ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
___________Г.В.Литовка
«__» ____________2008 г.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ
(факультатив)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для специальности 080502– «Экономика и управление на предприятии»

Составитель: Н.Н. Двоерядкина, к.п.н., доцент

Благовещенск, 2008

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного университета

Двоерядкина Н.Н.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Теория поля» (факультатив) для специальности 080205 – Экономика и управление на предприятии – Благовещенск: АмГУ, 2008. – 68 с.

Содержание

1. Рабочая программа дисциплины.

1.1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

Дисциплина «Теория поля» является логичным продолжением дисциплины «Математика» для специальности «Экономика и управление на предприятии (по отраслям)» поэтому целью преподавания этой дисциплины является:

- углубление знаний студентов по отдельным темам математики, имеющим широкое физическое приложение;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов;
- формирование личности студента, развитие его интеллекта и творческих способностей.

Задачи изучения дисциплины:

- на математических примерах из «Теории поля» продемонстрировать сущность научного подхода, универсальность математики и ее роль в развитии других наук;
- научить студентов приемам исследования и решения математически формализованных задач;
- привить навыки самостоятельного изучения литературы.

Для успешного усвоения дисциплины студенты должны знать основные аксиомы и теоремы элементарной геометрии, алгебры, начал математического анализа, общей физики.

После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

- основные понятия и методы векторного анализа, интегрального исчисления, теории рядов, аналитической геометрии;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов.

1.2.Содержание дисциплины.

Федеральный компонент. Дисциплина «Теория поля» является факультативом и изучается во втором семестре. Учебным планом специальности «Экономика и управление на предприятии» на ее изучение отводится 64 часа, в том числе 18 ч – лекций, 18 ч – практические занятия, 28 ч – самостоятельная работа.

Лекционные занятия, наименование тем, содержание.

1. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: аффинная, прямоугольная, полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат; задание координат точки в различных системах; построение фигур на плоскости; построение поверхностей и тел в пространстве методом сечений.

2. Некоторые приложения определенного интеграла: длина дуги плоской кривой; объем тел вращения; площадь поверхности вращения; статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур; координаты центра тяжести; вычисление работы и давления с помощью интеграла.

3. Кратные интегралы и их приложения: понятие двойного интеграла, его геометрический смысл, свойства; вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах; нахождение площадей и объемов с помощью двойных интегралов. Понятие тройного интеграла, его свойства; тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах; нахождение объема, массы, центра тяжести тел с помощью тройного интеграла.

4. Криволинейные и поверхностные интегралы: понятие криволинейного и поверхностного интегралов, их свойства; вычисление криволинейного интеграла при различных способах задания контура кривой; формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

5. Элементы векторного анализа: понятие скалярного и векторного полей; ротор и дивергенция векторного поля; поток и циркуляция векторного поля их вычисление и физический смысл.

6. Ряды Фурье: теорема Дирихле; разложение периодических функций в ряд Фурье; продолжение функций четным и нечетным образом.

Практические занятия, их содержание.

1. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: построение точек и фигур в прямоугольной и полярной системах координат на плоскости. Построение поверхностей и тел в пространстве методом сечений. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух плоскостей в пространстве.

2. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги; объема тел вращения; площади поверхности вращения; статических моментов и моментов инерции; координат центра тяжести; работы и давления с помощью интеграла.

3. Кратные интегралы и их приложения: вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах; нахождение площадей и объемов с помощью двойных интегралов. Вычисление тройного интеграла в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат; нахождение объема, массы, центра тяжести тел с помощью тройного интеграла.

4. Криволинейные и поверхностные интегралы: вычисление криволинейного интеграла при различных способах задания контура кривой и поверхностного интеграла; формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

5. Элементы векторного анализа: вычисление ротора и дивергенции потока и циркуляции векторного поля.

6. Ряды Фурье: разложение периодических функций в ряд Фурье; продолжение функций четным и нечетным образом.

1.3. Распределение времени по курсу.

Вопросы, изучаемые на лекции	кол-во часов	Вопросы, изучаемые на практическом занятии	кол-во часов	Формы контроля
Различные системы координат, связь между ними.	2	Построение точек и фигур в аффинной, прямоугольной и полярной системах координат.	2	к/р 1
Аналитическая геометрия в пространстве. Поверхности второго порядка.	2	Построение поверхностей и тел в пространстве методом сечений.	2	
Приложения определенного интеграла.	2	Вычисление длины дуги; объема тел; площади поверхности; статических моментов и моментов инерции; координат центра тяжести; работы и давления с помощью интеграла	2	к/р 2

Двойной интеграл	2	Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах; нахождение площадей и объемов с помощью двойных интегралов.	2	к/р 3
Тройной интеграл	2	Вычисление тройного интеграла; нахождение объема, массы, центра тяжести тел с помощью тройного интеграла.	2	
Криволинейный интеграл II рода	2	Вычисление криволинейного интеграла	2	
Поверхностный интеграл II рода	2	Вычисление поверхностного интеграла	2	
Элементы векторного анализа	2	Вычисление ротора, дивергенции, потока и циркуляции векторного поля.	2	к/р 4
Ряды Фурье	2	Разложение периодических функций в ряд Фурье; продолжение функций четным и нечетным образом.	2	к/р 5
	18		18	зачет

1.4. Примерные вопросы к зачету.

1. Понятие аффинной, прямоугольной, полярной, цилиндрической, сферической систем координат.
2. Определение координат точки в различных системах.
3. Построение фигур на плоскости в аффинной, прямоугольной, полярной системах координат.
4. Построение поверхностей и тел в пространстве методом сечений.
5. Определение длины дуги плоской кривой.
6. Определение объема тел вращения.
7. Определение площади поверхности вращения.
8. Определение статических моментов плоских дуг и фигур.
9. Определение моментов инерции плоских дуг и фигур.
10. Определение координат центра тяжести.
11. Вычисление работы и давления с помощью определенного интеграла.
12. Понятие двойного интеграла.
13. Геометрический смысл двойного интеграла.
14. Свойства двойного интеграла.
15. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах.
16. Нахождение площадей и объемов с помощью двойных интегралов.
17. Понятие тройного интеграла.
18. Свойства тройного интеграла.
19. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
20. Нахождение объема, массы, центра тяжести тел.
21. Понятие криволинейного интеграла II рода.
22. Свойства криволинейного интеграла.
23. Вычисление криволинейного интеграла при различных способах задания контура кривой.
24. Формула Грина для криволинейного интеграла по замкнутому контуру.

25.Понятие поверхностного интеграла.

26.Свойства поверхностного интеграла.

27.Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса.

28.Понятие скалярного и векторного полей.

29.Определение ротора и дивергенции векторного поля.

30.Понятие двусторонней ориентированной поверхности.

31.Как определяется поток векторного поля через поверхность.

32.Циркуляция векторного поля.

33.Теорема Дирихле.

34.Разложение периодических функций в ряд Фурье

1.5. Рекомендуемая литература.

Основная литература

1. Бугров, Я. С. Высшая математика [Текст]: учебник: Рек. Мин. обр. РФ: В 3 т. / Я. С. Бугров,; Я.С. Никольский. - 5-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2003

Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление. - 2003. - 510 с.

Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - 2003. - 512 с.

2. Ермилова, Нелли Александровна. Теория поля [Текст] : учеб. пособие: рек. ДВ РУМЦ / Н.А. Ермилова, А.Е. Ситун; АмГУ, ФМиИ. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2006. - 104 с.

3. Элементы векторной алгебры [Текст]: Практикум / С.В. Карпова, Г.В. Литовка, Т.А. Маничева, А.П. Филимонова, 2001. - 74 с.

3.2.Дополнительная литература

1. Натансон, И. П. Краткий курс высшей математики [Текст] : учебник: рек. Мин. обр. РФ / Натансон И.П. - СПб. : Лань, 2005. - 728 с.

2. Данко, Павел Ефимович. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов: В 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. - 5-е изд., испр. - М. : Высш. шк., - 1999.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И УКАЗАНИЯ.

2.1. Методические рекомендации по проведению лекций

Курс «Теория поля» введен для более полного усвоения некоторых разделов математики студентами специальности «Экономика и управление на предприятии».

Значение лекционных занятий по данному курсу обусловлено следующими причинами:

- отсутствием единого учебника, в котором изложены все необходимые разделы, адаптированные к специальности «Экономика и управление на предприятии»;
- необходимостью адаптировать лектором некоторые математические разделы для осознанного восприятия студентами первого курса нематематической специальности;
- невозможностью студента самостоятельно представить смысл полученных им знаний по математике.

Каждая лекция сопровождается высоким научным стилем изложения и достаточным количеством примеров, которые поясняют теоретический материал и показывают необходимость в терпеливого изучения фундаментальных дисциплин.

Краткий конспект лекций по каждой теме приводится в п.3.1.

2.2. Методические рекомендации к практическим занятиям.

Лекционный курс дисциплины «Теория поля» сопровождается практическими занятиями. Теоретические знания, представления, образы должны быть прожиты. Афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: знание есть то, что остается, когда все выученное уже забыто, характеризует важную роль практики.

Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат, путем решения задач.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются способы применения тех теоретических знаний, которые были получены на лекции. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

2.3. Методические указания по выполнению домашних заданий.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

Следует иметь в виду, что решение задач направлено на выработку умений и навыков.

При выполнении заданий ответы должны быть аргументированными, то есть недостаточно просто привести ответ, необходимо указать путь, каким Вы пришли к данному ответу, и те основания, которыми Вы руководствовались. При этом следует обратить внимание на то, что ряд заданий предусматривает несколько последовательных шагов или операций для ответа на вопрос. При получении ответа в задаче необходимо правильно интерпретировать его, согласно условию, даже если на Ваш взгляд, данный результат не соответствует действительности.

В случае затруднения с определением алгоритма, необходимого для решения конкретных задач, а также типового оформления ответа на задание, рекомендуется обратиться к образцам выполнения типичных задач, которые представлены на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовится к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

2.4. Методические указания по выполнению контрольных работ.

По курсу «Теория поля» предусмотрена пять контрольных работ. Целью контрольной работы является выявление уровня теоретических знаний студентов и умений решать практические задачи по каждой теме.

При подготовке к контрольной работе студенту необходимо изучить и систематизировать теоретический материал по теме. Разобрать конкретные примеры. Решить достаточное количество задач и упражнений, во время аудиторной и самостоятельной домашней работы.

2.5. Методические указания по организации контроля знаний студентов.

Контролю знаний присущи определенные дидактические правила: объективность, действенность, систематичность, индивидуальность, единство требований.

Отчет по материалу курса только на зачете не может обеспечить полноту его усвоения студентами. Поэтому в течение семестра предусмотрены и другие виды контроля. При преподавании дисциплины «Теория поля» используются три основных вида контроля знаний студентов – текущий, тематический и итоговый.

При текущем контроле оценивается уровень участия студентов в аудиторной работе, степень усвоения ими учебного материала и выявляются недочеты по подготовке студентов в целях дальнейшего совершенствования методики преподавания данной дисциплины, активизации работы студентов в ходе занятия и оказания им индивидуальной помощи.

Текущий контроль проводится непосредственно на лекциях, и практических занятиях. В процессе чтения лекций преподаватель работает с аудиторией и по ее реакции оценивает степень усвоения материала. В ходе или в конце лекции студентам задается несколько вопросов по изложенной теме, что способствует закреплению полученных знаний. На практических занятиях текущий контроль проводится индивидуально. Полученные знания и степень усвоения материала проверяются в устной или письменной форме.

Тематический контроль проводится после прохождения крупных тем или разделов и осуществляется в форме контрольной работы. По каждой теме предусмотрена контрольная работа, которая позволяет определить уровень усвоения темы.

Итоговым контролем является зачет. Успешная сдача зачета обусловлена знанием теории, умением решать практические задачи. Студенты допускаются к зачету в установленном порядке, определенном «Положением о курсовых экзаменах и зачетах АмГУ».

Зачет проводится по билетам, содержащим вопросы из всех разделов программы. Отметка зачтено ставится при выполнении не менее 50% заданий.

3. КОМПЛЕКТЫ ЗАДАНИЙ К ЗАНЯТИЯМ

3.1.Краткий конспект лекций.

Лекция 1. Системы координат.

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой-либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат. Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки M. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке M можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**. 1-я ось – ось **абсцисс,** 2-я ось – ось **ординат,** 3-я ось – ось **аппликат.**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала. Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

<u>Пример.</u> Даны векторы a(1; 2; 3), b(-1; 0; 3), c(2; 1; -1) и $\vec{d}$(3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы a, b и c образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10; \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Координаты вектора $\vec{d}$ в базисе a, b, c: $\vec{d}$ $\{-1/4, 7/4, 5/2\}$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M(x, y, z) **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, считая от A, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

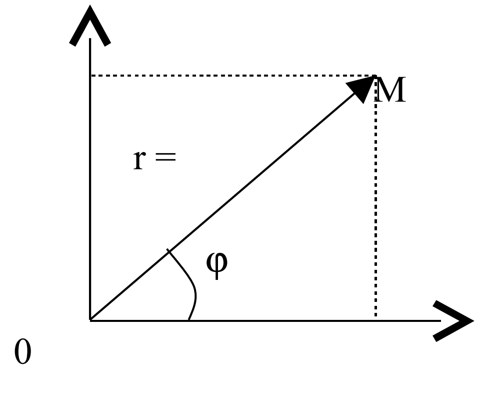
В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$x = (x_1 + x_2)/2$; $y = (y_1 + y_2)/2$; $z = (z_1 + z_2)/2$.

Полярная система координат.

Суть задания какой- либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус– вектором этой точки. Этот угол φ называется **полярным углом**.

Точка О называется **полюсом**, а луч *l* – **полярной осью.**



Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ох.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi; \qquad x^2 + y^2 = r^2$

<u>Пример.</u> Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \dfrac{4}{3 - \cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет.

Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{4}{3 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$

$3\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4$, $3\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4$, $9x^2 + 9y^2 = 16 + 8x + x^2$, $8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$

$$8(x^2 - x + 1/4) - 8 \cdot 1/4 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x - 1/2)^2 - 2 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x - 1/2)^2 + 9y^2 = 18$$

$$\frac{(x - 1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ох на 1/2 вправо, большая полуось а равна 3/2, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равно с = $\sqrt{a^2 - b^2}$ = 1/2. Эксцентриситет равен е = с/а = 1/3. Фокусы $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 0)$.

<u>Пример.</u> Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет.

Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{4-\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$4\sqrt{x^2+y^2} - 5x = 9$, $4\sqrt{x^2+y^2} = 5x+9$, $16x^2+16y^2 = 81+90x+25x^2$

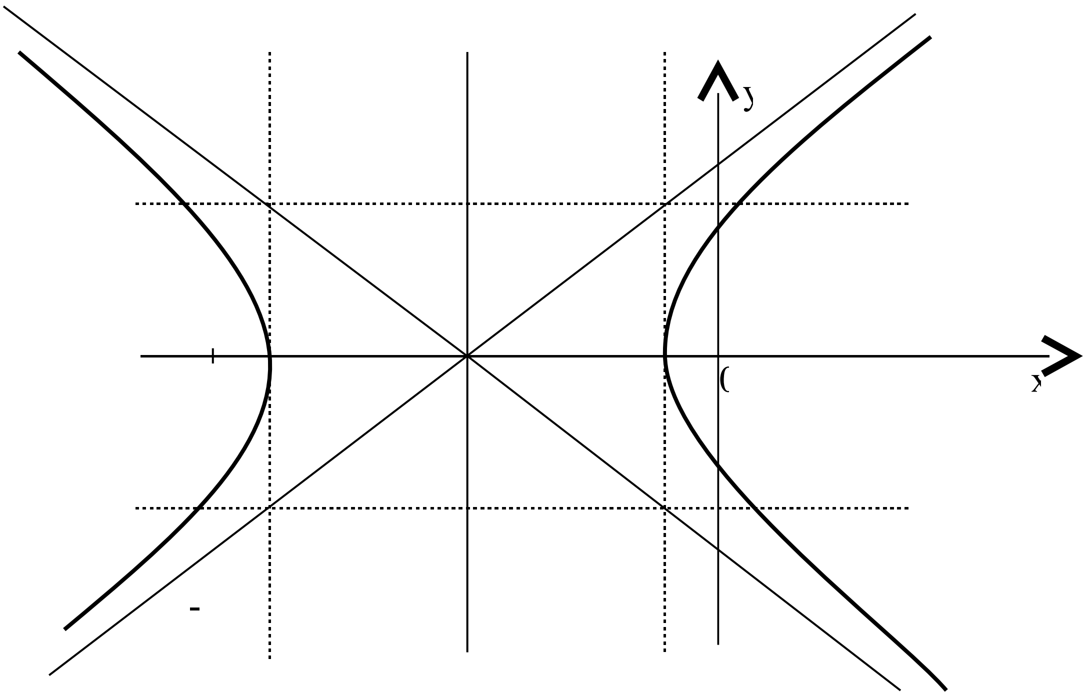
$9x^2+90x-16y^2+81=0$, $9(x^2+10x+25-25)-16y^2+81=0$,

$9(x+5)^2-225-16y^2+81=0$, $9(x+5)^2-16y^2=144$,

$$\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы. Из уравнения видно, что гипербола сдвинута вдоль оси Ox на 5 влево, большая полуось a равна 4, меньшая полуось b равна 3, откуда получаем $c^2 = a^2 + b^2$; c = 5;   e = c/a = 5/4. Фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(0; 0)$.

Построим график этой гиперболы.



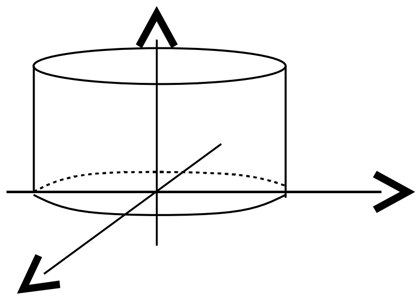
Лекция 2. Аналитическая геометрия в пространстве

Определение. Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

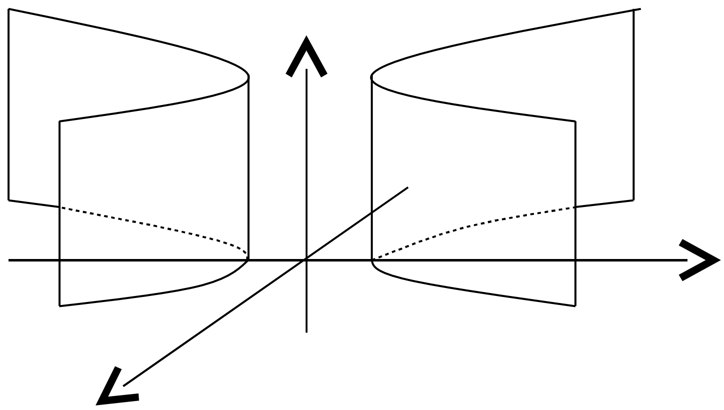
Определение. Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z, т.е. направляющие параллельны оси Oz. Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

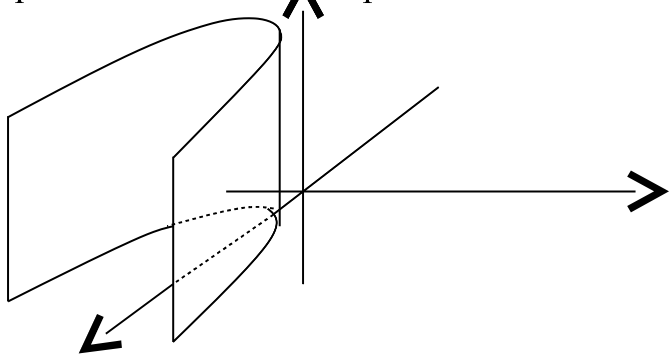
1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$- эллиптический цилиндр.



2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболический цилиндр.



2) $x^2 = 2py$ – параболический цилиндр.



Поверхности вращения.

Определение. Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой *d*, называется **поверхностью вращения** с осью вращения *d*.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz.

Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy, $F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **- эллипсоид вращения**

2) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ **- однополостный гиперболоид вращения**

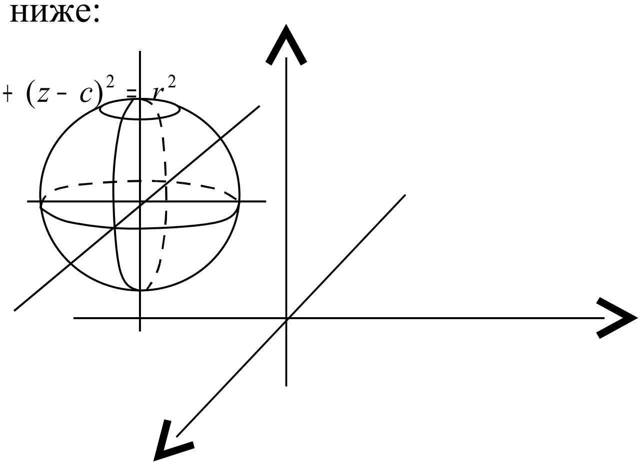
3) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ **- двуполостный гиперболоид вращения**

4) $\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ **- параболоид вращения**

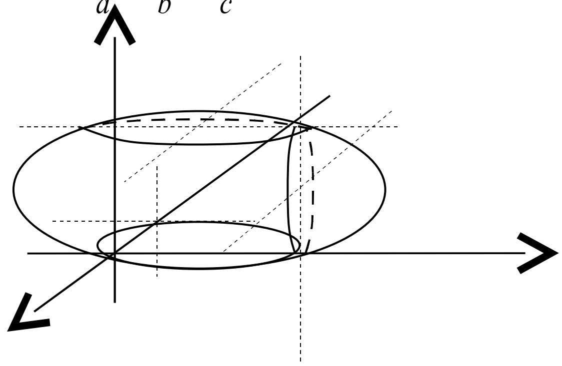
Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ox или Oy.

Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

Сфера: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

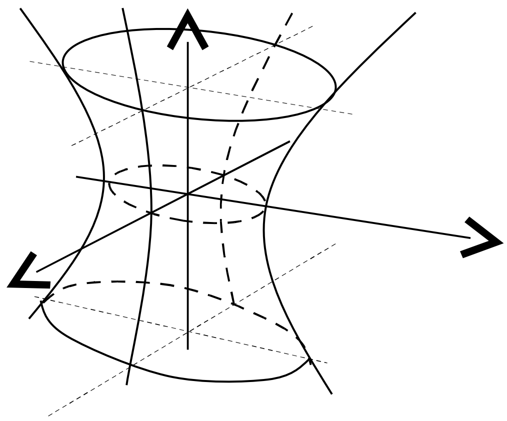


Трехосный эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

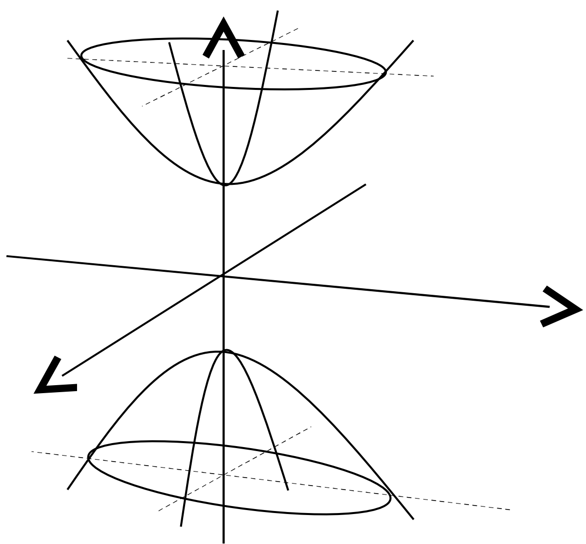


В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.

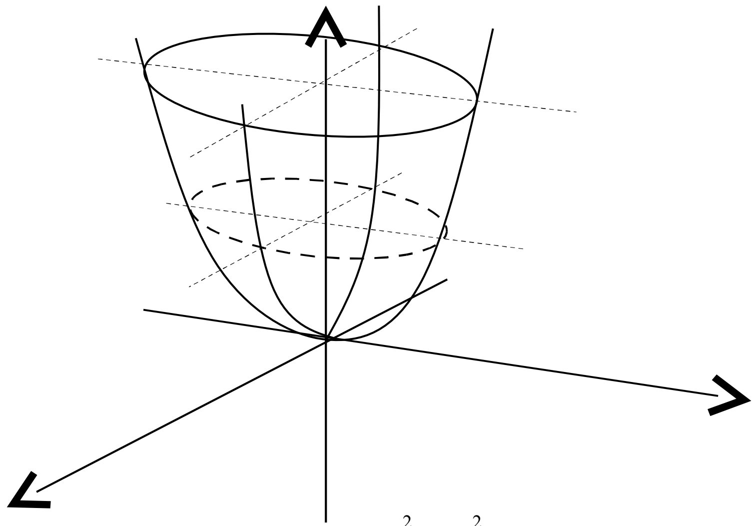
Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



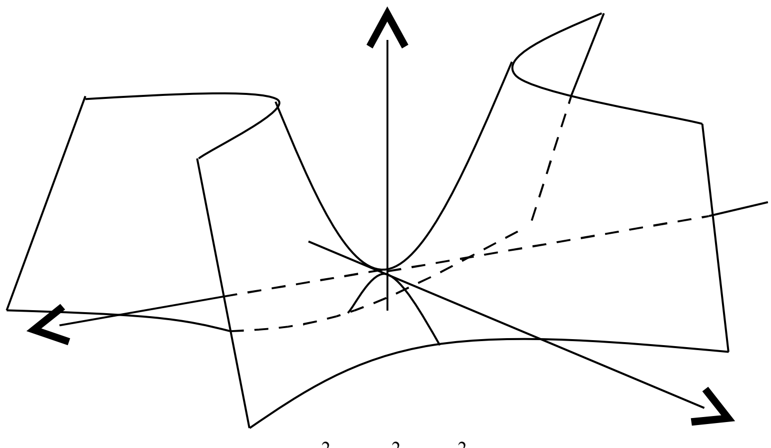
Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



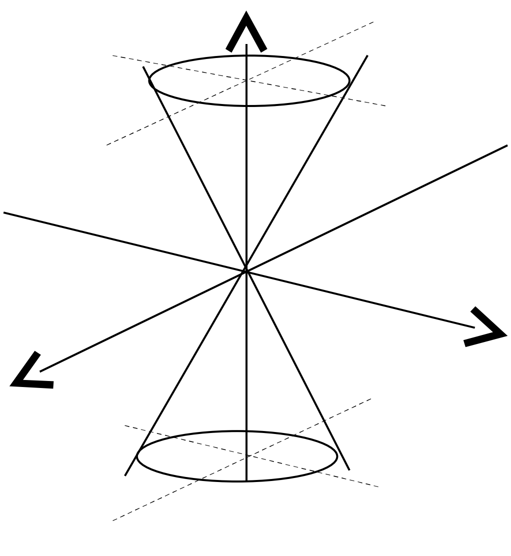
Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$



Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$



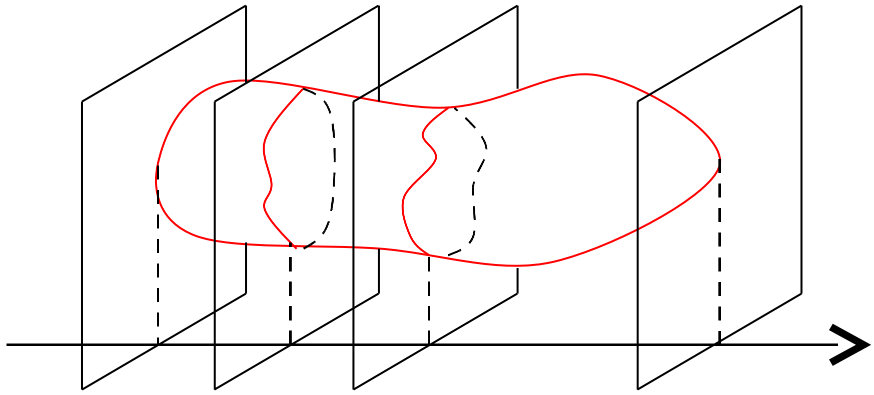
Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



Лекция 3. Некоторые приложения определенного интеграла

Вычисление объемов тел.

Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x).



Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a,b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

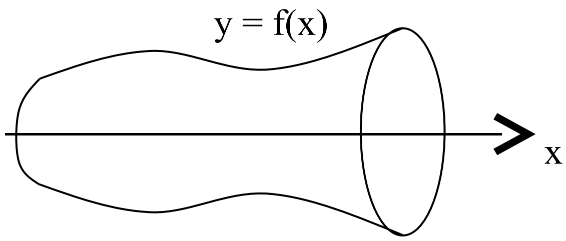
Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел: $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int\limits_a^b Q(x)dx$. Таким образом, объем тела может быть найден по формуле: $V = \int\limits_a^b Q(x)dx$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

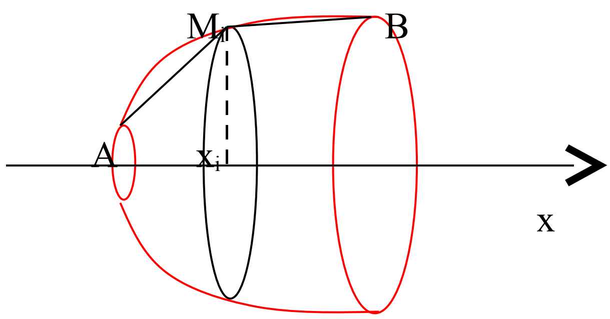
Объем тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Площадь поверхности тела вращения.

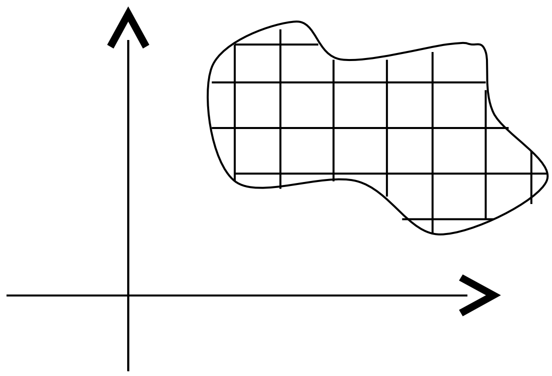


Определение: Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

Лекция 4. Двойной интеграл.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i,\ y_i)$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$; где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

<u>**Определение:**</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum\sum\limits_{\Delta} f(x,y)\Delta y\Delta x$$

<u>Условия существования двойного интеграла.</u>

<u>**Теорема.**</u> Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ существует.

<u>**Теорема.**</u> Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ существует.

Свойства двойного интеграла.

1)

$$\iint_{\Delta}[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx=\iint_{\Delta}f_1(x,y)dydx+\iint_{\Delta}f_2(x,y)dydx-\iint_{\Delta}f_3(x,y)dydx$$

2) $\iint_{\Delta}kf(x,y)dydx=k\iint_{\Delta}f(x,y)dydx$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то $\iint_{\Delta}f(x,y)dydx=\iint_{\Delta_1}f(x,y)dydx+\iint_{\Delta_2}f(x,y)dydx$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования. $\iint_{\Delta}f(x,y)dydx=f(x_0,y_0)\cdot S$

5) Если $f(x, y) \geq 0$ в области Δ, то $\iint_{\Delta}f(x,y)dydx\geq 0$.

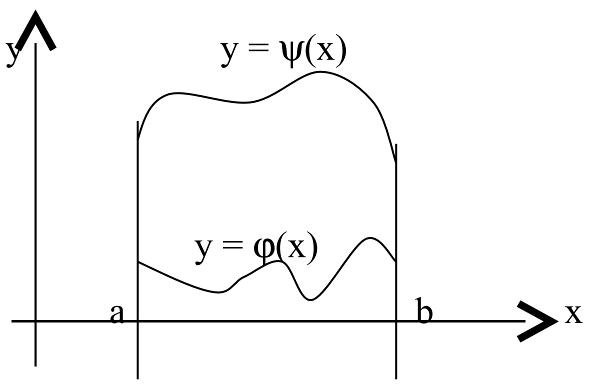
6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_{\Delta}f_1(x,y)dydx\leq\iint_{\Delta}f_2(x,y)dydx$.

7) $\left|\iint_{\Delta}f(x,y)dydx\right|\leq\iint_{\Delta}|f(x,y)|dydx$.

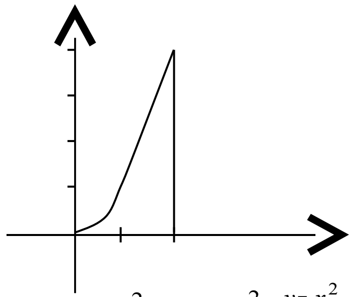
Вычисление двойного интеграла.

Теорема. Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, где φ и ψ - непрерывные функции и

$\varphi \leq \psi$, тогда $\iint_{\Delta}f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$



Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.



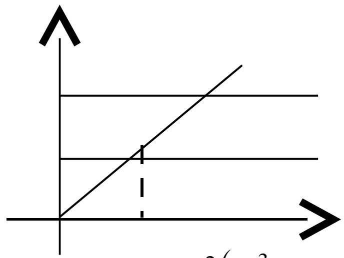
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx\int_0^{x^2}(x-y)dy = \int_0^2 \left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2\left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 =$$

$4 - 3{,}2 = 0{,}8$

<u>Теорема.</u> Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy = \int_1^2 dy\int_0^x (x^2+y^2)dx = \int_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^y dy = \int_1^2\frac{4}{3}y^3dy = \frac{4}{12}y^4\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{64}{12}-\frac{4}{12} = 5$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y², y = 2.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy = \int_0^2 dy\int_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx = \int_0^2 (x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2}dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6-y^5+y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

<u>Замена переменных в двойном интеграле.</u>

Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint\limits_{\Delta}F(x,y)dydx$, где переменная x изменяется в пределах от a до b, а переменная y – от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

Положим x = f(u, v); y = φ(u, v)

Тогда dx = $\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$; dy = $\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv$;

$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy$ т.к. при первом интегрировании переменная x принимается за постоянную, то dx = 0.

$\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0$, т.е. $du = -\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\cdot dv$ подставляя это выражение в записанное выше соотношение для dy, получаем:

$$dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}}\cdot dv$$

Выражение $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = |i|$ называется **определителем Якоби** или **Якобианом** функций f(u, v) и φ(u, v).

(Якоби Карл Густав Якоб – (1804-1851) – немецкий математик)

Тогда $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F(f(x,y),\varphi(x,y))\cdot\frac{|i|}{\partial f/du}dv$

Т.к. при первом интегрировании приведенное выше выражение для dx принимает вид $dx = \frac{\partial f}{\partial u}du$ (при первом интегрировании полагаем v = const, dv = 0), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{V_1}^{V_2} dv \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u,v),\varphi(u,v))\cdot|i|\cdot du$$

<u>Двойной интеграл в полярных координатах.</u>

Воспользуемся формулой замены переменных:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))|i|dudv$$

При этом известно, что $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

В этом случае Якобиан имеет вид:

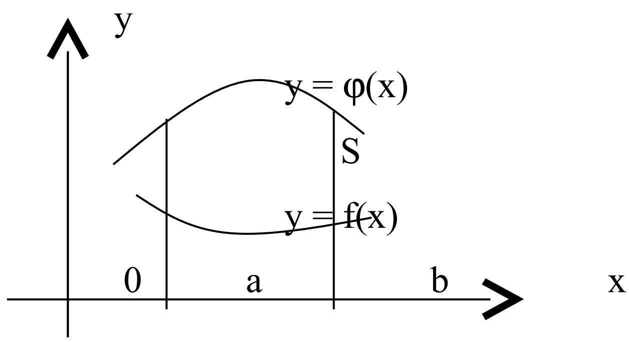
$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin\theta = \rho$$

Тогда $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tau} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$

Здесь τ - новая область значений, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = arctg\frac{y}{x}$

Приложения двойного интеграла.

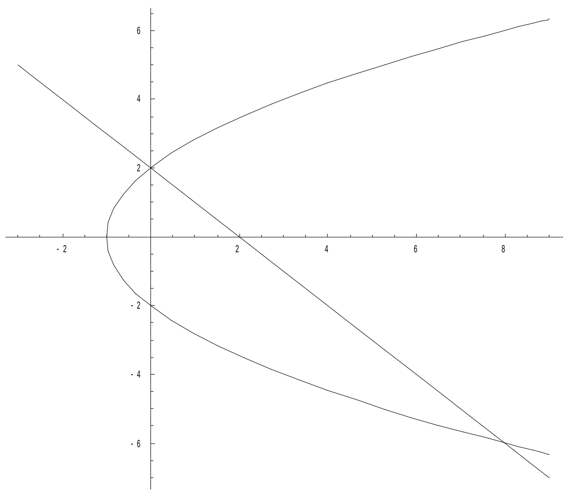
Вычисление площадей в декартовых координатах.



Площадь S, показанная на рисунке может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле: $S = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{f(x)}^{\varphi(x)} dydx$.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Построим график заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от $x = \frac{y^2 - 4}{4}$ до $x = 2 - y$, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

$$\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dxdy = \int_{-6}^{2}\left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right)dy = \int_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)dy = \frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\left(-y^2 - 4y + 12\right)dy =$$

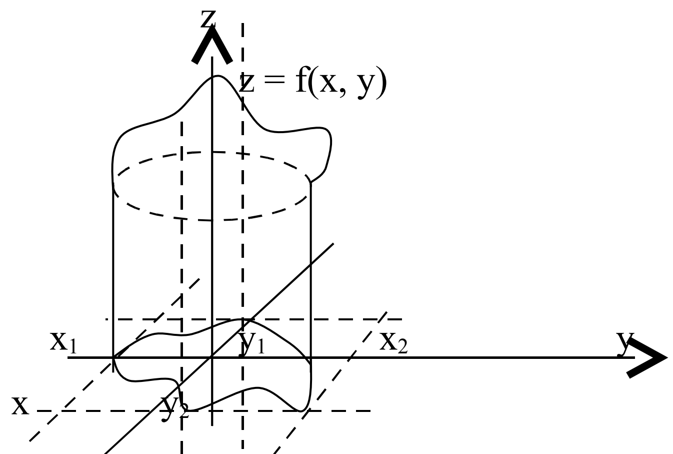
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y\right)\Big|_{-6}^{2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36\cdot 6}{3} - \frac{4\cdot 36}{2} - 12\cdot 6\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(88 - \frac{8}{3}\right) = = 21\frac{1}{3}.$$

Вычисление площадей в полярных координатах.

$$S = \iint_{\tau} \rho\, d\rho\, d\theta = \iint_{\Delta} dydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta$$

Вычисление объемов тел.

Пусть тело ограничено снизу плоскостью ху, а сверху– поверхностью z = f(x,y), с боков – цилиндрической поверхностью. Такое тело называется **цилиндроид.**



$$V = \lim_{\Delta x\to 0}\sum\sum_{\Delta} z\Delta y\Delta x = \iint_{\Delta} zdydx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} zdydx.$$

<u>Пример.</u> Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; x + y + z =3 и плоскостью XOY.

Пределы интегрирования: по оси OX: $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$; $y_2 = \sqrt{1-x^2}$;

по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $V = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}}(3 - x - y)dydx = 3\pi;$

Вычисление площади кривой поверхности.

Если поверхность задана уравнением: f(x, y, z) = 0, то площадь ее поверхности находится по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dydx$$

Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением z = φ(x, y), то площадь этой поверхности вычисляется по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx .$$

Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.

Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой f(x,y) = 0. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

- относительно оси Ох: $I_x = \iint_{\Delta} y^2 dydx$

- относительно оси Оу: $I_y = \iint_{\Delta} x^2 dydx$

- относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dydx$ - этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции.**

Вычисление центра тяжести плоской фигуры.

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint_{\Delta} wxdydx}{\iint_{\Delta} wdydx}; \qquad y_C = \frac{\iint_{\Delta} wydydx}{\iint_{\Delta} wdydx};$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = wdydx$ –масса элемента площади).

Лекция 5. Тройной интеграл

При рассмотрении тройного интеграла не будем подробно останавливаться на всех тех теоретических выкладках, которые были детально разобраны применительно к двойному интегралу, т.к. существенных различий между ними нет.

Единственное отличие заключается в том, что при нахождении тройного интеграла интегрирование ведется не по двум, а по трем переменным, а областью интегрирования является не часть плоскости, а некоторая область в трехмерном пространстве.

$$\iiint\limits_r f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \sum\sum\sum\limits_v f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Суммирование производится по области v, которая ограничена некоторой поверхностью φ(x, y, z) = 0.

$\iiint\limits_r f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dzdydx$ здесь x_1 и x_2 – постоянные величины, y_1 и y_2 – могут быть некоторыми функциями от x или постоянными величинами, z_1 и z_2 – могут быть функциями от x и y или постоянными величинами.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2yzdzdydx$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2yzdzdydx = \int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2y\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}\right)dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2yx^2y^2dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^4y^3dydx =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^4\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^4x^8}{4}dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{13}x^{13}\Big|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

Замена переменных в тройном интеграле.

Операция замены переменных в тройном интеграле аналогична соответствующей операции для двойного интеграла.

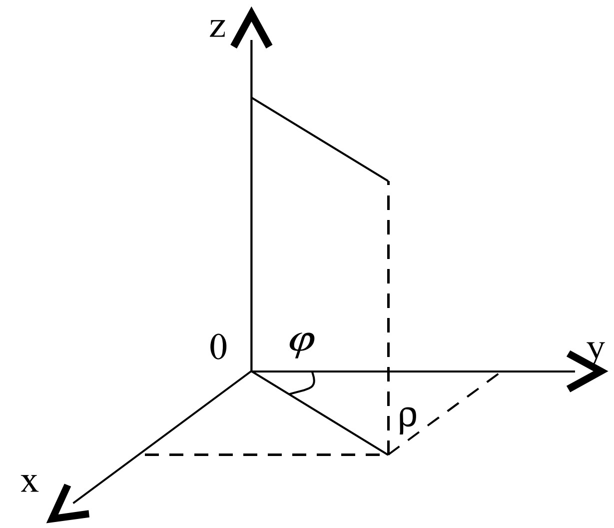
Можно записать:

$$\iiint\limits_r F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\tau F(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w))\cdot|i|\cdot dudvdw$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Наиболее часто к замене переменной в тройном интеграле прибегают с целью перейти от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической или сферической системе.

<u>Цилиндрическая система координат.</u>



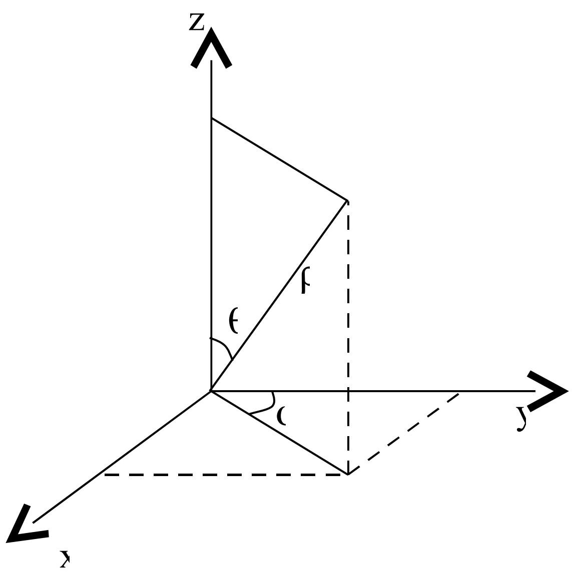
Связь координат произвольной точки P пространства в цилиндрической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = arctg\frac{y}{x}; \qquad z = z.$$

$$\iiint_r F(x,y,z)dxdydz = \iiint_\tau F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\, d\theta d\rho\, dz$$

<u>Сферическая система координат.</u>



Связь координат произвольной точки P пространства в сферической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе

осуществляется по формулам: $\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = arctg\frac{y}{x}; \qquad \varphi = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

Окончательно получаем:

$$\iiint_r F(x, y, z)dxdydz = \iiint_\tau f(\rho, \varphi, \theta)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Приложения тройного интеграла

Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла.

Если поверхность тела описывается уравнением f(x, y, z) = 0, то объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dzdydx$$

при этом z_1 и z_2 – функции от x и y или постоянные, y_1 и y_2 – функции от x или постоянные, x_1 и x_2 – постоянные.

Координаты центра тяжести тела.

$$x_C = \frac{\iiint\limits_r wxdv}{\iiint\limits_r wdv}; \quad y_C = \frac{\iiint\limits_r wydv}{\iiint\limits_r wdv}; \quad z_C = \frac{\iiint\limits_r wzdv}{\iiint\limits_r wdv};$$

Моменты инерции тела относительно осей координат.

$$I_x = \iiint\limits_r (y^2 + z^2)wdv; \quad I_y = \iiint\limits_r (x^2 + z^2)wdv; \quad I_z = \iiint\limits_r (x^2 + y^2)wdv;$$

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей.

$$I_{xy} = \iiint\limits_r z^2 wdv; \quad I_{xz} = \iiint\limits_r y^2 wdv; \quad I_{yz} = \iiint\limits_r x^2 wdv;$$

Момент инерции тела относительно начала координат.

$$I_0 = \iiint\limits_r (x^2 + y^2 + z^2)wdv;$$

В приведенных выше формулах п.п. 8 – 11 r – область вычисления интеграла по объему, w – плотность тела в точке (x, y, z), dv – элемент объема

- в декартовых координатах: dv = dxdydz;
- в цилиндрических координатах: dv = ρdzdφdθ;
- в сферических координатах: dv = ρ^2sinφdρdφdθ.

Вычисление массы неоднородного тела.

$$M = \iiint\limits_r wdv;$$

Теперь плотность w – величина переменная.

Лекция 6. Криволинейный интеграл

Определение. Кривая $r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \gamma(t)k \quad (a \le t \le b)$ называется **непрерывной кусочно – гладкой**, если функции φ, ψ и γ непрерывны на отрезке [a,b] и отрезок [a,b] можно разбить на конечное число частичных отрезков так, что на каждом из них функции φ, ψ и γ имеют непрерывные производные, не равные нулю одновременно.

Если определено не только разбиение кривой на частичные отрезки точками, но порядок этих точек, то кривая называется **ориентированной** кривой.

Ориентированная кривая называется **замкнутой**, если значения уравнения кривой в начальной и конечной точках совпадают. $r(a) = r(b)$

Рассмотрим в пространстве XYZ кривую AB, в каждой точке которой определена произвольная функция $f(x, y, z)$.

Разобьем кривую на конечное число отрезков и рассмотрим произведение значения функции в каждой точке разбиения на длину соответствующего отрезка. $f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$

Сложив все полученные таким образом произведения, получим так называемую **интегральную** сумму функции *f(x, y, z)*. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$

<u>Определение.</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой на частичные отрезки существует предел интегральных сумм, то этот предел называется **криволинейным интегралом от функции *f(x, y, z)* по длине дуги АВ** или **криволинейным интегралом первого рода**. $\int_{AB} f(x, y, z)ds$

Значение криволинейного интеграла по длине дуги не зависит от направления кривой АВ.

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги надо определить его связь с обыкновенным определенным интегралом.

Пусть кривая АВ задана параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t), z = z(t), $\alpha \le t \le \beta$, где функции x, y, z – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке А соответствует $t = \alpha$, а точке В соответствует $t = \beta$. Функция f(x, y, z) – непрерывна на всей кривой АВ.

Длина кривой АВ равна: $S = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$

Криволинейный интеграл по длине дуги АВ будет находиться по формуле:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги АВ) надо, используя параметрическое уравнение кривой выразить подынтегральную функцию через параметр t, заменить ds дифференциалом дуги в зависимости от параметра t и проинтегрировать полученное выражение по t.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int_{AB}(x^2 + y^2 + z^2)ds$ по одному витку винтовой линии $x = \cos t; \quad y = \sin t; \quad z = t; \quad 0 \le t \le 2\pi$.

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)ds=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+t^2)dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right).$$

Если интегрирование производится по длине плоской кривой, заданной уравнением $y=\varphi(x),\quad a\le x\le b,$ то

получаем: $$\int\limits_{AB}f(x,y)ds=\int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$$

<u>Криволинейные интегралы второго рода.</u>

Пусть АВ – непрерывная кривая в пространстве XYZ (или на плоскости XOY), а точка Р(x, y, z) – произвольная функция, определенная на этой кривой. Разобьем кривую точками $M(x_i, y_i, z_i)$ на конечное число частичных дуг. И рассмотрим сумму произведений значений функции в каждой точке на длину соответствующей частичной дуги. $\sum\limits_{i=1}^{n}P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i\quad;\quad M(\alpha,\beta,\gamma)\in\Delta x_i$

<u>Определение.</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой АВ интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется **криволинейным интегралом по переменной *x* от функции *P(x, y, z)* по кривой АВ в направлении от А к В.** $\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i$

Криволинейный интеграл второго рода, т.е. интеграл по координатам отличается от криволинейного интеграла первого рода, т.е. по длине дуги тем, что значение функции при составлении интегральной суммы умножается не на длину частичной дуги, а на ее проекцию на соответствующую ось. (В рассмотренном выше случае – на ось ОХ).

Вообще говоря, криволинейные интегралы могут считаться также и по переменным y и z.

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha,\beta,\gamma)\Delta y_i \quad \int_{AB} R(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha,\beta,\gamma)\Delta z_i$$

Сумму криволинейных интегралов также называют криволинейным интегралом второго рода. $\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) $\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx$

2) $\int_{AB} kP(x,y,z)dx = k\int_{AB} P(x,y,z)dx;$

3) $\int_{AB} (P_1(x,y,z) + P_2(x,y,z))dx = \int_{AB} P_1(x,y,z)dx + \int_{AB} P_2(x,y,z)dz$

4) $\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{AC} P(x,y,z)dx + \int_{CA} P(x,y,z)dx$

5) Криволинейный интеграл по замкнутой кривой L не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Направление обхода контура L задается дополнительно. Если L – замкнутая кривая без точек самопересечения, то направление обхода контура против часовой стрелки называется положительным.

Аналогичные соотношения справедливы при интегрировании по переменным y и z.

Теорема. Если кривая АВ – кусочно-гладкая, а функции P(x,y, z),Q(x,y,z) и R(x, y, z) – непрерывны на кривой АВ, то криволинейные интегралы $\int_{AB} P(x,y,z)dx;\quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy;\quad \int_{AB} R(x,y,z)dz;$

$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ существуют.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода производится путем преобразования их к определенным интегралам по формулам:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt;$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt;$$

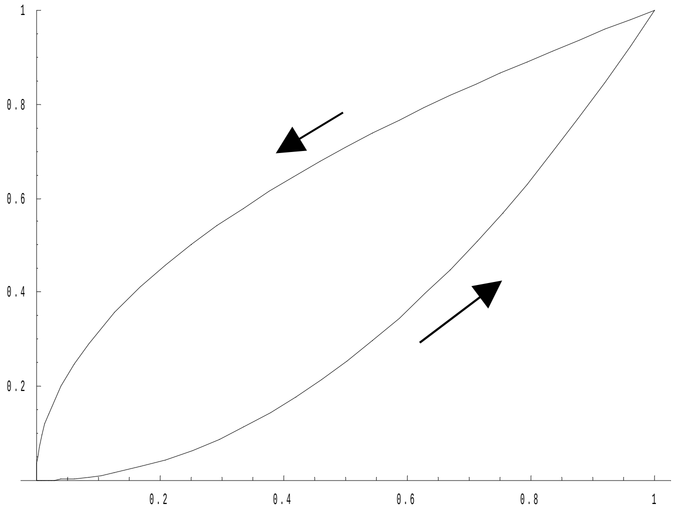
$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt;$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]dt$$

В случае, если АВ – плоская кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} [P(x,f(x) + Q(x,f(x))f'(x)]dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} x^2 ydx + x^3 dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x;\ x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.



Представим замкнутый контур L как сумму двух дуг $L_1 = x^2$ и $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint\limits_{L} x^2 ydx + x^3 dy = \int\limits_{L_1} x^2 ydx + \int\limits_{L_1} x^3 dy + \int\limits_{L_2} x^2 ydx + \int\limits_{L_2} x^3 dy = \int\limits_{0}^{1} x^4 dx + \int\limits_{0}^{1} x^3 \cdot 2xdx + \int\limits_{1}^{0} x^2 \sqrt{x} dx +$$

$$+ \int\limits_{1}^{0} \frac{x^3}{2\sqrt{x}} dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

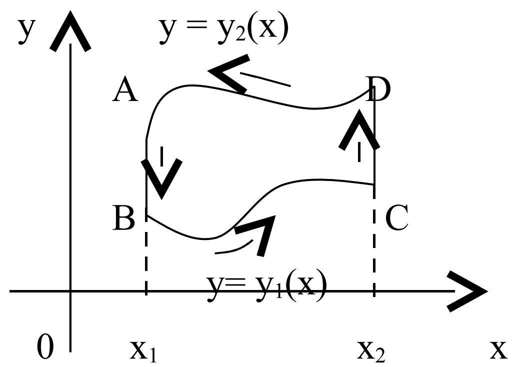
<u>Формула Остроградского – Грина.</u>

(Остроградский Михаил Васильевич (1861-1862) – русский математик, академик Петерб. А.Н.) (Джордж Грин (1793 – 1841) – английский математик)

Иногда эту формулу называют формулой Грина, однако, Дж. Грин предложил в 1828 году только частный случай формулы.

Формула Остроградского – Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Будем считать, что рассматриваемая область **односвязная**, т.е. в ней нет исключенных участков.



Если замкнутый контур имеет вид, показанный на рисунке, то криволинейный интеграл по контуру L можно записать в виде:

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \quad \int_{AB} = \int_{CD} = 0$$

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1(x))dx + \int_{x_2}^{x_1} P(x,y_2(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_2(x))dx$$

$$\oint_L P(x,y)dx = -\int_{x_1}^{x_2} (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)))dx$$

$$P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)) = P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\oint_L P(x,y)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dydx = -\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dydx$$

Если участки AB и CD контура принять за произвольные кривые, то, проведя аналогичные преобразования, получим формулу для контура произвольной формы:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx$$

Эта формула называется **формулой Остроградского – Грина**.

Формула Остроградского – Грина справедлива и в случае многосвязной области, т.е. области, внутри которой есть исключенные участки. В этом случае правая часть формулы будет представлять собой сумму интегралов по внешнему контуру области и интегралов по контурам всех исключенных участков, причем каждый из этих контуров интегрируется в таком направлении, чтобы область Δ все время оставалась по левую сторону линии обхода.

Пример. Решим пример, рассмотренный выше, воспользовавшись формулой Остроградского – Грина.

$$\oint_L x^2 ydx + x^3 dy = \iint_\Delta \left(3x^2 - x^2\right) dydx = \iint_\Delta 2x^2 dydx = \int_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4)dx =$$

$$= 2\left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5} \right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{35}.$$

Формула Остроградского – Грина позволяет значительно упростить вычисление криволинейного интеграла.

Криволинейный интеграл не зависит от формы пути, если он вдоль всех путей, соединяющих начальную и конечную точку, имеет одну и ту же величину.

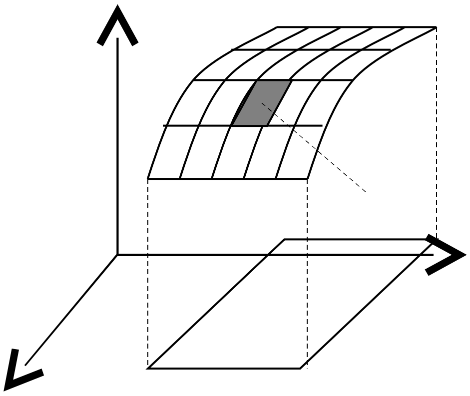
Условием независимости криволинейного интеграла от формы пути равносильно равенству нулю этого интеграла по любому замкнутому контуру, содержащему начальную и конечную точки.

Это условие будет выполняться, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции, т.е. выполняется условие тотальности. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Лекция 7. Поверхностный интеграл

Поверхностный интеграл является таким же обобщением двойного интеграла, каким криволинейный интеграл является по отношению к определенному интегралу.

Рассмотрим поверхность в пространстве, которая произвольно разбита на n частей.



Рассмотрим произведение значения некоторой функции F в произвольной точке с координатами (α, β, γ) на площадь частичного участка ΔS_i, содержащего эту точку. $F(\alpha,\beta,\gamma)\Delta S_i$

<u>**Определение.**</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения λ поверхности существует конечный предел интегральных сумм, то этот предел называется **поверхностным интегралом первого рода** или **интегралом по площади поверхности.**

$$\iint_S F(x,y,z)dS = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\Delta S_i$$

<u>Свойства поверхностного интеграла первого рода.</u>

Поверхностные интегралы первого рода обладают следующими свойствами:

1) $\iint_S dS = S$ S – площадь поверхности.

2) $\iint_S kF(x,y,z)dS = k\iint_S F(x,y,z)dS; \quad k = const$

3) $\iint_S [F_1(x,y,z) + F_2(x,y,z)]dS = \iint_S F_1(x,y,z)dS + \iint_S F_2(x,y,z)dS$

4) Если поверхность разделена на части S_1 и S_2, то

$$\iint_S F(x,y,z)dS = \iint_{S_1} F(x,y,z)dS + \iint_{S_2} F(x,y,z)dS$$

5) Если $F_1(x,y,z) \le F_2(x,y,z)$, то $\iint_S F_1(x,y,z)dS \le \iint_S F_2(x,y,z)dS$

6) $\left|\iint_S F(x,y,z)dS\right| \le \iint_S |F(x,y,z)|dS$

7) Теорема о среднем.

Если функция F(x, y, z) непрерывна в любой точке поверхности S, то существует точка (α, β, γ) такая, что $\iint_S F(x,y,z)dS = F(\alpha, \beta, \gamma) \cdot S$ S – площадь поверхности.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода выполняется через двойной интеграл по **проекции поверхности на плоскость XOY.**

$$\iint_S F(x,y,z)dS = \iint F(x,y,f(x,y))\sqrt{f'^2_x(x,y)+f'^2_y(x,y)+1}\,dxdy$$

Поверхностные интегралы второго рода.

Если на поверхности S есть хотя бы одна точка и хотя бы один не пересекающий границу поверхности контур, при обходе по которому направление нормали в точке меняется на противоположное, то такая поверхность называется **односторонней**.

Если при этих условиях направление нормали не меняется, то поверхность называется **двухсторонней**.

Будем считать положительным направлением обхода контура L, принадлежащего поверхности, такое направление, при движении по которому по выбранной стороне поверхности сама поверхность остается слева.

Двухсторонняя поверхность с установленным положительным направлением обхода называется **ориентированной** поверхностью.

Рассмотрим в пространстве XYZ ограниченную двухстороннюю поверхность S, состоящую из конечного числа кусков, каждый из которых задан либо уравнением вида z = f(x, y), либо является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ.

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения поверхности S интегральные суммы, составленные как суммы произведений значений некоторой функции на площадь частичной поверхности, имеют конечный предел, то этот предел называется **поверхностным интегралом второго рода.**

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$ - поверхностный интеграл второго рода.

Свойства поверхностного интеграла второго рода аналогичны уже рассмотренным нами свойствам поверхностного интеграла первого рода.

Т.е. любой поверхностный интеграл второго рода меняет знак при перемене стороны поверхности, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, поверхностный интеграл от суммы двух и более функций равен сумме поверхностных интегралов от этих функций, если поверхность разбита на конечное число частичных поверхностей, интеграл по всей поверхности равен сумме интегралов по частичным поверхностям.

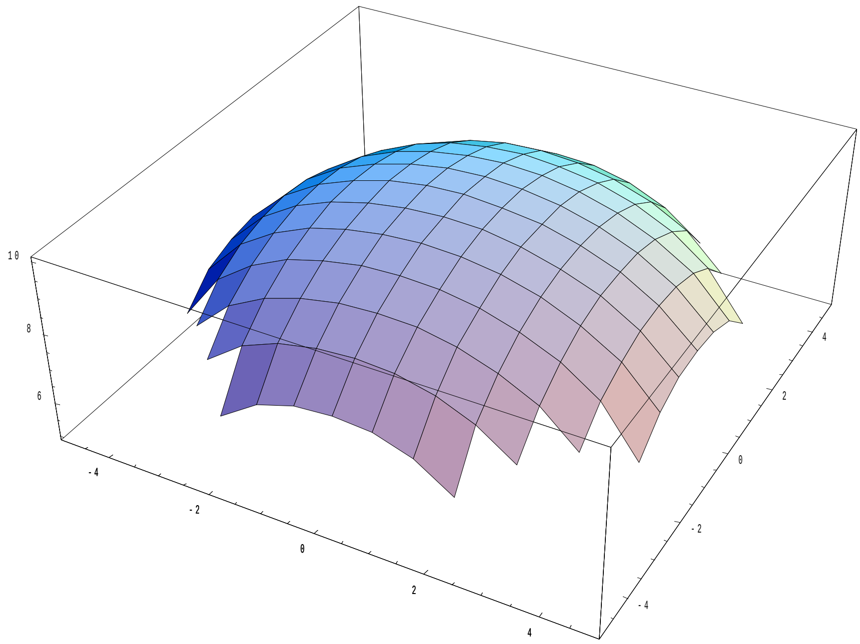
Если S- цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OZ, то $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = 0$. В случае, если образующие поверхности параллельны осям OX и OY, то равны нулю соответствующие составляющие поверхностного интеграла второго рода.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению соответствующих двойных интегралов. Рассмотрим это на примере.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_S (z-R)^2\,dxdy$ по верхней стороне полусферы $x^2+y^2+z^2=2Rz,\quad R \le z \le 2R.$

Преобразуем уравнение поверхности к виду: $x^2+y^2+(z-R)^2-R^2=0$

$z = R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$



Заданная поверхность проецируется на плоскость XOY в круг, уравнение которого: $x^2+y^2 \le R^2$

$$\iint\limits_S (z-R)^2\,dxdy = \iint\limits_\Delta (R^2-x^2-y^2)dxdy$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_\Delta (R^2-x^2-y^2)dxdy = \iint\limits_\tau f(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi\;,\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint\limits_S (z-R)^2\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (R^2-\rho^2)\rho\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^2\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R d\varphi = \frac{R^4}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}$$

<u>Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.</u>

Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны друг с другом соотношением:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

В этой формуле $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности S в выбранную сторону поверхности.

<u>Формула Гаусса – Остроградского.</u>

Формула Гаусса – Остроградского является аналогом формулы Грина – Остроградского. Эта формула связывает поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Для вывода формулы Гаусса – Остроградского надо воспользоваться рассуждениями, подобными тем, которые использовались при нахождении формулы Грина – Остроградского.

Рассматривается сначала поверхность, ограниченная сверху и снизу некоторыми поверхностями, заданными известными уравнениями, а сбоку ограниченную цилиндрической поверхностью. Затем рассматривается вариант когда поверхность ограничена цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными двум другим координатным осям.

После этого полученные результаты обобщаются, приводя к формуле **Гаусса – Остроградского:**

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz$$

Отметим, что эта формула применима для вычисления поверхностных интегралов по замкнутой поверхности.

На практике формулу Гаусса – Остроградского можно применять для вычисления объема тел, если известна поверхность, ограничивающая это тело.

Имеют место формулы: $V = \iint_S xdydz = \iint_S ydxdz = \iint_S zdxdy = \iiint_V dxdydz$

Пример. Найти формулу вычисления объема шара.

В поперечных сечениях шара (сечения параллельны плоскости XOY) получаются окружности.

Уравнение шара имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Найти объем шара можно по формуле:

$$V = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dzdydx = 8\int_{0}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dy =$$

$$= 8\int_{0}^{R}\left[\frac{y\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{2} + \frac{R^2 - x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]\Bigg|_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = 8\int_{0}^{R}\frac{R^2 - x^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}dx = 2\pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{0}^{R} =$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Для решения этой же задачи можно воспользоваться преобразованием интеграла к сферическим координатам.

Это значительно упростит интегрирование.

$$V = \int_{0}^{\pi} d\theta\, 2\int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{R} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho = 2\int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{\pi} \frac{R^3}{3}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} 2R^3 d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Лекция 8. Элементы векторного анализа

Производная по направлению.

Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS. $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

Пусть функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$, где величины ε_1, ε_2, ε_3 – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_2\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

<u>**Определение:**</u> Предел $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции u(x, y, z) по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

<u>Пример.</u> Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B (3, 0).

<u>Решение.</u> Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ =(3-1; 0-2) = (2; -2) = $2i - 2j$.

Далее определяем модуль этого вектора:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке A : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

cosα = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;   cosβ = -$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке $\frac{\partial u}{\partial x}; \ \frac{\partial u}{\partial y}; \ \frac{\partial u}{\partial z}$, то этот вектор называется **градиентом** функции u. $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Связь градиента с производной по направлению.

Теорема: Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора $\vec{S}$ равняется проекции вектора grad u на вектор $\vec{S}$.

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *grad u*.

$$grad u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s.

Т.е. $grad\, u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *grad u* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать: $|grad\,u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *grad u* на вектор $\vec{S}$.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

<u>**Определение.**</u> Если каждой точке пространства М ставится в соответствие некоторая скалярная величина U, то таким образом задается **скалярное поле** U(M). Если каждой пространства М ставится в соответствие вектор F , то задается **векторное поле** F (M).

Пусть в пространстве М задана поверхность Δ. Будем считать, что в каждой точке P определяется положительное направление нормали единичным вектором $n(P)$.

В пространстве М зададим векторное поле, поставив в соответствие каждой точке пространства вектор, определенный координатами:

$$F = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

Если разбить каким – либо образом поверхность на частичные участки Δ_i и составить сумму $\sum_i (F(P_i)n(P_i))\Delta_i$, где Fn - скалярное произведение, то предел этой суммы при стремлении к нулю площадей частичных участков разбиения (если этот предел существует) будет **поверхностным интегралом**. $\iint_\Delta Fnd\Delta$

<u>Определение.</u> Поверхностный интеграл $\iint_{\Delta} Fnd\Delta$ называется **потоком векторного поля F через поверхность Δ.**

Если поверхность разбита на конечное число частичных поверхностей, то поток векторного поля через всю поверхность будет равен сумме потоков через частичные поверхности.

Если преобразовать скалярное произведение в координатную форму, то получаем соотношение:

$$\iint_{\Delta} Fnd\Delta = \iint_{\Delta}[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]d\Delta = \iint_{\Delta} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Если на области Δ существует функция *f(x, y, z)*, имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются свойства:

$\frac{\partial f}{\partial x} = P;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q;\quad \frac{\partial f}{\partial z} = R;$ то такую функцию называют **потенциальной функцией** или **потенциалом** вектора F .

Тогда вектор F является **градиентом** функции *f.*

$$\vec{F} = gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Потенциал может быть найден по формуле:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

В этой формуле x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой начальной точки. В качестве такой точки удобно брать начало координат.

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы поле вектора F , заданного в некоторой области, имело потенциал, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:

1) Интеграл от вектора F по любому кусочно – гладкому контуру, принадлежащему области, равен нулю.

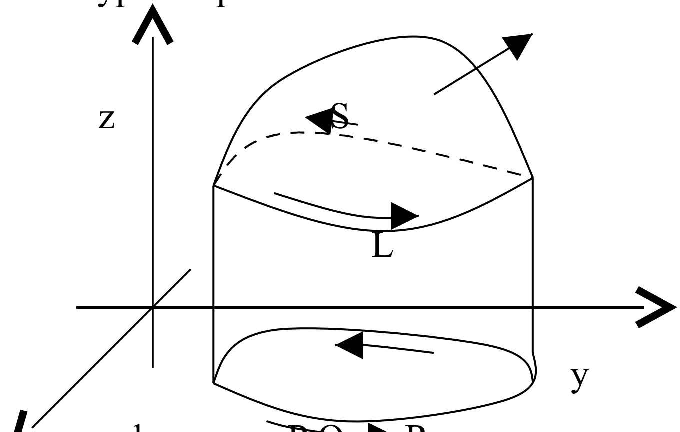
2) Интеграл по любому кусочно – гладкому пути, соединяющему две любые точки поля не зависит, от пути интегрирования.

<u>Формула Стокса.</u>

(Джордж Габриель Стокс (1819 – 1903) – английский математик)

Формула Стокса связывает криволинейные интегралы второго рода с поверхностными интегралами второго рода.

Пусть в пространстве задана некоторая поверхность S. L – непрерывный кусочно – гладкий контур поверхности S.



Предположим, что функции P,Q и R непрерывны на поверхности S вместе со своими частными производными первого порядка. Применим формулу, выражающую криволинейный интеграл через определенный.

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)$$

$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt = \int\limits_\alpha^\beta [Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right)]dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left\{\left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]x'(t) + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]y'(t)\right\}dt = \oint\limits_L \left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]dx + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]dy$$

Введем обозначения: $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$;

Применив формулу Грина – Остроградского, можно заменить криволинейный интеграл равным ему двойным интегралом. После преобразований устанавливается следующее соответствие между криволинейным и поверхностным интегралом:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

эта формула и называется **формула Стокса.**

<u>Определение.</u> Вектор B, компоненты которого равны соответственно равны $B_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$; $B_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}$; $B_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$; называется **вихрем (ротором)** вектора $F = Pi + Qj + Rk$ и обозначается: $rotF$

Символический вектор $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ называется **оператором Гамильтона.** (Уильям Роуан Гамильтон (1805 – 1865) – ирландский математик) Символ ∇ - "набла".

С учетом этого обозначения можно представить себе понятие ротора вектора F как векторного произведения оператора Гамильтона на вектор F.

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

<u>Определение.</u> Криволинейный интеграл, представляющий собой работу векторного поля вдоль некоторой кривой L называется **линейным интегралом** от вектора F по ориентированной кривой L.

$$\int_L Fds = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Если кривая L представляет собой замкнутый контур, то линейный интеграл по такому контуру называется **циркуляцией** векторного поля F вдоль контура L.

$$Ц = \oint_L Fds = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

В векторной форме теорему Стокса можно сформулировать так:

Циркуляция вектора вдоль контура некоторой поверхности равна потоку вихря (ротора) через эту поверхность.

$$\int_\lambda Fds = \iint_\Delta nrotFd\Delta$$

Отметим, что рассмотренная выше формула Грина – Остроградского является частным случаем формулы Стокса.

Также при условии равенства нулю всех компонент ротора вектора, получаем, что криволинейный интеграл по любой пространственной кривой равен нулю, т.е. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

<u>Определение.</u> Выражение $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ называется **дивергенцией вектора (дивергенцией векторной функции)** $F = Pi + Qj + Rk$ и обозначается $div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

Формула Гаусса – Остроградского может быть записана в виде:

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$ или

$\iiint\limits_V divFdv = \oiint\limits_S FndS$ т.е. *интеграл от дивергенции векторного поля* F *по объему равен потоку вектора через поверхность, ограниченную этим объемом.*

<u>Определение.</u> Векторное поле F называется **соленоидальным (трубчатым)**, если div F =0 .

С помощью описанного выше оператора Гамильтона можно представить определенные нами понятия следующим образом:

$$gradf = \nabla f; \quad divF = \nabla F; \quad rotF = \nabla \times F;$$

Как было сказано выше (См. Уравнение Лапласа.), выражение

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется **оператором Лапласа.**

Справедливы следующие соотношения: $div(gradf) = \Delta f; \qquad \nabla \cdot \nabla f = \Delta f$

Справедливость этих равенств легко проверить непосредственной подстановкой.

Теперь рассмотрим примеры применения рассмотренных выше понятий.

<u>Пример.</u> Найти $rot(r \cdot a)\cdot r$, если $r = xi + yj + zk; \quad a = i + j + k.$

Найдем скалярное произведение: $r \cdot a = x + y + z;$

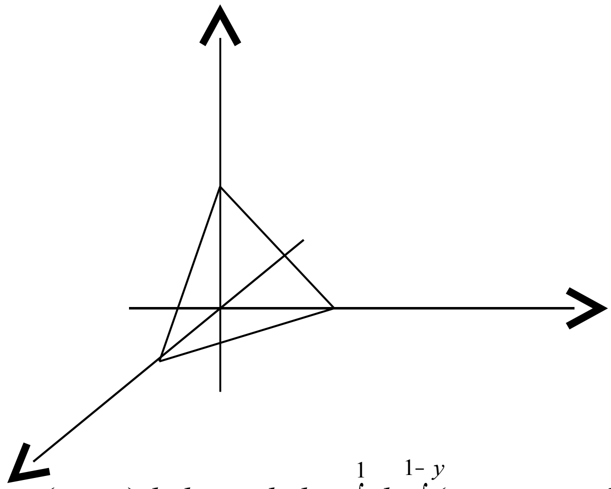
Найдем скалярное произведение:

$$(r \cdot a)\cdot r = \{P,Q,R\} = \{x^2 + xy + xz, \quad yx + y^2 + yx, \quad xz + yz + z^2\}$$

$$rot(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= i(z - y) - j(z - x) + k(y - x)$$

<u>Пример.</u> Найти поток векторного поля $F = (y - x)i + (x + y)j + yk$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.



$$\Pi = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iint_S (y - x)dydz + (x + y)dxdz + ydxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y}(y + y + z - 1)dz +$$

$$+ \int_0^1 dz \int_0^{1-z}(x + 1 - z - x)dx + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} ydy = \int_0^1 \left[2yz + \frac{z^2}{2} - z\right]\Big|_0^{1-y} + \int_0^1 [x - zx]\Big|_0^{1-z} + \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left[2y - 2y^2 + \frac{1}{2} - y + \frac{y^2}{2} - 1 + y\right]dy + \int_0^1 \left[1 - z - z + z^2\right]dz + \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2}\right]dy + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]\Big|_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]\Big|_0^1 = \left[-\frac{y^3}{2} + y^2 - \frac{y}{2}\right]\Big|_0^1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

<u>Пример.</u> Найти div(grad *u*), если $u = e^{x+y+z}$.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = e^{x+y+z}\left[\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right]; \quad P = Q = R = e^{x+y+z};$$

$$div(gradu) = 3e^{x+y+z} = 3u.$$

<u>Пример.</u> Определить является ли векторное поле потенциальным и найти его потенциал $F = (5x + 6yz;\ \ 5y + 6xz;\ \ 5z + 6xy)$.

$$gradu = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = 5x + 6yz; \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} = 5y + 6xz; \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} = 5z + 6xy;$$

Если поле потенциально, то должны выполняться следующие условия:

$$1)\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad 6z = 6z; \quad 2)\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad 6x = 6x; \quad 3)\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad 6y = 6y;$$

Эти условия эквивалентны условию равенства нулю ротора векторного поля. Справедливость этого утверждения видна из формулы ротора.

Таким образом, поле потенциальное. Потенциал находится по формуле:

$$u = \int_0^x 5x dx + \int_0^y 5y dy + \int_0^z (5z + 6xy) dz = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 + 6xyz;$$

Лекция 9. Ряды Фурье.

(Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик)

<u>Определение.</u> Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots \text{или},$$

короче, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции sinnx и cosnx также периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке [-π; π], а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна f(x).

Определим коэффициенты этого ряда. Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0,1,2,\ldots \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$\sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad n = 1,2,\ldots$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [-π; π], то существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = \pi a_0$. Получаем: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на cosnx и интегрируем в пределах от -π до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx)dx = \pi a_n$$

Отсюда получаем: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1,2,\ldots$

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на sinnx и интегрируем в пределах от -π до π. Получаем: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Таким образом, если функция f(x) – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,\ldots$ и $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$ существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции f(x).

<u>Определение.</u> **Рядом Фурье** для функции f(x) называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции f(x) сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция f(x) разлагается в ряд Фурье.

<u>Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.</u>

<u>Теорема.</u> (Теорема Дирихле) Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке [-π;π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π;π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).

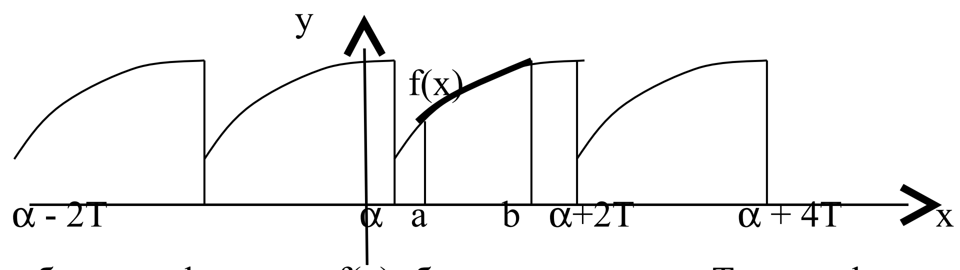
Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке [-π;π].

<u>Теорема.</u> Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-π;π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция f(x) задана на отрезке [a, b] и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b-a|$, совпадающую с функцией f(x) на отрезке [a, b].



Таким образом, функция f(x) была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка [a, b] совпадает с функцией f(x), т.е. можно считать, что функция f(x) разложена в ряд Фурье на отрезке [a, b].

Таким образом, если функция f(x) задана на отрезке, равном 2π ничем не отличается от разложения в ряд периодической функции. Если же отрезок, на котором задана функция, меньше, чем 2π, то функция продолжается на интервал $(b, a + 2\pi)$ так, что условия разложимости в ряд Фурье сохранялись.

Вообще говоря, в этом случае продолжение заданной функции на отрезок (интервал) длиной 2π может быть произведено бесконечным количеством способов, поэтому суммы получившихся рядов будут различны, но они будут совпадать с заданной функцией f(x) на отрезке [a,b].

Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Отметим следующие свойства четных и нечетных функций:

1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \text{нечетная} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \text{четная} \end{cases}$$

2) Произведение двух четных и нечетных функций является четной функцией.

3) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Справедливость этих свойств может быть легко доказана исходя из определения четности и нечетности функций.

Если f(x) – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \qquad (n = 1,2,...)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

<u>Пример.</u> Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом T = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^3; \ \ dv = \sin nx dx; \\ du = 3x^2 dx; \ \ v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3 \cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \ \ dv = \cos nx dx; \\ du = 2x dx; \ \ v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right] \right) =$$

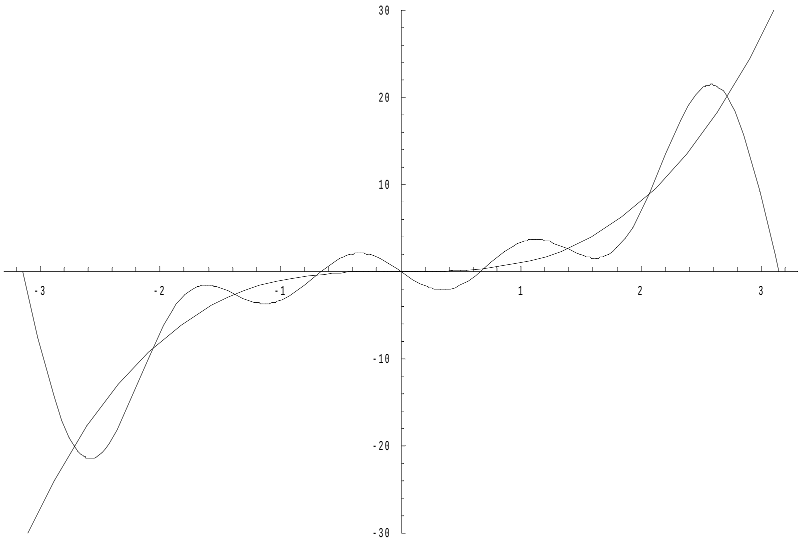
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^{3}\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^{2}}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx \right) = \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \sin nx dx; \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^{3}\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^{2}}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^{3}\cos\pi n}{n} + \frac{6\pi\cos\pi}{n^{3}} - \frac{6}{n^{3}}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} \right) \right) = -\frac{2\pi^{2}\cos\pi n}{n} + \frac{12\cos\pi n}{n^{3}} = (-1)^{n}\left(\frac{12}{n^{3}} - \frac{2\pi^{2}}{n} \right)$$

Получаем: $x^{3} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n}\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{12}{n^{3}} - \frac{2\pi^{2}}{n} \right)\sin nx$.

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.



<u>Ряды Фурье для функций с любым периодом.</u>

Ряд Фурье для функции f(x) периода T = 2l, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [-l, l] имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_{0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n}\cos\frac{\pi n}{l}x + b_{n}\sin\frac{\pi n}{l}x \right)$$

$$a_{0} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_{n} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,...$$

$$b_{n} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,...$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

<u>Ряд Фурье по ортогональной системе функций.</u>

<u>**Определение.**</u> Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке [a, b], называются **ортогональными** на этом отрезке, если $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$

<u>**Определение.**</u> Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi n(x)$, непрерывных на отрезке [a, b], называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций.

<u>**Определение.**</u> Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной)**, если $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

<u>**Определение.**</u> **Рядом Фурье по ортогональной системе функций** $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …,$\varphi n(x)$ называется ряд вида: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, коэффициенты которого

определяются по формуле: $a_n = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int\limits_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx}$, где f(x) = $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ - сумма равномерно сходящегося на отрезке [a, b] ряда по ортогональной системе функций. f(x) – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [a, b].

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются: $a_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$

3.2. Типовые варианты контрольных работ.

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

1. Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых от точек $F_1(a,0)$ и F_2 (- a, 0) есть постоянная величина равная a^2. В полученном уравнении перейти к полярным координатам и построить фигуру.

2. Дан тетраэдр ABCD: A (-1, 2, 5); B(0, -4, 5); C(-3, 2, 1); D(1,2,4). Написать уравнение плоскости , проходящей через вершину D перпендикулярно стороне AB. Определить двугранный угол между плоскостями ABD и ABC.

3. Исследовать сечение поверхности $4x^2+9y^2-36z^2-144=0$ координатными плоскостями и плоскостями: x-3=0, y+4=0, z-1=0.

4. Построить изображение поверхности, заданной в пространстве уравнением: $x^2+4y=0$

Тема 2. Приложения определенного интеграла

1. Найти длину дуги кривой $\rho = \cos^3\left(\frac{\phi}{3}\right)$ от $\phi = 0$ до $\phi = \frac{\pi}{2}$.

2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX одной арки циклоиды: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

3. Найти статический момент и момент инерции треугольника с основанием 5 см и высотой 3 см относительно его основания.

Тема 3. Кратные и криволинейные интегралы.

1. Вычислить: а) $\iint\limits_D x\ln y dxdy$, где $D:\begin{cases}0\le x\le 4\\ 1\le y\le e\end{cases}$;

б) $\iiint\limits_T x^2 yzdxdydz$, где $T:\begin{cases}x=0,\ y=0,\ z=0\\ x+y+z=2\end{cases}$;

в) $\iiint\limits_T (x+y+z)^2 yzdxdydz$ где $T:\begin{cases}z\ge (x^2+y^2)/2\\ x^2+y^2+z^2\le 3\end{cases}$;

г) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, где $D:\begin{cases}y=\sqrt{1-x^2}\\ y=0\end{cases}$; д) $\oint\limits_L ydx$ где $L:\begin{cases}x=0\\ y=0\\ 2x+3y=6\end{cases}$

е) $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx+xydy,$ если путь от A(1; 1) до B (3; 4) отрезок прямой.

2. Определить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$ и $y^2=-2x+4$.

3. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанной цилиндром $x^2/4+y^2=1$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=1$.

Тема 4. Элементы векторного анализа

1. Найти векторные линии в векторном поле $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{k}$.

2. Найти работу силы $\vec{F}=(x^2-2y)\cdot\vec{i}+(y^2-2x)\cdot\vec{j}$ вдоль отрезка *MN* от точки *M (-4;0)* до точки *N (0;2).*

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=(y-z)\cdot\vec{i}+(z-x)\cdot\vec{j}+(x-y)\cdot\vec{k}$

вдоль контура $L:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=2\cdot(1-\cos t)\end{cases}$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = (y^2 + z^2)\cdot\vec{i} + (z^2 + x^2)\cdot\vec{j} + (x^2 + y^2)\cdot\vec{k}$ в точке $M\,(1,1,1)$.

5. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = (x + z)\cdot\vec{i} + (x + y)\cdot\vec{k}$.

Тема 5. Ряды Фурье

1. Запишите уравнение гармонических колебаний, зная что их амплитуда равна 47, частота 3, а начальная фаза 12.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y=x^2$ с периодом 2, заданную на отрезке [-1, 1].

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y=x-x^2$, заданную на полупериоде [0, 1], продолжив ее: а) четным; б) нечетным образом.

4. Дана функция $f(x)=\cos 2x$ с периодом 2π, заданная на интервале $[0,\pi]$. Определить коэффициент a_3 разложения $f(x)$ в ряд Фурье.

3.3. Задание для индивидуальной самостоятельной работы студентов.

Студентам необходимо самостоятельно повторять ранее изученные понятия по математике. Основное время, выделенное на самостоятельную работу, отдается на выполнение домашних заданий и подготовку к контрольным работам.

3.4. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-преподавательского состава

<table>
<tr><th colspan="8">Обеспеченность преподавательским составом</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ф.И.О. должность по штатному расписанию</th><th rowspan="3">Какое образовательное учреждение профессионального образования окончил, специальность по диплому</th><th rowspan="3">Ученая степень и ученое звание (почетное звание)</th><th colspan="3">Стаж научно педагогической работы</th><th rowspan="3">Основное место работы, должность</th><th rowspan="3">Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Всего</th><th colspan="2">В т. ч. педагогический</th></tr>
<tr><th>Всего</th><th>В том числе по преподаваемой дисциплине</th></tr>
</table>

3	4	5	6	7	8	9	10
Двоерядкина Н.Н., доцент	БГПУ, учитель математики	к.п.н.	8	8	4	АмГУ	1 ставка
Гришкина Т.Е., ст.преподаватель	АмГУ, математик	-	9	9	1	АмГУ	1 ставка
Торопчина Г.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	-	40	40	4	АмГУ	0,5 ставки