Министерство образования и науки РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «Амурский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
_________ Г.В. Литовка
«____» ________ 2008г.

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МАТЕМАТИКА»
для специальности 040101 – «Социальная работа»

Составители: Терентьева Е.А., Голик А.В.

Благовещенск, 2008

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

Авторы- составители: Терентьева Е.А., Голик А.В.

Учебно- методический комплекс дисциплины «Математика» для специальности 040101 «Социальная работа» – Благовещенск: АмГУ, 2008. - 93с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи учебной дисциплины «Математика» и ее место в учебном процессе.

1.1 **Цели преподавания учебной дисциплины «Математика».**

Преподавание дисциплины «Математика » ставит своей целью:

- формирование личности студента, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске решений.

Задачи изучения дисциплины.

- на примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии других наук;
- научить студентов приемам исследования и решения, математически формализованных задач;
- выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, рядов, основы теории вероятностей;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.2. Содержание учебной дисциплины «Математика»

Согласно государственному стандарту математических и естественных дисциплин для специальностей 040101 студент должен изучить:

- аналитическую геометрию и линейную алгебру;
- дифференциальное и интегральное исчисления;
- дифференциальные уравнения;
- ряды;
- элементы теории вероятности;
- математические модели видов и процессов в системе социальной работы;
- математические методы исследования в социальной работе.

Тематика лекционных занятий

	Тема занятия Лекции (36 часов)	**Час. (заочное)**
1	**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.** Определители, их свойства и вычисление. Матрицы и операции над ними. Свойства операций. Обратная матрица. Ранг матрицы. Система линейных уравнений. Свойства систем уравнений: совместимость, определенность. Частное и общее решение. Эквивалентность систем. Однородные и неоднородные СЛУ. Свободные и базисные переменные.	4 (1)
2	**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ.** Задачи аналитической геометрии в R^2. Уравнение линии на плоскости. Различные уравнения прямой на плоскости; угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола. Их геометрические свойства и уравнения. Уравнения прямой и плоскости в R^3. Угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью.	4 (1)
3	**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.** Производная функции, ее физический и геометрический смысл. Правило нахождения производной, производная сложной и обратной функции. Таблица производных. Параметрические функции и их дифференцирование. Производные высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям; дифференциалы высших порядков, правило Лопиталя.	3 (1)
4	**ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ.** Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции, экстремум функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции. Выпуклость и вогнутость графика функции, точка перегиба, асимптоты графика функции, примеры построения графиков функции.	2 (1)
5	**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.** Первообразная и неопределенный интеграл, его свойства. Методы интегрирования.	3 (1)
6	**ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.** Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, определение интеграла, его свойства. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования. Приложения интегралов к решению задач. Несобственные интегралы и их свойства.	3 (1)
7	**ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.** Определение, способы задания, область определения, предел, непрерывность, частные производные, полный дифференциал; касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные и	2

	полные дифференциалы высших порядков, дифференцирование неявных функций, экстремум функции нескольких переменных. Скалярное поле, производная по направлению, градиент.	
8	**ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.** Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям и некоторые общие понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижения порядка, линейные дифференциальные уравнения высших порядков, однородные и неоднородные. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, уравнения с правой частью специального вида, нормальная система дифференциальных уравнений.	3 (1)
9	**РЯДЫ.** Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Действия с рядами. Методы исследования сходимости знакопеременных рядов. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды. Разложение функций в степенной ряд.	3 (1)
10	**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.** - предмет теории вероятностей; случайные события; классификация событий; алгебра событий; формулы комбинаторики; различные подходы к введению понятий вероятностей события; - теорема сложения несовместимых событий; условия вероятностей; умножение вероятностей; теорема сложения совместимых событий; вероятность появления хотя бы одного из событий; - формула полной вероятности; теорема полной вероятности; теорема гипотез; - повторные испытания; формула Бернулли; формула Пуассона; - локальная и интегральная теоремы Лапласа; - случайные величины, функция и плотность распределения; - числовые характеристики случайных величин; математические ожидания; свойства математического ожидания; дисперсия случайной величины и ее свойства; - основные распределения случайной величины; биноминальное распределение; распределение Пуассона; равномерное распределение; нормальное распределение; показательное распределение и их свойства.	5 (2)
	Математические методы исследования в социальной работе.	2(1)
	Математические модели видов и процессов в системе социальной работе.	2(1)
	ВСЕГО	**36 (12)**

Тематика практических занятий	Кол-во часов
1. Линейная алгебра. Определители и их свойства. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.	5 (2)
2.Векторная алгебра. Векторы. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису i, j, k, . Векторное произведение векторов, его свойства. Смешанное произведение векторов, его свойства и приложение.	4
2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Уравнения прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Окружность, эллипс. Гипербола, парабола. Уравнение прямой и плоскости в пространстве.	4 (2)
3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Техника дифференцирования функций. Дифференцирование неявных и заданных параметрически функций. Производные высших порядков.	4 (1)
4. Приложение производной к исследованию функции и построению графиков. Исследование функций и построение графиков.	4 (1)
5. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования (табличное, по частям и подстановкой). Интегрирование алгебраических дробей.	4 (1)
6. Определенный интеграл. Вычисление определенных интегралов Методы интегрирования. Приложения определенных интегралов.	4 (1)
7. Функции нескольких переменных. Нахождение частных производных функции многих переменных. Частные производные высших порядков. Дифференциал функции. Производная по направлению, градиент. Экстремум функции нескольких переменных. Касательная и плоскость.	6
8. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные, однородные уравнения I порядка. Уравнения высших порядков, допускающих понижения. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений.	4 (1)
9. Числовые и функциональные ряды. Числовые ряды. Признаки сходимости. Действия с рядами. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды и их приложение. Ряд Тейлора и их приложение.	4
10. Элементы теории вероятностей. Формулы комбинаторики. Непосредственный подсчет вероятности. Вероятность несовместных и совместных событий. Умножение вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Бейеса. Математическое ожидание. Дисперсия. Функция распределения. Плотность. Законы	6 (3)

распределения. Системы случайных величин.	
11. Корреляционный анализ, критерии проверки гипотез, дисперсионный анализ.	**3**
12. Математические модели видов и процессов в системе социальной работы.	**2**
ВСЕГО	**54 (10)**

1.3. Тематическое планирование практических занятий и формы текущего контроля

Темы (очное отделение)	**Час.**	**Форма контроля**	
		РГР	**К.Р.**
1. Определители и их свойства их вычисление. Формулы Крамера.	**1**		
2. Матрицы, операции над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.	**2**		+
3. Однородные и неоднородные СЛУ. Метод Гаусса	**2**		
4. Векторы. Линейные операции. Длина вектора. Скалярное произведение.	**1**		
5. Векторное и смешанное произведение	**1**		
6. Прямая на плоскости.	**2**		
7. Кривые второго порядка.	**2**	+	
8. Функция. Область определения. Элем, функции.	**2**		
9. Предел функции. Непрерывность,	**2**		
10. Таблица производных. Правила дифференцирования.	**1**		
11. Приложение производной. Исследование функций и построение графиков	**2**		+
12. Нахождение частных производных функции многих переменных	**1**		
13. Экстремум функции нескольких переменных.	**2**		
14. Методы интегрирования (табличное, по частям и подстановкой)	**2**		+
15. Интегрирование алгебраических дробей	**1**		
16. Вычисление определенных интегралов. Методы интегрирования. Приложение определенного интеграла.	**2**		
17. Числовые ряды. Сходимость числовых рядов.	**1**		
18. Перестановки, размещения, сочетания. Классическое и геометрическое определение вероятностей.	**1**		
19. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	**1**		

20. Противоположные события. Вероятность появления хотя бы одного из событий.	**1**	+	
21. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.	**1**		
22. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число появления событий.	**1**		
23. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.	**1**		
24. Дискретные случайные величины и их законы распределения и числовые характеристики.	**1**		
25. Функция распределения непрерывной случайной величины. Плотность распределения вероятности.	**1**		
26. Равномерное, показательное распределения.	**1**		
27. Нормальное распределение.	**1**		

Темы для самостоятельного изучения

1. Векторы. Линейные операторы над векторами. Направляющие косинусы и длина вектора.
2. Скалярное произведение вектора и его свойства. Длина вектора и угол между двумя векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.
3. Плоскость и прямая в пространстве.
4. Основные элементарные функции, их свойства и график.
5. Производная функции, ее смысл в прикладных задачах. Правило нахождения производной и дифференциала.
6. Ряды.

Основное время, выделенное на самостоятельную работу студентам очной формы обучения, отдается на выполнение РГР, подготовку к контрольным работам.

Студентам заочной формы обучения самостоятельно необходимо прорабатывать все разделы программы, так как аудиторные занятия носят вводный характер.

1.4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Линейная и векторная алгебра

1. Определители второго, третьего. Способы их вычисления.
2. Свойства определителей (с доказательством).
3. Решение систем линейных уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера.
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Матрицы, основные понятия, действия над матрицами.
6. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений с помощью матриц.
7. Векторы, основные понятия, линейные операции над векторами.
8. Проекция вектора на ось, свойства проекции.

9. Модуль вектора, расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении, направляющие косинусы, координаты единичного вектора.
10. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства, физический смысл, вычисление.
11. Нахождение угла между векторами. Условия перпендикулярности и параллельности векторов.
12. Векторное произведение векторов. Определения, свойства, физический смысл, вычисление. Геометрический смысл.
13. Смешанное произведение векторов. Определение, свойства, геометрический смысл, вычисление.

Аналитическая геометрия

14. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование. Уравнение прямой в отрезках.
15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой проходящей через одну точку, через две точки.
16. Нахождение угла между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
17. Вывод уравнения окружности. Вывод уравнения эллипса и его исследование.
18. Вывод уравнения гиперболы и его исследования.
19. Вывод уравнения параболы и его исследование.
20. Полярная система координат, связь с декартовой системой координат.
21. Вывод уравнения плоскости, проходящей через точку.
22. Общее уравнение плоскости и его исследование.
23. Нахождение угла между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
24. Вывод канонических и параметрических уравнений прямых в пространстве.
25. Угол между плоскостями.

Производная функции

26. Определение производной, геометрический смысл производной.
27. Основные правила дифференцирования функций.
28. Производная логарифмической функции.
29. Дифференцирование обратных функций.
30. Дифференцирование неявной и сложной функций.
31. Производная степенной и показательной функций.
32. Параметрические функции и их дифференцирование.
33. Производные высших порядков функций заданных явно.
34. Производные высших порядков функций заданных неявно, параметрически.
35. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
36. Дифференциалы различных порядков.

Приложения производной

37. Необходимые условия возрастания и убывания функции.
38. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
39. Экстремум функции. Необходимые условия экстремума функции.
40. Достаточные условия существования экстремума функции.
41. Выпуклость, вогнутость, точка перегиба графика функции. Достаточный признак выпуклости графика функции.
42. Асимптоты графика функции.

Первообразная и неопределенный интеграл

43. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Геометрический смысл неопределенного интеграла.
44. Свойства неопределенного интеграла.
45. Методы интегрирования.
46. Интегрирование заменой переменной.
47. Интегрирование по частям.
48. Интегрирование простейших рациональных дробей.
49. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Отыскание неопределенных коэффициентов.
50. Интегрирование тригонометрических функций.
51. Интегрирование иррациональных функций.

Определенный интеграл

52. Задачи, приводящие к определенному интегралу.
53. Определение определенного интеграла.
54. Условия существования определенного интеграла.
55. Геометрический и механический смысл определенного интеграла.
56. Свойства определенного интеграла.
57. Интеграл с переменным верхним пределом.
58. Формула Ньютона - Лейбница.
59. Методы интегрирования.
60. Несобственные интегралы 1 и 2 - порядка.
61. Приложение определенного интеграла.

Функции нескольких переменных

62. Определение, способы задания, область определения функции нескольких переменных.
63. Частные производные и их геометрический смысл.
64. Частные производные высших порядков.
65. Частные дифференциалы и полный дифференциал.
66. Дифференцирование неявных функций.
67. Скалярное поле. Производная по направлению.
68. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
69. Определение экстремума. Необходимое и достаточное условия существования экстремума.

Дифференциальные уравнения

70. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям и некоторые общие понятия.
71. Дифференциальные уравнения 1 - го порядка. Основные понятия.
72. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.
73. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.
74. Уравнения в полных дифференциалах.
75. Уравнения высших степеней и методы понижения порядка дифференциального уравнения.

Элементы теории вероятности

76. Случайные события. Основные определения.
77. Теорема сложения вероятностей, зависимых и независимых событий.
78. Теорема умножения вероятностей, зависимых и независимых событий.
79. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.
80. Формула Бернулли, Пуассона.
81. Теоремы Лапласа.
82. Определение дискретной и непрерывной случайных величин. Ряд распределения, многоугольник распределения.
83. Функция распределения, свойства.
84. Плотность распределения, свойства.
85. Математическое ожидание. Математическое ожидание как среднее значение случайной величины. Свойства.
86. Дисперсия. Свойства.
87. Биномиальное распределение.
88. Распределение Пуассона.
89. Равномерное распределение.
90. Нормальное распределение.
91. Вероятность заданного отклонения.
92. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок. Функция Лапласа.
93. Системы случайных величин. Распределение системы случайных величин.
94. Функция распределения системы и её свойства.
95. Плотность распределения системы и её свойства.
96. Корреляционный момент связи случайных величин. Коэффициент корреляции.

1.5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. **Данко, Павел Ефимович.** Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов: В 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. - 5-е изд., испр. - М. : Высш. шк., 1996 - 1999.
2. **Теория вероятностей** [Текст] : учеб.: Рек. Мин. обр. РФ / Ред. В.С. Зарубин, Ред. А.П. Крищенко. - 2-е изд. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.- 456 с.
3. **Гмурман, Владимир Ефимович**. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ / В.Е. Гмурман. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2003. - 406 с.
4. **Яблонский, Сергей Всеволодович**. Введение в дискретную математику [Текст] : учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / С.В. Яблонский . - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2001. - 384 с.
5. **Натансон, И. П.** Краткий курс высшей математики [Текст] : учебник: рек. Мин. обр. РФ / Натансон И.П. - СПб. : Лань, 2005. - 728 с.

Дополнительная

1. **Бугров Я. С., Никольский С. М.** "Элементы линейной алгебры и аналитической". Москва - наука, 1999г.
2. **Бугров Я. С., Никольский С. М.** "Дифференциальное и интегральное исчисление". Москва - наука, 1999г.
3. **Бугров Я. С., Никольский С. М.** "Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды". Москва - наука, 1999г.
4. **Ермилова, Нелли Александровна.** Введение в математический анализ [Текст] : Учеб.-метод. пособие / Н. А. Ермилова, 2002. - 64 с

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1) по проведению лекций;
2) к практическим занятиям;
3) по выполнению самостоятельных работ;
4) по организации контроля знаний студентов.

1) *Лекция* (от латинского ιectio «*чтение*», хи – хш в.) – одна из основных, экономичных, эффективных и эмоционально наполненных форм учебных занятий в ВУЗе. Она представляет собой систематическое, последовательное, устное изложение преподавателем раздела конкретной науки или учебной дисциплины. *Лекция состоит* в основном из: *а*) вводной части, в которой актуализируется сущность вопроса, идёт подготовка к восприятию основного учебного материала; *б*) основной части, где излагается суть рассматриваемой проблемы; *в*) заключения, где делаются выводы и даются рекомендации, практические советы.

Лекция – это теоретическая основа для самостоятельной работы студента. Цикл лекций даёт систематическое изложение изучаемого курса. В лекции преподаватель старается сориентировать студентов в рассматриваемой научной проблеме, раскрыть наиболее существенные стороны, дать анализ различных точек зрения, взглядов. *Главная задача* студента понять сущность рассматриваемой проблемы, уловить логику рассуждений лектора; размышлять вместе с ним, оценивать его аргументацию, составить мнение об изучаемых явлениях и соотнести изучаемое с имеющимися знаниями.

Прослушанный теоретический материал студенты закрепляют на практических занятиях, при выполнении домашних и самостоятельных работ.

2)*Практическое занятие* начинается с проверки домашнего задания. Наиболее сложные задачи, с которыми не справилась большая часть студентов целесообразно решить на доске. При изучении новой темы необходимо постоянно обращаться к теоретическому материалу. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то необходимо помочь ему выбрать наиболее рациональный. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием.

Для оптимизации учебного процесса и развития практических навыков овладения математикой весьма эффективным является проведение самостоятельных работ, как по практическому, так и по теоретическому материалу.

3) *Самостоятельная работа* студента (СРС) – это вид познавательной деятельности, при котором проявляются активность и независимость личности, инициатива, ответственность, способность действовать без посторонней помощи и руководства, процесс усвоения определённой суммы знаний и способов деятельности.

Основная цель самостоятельной работы – формирование самостоятельности в познавательной деятельности.

По форме самостоятельная работа может быть: *а*) *Аудиторная* – осуществляется на лекции, практических занятиях и представляет собой форму самостоятельной продуктивной в учебном отношении деятельности студентов; *б*) *Внеаудиторная* – предусматривает изучение научной и специальной литературы, подготовку к занятиям, написание рефератов, докладов, выполнение заданий по темам, вынесенным на самостоятельное изучение.

4) Существуют различные *формы контроля знаний студентов*: *а*) *Текущий контроль* – осуществляется в разных формах в ходе повседневных аудиторных занятий, может быть организован преподавателем в виде индивидуального или группового контроля с использованием разных вариантов устных, письменных, практических занятий; *б*) *Промежуточный (периодический) контроль* – проводится, как правило, с целью концентрации внимания студентов на особо сложных вопросах изучаемой темы, раздела дисциплины или для стимуляции дополнительного повторения изучаемого материала, а также в конце каждого семестра.

Эти формы контроля позволяют выявить наличие и прочность базовых знаний студента.

Зачёт является общепризнанной формой контроля. В качестве зачёта студентам могут быть предложены устные, письменные или практические задания. В отдельных случаях зачёт может иметь задание комбинированного или творческого типа. Преподавателю предоставляется право оценивать зачётные задания и выставлять отметки «зачтено» или «незачтено». При условии успешной активной работы в течение всего семестра зачёт можно получить «автоматом», т.е. автоматически, без дополнительных вопросов к студенту со стороны преподавателя.

3. ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

3.1 КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1. Матрицы и определители

1.1.Матрицы. Операции над матрицами.

Прямоугольной матрицей размера $m\times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

или сокращенно в виде $A = (a_{i\,j})$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Числа $a_{i\,j}$, составляющие данную матрицу, называются ее *элементами*; первый индекс указывает на номер строки, второй - на номер столбца. Две матрицы $A = (a_{i\,j})$ и $B = (b_{i\,j})$ одинакового размера называются *равными*, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть $A = B$, если $a_{i\,j} = b_{i\,j}$.

Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно *вектор-строкой* или *вектор-столбцом*. Вектор-столбцы и вектор-строки называют просто *векторами.*

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Матрица размера $m\times n$, все элементы которой равны нулю, называются *нулевой* *матрицей* и обозначается через 0. Элементы матрицы с одинаковыми индексами называют элементами *главной диагонали*. Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть m = n, то матрицу называют *квадратной* порядка n. Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются *диагональными матрицами*. Если все элементы $a_{i\ i}$ диагональной матрицы равны 1, то матрица называется *единичной* и обозначается буквой Е.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. *Транспонированием* называется такое преобразование матрицы, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров. Обозначается транспонирование значком Т наверху.

Пусть дана матрица А. Переставим строки со столбцами. Получим матрицу

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

которая будет транспонированной по отношению к матрице А. В частности, при транспонировании вектора-столбца получается вектор-строка и наоборот.

Произведением матрицы А на число λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы А умножением на число λ: $\lambda A = (\lambda a_{i j})$.

Суммой двух матриц $A = (a_{i\ j})$ и $B = (b_{i\ j})$ одного размера называется матрица $C = (c_{i j})$ того же размера, элементы которой определяются по формуле $c_{i j} = a_{i j} + b_{i j}$.

Произведение AB матрицы A на матрицу B определяется в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$, где $i = \overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, заданных в определенном порядке AB, называется матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу: $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} +... + a_{im} b_{mk} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sk}$.

Иначе говоря, элементы матрицы-произведения определяются следующим образом: элемент i-й строки и k-го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

1.2. Определители

Перестановкой чисел 1, 2,..., n называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. В элементарной алгебре доказывается, что число всех перестановок, которые можно образовать из n чисел, равно 12...n = n!. Например, из трех чисел 1, 2, 3 можно образовать 3!=6 перестановок: 123, 132, 312, 321, 231, 213. Говорят, что в данной перестановке числа i и j составляют *инверсию* (беспорядок), если i>j, но i стоит в этой перестановке раньше j, то есть если большее число стоит левее меньшего.

Перестановка называется *четной* (или *нечетной)*, если в ней соответственно четно (нечетно) общее число инверсий. Операция, посредством которой от одной перестановки переходят к другой, составленной из тех же n чисел, называется *подстановкой n-ой степени*.

Подстановка, переводящая одну перестановку в другую, записывается двумя строками в общих скобках, причем числа, занимающие одинаковые места в рассматриваемых перестановках, называются *соответствующими* и пишутся одно под другим. Например, символ $\begin{vmatrix} 3\,1\,2\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{vmatrix}$ обозначает подстановку, в которой 3 переходит в 4, 1 $\to$ 2, 2 $\to$ 1, 4 $\to$ 3. Подстановка называется *четной* (или *нечетной*), если общее число инверсий в обеих строках подстановки четно (нечетно). Всякая подстановка n-ой степени может быть записана в виде $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{vmatrix}$,т.е. с натуральным расположением чисел в верхней строке.

Пусть нам дана квадратная матрица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим все возможные произведения по n элементов этой матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, т.е. произведений вида:

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\ \dots\ a_{nq_n},$$

где индексы q_1, q_2,..., q_n составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2,..., n. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, т.е. равно n!. Знак произведения (4.4) равен $(-1)^{q}$, где q - число инверсий в перестановке вторых индексов элементов.

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице, называется алгебраическая сумма n! членов вида $a_{1q_1}a_{2q_2}\ \dots\ a_{nq_n}$. Для записи определителя употребляется символ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ или $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(детерминант, или определитель, матрицы А).

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.

2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{i\,j} = b_j + c_j$ ($j=\overline{1,n}$), то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.

8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Минором $M_{i\,j}$ элемента $a_{i\,j}$ определителя d n-го порядка называется определитель порядка n-1, который получается из d вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента $a_{i\,j}$ определителя d называется его минор $M_{i\,j}$, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента $a_{i\,j}$ будем обозначать $A_{i\,j}$. Таким образом, $A_{i\,j} = (-1)^{i+j} M_{i\,j}$.

Способы практического вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков, дает следующая теорема.

Теорема (разложение определителя по строке или столбцу).

Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеет место разложение d по элементам i-й строки $d = a_{i\,1} A_{i\,1} + a_{i\,2} A_{i\,2} +\ldots + a_{i\,n} A_{i\,n}$ ($i = \overline{1,n}$) или j- го столбца $d = a_{1\,j} A_{1\,j} + a_{2\,j} A_{2\,j} +\ldots + a_{n\,j} A_{n\,j}$ ($j = \overline{1,n}$).

В частности, если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

Лекция 2. Ранг матрицы. Обратная матрица. Системы линейных уравнений

2.1. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу. Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка* матрицы A. Очевидно, что матрица A обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n. Среди всех отличных от нуля миноров матрицы A найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом* матрицы. Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю. Ранг матрицы A обозначается через r(A). Очевидно, что выполняется соотношение $0 \le r(A) \le \min(m, n)$.

Ранг матрицы находится либо методом окаймления миноров, либо методом элементарных преобразований. При вычислении ранга матрицы первым способом следует переходить от миноров низших порядков к минорам более высокого порядка. Если уже найден минор D k-го порядка матрицы A, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры (k+1)-го порядка, окаймляющие минор D, т.е. содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Элементарными называются следующие преобразования матрицы:

1) перестановка двух любых строк (или столбцов),

2) умножение строки (или столбца) на отличное от нуля число,

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы А и В эквивалентны, то это записывается так: А ~ В.

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц (число которых может равняться нулю), а все остальные элементы равны нулю,

например, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

2.2. Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу А.

Обозначим Δ =det A.

Квадратная матрица А называется *невырожденной,* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной,* или *особенной*, если $\Delta = 0$.

Квадратная матрица В называется *обратной* для квадратной матрицы А того же порядка, если их произведение А В = В А = Е, где Е - единичная матрица того же порядка, что и матрицы А и В.

Теорема. Для того, чтобы матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице А, обозначается через A^{-1}, так что $B = A^{-1}$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы по формуле для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (ЭП). Любую неособенную матрицу А путем ЭП только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице Е. Если совершенные над матрицей А ЭП в том же порядке применить к единичной матрице Е, то в результате получится обратная матрица. Удобно совершать ЭП над матрицами А и Е одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту. Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

2.3. Критерий совместности

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2, \qquad (*) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m1} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Здесь $a_{i\ j}$ и b_i ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) - заданные, а x_j - неизвестные действительные числа. Используя понятие произведения матриц, можно переписать систему (*) в виде: $AX = B$,

где $A = (a_{i\ j})$ - матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы, которая называется *матрицей системы*, $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $B = (b_1, b_2,..., b_m)^T$ - векторы-столбцы, составленные соответственно из неизвестных x_j и из свободных членов b_i.

Упорядоченная совокупность *n* вещественных чисел (c_1, c_2,..., c_n) называется *решением системы* (*), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных x_1, x_2,..., x_n каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор $C= (c_1, c_2,..., c_n)^T$ такой, что $AC \equiv B$.

Система (*) называется *совместной,* или *разрешимой,* если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной,* или *неразрешимой*, если она не имеет решений.

Матрица $$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots \quad \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице A столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы.*

Вопрос о совместности системы (*) решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера - Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц A и $\overline{A}$ совпадают, т.е. $r(A) = r(\overline{A}) = r$.

Для множества M решений системы (*) имеются три возможности:

1) M = ∅ (в этом случае система несовместна);

2) M состоит из одного элемента, т.е. система имеет единственное решение (в этом случае система называется *определенной*);

3) M состоит более чем из одного элемента (тогда система называется *неопределенной*). В третьем случае система (*) имеет бесчисленное множество решений.

Система имеет единственное решение только в том случае, когда r(A) = n. При этом число уравнений - не меньше числа неизвестных ($m \geq n$); если $m>n$, то m-n уравнений являются следствиями остальных. Если $0<r<n$, то система является неопределенной.

Для решения произвольной системы линейных уравнений нужно уметь решать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных, - так называемые *системы крамеровского типа*:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n1} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n. \end{array} \qquad (**)$$

Системы (**) решаются одним из следующих способов: 1) методом Гаусса, или методом исключения неизвестных; 2) по формулам Крамера; 3) матричным методом.

2.4. Формулы Крамера

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим *главный определитель системы* (**), т.е. определитель матрицы A $\Delta = \det(a_{ij})$ и *n вспомогательных определителей* Δ_i ($i=\overline{1,n}$), которые получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера имеют вид: $\Delta \cdot x_i = \Delta_i$ ($i = \overline{1,n}$).

Правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_i = \Delta_i / \Delta$.

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители $\Delta_i = 0$ ($i=\overline{1,n}$), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

3.4. Матричный метод

Если матрица A системы линейных уравнений невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную, и решение системы совпадает с вектором $C = A^{-1}B$. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле $X=C$, $C=A^{-1}B$ называют *матричным способом решения системы,* или *решением по методу обратной матрицы*.

3.5. Системы линейных уравнений общего вида

Если система (*) оказалась совместной, т. е. матрицы A и $\overline{A}$ имеют один и тот же ранг, то могут представиться две возможности: а) $r = n$; б) $r < n$:

а) если $r = n$, то имеем n независимых уравнений с n неизвестными, причем определитель Δ этой системы отличен от нуля. Такая система имеет единственное решение, получаемое по формулам Крамера;

б) если $r < n$, то число независимых уравнений меньше числа неизвестных.

Перенесем лишние неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2},..., x_n$, которые принято называть свободными, в правые части; наша система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 +... + a_{1r} x_r = b_1 - a_{1,r+1} x_{r+1} -... - a_{1n}x_n, \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 +... + a_{2r} x_r = b_2 - a_{2,r+1} x_{r+1} -... - a_{2n}x_n, \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 +... + a_{rr} x_r = b_r - a_{r,r+1} x_{r+1} -... - a_{rn}x_n.
\end{array}$$

Ее можно решить относительно $x_1, x_2,..., x_r$, так как определитель этой системы (r-го порядка) отличен от нуля. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, получим по формулам Крамера соответствующие числовые значения для $x_1, x_2,..., x_r$. Таким образом, при $r < n$ имеем бесчисленное множество решений.

Система (*) называется *однородной*, если все $b_i = 0$, т. е. она имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0,\\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0, \qquad\qquad (***)\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&a_{m1} x_1 + a_{m1} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0.
\end{aligned}
$$

Из теоремы Кронекера-Капелли следует, что она всегда совместна, так как добавление столбца из нулей не может повысить ранга матрицы. Это, впрочем, видно и непосредственно - система (***) заведомо обладает нулевым, или тривиальным, решением $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Пусть матрица A системы (**) имеет ранг r.

Если r = n, то нулевое решение будет единственным решением системы (***); при r < n система обладает решениями, отличными от нулевого, и для их разыскания применяют тот же прием, как и в случае произвольной системы уравнений.

Лекция 3. Векторная алгебра

Упорядоченную совокупность (x_1, x_2, ... , x_n) n вещественных чисел называют *n-мерным вектором*, а числа x_i ($i = \overline{1, n}$) - *компонентами,* или *координатами,* вектора.

Компоненты вектора нельзя менять местами, например, (3, 2, 5, 0, 1) ≠ ≠ (2, 3, 5, 0, 1).

Произведением вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на действительное число λ называется вектор $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Суммой векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется вектор $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

N-мерное векторное пространство R^n определяется как множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Система e_1, e_2, ... , e_m n-мерных векторов называется *линейно зависимой*, если найдутся такие числа λ_1, λ_2, ... , λ_m, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = 0$; в противном случае данная система векторов называется *линейно независимой*, то есть указанное равенство возможно лишь в случае, когда все $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = = \lambda_m = 0$.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов в R^3, интерпретируемых как направленные отрезки, поясняют следующие теоремы.

Теорема 1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Теорема 2. Для того, чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Теорема 3. Для того, чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Тройка некомпланарных векторов a, b, c называется *правой*, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов a, b, c в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае a, b,

c - *левая тройка*. Все правые (или левые) тройки векторов называются *одинаково ориентированными.*

Тройка e_1, e_2, e_3 некомпланарных векторов в R^3 называется *базисом*, а сами векторы e_1, e_2, e_3 - *базисными*. Любой вектор a может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть представлен в виде

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \qquad (*)$$

Числа x_1, x_2, x_3 в разложении (*) называются *координатами* вектора a в базисе e_1, e_2, e_3 и обозначаются $a(x_1, x_2, x_3)$. Если векторы e_1, e_2, e_3 попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты x_1, x_2, x_3 - *прямоугольными.* Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать i, j, k.

Будем предполагать, что в пространстве R^3 выбрана правая система декартовых прямоугольных координат $\{0, i, j, k\}$.

Векторным произведением вектора a на вектор b называется вектор c, который определяется следующими тремя условиями:

1. Длина вектора c численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, т. е. $|c| = |a|\,|b| \sin (a \hat{} b)$.

2. Вектор c перпендикулярен к каждому из векторов a и b.

3. Векторы a, b и c, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку.

Для векторного произведения c вводится обозначение $c = [ab]$ или $c = a \times b$.

Если векторы a и b коллинеарны, то $\sin(a \hat{} b) = 0$ и $[ab] = 0$, в частности, $[aa] = 0$. Векторные произведения ортов: $[ij] = k$, $[jk] = i$, $[ki] = j$.

Если векторы a и b заданы в базисе i, j, k координатами $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, то

$$[ab] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \bar{j}\,(a_1b_3 - a_3b_1) + \bar{k}\,(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Если векторное произведение двух векторов a и b скалярно умножается на третий вектор c, то такое произведение трех векторов называется *смешанным произведением* и обозначается символом a b c.

Если векторы a, b и c в базисе i, j, k заданы своими координатами $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$, то

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование - это скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

Если векторы образуют правую тройку, то их смешанное произведение есть число положительное, равное указанному объему; если же тройка a, b, c - левая, то $a\,b\,c<0$ и $V = -\,a\,b\,c$, следовательно $V = |\,a\,b\,c\,|$.

Координаты векторов, встречающиеся в задачах первой главы, предполагаются заданными относительно правого ортонормированного базиса. Единичный вектор, сонаправленный вектору a, обозначается символом a^o. Символом r=OM обозначается радиус-вектор точки M, символами a, AB или $|\,a\,|$, $|\,AB\,|$ обозначаются модули векторов a и AB.

Лекция 4. Аналитическая геометрия на плоскости

В аналитической геометрии *линия на плоскости* определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению F(x,y)=0. При этом на функцию F должны быть наложены ограничения так, чтобы, с одной стороны, это уравнение имело бесконечное множество решений и, с другой стороны, чтобы это множество решений не заполняло “куска плоскости”. Важный класс линий составляют те, для которых функция F(x,y) есть многочлен от двух переменных, в этом случае линия, определяемая уравнением F(x,y)=0, называется *алгебраической*. Алгебраические линии, задаваемые уравнением первой степени, суть прямые. Уравнение второй степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или линию, распадающуюся на две прямые.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Прямая на плоскости может быть задана одним из уравнений:

1^0. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Вектор n(A,B) ортогонален прямой, числа A и B одновременно не равны нулю.

2^0. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_o = k (x - x_o),$$

где k - угловой коэффициент прямой, то есть $k = \mathrm{tg}\,\alpha$, где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox, M (x_o, y_o) - некоторая точка, принадлежащая прямой.

Уравнение2^0 принимает вид y = kx + b, если M (0, b) есть точка пересечения прямой с осью Oy.

3^0. Уравнение прямой в отрезках:

$$x/a + y/b = 1,$$

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

4^0. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки - $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

5^0. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ параллельно данному вектору $a(m, n)$:

$$\frac{y - y_1}{n} = \frac{x - x_1}{m}.$$

6^0. Нормальное уравнение прямой: $rn^o - p = 0$,
где r - радиус-вектор произвольной точки M(x, y) этой прямой, n^o - единичный вектор, ортогональный этой прямой и направленный от начала координат к прямой; p - расстояние от начала координат до прямой.

Нормальное уравнение прямой в координатной форме имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox.

Величина угла между прямыми $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$ задается формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} \right|.$$

Равенство $1 + k_1 k = 0$ есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых.

Для того, чтобы два уравнения $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, задавали одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были пропорциональны:
$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$; задавали две различные параллельные прямые: $A_1/A_2 = B_1/B_2$ и $B_1/B_2 \neq C_1/C_2$; прямые пересекались: $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$.

Расстояние d от точки $M_o(x_o, y_o)$ до прямой есть длина перпендикуляра, проведенного из точки M_o к прямой. Если прямая задана нормальным уравнением, то $d = |r_o\ n^o - p|$, где r_o - радиус-вектор точки M_o или, в координатной форме, $d = |x_o \cos\alpha + y_o \sin\alpha - p|$.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Предполагается, что среди коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} есть отличные от нуля.

Уравнение окружности с центром в точке C(a, b) и радиусом, равным R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная 2a.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1. \qquad (*)$$

Эллипс, заданный уравнением (*), симметричен относительно осей координат. Параметры *a* и *b* называются *полуосями* эллипса.

Пусть a>b, тогда фокусы F_1 и F_2 находятся на оси Ox на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Расстояния от точки M(x, y) эллипса до его фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами: $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Если же a < b, то фокусы находятся на оси Oy, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$, $r_1 = b + \varepsilon x$, $r_2 = b - \varepsilon x$.

Если a = b, то эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса *a*.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) равна по абсолютной величине данному числу 2a.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1. \qquad (**)$$

Гипербола, заданная уравнением (**), симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось Ox в точках A (a,0) и A (-a,0) - вершинах гиперболы и не пересекает ось Oy. Параметр *a* называется *вещественной полуосью*, *b* - *мнимой полуосью*. Параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}$ есть расстояние от фокуса до начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые $y = \pm\, b/a\ x$ называются *асимптотами* гиперболы. Расстояния от точки M(x,y) гиперболы до ее фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами: $r_1 = |\varepsilon x - a|$, $r_2 = |\varepsilon x + a|$.

Гипербола, у которой a = b, называется *равносторонней*, ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнение асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ называются *сопряженными*.

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1) $y^2 = 2px$ - парабола симметрична относительно оси Ox.

2) $x^2 = 2py$ - парабола симметрична относительно оси Oy.

В обоих случаях p>0 и вершина параболы, то есть точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола $y^2 = 2px$ имеет фокус F(p/2,0) и директрису $x = -\,p/2$, фокальный радиус-вектор точки M(x,y) на ней $r = x + p/2$.

Парабола $x^2 = 2py$ имеет фокус F(0, p/2) и директрису $y = -\,p/2$; фокальный радиус-вектор точки M(x,y) параболы равен $r = y + p/2$.

Лекция 5. Введение в анализ

5.1. Предел последовательности и функции. Теоремы о пределах

Постоянное число *a* называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует номер N, что все значения x_n, у которых n>N, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Записывают это следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Неравенство (*) равносильно двойному неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \qquad (**)$$

которое означает, что точки x_n, начиная с некоторого номера n>N, лежат внутри интервала (a-ε, a+ε), т.е. попадают в какую угодно малую ε-окрестность точки *a*.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае - *расходящейся*.

Понятие предела функции является обобщением понятия предела последовательности, так как предел последовательности можно рассматривать как предел функции $x_n = f(n)$ целочисленного аргумента *n*.

Пусть дана функция f(x) и пусть *a* - *предельная точка* области определения этой функции D(f), т.е. такая точка, любая окрестность которой содержит точки множества D(f), отличные от *a*. Точка *a* может принадлежать множеству D(f), а может и не принадлежать ему.

Определение 1. Постоянное число A называется *пределом функции* f(x) *при* $x \to a$, если для всякой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к *a*, соответствующие им последовательности $\{f(x_n)\}$ имеют один и тот же предел A.

Это определение называют *определением предела функции по Гейне,* или "*на языке последовательностей*".

Определение 2. Постоянное число A называется *пределом функции* f(x) *при* $x \to a$, если, задав произвольное как угодно малое положительное число ε, можно найти такое δ >0 (зависящее от ε), что для всех *x*, лежащих в δ-окрестности числа *a*, т.е. для *x*, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, значения функции f(x) будут лежать в ε-окрестности числа A, т.е. $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Это определение называют *определением предела функции по Коши,* или *"на языке* ε - δ".

Определения 1 и 2 равносильны. Если функция f(x) при $x \to a$ имеет предел, равный А, это записывается в виде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

В том случае, если последовательность $\{f(x_n)\}$ неограниченно возрастает (или убывает) при любом способе приближения *x* к своему пределу *a*, то будем говорить, что функция f(x) имеет *бесконечный предел,* и записывать это в виде:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \left(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\right).$$

Переменная величина (т.е. последовательность или функция), имеющая своим пределом нуль, называется *бесконечно малой величиной.*

Переменная величина, имеющая бесконечный предел, называется *бесконечно большой величиной*.

Для нахождения пределов на практике пользуются следующими теоремами.

Теорема 1. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+(g(x)) = A + B$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = AB$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$ $(B \neq 0)$. *Замечание*. Выражения вида 0/0, ∞ /∞, 0 · ∞, ∞ - ∞ являются неопределенными, например, отношение двух бесконечно малых или бесконечно больших величин, и нахождение пределов такого вида носит название “раскрытие неопределенностей”.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{\alpha} = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha}$, где α = const, т.е. можно переходить к пределу в основании степени при постоянном показателе, в частности, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$; $\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)} = b^A$, где b = const, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$;

$\lim\limits_{x\to a} \log_c f(x) = \log_c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, где c = const.

Теорема 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, a = const, a >0, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$,

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$, где $e \approx 2.7$ - основание натурального логарифма.

Используются на практике и формулы: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log_c(1+\alpha)}{\alpha} = \log_c e$,

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(a^\alpha - 1)/\alpha = \ln a$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}((1+\alpha)^\mu - 1)/\alpha = \mu$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$.

Если $x\to a$ и при этом $x > a$, то пишут $x\to a+0$. Если, в частности, a=0, то вместо символа 0+0 пишут +0. Аналогично если $x\to a$ и при этом $x<a$, то пишут $x\to a-0$. Числа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ называются соответственно *пределом справа* и *пределом слева функции* f(x) *в точке a*. Для существования предела функции f(x) при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Функция f(x) называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$.

Условие можно переписать в виде: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x_o)$,то есть возможен предельный переход под знаком функции, если она непрерывна в данной точке.

Если равенство нарушено, то говорят, что *при* $x = x_o$ *функция* f(x) *имеет разрыв.* Рассмотрим функцию y = 1/x. Областью определения этой функции является множество R, кроме x = 0. Точка x = 0 является предельной точкой множества D(f), поскольку в любой ее окрестности, т.е. в любом открытом интервале, содержащем точку 0, есть точки из D(f), но она сама не принадлежит этому множеству. Значение $f(x_o) = f(0)$ не определено, поэтому в точке $x_o = 0$ функция имеет разрыв.

Функция f(x) называется *непрерывной справа в точке* x_o, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, и *непрерывной слева в точке* x_o, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность функции в точке x_o равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно и справа и слева.

Для того, чтобы функция была непрерывна в точке x_o, например, справа, необходимо, во-первых, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, а во-вторых, чтобы этот предел был равен $f(x_o)$. Следовательно, если хотя бы одно из этих двух условий не выполняется, то функция будет иметь разрыв.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ существует и не равен $f(x_o)$, то говорят, что *функция* f(x) *в точке* x_o имеет *разрыв первого рода,* или *скачок*.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен ∞ или не существует, то говорят, что в *точке* x_o *функция имеет разрыв второго рода*.

Например, функция y = ctg x при $x \to +0$ имеет предел, равный $+\infty$, значит, в точке x=0 она имеет разрыв второго рода. Функция y = E(x) (целая часть от *x*) в точках с целыми абсциссами имеет разрывы первого рода, или скачки.

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка [a,b], называется *непрерывной* в [a,b]. Непрерывная функция изображается сплошной кривой.

Лекция 6. Производная

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X. *Производной* функции y = f(x) в точке x_o называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел *конечный,* то функция f(x) называется *дифференцируемой* в точке x_o; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.

Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или - ∞), то при условии, что функция в точке x_o непрерывна, будем говорить, что функция f(x) имеет в точке x_o *бесконечную производную*.

Производная обозначается символами y', $f'(x_o)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции. *Геометрический смысл производной* состоит в том,что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в данной точке x_o; *физический смысл* - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении s = s(t) в момент t_o.

Если *c* - постоянное число, и u = u(x), v = v(x) - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(c)' = 0$, $(cu)' = cu'$;

2) $(u+v)' = u'+v'$;

3) $(uv)' = u'v+v'u$;

4) $(u/v)' = (u'v-v'u)/v^2$;

5) если y = f(u), u = φ(x), т.е. y = f(φ(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций φ и f, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$,

или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$;

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция x = g(y), причем $\frac{dg}{dy} = x'_y \neq 0$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

На основе определения производной и правил дифференцирования можно составить список табличных производных основных элементарных функций.

1. $(u^{\mu})' = \mu\, u^{\mu-1}\, u'$ ($\mu \in R$).

2. $(a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$.

3. $(e^{u})' = e^{u}\, u'$.

4. $(\log_a u)' = u'/(u \ln a)$.

5. $(\ln u)' = u'/u$.

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

7. $(\cos u)' = - \sin u \cdot u'$.

8. $(tg\, u)' = 1/ \cos^2 u \cdot u'$.

9. $(ctg\, u)' = - u' / \sin^2 u$.

10. $(\arcsin u)' = u' / \sqrt{1-u^2}$.

11. $(\arccos u)' = - u' / \sqrt{1-u^2}$.

12. $(arctg\, u)' = u'/(1 + u^2)$.

13. $(arcctg\, u)' = - u'/(1 + u^2)$.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$

Решение:

$$y' = (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = \left(x^4\right)' - \left(3x^3\right)' + \left(2x\right)' - \left(1\right)' = 4x^3 - 3\left(x^3\right)' + 2\left(x\right)' - 0 = 4x^3 - 9x^2 + 2$$

Пример 2. Найти производную функции $y = tg(6x - 2)$

Решение: $y' = (tg(6x-2))' = \dfrac{1}{\cos^2(6x-2)}(6x-2)' = \dfrac{6}{\cos^2(6x-2)}$

Вычислим производную степенно-показательного выражения $y=u^{v}$, ($u>0$), где *u* и *v* суть функции от *x*, имеющие в данной точке производные u', v'.

Прологарифмировав равенство $y=u^{v}$, получим $\ln y = v \ln u$.

Приравнивая производные по *x* от обеих частей полученного равенства с помощью правил 3, 5 и формулы для производной логарифмической функции, будем иметь: $y'/y = vu'/u + v' \ln u$, откуда $y' = y\, (vu'/u + v' \ln u)$.

Итак, $(u^{v})' = u^{v}\, (vu'/u + v' \ln u)$, $u > 0$.

Например, если $y = x^{\sin x}$, то $y' = x^{\sin x}\, (\sin x/x + \cos x \cdot \ln x)$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке *x*, т.е. имеет в этой точке конечную производную y', то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$; отсюда $\Delta y = y' \Delta x + \alpha\, x$.

Главная часть приращения функции, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом функции* и обозначается dy: $dy = y' \Delta x$. Если положить в этой формуле $y=x$, то получим $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, поэтому dy=y'dx, т. е. символ для обозначения производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как дробь.

Приращение функции Δ *y* есть приращение ординаты кривой, а дифференциал d*y* есть приращение ординаты касательной.

Пусть мы нашли для функции y=f(x) ее производную $y' = f'(x)$. Производная от этой производной называется *производной второго порядка* функции f(x), или *второй производной,* и обозначается $y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются и обозначаются:

производная третьего порядка - $y''', f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}$,

производная четвертого порядка - $y^{IV}, f^{IV}(x), \frac{d^4y}{dx^4}$

и вообще *производная n-го порядка* - $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}$.

Лекция 7. Экстремум функции. Построение графиков функций

Функция y=f(x) называется *возрастающей* (*убывающей*) в некотором интервале, если при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Если дифференцируемая функция y = f(x) на отрезке [a, b] возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Точка x_o называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции f(x), если существует окрестность точки x_o, для всех точек которой верно неравенство $f(x) \le f(x_o)$ ($f(x) \ge f(x_o)$).

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках - ее *экстремумами.*

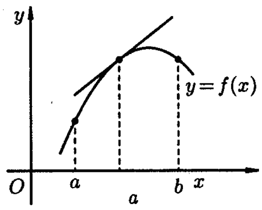
Необходимые условия экстремума. Если точка x_o является точкой экстремума функции f(x), то либо $f'(x_o) = 0$, либо $f'(x_o)$ не существует. Такие точки называют *критическими,* причем сама функция в критической точке определена. Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек.

Первое достаточное условие. Пусть x_o - критическая точка. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_o меняет знак плюс на минус, то в точке x_o функция имеет максимум, в противном случае - минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_o экстремума нет.

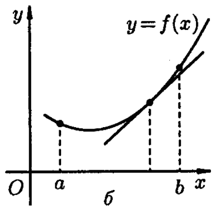
Второе достаточное условие. Пусть функция f(x) имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки x_o и вторую производную $f''(x_0)$ в самой точке x_o. Если $f'(x_o) = 0$, $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), то точка x_o является точкой локального минимума (максимума) функции f(x). Если же $f''(x_0)=0$, то нужно либо пользоваться первым достаточным условием, либо привлекать высшие производные.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a,b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее (наименьшее).

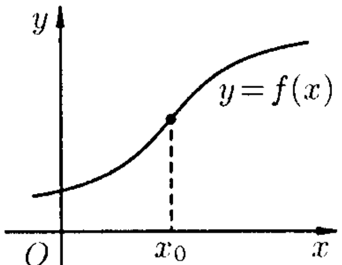
Определение: График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** на интервале (a,b), если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала.



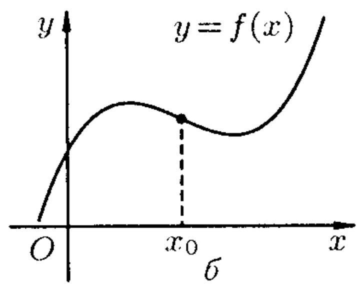
Определение: График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **вогнутым** на интервале (a,b), если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала.



Если при переходе через точку x_0 функция меняет направление выпуклости, то эта точка называется точкой перегиба.



а



б

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a,b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции является выпуклым в этом интервале. Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a,b)$ - график функции вогнутый.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Построение графиков функции.

1) Найти область определения функции.
2) Исследовать функцию на четность, нечетность.
3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4) Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.
5) Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба.
6) Построить график.

Пример. Построить с исследованием график функции $y(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

Решение: $y(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

1) D(y)=R
2) $y(-x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ -четная функция.
3) $y' = -4x^3 + 4x \Rightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow -4x(x-1)(x+1) = 0$

Критические точки:0;1;-1.

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$-\infty < x < -1$	1	$-\infty < x < -1$
$y'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$y(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$
		max		min		max	

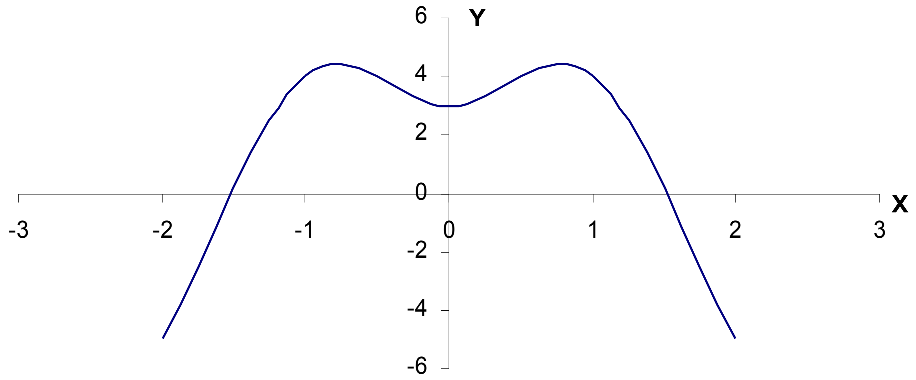
$y_{\max} = y(-1) = 4$; $y_{\max} = y(1) = 4$; $y_{\min} = y(0) = 3$

4) $y'' = (-4x^3 + 4x)' = -12x^2 + 4 \Rightarrow -12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow -12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

x	$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \infty$
$y''(x)$	-		+		-
y(x)	$\cap$	$\frac{22}{9}$	$\cup$	$\frac{22}{9}$	$\cap$
		Точка перегиба		Точка перегиба	

5) Построение графика.



Лекция 8. Частные производные. Метод наименьших квадратов

Пусть D(x, y) - некоторое множество точек плоскости *Oxy*. Если каждой упорядоченной паре чисел *(x, y)* из области D соответствует определенное число $z \in Z \subset R$, то говорят, что *z* есть *функция двух независимых переменных x* и *y*. Переменные *x* и *y* называются *независимыми переменными,* или *аргументами*, D - *областью определения,* или *существования, функции*, а множество Z всех значений функции - *областью* ее *значений.* Функциональную зависимость *z* от *x* и *y* записывают в виде z = f(x, y), z = z(x, y), z = F(x, y) и т.д. Например, объем цилиндра $V = \pi R^2 H$ есть функция от радиуса R его основания и от высоты H, т.е. V = f(R, H), которая дает возможность, зная значения независимых переменных R и H, установить соответствующее значение для V.

Частное значение функции z = f(x, y) при $x = x_o$, $y=y_o$ обозначается $z_o= f(x_o, y_o)$. Геометрически область определения функции D представляет собой конечную или бесконечную часть плоскости, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается D, во втором случае - *открытой.* Наподобие того, как функция y = f(x) геометрически иллюстрируется своим графиком, можно геометрически истолковать и уравнение z = f(x, y). Возьмем в пространстве R^3 прямоугольную систему координат и изобразим на плоскости *Oxy* область D. В каждой точке $M(x, y) \in D$ восстановим перпендикуляр к плоскости *Oxy* и отложим на нем значение z =

f(x, y). Геометрическое место полученных таким образом точек и явится своего рода пространственным графиком нашей функции. Это будет, вообще говоря, некоторая поверхность, поэтому уравнение z = f(x, y) называется *уравнением поверхности*. Пара значений *x* и *y* определяет на плоскости *Oxy* точку M(x, y), а z = f(x, y) - аппликату соответствующей точки P(x, y, z) на поверхности. Поэтому говорят, что *z* есть функция точки M(x, y) и пишут z = f(M).

Функция f(M) имеет *предел* A, $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$, если разность f(M) - A есть бесконечно малая, когда $\rho = M_oM \to 0$ при любом способе приближения M к M_o (например, по любой линии).

Функция f(x, y) называется *непрерывной* в точке M_o, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Областью определения функции трех переменных является множество точек пространства R^3, но непосредственной геометрической интерпретации для функций с числом аргументов больше двух не существует, однако для них вводятся по аналогии все определения (частные производные, предел, непрерывность и т.д.), сформулированные для f(x,y).

Аналогично определяется функция *n* независимых переменных $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$.

Областью определения такой функции будет множество $D \subset R^n$.

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Для функции двух переменных z = f(x, y) *частной производной по переменной x* называется производная этой функции по *x* при постоянном *y*. Обозначается частная производная по x следующим образом: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Аналогично *частной производной функции* z = f(x, y) *по аргументу y* называется производная этой функции по *y* при постоянном *x*. Обозначения:

$$z'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ f'_y(x_0, y_0),\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Частными производными второго порядка функции z = f(x, y) называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Если первая производная была взята, например, по аргументу *x*, то вторые производные обозначаются символами z''_{xx}, z''_{x^2}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Пусть функция z = f(x, y) определена в области D и точка $M_o(x_o, y_o)$ будет внутренней точкой этой области. Говорят, что функция f(x, y) в точке $M_o(x_o, y_o)$ имеет *максимум* (*минимум*), если ее можно окружить такой окрестностью

$$(x_o - \delta, x_o + \delta; y_o - \varepsilon, y_o + \varepsilon),$$

чтобы для всех точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$f(x,y) \le f(x_o,y_o)\ (\ f(x,y) \ge f(x_o,y_o)).$$

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существует хотя бы одна из них. Такие точки называются *критическими*. Названные условия являются необходимыми условиями экстремума, но еще не достаточными (они могут выполняться и в точках, где нет экстремума). Чтобы критическая точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия. Сформулируем достаточные условия экстремума для функции двух переменных. Пусть точка $M_o(x_o, y_o)$ - критическая точка функции z = f(x, y), т.е. $f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$, и функция z = f(x, y) имеет непрерывные вторые частные производные в некоторой окрестности точки $M_o(x_o, y_o)$. Обозначим $z''_{xx}(x_0, y_0) = A,\quad z''_{xy}(x_0, y_0) = B,\quad z''_{yy}(x_0, y_0) = C,\quad \Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция *z* имеет экстремум в точке M_o: максимум при $A < 0$, минимум при $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_o нет;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

В естествознании, технике и экономике часто приходится иметь дело с *эмпирическими формулами*, т.е. формулами, составленными на основе обработки статистических данных или результатов опытов. Одним из распространенных приемов построения таких формул является *метод наименьших квадратов.* Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаями линейной и квадратичной зависимости. Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами *x* и *y*, Допустим, что точки, взятые из таблицы (опытные точки) группируются около некоторой прямой линии. Тогда можно предположить, что между *x* и *y* существует линейная зависимость $\overline{y}$= ax+b, где *a* и *b* - коэффициенты, подлежащие определению, $\overline{y}$ - теоретическое значение ординаты.

Лекция 9. Неопределенный интеграл.

Функция F(x), дифференцируемая в данном промежутке X, называется *первообразной для функции* f(x), *или интегралом от* f(x), если для всякого $x \in X$ справедливо равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Нахождение всех первообразных для данной функции называется ее *интегрированием. Неопределенным интегралом функции* f(x) на данном промежутке X называется множество всех первообразных функций для функции f(x); обозначение -

$$\int f(x)\,dx.$$

Если F(x) - какая-нибудь первобразная для функции f(x), то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Непосредственно из определения получаем основные свойства неопределенного интеграла и список табличных интегралов:

1) $d\int f(x)=f(x)dx$,

2) $\int df(x)=f(x)+C$,

3) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ (a=const),

4) $\int(f(x)+g(x))dx= \int f(x)dx+ \int g(x)dx$.

Список табличных интегралов

1. $\int x^{\mu} dx = x^{\mu+1}/(\mu + 1) +C$ ($\mu \neq -1$).

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| +C$.

3. $\int a^x dx = a^x/\ln a + C$ ($a>0$, $a\neq 1$).

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\, dx = \cos x + C$.

6. $\int \cos x\, dx = - \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \mathrm{ctg}\, x + C$.

Для интегрирования многих функций применяют *метод замены переменной,* или *подстановки,* позволяющий приводить интегралы к табличной форме.

Если функция $f(z)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, функция $z=g(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную и $\alpha \leq g(x) \leq\beta$, то

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz,$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку $z=g(x)$.

Для доказательства достаточно записать исходный интеграл в виде:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x).$$

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда, по правилу дифференцирования произведения,

$$d(uv)= udv + vdu \text{ или } udv = d(uv) -vdu.$$

Для выражения d(uv) первообразной, очевидно, будет *uv*, поэтому имеет место формула:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула выражает правило *интегрирования по частям*. Оно приводит интегрирование выражения udv=uv'dx к интегрированию выражения vdu=vu'dx.

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^k \ln^m x\, dx, \int x^k \sin bx\, dx, \int x^k \cos bx\, dx, \int x^k e^{ax}\, dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Лекция 10. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке [a, b] определена функция f(x). Разобьем отрезок [a, b] на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 <...<x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* функции f(x) от *a* до *b* и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функция f(x) в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* [a, b], числа *a* и *b* носят название *нижнего и верхнего предела интеграла*.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$;

2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, ($k = const$, $k\in R$);

5) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$;

6) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

7) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ($\xi\in [a,b]$).

Последнее свойство называется *теоремой о среднем значении*.

Пусть f(x) непрерывна на [a, b]. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

и имеет место *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Геометрическая интерпретация: определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой y= f(x), прямыми x = a и x = b и отрезком оси *Ox*.

Лекция 11. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных (неограниченных) функций называются *несобственными. Несобственные интегралы I рода* - это интегралы на бесконечном промежутке, определяемые следующим образом: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to +\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если этот предел существует и конечен, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся несобственным интегралом от* f(x) *на интервале* [a,+∞), а функцию f(x) называют *интегрируемой на бесконечном промежутке* [a,+∞). В противном случае про интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ говорят, что он *не существует, или расходится*.

Аналогично определяются несобственные интегралы на интервалах (-∞, b] и (-∞, +∞):

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int\limits_{c}^{A} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{A}^{b} f(x)dx.$$

Определим понятие интеграла от неограниченной функции. Если f(x) непрерывна для всех значений *x* отрезка [a,b], кроме точки *c*, в которой f(x) имеет бесконечный разрыв, то *несобственным интегралом II рода от* f(x) *в пределах от a до b* называется сумма:

$$\lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{a}^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu \to 0} \int\limits_{c+\mu}^{b} f(x)dx,$$

если эти пределы существуют и конечны. Обозначение:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{a}^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu \to 0} \int\limits_{c+\mu}^{b} f(x)dx.$$

Лекция 12 Дифференциальные уравнения

1. Основные понятия.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные этой функции .

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y=$\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Дифференциальным уравнение первого порядка называется уравнение вида F(x,y, y')=0…(1). Уравнение (1) может содержать в явном виде x или y, но обязательно содержит y'.

Разрешая уравнение (1) , если это возможно, относительно производной, получим y= f (x,y) … (2). Уравнение (2) называется уравнением первого порядка , разрешенным относительно производной.

Простейшим дифференциальным уравнением является уравнение вида $y' = f(x)$. Решением этого уравнения является функция y=$\int f(x)dx = F(x) + c$, где с-произвольная постоянная.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка y=f(x) в некоторой области Д называется функция y=$\varphi(x,c)$, обладающая следующими свойствами: а) функция y=$\varphi(x,c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной С , принадлежащих некоторому множеству; б) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что (x_0, y_0) из Д существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение y=$\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Всякое решение y=$\varphi(x,c_0)$, получившееся из общего решения y=$\varphi(x,c)$ при конкретном значении $C=C_0$, называется частным решением.

2. Дифференциальное уравнение порядка с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными . Заметим, что в уравнениях с разделяющимися переменными коэффициенты при dx и dy разлагаются на множители, зависящие от одной переменной. Разделив обе части рассматриваемого уравнения на $f_2(y)\varphi_1(x) \neq 0$, получим уравнение

$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$, в котором переменные разделены и общее решение находится почленным интегрированием.

Пример. Найти частное решение ydx+ctg xdy=0, удовлетворяющее начальному условию $y(\frac{\pi}{3}) = -1$.

Решение : разделим переменные , для чего обе части уравнения делим на y ctg x$\neq 0$, получим tgxdx+$\frac{dy}{y} = 0$. Почленно интегрируя ,найдем общий интеграл: $\int tgxdx + \int \frac{dy}{y} = 0$, -lncosx+lny=lnc, y=C cosx., y= C cosx. Используя начальное условие $y(\frac{\pi}{3}) = -1$, определим соответствующее значение произвольной постоянной : -1 =C cos $\frac{\pi}{3}$, C= -2. Поэтому частное решение запишется : y= -2 cosx .

3. Уравнение высших порядков, допускающие понижение порядка.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием n раз. Общий интеграл уравнения содержит n произвольных постоянных.

Пример. Для данного дифференциального уравнения $y'' = 4\sin 2x$ найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=0, $y'(0) = 0$

Решение: Дважды интегрируя уравнение $y'' = 4\sin 2x$, получим

$$y' = 4\int \sin 2xdx = -2\cos 2x + C_1$$

$$y = -2\int \cos 2xdx + \int C_1dx = -\sin 2x + C_1x + C_2$$

$$y = -2\int \cos 2xdx + \int C_1dx = -\sin 2x + C_1x + C_2 - \textit{общийинтегралуравнения}$$

Подставляя последовательно в полученное общее решение начальные условия, определим. $C_1 u C_2$, 0=-2cos0+C_1, C_1=2, 0=-sin0+C_2, C_2=0

У=-sin2x+2x-искомое частное решение.

4. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad \ldots(3)$$

Общим решением линейного однородного уравнения n-го порядка (3) имеет вид y=$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), где$ $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ -линейно независимые частные решения этого уравнения.

Для нахождения общего решения уравнения ,(3) составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0 \ldots (4)$$

В зависимости от найденных корней характеристического уравнения (4) возможны случаи:

А) если все корни $k_1, k_2, \ldots k_n$ - действительные и различные, то общее решение имеет вид : $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots C_n e^{k_n x}$;….(5)

Б) если среди корней $k_1, k_2, \ldots k_n$ имеются кратные $k_{1,} = k_{2,} = \ldots k_{ьn} = k$, а остальные различные, то общее решение (3) примет вид y=e $^{kx}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}) + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$, где m – кратность корня;

В) если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней k $_{1,2}= \alpha \pm \beta i$, то в формуле (5), соответствующая пара решений заменяется слагаемыми y=e $^{\alpha ч}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Лекция 13 Элементы теории вероятностей

1. Элементы комбинаторики.

Комбинаторика происходит от латинского слова «combinatio» — соединение. Группы, составленные из каких-либо предметов (безразлично каких, например, букв, цветных шаров, кубиков, чисел и т. п.), называются соединениями (комбинациями). Предметы, из которых состоят соединения, называются элементами.

Различают три типа соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Размещениями из *n* элементов по *m* в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит *m* элементов, взятых из числа данных *n* элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо лишь порядком их расположения.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Понятие факториала: Произведение *n* натуральных чисел от 1 до *n* обозначается сокращенно *n!,* т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ (читается: *n* факториал). Например:

5!=1·2·3·4·5=120.

Считается, что 0! = 1, 1!=1.

Очевидно, что $A_n^1 = n$ (при $m = 1$) и $A_n^0 = n$ (при $m = 0$).

Пример 1.

Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

Решение:

Два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют, с разными юношами считаются, разными, поэтому:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Возможно 360 вариантов.

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом обозначается символом C_n^m и вычисляется так: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

Пример 2. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на *одинаковые* должности (все 10 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всевозможных групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?

Решение:

Состав различных групп должен отличаться, по крайней мере, хотя бы одним кандидатом и порядок выбора кандидата не имеет значения, следовательно, этот вид соединений представляет собой сочетания. По условию задачи $n = 10$,

$m = 3$. Получаем

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

Можно составить 120 групп из 3 человек по 10.

Перестановками из n элементов называются такие соединения, из которых каждое содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

$$P_n = n!$$

Пример 3. Студент ежедневно просматривает 6 журналов. Если порядок просмотра журналов случаен то, сколько существует способов его осуществления?

Решение:

Способы просмотра журналов различаются только порядком, так как число, а значит, и состав журналов при каждом способе неизменны. Следовательно, при решении этой задачи необходимо рассчитать число перестановок.

По условию задачи $n = 6$. Следовательно,

$P_n = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

Можно просмотреть журналы 720 способами.

2. Элементы теории вероятности.

Основные понятия. Определение вероятности.

Теория вероятностей – это наука о случайных событиях. **Случайными** называются события, которые могут произойти или не произойти в результате некоторого испытания.

Испытание *(опыт, эксперимент)* — это процесс, включающий определенные условия и приводящий к одному из нескольких возможных исходов. Исходом опыта может быть результат наблюдения или событие.

Например, испытание – бросание игральной кости, случайное событие – выпадение четверки.

Каждому случайному событию А можно поставить в соответствие число Р(А), которое назовем вероятностью.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания**.**

Например, если в урне содержатся только белые шары, то извлечение из нее белого шара есть событие достоверное.

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате данного испытания.

Например, извлечение черного шара из урны с белыми шарами есть событие невозможное.

Достоверные и невозможные события, вообще говоря, не являются случайными.

Несколько событий называются **совместными,** если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появления других.

Например, при бросании 3 монет выпадение цифры на одной не исключает появления цифр на других монетах.

Несколько событий называются **несовместными** в данном опыте, если появление одного из них исключает появление других.

Например, брошена монета, появление «герба» исключает появление «решки».

Несколько событий называются **равновозможными,** если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие. **Например**, при бросании игральной кости появление каждой из ее граней — события равновозможные.

Два события А и $\overline{A}$ называются **противоположными,** если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно произойдет.

Например, монету бросают один раз. Событие А – выпадение «герба», событие $\overline{A}$ - выпадение «решки». События А и $\overline{A}$ противоположны.

Два события называются **независимыми,** если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого, в противном случае называются **зависимыми.**

Например, бросают две игральные кости. Событие А – появление «двойки» на первой кости. Событие В – появление «двойки» на второй кости. Тогда события А и В независимы.

3. Классическое определение вероятности.

Вероятностью появления события *A* называют отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу всех единственно возможных и несовместных элементарных исходов.

Обозначим число благоприятствующих событию А исходов через m, а число всех исходов — n:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Замечание: $0\le P(A)\le 1$.

Пример 4. Абонент, набирая номер, забыл последние 3 цифры. Помня лишь то, что они различны, набирает их на удачу. Какова вероятность угадать номер.

Решение:

Число различных трехзначных номеров с неповторяющимися цифрами равно A_{10}^3. Из них верным является только один вариант. По формуле классической вероятности $P(A)=\frac{m}{n}$ $m=1$ $n=A_{10}^3$, $A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=720$

$P(A)=\frac{1}{720}$.

Пример 5. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

Решение:

А - вынули черный шар. n=12; m=4 $\Rightarrow$ $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

4. Теоремы сложения и умножения вероятностей..

Сумма двух событий А и В (А+В) есть событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А или В.

Произведением двух событий А и В ($A \cdot B$**)** есть событие, состоящее в одновременном появлении событий А и В.

Теорема сложения вероятностей.

1. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равно сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A) + P(B).

2. Вероятность суммы двух совместных событий А и В равно сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения: P(A+B)=P(A) + P(B) – P($A \cdot B$).

Теорема умножения вероятностей.

1.Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий: то P($A \cdot B$)=$P(A) \cdot P(B)$.

2.Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое уже наступило: P($A \cdot B$)=$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Следствия:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, (вероятность противоположного события).

2. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, .., A_n$ образующих полную группу равна единице: ($P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$).

Пример 6. Опыт состоит в случайном извлечении карты из колоды в 52 карты. Чему равна вероятность того, что это будет или туз, или карта масти треф?

Решение:

Определим события: А — «Извлечение туза», В — «Извлечение карты трефовой масти». Вероятность извлечения туза из колоды карт Р(А) = 4/52; вероятность извлечения карты трефовой масти — Р(В) = 13/52; вероятность их пересечения — извлечение трефового туза - Р(АВ) = 1/52.

События А и В — совместные, поскольку в колоде есть трефовый туз.

Вероятность суммы совместных событий А и В:

Р(А + В) = Р(А) + Р(В) - Р(АВ) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 4/13.

Пример 7. В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее последовательно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что 2-й шар окажется белым при условии, что первый шар был черным?

Решение:

Событие А-1-й шар черный,

Событие В- 2-й шар белый.

События А и В совместные, зависимые.

$$P(A)=\frac{7}{9},\quad P_A(B)=\frac{2}{8};\quad P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)\Rightarrow\quad P(A\cdot B)=\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{7}{36}.$$

Пример 8. Одна карта вынимается из колоды игральных карт (52). Какова вероятность того, что это будет карта валет или дама?

Решение:

Событие А - карта валет;

Событие В – карта дама.

$$P(A)=\frac{4}{52},\ P(B)=\frac{4}{52}.$$

События А и В - несовместные $\Rightarrow\ P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{52}+\frac{4}{52}=\frac{8}{52}=\frac{2}{13}.$

Пример 9. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара белые.

Решение:

Событие А - появление белого шара в 1-м ящике;

Событие В - появление белого шара в 2-м ящике.

События А и В – совместные, независимые.

$$P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};\quad P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}.$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимых в совокупности, вычисляется по формуле:

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n).$$

Пример 10. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,8; третий -0,6. Найти вероятность того, что студентом будут сданы:

а) только второй экзамен;

b) только один экзамен;

c) хотя бы один.

Решение:

a) Обозначим события: A_1-студент сдаст 1-ый экзамен; A_2-студент сдаст 2-ый экзамен; A_3-студент сдаст 3-ый экзамен.

$P(A_1)=0{,}9;\quad P(A_2)=0{,}8;\quad P(A_3)=0{,}6$.

$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}9=0{,}1$; $P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}8=0{,}2$

$P(\overline{A}_3)=1-P(A_3)=1-0{,}6=0{,}4$.

B-студент сдаст только второй экзамен из 3-х, т.е.студент сдаст второй экзамен, и не сдаст первый и третий экзамен.

$$P(B)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)=0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}032.$$

b) C-студент сдаст один экзамен из трех (произойдет, если студент сдаст только первый экзамен из 3-х, или только второй, или только третий).

$$P(C)=P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\right)=P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\right)+P(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3)+P\left(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\right)=$$
$$=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}116$$

c) D- студент сдаст хотя бы один экзамен («не менее одного» экзамена).

$$P(D)=1-P\left(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\right)=1-0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}992.$$

5. Формула полной вероятности.

Пусть несовместные события $H_1, H_2,\ldots,H_n$ образуют полную группу. Тогда для любого события A имеет место формула полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$$

События $H_1, H_2,\ldots,H_n$ называют гипотезами, так как заранее неизвестно какое из этих событий наступит.

Пример 11. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из 1 цеха и 60% - из 2 цеха. В первом цехе производится 90% стандартных деталей, а во втором – 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется стандартной.

Решение:

Событие A - взятая наудачу деталь стандартна.

H_1 – деталь изготовлена 1-ым цехом;

H_2 – деталь изготовлена 2-ым цехом;

События H_1 и H_2 образуют полную группу,

$$P(H_1)=\frac{40}{100}=0{,}4;\quad P(H_2)=\frac{60}{100}=0{,}6.$$

$$P_{H_1}(A)=\frac{90}{100}=0{,}9;\quad P_{H_2}(A)=\frac{95}{100}=0{,}95.$$

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}95=0{,}93.$$

6. Формула Байеса.

Пусть события $H_1, H_2,\ldots,H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ при условии, что событие А произошло, задается формулой

$$P_A(H_k)=\frac{P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)}{P(A)},$$

где $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$ - формула полной вероятности.

Пример 12. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из 1 цеха и 60% - из 2 цеха. В первом цехе производится 90% стандартных деталей, а во втором – 95%. Найти вероятность того, что эта стандартная деталь изготовлена 2-ым цехом.

Решение:

Событие А-взятая наудачу деталь стандартна.

H_1 – деталь изготовлена 1-ым цехом;

H_2 – деталь изготовлена 2-ым цехом;

События H_1 и H_2 образуют полную группу, $P(H_1)=\frac{40}{100}=0{,}4;\quad P(H_2)=\frac{60}{100}=0{,}6.$

$$P_{H_1}(A)=\frac{90}{100}=0{,}9;\quad P_{H_2}(A)=\frac{95}{100}=0{,}95.$$

Определим вероятность гипотезы H_2 при условии, что событие А уже произошло:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}95}{0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}95}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}95}{0{,}93}=\frac{19}{31}\approx 0{,}613.$$

7. Формула Бернулли.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна p, а вероятность его непоявления равна q=1-p, то вероятность того, что событие А произойдет m раз определяется формулой Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m},\quad m=0,1,2,3,\ldots,n$$

В ряде случаев требуется определить вероятности появления события А менее m раз(x<m), более m раз(x>m), не менее m раз ($x \geq m$), не более m раз ($x \leq m$), хотя бы один раз ($x \geq 1$).

Случаи:

a) $P(x < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)$

b) $P(x > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$

c) $P(x \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$

d) $P(x \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$

e) $P(x \geq 1) = 1 - P_n(0)$

Пример 13.Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуются холодильник марки «А» равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется:

a) двум покупателям;

b) не более, чем трем покупателям;

c) хотя бы одному покупателю.

Решение:

$p = 0{,}4, \quad q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6, \quad n = 4$.

a) m=2

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}3456.$$

b) $m \leq 3$

$$P(m \leq 3) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) = 1 - P_4(4) = 1 - C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^{4-4} = 1 - \frac{4!}{4!\,0!} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^0 = 1 - 0{,}4^4 = 0{,}744$$

c) $m \geq 1$

$$P(m \geq 1) = 1 - P_4(0) = 1 - C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^{4-0} = 1 - \frac{4!}{0!\,4!} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^4 = 1 - 0{,}6^4 = 0{,}8704.$$

Лекция 14 Случайные величины.

Случайной величиной называют величину X, которая принимает в результате опыта то или иное возможное значение x, заранее не известное, зависящее от случайных обстоятельств.

Например, число родившихся мальчиков среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принимать значения 0,1,2,3,4,5.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, принимающая отдельные друг от друга значения, которые можно перенумеровать.

Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности.

Всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующие им вероятностями называют **законом распределения дискретной случайной величины.**

Простейшим способом задания дискретной случайной величины – таблица, которая называется **рядом распределения.**

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графическое изображение ряда распределения называется **многоугольником распределения.**

Функцией распределения случайной величины X называется функция F(x), выражающая вероятность того, что X примет значение, меньше, чем x: $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. F(x)-неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1), \quad если \quad x_2 > x_1$.
3. $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$.
4. F(x)-непрерывна слева в любой точке x, т.е. $F(x-0) = F(x), \quad x \in R$.
5. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание (среднее значение случайной величины), дисперсия и среднее квадратическое отклонение (величина разброса возможных значений случайной величины вокруг среднего).

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2$.

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример. В результате проведенных испытаний установлено распределение дискретной случайной величины х:

X	54	56	58	60
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Составить функцию F(x), построить ее график.

Решение:

Найдем $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$. $M(X) = 54 \cdot 0{,}2 \cdot 56 \cdot 0{,}4 + 58 \cdot 0{,}3 + 60 \cdot 0{,}1 = 56{,}6$

$D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2$.

$D(X) = 54^2 \cdot 0{,}2 + 56^2 \cdot 0{,}4 + 58^2 \cdot 0{,}3 + 60^2 \cdot 0{,}1 - (56{,}6)^2 = 3{,}24$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \Rightarrow \quad \sigma(X) = 1{,}8$

Так как $F(x) = P(X < x)$, находим:

при $x \le 54 \quad F(X) = P(X < x) = 0$;

при $54 < x \le 56 \quad F(X) = P(X = 54) = 0{,}2$;

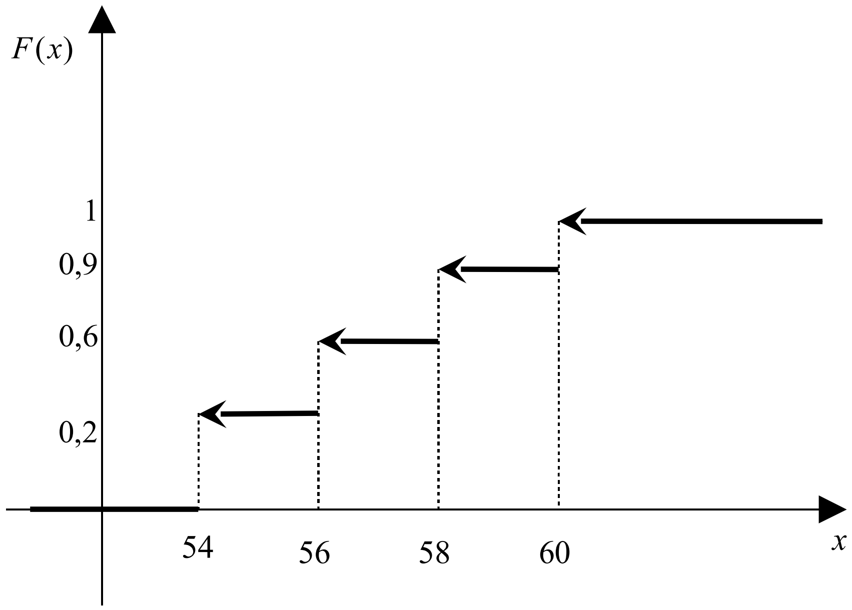
при $56 < x \le 58 \quad F(X) = P(X = 54) + P(X = 56) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$;

при $58 < x \le 60 \quad F(X) = P(X = 54) + P(X = 56) + P(X = 58) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}9$;

при $x > 60 \quad F(X) = P(X = 54) + P(X = 56) + P(X = 58) + P(X = 60) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 54 \\ 0{,}2, & при \quad 54 < x \le 56 \\ 0{,}6, & при \quad 56 < x \le 58 \\ 0{,}9, & при \quad 58 < x \le 60 \\ 1, & при \quad x > 60 \end{cases}$$
-функция распределения случайной величины.

Построим график этой функции.



Лекция 15. Основы математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей. Математическая статистика тесно связана с теорий вероятности.

1. Первичная обработка результатов эксперимента.

Явления, происходящие в природе, обществе, человеке сложны и разнообразны. Ученые изучают разные стороны этих явлений, причем каждая наука вырабатывает свои специфические методы исследования. Такое важное социальное явление как преступность изучают не только юристы, но и социологи, медики и т.д. Их задача состоит в том, чтобы подвергнуть математической обработке огромный статистический материал – отчеты органов внутренних дел и любые другие документы, содержащие различные числовые данные.

Результаты обработки представляют в виде таблиц, графиков, диаграмм и различных числовых характеристик, которые называются параметрами. Важнейшие из них – среднее арифметическое и дисперсия.

2. Среднее арифметическое.

Понятие среднего значения используется для описания разнообразных явлений для описания разнообразных явлений природы и общественной жизни. Например, во время предвыборной кампании службы по изучению общественного мнения составляют прогнозы, в которых оценивают шансы на успех различных кандидатов. Ясно, что провести опрос всех избирателей невозможно, поэтому проводят опрос небольшой части населения. По результатам опроса прогнозируют средние проценты популярности кандидатов у различных социальных групп и в разных регионах.

Средней величиной называют среднее арифметическое.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - некоторые числа. Их средним арифметическим называется число $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

Среднее арифметическое можно найти и с помощью следующей формулы:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(\widetilde{x}_1 \cdot m_1 + \widetilde{x}_2 \cdot m_2 + \ldots + \widetilde{x}_k \cdot m_k),$$

где $\widetilde{x}_i$ - число правонарушений за день; m_i - число дней с одним и тем же количеством правонарушений ($m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$).

Пример 1. По сведениям автоинспекции, количество дорожных происшествий на улицах города Дрюкова в первую декаду октября было таким:

6 8 10 7 6 11 9 8 7 11.

В сводке за следующие 10 дней оказались такие данные:

0 5 7 7 12 11 14 13 7 6.

Определить среднее число дорожных происшествий?

Решение:

Среднее арифметическое первой декады октября:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(6 + 8 + 10 + 7 + 6 + 11 + 9 + 8 + 7 + 11) = \frac{83}{10} = 8{,}3$$

показывает среднее число дорожных происшествий в день.

Среднее арифметическое за следующие 10 дней:

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(0 + 5 + 7 + 7 + 12 + 11 + 14 + 13 + 7 + 6) = \frac{82}{10} = 8{,}2$$

Средние значения 8,2 и 8,3 отличаются друг от друга значительно меньше, чем число происшествий за каждый день.

3. Дискретные случайные величины.

Случайной величиной называют величину X, которая принимает в результате опыта то или иное возможное значение x, заранее не известное, зависящее от случайных обстоятельств.

Например, число родившихся девочек среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принимать значения 0,1,2,3,4,5.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, принимающая отдельные друг от друга значения, которые можно перенумеровать.

Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности.

Всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующие им вероятностями называют **законом распределения дискретной случайной величины.**

Простейшим способом задания дискретной случайной величины – таблица, которая называется **рядом распределения.**

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графическое изображение ряда распределения называется **многоугольником распределения (полигон) –** ломанная с вершинами в точках (x_i, p_i), где $i = \overline{1,n}$.

Числовые характеристики случайных величин:

- математическое ожидание (среднее значение случайной величины),
- дисперсия,
- среднее квадратическое отклонение (величина разброса возможных значений случайной величины вокруг среднего).

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2$.

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 2. В результате проведенных испытаний установлено распределение дискретной случайной величины x:

X	2	3	10	12
P	0,1	0,4	0,5	0,2

Найти:

a) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$

b) построить многоугольник распределения

Решение:

a) Найдем $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, $D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2$

$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 1{,}2 + 5 + 2{,}4 = 8{,}8$

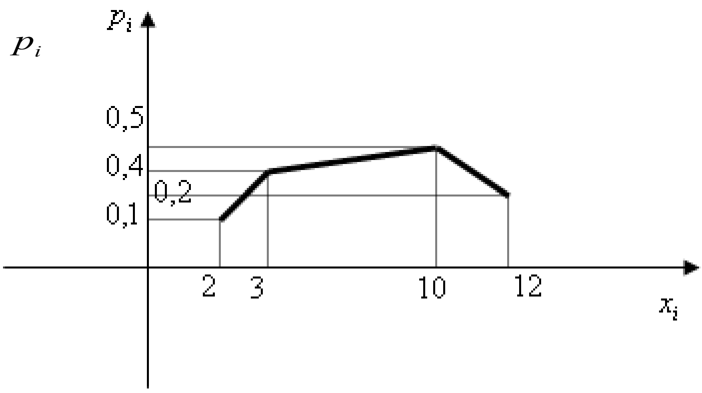
$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 + 12^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 + 3{,}6 + 50 + 28{,}8 = 82{,}8$

$D(X) = 82{,}8 - (8{,}8)^2 = 82{,}8 - 77{,}44 = 5{,}36$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{5{,}36} \approx 2{,}315$

b) Многоугольник распределения

c)



4. Интервальный ряд. Гистограмма.

При обработке большого числа экспериментальных данных их предварительно группируют и оформляют в виде так называемого **интервального ряда**. Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, называется **генеральной совокупностью.**

Наблюдаемое значение x_i называется **вариантой,** а их последовательность, записанная в возрастающем порядке, – **вариационным рядом**. Число наблюдений n_i называется **частотой**, а значение его отношения к объему выборки – **относительной частотой**.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности. Число объектов (наблюдений) в совокупности называется ее объемом (n).

Установленную область значений величины делят на k равных частей. При выборе интервалов можно пользоваться следующей таблицей:

объем выборки	40-60	60-100	100-200	200-500
число интервалов	5-7	7-10	10-14	14-17

Выбрав число интервалов, определяют длину интервала:

$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, ($\Delta$ можно округлить).

Результаты заносятся в таблицу:

№ интервалов	границы интервалов	подсчет частот, n_i	частота в интервале, p_i	середины интервалов, x_i
1 2 3 … k				
Итого n				

Сгруппированный статистический ряд:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
p_i	p_1	p_2		p_k

где x_i - середина i-го интервала, p_i - соответствующая ему частота ($p_i = \frac{n_i}{n}$), причем $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины Δ, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{\Delta}$, $i = \overline{1,k}$.

Полигоном частот – ломанная с вершинами в точках $(x_i, \frac{n_i}{\Delta})$, $i = 1,2,\ldots,k$.

Полигоном относительных частот – ломанная с вершинами в точках $(x_i, \frac{n_i}{n \cdot \Delta})$, $i = 1,2,\ldots,k$.

Пример 3. Для проведения демографических исследований выбрали 50 семей и получили следующие данные о количестве членов семьи:

2 5 3 4 1 3 6 2 4 3 4 1 3 5 2 3 4 4 3 3
2 5 3 4 4 3 3 4 4 3 2 5 3 1 4 3 4 2 6 3
2 3 1 6 4 3 3 2 1 7

Построить: 1. сгруппированный статистический ряд; 2. гистограмму; 3. полигон относительных частот.

Решение:

1. $x_{\min} = 1$; $x_{\max} = 7$; $n = 50$

$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \Rightarrow \Delta = \frac{7-1}{7} = \frac{6}{7} \approx 1$

Левая граница интервала равна $1 - \frac{1}{2} = 0,5$

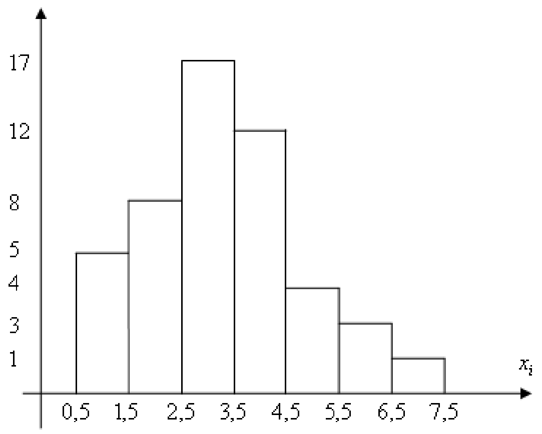
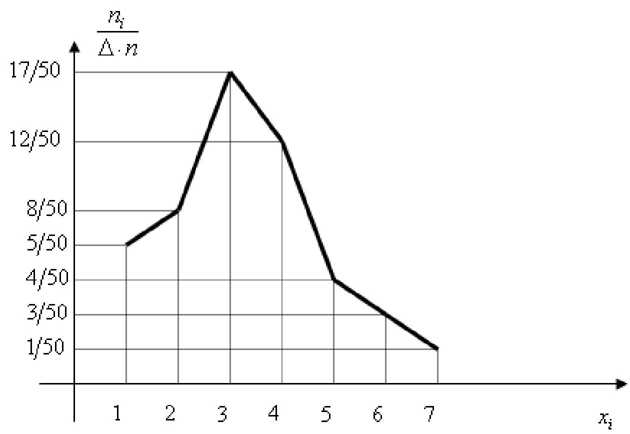
№ интервалов	границы интервалов	подсчет частот, n_i	частота в интервале, p_i	середины интервалов, x_i
1	0,5 – 1,5	5	5/50	1
2	1,5 – 2,5	8	8/50	2
3	2,5 – 3,5	17	17/50	3
4	3,5 – 4,5	12	12/50	4
5	4,5 – 5,5	4	4/50	5
6	5,5 – 6,5	3	3/50	6
7	6,5 – 7,5	1	1/50	7
n =50				

Сгруппированный статистический ряд имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	5/50	8/50	17/50	12/50	4/50	3/50	1/50

2.

№ интервалов	границы интервалов	n_i	плотность частоты, $\frac{n_i}{\Delta}$	$\frac{n_i}{\Delta \cdot n}$
1	0,5 – 1,5	5	5	5/50
2	1,5 – 2,5	8	8	8/50
3	2,5 – 3,5	17	17	17/50
4	3,5 – 4,5	12	12	12/50
5	4,5 – 5,5	4	4	4/50
6	5,5 – 6,5	3	3	3/50
7	6,5 – 7,5	1	1	1/50

Гистограмма	Полигон относительных частот
	

Вывод:

По данному полигону относительных частот видно, что подавляющее большинство семей имеют в своем составе три человека.

С помощью гистограммы можно определить вид закона распределения генеральной совокупности, который позволит выбрать для исследования явления математический аппарат.

Лекция17 Элементы теории корреляции.

Часто результат опыта описывается не одной, а несколькими случайными величинами. В этом случае говорят, что имеем систему случайных величин. Систему двух случайных величин ($X;Y$) можно изобразить случайной точкой на плоскости. Закон распределения системы двух случайных величин может быть задан при помощи таблицы.

X **Y**	y_1	y_2	…	y_n
x_1	P_{11}	P_{12}	…	P_{1n}
x_2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	P_{m1}	P_{m2}	…	P_{mn}

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$; $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$

P_{ij} - вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении $X = x_i$; $Y = y_j$.

При этом $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P = 1$

Между случайными величинами может существовать функциональная зависимость, когда каждому возможному значению одной случайной величины соответствует определенное значение другой случайной величины. Например, зависимость между возрастом дерева и количеством годовых колец. Но между случайными величинами может существовать связь и другого рода, проявляющаяся в том, что изменения одной из них влечет изменения закона распределения другой. Например, связь между ростом человека и возрастом. Такая связь называется стохастической (вероятностной) или статистической. Статистическая связь между двумя величинами появляется обычно тогда, когда имеются общие случайные факторы, влияющие на обе случайные величины одновременно, наряду с другими, неодинаковыми для обеих случайных величин факторами. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величины изменяется среднее значение другой. Условным средним $\bar{y}_x$ называют среднее арифметическое значений Y, соответствующих значению $X = x$.

Если каждому значению x соответствует одно значение условной средней, то условная средняя есть функция от x. В этом случае случайная величина Y зависит от X корреляционно.

Например, рост и размер обуви.

Пусть случайная величина x - рост людей, а y - размер их обуви. Фиксируем x, значит, рассматриваем только людей одного роста и вычисляем условную среднюю, т.е. измеряем их размер обуви. Тогда росту одного человека соответствует одно среднее значение размера обуви. Следовательно, мы имеем дело со статистической (корреляционной) зависимостью.

Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость $\bar{y}_x = f(x)$. Это уравнение называется уравнением регрессии Y на X, а ее график – линией регрессии Y на X.

Теория корреляции позволяет решить две задачи:

1. Установить форму корреляционной связи, т.е. вид функции регрессии (линейная, квадратичная, показательная и т.д.). Наиболее часто встречаются линейные функции регрессии.
2. Оценить тесноту (силу) корреляционной связи. Теснота корреляционной зависимости Y от X оценивается по величине рассеяния значений Y вокруг условного среднего.

Метод наименьших квадратов.

Предположим, X и Y связаны линейной, зависимостью $Y = aX + b$, где a,b - неизвестные. Найдем их из условия, что $\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$ - минимально (сумма квадратов отклонений по y).

Заметим, что эта сумма есть функция от двух переменных a,b $F(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$. Необходимым условием экстремума (в тои числе – минимума) является равенство нулю первых частных производных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0 \Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot 1 = 0 \Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно неизвестных a и b, получим формулы:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Для проверки точности вычислений служит величина σ и заранее заданная погрешность ε : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(P_k(x_i) - y_i\right)^2}$, где $P_k(x)$ - многочлен степени k.

Если $\sigma >> \varepsilon$ степень многочлена недостаточна, велика, надо увеличить степень.

Если $\sigma << \varepsilon$ старшие коэффициенты недостоверны, надо уменьшить степень многочлена.

Если $\sigma \approx \varepsilon$ - число коэффициентов оптимально.

При решении (для небольших k) удобно результаты записывать в таблицу.

X **Y**	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1				
2				
…				
n				
$\sum$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Для характеристики системы двух случайных величин применяются следующие понятия: центр рассеивания системы случайных величин (m_x, m_y),

где $m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P_{ij}$; $m_x = M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i P_{ij}$.

m_x и m_y это математические ожидания дискретных случайных величин X и Y.

Для определения дисперсий X и Y имеем формулы:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x_i - m_x)^2; \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(y_i - m_y)^2 \quad \text{или} \quad \begin{matrix} D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \\ D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 \end{matrix}$$

Средние квадратические отклонения случайных величин X и Y: $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$; $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$.

В случае, когда вероятность появления пары (x_i, y_j) есть ее частота $P_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$, математическое ожидание вычисляется, как среднее - арифметическое случайной величины:

$$M(X) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{n}; \qquad M(X) = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot n_i}{n}$$

Дисперсия:

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2; \qquad D(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{y}^2$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$; $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$.

Выражение $r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$, *где* $C_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i n_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ называется коэффициентом корреляции, который является главной характеристикой связи между X и Y.

Если, $|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1} \geq 3$ то связь между X и Y достаточно вероятна и выражается формулой: $\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ -формула линии регрессии у на х.

Коэффициент корреляции удовлетворяют условию: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Если случайные величины X,Y независимы, то $r_{xy} = 0$. При большом числе наблюдений одно и то же значение x может встретиться n_x раз, одно и то же значение у может встретиться n_y раз, одна и та же пара чисел (x,y) может наблюдаться n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений группируются, т.е. подсчитывают частоты n_x, n_y, n_{xy}. Все сгруппированные данные записывают в виде таблицы, которую называют корреляционной.

Пример. Выборочно обследовано 100 снабженческо-сбытовых предприятий некоторого региона по количеству работников X и объемом складской реализации Y (ден. ед.). Результаты представлены в корреляционной таблице.

X / **Y**	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**ny**
130	7	1				8
132	2	7	1			10
134	1	5	4			11
136		1	15	10	8	34
138			3	12	15	30
140				1	6	7
nx	10	14	23	24	29	n=100

По данным исследования требуется:

1) В прямоугольной системе координат построить эмпирические ломаные регрессии Y на X и X на Y . Сделать предположение о виде корреляционной связи.

2) Оценить тесноту линейной корреляционной связи.

3) Составить линейные уравнения регрессии Y на X, построить их графики в одной системе координат.

Решение:

1. Для построения эмпирических ломаных регрессий вычислим условия средние $\bar{Y}_x$ и $\bar{X}_y$. Вычисляем $\bar{Y}_x$ при каждом x.
2. Например: $\bar{Y}_{x=5} = \frac{130 \cdot 7 + 132 \cdot 2 + 134 \cdot 1}{7 + 2 + 1} = 130{,}08$

Аналогично: $\overline{Y}_{x=15} = 132{,}86$

Полученные таким образом данные заносим в таблицы.

130,8	132,86	135,74	137,08	137,86

$\overline{Y}$	130	132	134	136	138	140
$\overline{X}_4$	6,25	14	19,54	32,35	39	43,57

В прямоугольной системе нанесем точки $A_l\ (x_l;\ \overline{Y}_{x_l})$ и $B_j(x_{yj};y_j)$. Построенные эмпирические регрессии Y на X и X на Y, свидетельствуют о том, что между количеством работающих X и объемом складских реализаций (Y) существует линейная зависимость.

2. Оценим тесноту связи. Вычислим выборочный коэффициент корреляции.

$$r_в = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}\ ;\quad \overline{x} = \frac{\sum x_l n_x}{N};\ \sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2};\quad \overline{y} = \frac{\sum y_j n_{yj}}{N}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}\ ;\quad \overline{x^2} = \frac{\sum x^2_l n_{xl}}{N}$$

$$\overline{x} = 29{,}8 \quad \overline{y} = 135{,}78 \qquad \overline{y^2} = \frac{\sum y^2{}_j n_{yj}}{N}$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{100}(130\cdot5\cdot7 + 130\cdot15\cdot1 + 132\cdot5\cdot2 + 132\cdot15\cdot7 + 132\cdot25\cdot1 + 134\cdot5\cdot1 + 134\cdot15\cdot5 +$$
$$+ 134\cdot35\cdot1 + 136\cdot15\cdot1 + 136\cdot25\cdot15 + 136\cdot35\cdot10 + 136\cdot45\cdot8 + 138\cdot25\cdot3 + 138\cdot35\cdot12 + +$$
$$+ 140\cdot35\cdot1 + + 140\cdot45\cdot6\ ) = 4075{,}55$$

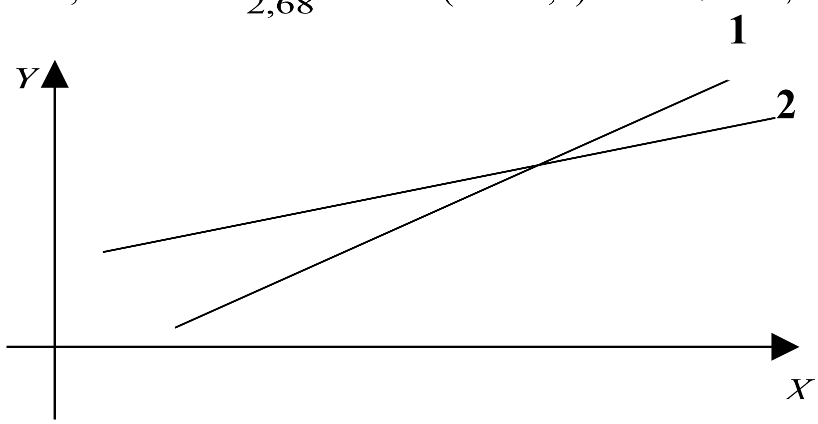
$\sigma_x = 13{,}08$ $\sigma_y = 2{,}68$ $r_в = 0{,}84$.

Значение $r_в$ говорит о том, что линейная связь между количеством работников и объемом складским реализаций высокая.

Запишем уравнения регрессии.

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})\ ;\quad \overline{xy} - \overline{x} = r_в \frac{\sigma_x}{\sigma y}(y - \overline{y})$$

$$\overline{y}_x - 135{,}78 = \frac{0{,}84 \cdot 13{,}08}{2{,}68}\cdot(x - 29{,}8) \text{ или } \overline{x}_y = 4{,}1\, y - 526{,}9$$



Уравнение регрессии X на Y.

Уравнение регрессии Y на X.

Замечание: Если в корреляционной таблице даны интервальные распределения, то за значения вариант надо убрать середины частичных интервалов.

3.2. Методические указания по выполнению контрольной работы студентами заочного отделения

Основной формой обучения студентов заочников является самостоятельная работа: она включает в себя изучение теоретического материала, решение задач, выполнение контрольной работы.

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работа, выполненная без соблюдения этих правил, не зачитывается и возвращается студенту для переработки.

1. Контрольную работу выполнять в тетради пастой или чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, название дисциплины.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольная работа, содержащая не все задания, а также содержащая задачи не своего варианта, не зачитывается.

4. Вариант контрольной работы студент выбирает по последней цифре номера зачетной книжки.

5. Решение задач надо располагать в порядке, указанном в заданиях, сохраняя номера задач.

6. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. Если несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

7. После получения прорецензированной работы (как зачтенной, так и не зачтенной) студент должен исправить в ней отмеченные ошибки и недочеты. В связи с этим следует оставлять в конце тетради чистые листы для работы над ошибками. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

8. В конце работы следует указать литературу, которую изучал студент, выполняя данную работу.

9. Зачтенная контрольная работа с рецензиями обязательно предъявляете на зачете и экзамене.

4. ОРГАНИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

4.1 Примеры контрольных работ

Контрольная работа по геометрии

Даны координаты треугольника A(1;0) B(3;2) C(3;1)
Найти уравнение и длину медианы
Привести к каноническому виду и построить кривую $x^2+4y^2-4x-8y+9=0$
Даны вершины треугольника: A(0;0), B(-1;-3), C(-5;-1). Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.

Даны координаты треугольника A(4;-4) B(-1;-4) C(3;2)
Найти периметр треугольника
Привести к каноническому виду и построить кривую $x^2+4y^2+8y-4=0$
Определить расстояние от точки M(2;-1) до прямой, отсекающей на осях координат отрезки x=8, y=6.

Даны координаты треугольника A(2;2) B(8;2) C(3;7)
Найти точку пересечения высоты AH и медианы CM
Привести к каноническому виду и построить кривую $x^2-y^2-6x+10=0$
При каком значении m прямые $7x-2y-5=0, x+7y-8=0, mx+my-8=0$ пересекаются в одной точке?

Даны координаты треугольника A(3;1) B(2;3) C(4;3)
Найти точку пересечения медиан
Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от начала координат и прямой x=4.
На оси абсцисс найти точку, расстояние которой до прямой 8x+15y+10=0 равно 1.

Даны координаты треугольника A(0;4) B(9;0) C(0;0)
Найти площадь треугольника
Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки A(-2;6) и прямой y=4.
Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых x+2y+3=0, 2x+3y+4=0 и параллельную прямой 5x+8y=0.

Даны координаты треугольника A(3;5) B(4;2) C(0;1)
Найти тангенс угла A
Привести к каноническому виду и построить кривую $2x^2-4x+2y-3=0$
Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых 5x+3y+10=0, x+y-15=0 и через начало координат.
Даны координаты треугольника A(2;4) B(0;0) C(2;6)

Найти уравнение средней линии, параллельной АВ
Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек А(-2;6) и В(4;-1)
Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(4;3) и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3.

Контрольная работа по анализу и интегралам
Вариант 1

1. Вычислить пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+5}{x^2+1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{tgx}{\sin 3x}$

2. Вычислить производные $y = tgx + e^{x^2+1}$ $\qquad$ $y = x\sqrt{x^2-1}$

3. Исследовать функцию и построить график $y = x^3 - 6x^2$

4. Написать уравнение касательной к кривой в точке x_0 построить схематично кривую и касательную. $y = 2x^2 + 3x + 1$ $\quad x_0 = 1$

5. Вычислить интеграл $\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3}dx$

Вариант 2

1. Вычислить пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-x}$

2. Вычислить производные $y = \sqrt{4x+\sin 4x}$ $\qquad$ $y = x^2\sqrt{1-x^2}$

3. Исследовать функцию и построить график $y = 4x^3 + 2x^2$

4. Написать уравнение касательной к кривой в точке x_0 построить схематично кривую и касательную. $y = -3x^2 + 5x - 2$ $\quad x_0 = -2$

5. Вычислить интеграл $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})dx$

Вариант №3

1. Вычислить пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{1-2x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

2. Вычислить производные $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ $\qquad$ $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

3. Исследовать функцию и построить график $y = -6x^3 + 3x^2$

4. Написать уравнение касательной к кривой в точке x_0 построить схематично кривую и касательную. $y = x^2 - 2x - 1$ $x_0 = 3$

5. Вычислить интеграл $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

Вариант №4

1. Вычислить пределы $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{2x - 1}$ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x - 6}{x^3 - 8}$

2. Вычислить производные $y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}$ $y = \frac{\sqrt{4x + 1}}{x^2}$

3. Исследовать функцию и построить график $y = 8x^3 - 4x^2$

4. Написать уравнение касательной к кривой в точке x_0 построить схематично кривую и касательную. $y = 3x^2 - 5x - 2$ $x_0 = 2$

5. Вычислить интеграл $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$

Контрольная работа по интегралам

$\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$ $\int x \sin x dx$ $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x} dx$ $\int \frac{dx}{1 - 10x}$

$\int \frac{\sqrt{x + 1}}{x + 1} dx$ $\int \frac{1}{1 - \sin^2 x} dx$ $\int \frac{x + 2}{x^2 + 2x} dx$ $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$

$\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)} dx$ $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$ $\int (x + 1) e^{-2x} dx$ $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$

$\int \frac{x + 4}{x^2 + 6x + 8} dx$ $\int \frac{arctg^2 x}{x^2 + 1} dx$ $\int \frac{dx}{1 - \cos^2 x}$ $\int x e^x dx$

$\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}$ $\int x^2 e^{4x} dx$ $\int \sqrt{5 - 2x} dx$

$\int \frac{x + 1}{x^2 + x - 2} dx$ $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (2x + 3)^2}} dx$ $\int \cos^2 2x dx$ $\int e^{\sin x} \cos x dx$

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1 Решить систему: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$

2. Даны векторы $a(1;-4;5), b(-3;0;1)$ найти скалярное произведение.

3. Дан треугольник ABC. Координаты точек A(1;0) B(3;2) C(3;1).
Найти длину медианы из точки С.

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

5. Вычислить производную $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$

6**.** Найти частные производные по х и у $z = x^2 + y^2 - 4xy$

7. Вычислить интеграл $\int \frac{(3^x + 5^x)}{2^x} dx$

8. Задан ряд распределения случайной величины Х

X	**23**	**25**	**28**	**29**
P	**0,3**	**0,2**	**0,4**	**0,1**

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Вариант 2

1. Решить систему: $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$

2. Даны векторы $a(1;-4;5), b(-3;0;1)$ найти векторное произведение.
3. Дан треугольник ABC A(2;4) B(0;0) C(2;6)
Найти уравнение медианы из точки А

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$
5. Вычислить производную $y = x^3 \sin x$

6. Найти частные производные по х и у $z = x^2 + y^2 - 4xy$
7. Вычислить интеграл $\int (x^3 + \cos x) dx$
8. После бури на участке между 40-м и 60-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километрами линии?

Вариант 3

1. Решить систему: $\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$

2. Даны векторы $a(1;-4;5), b(-3;0;1)$ найти косинус угла между векторами

3.Дан треугольник АВС А(3;1) В(0;4) С(6;0)

Найти уравнение прямой, параллельной АВ и проходящей через начало координат

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x + 5}{x^2 + 1}$

5. Вычислить производную $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$

6. Найти частные производные по x и y. $z = x^2 + 3y^2 - 6xy$

7. Вычислить интеграл $\int (3 - 2x)^5 dx$

8. Дан ряд распределения дискретной случайной величины Х:

X	5	8	9	11
p	0,1	0,5	0,3	0,1

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение

4.2. Комплект заданий для РГР

РГР №1. По теме «Элементы линейной и векторной алгебры, введение в анализ»

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу D = (3A - 4B)C.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему: $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

а) методом Гаусса; б) по формулам Крамера; в) матричным способом

4. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x1+ & 5x2- & x3+ & x4+ & x5=-3, \\ 3x1+ & x2+ & 3x3+ & 3x4- & 3x5=-3, \\ -x1 & + & x3- & x4+ & 3x5=2, \\ -x1+ & 2x2- & 2x3- & x4+ & 2x5=0. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. Найти частное решение, если $x_4 = -8$, $x_5 = -4$.

5. Вычислить объём пирамиды, заданной координатами своих вершин: A(-4,2,2); B(2,-1,-1); C(2,0,-2); D(0,-3,0).

6. Найти область определения функции $\int(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$.

7. Дана функция $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. Найдите $f[f(x)]$. Вычислите $2f(f(2))$.

8. Найти пределы функций: $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+\ \ 1)\sin\dfrac{5}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{1/x}-\ \ 1}{4^{1/x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+\ \ x+\ \ 1}{x^2+1}\right)^{3x+1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5^x-5}{(x^2-1)\ln 5}$

9. Найти производные от данных функций: а) $y=3\left(\dfrac{2-x}{x^2}+4\sqrt{5x+4}\right)$, y'(1);

б) $y=\sqrt{15}ark\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{ctg^2 5x}{10}+\dfrac{ctg10}{\sin^2 10}x, y'(2)$; в) $y=3\left[e^{3x}\ln(4x+6)+tg8x-(3\ln 6)\cdot x\right], y'(0)$.

10. К графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=7$ проведена касательная. Найти абсциссу точки пересечения касательной с осью *OX*.

Найти *dy*, если $y=\dfrac{x+3\sqrt{5+x^2}}{2}$. Вычислить значение *dy*, если $x = 2$ $\Delta x= 0{,}02$.

11. Дана функция $z = x^2+xy+y^2$ и точки $M_o(1; 2)$ и $M_1(1{,}02; 1{,}96)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки Mo в точку M_1 (ответы округлить до сотых).

12. Дана функция $y = x^{2+\frac{16}{x}-16}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [1;4].

13. Дана функция $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном кривыми

$y^2 = x, x = 2.$

14. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{12}{x^2 - 4}$ и начертить ее график.

*РГР № 2. По теме «*Случайные события»

1. Легкий диск, по краю которого нанесена равномерная шкала от 0 до 1, сильно вращается, а затем, спустя некоторое время, резко тормозится. Какова вероятность того, что отсчет, снятый со шкалы с помощью визира, окажется в интервале от 0,3 до 0,7?

2. Из полной колоды карт (52 карты) вынули три карты. С какой вероятностью будет вынута карта: семерка, туз?

3. Три стрелка стреляют в одну мишень, при этом известно, что вероятность попадания с одного выстрела: 0,8 - у первого стрелка, 0,7 - у второго и 0,6 - у третьего стрелка. Найти вероятность появление в мишени пробоины в результате одновременного выстрела всех троих стрелков.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,3. Стрельба ведется только до первого попадания. Определить вероятность того, что придется стрелять третий раз.

5. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями: 0,012; 0,010; 0,006; 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта может произойти хотя бы одно из этих событий.

6. Цель состоит из четырех частей и может быть поражена при попадании снаряда в одну из частей. При попадании снаряда в первую часть вероятность поражения цели равна 0,2, во вторую - 0,4, в третью - 0,5, в четвертую - 0,3. Известны также вероятности попадания снаряда в каждую часть, они соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,1; 0,2. Определить вероятность поражения цели при одном выстреле.

7. В библиотеке имеются книги только по технике 10 и математике 12 книг. Вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

8. Известно, что 3/5 всего числа изготавливаемых фабрикой изделий является продукция первого сорта. Чему равна вероятность того, что партия из 200 изделий окажется наивернейшее число изделий первого сорта?

9. Доля коротких волокон в партии хлопка 1/10. Случайным образом отобрано 100 волокон. Найти вероятность того, что число коротких волокон окажется от 20 до 30.

11. Обезьяне позволили 7 раз ударить по клавишам пишущей машинки (для простоты считаем, что на клавиатуре машинки 33 буквы русского алфавита и 10 цифр). Какова вероятность того, что она напечатает слово: а) «приматы»; б) «человек».

12. Магазин приобретает чай у двух фабрик, при этом первая из них составляет 2/3 всего товара. Продукция высшего сорта для первой фабрики составляет 90%, а для второй 80%. Какова вероятность того, что купленная наугад пачка чая будет высшего сорта изготовленная на второй фабрике.

13. Завод отправил на базу 4000 доброкачественных изделий. Вероятность что в пути изделие повредится равно 0.0005. Найти вероятность того, что на базу прейдут 4 поврежденные детали.

14. В кошельке лежат 8 монет достоинством в 5 копеек и 2 монеты достоинством в 3 копейки. Наудачу выбирается монета и бросается 5 раз. Какова вероятность того, что в сумме будет 15 очков, если герб принимается за «0»?

15. Менеджер рассматривает кандидатуру 8 человек, подавших заявление о приеме на работу. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в случайном порядке? Какова вероятность того, что они случайно будут приглашены на собеседование в зависимости от времени их прихода в офис?

16. Директор компании имеет 2 списка с фамилиями претендентов на работу. В 1-м списке - фамилии 6 женщин и 3 мужчин. Во 2-м списке оказались 4 женщины и 7 мужчин. Фамилия одного из претендентов случайно переносится из 1-го списка во 2-й. Затем фамилия одного из претендентов случайно выбирается из 2-го списка. Если предположить, что эта фамилия

принадлежит мужчине, чему равна вероятность того, что из 1-го списка была перенесена фамилия женщины.

17. Судоходная компания организует средиземноморские круизы в течение летнего времени и проводит несколько круизов в сезон. Поскольку в этом виде бизнеса очень высокая конкуренция, то важно, чтобы все каюты зафрахтованного под круизы корабля были полностью заняты туристами, тогда компания получит прибыль. Эксперт по туризму, нанятый компанией, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, будет равна 0,92, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и с вероятностью — 0,75, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,23. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

РГР № 3 По теме: **Случайные величины**

1. Задан ряд распределения случайной величины *X.* Найдите: а) M(X); б) D(X) и σ(x); в) F(x) и постройте ее график.

x	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

2. Задана F(x) - функция распределения случайной величины *X.* Найдите: а)f(x); б) M(X), D(X), σ(x); в) постройте графики F(x) и f(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, \text{ при } 0 < x \le 5, \\ 1, \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

3. Задана f(x) – плотность вероятности случайной величины *X.* Найдите: а) F(x); б) M(X), D(X), σ(x); в) постройте графики F(x) и f(x).

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{18}, \text{ при } 0 < x \le 6, \\ 0, \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

4. Из 10 телевизоров 4 оказались фирмы "Сони". Наугад для осмотра выбрано 3. Составьте закон распределения числа телевизоров фирмы "Сони" среди 3 отобранных. Найдите числовые характеристики.

5. Случайная величина *X*, сосредоточенная в интервале *[-1, 4]*, задана квадратичной функцией F(x)= $ax^2 + bx + c$, имеющий максимум при $x = 4$. Найдите параметры *a, b, c,* плотность вероятностей f*(x)* и вычислите вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (0; 2). Постройте графики функций f(x) и F*(x)*.

6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X* соответственно равны *M(X)=9, D(x)=0,8.* Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) 3х - 2, б) 6х, в) 3х+2.

7. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали равна 25, среднее квадратическое отклонение 2. Найдите: а) вероятность, что диаметр наудачу взятой детали будет больше 20 и меньше 27; б) вероятность, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не больше, чем на 1.

8. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=10мм. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

9. Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1мин., равно двум. Найдите вероятность того, что за 4 мин. поступит: а) три вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов. Предполагается, что поток вызовов простейший.

10. Систематическая ошибка измерения дальности радиолокатором равна 20м. а случайная ошибка имеет среднее квадратическое отклонение 75 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100м. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?

11. Дано $P(|X - M(x)| < \varepsilon) > 0{,}95$ и D(X)=0,04. Пользуясь неравенством Чебышева, найди ε.

12. Сколько надо провести испытаний, чтобы имело место неравенство $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}1\right) > 0{,}97$ если р=0,7.

13. Принимая вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками равной 3/4, оцените вероятность того, что среди 3000 стеблей число таких стеблей будет от 2190 до 2310.

14. Квантиль уровня 0,25 нормально распределенной случайной величины X равен 35, а квантиль уровня 0,8 равен 70. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

15. Пусть Т (час) - время, необходимое для ремонта грузового автомобиля, удовлетворяет экспоненциальному распределению с параметром $\lambda = 0,16$. Какова вероятность того, что время ремонта одного автомобиля не превышает 7 часов, и сколько часов в среднем затрачивается на ремонт одного автомобиля?

17. Дневная добыча угля в шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 725 тонн и стандартным отклонением 55 тонн. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 760 тонн угля. Определите долю рабочих дней, в которых будет добыто от 780 до 800 тонн угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 740 тонн.

4.3. ТЕСТ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Указания:
Знак - предполагает выбор одного ответа из предложенных
Знак - предполагает выбор нескольких ответов из предложенных
Знак - предполагает указание последовательности или соответствия

1

1,4

Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно…

ЗАДАНИЕ N 26.

Дан закон распределения вероятностей дискретной случайной величины :

Тогда значение ***a*** равно…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

–0,9

0,9

0,1

0,2

5. Контрольная работа для студентов заочного отделения

Вариант 0

Задание №1

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 4x - 3y + 5z = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

а) методом Гаусса;

б) по формулам Крамера;

в) средствами матричного исчисления.

Задание №2

Даны координаты вершин треугольника АВС. Найти: 1) длину стороны АВ; 2) уравнение сторон АВ и АС и их угловые коэффициенты; 3) уравнение медианы, проведенной из вершины А; 4) угол А в радианах с точностью до двух знаков; 5) уравнение высоты, проведенной из вершины В; 6) уравнение прямой, проходящей параллельно АС; 7) площадь треугольника АВС.

А(7;1), В(-5;-4), С(-9;-1)

Задание №3

Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, изобразить их на чертеже: 1) $3x^2-y-6x+1=0$; 2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Задание №4

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и построить ее график $y=xe^{-x}$.

Задание №5

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием: 1) $\boxed{\int (e^{-x}+\frac{1}{\sin^2 x}+x\sqrt{x})dx}$; 2) $\boxed{\int \arcsin^3 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}}$;

3) $\boxed{\int x^2e^x dx}$; 4) $\boxed{\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+9)}}$.

Задание №6

Сколько существует способов составления в случайном порядке списка из 7 кандидатов? Какова вероятность того, что кандидаты будут расставлены в списке по возрасту?

Задание №7

Среди студентов института – 30% первокурсники, 35% студентов учатся на втором курсе, на третьем и четвертом их 20% и 15% соответственно. По данным деканатов известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию на отличные оценки, на втором-30%, на третьем – 35%, на четвертом – 40% отличников. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент сдал сессию на отлично. Наудачу вызванный студент оказался отличником, какова вероятность того, что он (или она) – третьекурсник?

Задание №8

Задана F(x) – функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x\le 0, \\ \frac{x}{2}, \text{при } 0< x\le 2, \\ 1, \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найти: 1) f(x); 2) M(X), D(x), σ(x); 3) построить график F(x) и f(x).

Задание №9

По данным выборочного исследования получено следующее распределение семей по среднедушевому доходу.

Среднедушевой доход семьи в месяц, у.е.	До 25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150 и выше
Количество обследованных семей	46	236	250	176	102	78	12

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднедушевой доход семьи в выборке, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

Задание №10

Врач исследователь выясняет зависимость площади пораженной части легкого у людей, заболевших эмфиземой легких, от числа лет курения. Статистические данные, собранные им в некоторой области, имеют следующий вид:

Число лет курения	25	36	22	15	48	39	42	31	28	33
Площадь пораженной части легкого, %	55	60	50	30	75	70	70	55	30	35

Постройте график исходных данных и определите по нему характер зависимости. Рассчитайте выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона, проверьте его значимость при $\alpha=0,05$. Постройте уравнение регрессии и дайте интерпретацию полученных результатов. Если человек курил 30 лет, то сделайте прогноз о степени поражения легких у случайно выбранного пациента.