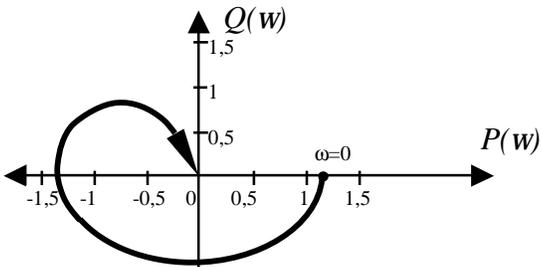
$$20. W_{раз}(p) = \frac{0,1(1+p)}{p(1+Tp)^2}$$

**Задача 4.** По кривым Михайлова определить порядок и устойчивость САУ

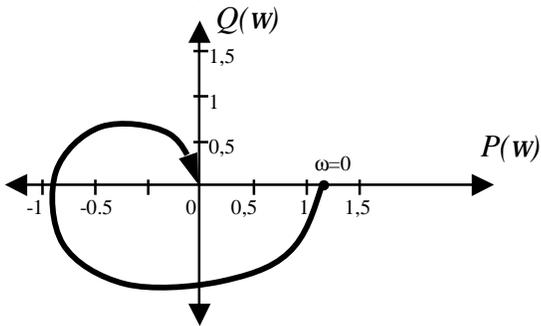


**Задача 5.** По кривым Найквиста определить порядок и устойчивость САУ

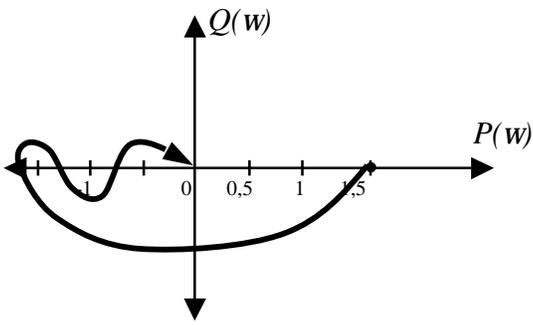
1.



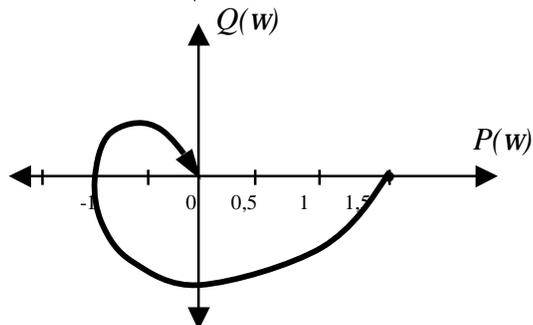
2.



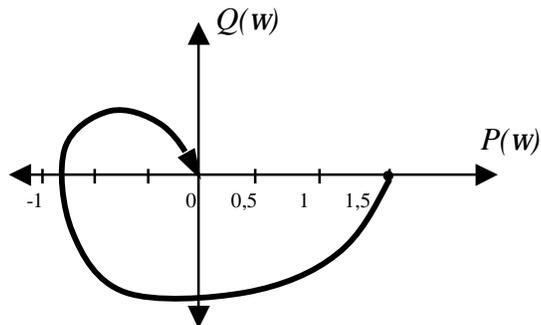
3.



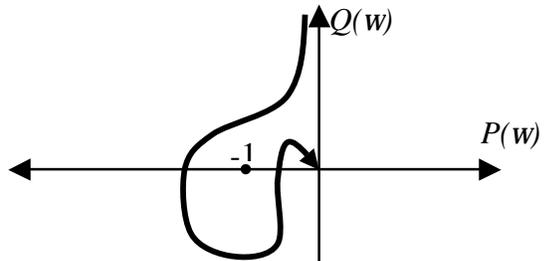
4.



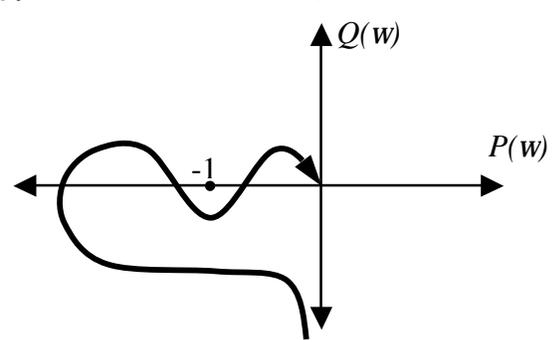
5.



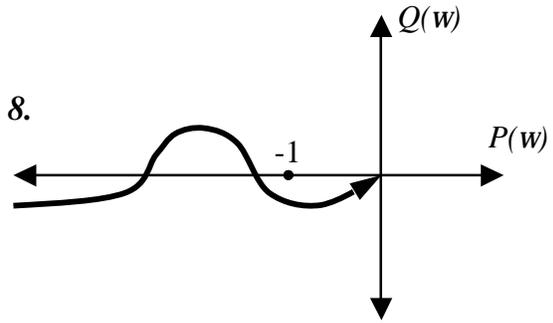
6.



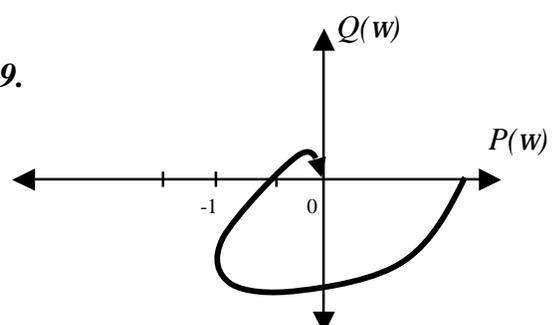
7.



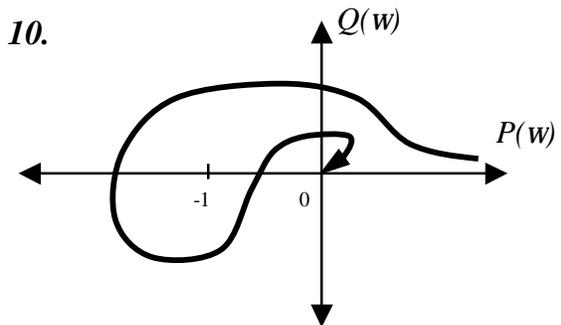
8.



9.

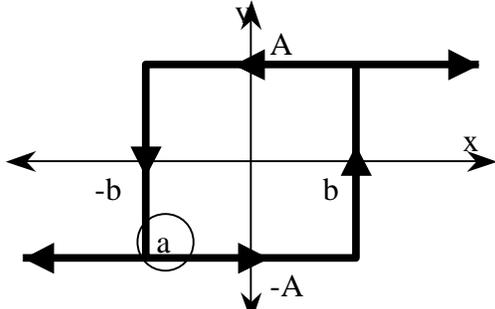


10.



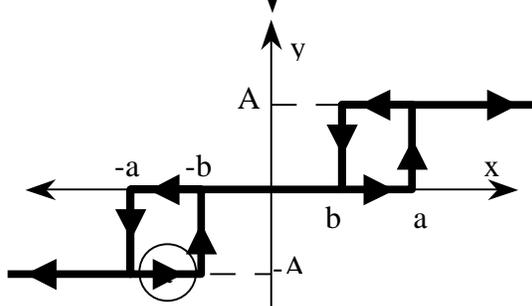
**Раздел 4. Статические характеристики нелинейных систем**

**Задача 1.** Найти аналитический вид нелинейных зависимостей, представленных графически и построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию.



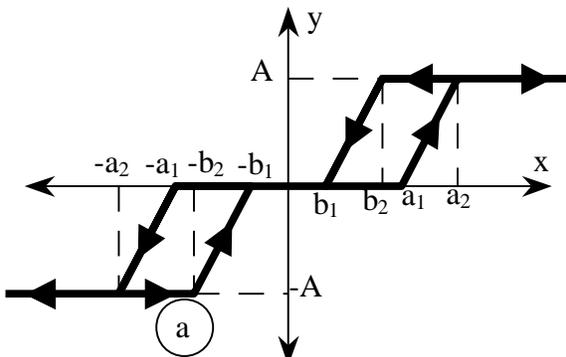
№1

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ c, & x > 0 \end{cases} \quad \text{(b)}$$



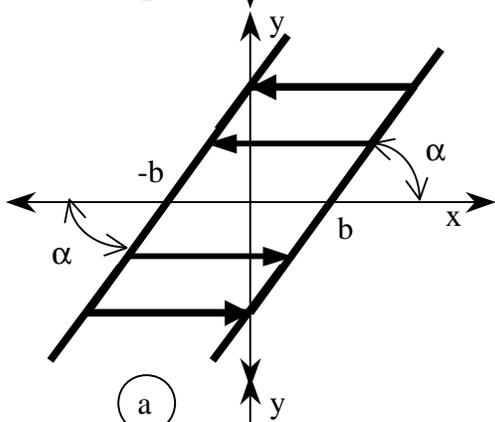
№2

$$y = \begin{cases} c \cdot \text{Sign } x, & |x| > a \\ (c/a) \cdot x, & |x| < a \end{cases} \quad \text{(b)}$$



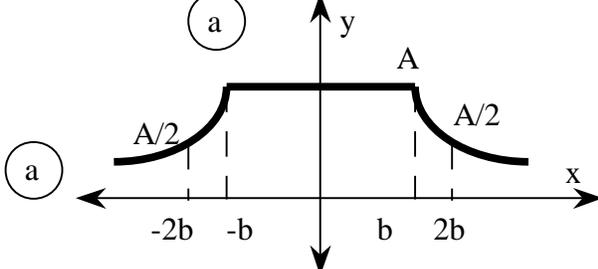
№3

$$y = k \cdot |x| \quad \text{(b)}$$



№4

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq a \\ c \cdot \text{Sign } x, & |x| > a \end{cases} \quad \text{(b)}$$



№5

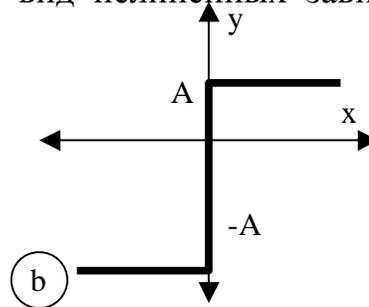
$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq a \\ k \cdot (x - a \cdot \text{Sign } x), & |x| > a \end{cases} \quad \text{(b)}$$

**Задача 2.** Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию и найти аналитический вид нелинейных зависимостей, представленных графически.

$$y = \begin{cases} c \cdot \text{Sign } x, & |x| > a \\ 0, & |x| \leq a \end{cases}$$

(a)

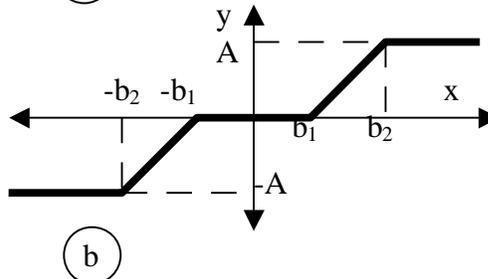
№1



$$y = x^2 \cdot \text{Sign } x$$

(a)

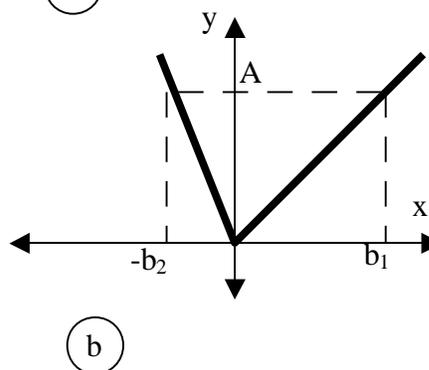
№2



$$y = \begin{cases} c, & \text{при } x > b, \quad \&gt; 0 \\ & x > a, \quad \&< 0 \\ 0, & \text{при } -a < x < b, \quad \&gt; 0 \\ & a > x > -b, \quad \&< 0 \\ -c, & \text{при } x < -b, \quad \&< 0 \\ & x < -a, \quad \&> 0 \end{cases}$$

(a)

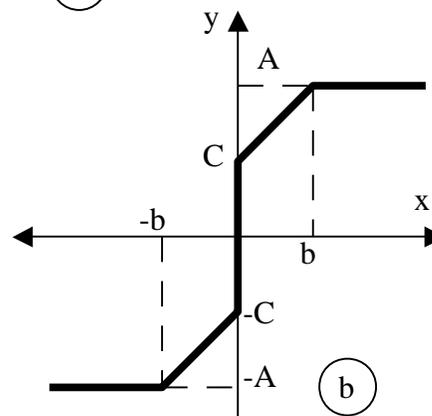
№3



$$y = \begin{cases} c, & \text{при } x > a, \quad \&gt; 0 \\ & x > -a, \quad \&< 0 \\ -c, & \text{при } x < -b, \quad \&< 0 \\ & x < b, \quad \&> 0 \end{cases}$$

(a)

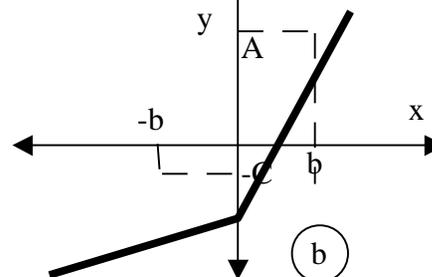
№4



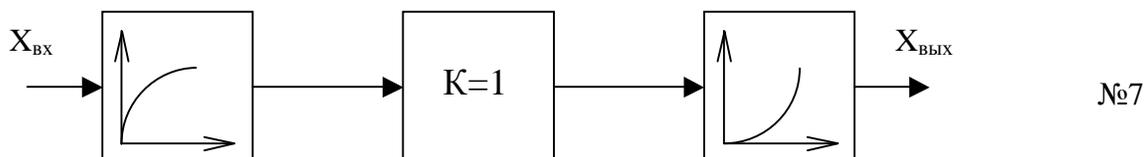
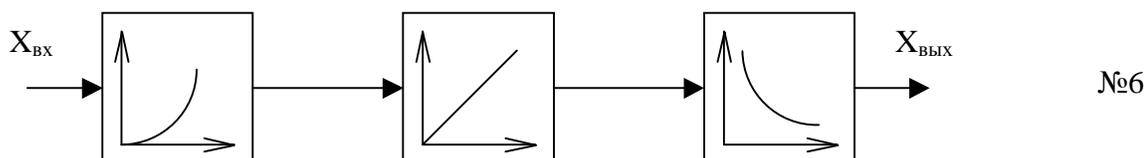
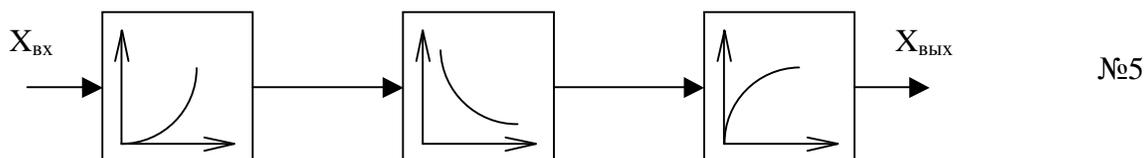
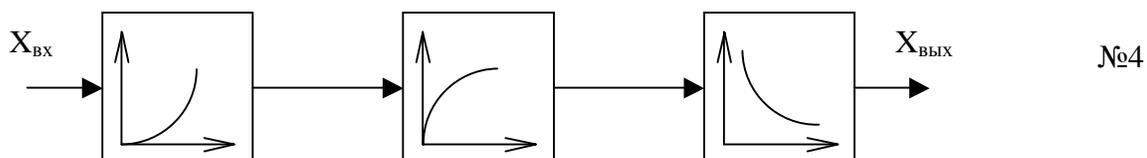
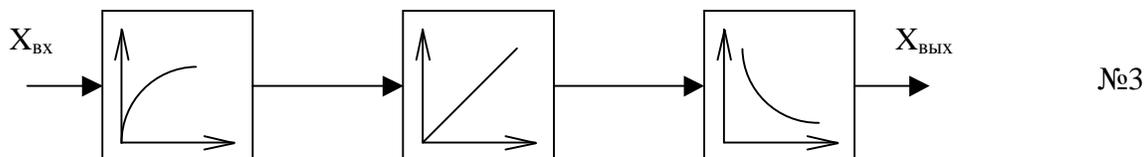
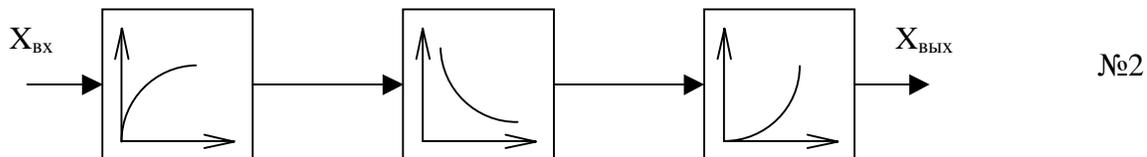
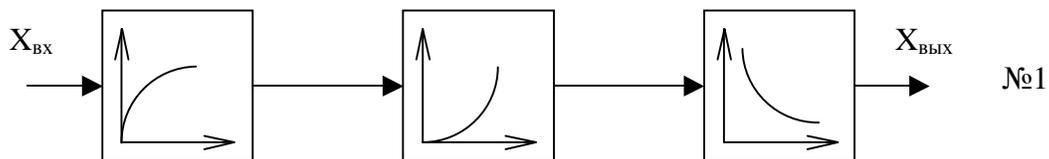
$$y = \begin{cases} c \cdot \text{Sign}(x - a), & \&gt; 0 \\ c \cdot \text{Sign}(x + a), & \&< 0 \end{cases}$$

(a)

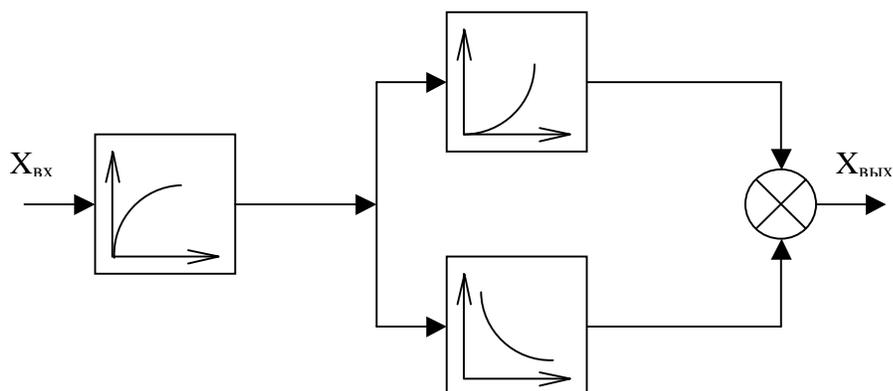
№5



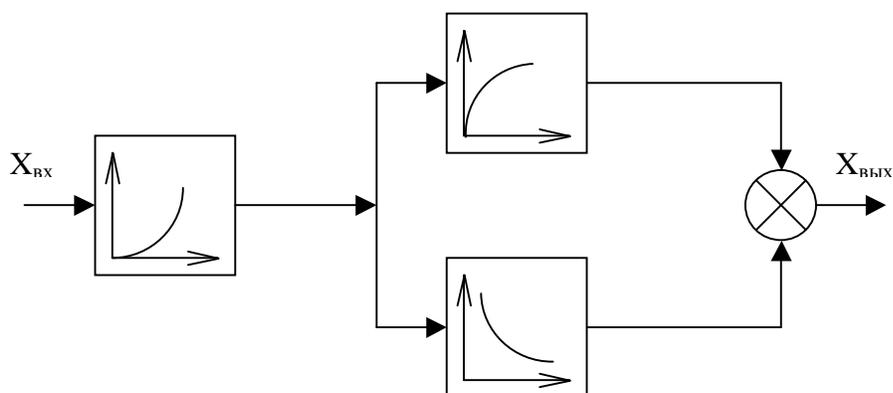
**Задача 3.** Определить результирующую характеристику последовательного соединения нелинейных звеньев:  $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}})$ .



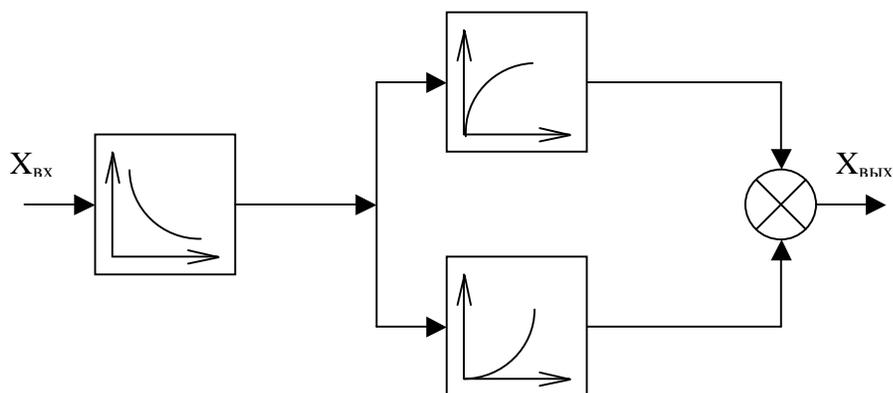
**Задача 4.** Определить результирующую характеристику смешанного соединения нелинейных звеньев:  $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}})$ .



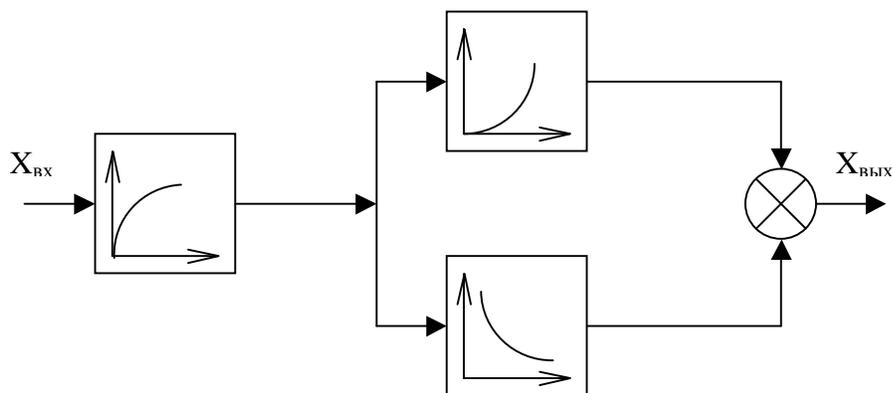
№1



№2

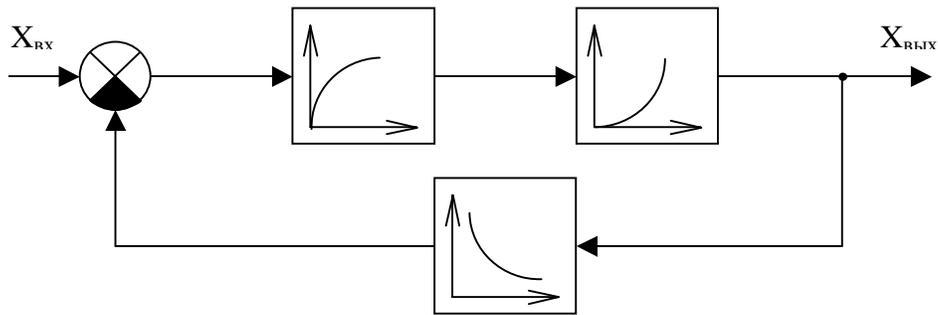


№3

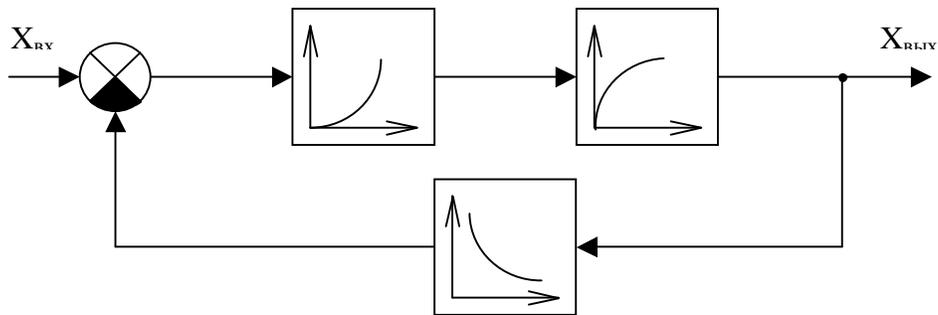


№4

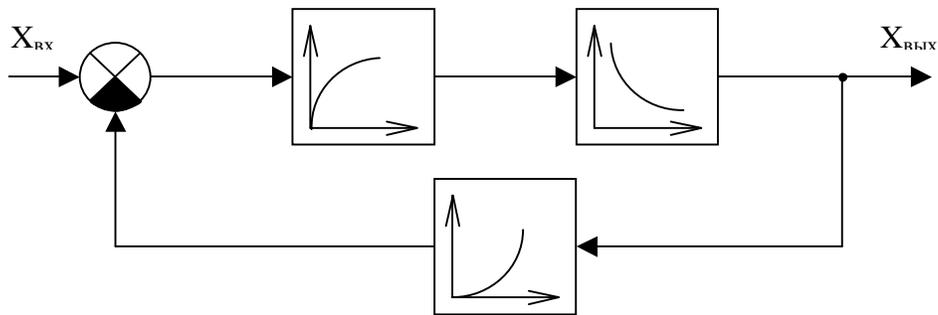
**Задача 5.** Определить результирующую характеристику соединения нелинейных звеньев в виде обратной связи:  $x_{вых} = f(x_{вх})$ .



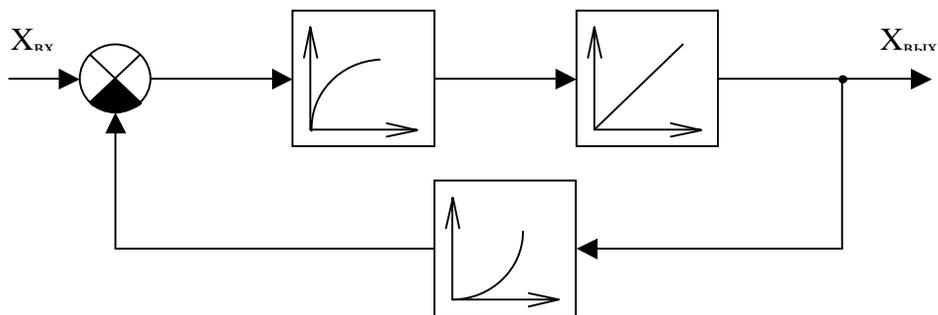
№1



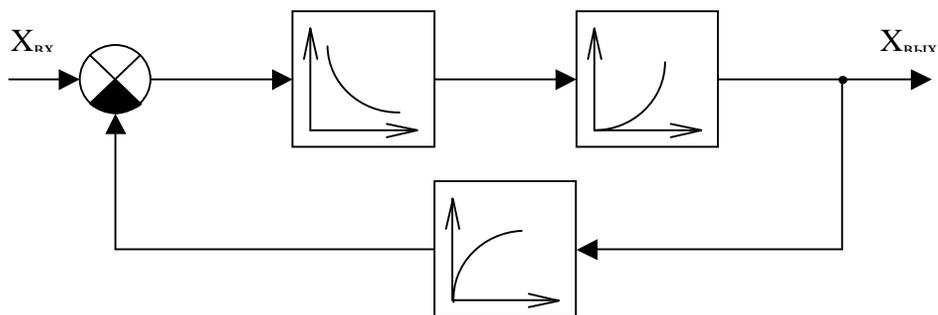
№2



№3



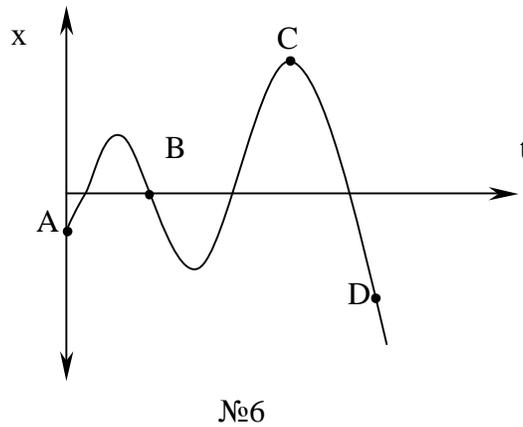
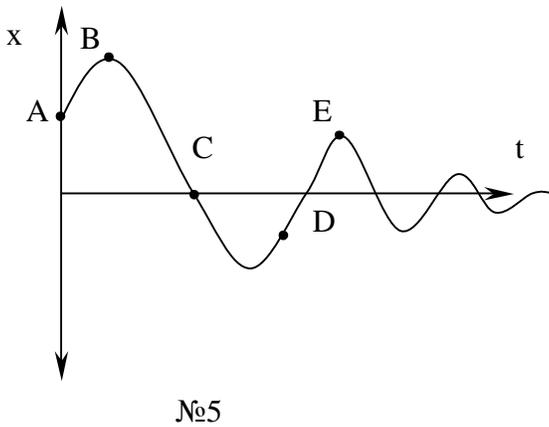
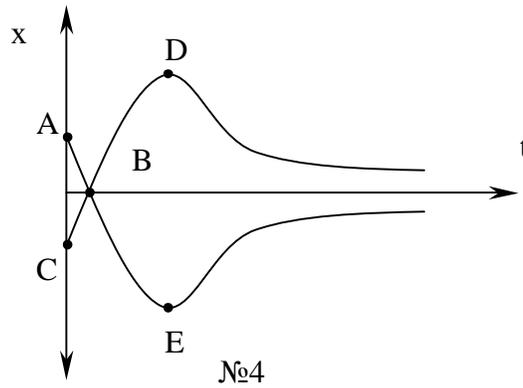
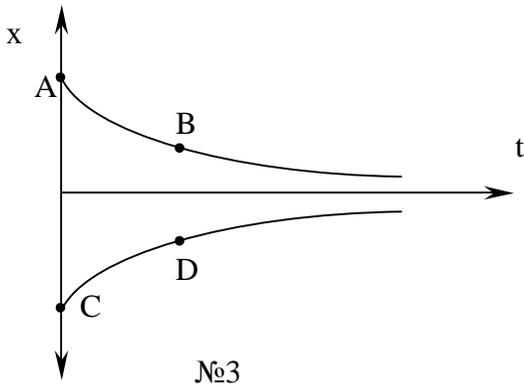
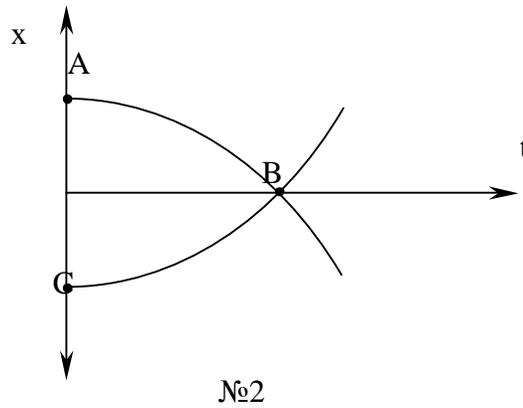
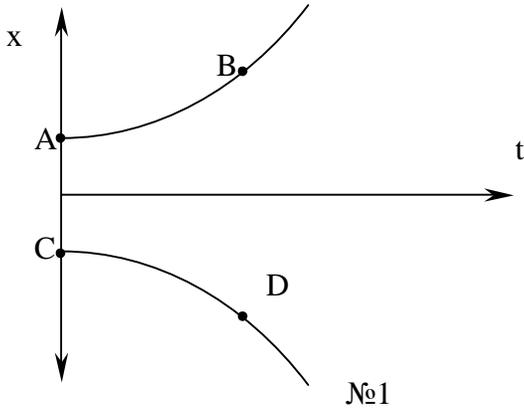
№4



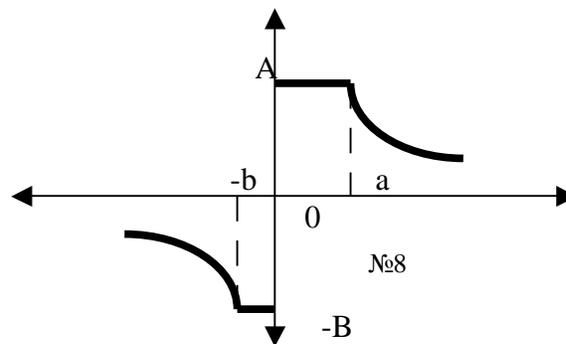
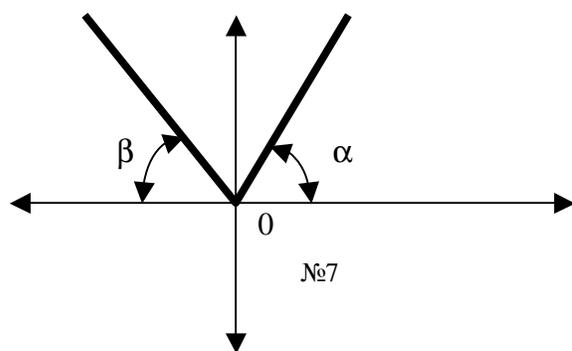
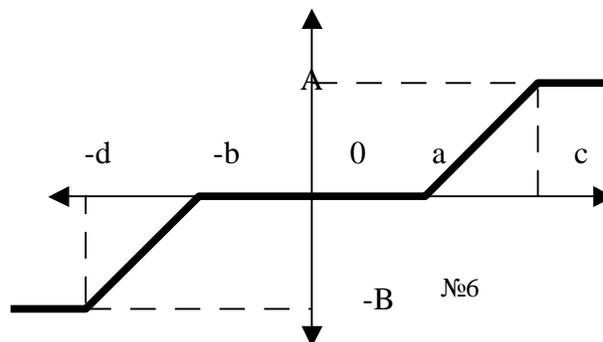
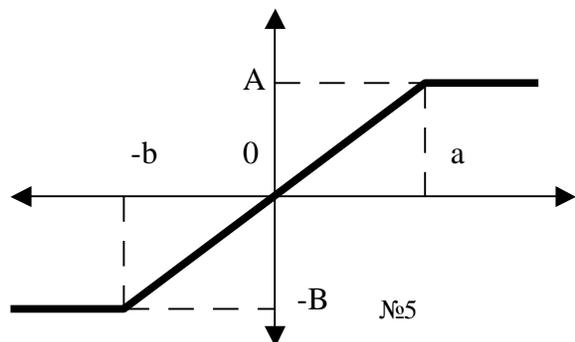
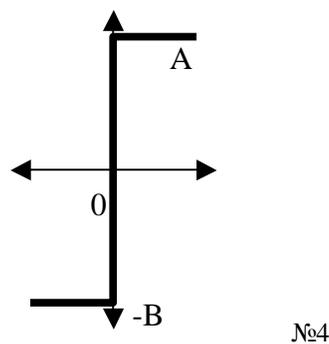
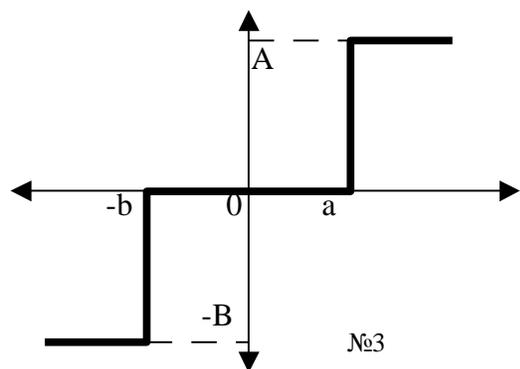
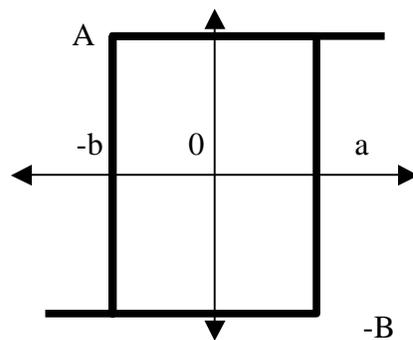
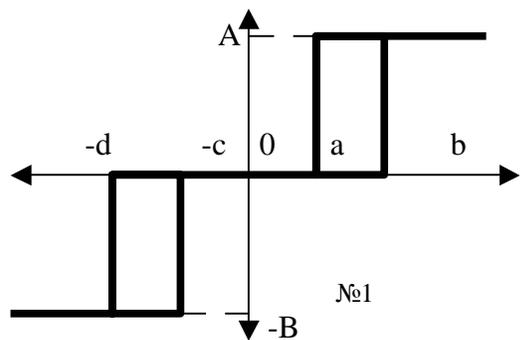
№5

## Раздел 5. Фазовые портреты

**Задача 1.** На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С..... и т.д.).

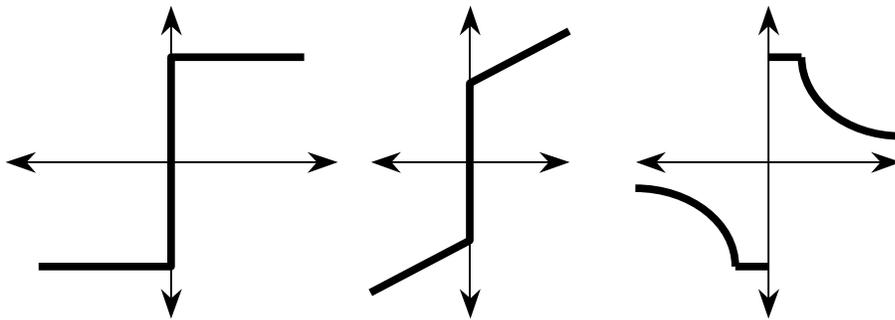


**Задача 2.** На фазовой плоскости представить границы многолистной ФП в соответствии с включенным в систему нелинейным элементом.

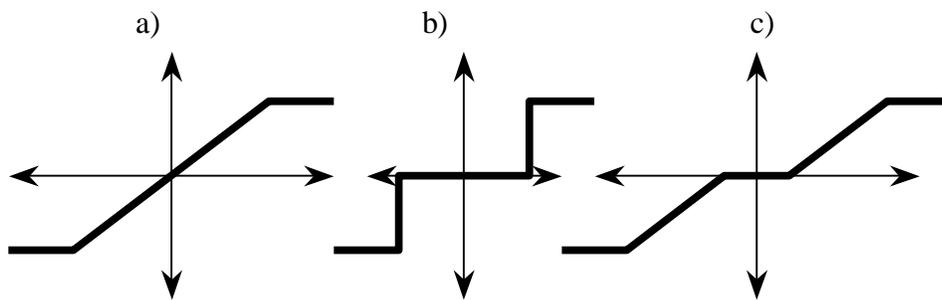


**Раздел 6. Прохождение гармонического сигнала через нелинейный элемент**

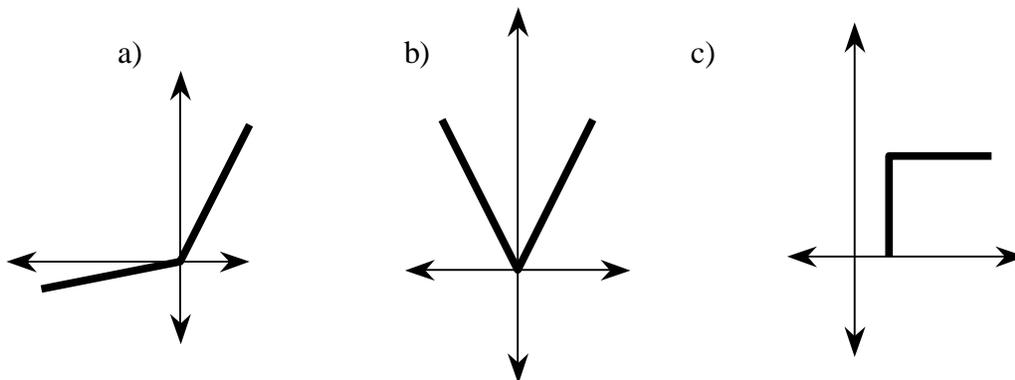
**Задача.** На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента.



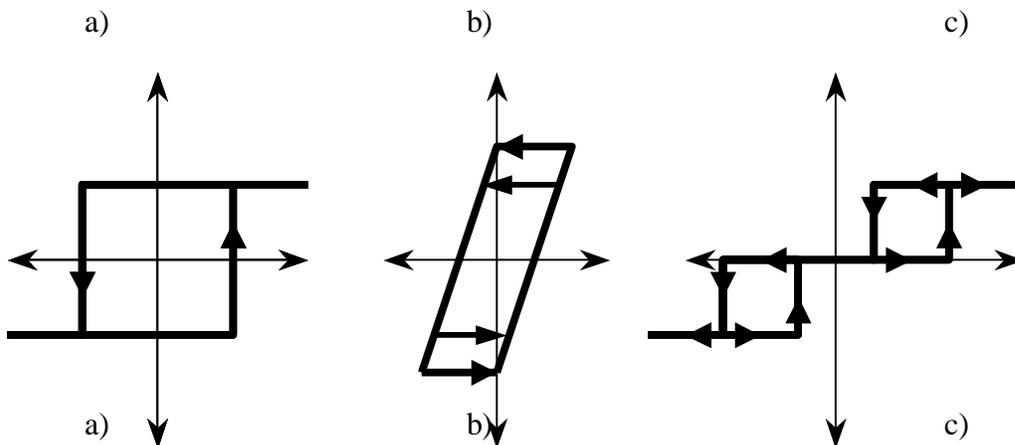
№1



№2



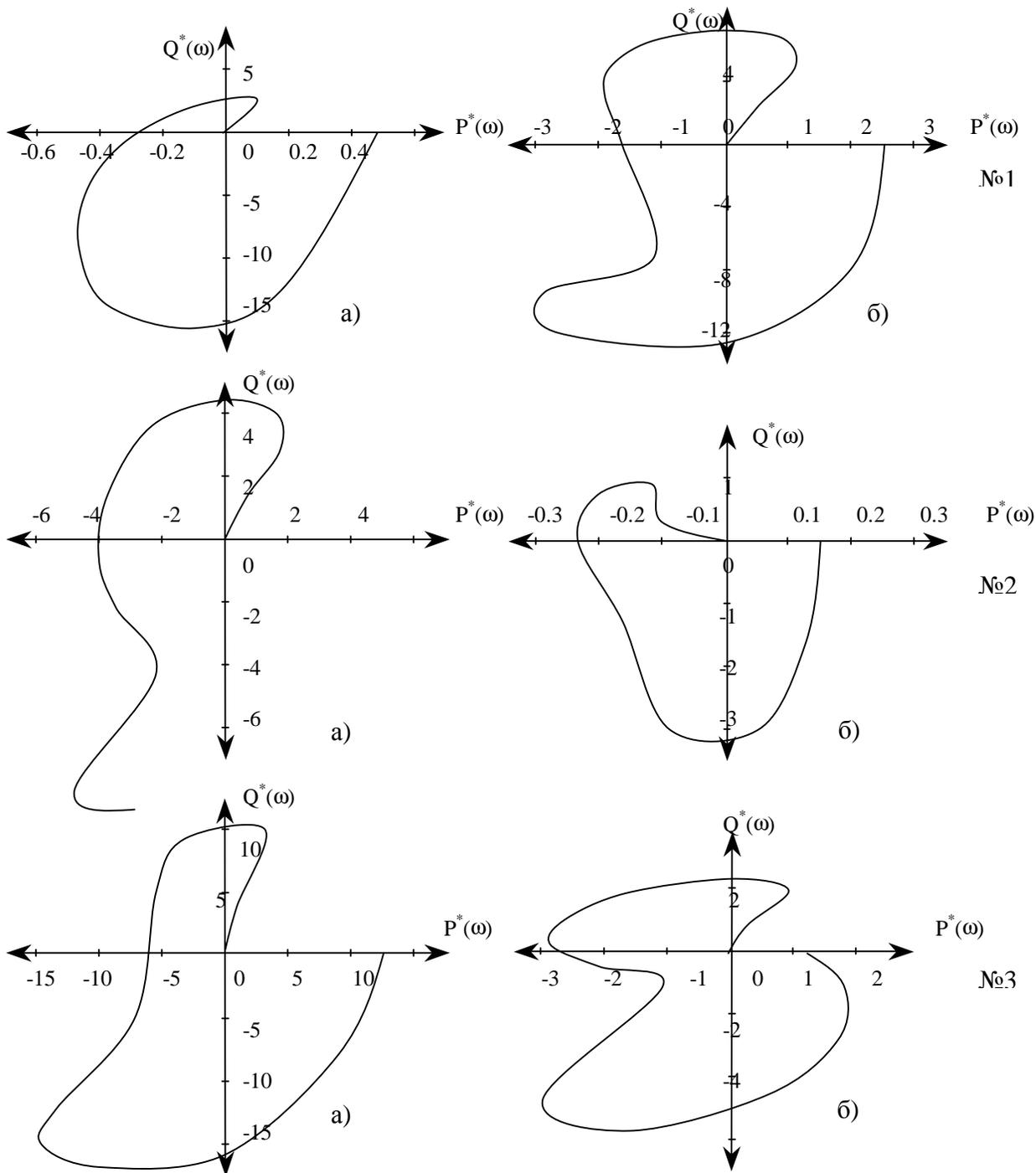
№3



№4

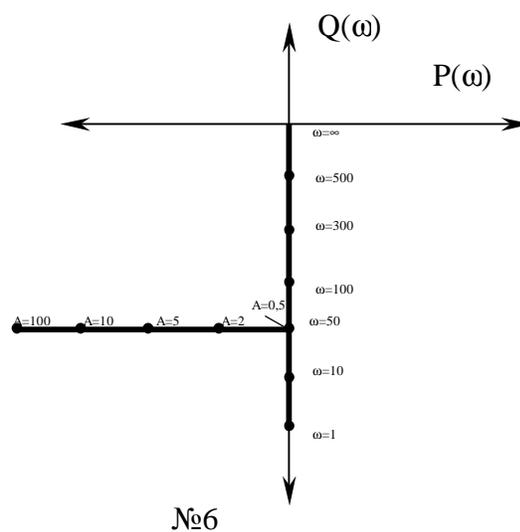
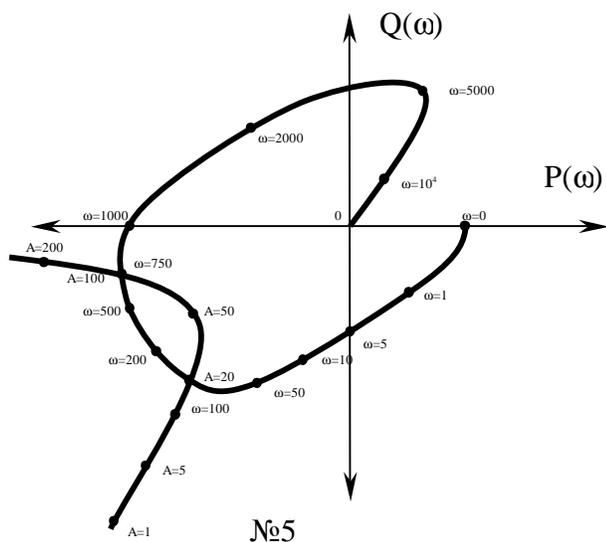
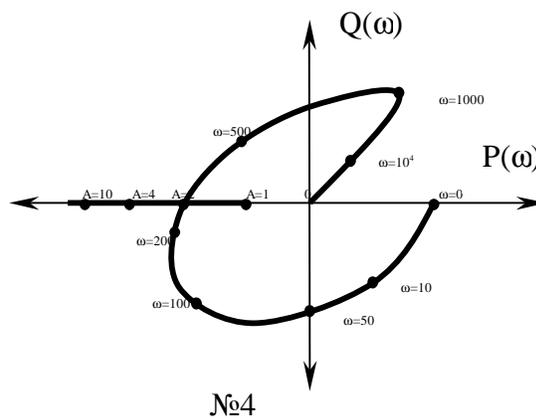
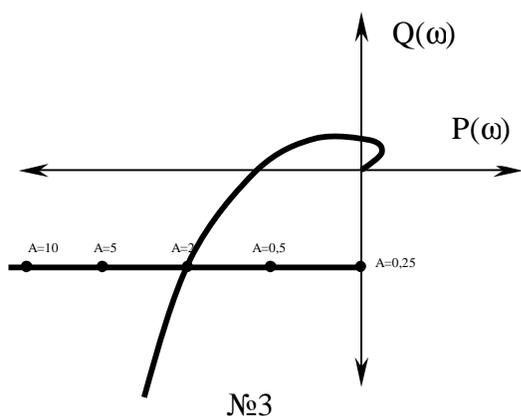
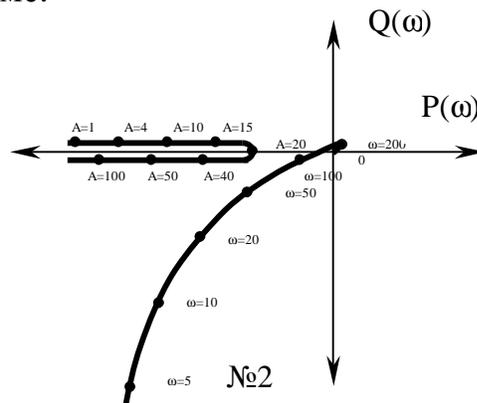
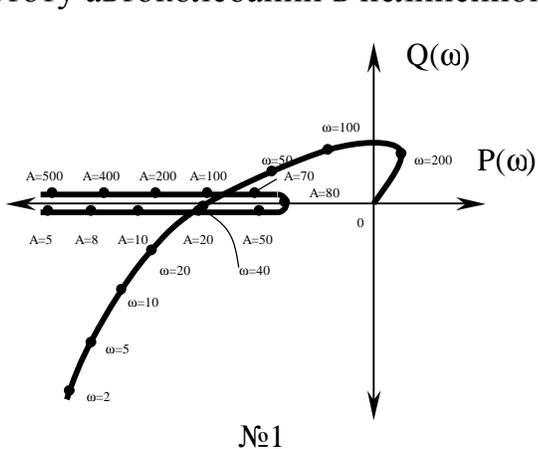
## Раздел 7. Критерий абсолютной устойчивости

**Задача.** По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ. /критерий В.М. Попова/.



## Раздел 8. Метод гармонической линеаризации

**Задача.** Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



## Билеты для проверки остаточных знаний

### БИЛЕТ 1

1. По данной передаточной функции определить из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{0.1p(1 + 0.1p)}{0.01p^2 + 0.2p + 1}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = 4pe^{-pt}$$

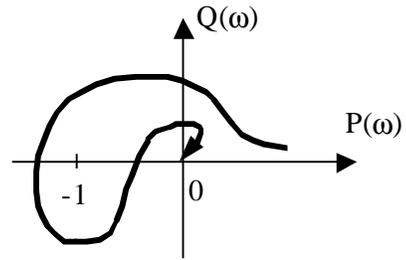
$$h(t), A(w), j(w)$$

3. По приведенному уравнению составить структурную схему

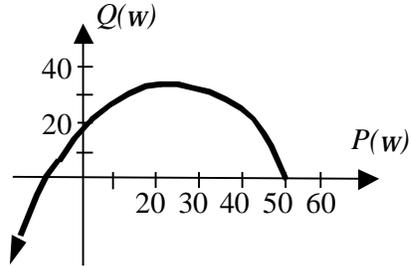
$$y''(t) + y'(t) + y(t) = x(t)$$

$$W_{yx}(p) = ?$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



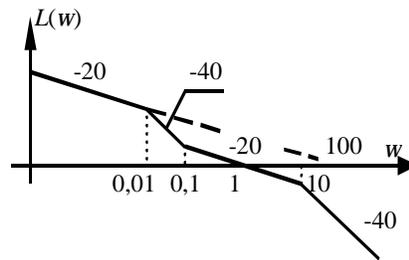
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



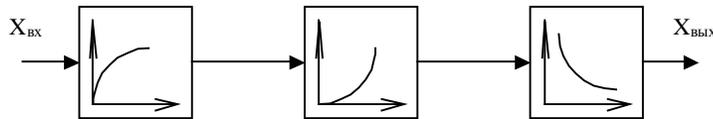
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{2p}{p^3 + p^2 + 10p + K}$$

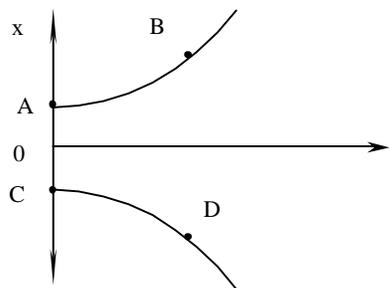
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



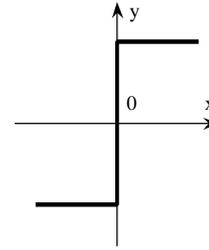
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



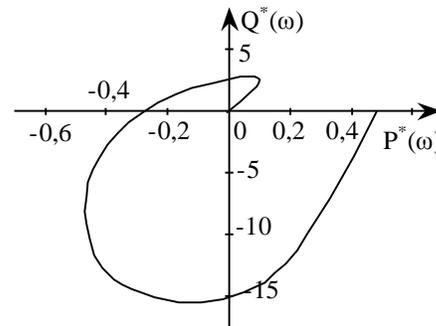
10. На нелинейный элемент подан гармонический мента сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного эле-



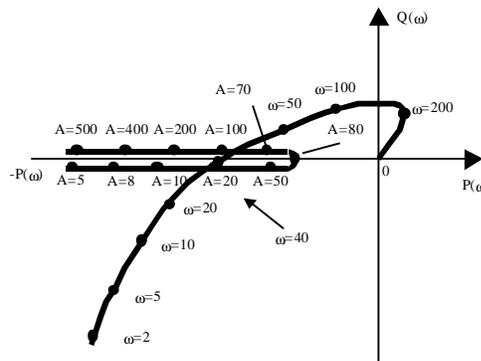
11. Построить нелинейную характеристику элемента по его математическому описанию

$$y = \begin{cases} c \cdot \text{Sign } x & |x| > a \\ 0, & |x| < a \end{cases}$$

12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе. Указать тип нелинейного элемента.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{\text{пер}}$ » переходного процесса в замкнутой системе

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{100(1 + 0.2p)}{p^2}$$

БИЛЕТ 2

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{10p(1+p)}{p^3 + 2p + p}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

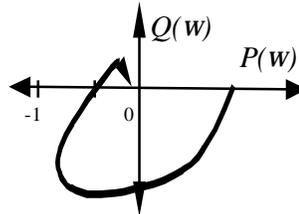
$$W(p) = \frac{2p}{p+1} \quad h(t), L(w), P(w)$$

3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

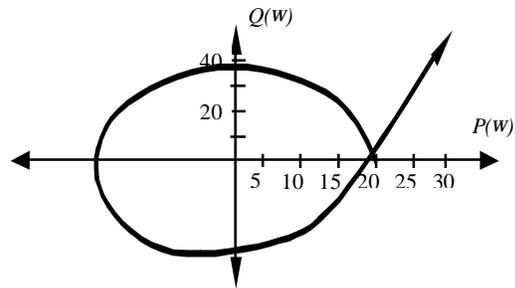
$$y'(t) = 10z(t) \quad W_{\text{уп}}(p) = ?$$

$$z(t) = x(t) - 2x'(t) - [y(t) + n(t)]$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



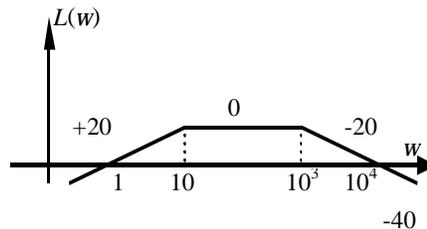
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



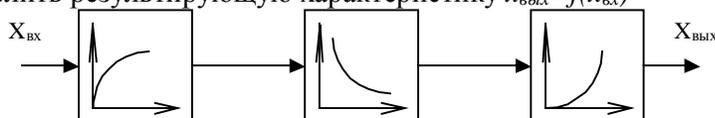
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{15}{3p^3 + 4p^2 + Tp + 10}$$

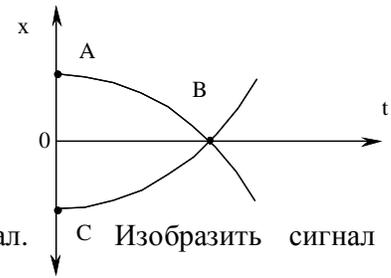
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



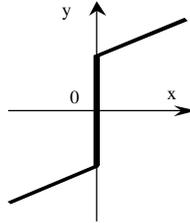
8. Определить результирующую характеристику  $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)

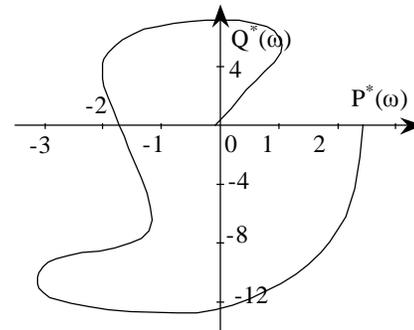


10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента

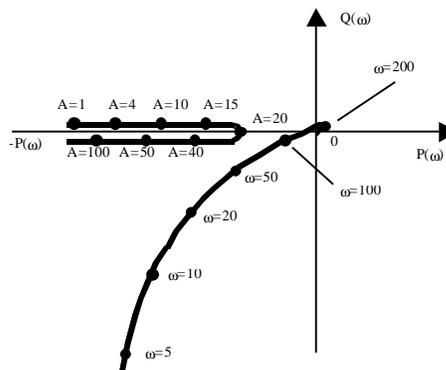


11. Построить нелинейную характеристику элемента по его математическому описанию  $y = x^2 \cdot \text{Sign } x$

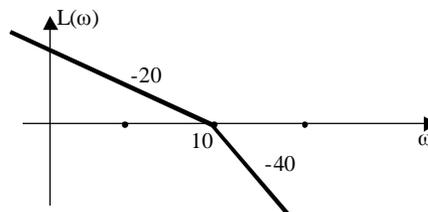
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе. Указать тип нелинейного элемента.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{\text{per}}$ » переходного процесса в замкнутой системе, если ЛАЧХ разомкнутой системы имеет вид



БИЛЕТ 3

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{(1 + 0.5p)}{0.01p^2 + 0.2p + 1}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = 2e^{-pt} \quad h(t), A(w), j(w)$$

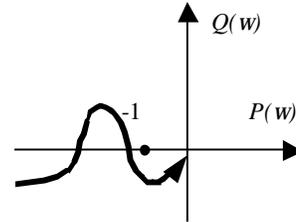
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$z_1(t) = z(t) + z'(t) \quad W_{zx}(p) = ?$$

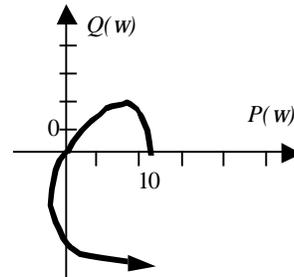
$$y'(t) = 10z_1(t)$$

$$x(t) - y(t) = z(t)$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



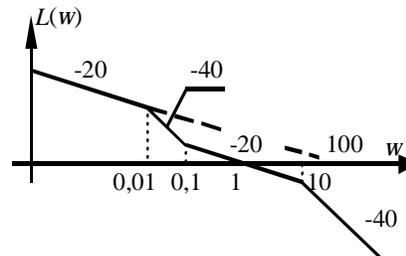
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



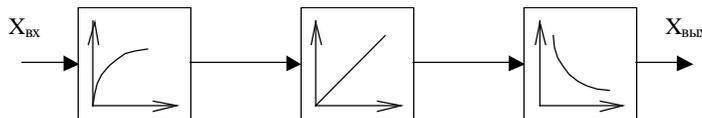
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{1 + p}{p^3 + Tp^2 + p + 10}$$

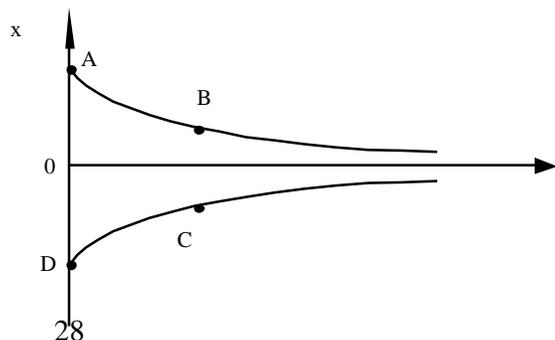
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



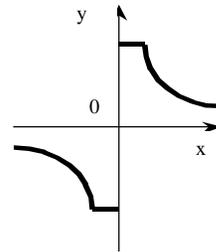
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



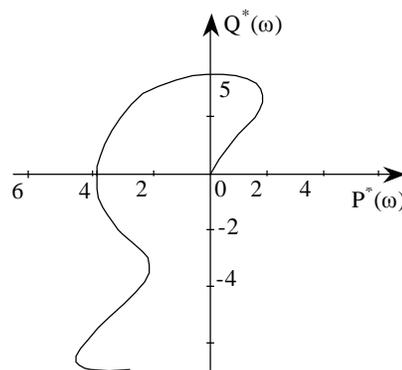
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



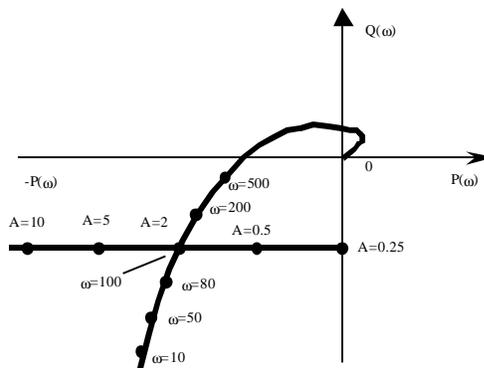
11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

$$y = \begin{cases} c, & \text{при } x > b, \quad \&gt; 0 \\ c, & \text{при } x > a, \quad \&< 0 \\ 0, & \text{при } -a < x < b, \quad \&gt; 0 \\ 0, & \text{при } a > x > -b, \quad \&< 0 \\ -c, & \text{при } x < -b, \quad \&< 0 \\ -c, & \text{при } x < -a, \quad \&> 0 \end{cases}$$

12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{пер}$ » переходного процесса в замкнутой системе

$$W_{раз}(p) = \frac{100}{10 + p}$$

БИЛЕТ 4

1. По данной передаточной функции определить из, каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{0.1p}{p^2 + 2p + 1}$$

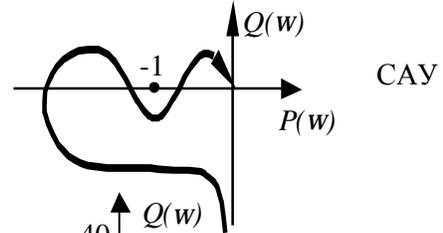
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = 5(p + 1)e^{-pt} \quad h(t), L(w), j(w)$$

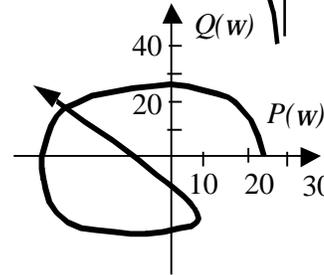
3. По приведенному уравнению составить структурную схему

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = x'(t) + 2x(t) \quad W_{yx}(p) = ?$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость



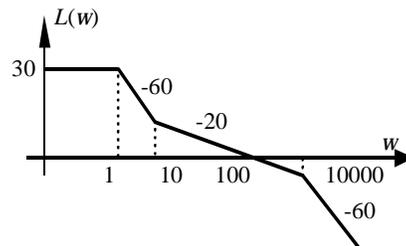
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



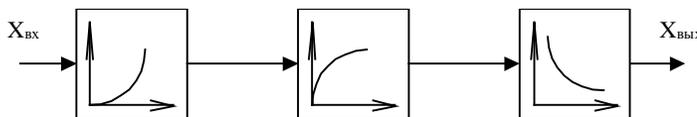
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{5(1 + 2p)}{p^2 + Tp + 1}$$

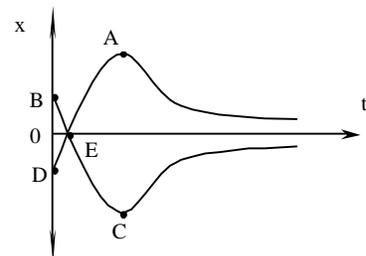
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



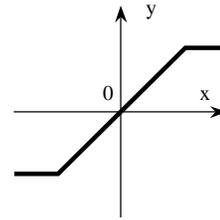
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



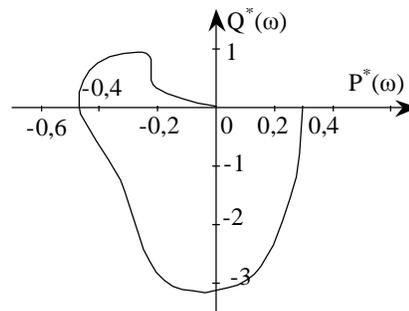
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



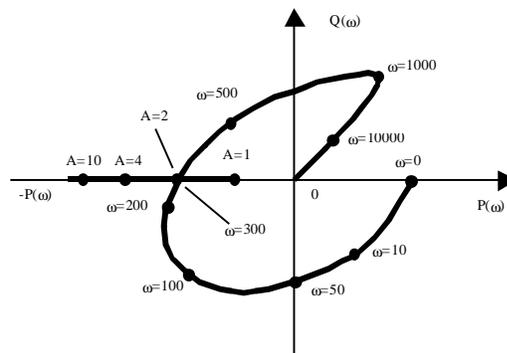
11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

$$Y = \begin{cases} c, & \text{при } x > a, \quad \&gt; 0 \\ c, & \text{при } x > -a, \quad \&< 0 \\ -c, & \text{при } x < -b, \quad \&< 0 \\ -c, & \text{при } x < b, \quad \&> 0 \end{cases}$$

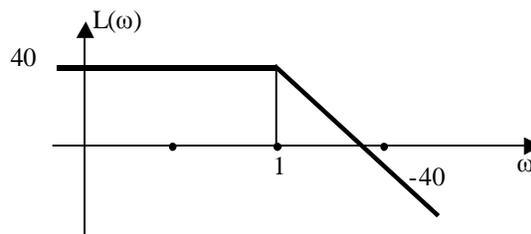
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества «σ» и «t<sub>пер</sub>» переходного процесса в замкнутой системе, если ЛАЧХ разомкнутой системы имеет вид





БИЛЕТ 5

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{0.5p}{p^2 + p + 1}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = 100p^2$$

$$h(t), A(w), L(w)$$

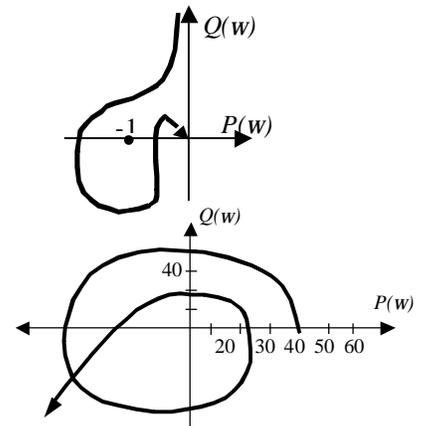
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$y(t) = 2 \int_0^t x(t) dt + n_1(t)$$

$$W_{yn2}(p) = ?$$

$$z(t) = x(t) - [y(t) + n_2(t)]$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ

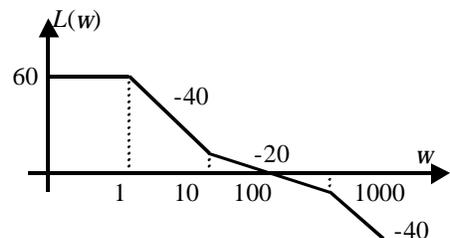


5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость

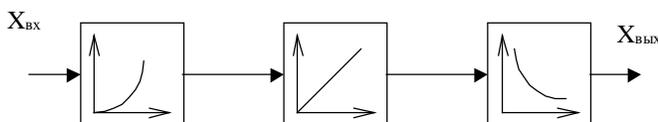
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{5}{3p^3 + 5p^2 + p + K}$$

7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании

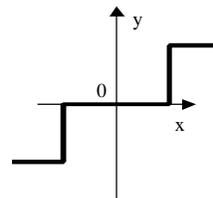


8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



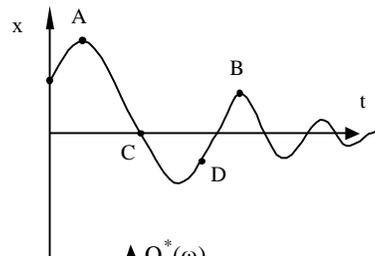
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)

10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента

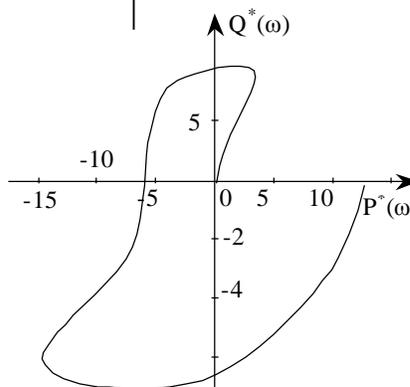


11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

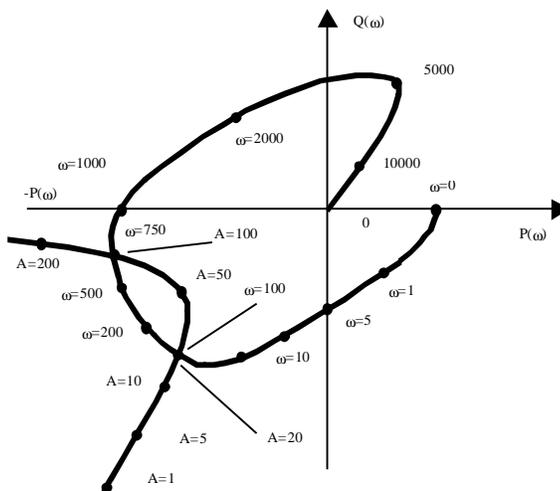
$$y = \begin{cases} c \cdot \text{Sign}(x - a), & x > 0 \\ c \cdot \text{Sign}(x + a), & x < 0 \end{cases}$$



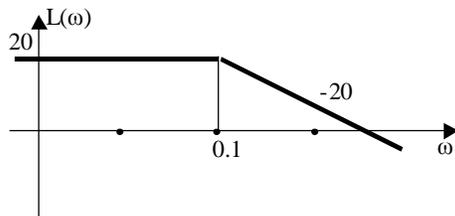
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{\text{пер}}$ » переходного процесса в замкнутой системе, если ЛАЧХ разомкнутой системы имеет вид



БИЛЕТ 6

1. По данной передаточной функции определить из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{1+p}{p^3 + 2p^2 + p}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{2}{p^2 + 5p + 4}$$

$$h(t), W(jw), j(w)$$

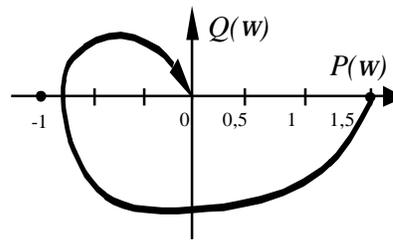
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$y(t) = 10 \int_0^t z(t) dt + n(t)$$

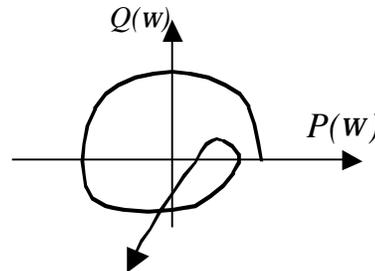
$$W_{yx}(p) = ?$$

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



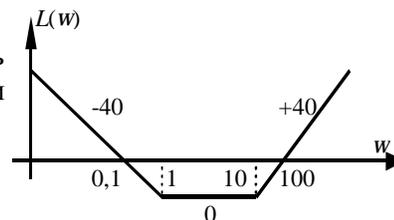
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



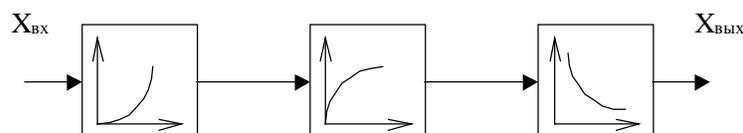
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{10}{3p^3 + 2p^2 + Tp + 1}$$

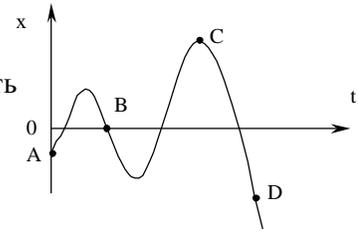
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



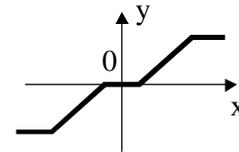
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



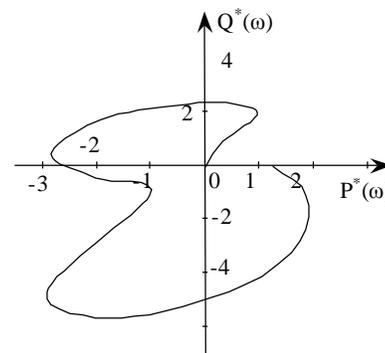
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



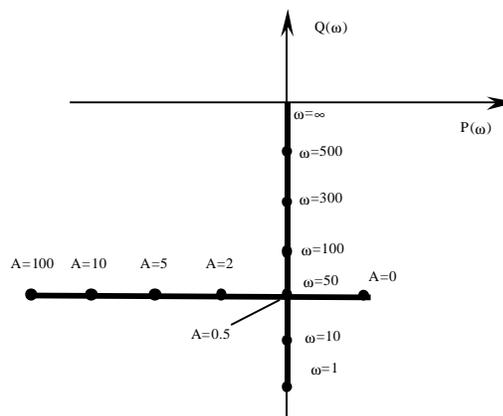
11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ c, & x > 0 \end{cases}$$

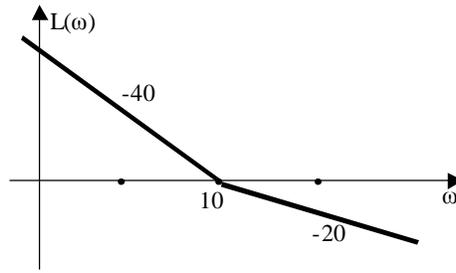
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{per}$ » переходного процесса в замкнутой системе, если ЛАЧХ разомкнутой имеет вид



БИЛЕТ 7

1. По данной передаточной функции определить из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{2 + p}{p^3 + 2p^2 + p}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{1}{p^2} \quad h(t), A(w), L(w)$$

3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

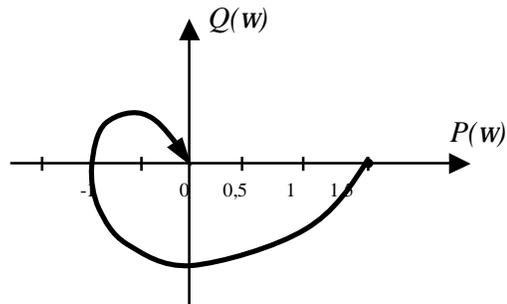
$$z(t) = x(t) - y(t)$$

$$z_1(t) = K_1 z(t) + K_2 z(t) + n(t)$$

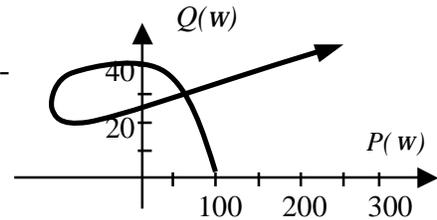
$$y'(t) = Tz_1'(t) + z_1(t)$$

$$W_{yz}(p) = ?$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



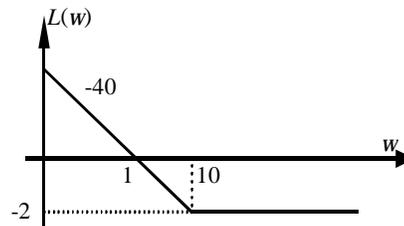
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



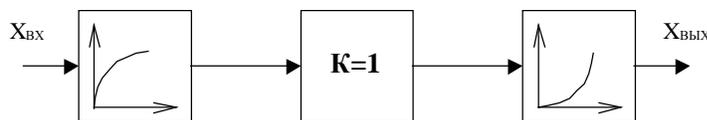
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{10}{p(1 + 0.1p)(1 + T_2 p)}$$

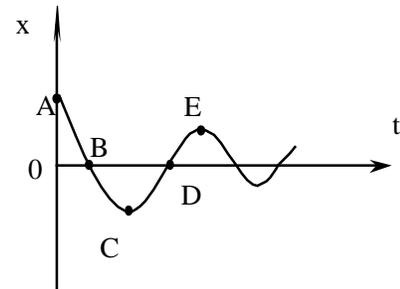
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



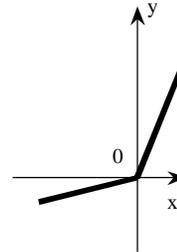
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



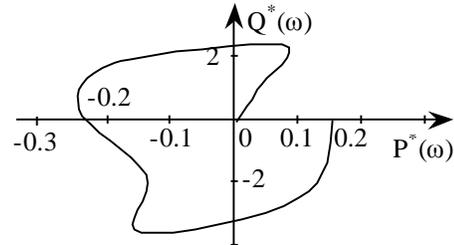
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



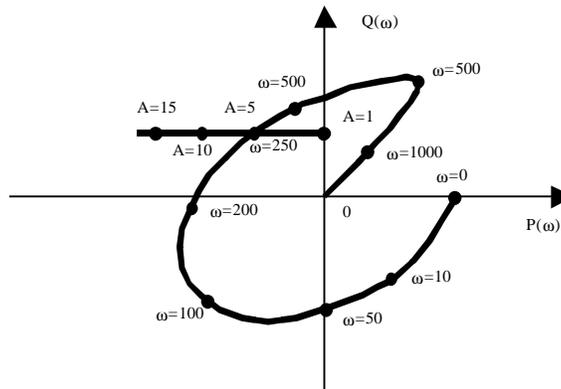
11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

$$y = \begin{cases} c \cdot \text{Sign } x, & |x| > a \\ \left(\frac{c}{a}\right) \cdot x, & |x| < a \end{cases}$$

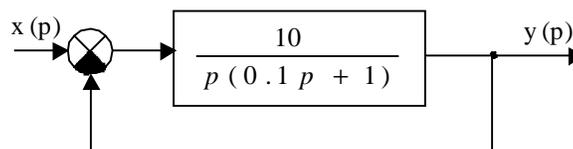
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества «σ» и «t<sub>per</sub>» переходного процесса в замкнутой системе



БИЛЕТ 8

1. По данной передаточной функции определить из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{4p^2 + 2p + 2}{2p^3 + p^2 + p}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = 5(p + 1)$$

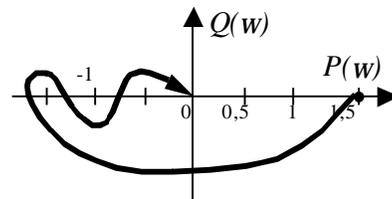
$$h(t), L(w), Q(w)$$

3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$y'(t) = 5z(t)$$

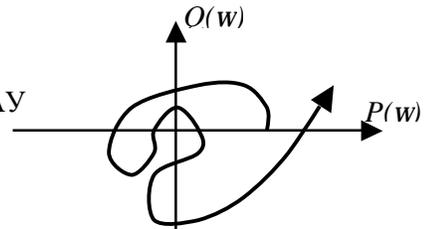
$$W_{yx}(p) = ?$$

$$z(t) = x(t) + 2x'(t) - y(t)$$



4. По годографу Найквиста

определить устойчивость САУ

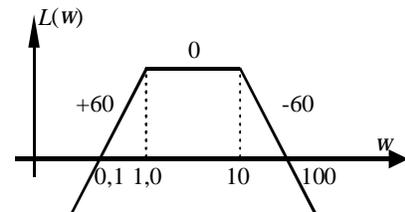


5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость

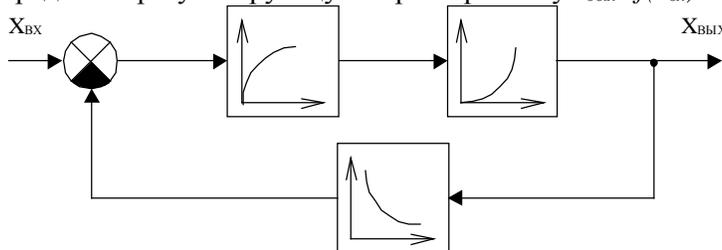
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{1}{p(1 + pT_1)(1 + p)}$$

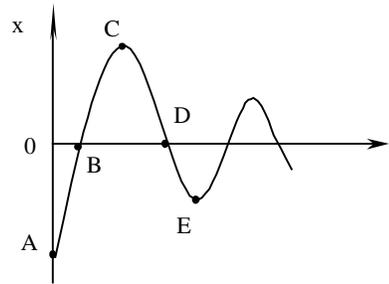
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



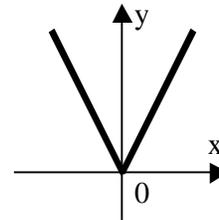
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



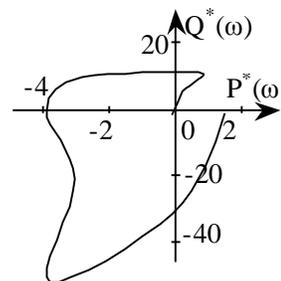
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



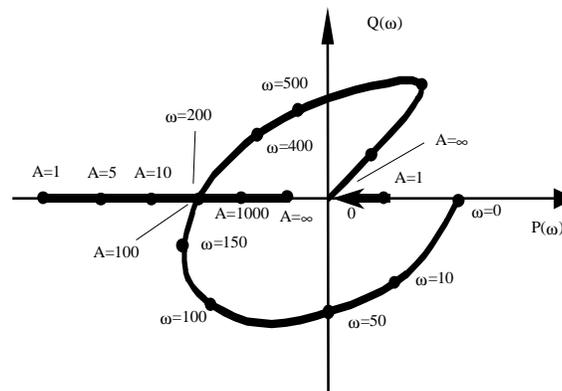
11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

$$y = k \cdot |x|$$

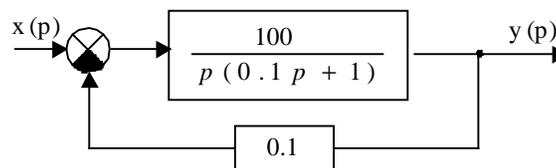
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества «σ» и «t<sub>per</sub>» переходного процесса в замкнутой системе





БИЛЕТ 9

1. По данной передаточной функции определить из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}$$

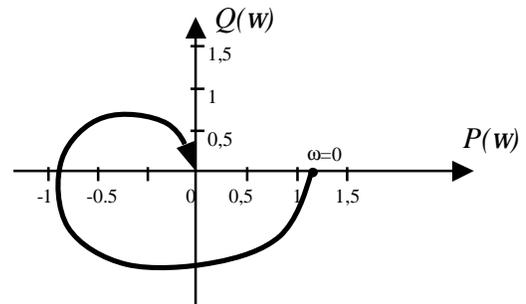
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{p+1}{10p} \quad h(t), L(w), j(w)$$

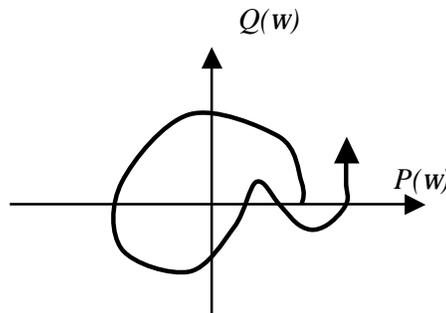
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$\begin{aligned} y'(t) &= 5z(t) & W_{yx}(p) &=? \\ z(t) &= x(t) - 2x'(t) - y(t) \end{aligned}$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



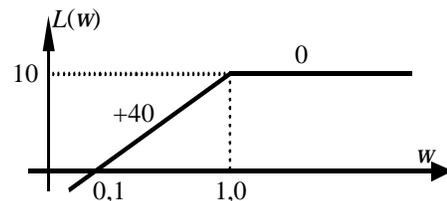
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



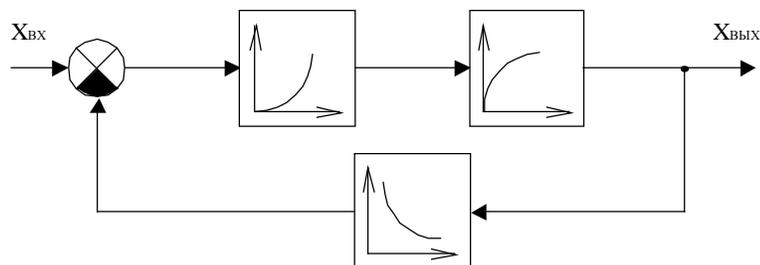
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{1+p}{0.5p^3 + Tp^2 + 3p+1}$$

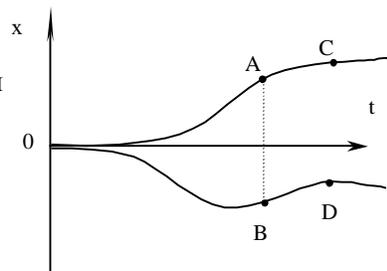
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



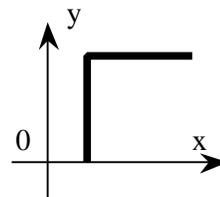
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



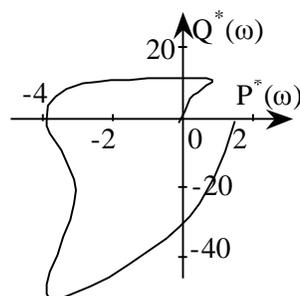
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



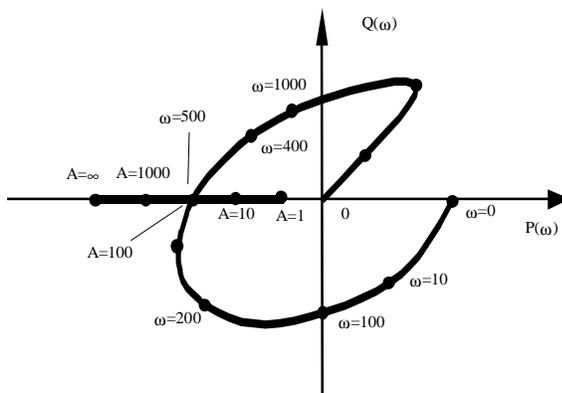
11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq a \\ c \cdot \text{Sign } x, & |x| > a \end{cases}$$

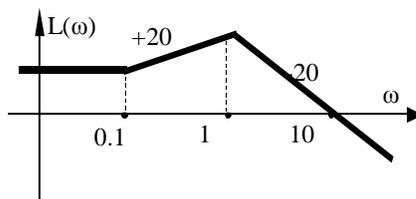
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества «\sigma» и «t\_{per}» переходного процесса в замкнутой системе, если ЛАЧХ разомкнутой имеет вид





1. По данной передаточной функции определить из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{4 + 0.4p}{p^2 + 0.1p^3}$$

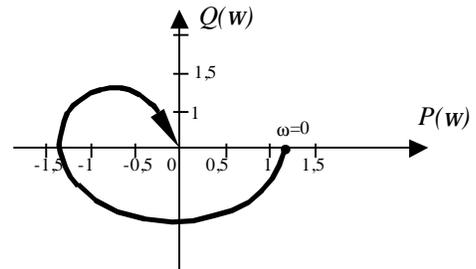
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{5}{p^2 + 1} \qquad h(t), W(j\omega), j(\omega)$$

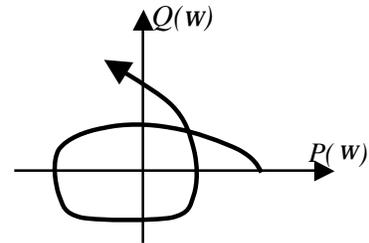
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$\begin{aligned} y(p) &= (10/p^2)z(p) & W_{xy}(p) &=? \\ z(p) &= x(p) - 0.1py(p) \end{aligned}$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



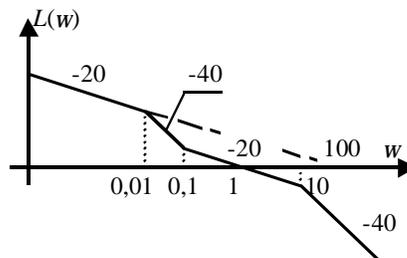
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



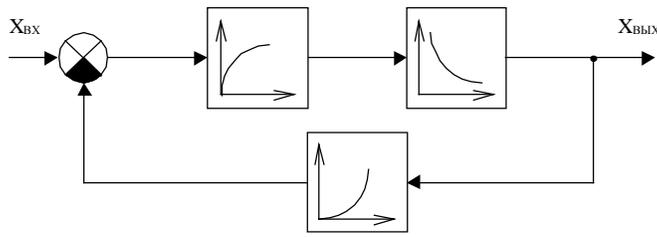
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{1 + p}{0,01T_1 p^3 + p^2 + 2p + 1}$$

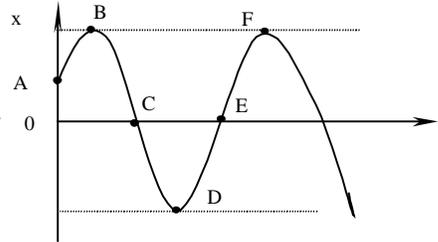
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



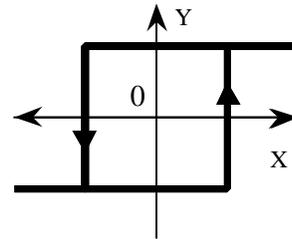
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графику переходного процесса и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



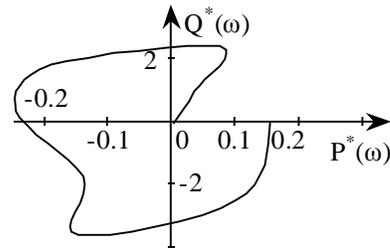
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



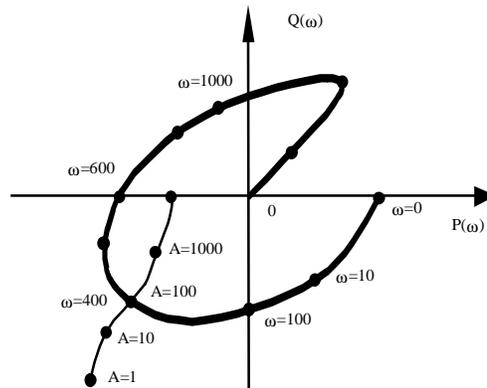
11. Построить нелинейные характеристики элементов по их математическому описанию

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq a \\ k \cdot (x - a \cdot \text{Sign } x), & |x| > a \end{cases}$$

12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)

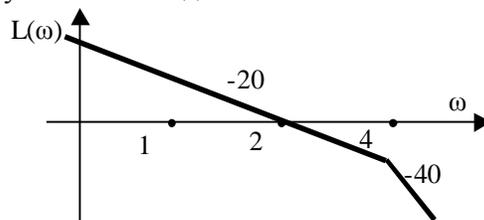


13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества «σ» и «t<sub>пер</sub>» переходного процесса в замкнутой

системе, если ЛАЧХ разомкнутой имеет вид



БИЛЕТ 11

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{10}{p+1}$$

$$P(w), W(jw), L(w)$$

3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

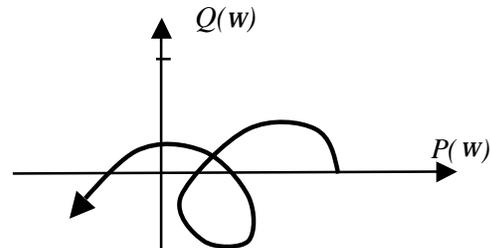
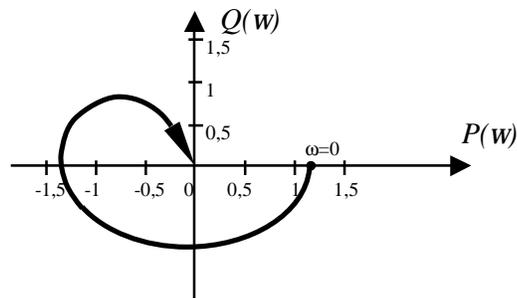
$$2y'(t) = z_1(t)$$

$$z(p) = x(p) - y(p)$$

$$z_1(t) = 2[z(t) * 2z(t)]$$

$$W_{yz}(p) = ?$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ

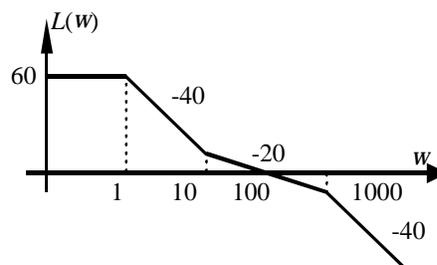


5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость.

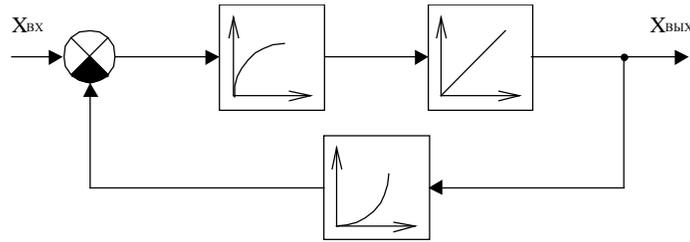
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{10(1+p)}{p^2(1+T_1 p)}$$

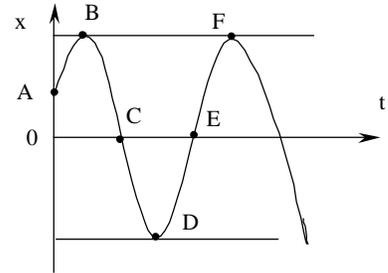
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



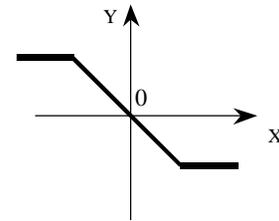
8. Определить результирующую характеристику  $x_{\text{вых}}=f(x_{\text{ex}})$



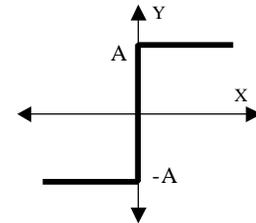
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (A, B, C и т.д.)



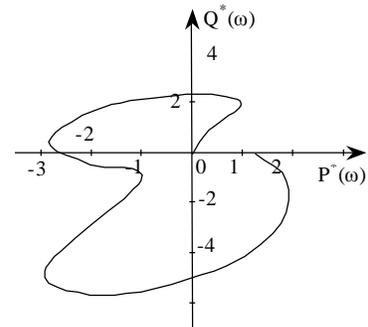
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



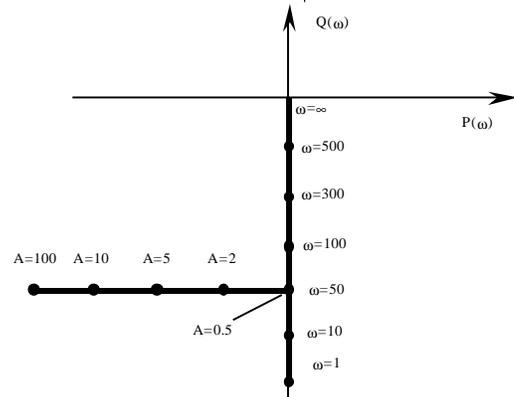
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{\text{пер}}$ » переходного процесса в замкнутой системе

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{100(1+0.1p)}{p^2}$$

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{2(1+p)}{p^3 + 2p^2 + p}$$

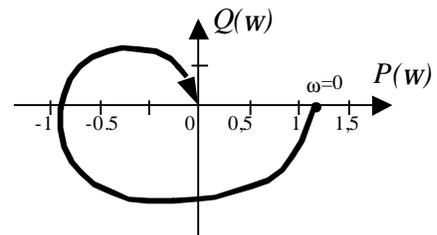
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = 4p^2 \qquad h(t), L(w), j(w)$$

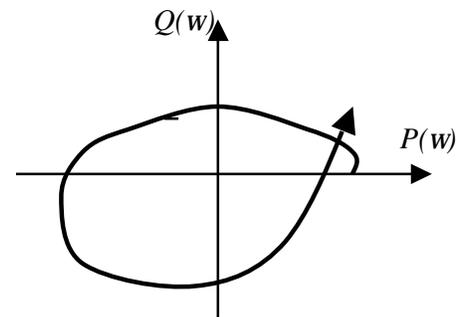
3. По приведенному уравнению составить структурную схему

$$z(p) = x(p) - 0.1p[y(p) + n(p)] \qquad W_{yn}(p) = ?$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



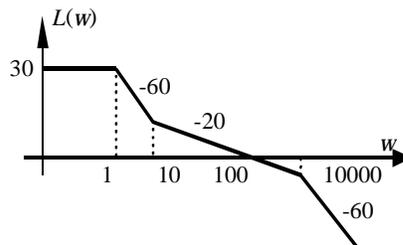
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



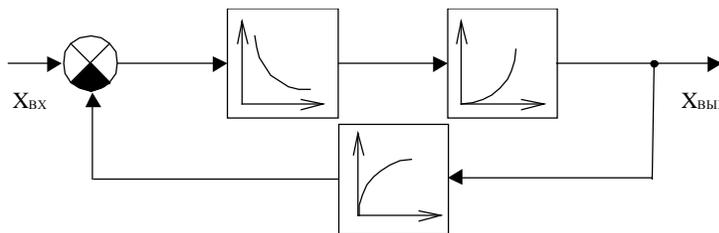
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{100(1+Tp)}{p(1+10p)}$$

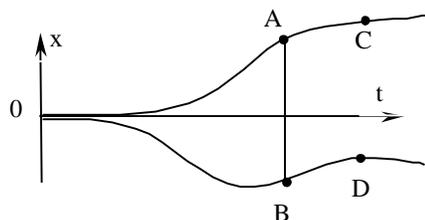
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



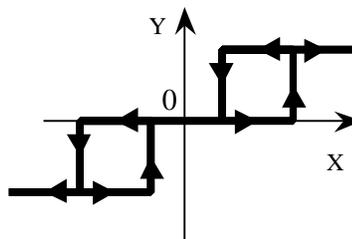
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{ex})$



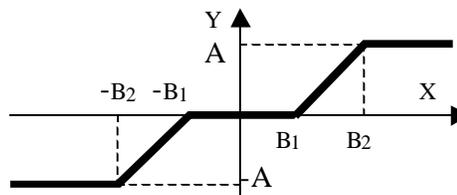
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



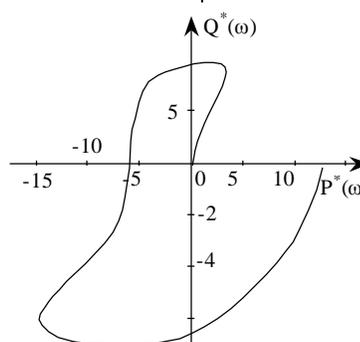
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



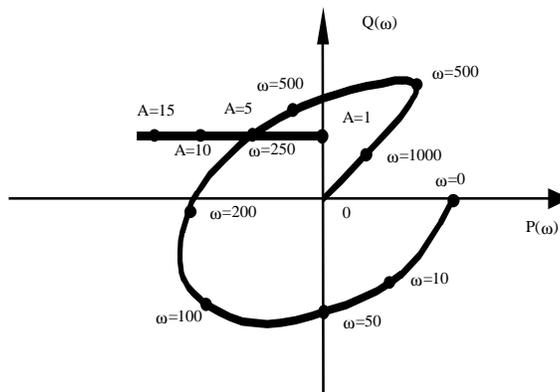
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



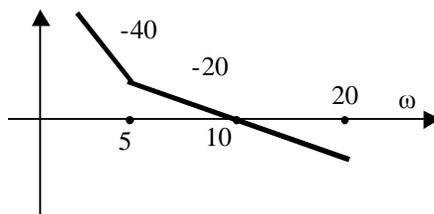
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{пер}$ » переходного процесса в замкнутой системе



1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{p^2(1+0.1p)^2}{2p+1}$$

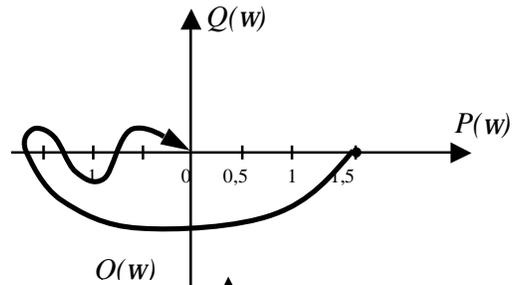
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{2}{p+1} \quad h(t), W(j\omega), L(\omega)$$

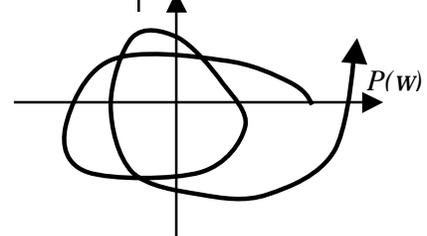
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$\begin{aligned} y(p) &= (k/p^2)z(p) + n(p) & W_{yn} &=? \\ z(p) &= x(p) - k_{oc}py(p) \end{aligned}$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



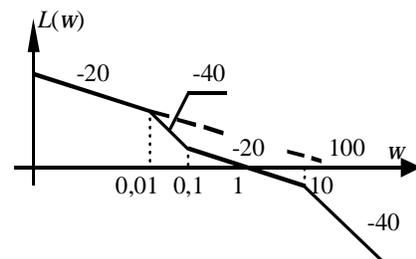
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



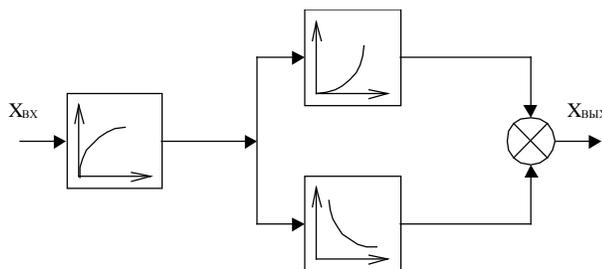
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{0.1(1+p)}{p(1+Tp)}$$

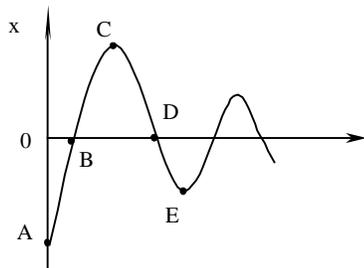
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



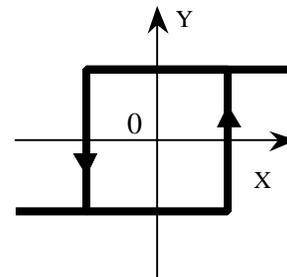
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



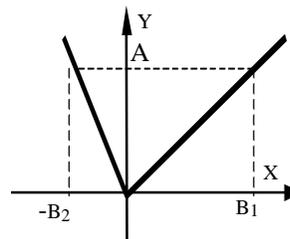
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



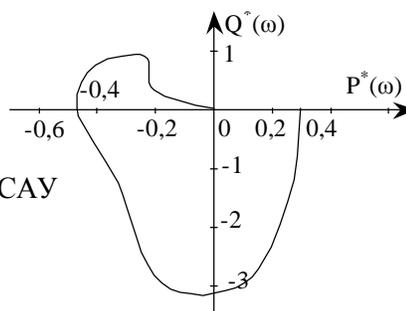
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



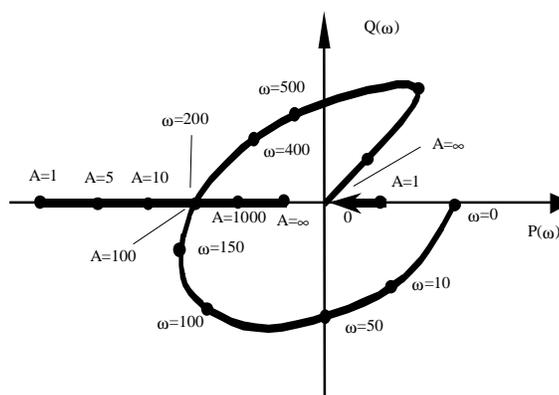
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{\text{пер}}$ » переходного процесса в замкнутой системе

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{10}{1+0.1p}$$

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{p^2}{4p^2 + 2p + 2}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{2}{p^2 + p + 1}$$

$$h(t), W(jw), P(w)$$

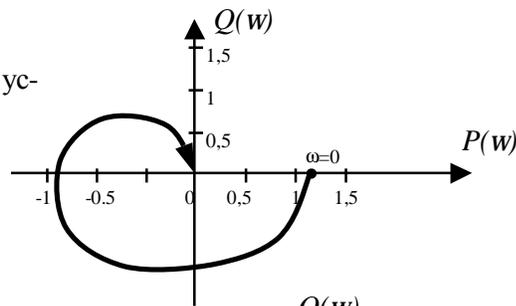
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$y(t) = 2 \int_0^t [z(t) + z'(t)] dt$$

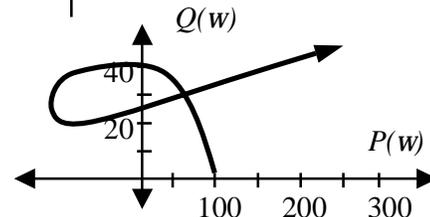
$$W_{y \rightarrow z}(p) = ?$$

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



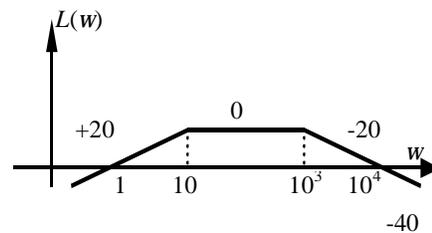
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



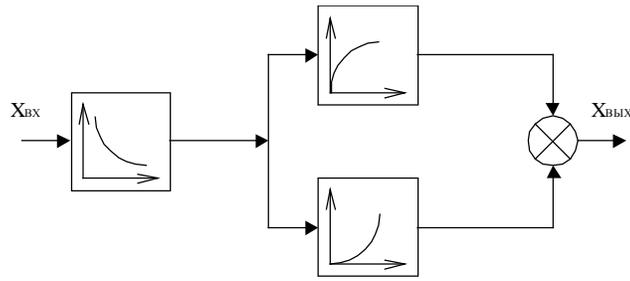
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{1}{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

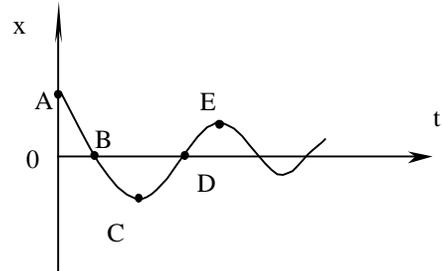
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



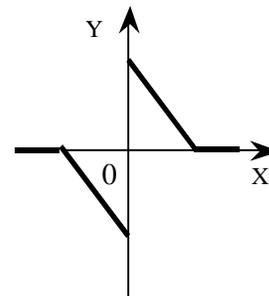
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



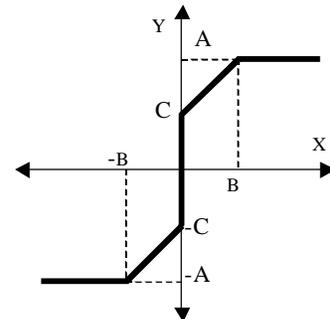
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



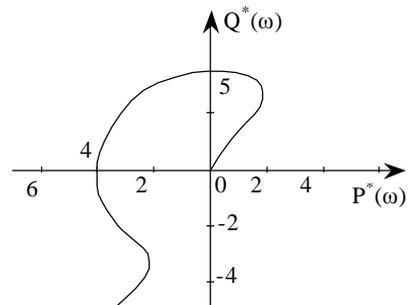
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



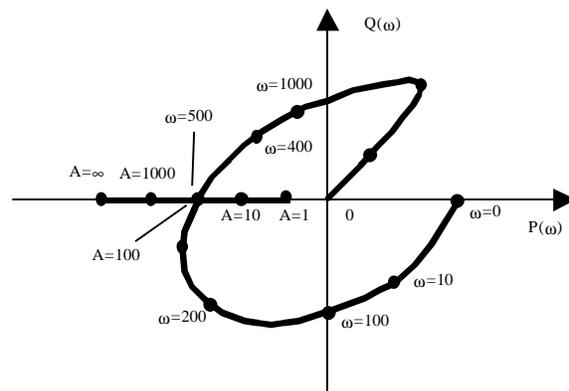
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной, графически



12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{\text{пер}}$ » переходного процесса в замкнутой системе

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{10}{p(0.1p + 1)}$$

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{1+p}{p^4 + 2p^3 + p^2}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

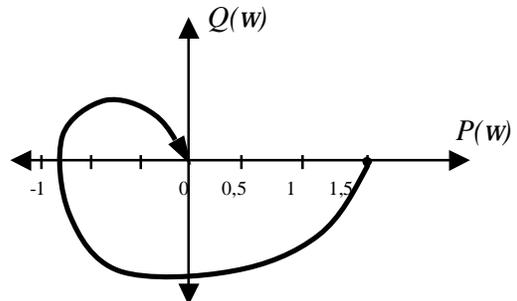
$$W(p) = 0,1(1+p)$$

$$L(w), W(jw), Q(w)$$

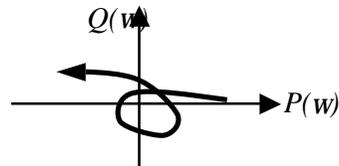
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$\begin{aligned} y'(t) &= z(t) & z(t) &= x(t) - y_I(t) \\ y_I(t) &= 9y'(t) & W_{yx}(p) &=? \end{aligned}$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ



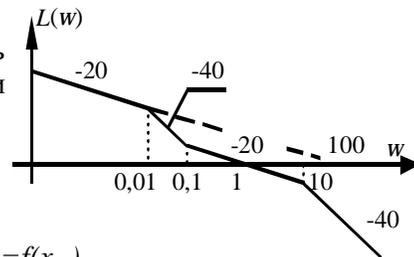
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость



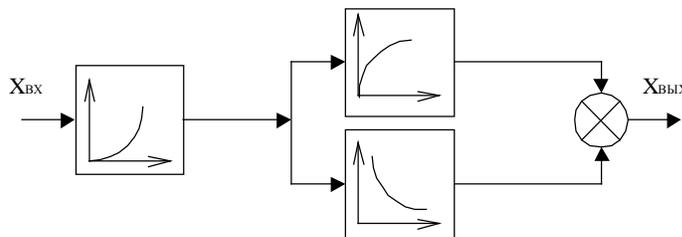
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{K}{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

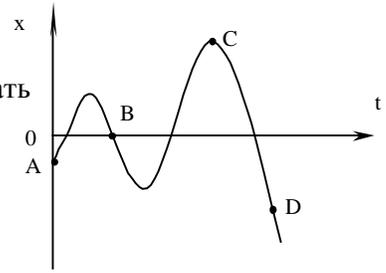
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



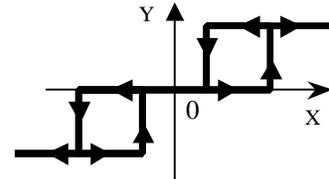
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



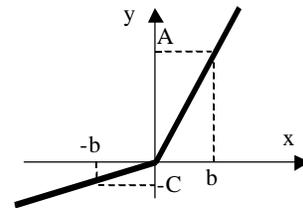
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



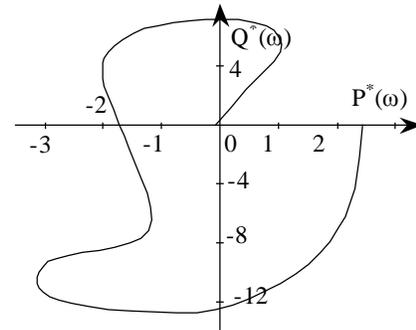
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



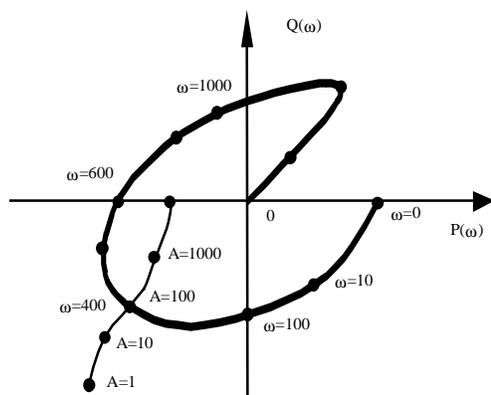
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{пер}$ » переходного процесса в замкнутой системе

$$W_{раз}(p) = \frac{100}{p(p+1)}$$

БИЛЕТ 16

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{2p(1 + 2p + p^2)^2}{4p + 2}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{10}{0,1p + 1}$$

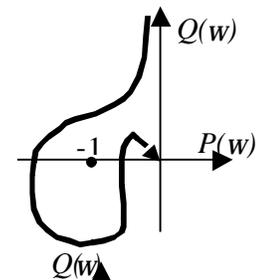
$$h(t), W(jw), P(w)$$

3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

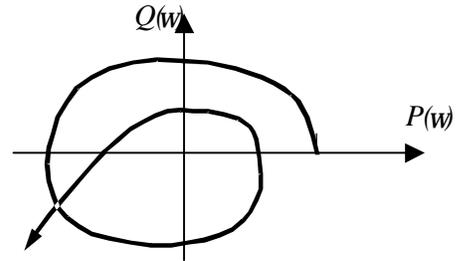
$$\begin{aligned} y(t) &= kz'(t) = 2z'(t) \\ z(t) &= x(t) - y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 5y(t) \\ W_{yx}(p) &= ? \end{aligned}$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ.



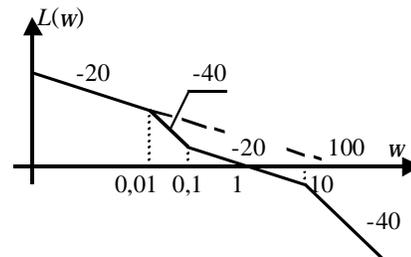
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость.



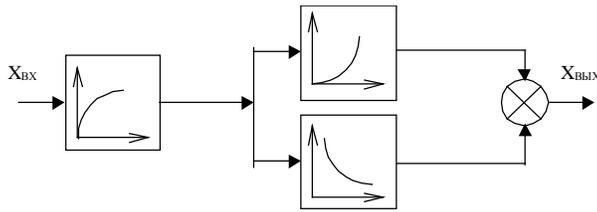
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{1 + Tp}{p^2 + 2p + 1}$$

7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании

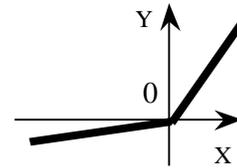


8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$

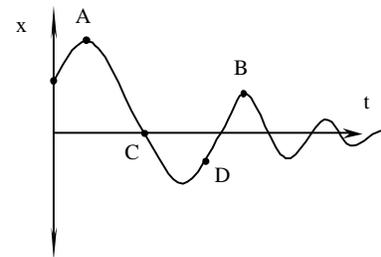
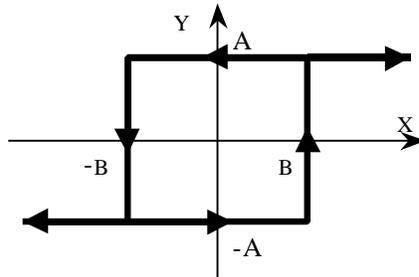


9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)

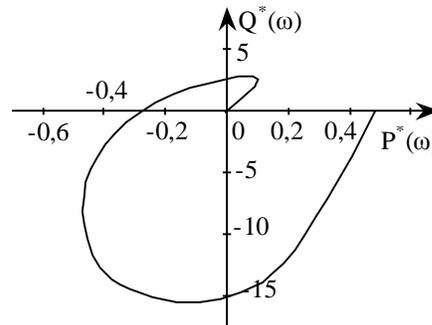
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



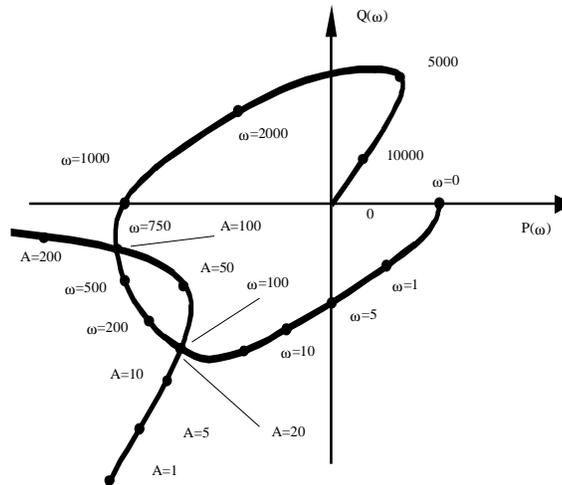
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)

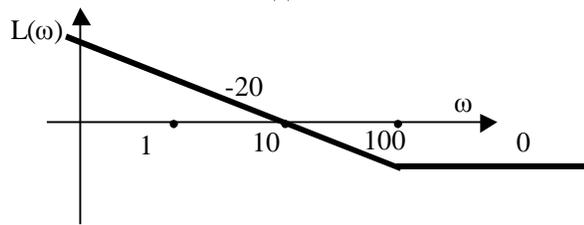


13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{per}$ » переходного процесса в замкнутой сис-

теме, если ЛАЧХ разомкнутой системы имеет вид



1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{0.1}{p^2 + 0.2p + 1}$$

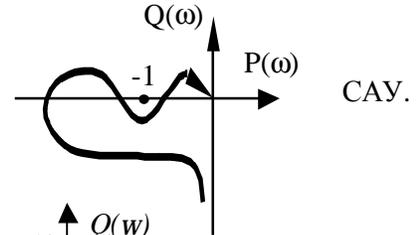
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{2}{p^2 + 2p + 1} \quad h(t), W(jw), Q(w)$$

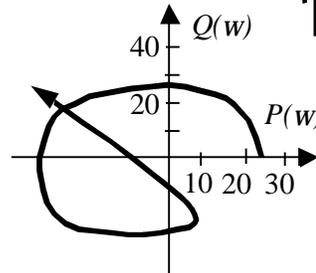
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2[z_I(t) + n(t)] & z(t) &= x(t) - y(t) \\ z_I(t) &= 0.5z(t) & W_{yn}(p) &= ? \end{aligned}$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость



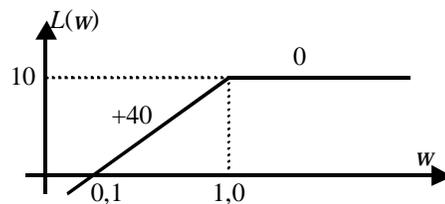
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость.



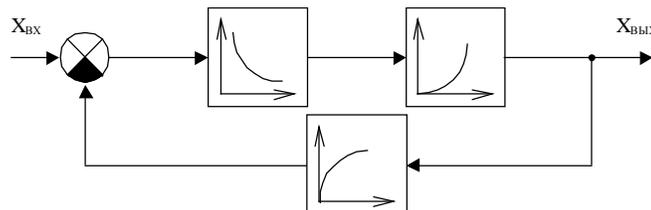
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{K(1+p)^2}{p^3}$$

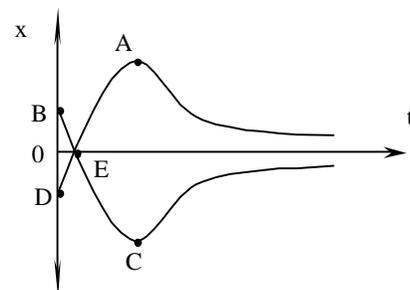
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



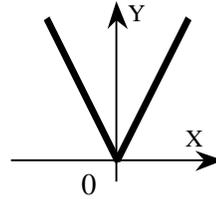
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



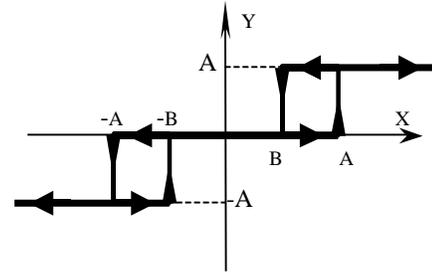
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



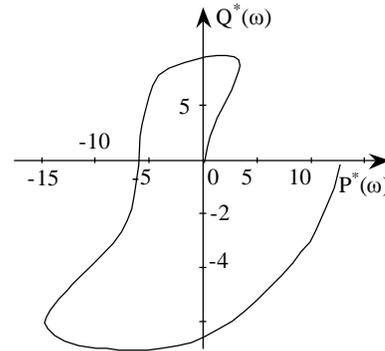
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



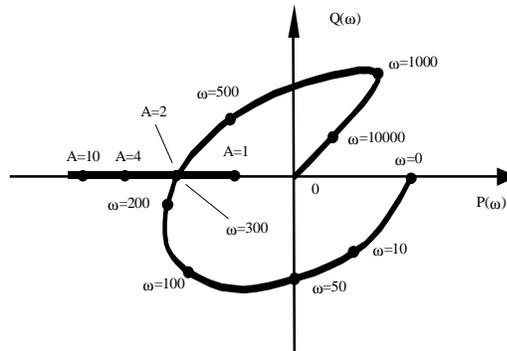
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



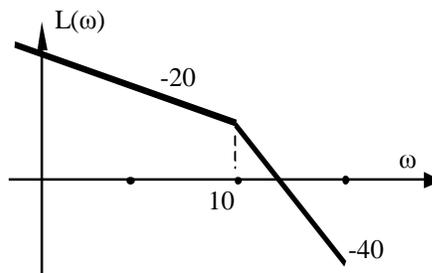
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{per}$ » переходного процесса в замкнутой системе, если ЛАЧХ разомкнутой имеет вид



1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{2}{0.01p^2 + 0.2p + 1}$$

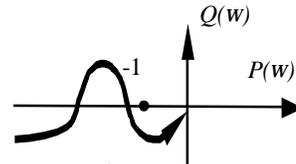
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1} \quad h(t), W(jw), L(w)$$

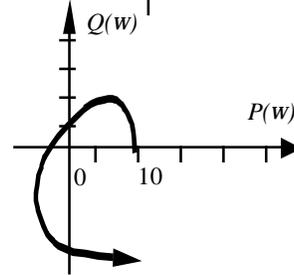
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$\begin{aligned} y(p) &= (k_w/p^2)z(p) + n(p) & W_{zx}(p) &=? \\ z(p) &= x(p) - k_w p y(p) \end{aligned}$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ.



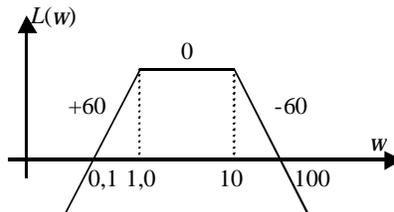
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость.



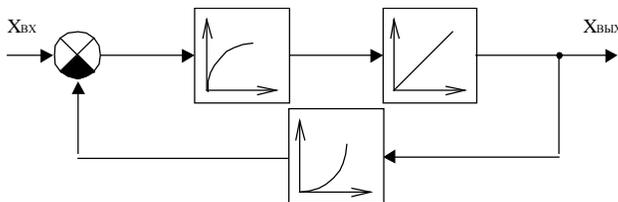
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{K}{p(1+10p)^2}$$

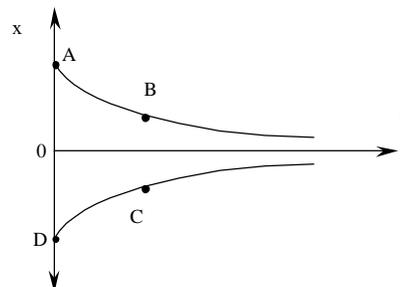
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



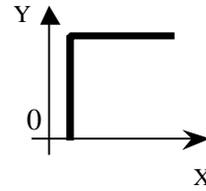
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



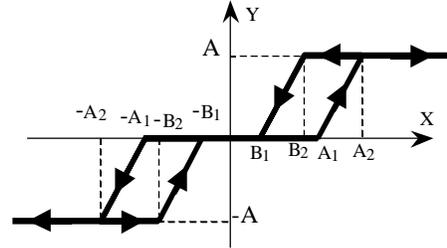
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



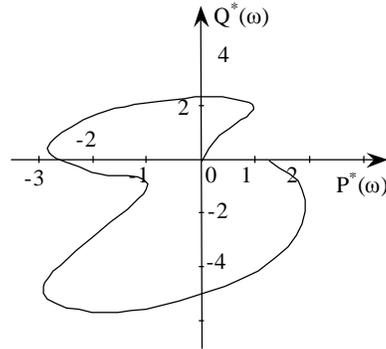
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



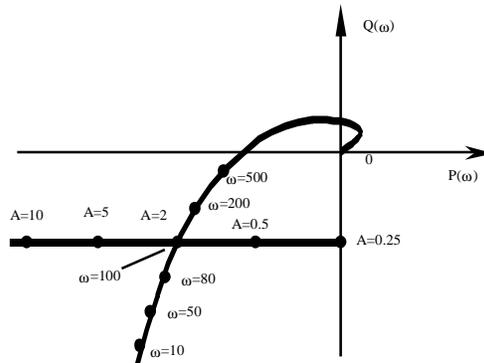
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



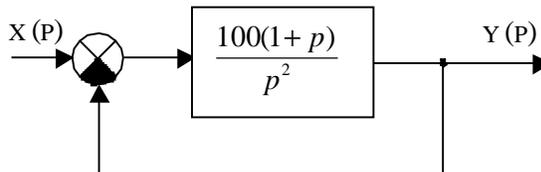
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{пер}$ » переходного процесса в замкнутой системе



БИЛЕТ 19

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{10(1+p)}{p(10+p)}$$

2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{K}{p}$$

$$h(t), W(j\omega), j(\omega)$$

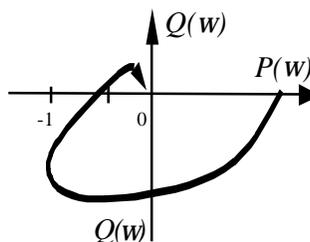
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$z(p) = x(p) - k_{oc}(p)p[y(p) + n(p)]$$

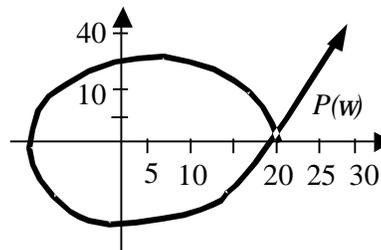
$$W_{yn}(p) = ?$$

$$y(p) = [k_{oc} / p^2]z(p)$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ.



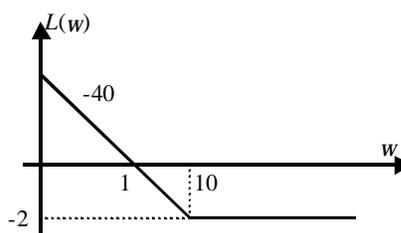
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость.



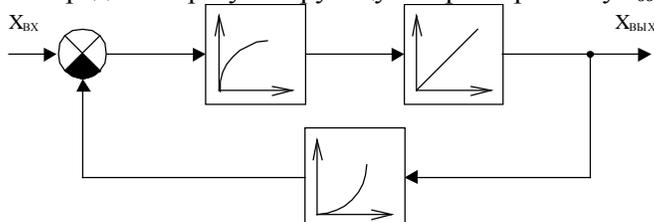
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{1+Tp}{p^2(1+2p)}$$

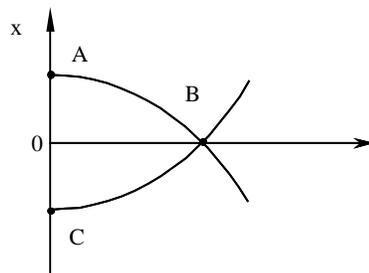
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



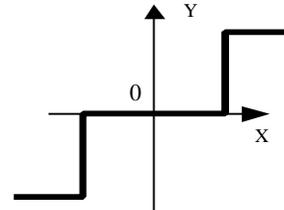
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{ex})$



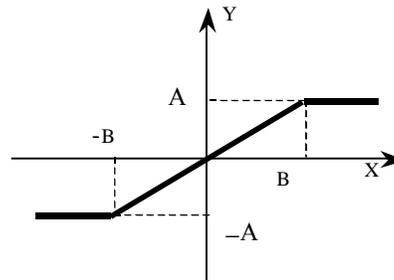
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (А, В, С и т.д.)



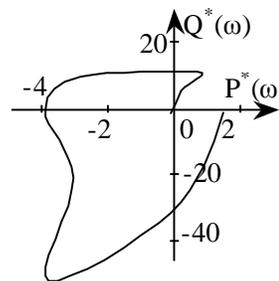
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



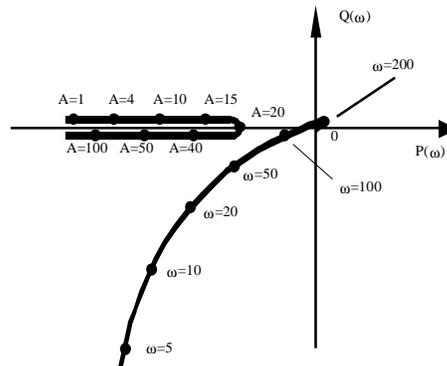
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



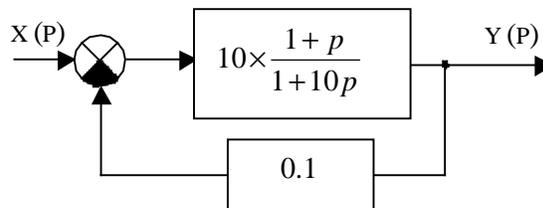
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе. Определить тип нелинейного элемента.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{пер}$ » переходного процесса в замкнутой системе



БИЛЕТ 20

1. По данной передаточной функции определить, из каких типовых звеньев состоит САУ

$$W(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{2p + 1}$$

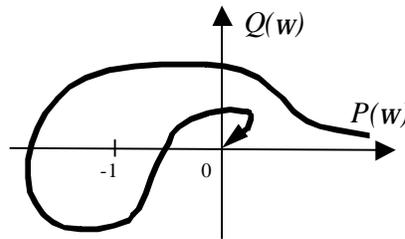
2. По данной передаточной функции качественно изобразить заданную характеристику

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1} \quad h(t), L(w), P(w)$$

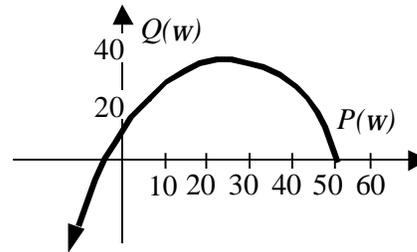
3. По приведенным уравнениям составить структурную схему

$$y(t) = 5 \int_0^t [z(t) + 2z'(t)] dt \quad W_{yx}(p) = ?$$

4. По годографу Найквиста определить устойчивость САУ.



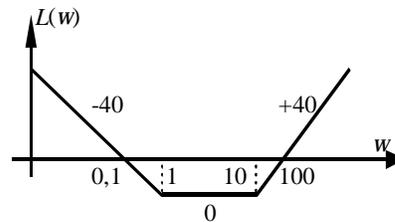
5. По годографу Михайлова определить порядок САУ и её устойчивость.



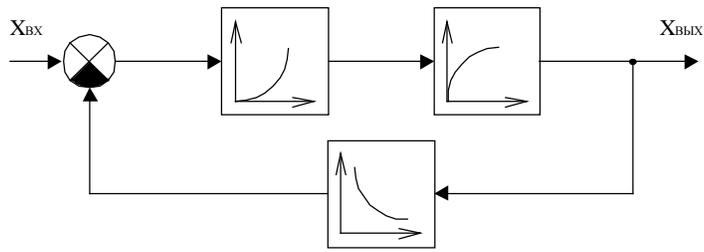
6. Определить диапазон изменения параметра, при котором замкнутая единичной обратной связью САУ устойчива

$$W_{раз}(p) = \frac{0.1(1+p)}{p(1+Tp)^2}$$

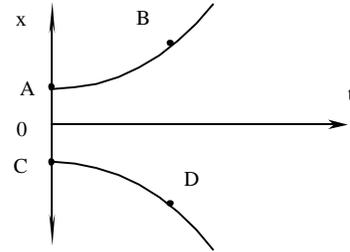
7. По указанной ЛАХ разомкнутой САУ определить передаточную функцию, оценить устойчивость САУ при замыкании



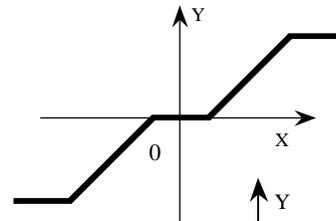
8. Определить результирующую характеристику  $x_{вых} = f(x_{вх})$



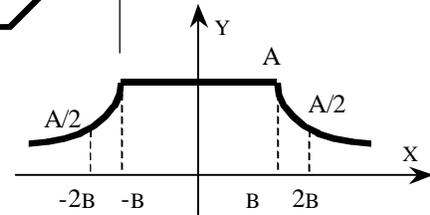
9. На фазовой плоскости представить фазовый портрет, соответствующий графикам переходных процессов и указать отмеченные на графике точки (A, B, C и т.д.)



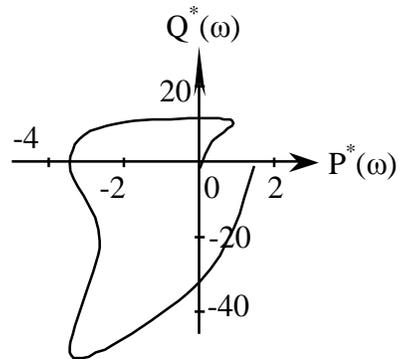
10. На нелинейный элемент подан гармонический сигнал. Изобразить сигнал на выходе нелинейного элемента



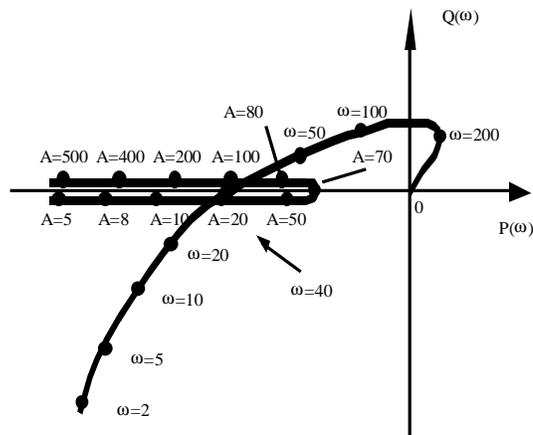
11. Найти аналитический вид нелинейной зависимости, представленной графически



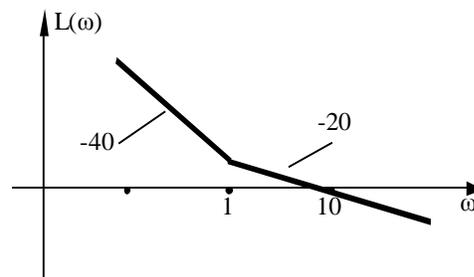
12. По данному графику модернизированной АФЧХ линейной части системы определить предельный коэффициент передачи нелинейного элемента для выполнения условия абсолютной устойчивости нелинейной САУ (критерий Попова В.М.)



13. Используя метод Л.С. Гольдфарба, определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе. Определить тип нелинейности.



14. Определить показатели качества « $\sigma$ » и « $t_{пер}$ » переходного процесса в замкнутой системе



*Федеральное агентство по образованию Российской Федерации*

*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*

Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ*

*Учебное пособие*

Благовещенск

2006

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>1. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ</b>	<b>4</b>
1.1. Уравнения в пространстве состояний	4
1.2. Передаточная матрица	6
1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ ОБЪЕКТА (СИСТЕМЫ) ПО УРАВНЕНИЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ	6
1.4. Получение описания системы в пространстве состояний по передаточным функциям	7
1.5. Каноническое представление системы с одним входом и одним выходом	10
1.6. ЗАДАНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПИСАНИЯ ОБЪЕКТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТА	10
<b>2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ</b>	<b>11</b>
2.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ	11
2.2. НАБЛЮДАЕМОСТЬ	11
2.3. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ	12
2.4. ЗАДАНИЕ. ПРОВЕРКА УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ОБЪЕКТА. ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА	16
<b>3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ САУ ПО ПРИНЦИПАМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ СТАЦИОНАРНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ</b>	<b>16</b>
3.1. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	16
3.2. СТАЦИОНАРНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ	18
3.3. СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА С МОДАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ (ПРИМЕР)	19
3.4. РАСЧЕТ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА И НАБЛЮДАТЕЛЯ	20
3.5. ЗАДАНИЕ. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ СТАЦИОНАРНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ	22
<b>4. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ</b>	<b>22</b>
4.1. ФАКТОРЫ-ПРЕДПОСЫЛКИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АДАПТИВНОГО ПОДХОДА	22
4.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТА В ЗАДАЧАХ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ.	23
4.3. АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ (АСЭМ)	24
4.4. АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА С НАСТРАИВАЕМОЙ МОДЕЛЬЮ (АСНМ)	27
4.5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТА В АДАПТИВНЫХ СИСТЕМАХ	30
4.6. ЗАДАНИЕ. РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	31
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>39</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Пособие представляет краткие теоретические сведения и задания для лабораторных работ по курсу «Современные системы управления», изучаемому студентами специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств».

Предлагаемые работы охватывают следующие темы, изучаемые в данном курсе: описание объектов и систем в пространстве состояний; управляемость и наблюдаемость объектов; модальное управление; идентификация объекта с помощью стационарного наблюдателя; адаптивные системы.

Лабораторные работы выполняются с использованием системы имитационного моделирования Simulink, а также пакета Control, входящих в состав программы Matlab.

Исходными данными для всех работ являются варианты передаточных функций объекта управления, которые предлагает студентам преподаватель.

# 1. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

## 1.1. Уравнения в пространстве состояний

Любой объект (система) описывается в пространстве состояний уравнениями вида:

$$\dot{X} = F_1(X, U), \quad (1)$$

$$Y = F_2(X, U), \quad (2)$$

где  $X$  – вектор независимых координат объекта (системы), однозначно описывающих его (ее) состояние;  $Y$  – вектор выходных (измеряемых) величин;  $U$  – вектор входных воздействий. В общем случае вектор  $U$  может включать как управляющие так и возмущающие воздействия, однако часто возмущения «выносятся» в отдельный вектор (« $f$ »).

Для линейных систем уравнения (1,2) принимают вид:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (3)$$

$$Y = CX + DU, \quad (4)$$

где  $A$  – квадратная матрица состояний;  $B$  – матрица управления;  $C$  – матрица выхода;  $D$  – т.н. матрица «прямого обхода» (управление  $U$  как бы «в обход» внутренних состояний непосредственно действует на выход  $Y$ ). Для реальных объектов и систем практически всегда  $D = 0$ .

Размеры матриц, входящих в (3,4), определяются размерностями векторов состояния, управления и выхода. Если  $X \in R^n$ ,  $U \in R^m$ ,  $Y \in R^l$ , то матрицы имеют следующие размерности:  $A - [n \times n]$ ,  $B - [n \times m]$ ,  $C - [l \times n]$ ,  $D - [l \times m]$ .

В качестве примера описания линейного объекта в пространстве состояния рассмотрим двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, регулируемый путем изменения напряжения якоря. Ток якоря  $i$  и скорость двигателя  $\omega$  измеряются датчиками, выходные напряжения которых прямо пропорциональны измеряемым величинам:

$$u_i = k_i i, \quad (5)$$

$$u_\omega = k_\omega \omega. \quad (6)$$

Нагрузка двигателя характеризуется моментом сил статического сопротивления  $M_c$  и суммарным приведенным моментом инерции  $J$ .

Уравнение электрического равновесия якорной цепи двигателя имеет вид:

$$u_{я} = L \frac{di}{dt} + Ri + C_e \Phi \omega = L \frac{di}{dt} + Ri + K_e \omega, \quad (7)$$

где  $L$ ,  $R$  – индуктивность и активное сопротивление якоря;  $\Phi$  – магнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения двигателя;  $C_e$  – конструктивный коэффициент машины.

Уравнение механического равновесия на валу двигателя:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(M - M_c) = \frac{1}{J}(C_e \Phi i - M_c) = \frac{1}{J}(K_e i - M_c). \quad (8)$$

Анализ уравнений (7), (8) показывает, что в совокупности они описывают поведение двух непрерывно изменяющихся величин: тока якоря  $i$  и угловой скорости двигателя  $\omega$ . Эти величины и примем в качестве переменных состояния:

$$X = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Управление двигателем осуществляется путем изменения напряжения, приложенного к якорю, в качестве возмущения примем момент сопротивления на валу, поэтому

$$U = \begin{pmatrix} u_{я} \\ M_c \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Выходными (измеряемыми) величинами являются выходные напряжения датчиков тока и скорости:

$$Y = \begin{pmatrix} u_i \\ u_{\omega} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Преобразуем уравнения (7),(8) к виду

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{K_e}{L}\omega + \frac{1}{L}u_{я}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{K_e}{J}i - \frac{1}{J}M_c. \end{cases} \quad (12)$$

В матричной форме система (12) представляется

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_e}{J} & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix} U. \quad (13)$$

Управление выхода:

$$Y = \begin{pmatrix} k_i & 0 \\ 0 & k_\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} \quad D = 0. \quad (14)$$

## 1.2. Передаточная матрица

Передаточная матрица представляет собой расширение понятия передаточной функции для систем с несколькими входами и несколькими выходами. Передаточная матрица  $W(p)$  связывает между собой вектор лапласовых изображений входных (управляющих) величин  $U(p)$  и вектор лапласовых изображений выходных (измеряемых) величин  $Y(p)$  при нулевых начальных условиях:

$$Y(p) = W(p) \cdot U(p). \quad (15)$$

Если  $U \in R^m$ ,  $Y \in R^l$  размер передаточной матрицы  $[l \times m]$ :

$$\begin{pmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \\ \dots \\ y_l(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1(p)}{u_1(p)} & \frac{y_1(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_1(p)}{u_m(p)} \\ \frac{y_2(p)}{u_1(p)} & \frac{y_2(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_2(p)}{u_m(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_l(p)}{u_1(p)} & \frac{y_l(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_l(p)}{u_m(p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ \dots \\ u_m(p) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Таким образом, элементами передаточной матрицы являются передаточные функции по отдельным каналам управления.

## 1.3 Определение передаточной матрицы объекта (системы) по уравнениям в пространстве состояний

Исходными уравнениями являются уравнения в пространстве состояний (3,4). Запишем уравнение состояний в операторной форме и выразим из него вектор изображений переменных состояния:

$$pX(p) = AX(p) + BU(p), \quad (17)$$

откуда

$$X(p) = (pE - A)^{-1} BU(p), \quad (18)$$

где  $E$  – единичная диагональная матрица размером  $[n \times n]$ .

Подставив (18) в уравнение выхода, получим:

$$Y(p) = C(pE - A)^{-1} BU(p) + DU(p) = \left( C(pE - A)^{-1} B + D \right) U(p), \quad (19)$$

откуда видно, что

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D, \quad (20)$$

или

$$W(p) = \frac{C(pE - A)^+ B + D \det(pE - A)}{\det(pE - A)}, \quad (21)$$

где  $(pE - A)^+$  – т.н. присоединенная к  $pE - A$  матрица. Знаменатель (21) представляет собой характеристический полином матрицы  $A$ . Так как этот полином – величина скалярная, знаменатели передаточных функций – элементов передаточной матрицы, т.е. знаменатели передаточных функций всех каналов управления системы будут одинаковыми:

$$\text{den}(p) = \det(pE - A). \quad (22)$$

Числители же определяются матрицей

$$\text{num}(p) = C(pE - A)^+ B + D \det(pE - A). \quad (23)$$

Это обстоятельство подчеркивает то, что внутренние свойства системы (ее динамика по переменным состояниям, устойчивость и т.д.) определяются только уравнением состояний (3), точнее, матрицей  $A$ .

Однако если система представляет собой объединение нескольких независимых подсистем, соответствующие элементы передаточной матрицы, – передаточные функции каналов управления, – должны иметь, очевидно, различные знаменатели, так как эти каналы принадлежат подсистемам с различными свойствами. В таком случае числители (23) и знаменатель (22) передаточных функций матрицы имеют общие множители–полиномы, сокращая которые, можно получить «реальные» числители и знаменатели.

#### **1.4. Получение описания системы в пространстве состояний по передаточным функциям**

Имея передаточные функции каналов управления системы (объекта), можно получить ее описание в пространстве состояний в форме уравнений (3,4). Такое описание будет иметь формальный характер, так как передаточные функции не несут информации о внутренних координатах системы – переменных состояний, а лишь связывают входы и выходы системы. Одной и той же передаточной функции соответствует бесконечное множество вариантов ее представлений уравнениями (3,4), различающихся набором переменных состояний (базисом). Выбор базиса зависит от метода преобразований.

Рассмотрим один из методов – метод прямого программирования, позволяющий получить уравнения в пространстве состояний с базисом, состоящим из фазовых координат.

Пусть, например, имеется объект со одним выходом и одним входом, описываемый передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{2p^2 + p + 4}. \quad (24)$$

Преобразования выполняются в несколько шагов.

1. Числитель и знаменатель  $W(p)$  разделим на слагаемое знаменателя, имеющее максимальную степень при  $p$ . Тем самым мы перейдем от операции дифференцирования к операции интегрирования:

$$W(p) = \frac{0,5 + p^{-1} + 2p^{-2}}{1 + 0,5p^{-1} + 2p^{-2}}. \quad (25)$$

2. Введем вспомогательную переменную  $E(p)$ , равную частному от деления изображения входа  $U(p)$  на знаменатель (25):

$$E(p) = \frac{U(p)}{1 + 0,5p^{-1} + 2p^{-2}}. \quad (26)$$

Из (26) получим:

$$E(p) = U(p) - 0,5p^{-1}E(p) - 2p^{-2}E(p). \quad (27)$$

3. Выразим выход системы через переменную  $E(p)$ . Для этого необходимо умножить эту переменную на числитель передаточной функции:

$$Y(p) = 0,5 \cdot E(p) + p^{-1}E(p) + 2p^{-2}E(p). \quad (28)$$

4. На основании (27) и (28) построим структурную схему системы.

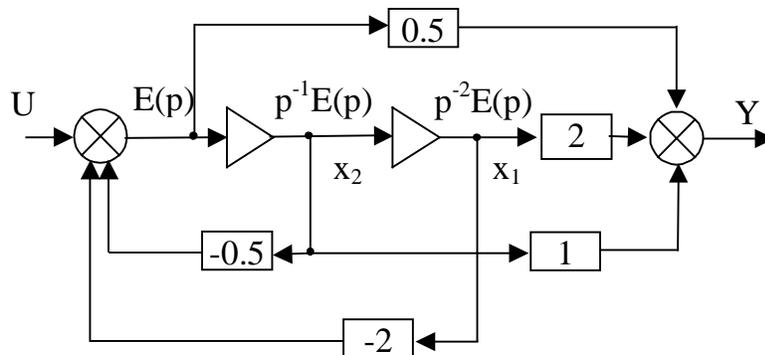


Рис. 1. Структурная схема системы

На схеме обозначим сигналы на выходах интеграторов переменными  $x_1$  и  $x_2$  (порядок расстановки в общем случае произволен, однако рекомендуется принять его таким, как на схеме). Эти сигналы и будут сигналами по переменным состояниям.

По структурной схеме составим уравнения в виде (3,4):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0,5x_2 + U, \\ Y = 2x_1 + x_2 + 0,5\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + 0,5 \cdot (-2x_1 - 0,5x_2 + U) = \\ = x_1 + 0,75x_2 + 0,5U. \end{cases} \quad (29)$$

Эти же уравнения в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U, \\ Y = (1 \quad 0,75) X + 0,5 \cdot U. \end{cases} \quad (30)$$

Следовательно, матрицы описания объекта в пространстве состояний будут следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0,75), \quad D = 0,5. \quad (31)$$

Проверим правильность результата, осуществив обратное преобразование. Передаточная функция объекта:

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D = \frac{C(pE - A)^{-1}B + D \det(pE - A)}{\det(pE - A)}. \quad (32)$$

В данном случае

$$(pE - A) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 2 & p+0,5 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Знаменатель передаточной функции:

$$\det(pE - A) = p^2 + 0,5p + 2. \quad (34)$$

Далее

$$(pE - A)^T = \begin{pmatrix} p & 2 \\ -1 & p+0,5 \end{pmatrix}, \quad (pE - A)^+ = \begin{pmatrix} p+0,5 & 1 \\ -2 & p \end{pmatrix} \quad (35)$$

Числитель передаточной функции:

$$\begin{aligned}
C \cdot (E_p - A)^+ \cdot B + D \cdot \det(E_p - A) &= \\
&= (1 \quad 0,75) \times \begin{pmatrix} p+0,5 & 1 \\ -2 & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot (p^2 + 0,5p + 2) = \\
&= 1 + 0,75p + 0,5p^2 + 0,25p + 1 = 0,5p^2 + p + 2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Окончательно:

$$W(p) = \frac{0,5p^2 + p + 2}{p^2 + 0,5p + 2} = \frac{p^2 + 2p + 4}{2p^2 + p + 4}. \tag{37}$$

### 1.5. Каноническое представление системы с одним входом и одним выходом

Система с одним входом и одним выходом с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{c_n p^{n-1} + c_{n-1} p^{n-2} + \dots + c_2 p + c_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1} \tag{38}$$

может быть описана уравнениями в пространстве состояний (3,4) с матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n), \quad D = 0. \tag{39}$$

Такое описание и является каноническим представлением системы с одним входом и одним выходом.

### 1.6. Задание. Определение описания объекта в пространстве состояний. Определение передаточной функции объекта

1.5.1. По заданной передаточной функции определить уравнения объекта в пространстве состояний (матрицы описания A, B, C, D) методом прямого программирования (п. 1.4). Проверить правильность расчета, используя знание канонического представления системы (п. 1.5).

1.5.2. Построить структурную схему модели объекта. Построить модель объекта в Simulink. Сравнить ее «поведение» с «поведением» единственного блока – исходной передаточной функции.

1.5.3. По уравнениям в пространстве состояний определить передаточную функцию объекта (п. 1.3).

1.5.4. В Matlab получить уравнения объекта в пространстве состояний:

в координатах, пропорциональных фазовым (функция ss);  
 в канонической модальной форме (функция canon(..., 'modal'));  
 в канонической companion-форме (функция canon(..., 'companion')).  
 Построить соответствующие структурные схемы модели объекта.

## 2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

### 2. 1. Управляемость

Под управляемостью системы в общем смысле понимается возможность оказания на нее управляющих воздействий, которые обеспечили бы заданное движение. Приведем определение управляемости.

Система является полностью управляемой, если для любых начального  $X(t_n)$  и конечного  $X(t_k)$  ее положений найдется допустимое управление  $U(t)$ , переводящее систему из  $X(t_n)$  в  $X(t_k)$  за время  $t = t_k - t_n$ .

Для линейных систем в отсутствии ограничений на управляющие сигналы управляемость системы может быть определена с помощью критерия Калмана.

Система полностью управляема, если

$$\text{rank}(J) = \text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n, \quad (40)$$

где  $n$  – порядок системы (размеры матрицы  $A$ ).

Если  $\text{rank}(J) = k < n$ , то  $k$  переменных управляемы,  $k-n$  – не управляемы.

В этом случае описание системы может быть представлено следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_y \\ \dot{X}_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_y \\ X_{ny} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times U, \quad (41)$$

где  $X_y$  –  $k$ -мерный вектор управляемых координат;  $X_{ny}$  –  $(k-n)$ -мерный вектор неуправляемых координат.

Для таких систем вводится понятие *стабилизируемости*. Система стабилизируема, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_{ny}(t) = 0$ .

Это имеет место, если  $A_{22}$  – гурвицева матрица, т.е. матрица, собственные числа которой (корни характеристического полинома  $\det(pE - A_{22})$ ) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

### 2.2. Наблюдаемость

Под наблюдаемостью системы понимается возможность по наблюдениям за ее входами и выходами восстановить вектор состояний. Определение: система называется наблюдаемой, если существует момент времени  $t^*$ , такой,

что по наблюдениям за  $y(\tilde{t})$  и входом  $U(\tilde{t})$ , где  $\tilde{t} \in [t, t^*]$ , можно определить состояние  $X(t)$ .

Для линейных систем наблюдаемость можно определить с помощью критерия Калмана.

Для того, чтобы система была полностью наблюдаема, необходимо и достаточно:

$$\text{rank}H = \text{rank}[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T] = n. \quad (42)$$

Если  $\text{rank}(H) = k < n$ , то  $k$  переменных наблюдаемы,  $n-k$  – не наблюдаемы, и тогда систему можно описать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_H \\ \dot{X}_{HH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_H \\ X_{HH} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \times U, \quad (43)$$

где  $X_H$  –  $k$ -мерный вектор наблюдаемых координат,  $X_{HH}$  –  $(k-n)$ -мерный вектор ненаблюдаемых координат.

Для таких систем вводится понятие *обнаруживаемости*.

Для того, чтобы система была обнаруживаема, необходимо и достаточно:  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_{HH} = 0$  при  $X_H = 0, U = 0$ , т.е.  $A_{22}$  была гурвицевой матрицей.

### 2.3. Примеры определения наблюдаемости

#### 2.3.1. Интегратор.

Рассмотрим звено структурной схемы системы – интегратор.

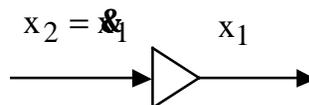


Рис. 2. Интегратор

Если измерению поддается величина  $x_1$ , т.е.  $Y = x_1$ , можно определить и вторую координату, дифференцируя  $x_1$ :

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{Y}. \quad (44)$$

Если же измерению подлежит  $x_2$ , т.е.  $Y = x_2$ , определить координату  $x_1$  невозможно:

$$x_1 = \int_0^t x_2 dt = F_{x_2}(t) - F_{x_2}(0) + x_1(0), \quad (45)$$

где  $F_{x_2}$  – первообразная  $x_2$ . Действительно,  $x_1(0)$  неизвестно.

#### 2.3.2. Объект с двойным интегрированием:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U, \\ Y = c_1 x_1 + c_2 x_2. \end{cases} \quad (46)$$

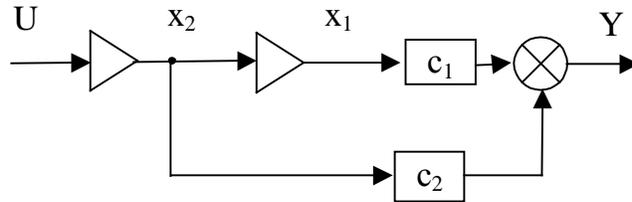


Рис. 3. Объект с двойным интегрированием

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1 \quad c_2). \quad (47)$$

Матрица наблюдаемости

$$H = \begin{pmatrix} c_1 & (0 \quad 0) \\ c_2 & (1 \quad 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Ее определитель:

$$\det(H) = -c_1^2. \quad (49)$$

Таким образом, наблюдаемость объекта с двойным интегрированием определяется только коэффициентом  $c_1$ .

При  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  – координата  $x_1$  не наблюдаема.

При  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{c_1} Y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{1}{c_1} \dot{Y}, \quad (50)$$

т.е. система полностью наблюдаема.

При  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$

$$\dot{Y} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = c_1 x_2 + c_2 U, \quad (51)$$

откуда

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{c_1} \dot{Y} - \frac{c_2}{c_1} U, \\ x_1 = \frac{1}{c_1} Y - \frac{c_2}{c_1} x_2 = \frac{1}{c_1} Y - \frac{c_2}{c_1^2} \dot{Y} + \frac{c_2^2}{c_1^2} U. \end{cases} \quad (52)$$

Схема восстановления координат, составленная на основании (52), приведена на рис. 4.

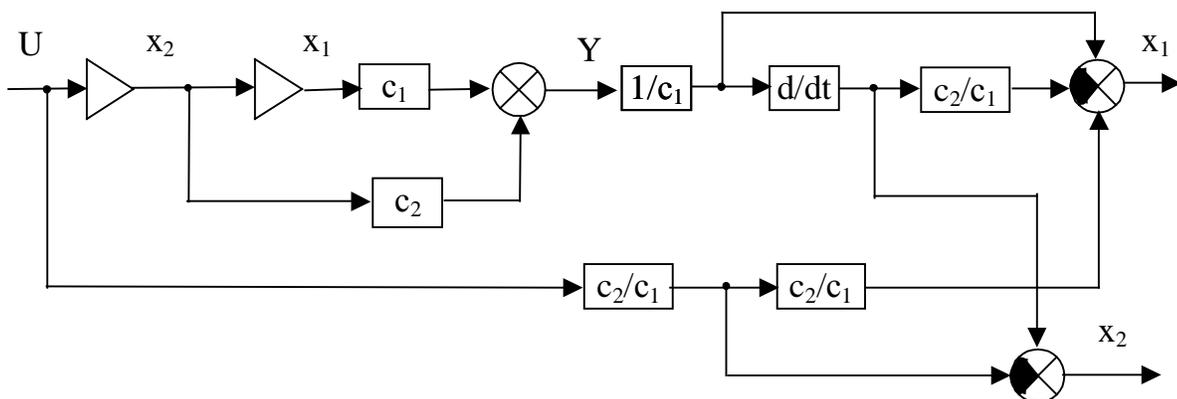


Рис. 4. Схема восстановления координат объекта (46)

2.3.3. Объект второго порядка с обратными связями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = U - a_1 x_1 - a_2 x_2, \\ Y = c_1 x_1 + c_2 x_2. \end{cases} \quad (53)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1 \quad c_2). \quad (54)$$

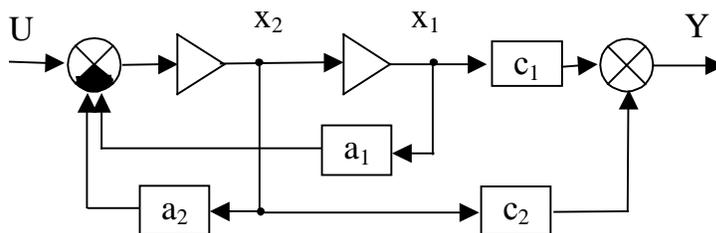


Рис. 5. Система второго порядка с обратными связями

Матрица наблюдаемости:

$$H = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -a_1 c_2 \\ c_2 & c_1 - a_2 c_2 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

ее определитель

$$\det(H) = c_1^2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2. \quad (56)$$

При  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$   $\det(H) = a_1 c_2^2$  и система наблюдаема при любом ненулевом  $a_1$ . Координата  $x_2$  определяется просто:

$$x_2 = \frac{1}{c_2} Y. \quad (57)$$

Определим  $x_1$ , продифференцировав уравнение выхода:

$$\dot{Y} = c_2 \dot{x}_2 = c_2 U - c_2 a_1 x_1 - a_2 Y, \quad (58)$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{a_1} U - \frac{a_2}{c_2 a_1} Y - \frac{1}{c_2 a_1} \dot{Y}. \quad (59)$$

При  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$   $\det(H) = c_1^2$  и система полностью наблюдаема при любых  $a_1, a_2$ :

$$x_1 = \frac{1}{c_1} Y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{1}{c_1} \dot{Y}. \quad (60)$$

При  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$  в общем случае система наблюдаема, однако возможен вариант

$$\det(H) = c_1^2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2 = 0, \quad (61)$$

что имеет место при  $a_1 = \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{c_1}{c_2} a_2$ , и в этом случае система не наблюдаема.

Продифференцировав уравнение выхода, получим:

$$\dot{Y} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = c_1 x_2 + c_2 U - c_2 a_1 x_1 - c_2 a_2 x_2, \quad (62)$$

или

$$\dot{Y} = c_2 U - c_2 a_1 x_1 + (c_1 - c_2 a_2) x_2. \quad (63)$$

Решая совместно уравнение (63) и уравнение выхода, получим

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c_1 - c_2 a_2}{\det(H)} Y - \frac{c_2}{\det(H)} \dot{Y} + \frac{c_2^2}{\det(H)} U, \\ x_2 = \frac{c_2 a_1}{\det(H)} Y + \frac{c_1}{\det(H)} \dot{Y} - \frac{c_1 c_2}{\det(H)} U. \end{cases} \quad (64)$$

Схема восстановления координат приведена на рис. 6 (сам объект не показан).

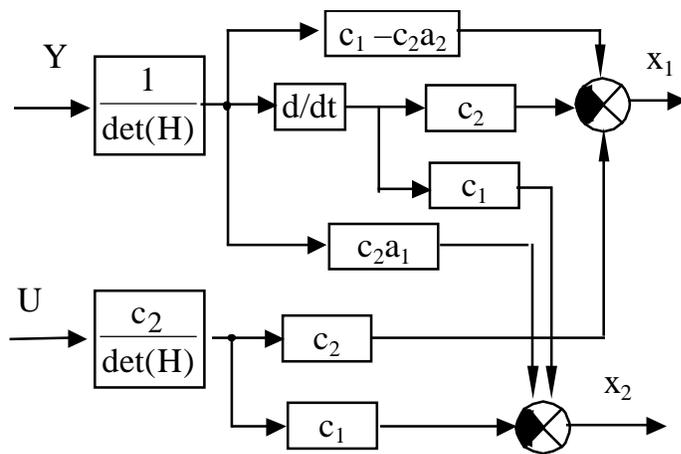


Рис. 6. Схема восстановления координат для объекта (53)

## 2.4. Задание. Проверка управляемости и наблюдаемости объекта. Построение дифференцирующих цепей для восстановления координат объекта

2.4.1. С помощью критерия Калмана определить управляемость объекта. Проверить правильность расчета, получив в Matlab матрицу управляемости объекта с помощью функции `ctrb` и определив ее ранг с помощью функции `rank`.

2.4.2. С помощью критерия Калмана определить наблюдаемость объекта. Проверить правильность расчета, получив в Matlab матрицу наблюдаемости объекта с помощью функции `obsv` и определив ее ранг с помощью функции `rank`.

При неполной наблюдаемости выделить наблюдаемые и ненаблюдаемые координаты объекта и определить его обнаруживаемость.

3.4.3. Рассчитать и построить дифференцирующие цепи для восстановления координат объекта (при неполной наблюдаемости – наблюдаемых координат). Построить в Simulink дифференцирующие цепи и проверить их работоспособность.

## 3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ САУ ПО ПРИНЦИПАМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ СТАЦИОНАРНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ

### 3.1. Модальное управление

Модальное управление – управление с помощью жестких обратных связей по переменным состояниям.

Рассмотрим пример – объект второго порядка с полностью измеряемым вектором состояния:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot U, \quad Y = X. \quad (65)$$

Сформируем управление по закону

$$U = g - KY = g - KX, \quad (66)$$

где  $g$  – задающий сигнал;  $K = (k_1 \ k_2)$  – вектор коэффициентов обратных связей по переменным состояния.

Схема системы управления представлена на рис. 7.

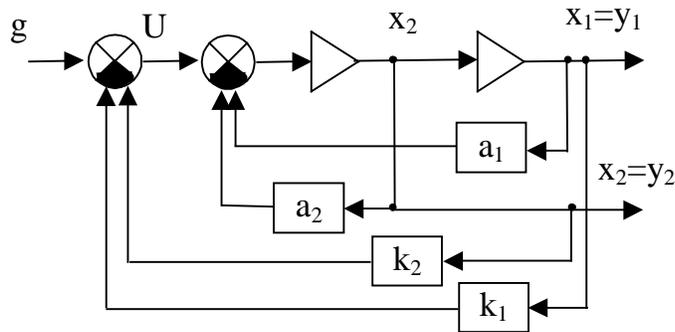


Рис. 7. Система модального управления

Из схемы видно, что обратные связи регулятора действуют параллельно обратным связям самого объекта, и, выбрав их коэффициенты соответствующим образом, можно получить любую наперед заданную динамику системы.

Действительно, уравнение состояний объекта с учетом модального регулятора будет иметь вид:

$$\dot{X} = AX + B(g - KX) = (A - BK)X + Bg. \quad (67)$$

Матрица  $A - BK$  определяет динамику системы и при проектировании обратных связей может быть задана как желаемая. В данном случае

$$A_{\text{ж}} = A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Ее характеристический полином – знаменатель передаточной функции системы

$$\det(A_{\text{ж}}) = \det(pE - A + BK) = p^2 + (a_2 + k_2)p + (a_1 + k_1). \quad (69)$$

В рассматриваемом примере объект был представлен в каноническом виде, поэтому матрица состояний системы и ее характеристический полином имеют «простой» вид. Для такого представления без труда можно определить вектор коэффициентов обратных связей регулятора, задаваясь, например, коэффициентами полинома, обеспечивающими требуемую динамику.

В реальности же координаты-состояния объекта имеют определенную физическую природу и не обязательно связаны между собой как фазовые (процедурами дифференцирования–интегрирования). Поэтому матрицы объекта  $A, B$ , матрица  $A_{\text{ж}}$  и ее характеристический полином будут иметь более сложный вид. В общем случае компоненты вектора  $K$  находятся из решения системы из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными ( $n$  – порядок системы, число заданных коэффициентов желаемого характеристического полинома и компонентов вектора  $K$ ). При этом, если объект управляем (матрицы  $A, B$  управляемы), соответствующим выбором вектора  $K$  всегда можно обеспечить любую динамику системы, задаваясь собственными числами матрицы  $A_{\text{ж}} = A - BK$ .

На практике часто обратные связи реализуются не по всем координатам объекта, и, следовательно, имеется возможность «управлять» только частью корней характеристического полинома системы.

### 3.2. Стационарный наблюдатель

Основная проблема, связанная с применением принципа модального управления, состоит в том, что в реальных системах, как правило, не все переменные состояния объекта управления поддаются непосредственному измерению.

Если необходима информация о всех переменных состояниях, не измеряемые непосредственно переменные должны быть восстановлены по информации о входах и выходах объекта.

Одно из возможных решений проблемы восстановления координат – применение дифференцирующих цепей – рассмотрено в п. 3.2. Недостатки такого подхода – практическая сложность реализации операции дифференцирования и незащищенность полученной системы от помех.

Другое решение состоит в применении специальных динамических устройств – стационарных наблюдателей. Наблюдатель подключается и функционирует параллельно объекту управления, при этом его переменные-координаты предоставляют системе информацию о координатах самого объекта. Процесс восстановления координат (идентификации объекта) происходит не мгновенно (например, при включении системы), а занимает некоторое время, которое требуется для того, чтобы координаты наблюдателя приблизились к координатам объекта.

*Стационарный наблюдатель полного порядка* описывается уравнением

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU + G(Y - C\hat{X}), \quad (70)$$

где  $\hat{X}$  – вектор переменных наблюдателя (для наблюдателя полного порядка его размерность совпадает с размерностью вектора состояний объекта  $X$ );  $A, B, C$  – матрицы описания объекта (таким образом, наблюдатель строится для определенного объекта);  $Y$  – вектор выхода объекта;  $G$  – матрица, задающая динамику процесса идентификации.

Как видно из уравнения (70), наблюдатель в основном имеет ту же структуру, что и объект управления. При равенстве выходов наблюдателя и объекта  $\hat{Y} = C\hat{X} = Y$  динамика наблюдателя полностью аналогична динамике объекта (так как они описываются одними и теми же матрицами  $A, B$ ).

Настройка наблюдателя на объект обеспечивается за счет введения дополнительных сигналов  $G(Y - C\hat{X})$ , пропорциональных разнице выходных сигналов наблюдателя и объекта.

Ошибка восстановления вектора  $X$  в процессе идентификации:

$$e = X - \hat{X}, \quad (71)$$

скорость ее изменения:

$$\dot{e} = \dot{X} - \dot{\hat{X}} = A(X - \hat{X}) - GC(X - \hat{X}) = (A - GC)e. \quad (72)$$

Чтобы наблюдатель был устойчивой системой ( $e \rightarrow 0$ ), необходимо, чтобы матрица  $(A - GC)$  была гурвицевой матрицей. Если объект наблюдаем (матрицы  $A, C$  наблюдаемы), выбором вектора  $G$  можно обеспечить любую, наперед заданную динамику восстановления вектора  $X$ . В противном случае не все собственные числа матрицы  $A - GC$  доступны «управлению» выбором вектора  $G$ , и, следовательно, в полной мере задать динамику процесса идентификации невозможно.

В системе модального управления вектор  $G$  выбирают исходя из того, чтобы скорость процесса идентификации превосходила скорость процесса управления.

Выше рассмотрен наблюдатель полного порядка. В реальных системах более широкое применение находят так называемые *редуцированные* наблюдатели [1], порядок которых меньше порядка объекта. Редуцированные наблюдатели восстанавливают только часть вектора состояний объекта – те его координаты, которые не доступны измерению непосредственно.

### 3.3. Система второго порядка с модальным управлением и идентификацией вектора состояний (пример)

Объект управления

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U, \\ Y = (c_1 \quad c_2) X. \end{cases} \quad (73)$$

Стационарный наблюдатель полного порядка:

$$\dot{\hat{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \hat{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} (Y - (c_1 \quad c_2) \hat{X}). \quad (74)$$

Модальное управление:

$$U = g - (k_1 \quad k_2) \times \hat{X}. \quad (75)$$

Структурная схема системы приведена на рис. 8.

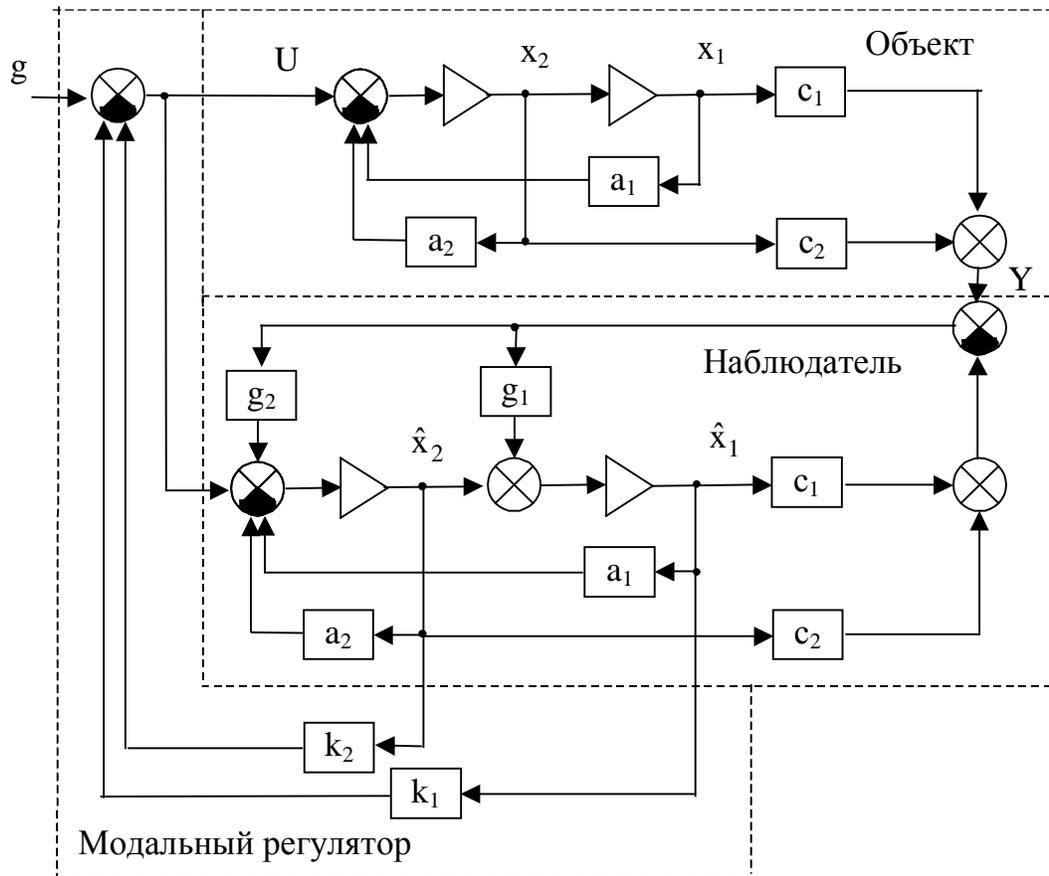


Рис. 8. Структурная схема системы модального управления с наблюдателем

### 3.4. Расчет модального регулятора и наблюдателя

Расчет модального регулятора и наблюдателя сводится к выбору вектора  $K$  и матрицы  $G$ , который обычно осуществляется таким образом, чтобы характеристические полиномы систем управления  $\det(pE - A + BK)$  и идентификации  $\det(pE - A + GC)$  имели заданное распределение корней и соответствовали некоторой стандартной форме.

Стандартная форма полинома имеет вид:

$$H(p) = p^n + a_n \omega_0 p^{n-1} + \dots + a_2 \omega_0 p^{n-1} + a_1 \omega_0^n, \quad (76)$$

где  $a_0 - a_n$  – коэффициенты полинома, определяющие «качество» протекания процессов,  $\omega_0$  – параметр, определяющий время протекания процессов.

Коэффициенты полинома стандартной формы выбираются таким образом, чтобы обеспечить заданное распределение его корней. Часто для этой цели прибегают к известным вариантам распределения, среди которых широко используются биномиальное распределение и распределение по Баттерворту [1].

1) Биноминальное распределение.

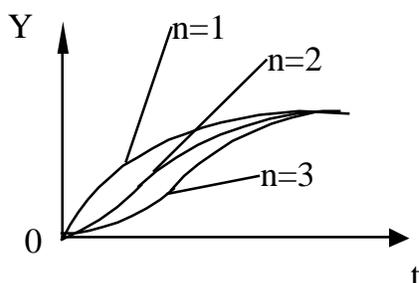
Стандартная форма полинома в данном случае имеет вид:

$$H(p) = (p + \omega_0)^n, \quad (77)$$

где  $n$  – порядок системы.

Все корни полинома действительные и равны:  $-\omega_0$ .

Качественный характер переходных процессов при ступенчатом воздействии для системы с передаточной функцией  $W=1/H(p)$  показан на рис. 9.



$$n=1: H(p) = p + 1\omega_0$$

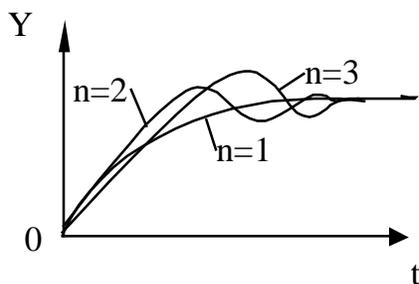
$$n=2: H(p) = p^2 + 2\omega_0 p + 1\omega_0^2$$

$$n=3: H(p) = p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + 1\omega_0^3$$

Рис. 9. Биноминальное распределение

2) Распределение по Баттерворту.

Все корни характеристического полинома для данного распределения лежат на полуокружности радиуса  $\omega_0$  в левой части комплексной плоскости. Полиномы для  $n=1,2,3$  и переходные процессы при ступенчатом входном воздействии для системы с передаточной функцией  $W=1/H(p)$  имеют вид, показанный на рис. 10.



$$n=1: H(p) = p + \omega_0$$

$$n=2: H(p) = p^2 + 1,4\omega_0 p + \omega_0^2$$

$$n=3: H(p) = p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3$$

Рис. 10. Распределение по Баттерворту

### 3.5. Задание. Проектирование системы модального управления с идентификацией вектора состояния объекта с помощью стационарного наблюдателя

3.5.1. Рассчитать коэффициенты векторов  $K$  и  $G$  такие, чтобы:  
динамика системы приближалась к динамике, заданной характеристическим полиномом с распределением корней по Баттерворту с  $\omega_0 = 1$ ;  
динамика процесса идентификации определялась характеристическим полиномом биномиальной формы с  $\omega_0 = 2$ .

В Matlab проверить правильность расчета  $K$  и  $G$ , применяя функцию `acker` из пакета `Control`:

$$K = \text{acker}(A, B, \text{eig1}), \quad G = (\text{acker}(A', C', \text{eig2}))'$$

где `eig1`, `eig2` – желаемые векторы собственных чисел матриц  $A-BK$  и  $A-GC$  соответственно.

3.5.2. Построить полную структурную схему системы.

3.5.3. С помощью Simulink провести имитационное моделирование системы, в ходе которого получить переходные процессы по отработке ею управляющего воздействия, а также рассогласований между координатами объекта и наблюдателя.

## 4. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

### 4.1. Факторы-предпосылки использования адаптивного подхода

Адаптивными системами автоматического управления называются системы, управляющие устройства которых способны перестраиваться таким образом, чтобы обеспечить требуемые показатели качества функционирования системы с учетом изменяющихся свойств и условий работы управляемого объекта.

Развитие адаптивного подхода при построении систем управления обусловлено рядом факторов:

1. *Нестационарность объектов управления* – изменение их параметров во времени. Например, параметры электромеханических систем с упругостью, в частности роботов-манипуляторов (постоянные времени, коэффициенты передачи) изменяются в десятки раз в зависимости от положения рабочих органов; параметры систем управления самолетами изменяются в сотни раз в зависимости от высоты и скорости. В таких условиях применение классической структуры системы управления с ПИД-регулятором, параметры которого постоянны и настроены на определенные параметры объекта управления, оказывается невозможным.

2. *Существенная нелинейность объектов управления.* Классические методы построения систем управления работают в основном для линейных объектов. Если объект управления описывается нелинейными зависимостями, их линеаризуют в рабочей области функционирования. При экспериментальном определении математического описания объекта, последнее также, как правило, выбирается в виде линейных уравнений. Однако нелинейность некоторых

объектов оказывается настолько существенной, что пренебрежение ею приводит к существенной потере качества управления, а в самых «тяжелых» случаях – и к потере устойчивости. Особенно это касается объектов, координаты которых в процессе функционирования системы изменяются в широких пределах (например, в следящих системах). Адаптивный подход предполагает подавление нелинейных свойств объекта и, таким образом, искусственное приведение его к линейному.

3. *Труднопредсказуемые возмущения.* В некоторых случаях на этапе проектирования системы трудно или невозможно предусмотреть все возмущающие воздействия, которые будут действовать на объект управления. Поэтому «классические» регуляторы с постоянными параметрами не в состоянии обеспечить заданное качество управления.

В самонастраивающихся системах параметры регулятора автоматически перестраиваются при изменениях параметров объекта и внешних возмущений. При этом выделяют два вида настройки регуляторов:

параметрическая (настройка коэффициентов);

сигнальная (ввод в управление дополнительных сигналов).

#### 4.2. Представление объекта в задачах адаптивного управления.

Нестационарный нелинейный объект может быть описан уравнениями вида

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, U, f, t) = (A + a(X))X + (B + b(X))U + f, \\ Y = CX, \end{cases} \quad (78)$$

где  $A$  и  $B$  – нестационарные матрицы, определяющие линейную составляющую поведения объекта;  $a(X)$ ,  $b(X)$  – нелинейные составляющие описания;  $f$  – возмущения;  $C$  – стационарная матрица выхода (состоящая из коэффициентов передачи датчиков).

У такого объекта выделяют стационарную часть и рассогласования:

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 U + \sigma + \varphi, \quad (79)$$

где  $A_0$ ,  $B_0$  – стационарные матрицы,

$$\sigma = (A - A_0)X + (B - B_0)U \quad (80)$$

– параметрические рассогласования,

$$\varphi = f + a(X)X + b(X)U \quad (81)$$

– сигнальные рассогласования (включают рассогласования вследствие нелинейности объекта).

В адаптивных системах, рассмотренных ниже, описание объекта искусственно представляется таким, что матрицы  $A_0$ ,  $B_0$  описывают не собственно стационарную часть объекта, а желаемое его поведение – эталонную динамику.

ку, которой нужно подчинить объект. Поэтому задача адаптации – за счет выбора соответствующего управления подавить рассогласования  $\sigma$  и  $\varphi$ .

В настоящем пособии рассматривается два типа адаптивных систем, отличающихся принципами построения:

*с эталонной моделью;*

*с настраиваемой моделью(с непрямой адаптацией).*

### 4.3. Адаптивная система с эталонной моделью (АСЭМ)

Адаптивная система (рис. 11) содержит блок ЭМ, реализующий функции эталонной модели – динамической системы, поведение которой выбирается в качестве образца (эталона) для поведения объекта управления. Блок АА реализует алгоритмы адаптации, вырабатывая сигналы параметрической ПН и сигнальной СН настроек адаптивного регулятора АР на основании сравнения координат объекта и эталонной модели.

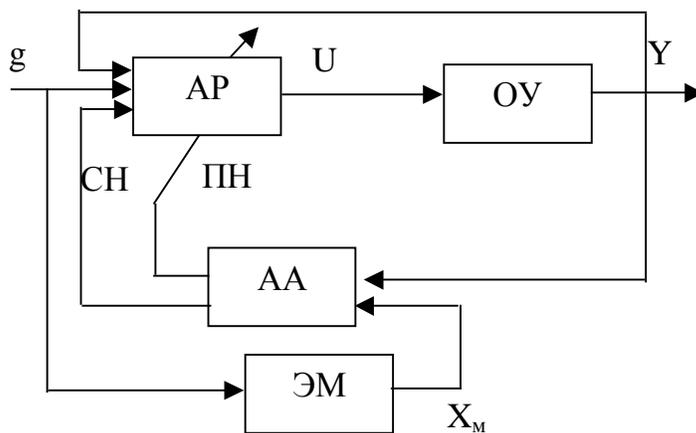


Рис. 11. Адаптивная система с эталонной моделью

Эталонная модель описывает желаемую динамику системы:

$$\dot{X}_M = A_M X_M + B_M g. \quad (82)$$

Матрицы эталонной модели  $A_M$  и  $B_M$  имеют обычно размеры, равные размерам матриц  $A$  и  $B$  «линейной составляющей» поведения объекта. В некоторых случаях эталонная модель может иметь меньший порядок.

Адаптивный регулятор формирует управляющее воздействие по закону

$$U = K_a X + K_b (g + z), \quad (83)$$

где  $K_a$ ,  $K_b$  – матрицы настраиваемых параметров;  $z$  – сигнальная настройка.

В описании объекта (79) принимаем  $A_0 = A_M$ ,  $B_0 = B_M$ , тогда

$$\dot{X} = A_M X + B_M U + (A - A_M)X + (B - B_M)U + \varphi, \quad (84)$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = A_M \mathbf{x} + B_M \mathbf{g} + (A + BK_a - A_M) \mathbf{x} + (BK_b - B_M) \mathbf{g} + BK_b z + \varphi. \quad (85)$$

Из (85) видно: чтобы динамика объекта приближалась к динамике эталонной модели, необходимо, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(A + BK_a - A_M) \mathbf{x} + (BK_b - B_M) \mathbf{g} + BK_b z + \varphi] = 0 \quad (86)$$

Выражение (86), таким образом, определяет цель адаптации. Настройки регулятора  $K_a$ ,  $K_b$ ,  $z$  по окончании процесса адаптации должны принять значения, обеспечивающие выполнение этой цели. При определенных условиях цель адаптации достигается в следующем виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (A + BK_a) = A_M, \quad (87)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (BK_b) = B_M, \quad (88)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (BK_b z) = \varphi. \quad (89)$$

Выражения (87–89) описывают т.н. *идентифицирующие свойства настроек* адаптивного регулятора. По настройкам регулятора можно судить о параметрических и сигнальных возмущениях, воздействующих на объект. При выполнении (87,88) по окончании процесса адаптации коэффициенты параметрической настройки примут значения  $K_a^0$  и  $K_b^0$  такие, что

$$BK_a^0 = A_M - A, \quad (90)$$

$$BK_b^0 = B_M. \quad (91)$$

Естественно, структуры матриц  $A$ ,  $A_M$  и  $B$ ,  $B_M$  должны быть такими, чтобы уравнения (90), (91) имели решения относительно  $K_a^0$  и  $K_b^0$ . В этом состоит т.н. *условие согласованности* модели и объекта. Аналогичное условие может быть записано и для сигнальной настройки. Однако в силу специфики сигнального алгоритма (разрывное управление) оно имеет несколько иной вид.

Синтез системы состоит в отыскании алгоритмов адаптации, обеспечивающих выполнение цели адаптации при всех возможных изменениях параметров объекта и возмущениях, действующих на него. Для решения этой задачи применяются методы теории устойчивости нелинейных систем, в том числе метод Ляпунова, метод гиперустойчивости и др. Одно из решений [2] предлагается в виде:

$$K_a = B_M^T P e X^T R_a, \quad (92)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_b = \mathbf{B}_M^T \mathbf{P} e (g + z) \mathbf{R}_b, \quad (93)$$

$$z = h \cdot \text{sign}(\mathbf{B}_M^T \mathbf{P} e), \quad (94)$$

где  $e$  – рассогласование между эталонной моделью и объектом:

$$e = \mathbf{X}_M - \mathbf{X}; \quad (95)$$

матрица  $\mathbf{P}$  находится из решения уравнения (уравнения Ляпунова):

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_M + \mathbf{A}_M^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}, \quad (96)$$

где  $\mathbf{Q}$  – диагональная положительная матрица;  $\mathbf{R}_a$ ,  $\mathbf{R}_b$  – диагональные положительные матрицы коэффициентов параметрической настройки, они определяют скорость настройки и выбираются на этапе имитационного моделирования;  $h$  – диагональная положительная матрица коэффициентов сигнальной настройки. Методика определения  $h$  приводится в работах [2], [3]. Она предполагает нахождение минимально допустимого значения  $h$ . Здесь же ограничимся утверждением, что для устойчивости системы и достижения цели адаптации значение  $h$  должно быть «достаточно большим». Оно будет выбираться на этапе имитационного моделирования.

Таким образом, коэффициенты параметрической настройки формируются по интегральному закону, а сигнальная настройка – по знаковому алгоритму. По выполнению цели адаптации (86) сигнальная настройка функционирует в скользящем режиме с теоретически бесконечной частотой переключения. Для ограничения частоты переключения на практике элемент релейного типа, вырабатывающий сигнал  $z$ , должен обладать некоторой зоной нечувствительности.

Алгоритмы настроек (92–94) обеспечивают выполнение цели адаптации (86), но не гарантируют проявления идентифицирующих свойств (87–89). Как показано в [2], идентифицирующие свойства настроек проявляются только при «достаточно полном» частотном содержании входного сигнала  $g(t)$ .

Выше рассмотрена адаптивная система комбинированного типа. В реальных системах с эталонной моделью может применяться как только параметрическая, так и только сигнальная настройка. Использование лишь ПН целесообразно, когда параметры объекта изменяются в широких пределах, но скорость их изменения незначительна. Если параметры изменяются в небольшом диапазоне, но с высокой скоростью, либо объект подвержен сигнальным рассогласованиям (нелинейности и возмущения), предпочтительнее использование СН. В наиболее «тяжелых» случаях используется оба типа настройки; при этом «быстрые» рассогласования подавляются сигнальной настройкой, а «медленные» – параметрической (при этом сигнальная настройка не реагирует на небольшие рассогласования благодаря тому, что в алгоритм вводится зона нечувствительности).

В общем случае сигнальная настройка более универсальна благодаря простоте реализации и более высокому быстродействию. Однако ее возможности ограничены способностью регулирующих органов, непосредственно воздействующих на объект, формировать управляющие сигналы в скользящем режиме с заданной амплитудой сигнала. В реальных условиях всегда ограничены как уровень сигнала на выходе релейного блока, так и частота его переключения. В этом состоит один из недостатков системы с эталонной моделью. В системах с непрямой адаптацией он преодолевается благодаря тому, что сигнал сигнальной настройки используется только для управления настраиваемой моделью, а для управления объектом применяется его сглаженный «эквивалент».

#### 4.4. Адаптивная система с настраиваемой моделью (АСНМ)

В данной системе присутствует т.н. настраиваемая модель – динамическая система, поведение которой в результате процесса адаптивной идентификации «приводится» к поведению объекта. Настройка модели на объект производится путем генерации адаптивным регулятором сигналов управления моделью  $\tilde{U}$ . Эти сигналы несут в себе информацию, позволяющую определить управление  $U$  самим объектом, обеспечивающее некоторую заданную его динамику.

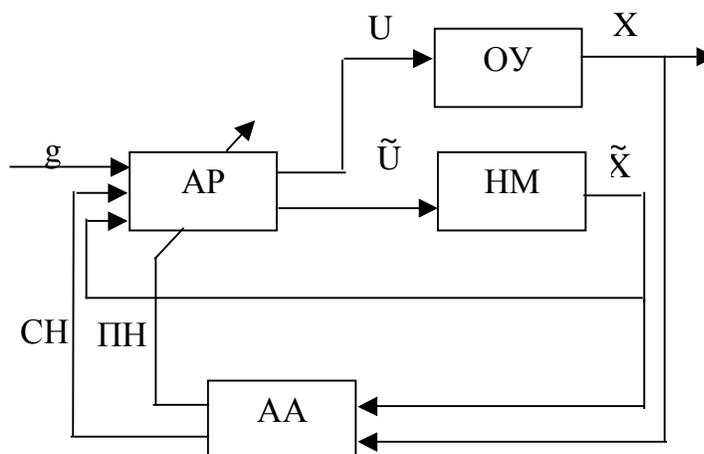


Рис. 12. Адаптивная система с настраиваемой моделью

Настраиваемая модель строится по структуре адаптивного наблюдателя:

$$\dot{\tilde{X}} = A_M \tilde{X} + \tilde{G}(Y - C\tilde{X}) + B_M \tilde{U}, \quad (97)$$

где  $\tilde{X}$  – вектор состояний модели (обычно той же размерности, что и вектор  $X$  объекта;  $Y$  – выход объекта;  $C$  – матрица выхода объекта;  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $\tilde{G}$  – матри-

цы модели, задающие ее динамику (о их выборе ниже);  $\tilde{U}$  – управление моделью, формируемое по закону:

$$\tilde{U} = U + z + K_a \tilde{X} + K_b U, \quad (98)$$

где  $K_a, K_b$  – матрицы коэффициентов параметрической настройки модели;  $z$  – сигнальная настройка модели;  $U$  – сигнал управления объектом.

Подставляя (98) в (97), получим:

$$\dot{\tilde{X}} = A_M \tilde{X} + \tilde{G}(Y - C\tilde{X}) + B_M U + B_M K_a \tilde{X} + B_M K_b U + B_M z. \quad (99)$$

Анализируя (99), можно заметить, что первые три слагаемые правой части аналогичны таковым для стационарного наблюдателя, построенного для некоторого объекта с динамикой, задаваемой парой матриц  $A_M, B_M$  (эталонной динамикой). Три последние слагаемые обеспечивают настройку модели в процессе адаптивной идентификации.

Представим описание объекта управления в виде:

$$\dot{X} = AX + BU + \varphi = AX + B_M U + (B - B_M)U + \varphi. \quad (100)$$

Вычитая (99) из (100) после некоторых преобразований (применяя прием  $+A\tilde{X} - A\tilde{X}$ ), получим уравнение для ошибки идентификации:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} = \dot{X} - \dot{\tilde{X}} = & (A - \tilde{G}C)(X - \tilde{X}) + \\ & + (A - A_M - B_M K_a)\tilde{X} + (B - B_M - B_M K_b)U + \varphi - B_M z. \end{aligned} \quad (101)$$

Выполнение цели идентификации

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}(t) = 0 \quad (102)$$

обеспечивается, если матрица  $A - \tilde{G}C$  гурвицева, а сумма четырех последних слагаемых (101) стремится к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(A - A_M - B_M K_a)\tilde{X} + (B - B_M - B_M K_b)U + \varphi - B_M z] = 0. \quad (103)$$

Выражение (103) определяет цель адаптации.

В частности при определенных условиях цель адаптации достигается при выполнении следующих соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_M K_a = A - A_M, \quad (104)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_M K_b = B - B_M, \quad (105)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_M z = \varphi. \quad (106)$$

Аналогично (87–89) для АСЭМ выражения (104–106) описывают идентифицирующие свойства настроек АСНМ.

Таким образом, для обеспечения процесса адаптивной идентификации необходимо выбрать матрицу  $\tilde{G}$ , которая для любых значений матрицы  $A$  гарантирует гурвицевость матрицы  $A - \tilde{G}C$ , а также определить алгоритмы настроек  $K_a$ ,  $K_b$  и  $z$ , обеспечивающие выполнение (103).

Данные алгоритмы синтезируются подобно (92–94). Один из вариантов имеет вид:

$$\mathcal{K}_a = B_M^T P e \tilde{X}^T R_a, \quad (107)$$

$$\mathcal{K}_b = B_M^T P e U R_b, \quad (108)$$

$$z = h \cdot \text{sign}(B_M^T P e). \quad (109)$$

Алгоритмы (107–109) в основном аналогичны (92–94), за исключением того, что при определении матрицы  $P$  в (96) необходимо  $A_M$  заменить на  $A_M - \tilde{G}C$  [2]. Так же, как и для системы с эталонной моделью алгоритмы обеспечивают выполнение (104–106) при «достаточно полном» частотном содержании входного сигнала  $g(t)$ .

Предположим, что цель адаптивной идентификации (103) достигнута и  $\tilde{X} = X$ . Тогда уравнение объекта примет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= A_M X + B_M U + (A - A_M)X + (B - B_M)U + \varphi = \\ &= A_M X + B_M U + B_M K_a \tilde{X} + B_M K_b U + B_M z. \end{aligned} \quad (110)$$

Чтобы динамика объекта была равна эталонной, заданной матрицами  $A_M$ ,  $B_M$ , необходимо сформировать такое управление  $U$ , чтобы сумма трех последних слагаемых (110) обращалась в нуль. С этой целью в управление, помимо задающего сигнала  $g$ , вводится т.н. компенсационный сигнал  $\mu$ :

$$U = g + \mu. \quad (111)$$

Учитывая (111), перепишем (110) в виде:

$$\mathcal{X} = A_M X + B_M g + B_M \mu + B_M K_a \tilde{X} + B_M K_b U + B_M z. \quad (112)$$

Из (112) определяется  $\mu$ , удовлетворяющий поставленной цели:

$$\mu = -K_a \tilde{X} - K_b U - \mu_c, \quad (113)$$

где  $\mu_c$  – фильтрованная оценка сигнала  $z$ . Так как сигнальная настройка формируется по знаковому алгоритму, с целью исключения скользящего режима из управления объектом сигнал  $z$  фильтруется (осредняется) фильтром с малой постоянной времени  $\tau$ . При этом чем меньше  $\tau$ , тем точнее компенсация. Од-

нако при этом ухудшается процесс адаптивной идентификации, так как в пределе при  $\tau=0$  сигнал  $\mu_c$  компенсирует сигнал  $z$  [2].

В АСНМ, как и в АСЭМ, может использоваться только параметрическая, только сигнальная, или комбинированная настройка адаптивного регулятора. Рекомендации по выбору типа настройки те же что и для АСЭМ. Однако, поскольку в АСНМ скользящий режим переносится в «слаботочные» цепи настраиваемой модели, ограничения на управляющий сигнал объекта уже не препятствуют использованию простой и эффективной сигнальной настройки. Поэтому наибольшее распространение получили именно АСНМ с сигнальной настройкой.

#### **4.5. Идентификация объекта в адаптивных системах**

Для построения алгоритмов адаптации в АСЭМ и АСНМ необходима информация обо всех координатах объекта. В реальных системах, как правило, не все координаты объекты доступны для измерения. Для восстановления вектора  $X$  в адаптивных системах применяются следующие решения:

- 1) дифференцирующие цепи;
- 2) стационарные наблюдатели;
- 3) адаптивные наблюдатели.

Дифференцирующие цепи применяются в «простейших» случаях, когда требуется оценка одной, максимум, двух переменных.

При использовании стационарных наблюдателей возникает проблема выбора его параметров, так как объект управления является в общем случае нелинейным и нестационарным.

Если объект управления характеризуется небольшим диапазоном изменения параметров, при построении наблюдателя применяются «усредненные» параметры объекта  $A_0$ ,  $B_0$ , а матрица  $G$  рассчитывается таким образом, чтобы собственные числа матрицы  $A_0 - GC$  имели отрицательные вещественные части, как можно большие по модулю. Это достигается выбором больших по модулю значений элементов матрицы  $G$ . В [2] показано, что использование «больших усилений» позволяет улучшить идентификационные свойства стационарного наблюдателя для нестационарного и нелинейного объекта.

Другой подход заключается в том, что при построении наблюдателя используются матрицы эталонного движения  $A_M$ ,  $B_M$ . Для «правильного» функционирования наблюдателя в этом случае необходимо достижение цели адаптации и равенство поведений объекта и эталонной модели (только в этом случае наблюдатель может вырабатывать правильную оценку координат объекта). С другой стороны, для достижения цели адаптации алгоритмами формирования настроек уже нужно иметь точную оценку вектора состояния  $X$ . Указанное противоречие приводит к тому, что система с наблюдателем, настроенным на модель, оказывается устойчивой только в некотором диапазоне рассогласований (устойчивой в малом). Для обеспечения работоспособности системы необходимо выбором коэффициентов модели и стационарного наблюдателя обеспечить баланс между скоростями процессов адаптации и иден-

тификации. Необходимые условия устойчивости в данном случае сформулированы следующим образом [3]: «быстрая адаптация» (соотношение между временем адаптации и управления  $t_A = (0,2..0,3)t_Y$ ) и частотный сдвиг наблюдателя относительно объекта на октаву вправо:

$$\min_j \operatorname{Re}(-\lambda_j) \geq 2 \max_i \operatorname{Re}(-\lambda_i), \quad (114)$$

где  $\lambda_i, \lambda_j$  – собственные числа матриц  $A_M$  и  $A - GC$ .

На практике выполнение (114) можно обеспечить соответствующим выбором вектора  $G$ .

Адаптивные наблюдатели имеют структуру, аналогичную структуре настраиваемой модели (97). Отличие состоит в алгоритмах их настройки, которые в отличие от алгоритмов настройки НМ (107–109) требуют информацию только об измеряемых координатах объекта. Обычно адаптивные наблюдатели имеют только сигнальную настройку. Например, в [2,3] предлагается следующая структура:

$$\dot{\hat{X}} = (A_M - GC) \cdot \hat{X} + Gy + B_M g + z. \quad (115)$$

Сигнальная настройка наблюдателя  $z$  формируется, например, по следующему алгоритму [2]:

$$z = hP^{-1}C^T \operatorname{sign}(C\hat{e}), \quad (116)$$

где матрица  $P$  определяются так же, как и в алгоритмах (107–109).

В АСНМ такой наблюдатель может выполнять функцию настраиваемой модели.

#### 4.6. Задание. Расчет и моделирование адаптивных систем управления

В заданиях, представленных ниже, в целях упрощения предполагается, что вектор состояния объекта так или иначе доступен для построения алгоритмов адаптации. Факультативно могут быть рассмотрены системы с восстановлением вектора  $X$  тем или иным способом. При этом матрица  $C$  объекта может быть принята той же, что получена в п.1.6, либо задана преподавателем.

*4.6.1. Моделирование адаптивной системы с эталонной моделью и параметрической настройкой адаптивного регулятора.*

Рассматриваемая система описывается уравнениями:

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 U + (A - A_0)X + \varphi, \quad Y = X; \quad (117)$$

$$\dot{X}_M = A_M X_M + B_M g; \quad (118)$$

$$U = K_a X + K_b g; \quad (119)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_a = \mathbf{B}_M^T \mathbf{P} e \mathbf{X}^T \mathbf{R}_a, \\ \dot{\mathbf{X}}_b = \mathbf{B}_M^T \mathbf{P} e g \mathbf{R}_b, \quad e = \mathbf{X}_M - \mathbf{X}. \end{cases} \quad (120)$$

Элементы системы:

*Объект управления* (117) в общем случае нестационарный и нелинейный (нестационарна только матрица  $\mathbf{A}$ ).  $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$  – стационарные матрицы, значения которых принять равными определенным в п.1.6.

«Медленные» изменения параметров объекта, не сказывающиеся на его поведении в процессе регулирования, моделируются изменением коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$  перед расчетом (имитацией). «Быстрые» изменения осуществляются в ходе имитации. Они могут происходить как непрерывно, так и скачкообразно.

Сигнальное рассогласование  $\varphi$  можно задать, например, в виде:

$$\varphi = \mathbf{a}(\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_2 \sin(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (121)$$

где  $k_1, k_2$  будут определять влияние нелинейности и возмущения (последнее в данном случае задано в виде синусоидального сигнала небольшой частоты  $\omega$ ).

Модель описанного объекта в Simulink имеет вид (рис.13).

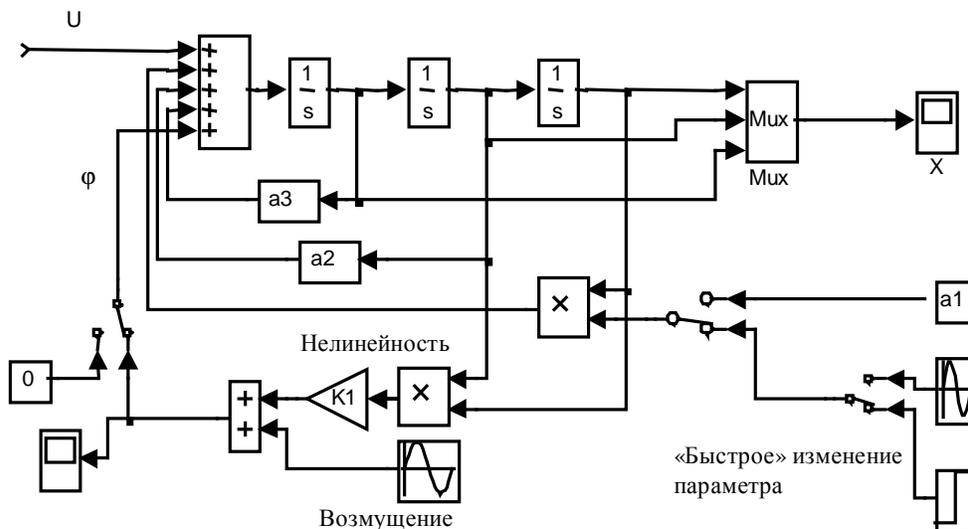


Рис. 13. Модель объекта в Simulink

*Эталонная модель* (118). Матрицы модели  $\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M$  задаются, как и для объекта в каноническом виде, причем собственные числа матрицы  $\mathbf{A}_M$  распределены по Баттерворту с  $\omega_0 = 1$  (см. п. 3.5). В Simulink эталонную модель можно представить в виде одного блока State–Space.

*Адаптивный регулятор* (119) в отличие от (83) имеет только параметрическую настройку.

*Алгоритмы адаптации* (120). Матрица  $P$  рассчитывается согласно (96) по матрицам  $A_M$  и  $Q$  ( $Q$  задается диагональной с положительными коэффициентами). Для расчета  $P$  можно воспользоваться библиотечной функцией `lyap` (Ляпунов) из пакета `Control Matlab`, вызвав ее следующим образом:

$$P = \text{lyap}(A_M', Q).$$

Матрица  $R_a$  задается диагональной с положительными коэффициентами,  $R_b$  – в данном случае положительный коэффициент.

*Задающий сигнал.* В качестве задающего сигнала  $g(t)$  в модели будут использоваться ступенчатый и синусоидальный сигналы, а также сигнал «белый шум» (в `Simulink` – блок-источник `Band-Limited White Noise`).

Задание:

1. В `Simulink` построить модель адаптивной системы.
2. Провести исследование построенной модели по следующей схеме:
  - а) Отключить регулятор ( $K_a = (0 \ 0 \ 0)$ ,  $K_b=1$ ).

Исследовать влияние «быстрых» параметрических рассогласований на «поведение» объекта, для чего смоделировать ситуацию изменения его параметров во время обработки ступенчатого входного воздействия  $g(t)$ . В случае необходимости скорректировать модель так, чтобы это влияние было заметным.

Исследовать влияние нелинейности и возмущения на «поведение» объекта при ступенчатом входном воздействии  $g(t)$ . В случае необходимости подобрать коэффициенты, чтобы это влияние было заметным.

б) Включить регулятор. Отключить сигнальные рассогласования (возмущение и нелинейности). Отключить «быстрые» изменения параметров объекта. Подать на вход системы сигнал белый шум. Изменяя  $R_a$ ,  $R_b$ , добиться проявления идентифицирующих свойств параметрической настройки, т.е. выполнения (87, 88). Сделать выводы о влиянии коэффициентов  $R_a$ ,  $R_b$  на качество процессов.

в) Исследовать процессы адаптации при отработке системой ступенчатого и синусоидального входных воздействий и начальных рассогласований (последние задавать изменением начальных условий интеграторов модели объекта).

г) Включить «быстрые» изменения параметров объекта. Исследовать процессы адаптации при непрерывном, например, синусоидальном и ступенчатом изменении параметров объекта.

д) Модифицировать алгоритмы адаптации, добавив в настройки пропорциональные составляющие:

$$\begin{cases} K_a(t) = L_a \cdot B_M^T P e X^T R_a + \int_0^t B_M^T P e X^T R_a dt, \\ K_b(t) = L_b \cdot B_M^T P e g R_b + \int_0^t B_M^T P e g R_b dt, \end{cases} \quad (122)$$

где  $L_a$ ,  $L_b$  – диагональная положительная матрица и положительный коэффициент пропорциональной части настроек.

Оценить эффективность введения ПИ–настройки последующим показателям:

скорость процесса адаптации;

диапазон изменения сигналов настроек и управления.

е) Включить сигнальные рассогласования (возмущение и нелинейность). Исследовать возможность подавления параметрической настройкой сигнальных рассогласований.

*4.6.2. Моделирование адаптивной системы с эталонной моделью и сигнальной настройкой адаптивного регулятора*

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 U + (A - A_0) X + \varphi, Y = X; \quad (123)$$

$$\dot{X}_M = A_M X_M + B_M g; \quad (124)$$

$$U = KX + g + z, K = \text{const}; \quad (125)$$

$$z = h \cdot \text{sign}(B_M^T P e), e = X_M - X. \quad (126)$$

Элементы системы:

*Объект управления* (123) и *эталонная модель* (124) те же, что и в 4.6.1.

*Адаптивный регулятор* (125) в отличие от (83) имеет только сигнальную настройку. Вектор  $K$  рассчитывается как вектор обратных связей модального регулятора из условия:

$$B_0 K = A_0 - A_M. \quad (127)$$

*Алгоритм адаптации* (126). Матрица  $P$  рассчитывается так же, как в 4.6.1. Положительный коэффициент  $h$  подбирается в ходе моделирования. Для изучения сигнала  $z$  предусмотреть его фильтрацию фильтром первого порядка с постоянной времени 0,5 – 1 сек. При реализации фильтра в Simulink использовать блок Transfer Fcn.

*Задающий сигнал.* В качестве задающего сигнала  $g(t)$  в модели будут использоваться ступенчатый и синусоидальный сигналы.

Задание:

1. В Simulink построить модель адаптивной системы.

2. Провести исследование построенной модели по следующей схеме:

а) Отключить сигнальные рассогласования и «быстрые» изменения параметров объекта. Исследовать переходной процесс при отработке системой ступенчатого входного сигнала. Убедиться в нормальном функционировании модального регулятора (сигнал ошибки  $e = X_M - X$  должен быть равен нулю).

б) Отключить сигнальную настройку. Изучить работу модального регулятора при изменении параметров объекта и сигнальных рассогласованиях.

в) Включить сигнальную настройку. Отключить «быстрые» изменения параметров объекта. Включить сигнальное рассогласование. Увеличивая  $h$ , добиться приемлемого качества процесса адаптации. При этом сигнал на выходе фильтра оценки  $z$  должен повторять по модулю сигнал сигнального рассогласования. В случае необходимости подобрать постоянную времени фильтра. При расчете пользоваться одним из методов численного интегрирования с постоянным шагом, – например, `ode5`. Сделать вывод о влиянии  $h$  на качество процесса.

г) Включить «быстрые» изменения параметров объекта. Изучить возможности сигнальной настройки по отработке «быстрых» параметрических рассогласований.

д) Включить в алгоритм сигнальной настройки зону нечувствительности и исследовать влияние ее величины на качество процессов адаптации при различных входных воздействиях. Зона нечувствительности моделируется блоком Simulink Dead Zone.

#### 4.6.3. Моделирование адаптивной системы с настраиваемой моделью и параметрической настройкой адаптивного регулятора

Рассматриваемая система описывается уравнениями:

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 U + (A - A_0) X + \varphi, \quad Y = X; \quad (128)$$

$$\dot{\tilde{X}} = A_M \tilde{X} + \tilde{G}(Y - C\tilde{X}) + B_M \tilde{U}; \quad (129)$$

$$U = g + \mu; \quad (130)$$

$$\mu = -K_a \tilde{X} - K_b U; \quad (131)$$

$$\tilde{U} = U + K_a \tilde{X} + K_b U; \quad (132)$$

$$\begin{cases} K_a = B_M^T P e \tilde{X}^T R_a, \\ K_b = B_M^T P e U R_b, \end{cases} \quad e = X - \tilde{X}. \quad (133)$$

Элементы системы:

*Объект управления* (128) тот же, что и в 4.6.1.

*Настраиваемая модель* (129) задается матрицами  $A_M$ ,  $B_M$  и  $\tilde{G}$ . Матрицы  $A_M$ ,  $B_M$  определяют динамику неявно присутствующей в системе эталонной модели и задаются такими же, как в 4.6.1. Матрицу  $\tilde{G}$  рассчитать такой, чтобы собственные числа матрицы  $A_0 - \tilde{G}C$  были распределены биномиально с  $\omega_0 = 2$ .

Для нахождения матрицы  $\tilde{G}$  можно воспользоваться библиотечной функцией `acker` из пакета Control Matlab, вызвав ее следующим образом:

$$G = (\text{acker}(A_m', C', e))'.$$

( $e$  – желаемый вектор собственных чисел матрицы  $A_0 - \tilde{G}C$ ).

*Адаптивный регулятор* (130–132) в отличие от (98) имеет только параметрическую настройку и вырабатывает сигнал адаптации (132) настраиваемой модели и, одновременно, сигнал компенсации в управлении объектом (131).

*Алгоритмы адаптации* (133). Матрица  $P$  рассчитывается по уравнению Ляпунова (96) с заменой  $A_M$  на  $A_M - \tilde{G}C$ . Решение в Matlab:

$$P = \text{lyap}((A_m - GC)', Q).$$

*Задающий сигнал.* В качестве задающего сигнала  $g(t)$  в модели будут использоваться ступенчатый и синусоидальный сигналы, а также сигнал «белый шум».

Задание:

1. В Simulink построить модель адаптивной системы.
2. Провести исследование построенной модели по следующей схеме:
  - а) Отключить сигнальные рассогласования (возмущение и нелинейности). Отключить «быстрые» изменения параметров объекта. Отключить компенсационный сигнал. Подать на вход системы сигнал «белый шум». Изменяя  $R_a$ ,  $R_b$ , добиться проявления идентифицирующих свойств параметрической настройки, т.е. выполнения (104–105). Сделать выводы о влиянии коэффициентов  $R_a$ ,  $R_b$  на качество процессов.

- б) Включить компенсационный сигнал. Исследовать процессы идентификации и адаптации при отработке системой ступенчатого и синусоидального входных воздействий и начальных рассогласований (последние задавать изменением начальных условий интеграторов модели объекта). О качестве процесса идентификации можно судить по сигналу  $\tilde{e} = X - \tilde{X}$ , о качестве процесса компенсации – по сигналу  $e = X_M - X$ . Для получения сигнала  $X_M$  включить параллельно системе блок StateSpace, реализующий эталонное движение.

- в) Включить «быстрые» изменения параметров объекта. Исследовать процессы адаптации при непрерывном, например, синусоидальном и ступенчатом изменении параметров объекта.

- г) Аналогично 4.6.1 модифицировать алгоритмы адаптации, добавив в настройки пропорциональные составляющие, и оценить эффективность введения ПИ–настройки.

- д) Включить сигнальные рассогласования (возмущение и нелинейность). Исследовать возможность подавления параметрической настройкой сигнальных рассогласований.

*4.6.4. Моделирование адаптивной системы с настраиваемой моделью с сигнальной настройкой адаптивного регулятора*

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 U + (A - A_0) X + \varphi, Y = X; \quad (134)$$

$$\dot{\tilde{X}} = A_M \tilde{X} + \tilde{G}(Y - C\tilde{X}) + B_M \tilde{U}; \quad (135)$$

$$U = g - KX - \mu_c; \quad (136)$$

$$\tilde{U} = U + z; \quad (137)$$

$$z = h \cdot \text{sign}(B_M^T P e), \quad e = X - \tilde{X}; \quad (138)$$

$$T_\phi \frac{d\mu_c}{dt} + \mu_c = z. \quad (139)$$

Элементы модели:

*Объект управления* (134) тот же, что и в 4.6.1.

*Настраиваемая модель* (135) та же, что и в 4.6.3.

*Адаптивный регулятор* (136, 137) в отличие от (98) имеет только сигнальную настройку и формирует управление  $\tilde{U}$  настраиваемой моделью с помощью сигнала настройки  $z$ . Одновременно фильтрованная оценка этого сигнала  $\mu_c$  используется как сигнал компенсации в управлении объектом. Кроме того, регулятор осуществляет модальное управление посредством обратных связей с коэффициентами, заданными в векторе  $K$ . Вектор  $K$  рассчитывается аналогично 4.6.2.

*Алгоритм адаптации* (138). Матрица  $P$  рассчитывается так же, как и в 4.6.2. Коэффициент  $h$  подбирается в ходе моделирования.

*Задающий сигнал.* В качестве задающего сигнала  $g(t)$  в модели будут использоваться ступенчатый и синусоидальный сигналы.

Задание:

1. В Simulink построить модель адаптивной системы.
2. Провести исследование построенной модели по следующей схеме:
  - а) Отключить сигнальные рассогласования и «быстрые» изменения параметров объекта. Исследовать переходной процесс при отработке системой ступенчатого входного сигнала. Убедиться в нормальном функционировании модального регулятора (сигнал ошибки  $e = X_M - X$  должен быть равен нулю).
  - б) Отключить компенсационный сигнал. Изучить работу модального регулятора при изменении параметров объекта и сигнальных рассогласованиях.
  - в) Отключить «быстрые» изменение параметров объекта. Подать на вход системы синусоидальный сигнал. Изменяя  $h$ , добиться проявления приемлемого качества процесса адаптивной идентификации. Сделать выводы о влиянии коэффициента  $h$  на качество процесса.
  - г) Включить компенсационный сигнал. Изучить влияние постоянной времени фильтра  $T_\phi$  на качество процессов идентификации и компенсации. Исследовать процессы адаптации при отработке системой ступенчатого и си-

нусоидального входных воздействий и начальных рассогласований (последние задавать изменением начальных условий интеграторов модели объекта).

д) Включить «быстрые» изменение параметров объекта. Изучить возможности сигнальной настройки по отработке «быстрых» параметрических рассогласований.

е) Включить в алгоритм сигнальной настройки зону нечувствительности и исследовать влияние ее величины на качество процессов адаптации при различных входных воздействиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин А.В., Постников Ю.В.* Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. Учебное пособие для вузов. 3-е изд. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд., 1990. 512 с.
2. *Борцов Ю.А. и др.* Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением / Ю.А. Борцов, Н.Д. Поляхов, В.В. Путов. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд., 1984. 216 с.
3. *Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г.* Автоматизированный электропривод с упругими связями. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербург. отд., 1992. 288 с.