

Федеральное агентство по образованию РФ  
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
Зав. каф. МАиМ  
\_\_\_\_\_ Т.В. Труфанова  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2008г.

**Учебно-методический комплекс дисциплины**  
**ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**  
для специальности  
010501 – «Прикладная математика и информатика»

Составитель: Рыженко А.В.

2008

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
факультета математики и  
информатики  
Амурского государственного  
университета*

*Рыженко А.В.*

**Основы механики сплошных сред.** Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика» – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2008 – 154 с.

Учебно-методический комплекс по дисциплине содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, варианты индивидуальных заданий к практическим занятиям, а также контролирующие материалы для осуществления контроля усвоения знаний учащимися.

© Амурский государственный университет, 2008

© Кафедра математического анализа и моделирования

## СОДЕРЖАНИЕ

1	Рабочая программа. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе	5
1.1	Цели и задачи курса	5
1.2	Требования к уровню освоения содержания дисциплины	6
1.3	Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых необходимо при изучении данной дисциплины	6
2	Содержание дисциплины	6
2.1	Федеральный компонент	6
2.2	Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах	7
2.3	Практические занятия, их содержание, и объем в часах	10
2.4	Самостоятельная работа студентов	11
2.5	Вопросы к экзамену	11
2.6	Виды контроля	13
2.7	Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене	14
3	Краткий конспект лекций	15
	Предмет механики сплошных сред. Структура реальных тел.	15
	Основные гипотезы механики сплошных сред.	
	Лагранжево и эйлерово описание движения сплошной среды.	25
	Скалярные, векторные и тензорные поля	
	Тензорные поля. Тензоры. Тензорная поверхность, главные оси и главные компоненты. Инварианты. Шаровой тензор и дивергенция	40
	Явления переноса. Континуальные уравнения сохранения массы, количества движения, энергии. Уравнение состояния. Замкнутая система уравнений гидродинамики	61
	Течения в идеальной жидкости	80
	Вязкость, турбулентность, закон подобия	89
	Звуковые волны. Плоские волны в покоящейся жидкости. Распространение звука в неоднородных средах. Сферические волны	100
	Нелинейные одномерные волны. Решение Римана. Ударные волны. Солитон. Резонансные взаимодействия волн. Нелинейная дисперсия	111
	Сверхзвуковые течения	123
4	Учебно-методические материалы по дисциплине	126
4.1	Самостоятельная работа. Примерный вариант типового расчета	126

4.2	Перечень обязательной (основной) литературы	129
4.3	Перечень дополнительной литературы	130
4.4	Перечень методических пособий	130
5	Методические указания для проведения семинарских занятий	131
	Тема 1. Лагранжево и эйлерово описание движения сплошной среды	131
	Тема 2. Тензоры. Тензорные поверхности второго порядка и вычисление главных компонент и главных осей тензора	133
	Тема 3. Течения идеальной жидкости	137
	Тема 4. Течения вязкой жидкости	140
	Тема 5. Гидродинамическое подобие при турбулентности	141
	Тема 6. Распространение звука	142
	Тема 7. Ударные волны	144
	Тема 8. Сверхзвуковые течения	146
6	Вариант из фонда тестовых контрольных заданий для оценки качества знаний по дисциплине	150
7	Примеры составления экзаменационных билетов	152
8	Карта кадровой обеспеченности дисциплины	154

# **1 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

## **ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ**

Рабочая программа по дисциплине по дисциплине "Основы механики сплошных сред" для специальности 010501 – "Прикладная математика и информатика".

Курс 3. Семестр 5, 6. Лекции 72 (36+36) час. Экзамен 6 семестр. Практические (семинарские) занятия 72 (36+36) час. Зачет 5 семестр. Лабораторные занятия (нет). Самостоятельная работа 86 час. Всего 230 часов.

Составитель А.В. Рыженко, к.т.н. ст. преподаватель. Факультет математики и информатики. Кафедра математического анализа и моделирования. Благовещенск, 2007 г.

### **1.1 Цели и задачи курса**

Программа курса "Основы механики сплошных сред" составлена в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Главной целью преподавания дисциплины является ознакомление и изучение явлений и процессов природы на базе феноменологических теорий сплошных сред, а также приобретение навыков применения математических моделей этих теорий для решения научно-исследовательских и практических задач.

Задачами изучения дисциплины являются: геометрические и кинематические характеристики движения деформируемых сред; законы сохранения (изменение) массы, количества движения, момента количества движения; простейшие модели сплошных сред; основные законы термодинамики; модели жидкостей, газов и твёрдых тел; подобие и моделирование механических явлений.

### **1.2 Требования к уровню освоения содержания дисциплины**

По завершении изучения дисциплины студент должен:

- Овладеть системой знаний о закономерностях явлений и процессов в механике сплошных сред, разбираться в физике и формулировать феноменологические теории разделов механики;
- Уметь формулировать математические модели рассматриваемых проблем механики, как системы взаимодействующих подмоделей.

### **1.3 Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины**

Для усвоения материала студентам достаточно знание в объеме университетского курса «Общей физики», основных разделов «Математического анализа», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», а также данный курс связан с дисциплинами: «Дифференциальные уравнения», «Уравнения в частных производных».

## **2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **2.1 Федеральный компонент**

Дисциплина «Основы механики сплошных сред» является дисциплиной, входящей в блок дисциплин федерального компонента для специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика». Государственный стандарт – ОПД.Ф.01.

#### **ОПД.Ф.01. Основы механики сплошных сред.**

Система многих частиц как континуум. Скалярные, векторные и тензорные поля. Явления переноса. Континуальные уравнения сохранения, уравнение состояния, замкнутая система уравнений гидродинамики. Течения в идеальной жидкости. Вязкость, турбулентность, закон подобия. Звуковые волны. Ударные волны. Сверхзвуковые течения.

### **2.2 Наименование разделов (тем), их содержание, объем в часах лекционных занятий**

## ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Введение: Предмет механики сплошной среды. Структура реальных тел. Гипотезы сплошной среды. Понятие сплошной среды.	2
2. Геометрические и кинематические понятия для описания движения деформируемых тел.	18
2.1. Лагранжево и эйлерово описание движения сплошной среды. Индивидуальная и местная производные по времени. Связь полей скоростей и ускорений в лагранжевых и эйлеровых координатах.	2
2.2. Элементы тензорного исчисления. Преобразование систем координат. Ковариантные и контрвариантные векторы базиса и компоненты вектора. Полиадные произведения векторов базиса. Метрический тензор. Тензоры. Ранг. Сложение и умножение тензоров, свертка, жонглирование индексами. Операция симметрирования и альтернирования. Тензорные поля. Тензорная поверхность, главные оси и главные компоненты. Инварианты. Шаровой тензор и девиатор.	2
2.3. Деформация. Тензоры конечных и малых деформаций. Механический смысл компонент тензора деформаций. Главные оси тензора деформации. Коэффициент относительного изменения объема. Представление компонент тензоров деформаций через компоненты вектора перемещения. Уравнения совместности деформаций.	6
2.4. Тензор скоростей деформаций. Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций, их выражение через компоненты вектора скорости. Механический смысл движения вектора скорости.	2
2.5. Распределение скоростей в малой окрестности производной точки сплошной среды. Вектор вихря. Вихревые и потенциальные поля. Циркуляция скорости. Формула Стокса.	4

2.6. Формула Гаусса-Остроградского. Дифференцирование по времени интеграла по подвижному объему.	2
3. Задачи сохранения (изменения) массы, количества движения, момента количества движения	18
3.1. Масса и плотность. Закон сохранения массы для конечного объема сплошной среды. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера и Лагранжа для сжимаемой и несжимаемой среды. Многокомпонентные смеси. Уравнения неразрывности для компонент смеси. Векторы потоков диффузии.	4
3.2. Массовые и поверхностные внутренние и внешние силы. Закон изменения количества движения для конечного объема сплошной среды. Тензор напряжений. Механический смысл его компонент. Главные оси и главные компоненты тензора напряжений. Дифференциальные уравнения движения сплошной среды.	6
3.3. Закон изменения момента количества движения для конечного объема сплошной среды. Дифференциальные уравнения моментов движения сплошной среды. Симметрия и несимметрия тензора напряжений.	4
3.4. Теория об изменении кинетической энергии для сплошной среды в интегральной и дифференциальной формах. Работа внутренних поверхностных сил.	4
4. Простейшие модели сплошных сред.	6
4.1. Идеальная жидкость. Уравнения Эйлера. Замкнутые системы уравнений для несжимаемой идеальной жидкости и для баротранных движений сжимаемой идеальной жидкости.	2
4.2. Вязкая жидкость. Уравнения Навье-Стокса. Замкнутая система уравнений для несжимаемой вязкой жидкости.	2
4.3. Упругая среда. Закон Гука для изотропной упругой среды. Уравнения движения в перемещениях для упругого тела (уравнения Ламе).	2
5. Уравнение неразрывности в произвольной системе координат.	8

Физические компоненты векторов и тензоров. Компоненты ускорения и компоненты вектора-градиента скалярной функции в ортогональных системах координат. Уравнение неразрывности в цилиндрической и сферической системах координат. Уравнения Эйлера и Навье-Стокса в цилиндрической и сферической системах координат.	
6. Основные понятия и законы в термодинамике.	6
6.1. Понятия состояния и параметров состояния термодинамической системы.	2
6.2. Процессы и циклы. Первый закон термодинамики – закон сохранения энергии. Его формирование для конечного индивидуального объема сплошной среды. Дифференциальные уравнения энергии и притока тепла.	2
6.3. Второй закон термодинамики. Обратимые и необратимые процессы. Второй закон термодинамики для конечного индивидуального объема сплошной среды	2
7. Гидродинамика. Идеальная жидкость. Интегральные уравнения Эйлера. Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Трубка Пито. Понятие об интеграле Бернулли для адиабатических движений совершенного газа. Параметры торможения. Число МАХА. Максимальная скорость. Связь между скоростью и поперечным сечением трубки тока. Оценка влияния сжимаемости при установившихся и неустановившихся движениях. Интеграл Коши-Лагранжа. Постановка задач о потенциальных движениях несжимаемой жидкости. Определение давления.	8
8. Теория размерности. Подобие и моделирование механических явлений.	6
8.1. Размерные и безразмерные величины. Пи-теорема	2
8.2. Определяющие параметры. Механически подобные явления. Критерии подобия. Использование теории размерности при	4

нахождении решений, физическом моделировании и обработке экспериментов.	
<b>ИТОГО</b>	

### 2.3 Практические занятия, их содержание и объем в часах.

#### ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ (СЕМИНАРСКИХ) ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Лагранжево и эйлерово описание движения.	8
2. Тензоры. Декартовы координаты.	8
3. Тензоры. Криволинейные координаты	2
4. Системы координат.	4
5. Физические компоненты векторов и тензоров	6
6. Тензорный закон преобразования и тензорные операции	8
7. Ковариантное дифференцирование.	6
8. Деформации. Декартовы координаты.	6
9. Деформации. Криволинейные координаты. Сопутствующая системы.	6
10. Скорость деформации. Вихрь.	6
11. Общие законы и уравнения механики сплошных сред.	12
<b>ИТОГО</b>	<b>36+36=72</b>

### 2.4 Самостоятельная работа студентов (86 час.).

В качестве самостоятельной работы по дисциплине «Основы механики сплошных сред» студентам предлагается изучить дополнительный раздел и рассмотреть вопросы:

Поверхности сильного разрыва в сплошных средах. Условия на поверхностях разрыва, следующих из законов сохранения массы, количества движения, энергии и энтропии. Условия на поверхностях сильных разрывов в идеальном газе.

Для промежуточного контроля приобретенных практических и вычислительных навыков предусмотрены индивидуальные задания для типового расчета (по вариантам – один в семестр).

## **2.5 Вопросы к экзамену**

1. Закон сохранения массы и уравнение неразрывности в переменных Эйлера.
2. Уравнения неразрывности для многокомпонентных смесей и для процессов с диффузией.
3. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа.
4. Классификация сил в механике сплошных сред. Силы внутренних напряжений.
5. Уравнения количества движения для материальной точки и системы материальных точек.
6. Уравнение количества движения конечного объема сплошной среды.
7. Основные свойства внутренних напряжений. Тензор напряжений.
8. Уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат.
9. Физические компоненты вектора напряжений.
10. Уравнения движения сплошной среды в произвольной системе координат.
11. Уравнения моментов количества движения для материальной точки и системы материальных точек.
12. Моменты количества движения конечного объема СС, собственные МКД.
13. УМКД для конечного объема СС.
14. УМКД в дифференциальной форме.

15. Симметрия тензора напряжений в классическом случае.
16. Тензорная поверхность тензора напряжений.
17. Главные оси симметричного тензора напряжений.
18. Теорема об изменениях кинетической энергии сплошной среды в интегральной и дифференциальной форме.
19. Тензор напряжений в идеальной жидкости.
20. Уравнения движения жидкости.
21. Полная система уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости.
22. Уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости для баротропных процессов.
23. Упругие тела. Закон Гука.
24. Вязкие жидкости. Закон Навье–Стокса.
25. Свойства анизотропии, изотропии и гиратрапии сплошной среды.
26. Уравнение Навье–Стокса.
27. Уравнения движения в перемещениях для упругого тела.
28. Уравнение неразрывности в произвольной криволинейной системы координат. Физические компоненты векторов и тензоров.
29. Компоненты ускорения и вектора-градиента скалярной функции в ортогональных системах координат.
30. Уравнение Эйлера Навье–Стокса в цилиндрической и сферической системе координат.
31. Первый закон термодинамики – закон сохранения энергии.
32. Дифференциальное уравнения энергии и притока тепла.
33. Второй закон термодинамики. Обратимые и необратимые процессы.
34. Интегралы уравнений Эйлера и интеграл Бернулли.
35. Интеграл Бернулли для адиабатических движений совершенного газа.
36. Параметры торможения. Число МАХА. Максимальная скорость.
37. Оценка влияния сжимаемости при установившихся и неустановившихся движениях.
38. Размерности физических величин и Пи-теорема.

39. Определяющие параметры. Механически подобные явления.
40. Критерии пособия. Теория размерности для нахождения решений, физического моделирования и обработки эксперимента.

## **2.6 Виды контроля**

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки отчетов по индивидуальным заданиям. Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде анализа итоговых отчетов на аттестационные вопросы (коллоквиумы), проведение самостоятельных академических контрольных работ. Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде экзамена.

## **2.7 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене**

Экзамен сдается в конце второго семестра курса. Форма сдачи экзамена – устная. Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех расчетных работ. В предлагаемый билет входят два вопроса: основной и дополнительный, а также практическая часть (задачи). Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос, и краткий – на дополнительный. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале, краткий ответ – основных теоретических моментов: понятий и терминологии. При выполнении указанных требований ставится дифференцированная отметка.

Оценка «отлично» ставится при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале лекций и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом, по крайней мере, одно из практических заданий должно быть выполнено верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, либо, если не решена ни одна задача из предлагаемых в билете.

### **3. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

#### **ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД. СТРУКТУРА РЕАЛЬНЫХ ТЕЛ. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД.**

Механика сплошной среды – обширная часть механики, посвященная движению газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.

В теоретической механике изучаются движения материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твердого тела. В механике сплошной среды с помощью и на основе методов и данных, развитых в теоретической механике, рассматриваются движения таких материальных тел, которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом, и расстояние между точками которых во время движения меняются.

Помимо обычных материальных тел, подобных воде, воздуху или железу, в механике сплошной среды рассматриваются также особые среды – поля: электромагнитное поле, поле излучений, гравитационное поле (поле тяготения) и др.

Можно указать много разнообразных движений жидкостей, газов и твердых деформируемых тел, с которыми мы встречаемся при рассмотрении явлений природы и при решении многочисленных технических задач.

Многими движениями деформируемых тел мы можем управлять в необходимой степени, опираясь на повседневный элементарный личный опыт. Обыденные жизненные наблюдения создают у нас чувство реальности и «здорового смысла», которое часто позволяет верно предсказывать и создавать нужные нам механические эффекты.

Однако в сложных случаях требуется особое накопление и концентрация схематизированного опыта, требуются специальные методы теоретических и экспериментальных исследований. Проведение подобных исследований привело к созданию и развитию механики сплошной среды как науки.

Легко привести примеры, когда каждый из нас может сразу указать способ решения важнейших практических вопросов о движении деформируемых тел, например, как перелить воду из одного сосуда в другой, как сохранить теплый воздух внутри помещения, как защитить себя от ветра и дождя и т. п. Вместе с тем существует множество других вопросов, на которые можно дать ответы только на основании специальных знаний. Например, какова скорость вытекания газа из отверстия в баллоне, в котором газ находится в сжатом состоянии; как будет двигаться в атмосфере воздушный циклон; как можно снизить воздушное сопротивление самолета или водяное сопротивление корабля; как построить телевизионную металлическую башню высотой в 500 м, мост с пролетом между двумя ближайшими опорами более, чем километр; что произойдет с увеличением или уменьшением диаметра воздушного винта на самолете; что можно сказать о распределении давлений и о движении воздуха при взрыве бомбы и т.д.

Отметим сразу, что существует весьма много вопросов и задач, на которое мы еще не можем дать требуемого удовлетворительного ответа с помощью известных нам экспериментальных и теоретических методов. Решение новых сложных проблем, имеющих научное и практическое значение, и задач, исследование которых подготовлено предшествующим развитием науки, составляет в настоящее время предмет научно-исследовательской работы.

Примерами новых актуальных проблем являются: снижение сопротивления тел при движении в воде с большими, порядка 100 м/сек, скоростями; создание и удержание плазмы с температурой в миллионы градусов; выяснение особенностей поведения материалов при больших нагрузках и больших температурах (с учетом явлений пластичности, ползучести и т.д.); определение сил, действующих на сооружение при взрывах; создание гиперзвукового самолета для дальних пассажирских полетов; объяснение общей циркуляции воздуха в атмосфере; прогноз погоды; изучение механических процессов в растениях и живых организмах; проблемы эволюции звезд, явлений, происходящих на Солнце, и другие космические и космологические проблемы.

Прогресс науки и техники в указанных направлениях тесно связан и определяется исследовательской работой, тем не менее в настоящее время, наряду с точными научными данными, в технике большую роль играет также развитый «здравый смысл», талант, интуиция и механическое «чутье» конструктора и инженера, которые можно развить в результате большого опыта. Не следует думать, что все строящиеся машины, самолеты, корабли и т. п. могут быть рассчитаны и заранее проанализированы во всех деталях. В настоящее время многое из творений техники делается так же, как викинги более тысячи лет тому назад строили корабли. Тогда не существовало механики как науки даже в зачаточном состоянии, между тем викинги строили корабли, обладавшие хорошими мореходными качествами.

Вместе с тем современная техника усложнилась настолько, что теперь в технике уже нельзя обходиться без науки, без использования накопленного и систематизированного опыта. Так же как современное производство невысказано без соответствующей механизации, так и развитие техники сейчас невысказано без опоры на созданную научную базу.

Назовем некоторые наиболее существенно разработанные проблемы механики сплошной среды.

Проблема воздействия жидкости и газа на движущиеся в них тела. Силы, действующие со стороны жидкости на тело, определяются движением жидкости, поэтому изучение движения тел в жидкости непосредственно связано с изучением движения жидкости.

Особым стимулом развития этой проблемы послужили технические задачи о движении самолетов, вертолетов, дирижаблей, снарядов, ракет, кораблей, подводных лодок; задачи о создании различных двигательных приспособлений – таких, как водяные и воздушные винты, и т. д. и т. п.

Движение жидкостей и газа по трубам и вообще внутри различных машин. В этих вопросах основное значение имеют законы взаимодействия жидкости с границами потока и, в частности, величина сопротивления подвижных и неподвижных твердых стенок; явления неравномерности в распределении ско-

ростей и т. п. Эти задачи имеют непосредственное значение для проектирования газопроводов, нефтепроводов, насосов, турбин и других гидравлических машин.

Фильтрация – движение жидкости сквозь почву и другие пористые среды. Например, в почве постоянно наблюдается движение воды, которое необходимо учитывать при постройке фундаментов различных сооружений (плотин, опор, мостов, гидростанций), при создании подземных туннелей и т. д. Большое значение фильтрация имеет в нефтяном деле.

Гидростатика – равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости; фигуры равновесия вращающихся масс жидкости под действием сил ньютоновского тяготения.

Волновые движения. Распространение волн в твердых телах; волны на поверхности моря; волны, вызываемые движением корабля; распространение волн в каналах и реках; приливы; сейсмические процессы; звуковые колебания; общая проблема шума в различных средах и т.д. Окружающая нас среда (жидкости, газы, твердые тела и различные поля) постоянно находится в состоянии вибраций и различных распространяющихся во времени и по объектам возмущенных движений. Ясно, что эти явления играют очень важную роль в нашей жизни и существенны при решении многочисленных технических вопросов.

Неустановившиеся движения газов с химическими превращениями при взрывах, детонации и горении, например в потоке воздуха в цилиндрах поршневых машин или камерах реактивных двигателей и т.д.

Защита твердых тел от сгорания и сильного оплавления при входе с большими скоростями в плотные слои атмосферы.

Теория турбулентных движений газов и жидкостей, представляющих собой в действительности очень сложные нерегулярные, случайного характера движения, пульсирующие около некоторых средних регулярных процессов, которые в рассматриваемых и ставящихся задачах существенны с практической точки зрения. Подавляющее число движений газов и жидкостей в космических облаках и звездах, в атмосфере Земли, в реках, каналах, в трубопроводах и дру-

гих разнообразных технических сооружениях и машинах имеет турбулентный характер. Отсюда ясна огромная важность теории и экспериментов, посвященных изучению турбулентности. Исследования по турбулентности до настоящего времени еще никак нельзя считать достаточными для понимания многих особенностей и закономерностей природы таких сложных движений.

Проблемы описания движений очень сильно сжатых жидкостей и газов с учетом усложненных физических свойств сред в таких состояниях, особенно при наличии высоких температур. Существуют интересные и важные отрасли техники, в которых необходимо иметь дело с телами, подверженными большим давлениям (порядка многих тысяч и миллионов атмосфер), например при искусственном изготовлении алмазов, при применении взрывов для штамповки деталей некоторых конструкций и во множестве других случаев.

С другой стороны, очень важны явления, происходящие в сильно разреженных газах. При изучении различных процессов, связанных с движением сред при большом вакууме в лабораторных опытах, в космическом пространстве, в атмосферах планет и звезд, также требуется применять методы механики сплошной среды.

Проблемы магнитной гидродинамики и исследования движений ионизированных сред – плазмы, с учетом их взаимодействий с электромагнитным полем в настоящее время приобретают первостепенное познавательное и техническое значение. В частности, такие явления нужно изучать при создании магнитогидродинамических генераторов электрического тока, в которых происходит непосредственное превращение энергии движения плазмы в энергию электрического тока. Отметим также, что решение проблемы использования термоядерной энергии теснейшим образом связано с разрешением задач о поведении высокотемпературной плазмы в сильных магнитных полях.

Наука о прогнозе погоды – метеорология – в значительной степени представляет собой изучение движения воздушных масс в атмосфере Земли и является важным разделом механики сплошной среды, тесно связанным с множеством других разделов физики.

Основные проблемы астрофизики и космогонии изучаются в рамках механики сплошной среды. Сюда относятся вопросы о внутреннем строении звезд и строении их фотосфер, о движении туманностей и космических облаков, вспышках и взрывах переменных звезд, о колебаниях цефеид и, наконец, основная задача о развитии галактик и о строении и эволюции Вселенной.

Значительная часть механики сплошной среды посвящена исследованию движений и равновесий «твердых» деформируемых тел.

Теория упругости является основой для создания всякого рода сооружений и всевозможных машин. В настоящее время приобретают все большее значение разделы механики, посвященные изучению усложненных упругих свойств тел и учету неупругих эффектов в твердых телах таких, как пластичность, связанная с появлением остаточных деформаций, ползучесть, связанная с постепенным нарастанием деформаций при неизменных внешних нагрузках и с жаропрочностью частей машин (явления ползучести проявляются при долговременной работе различных конструкций, а в случае работы конструкций при повышенных температурах – и в короткие промежутки времени).

Большое значение имеют изучение различных видов усталости материалов, учет явлений наследственности в процессах движения и равновесия тел.

С появлением и использованием новых полимерных материалов становится совершенно необходимым учет их внутренней физической структуры, которая может изменяться в процессе протекания интересных для практики явлений.

Наконец, большое значение имеют работы, посвященные общей задаче о прочности и о разрушении конструкций из различных материалов. Эта важнейшая практическая задача до сих пор еще не имеет ясного удовлетворительного решения.

Можно упомянуть еще о механических проблемах, связанных с движением всякого рода смесей, с движением песков, снега и различных грунтов, сплавов, жидких растворов, суспензий и эмульсий, жидкостей с полимерными добавками и т.д. и т.п. Интересны проблемы кавитации, характеризующейся об-

разованием и исчезновением в движущейся жидкости пузырьков и больших каверн, наполненных газами и парами жидкости.

Нужно особенно подчеркнуть, что в последнее время вопросы технологии производства на химических предприятиях базируются на механических исследованиях движений соответствующих сплошных сред.

Важны новые современные теории, в которых исследуются проблемы взаимодействия мощных лазерных лучей с различными телами – задачи нелинейной оптики, взаимодействия движущихся тел с электромагнитными полями. Такие взаимодействия в макроскопических масштабах существенно связаны с эффектами, описываемыми в рамках квантовой механики. Аналогичное положение встречается при описании макроскопических свойств тел, связанных с движением при очень низких температурах или с учетом намагниченности и электрической поляризации.

В последнее время ставится очень много исследований в области биологической механики, в частности строятся механические модели, позволяющие описывать распространение возбуждений по нервам, механизмы перемещений вирусов, бактерий и других мелких организмов в различных средах, плавание рыб и т.д. Построены модели для описания движения крови в живых организмах и сокращения мышц.

### **Основные гипотезы**

При изучении движения тел необходимо опираться на них реальные свойства. Как известно, все тела представляют собой совокупности разного сорта молекул и атомов. Иногда тела могут быть ионизированными, т. е. состоящими из электронов, ионов (атомов и молекул с лишними или недостающим числом электронов) и нейтральных частиц.

Радиус ядра атома имеет порядок  $10^{-13}$  см, радиус молекулы водорода  $1,36 \cdot 10^{-8}$  см, т. е. радиус ядра атома много меньше радиуса молекулы, и в то же время именно в нем сосредоточена основная масса вещества: масса электрона  $9,1066 \cdot 10^{-23}$  г, масса протона  $1,6724 \cdot 10^{-24}$  г.

При обычных условиях (температура  $0^{\circ}\text{C}$ , атмосферное давление на уровне моря) в объеме воздуха в один кубический сантиметр содержится  $N=2.687 \cdot 10^{19}$  молекул. Если взять кубик с ребрами в одну тысячную сантиметра, что нередко лежит за пределами повседневной точности измерения длин в технике, то и в нем будет находиться  $27 \cdot 10^9$  частиц. На высоте 60 км, что намного больше «потолка» современных самолетов, число частиц в атмосфере  $N=8 \cdot 10^{15} \text{ 1/см}^3$ . в межзвездной среде, где имеется сильно разреженный газ,  $N=1 \text{ 1/см}^3 = 10^{15} \text{ 1/км}^3$ . расстояние в километр мало по сравнению с характерными космическими расстояниями, поэтому даже межзвездный газ можно рассматривать как среду с очень большим числом частиц в малых объемах.

На Луне нет атмосферы, там  $N=10^{10} \text{ 1/см}^3$ , т. е. в 2,7 миллиарда раз меньше, чем у поверхности Земли. Такого сильного вакуума в лабораторных условиях на Земле практически не получают. При таком вакууме при соприкосновении веществ во многих случаях происходит их сваривание.

Для железа (Fe)  $N=8,622 \cdot 10^{22} \text{ 1/см}^3$ , плотность

$$\rho_{\text{Fe}} \approx 7.8 \text{ Г/см}^3,$$

а плотность ядерного вещества

$$\rho_{\text{яд.вещ. Fe}} \approx 1.16 \cdot 10^{14} \text{ Г/см}^3, \quad \rho_{\text{Fe}}/\rho_{\text{яд.вещ. Fe}} \approx 7 \cdot 10^{-14}.$$

Мы видим, что объемы, занимаемые телами, много больше объемов, в которых, собственно говоря, сосредоточено само вещество.

Итак, все тела, по существу, «состоят из пустоты» и в то же время в практически малых объемах пространства, занятого телом, всегда заключено большое число частиц.

Атомы и молекулы находятся в постоянном хаотическом движении.

При обычных атмосферных условиях средняя скорость  $v_{\text{ср}}$  молекул водорода 1692 м/сек (больше скорости современного пассажирского самолета). Молекулы все время «сталкиваются» друг с другом, путь свободного пробега молекулы водорода в обычных атмосферных условиях  $\ell = 11,2 \cdot 10^{-6}$  см. Для кислорода  $v_{\text{ср}}=425$  м/сек,  $\ell = 6,5 \cdot 10^{-6}$  см, т. е. одна молекула за 1 секунду сталкивается  $6,54 \cdot 10^9$  раз.

Между частицами имеются определенные взаимодействия. В разреженных газах они связаны только со столкновениями. В жидкостях и твердых телах частицы расположены ближе, и в них существенны силовые или квантовые взаимодействия.

Силы, обеспечивающие прочность и упругость тел, имеют электрическую природу и, грубо говоря, сводятся к силам Кулона и к взаимодействиям элементарных магнитов. Что касается ядерных сил и сил слабого взаимодействия, то они проявляются только при ядерных, когда частицы взаимодействуют на близких расстояниях друг от друга. Для того чтобы сблизить частицы, требуется колоссальная энергия, которая может возникать за счет хаотического движения частиц при температурах в многие миллионы градусов.

Введем понятие сплошной среды. Все тела состоят из отдельных частиц, но их много в любом существенном для нас объеме, поэтому тело можно приближенно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом. Воду, воздух, железо и т.д. будем рассматривать как тела, целиком заполняющие некоторую часть пространства.

Континуумом можно считать не только обычные материальные тела, но и различные поля, например электромагнитное поле.

Эта идеализация, в частности, необходима потому, что мы хотим при исследовании движения деформируемых тел использовать аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

Под пространством понимают совокупность точек, задаваемых с помощью чисел, которые называются координатами.

Будем рассматривать непрерывные метрические многообразия – пространства, в которых определены расстояния между точками. Примером метрического пространства может служить обычное трехмерное евклидово пространство, точки которого задаются с помощью единой для всего пространства декартовой системы координат  $x, y, z$  и расстояние между двумя точками которого  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  определяются по формуле

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} .$$

В любом ли пространстве можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат? Рассмотрим для простоты двумерные пространства. Очевидно, что на плоскости всегда можно ввести единую для всей плоскости декартову систему двух координат. На поверхности сферы, кривизна которой не равна нулю, этого сделать нельзя, т.е. нельзя на сфере ввести систему двух координат так, чтобы расстояние между двумя любыми точками на ней, рассчитываемые как длина дуг больших кругов, определялись вышеуказанной формулой. На сфере декартову систему координат можно ввести только в малой окрестности каждой точки. В случае трехмерных метрических пространств также не всегда можно ввести единую для всего пространства трехмерную декартову систему координат.

В дальнейшем мы в основном будем рассматривать только такие пространства, в каждом из которых можно ввести единую для всех точек декартову систему координат. Такие пространства называются евклидовыми, а развиваемая на их основе механика носит название ньютоновской. Опыт показывает, что физическое действительное пространство в не очень больших масштабах с большой точностью можно считать евклидовым.

Понятие времени связано с опытом и необходимо в механике. Любое механическое явление описывается с точки зрения какого-либо наблюдателя. Время, вообще говоря, может зависеть от применяемой системы отсчета наблюдателя.

Мы будем считать, что время течет одинаково для всех наблюдателей – в поезде, самолете, аудитории. Следовательно, мы будем пользоваться абсолютным временем – идеализацией, которая пригодна для правильного описания реальности не всегда, а только тогда, когда не учитываются эффекты теории относительности.

Итак, будем рассматривать движение сплошной среды – континуума в евклидовом пространстве и будем пользоваться абсолютным временем. Таким образом, выше введены три фундаментальные гипотезы, с использованием которых будет строиться теория движения деформируемых тел. Выводы из теории,

основанной на этих гипотезах, часто, но не всегда, согласуются с опытом. В нужных случаях принятую модель пространства и времени можно уточнять и обобщать. Однако все дальнейшие обобщения строятся с учетом и на основе механики Ньютона, базирующейся не описанных выше фундаментальных гипотезах. Сущность этих гипотез более понятной из развиваемой далее теории.

## **ТЕМА 2. ЛАГРАНЖЕВО И ЭЙЛЕРОВО ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. СКАЛЯРНЫЕ, ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ.**

В рамках классической механики все частицы сплошной среды отличимы друг от друга – индивидуализированы. Каждой индивидуальной частице ставится в соответствие тройка чисел  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Такая тройка называется *лагранжевыми координатами* соответствующей индивидуальной частицы. Лагранжевы координаты используются, чтобы указать эту частицу, т. е. служат ее «именем», так же, как номера служат «именами» частиц, когда последние расположены дискретно. В качестве лагранжевых координат частицы обычно используются координаты точки, в которой эта частица находилась в начальный момент.

Движение сплошной среды и происходящие процессы описываются полями физических величин (скорости, давления, температуры и т.д.). Если эти величины рассматриваются как функции лагранжевых координат  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и времени  $t$ , то описание называется *лагранжевым* или *материальным*. При этом подходе события описываются как происходящие с индивидуальными частицами. Основной кинематической характеристикой при лагранжевом описании является **закон движения** сплошной среды. Для всякой частицы  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  во всякий момент  $t$  закон движения указывает ее положение (относительно выбранной системы отсчета) – вектор  $\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  трехмерного евклидова пространства. Если в этом пространстве выбрана система координат (установлено взаимно-однозначное соответствие  $\mathbf{r} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$  векторов и троек чисел), то закон движения описывается также функциями

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Скорость и ускорение частиц сплошной среды определяется соотношениями

$$\mathbf{v}(\xi, t) = \frac{\partial r(\xi, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{a}(\xi, t) = \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t}, \quad \text{где } \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Вообще скорость изменения некоторой величины  $A$  в индивидуальной частице сплошной среды называется *индивидуальной*, или *материальной*, или *полной производной по времени* этой величины. При лагранжевом описании – это просто частная производная  $\frac{\partial A(\xi, t)}{\partial t}$ .

Физические величины, характеризующие движение сплошной среды и происходящие процессы, можно рассматривать как функции пространственных координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и времени  $t$ . При этом подходе события описываются как происходящие в точках пространства. Такое описание называется *эйлеровым* или *пространственным*. Основной кинематической характеристикой при эйлеровом описании является поле скорости  $\mathbf{v}(x, t)$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Вектор  $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$  – это скорость частицы сплошной среды, которая в момент  $t$  находится в точке пространства с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ . Индивидуальная производная по времени величины  $A$  при эйлеровом описании обозначается  $\frac{\partial A(x, t)}{\partial t}$  и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A(x, t)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial A(x, t)}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial A(x, t)}{\partial x_3}.$$

Здесь  $v_1 = v_1(x, t)$ ,  $v_2 = v_2(x, t)$  и  $v_3 = v_3(x, t)$  – компоненты вектора скорости среды  $\mathbf{v}(x, t)$  в системе координат  $x_i$ .

В частности, ускорении  $\mathbf{a}(x, t)$  при эйлеровом описании находится по формуле

$$\mathbf{a}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial t} + v_1(x, t) \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial x_1} + v_2(x, t) \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial x_2} + v_3(x, t) \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial x_3}.$$

Лагранжев и эйлеров подходы эквивалентны: если события описаны в рамках одного из них, то описание в рамках другого подхода получается при помощи простой процедуры.

Чтобы перейти от лагранжева описания к эйлерову, нужно соотношения, выражающие закон движения

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Разрешить относительно лагранжевых координат, т.е. найти функции

$$\xi_\alpha = g_\alpha(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Тогда для всякой величины  $A$ , лагранжево описание которой  $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  известно, эйлерово описание находится как сложная функция

$$A(g_1(x, t), g_2(x, t), g_3(x, t), t).$$

Чтобы перейти от эйлерова описания к лагранжеву, находят решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$x_1|_{t=0} = \zeta_1, \quad x_2|_{t=0} = \xi_2, \quad x_3|_{t=0} = \xi_3.$$

Это решение  $x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , найденное для всевозможных значений параметров  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , и есть закон движения, а  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  – лагранжевы координаты частиц. Тогда для всякой величины  $B(x_1, x_2, x_3, t)$ , эйлерово описание которой известно, лагранжево описание находится как сложная функция

$$B(f_1(\xi, t), f_2(\xi, t), f_3(\xi, t), t).$$

В задачах этого параграфа  $x_1, x_2, x_3$  – пространственные декартовы координаты,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  – лагранжевы координаты.

### **Скалярные и векторные поля.**

Различают поля скалярные, векторные, тензорные. Примером скалярного поля является поле плотности в сплошной среде. Поле плотности – это область пространства, занятого сплошной средой, в каждой точке которой задана функция плотности от координат и времени  $\rho(x, y, z, t)$ .

### **Поле скоростей.**

Точка зрения Эйлера открывает дорогу для применения векторного анализа, название многих терминов которого указывает на тесную связь их с гид-

родинамикой. Особенно плодотворным является рассмотрение векторного поля скоростей, для которого рассмотрим определения векторного анализа.

*Линиями тока* называются линии, которые характеризуются тем, что для данного момента времени  $t$  касательная к линии тока в любой ее точке совпадает по направлению со скоростью; дифференциальные уравнения линий тока будут:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)},$$

где  $t$  играет роль параметра.

Через каждую точку поля, в которой функции  $v_x, v_y, v_z$  не обращаются в нуль одновременно в данный момент времени, проходит только одна линия тока, как это следует из теоремы существования для системы уравнений линий тока, в предположении, например, что  $v_x, v_y, v_z$  однозначные и непрерывные вместе с их первыми производными по координатам функции; разные особенности могут представиться, если в данной точке поля скорость обращается в нуль; такие точки называются *критическими* или *особыми*. Критические точки могут располагаться изолированно и могут образовывать критические линии и поверхности. Не анализируя вопроса о наличии, расположении и характере критических точек во всей общности, укажем простейшие типы критических изолированных точек для плоского течения жидкости. В этом случае линии тока определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y, t)}{v_x(x, y, t)}.$$

Переносим начало координат в одну из изолированных критических точек и предполагая, что в окрестности рассматриваемой критической точки функции  $v_x$  и  $v_y$  разложимы в ряды по целым положительным степеням координат, мы приведем уравнение линий тока для данного момента времени к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + P(x, y)}{a'x + b'y + Q(x, y)},$$

где  $P$  и  $Q$  – ряды, начинающиеся с членов по крайней мере второго измерения относительно  $x$  и  $y$ . Как показывается в курсах дифференциальных уравнений,

характер критической точки определяется при выполнении некоторых условий видом корней квадратного уравнения (характеристического):

$$\lambda^2 - (a' + b)\lambda + a'b - ab' = 0.$$

Если корни этого уравнения различны, вещественны, отличны от нуля и одного знака, то в окрестности критической точки все линии тока проходят через критическую точку, касаясь в ней некоторой кривой  $C_1$ , за исключением одной линии тока  $C_2$  пересекающейся с  $C_1$  под некоторым углом; критическая точка такого типа называется *узлом* (рис. 1). При равных вещественных корнях, отличных от нуля, линия  $C_3$  совпадает с  $C_1$ , давая картину вырождающегося узла, или же линии тока будут проходить через критическую точку во всех направлениях (рис. 2). Если корни характеристического уравнения вещественны, отличны от нуля и разных знаков, то через критическую точку проходят только две линии тока  $C_1$  и  $C_2$ ; критическая точка такого типа называется *седлом* (рис. 3).

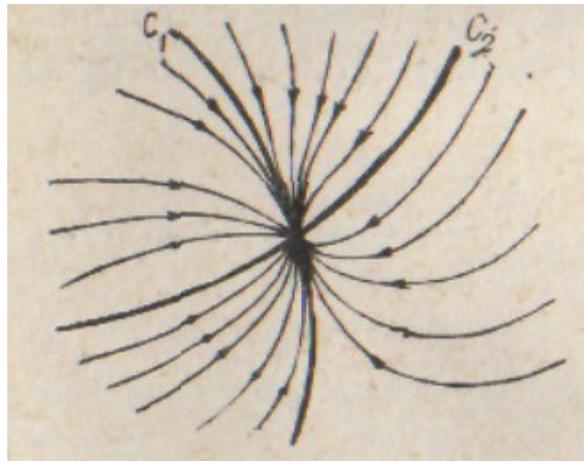


Рисунок 1.

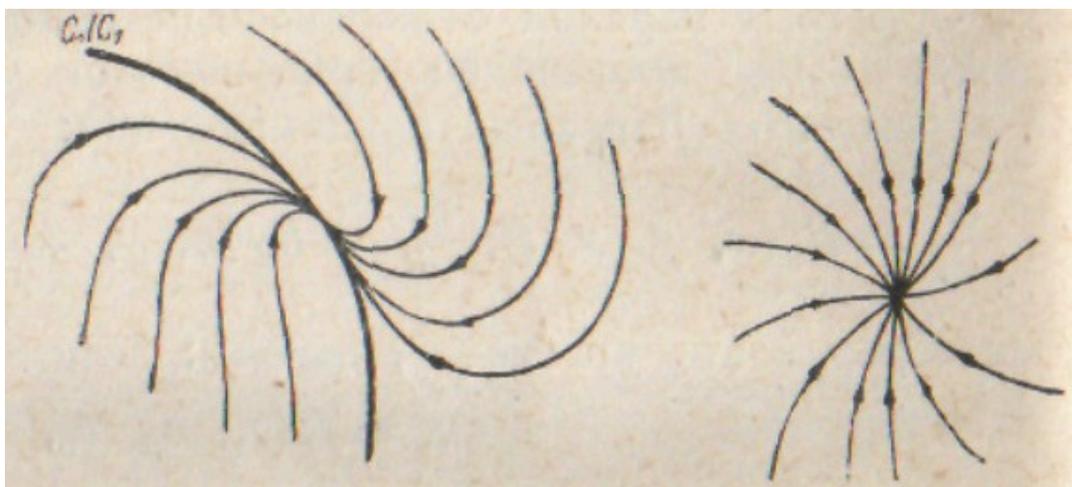


Рисунок 2.



Рисунок 3.

Если корни характеристического уравнения комплексны, то все линии тока спиралеобразно завиваются вокруг критической точки, асимптотически к ней приближаясь (рис. 4); в этом случае критическая точка называется *фокусом*. При чисто мнимых корнях характеристического уравнения и при выполнении некоторых добавочных условий все линии тока в окрестности критической точки могут оказаться замкнутыми кривыми, окружающими ее (рис. 5); критическая точка называется в этом случае *центром*.

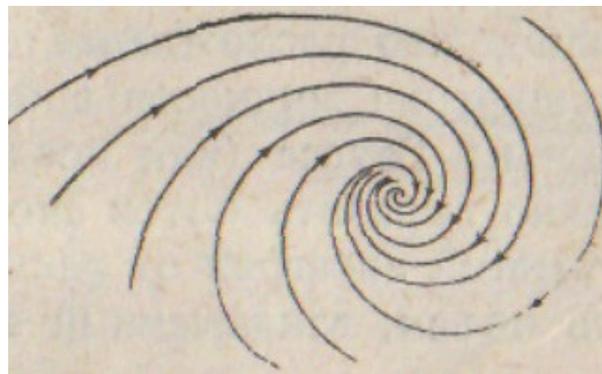


Рисунок 4

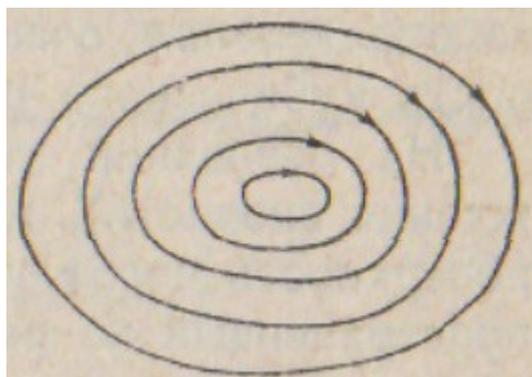


Рисунок 5

Семейство линий тока, содержа параметр  $t$ , будет семейством линий, изменяющихся с течением времени; очевидно, что в таком переменном поле траектории жидких частиц не будут вообще совпадать с линиями тока; для постоянного поля скоростей, когда вектор скорости в каждой точке не будет меняться с течением времени, линии тока будут оставаться неизменными и будут служить траекториями жидких частиц. Движение жидкости в этом случае называется *стационарным* или *установившимся*.

*Потоком скорости* через данную поверхность  $S$  называется поверхностный интеграл

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S v_n dS = \int_S v_x dydz + v_y dzdx + v_z dxdy ;$$

очевидно, что поток скорости выражает объем жидкости, протекающей за единицу времени сквозь поверхность  $S$ , считаемую неподвижной; при замкнутой поверхности  $S$  вытекающий из поверхности объем считается положительным, а втекающий – отрицательным.

*Расхождением скорости* в данной точке поля называется отнесенный к единице объема поток скорости сквозь замкнутую поверхность бесконечно малого объема  $\tau$ , окружающего данную точку:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}}{\tau} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} ;$$

из определения очевидно, что расхождение скорости выражает скорость кубического расширения жидкости в области данной точки.

На основании теоремы Гаусса (или последнего свойства расхождения скорости), можно выразить поток скорости сквозь замкнутую поверхность через объемный интеграл от расхождения скорости, распространенный на весь объем, заключенный внутри  $S$ :

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau .$$

Поле скоростей называется *соленоидальным* или *трубчатым*, если расхождение скорости равно нулю в каждой точке поля; следовательно, поле скоростей несжимаемой жидкости будет соленоидальным.

*Циркуляцией скорости* по замкнутой кривой с определенным направлением обхода называется линейный интеграл

$$\oint_L v \cdot dr = \oint_L v_x dx + v_y dy + v_z dz,$$

где  $dr$  есть элемент кривой  $L$ .

*Вихрь скорости* есть вектор  $\Omega = \text{rot } v$ , определяемый проекциями:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; & \Omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \\ \Omega_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

На основании теоремы Стокса, циркуляция скорости по замкнутому контуру равна потоку вихря скорости сквозь любую поверхность, ограниченную данным контуром:

$$\oint_L v \cdot dr = \int_S \text{rot } v \cdot dS.$$

### **Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа.**

Во всех последующих выводах при рассмотрении движения жидкости мы предполагаем, что движущаяся жидкость сплошным образом заполняет пространство или его определенную часть и что во время движения не происходит ни потери вещества, ни его возникновения. Это предположение налагает некоторое условие на изменения плотности и объема жидкости во время движения, носящее название *уравнения неразрывности*. Обратимся сначала к переменным Лагранжа и рассмотрим два положения одного и того же жидкого объема в моменты  $t_0$  и  $t$ ; пусть в момент  $t_0$  жидкий объем  $\tau_0$  ограничен произвольной замкнутой поверхностью  $S_0$ , которая к моменту  $t$  перейдет в некоторую другую, также замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $\tau$ ; жидкая частица, имеющая в момент  $t_0$  координаты  $x_0, y_0, z_0$ , перейдет в момент  $t$  в положение с координатами  $x, y, z$ , причем

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(a, b, c, t_0), & x &= f_1(a, b, c, t), \\ y_0 &= f_2(a, b, c, t_0), & y &= f_2(a, b, c, t), \\ z_0 &= f_3(a, b, c, t_0), & z &= f_3(a, b, c, t), \end{aligned} \right\}$$

плотность жидкости  $\rho_0$  в момент  $t_0$  перейдет к моменту  $t$  в  $\rho$ , причем

$$\rho_0 = f(a, b, c, t_0); \quad \rho = f(a, b, c, t).$$

В этих формулах  $a, b, c$  суть координаты Лагранжа, отличающие одну частицу от другой в рассматриваемом жидком объеме. Выражая, что масса, заключенная в жидком объеме, не изменится при переходе от момента  $t_0$  к  $t$ , имеем:

$$\iiint_{\tau_0} \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \iiint_{\tau} \rho dx dy dz.$$

Заменим теперь в обоих интегралах переменные  $x, y, z$  переменными  $a, b, c$  формулам перехода, указанным выше; по известным правилам преобразования интеграла при замене переменных получим:

$$\iiint_{\tau} \rho dx dy dz = \iiint_{\tau} \rho D da db dc,$$

где  $D$  – есть функциональный определитель

$$D: \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{\begin{vmatrix} |x| & |y| & |z| \\ |a| & |a| & |a| \\ |x| & |y| & |z| \\ |b| & |b| & |b| \\ |x| & |y| & |z| \\ |c| & |c| & |c| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} |x| & |y| & |z| \\ |b| & |b| & |b| \\ |x| & |y| & |z| \\ |c| & |c| & |c| \end{vmatrix}}.$$

Переносим все члены в одну часть и применяя данные формулы, найдем:

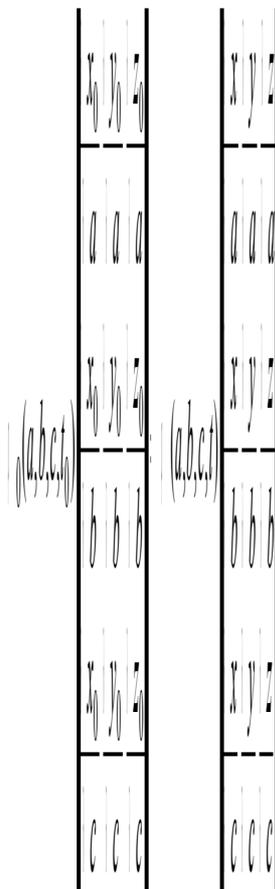
$$\iiint_{\tau} (\rho_0 D_0 - \rho D) da db dc = 0,$$

где  $D_0$  имеет аналогичное с  $D$  значение.

Отсюда, ввиду произвольности взятого первоначально объема  $\tau_0$ , в любой момент  $t$  должно иметь место соотношение

$$\rho_0 D_0 - \rho D = 0$$

или подробнее



которое и является искомым уравнением неразрывности в переменных Лагранжа. Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности принимает вид:

$x$	$y$	$z$	$x_0$	$y_0$	$z_0$
$a$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$x$	$y$	$z$	$x_0$	$y_0$	$z_0$
$b$	$b$	$b$	$b$	$b$	$b$
$x$	$y$	$z$	$x_0$	$y_0$	$z_0$
$c$	$c$	$c$	$c$	$c$	$c$

Если за  $a, b, c$  взяты начальные координаты частицы, то  $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c$ , и правая часть обращается в единицу.

### Уравнение неразрывности в переменных Эйлера.

Чтобы выразить уравнение неразрывности в переменных Эйлера, применим уравнение (10.2) к бесконечно малому объему  $\delta\tau_0$ , переходящему к моменту  $t$  в объем  $\delta\tau$ :

$$\rho \delta\tau = \rho_0 \delta\tau_0 = \text{const},$$

откуда, взяв полную производную по времени, получаем:

$$\frac{d(\rho \delta\tau)}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau} = 0;$$

отношение  $\frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau dt}$  выражает собой скорость относительного кубического расширения жидкости в данной точке и равно расхождению скорости в этой точке.

Таким образом уравнение неразрывности в переменных Эйлера получает вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнение неразрывности после несложных преобразований можно представить еще в следующих равносильных формах:

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Для несжимаемой жидкости, хотя бы и не однородной, обратится в нуль  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  (хотя  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ ), и уравнение неразрывности приобретает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Для стационарного движения  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , и уравнение неразрывности получается в виде:

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

### Уравнение неразрывности в криволинейных координатах.

Для случая *общих криволинейных* ортогональных координат рассмотрим поток через грани элементарной ячейки, образованной тремя парами смежных координатных поверхностей.

Называя через  $ds_1$ ,  $ds_2$  и  $ds_3$  длины ребер ячейки, эквивалентной прямоугольному параллелепипеду, а через  $v_1, v_2, v_3$  – проекции скорости на оси криволинейных координат  $(q_1), (q_2), (q_3)$  (рис. 6), получаем:

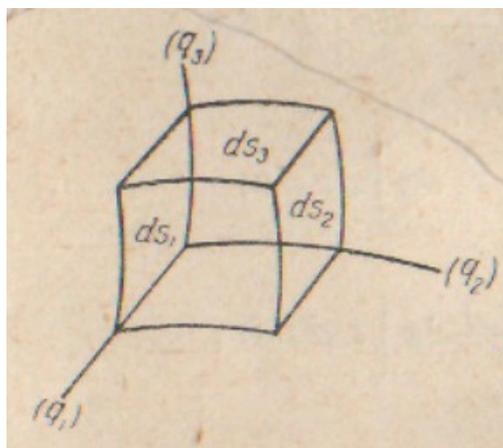


Рисунок 6.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} ds_1 ds_2 ds_3 + \frac{\partial (\rho v_1 ds_2 ds_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial (\rho v_2 ds_1 ds_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial (\rho v_3 ds_1 ds_2)}{\partial q_3} dq_3 = 0;$$

заменяя  $ds_1, ds_2, ds_3$  через их известные выражения

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3,$$

где  $H_1, H_2, H_3$  суть параметры Ламэ:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2},$$

мы приходим к следующему виду уравнения неразрывности:

$$H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\rho v_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (\rho v_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} = 0,$$

которое после несложных преобразований может быть представлено еще в такой форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial (\rho v_1)}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial (\rho v_2)}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial (\rho v_3)}{\partial q_3} + \frac{\rho}{H_1 H_2 H_3} \left[ v_1 \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial (H_3 H_1)}{\partial q_2} + v_3 \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] = 0.$$

### Поле завихренности.

Вектор

$$\Omega = \text{rot } v = 2\omega$$

называется *вектором завихренности движения*, или *вектором вихря скорости*. Этот вектор, как очевидно, характеризует вращение частиц сплошной среды. Как следует из формул, циркуляция скорости равна потоку завихренности сквозь любую поверхность, ограниченную контуром  $L$ .

Введенное понятие завихренности поля скоростей позволяет разбить движения сплошных сред на два класса. К первому отнесем движения, для которых выполняется условие:

$$\Omega = \text{rot } v = 0.$$

Такие движения будем называть *безвихревыми*, или *потенциальными*. Но последнее соотношение является необходимым и достаточным условием того,

что вектор  $v$  есть градиент некоторой функции  $\varphi$ , носящей название *потенциала скорости*, т.е.

$$v = \text{grad } \varphi.$$

Так как вектор  $v$  является функцией  $x, y, z$  и  $t$ , то и потенциал скорости зависит от тех же переменных.

Ко второму классу движений сплошных сред отнесем такие, для которых

$$\text{rot } v \neq 0.$$

Эти движения называются *завихренными*.

Рассмотрим завихренные движения. Пусть точки, в которых вектор  $\Omega$  отличен от нуля, сплошным образом заполняют некоторый объем. В этом случае можно говорить, что поле скоростей порождает поле завихренности, ибо каждой точке пространства будет соответствовать вектор  $\Omega$ . Так же, как и для поля скоростей, для поля завихренности введем понятие вихревых линий. Под последними будем понимать линии, касательные к которым в любой точке совпадают с вектором завихренности в данной точке. Согласно определению, дифференциальные уравнения вихревых линий будут

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}.$$

Так как

$$\text{div } \Omega = \text{div rot } v = 0,$$

то поток завихренности через замкнутую поверхность равен нулю. Действительно, по теореме Гаусса имеем

$$\int_{\tau} \text{div } \Omega \, d\tau = \int_{\sigma} \Omega \cdot d\sigma = \int_{\sigma} \Omega_n \, d\sigma = 0.$$

Выберем в качестве замкнутой поверхности вихревую трубку, ограниченную двумя любыми нормальными с ней сечениями (рис. 7). Пусть площадь этих сечений будет  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Обозначим через  $\mathbf{n}$  вектор нормали к этим сечениям (рис. 8) и через  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  нормальные составляющие векторов завихренности, действующих на площадках  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Тогда, так как для поверхности вихревой трубки нормальная составляющая вектора завихренности равна нулю, то

$$\sigma_1 \Omega_1 = \sigma_2 \Omega_2.$$

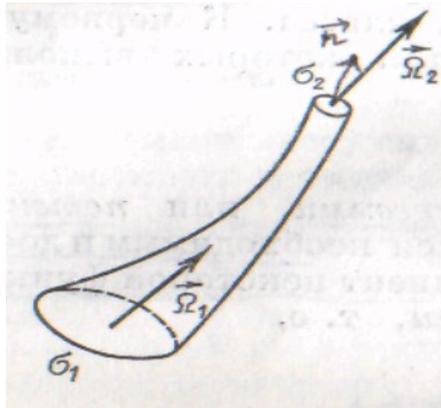


Рисунок 7.

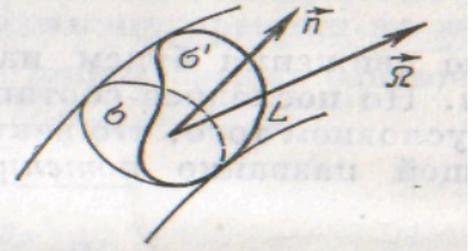


Рисунок 8.

Величина, равная произведению площади нормального к вектору вихря сечения вихревой трубки на модуль  $\Omega$ , носит название *интенсивности вихревой трубки*, или *интенсивности вихря*.

Из последнего соотношения следует так называемая **первая теорема Гельмгольца**, которая гласит: *интенсивность вихря остается постоянной вдоль вихревой линии*.

Так как сечения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  вихревой трубки выбраны произвольно, то из последнего равенства следует, что *вихревые трубки не могут прерываться, или вихревые трубки либо будут замкнуты, либо будут кончаться на границе жидкости*.

Применим теорему Стокса для вихревой трубки, выбрав в качестве кривой  $L$  любой контур, охватывающий трубку. Тогда

$$\Gamma = \Omega_n \sigma' = \Omega \sigma' \cos(n, \Omega) = \Omega \sigma,$$

где  $\sigma'$  – площадь сечения трубки, ограниченной контуром  $L$ ,  $\sigma$  – площадь соответствующего нормального сечения (рис. 8).

В силу последнего равенства имеем следующий результат: *интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по любому контуру, расположенному на вихревой трубке и охватывающему вихревую трубку*.

### ТЕМА 3. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ. ТЕНЗОРЫ. ТЕНЗОРНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ. ИНВАРИАНТЫ. ШАРОВОЙ ТЕНЗОР И ДЕВИАТОР.

## **Тензоры и механика сплошной среды.**

Механика сплошной среды имеет дело с физическими величинами, которые не зависят от выбора системы координат, применяемой для их описания. Однако очень часто эти физические величины наиболее удобно изучать в некоторой надлежащим образом выбранной системе координат. Математически такие величины представляются *тензорами*.

Тензор как математический объект существует независимо от системы координат. В то же время в каждой системе координат его можно задать некоторой совокупностью величин, называемых *компонентами* тензора. Если компоненты тензора заданы в одной системе координат, то они определены и в любой другой системе, ибо определение тензора включает *закон преобразования* его компонент. Точные определения различных видов тензоров будут даваться далее в тех местах, где они впервые появятся в изложении.

Физические законы механики сплошной среды выражаются тензорными уравнениями. Вследствие линейности и однородности тензорных преобразований тензорные уравнения, верные в одной системе координат, верны и в любой другой. Такая *инвариантность* тензорных соотношений относительно преобразований координат является одной из основных причин того, что тензорное исчисление весьма полезно в изучении механики сплошной среды.

### **Тензоры. Декартовы тензоры. Ранг тензора**

Если имеют дело с любым преобразованием одной произвольной системы криволинейных координат в другую, то тензоры называют *обычными тензорами*; если же ограничиваются преобразованиями однородных систем координат, то тензоры называют *декартовыми*. Так как большая часть механики сплошной среды может быть изучена при помощи декартовых тензоров, в этой книге термин «тензор» будет означать «декартов тензор», если особо не оговаривается, что рассматривается более общий случай.

Тензоры можно классифицировать по *рангу*, или *порядку*, в соответствии с частным видом законов преобразования, которым они подчиняются. Та же классификация отражается и в числе компонент тензора в  $n$ -мерном про-

пространстве. В трехмерном евклидовом пространстве, таком как обычное физическое пространство, число компонент тензора равно  $3^N$ , где  $N$  – порядок тензора. Тензор *нулевого ранга* задается в любой системе координат в пространстве любого числа измерений *одной* компонентой; такие тензоры называются *скалярами* и выражают физические величины, характеризующиеся только численным значением. Тензоры *первого ранга* имеют *три* координатные компоненты в трехмерном пространстве, называются *векторами* и представляют величины, которые характеризуются как численным значением, так и направлением. *Тензоры второго ранга* называются *диадиками* и описывают некоторые характеристики, важные в механике сплошной среды. При математическом изучении механики сплошной среды также определяются и часто используются тензоры более высокого ранга, в частности третьего и четвертого (триадики и тетрадики).

#### **Диады и диадики.**

**Диадой** называется неопределенное произведение двух векторов  $a$  и  $b$ , которое по определению задается написанием векторов один за другим, например  $ab$ . Неопределенное произведение в общем случае некоммукативно, т.е.  $ab \neq ba$ . **Диадиком**  $D$  называется тензор второго ранга; он всегда может быть представлен в виде суммы конечного числа диад:

$$D = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N.$$

Однако это представление неединственно. В символических обозначениях тензоры второго ранга (диадики) изображаются заглавными жирными буквами, как это сделано выше.

Если в каждой диаде выше указанной формулы первый и второй сомножители поменять местами, то полученный тензор называется *сопряженным* исходному и записывается так:

$$D_c = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_N a_N.$$

Если каждую диаду в сумме  $D$  в ранее указанной формуле заменить скалярным произведением соответствующих векторов, то получится скаляр, называемый *скаляром диадика*  $D$  и записываемый в виде

$$D_s = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_N \cdot b_N.$$

Если каждую диаду в сумме  $D$  в первой формуле этого раздела заменить векторным произведением составляющих ее векторов, то результат будет называться *вектором диадика*  $D$  и записываться так:

$$D_v = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_N \times b_N.$$

**Индексные обозначения. Интервал изменения индексов и соглашение о суммировании.**

Компоненты тензора любого ранга и сам тензор можно наглядно и кратко представить с помощью *индексных обозначений*. Эти обозначения состоят в том, что к *характерной*, или *основной*, букве, представляющей интересующую нас тензорную величину, добавляются верхние или нижние буквенные индексы. Типичными примерами, иллюстрирующими употребление индексов, являются тензорные символы

$$a_i, b^j, T_{ij}, F_i^j, \varepsilon_{ijk}, R^{pq}.$$

По правилам индексных обозначений буквенный индекс может встречаться в каждом члене *один* или *два* раза. Если индекс употреблен один раз, то подразумевается, что он принимает значения  $1, 2, \dots, N$ , где  $N$  – заданное положительное целое число, которое определяет *размерность* индекса, т.е. интервал его изменения. Неповторяющиеся индексы называются *свободными*. Тензорный ранг данного члена равен числу свободных индексов в этом члене. Правильно написанные тензорные соотношения имеют одинаковые свободные индексы в каждом члене.

Если индекс употреблен *дважды*, то подразумевается, что этот индекс принимает все значения из своего интервала изменения и члены, соответствующие каждому значению индекса из этого набора, *суммируются*. В этом так называемом *соглашении о суммировании* повторяющиеся индексы часто называют *немыми*, так как их замена на любые другие буквы, не использованные в качестве свободных индексов, не меняет значения члена, в который они входят. Вообще говоря, в правильно написанном выражении ни один индекс не встречается более двух раз. Если для желаемого представления какой-либо величины со-

вершено необходимо использовать некоторый индекс более чем дважды, соглашение о суммировании употреблять не следует.

По числу и расположению свободных индексов непосредственно можно судить о тензорном характере величины, выраженной в индексных обозначениях. Тензоры *первого ранга* (векторы) обозначаются основными буквами с *одним свободным индексом*. Так, любой вектор  $a$  изображается символом с единственным верхним или нижним индексом, т. е. в одной из **двух** форм

$$a_i, a^i.$$

В следующих выражениях, имеющих только один свободный индекс, тоже можно узнать тензоры первого ранга:

$$a_{ij}b_j, F_{ikk}, R_{qp}^p, \varepsilon_{ijk}u_jv_k.$$

*Тензоры второго ранга* обозначаются символами с *двумя свободными индексами*. Так, произвольный тензор второго ранга будет  $D$  записываться в одной из трех возможных форм

$$D^{ij}, D_i^j, \text{ или } D_{.j}^i, D_{ij}.$$

В смешанной форме точка указывает, что  $j$  – второй индекс. Тензорные величины второго ранга могут выглядеть по-разному, например

$$A_{ijp}, B_{.jk}^{ij}, \delta_{ij}u_kv_k.$$

Логически продолжая вышеуказанную схему, тензор *третьего* ранга записывают символом с *тремя* свободными индексами. А символ, который не имеет связанного с ним индекса, такой, как, например,  $\lambda$ , изображает скаляр, или тензор нулевого ранга.

В обычном физическом пространстве *базис* состоит из трех некопланарных векторов, и любой вектор в этом пространстве полностью задается своими тремя компонентами. Поэтому индексы у величин  $a_i$ , представляющих вектор  $a$  в физическом трехмерном пространстве, принимают значения 1, 2, 3. Согласно этому, подразумевают, что символ  $a_i$  представляет сразу три компоненты  $a_1, a_2, a_3$ . Таким образом, иногда символ  $a_i$ , можно толковать как  $i$ -ю компоненту вектора, а в других случаях – как сам вектор. В трехмерном пространстве, где оба индекса  $i, j$  меняются от 1 до 3, символ  $A_{ij}$  представляет де-

вать компонент тензора второго ранга  $A$ . Часто тензор  $A_{ij}$  задают подробно, записывая все девять его компонент в виде квадратной таблицы, заключенной в большие скобки:

$$A_{ij} : \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким же образом компоненты тензора первого ранга (вектора) в трехмерном пространстве можно наглядно изобразить упорядоченными строкой или столбцом из компонент в виде

$$a_i : (a_1, a_2, a_3) \text{ или } a_i : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

В общем случае в  $N$ -мерном пространстве тензор  $n$ -го ранга будет  $N^n$  компонент.

Удобство индексных обозначений для записи систем равенств в компактной форме мы проиллюстрируем двумя следующими типичными примерами. В трехмерном пространстве уравнение в индексной записи

$$x_i = c_{ij} z_j$$

представляет в развернутой форме три уравнения:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3, \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3, \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3. \end{aligned}$$

## Сложение декартовых тензоров. Умножение на скаляр.

Декартовы тензоры одинакового ранга можно складывать (или вычитать) покомпонентно согласно следующему правилу:

$$A_{ijk} \dots \pm B_{ijk} \dots = T_{ijk} \dots$$

Сумма тензоров есть тензор того же ранга, что и слагаемые. Заметим, что одинаковые индексы расположены в одной и той же последовательности в каждом члене.

Умножение всех компонент тензора на данный скаляр дает новый тензор того же ранга. При умножении на скаляр  $\lambda$  типичные примеры записи произведения в индексной и в символической форме имеют вид

$$b_i = \lambda a_i, \quad \text{или} \quad b \equiv \lambda a, \\ B_{ij} = \lambda A_{ij}, \quad \text{или} \quad B = \lambda A.$$

## Умножение тензоров

*Внешним произведением* двух тензоров произвольного ранга называется новый тензор, у которого компоненты образованы умножением каждой компоненты одного тензора на каждую компоненту другого. Ранг полученного тензора равен сумме рангов сомножителей. Типичными примерами внешних произведений являются следующие выражения:

$$a) \quad a_i b_j = T_{ij}; \quad \text{в) } D_{ij} T_{km} = \Phi_{ijkm}; \\ б) \quad v_i F_{jk} = \alpha_{ijk}; \quad \text{з) } \varepsilon_{ijk} v_m = \theta_{ijkm}.$$

Как видно из этих примеров, внешние произведения получаются простым написанием перемножаемых тензоров друг за другом. (Заметим, что именно эта операция образует из двух векторов диаду.)

*Свертыванием* тензора по двум свободным индексам называется такая операция, когда два индекса обозначаются одной и той буквой, вследствие чего они становятся индексами суммирования. В результате свертывания получается снова тензор (свертка), порядок которого на две единицы меньше, чем у исходного. Приведем несколько типичных примеров сверток.

а) Свертки тензора  $T_{ij}$  и диады  $u_i v_j$ :

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}, \\ u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

б) Свертки тензора  $E_{ij} a_k$  :

$$\begin{aligned} E_{ij} a_j &= b_i, \\ E_{ij} a_i &= c_j, \\ E_{ij} a_k &= d_k. \end{aligned}$$

в) Свертки тензора  $E_{ij} F_{km}$  :

$$\begin{aligned} E_{ij} F_{im} &= G_{jm}, & E_{ij} F_{kk} &= P_{ij}, \\ E_{ij} F_{ki} &= H_{jk}, & E_{ij} F_{jm} &= Q_{im}, \\ E_{ii} F_{km} &= K_{km}, & E_{ij} F_{kj} &= R_{ik}. \end{aligned}$$

*Внутренним произведением* двух тензоров называется результат операции свертывания, примененной к внешнему произведению данных тензоров, причем совпадающие индексы должны фигурировать по одному в каждом из сомножителей. Для справок приведем некоторые часто используемые в механике сплошной среды произведения тензоров, записанные в индексных и в символических обозначениях.

Внешнее произведение	Внутреннее произведение	
	индексные обозначения	символические обозначения
$a_i b_j$	$a_i b_i$	$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}$
$a_i E_{jk}$	$a_i E_{ik} = f_k$	$\underline{a} \cdot \underline{E} = \underline{f}$
	$a_i E_{ji} = h_j$	$\underline{E} \cdot \underline{a} = \underline{h}$
$E_{ij} F_{km}$	$E_{ij} F_{jm} = G_{im}$	$\underline{E} \cdot \underline{F} = \underline{G}$
$E_{ij} E_{km}$	$E_{ij} F_{jm} = B_{im}$	$\underline{E} \cdot \underline{E} = (\underline{E})^2$ .

Иногда пользуются свертками тензоров четвертого и более высокого рангов по нескольким парам индексов. Вот два таких примера.

$$\begin{aligned} E_{ij} F_{km} &\text{ свертывается в } E_{ij} F_{ij} \text{ или } \underline{E} : \underline{F}; \\ E_{ij} E_{km} E_{pq} &\text{ свертывается в } E_{ij} E_{jm} E_{mq} \text{ или } (\underline{E})^3. \end{aligned}$$

### **Векторное произведение. Тензор Леви-Чивиты. Бивектор.**

Чтобы записать векторное произведение  $a \times b$  в индексных обозначениях, удобно ввести тензор третьего ранга  $\varepsilon_{ijk}$ , известный как *тензор Леви-Чивиты (альтернирующий тензор)*. Этот часто используемый тензор определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если значения индексов } i, j, k \text{ образуют} \\ & \text{четную перестановку из } 1, 2, 3; \\ -1, & \text{если значения индексов } i, j, k \text{ образуют} \\ & \text{нечетную перестановку из } 1, 2, 3; \\ 0, & \text{если значения индексов } i, j, k \text{ не} \\ & \text{образуют перестановки из } 1, 2, 3, \\ \text{т. е. если два или все 3 индекса принимают одинаковые значения.} \end{cases}$$

С помощью этого тензора векторное произведение  $a \times b = c$  представляется в индексной записи так:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i.$$

Так же можно представить и смешанное произведение  $a \times b \cdot c = \lambda$ :

$$\lambda = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Тензор Леви-Чивиты часто используют для выражения величины определителя третьего порядка.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что  $\varepsilon_{ijk}$  подчиняется правилу преобразования декартовых тензоров третьего ранга только в случае таких преобразований, у которых  $\det a_{ij} = 1$  (например, при повороте осей). Если же преобразование таково, что  $\det a_{ij} = -1$  (например, преобразование отражения относительно одной из координатных плоскостей, в результате чего правая система координат превращается в левую), то формулу преобразования  $\varepsilon_{ijk}$  следует писать со знаком минус. Такие тензоры называются *псевдотензорами*.

Объект, определяемый равенством

$$v_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk},$$

называется *бивектором* произвольного декартова тензора второго ранга  $T_{ij}$  и является аналогом в индексных обозначениях вектора  $T_v$ , диадика  $T$ , который был определен ранее.

### **Симметрия диадиков, матриц и тензоров.**

Диадик  $D$  называется симметричным (или антисимметричным), если он равен (или противоположен по знаку) сопряженному с ним диадику  $D_c$ . Подобно этому тензор второго ранга  $D_{ij}$  симметричен, если

$$D_{ij} = D_{ji},$$

и *антисимметричен*, если

$$D_{ij} = -D_{ji}.$$

Поэтому  $D_{ij}$  можно разложить на два слагаемых:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}),$$

или (в сокращенной записи)

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ji]},$$

где индексами в круглых скобках обозначена симметричная часть  $D_{ij}$ , а индексами в квадратных скобках – антисимметричная часть.

Изменение порядка индексов у тензора второго ранга эквивалентно перемене местами строк и столбцов в соответствующей ему матрице; следовательно, квадратная матрица  $A$  симметрична, если она равна своей транспозиции  $A^T$ . Таким образом, симметричная  $A$  третьего порядка имеет только шесть независимых компонент и записывается в виде

$$A = A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Ассимитричная матрица равна своей транспозиции с *обратным* знаком. Поэтому антисимметричная матрица  $B$  третьего порядка имеет нули по главной диагонали и, следовательно, содержит только три независимые компоненты. Она выглядит так:

$$B: B^T: \begin{vmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & 0 & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Свойства симметрии можно распространить на тензоры более высокого порядка (выше второго). В общем случае произвольный тензор называется симметричным относительно пары индексов, если значение каждой его компоненты не меняется при обмене местами этих индексов. Тензор антисимметричен по паре индексов, если замена их друг на друга ведет к изменению знака, но не абсолютной величины компоненты. Вот примеры свойств симметрии у тензоров более высокого ранга:

$$a) R_{ijkl} = R_{ikjm} \quad (\text{симметричен по } k \text{ и } j),$$

$$б) \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kij} \quad (\text{антисимметричен по } k \text{ и } i),$$

$$в) G_{ijkl} = G_{jikm} = G_{ijmk} = G_{jimk} \quad (\text{симметричен по } i \text{ и } j, k \text{ и } m),$$

$$г) \beta_{ijk} = \beta_{ikj} = \beta_{kji} = \beta_{jik} \quad (\text{симметричен по всем индексам}).$$

### **Главные значения и главные направления симметричных тензоров второго ранга.**

В дальнейшем будут рассматриваться только симметричные тензоры с действительными компонентами. Это несколько проще в математическом отношении, а так как тензоры, важные для механики сплошной среды, обычно симметричны, то мы не многим жертвуем, принимая такое ограничение.

Для каждого симметричного тензора  $T_{ij}$ , заданного в некоторой точке пространства, и для каждого направления в этой точке (характеризуемого единичным вектором  $n_i$ ) существует вектор, определяемый внутренним произведением

$$v_i = T_{ij} n_j.$$

Здесь  $T_{ij}$  можно рассматривать как линейный векторный оператор, который ставит в соответствие направлению  $n_i$  вектор  $v_i$ . Если направление таково, что вектор  $v_i$  параллелен  $n_i$ , то указанное внутренне произведение выражается скаляром, умноженным на  $n_i$ . В этом случае

$$T_{ij}n_j = \lambda n_i$$

и направление  $n_i$  называется *главным направлением* или *главной осью* тензора  $T_{ij}$ . С помощью тождества  $n_i = \delta_{ij}n_j$  предыдущему соотношению можно придать форму

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0,$$

которая представляет систему трех уравнений для четырех неизвестных  $n_i$  и  $\lambda$ , соответствующих каждому главному направлению. В развернутой записи система, которую следует разрешить, имеет вид

$$\begin{aligned}(T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 &= 0, \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 &= 0, \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 &= 0.\end{aligned}$$

Заметим прежде всего, что при любом  $\lambda$  существует тривиальное решение  $n_i=0$ , однако нашей целью является получение нетривиального решения. Кроме того, вследствие однородности полученной системы, не теряя общности, можно ограничиться только решениями, для которых  $n_i n_i=1$ . начиная с этого момента мы будем требовать, чтобы это условие выполнялось.

Для того, чтобы система имела нетривиальное решение, определитель из коэффициентов должен быть равен нулю, т.е.

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0.$$

В развернутом виде это кубическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 + II_T \lambda - III_T = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением* тензора  $T_{ij}$ , а его скалярные коэффициенты

$$I_T = T_{ii} = \text{tr } T_{ij} \text{ (след матрицы } [T_{ij}] \text{),}$$

$$II_T = \frac{1}{2} (T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}),$$

$$III_T = |T_{ij}| = \det T_{ij}$$

Называются соответственно первым, вторым и третьим *инвариантами* тензора  $T_{ij}$ . Три корня кубического уравнения, обозначенные  $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ , называются главными значениями тензора  $T_{ij}$ . У симметричного тензора с действительными компонентами главные значения действительны; если все они различны, то три главных направления взаимно ортогональны. В главных осях таблица из компонент тензора приводится к диагональной форме:

$$T: \begin{vmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{vmatrix}.$$

Если  $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$ , то диагональный вид тензора не зависит от выбора осей, соответствующих  $\lambda_{(1)}$  и  $\lambda_{(2)}$ , и нужно установить главную ось, соответствующую  $\lambda_{(3)}$ . Если все главные значения равны, то любое направление является главным. Если главные значения упорядочены, то принято обозначать их через  $\lambda_{(I)}, \lambda_{(II)}, \lambda_{(III)}$  и располагать в порядке убывания:  $\lambda_{(I)} > \lambda_{(II)} > \lambda_{(III)}$ .

### **Тензорные поля. Дифференцирование тензоров.**

*Тензорное поле* ставит в соответствие каждой точке пространства и каждому моменту времени  $(x, t)$  тензор  $T(x, t)$ , где радиус-вектор  $x$  меняется в заданной области пространства, а  $t$  – в заданном интервале времени. Тензорное поле называется непрерывным (или дифференцируемым), если компоненты  $T(x, t)$  являются непрерывными (или дифференцируемыми) функциями  $x$  и  $t$ . Если компоненты тензора зависят только от  $x$ , то тензорное поле называется *стационарным*.

В ортогональной декартовой системе координат, где радиус-вектор любой точки имеет вид

$$x = x_i \hat{e}_i,$$

поля тензоров различного ранга можно записать в индексных и символических обозначениях, например

а) скалярное поле  $\varphi = \varphi(x_i, t)$ , или  $\varphi = \varphi(x, t)$ ,

б) векторное поле  $v_i = v_i(x, t)$ , или  $v = v(x, t)$ ,

в) поле тензора второго ранга  $T_{ij} = T_{ij}(x, t)$ , или  $T = T(x, t)$ .

Дифференцирование компонент тензора по координате  $x_i$  обозначается дифференциальным оператором  $\partial/\partial x_i$ , или сокращенно в индексной записи  $\partial_i$ , что указывает на то, что это тензорный оператор первого ранга. В символических обозначениях для записи этой операции употребляется общеизвестный символ  $\nabla$  (набла), который расшифровывается как

$$\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{e}_i \partial_i.$$

Частное дифференцирование по переменной  $x_i$  иногда изображают нижним индексом после запятой, как показано в следующих примерах:

а)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}$ ,

г)  $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}$ ,

б)  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}$ ,

д)  $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}$ ,

в)  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$ ,

е)  $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,km}$ .

Эти примеры показывают, что при дифференцировании оператор  $\partial_i$  приводит к тензору на один порядок выше исходного, если  $i$  остается свободным индексом (случаи «а» и «в»), и к тензору на один порядок ниже исходного, если  $i$  становится индексом суммирования (случай «б»).

Здесь для справки приведены некоторые важные дифференциальные операторы, часто употребляемые в механике континуума:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{e}_i, \quad \text{или} \quad \partial_i \varphi = \varphi_{,i},$$

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}, \quad \text{или} \quad \partial_i v_i = v_{i,i},$$

$$\text{rot } v = \nabla \times v, \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} v_{k,j},$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi, \quad \text{или} \quad \partial_{ii} \varphi = \varphi_{i,i}.$$

## Девиатор и шаровой тензор.

Очень часто бывает полезно разложить тензор  $\sigma_{ij}$  на два тензора, один из которых (шаровой тензор) имеет вид

$$\rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_M = -p = \sigma_{kk}/3$  – среднее значение нормального напряжения, а второй – девиатор, имеющий вид

$$\rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix}.$$

Это разложение описывается формулами

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}.$$

Главные оси девиатора  $s_{ij}$  совпадают с главными осями тензора  $\sigma_{ij}$ . Таким образом, главные значения девиатора равны

$$s_k = \sigma_{(k)} - \sigma_M.$$

Характеристическое уравнение для девиатора так же, как и характеристическое уравнение для тензора, представляет собой кубическое уравнение вида

$$s^3 + II_D s + III_D = 0, \text{ или } s^3 + (s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I) s + s_I s_{II} s_{III} = 0.$$

Легко показать, что первый инвариант девиатора  $I_{\Sigma D}$  тождественно равен нулю, что и объясняет его отсутствие в уравнении.

### Тензор деформаций.

Будем рассматривать движение сплошной среды с точки зрения переменных Эйлера и выразим через них шесть компонентов деформации.

В связи с этим компоненты малой деформации, представляющие собой относительные удлинения, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z},$$

а компоненты малой деформации, представляющие собой сдвиги, – в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Чтобы записать компоненты малой деформации в переменных Эйлера, будем пользоваться для них следующими обозначениями:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Шесть компонентов деформации есть функции координат  $x, y, z$  точек пространства.

Если ввести обозначения:

$$\Phi_{11} = e_{xx}; \quad \Phi_{22} = e_{yy}; \quad \Phi_{33} = e_{zz};$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = \frac{1}{2} e_{xy}; \quad \Phi_{13} = \Phi_{31} = \frac{1}{2} e_{xz}; \quad \Phi_{23} = \Phi_{32} = \frac{1}{2} e_{yz},$$

То формулы преобразования компонентов деформации примут следующий вид:

$$\Phi_{lk} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \Phi_{rs} \alpha_{lr} \alpha_{ks} \quad (l, k = 1, 2, 3).$$

Шесть величин, зависящих от  $x, y, z$  и удовлетворяющих последним формулам преобразования координат, образуют так называемый аффинный ортогональный тензор второго ранга.

Следовательно, можно сказать, что шесть компонентов деформации образуют тензор, который естественно назвать *тензором деформации*.

Тензор деформации в каждой точке пространства характеризует деформацию частицы сплошной среды, окружающей данную точку. Обозначим этот тензор через  $\Phi$  и изобразим, как принято, в виде следующей таблицы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}e_{xy} & \frac{1}{2}e_{xz} \\ \frac{1}{2}e_{yx} & e_{yy} & \frac{1}{2}e_{yz} \\ \frac{1}{2}e_{zx} & \frac{1}{2}e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}.$$

Если  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  выбраны вдоль главных осей деформации, то  $\Phi$  будет вида

$$\Phi = \begin{pmatrix} e_{\bar{x}\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & e_{\bar{y}\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & e_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

### **Тензор скоростей деформации.**

Формулы преобразования компонентов скоростей деформации будут аналогичны обычным соотношениям. Следовательно, они образуют тензор, который обозначим  $\dot{\Phi}$ . Последний имеет вид

$$\dot{\Phi} = \begin{pmatrix} \dot{e}_{xx} & \frac{1}{2}\dot{e}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{e}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{e}_{yx} & \dot{e}_{yy} & \frac{1}{2}\dot{e}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{e}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{e}_{zy} & \dot{e}_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензор  $\Phi$  носит название *тензора скоростей деформации*.

### Тензор напряжения.

Подробно исследуем вектор  $P_n$ . Для этого мысленно выделим в сплошной среде элементарный тетраэдр, три грани которого МВС, МАС и МАВ параллельны координатным плоскостям (рис. 9). Внешние нормали к этим граням будут направлены соответственно противоположно осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Внешнюю нормаль к четвертой наклонной грани АВС обозначим  $n$ . Пусть  $n$  составляет с осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  углы, косинусы которых назовем соответственно  $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}$ . тогда, если площадь грани АВС будет  $d\sigma$ , то площади граней МВС, МАС, МАВ, являясь проекциями  $d\sigma$ , будут соответственно равны

$$\alpha_{n1}d\sigma, \alpha_{n2}d\sigma, \alpha_{n3}d\sigma.$$

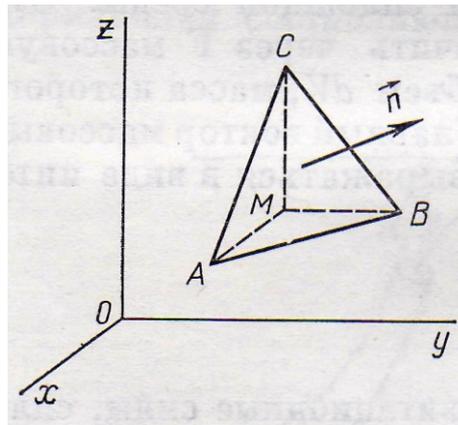


Рисунок 9.

Рассматриваемый тетраэдр вместе со всей сплошной средой, к которой он принадлежит, находится в движении. Обозначим объем тетраэдра через  $dV$ , тогда массовые силы, действующие на тетраэдр, будут

$$F_p dV.$$

Соответственно массовые силы инерции будут

$$a_p dV,$$

где  $a$  – ускорение элементарного тетраэдра.

Поверхностная сила, действующая на грань АВС, будет

$$P_n d\sigma,$$

и в силу того, что внешние нормали к соответствующим остальным граням тетраэдра будут  $-x$ ,  $-y$ ,  $-z$ , поверхностные силы, действующие на них, соответственно выразятся как

$$p_{-x}\alpha_{n1}d\sigma, p_{-y}\alpha_{n2}d\sigma, p_{-z}\alpha_{n3}d\sigma.$$

Одно из необходимых уравнений движения тетраэдра, как было указано ранее, будет заключаться в том, что геометрическая сумма всех сил, действующих на него, включая силы инерции, равна нулю, т.е.

$$(F - a)\rho dt + p_n d\sigma + p_{-x}\alpha_{n1}d\sigma + p_{-y}\alpha_{n2}d\sigma + p_{-z}\alpha_{n3}d\sigma = 0.$$

Если  $h$  – высота тетраэдра, то объем его будет  $dV = \frac{h}{3} d\sigma$ .

Следовательно, последнее уравнение можно переписать в виде

$$(\vec{F} - \vec{a})\frac{h}{3}\rho + \vec{p}_n + \vec{p}_{-x}\alpha_{n1} + \vec{p}_{-y}\alpha_{n2} + \vec{p}_{-z}\alpha_{n3} = 0.$$

Прейдя в последнем равенстве к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим

$$p_n = -p_{-x}\alpha_{n1} - p_{-y}\alpha_{n2} - p_{-z}\alpha_{n3}.$$

Сила  $p_x$  есть воздействие на грань МСВ частиц среды, лежащих вне тетраэдра. Соответственно  $p_x$  будет сила воздействия на ту же грань МСВ частиц, находящихся внутри тетраэдра. Но, в силу равенства действия и противодействия, будем иметь

$$p_{-x} = -p_x.$$

Аналогично запишем

$$p_{-y} = -p_y; \quad p_{-z} = -p_z.$$

Отсюда

$$p_n = p_x\alpha_{n1} + p_y\alpha_{n2} + p_z\alpha_{n3}.$$

Это равенство указывает, что напряжение  $p_n$  при произвольной ориентировке внешней нормали  $n$  может быть определено, если известны напряжения в той же точке для площадок, внешние нормали которых параллельны осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , и одинаково с ними направлены. Проекции векторов  $p_x, p_y, p_z$  на оси  $x, y, z$  обозначим соответственно

$$p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}; \quad p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} \quad \text{и} \quad p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}.$$

Эти проекции носят название *компонентов напряжения*.

Проектируя равенство на оси координат, будем иметь:

$$p_{nx} = p_{xx}\alpha_{n1} + p_{yx}\alpha_{n2} + p_{zx}\alpha_{n3};$$

$$p_{ny} = p_{xy}\alpha_{n1} + p_{yy}\alpha_{n2} + p_{zy}\alpha_{n3};$$

$$p_{nz} = p_{xz}\alpha_{n1} + p_{yz}\alpha_{n2} + p_{zz}\alpha_{n3}.$$

Следовательно, компоненты напряжения образуют тензор второго ранга

$$P_{ik} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}.$$

Этот тензор носит название *тензора напряжения*. Это симметричный тензор, т.е. выполняются равенства:

$$P_{ik} = P_{ki}, \text{ т. е.}$$

$$p_{xy} = p_{yx}; p_{yz} = p_{zy}; p_{zx} = p_{xz}.$$

Тензор напряжения обладает теми же свойствами, что и тензор деформации, а именно существуют три взаимно перпендикулярные главные оси тензора напряжений, относительно которых тензор напряжения имеет вид

$$P_{ik} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix},$$

где  $p_1, p_2, p_3$  – главные напряжения. Кроме того, имеет место соотношение:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3,$$

т.е. сумма нормальных напряжений на три взаимно перпендикулярных площадки не зависит от ориентации этих площадок. Компоненты напряжения характеризуют внутренние силы, действующие в сплошной среде. Эти компоненты будут изменяться с течением времени  $t$  и при переходе от одной точки пространства, занятого сплошной средой, к другой. Таким образом, компоненты напряжения, являясь функциями  $t, x, y, z$ , выражаются в переменных Эйлера.

**Главные оси тензора напряжений. Инварианты. Главные компоненты. Тензорная поверхность.**

Как известно, поверхности второго порядка имеют по крайней мере три направления  $r$ , для которых касательные плоскости  $\sigma$  перпендикулярны к  $r$ .

Такие направления называются главными направлениями, и для них, очевидно, вектор  $P_n$  ортогонален площадке. В общем случае таких направлений только три. Они образуют ортогональный триэдр и называются главными осями тензора напряжений. Если тензорная поверхность  $\Phi = \text{const}$  – поверхность вращения, например сфера, то таких направлений бесконечно много.

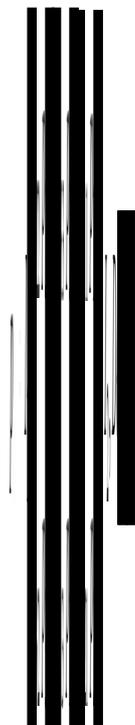
Для определения инвариантов тензора напряжений используем уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или, в развернутом виде,

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0,$$

где



Мы получили вековое уравнение. Как известно, если тензор  $p^{ij}$  симметричный, то это уравнение имеет три действительных корня. Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  этого уравнения определяют напряжения на площадках, ортогональных главным направлениям (главным площадкам),

$$\lambda_1 = p_{n1} = p_1, \lambda_2 = p_{n2} = p_2, \lambda_3 = p_{n3} = p_3,$$

и называются главными компонентами тензора напряжений.

Зная  $p_1, p_2, p_3$ , найдем компоненты  $n_i$  векторов  $n$ , определяющих главные направления (при этом надо использовать условие  $(n * n) = 1$ ). Очевидно, что формулы верны в любой криволинейной системе координат.

Уравнение тензорной поверхности  $2\Phi = \text{const}$ , т.е.  $\sum p_{ik} x_i x_k = 2\Phi(x, y, z)$ , приводится в главных осях  $x, y, z$  к каноническому виду

$$2\Phi = p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 = \text{const}.$$

Для компонент тензора напряжений в главных осях имеем

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \lambda_i = p_i \\ p_{ki} &= 0 \quad \text{при } k \neq i. \end{aligned}$$

На площадках, перпендикулярных к главным осям тензора напряжений, отличны от нуля только нормальные составляющие вектора напряжений, а касательные составляющие вектора напряжений равны нулю.

Если  $p_1 = p_2 = p_3$ , то тензорная поверхность тензора напряжений – сфера.

Мы ввели в рассмотрение главные оси тензора деформаций, тензора напряжений и тензора скоростей деформаций. В общем случае все эти оси разные. Условия из совпадения связаны, мы увидим в дальнейшем, с сильными физическими допущениями относительно свойств рассматриваемых сред.

Если  $p_1 \neq 0$ , а  $p_2 = p_3 = 0$ , то в данной точке сплошной среды мы имеем чистое растяжение вдоль оси  $x_1$  при  $p_1 > 0$ , и чистое сжатие при  $p_1 < 0$ . Таким образом, любое напряженное состояние в данной точке сплошной среды можно рассматривать как совокупность трех чистых растяжений или сжатий вдоль главных осей тензора напряжений.

Коэффициенты векового уравнения являются инвариантами тензора напряжений. Они, очевидно, выражаются через корни векового уравнения по формулам

$$\begin{cases} I_1 = p_1 + p_2 + p_3, \\ I_2 = p_2 p_3 + p_1 p_2 + p_1 p_3, \\ I_3 = p_1 p_2 p_3. \end{cases}$$

С любым другим симметричным тензором второго ранга  $T_{ik}$  в каждой точке  $O$  также можно связать тензорную поверхность  $\Phi = T_{ij} dx^i dx^j = const.$  для определения направлений главных осей и главных компонент тензора  $T$  применимо все сказанное выше относительно тензора напряжений.

**ТЕМЫ 4, 5. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА. КОНТИНУАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ МАССЫ, КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ, ЭНЕРГИИ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ.**

Явления переноса – необратимые процессы переноса массы, энергии, импульса, количества движения, заряда, происходящие в неоднородных газах и жидкостях вследствие молекулярных перемешиваний. К явлениям переноса относятся: диффузия, термодиффузия, теплопроводность, электропроводность, Дюфора эффект, вязкость, термомеханический эффект, термоэлектрические явления и др.

Явления переноса в газах изучает кинетическая теория газов с помощью кинетического уравнения Больцмана; в металлах – с помощью кинетического уравнения для электронов в металле, а перенос энергии в непроводящих кристаллах – с помощью кинетического уравнения для фотонов решетки. Общую феноменологическую теорию явлений переноса, применимую к произвольной системе (газообразной, жидкой или твердой), дает термодинамика необратимых

процессов. Полная статистическая теория необратимых процессов, которая дала бы общую теорию всех явлений переноса, еще не создана.

### **Законы сохранения массы.**

Поля плотности  $\rho(r, t)$  и скорости  $v(r, t)$  связаны друг с другом уравнением, вытекающим из закона сохранения массы. Чтобы убедиться в этом, проследим за движением данной частицы массы  $\Delta m$ . Поскольку эта масса неизменна, то

$$\frac{d}{dt} \Delta m = 0.$$

Здесь использована полная производная по времени, так как эта производная характеризует изменение во времени *величины, связанной с движущейся в пространстве частицей*, в данном случае изменение величины  $\Delta m$  (полную производную по времени часто называют субстациональной производной). Напомним, что в отличие от полной производной частная производная по времени характеризует изменение некоторой величины со временем *в данной точке пространства* (частную производную по времени называют также локальной производной).

Учитывая, что  $\Delta m = \rho \Delta V$ , получим соотношение

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = 0,$$

в котором скорость относительного изменения объема частицы определяется полем скоростей. Таким образом, найдем уравнение, связывающее поля плотности и скорости,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Оно называется уравнением непрерывности. Далее, используя выражение для полной производной по времени от плотности частицы

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{r} \operatorname{grad}) \rho,$$

получим уравнение непрерывности в другой форме, чаще употребляемой в теоретической физике,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

В тензорных обозначениях уравнение непрерывности приобретает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение связано с определенным интегральным соотношением. Чтобы получить его, рассмотрим фиксированный объем  $V_0$  пространства, для которого

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0.$$

Теперь с помощью формулы Остроградского преобразуем объемный интеграл от дивергенции в поверхностный интеграл:

$$\int_{V_0} \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = \oint_{\sigma_0} \rho \vec{v} d\sigma,$$

здесь  $\sigma_0$  – замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V_0$ , а  $d\sigma$  – «элемент поверхности», т. е. вектор, равный по абсолютной величине площади элемента поверхности и направленный по орту  $n$ , определяющему внешнюю нормаль к этому элементу. В результате придем к искомому интегральному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = - \oint_{\sigma_0} \rho \vec{v} d\vec{\sigma},$$

согласно которому скорость изменения массы среды в объеме  $V_0$  пространства равна разности масс частиц среды, втекающих и вытекающих за единицу времени через поверхность  $\sigma_0$ , охватывающую объем  $V_0$  (в соответствии с принятым определением нормали  $n$  скорость изменения массы положительна, если поверхностный интеграл отрицателен, т.е. масса втекающих частиц больше, чем масса вытекающих; в противном случае скорость изменения массы будет отрицательна). Вектор  $\rho \vec{v}$  называется *плотностью потока среды*.

Продолжая изучать движение данной частицы массы  $\Delta m$  и учитывая определение ее скорости  $\vec{v}$ , как усредненной скорости центра масс, напишем закон изменения количества движения частицы в виде

$$\Delta m \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{F}^e.$$

Здесь  $F^e$  – сумма внешних сил, приложенных к частице. Эта сила зависит от положения частицы и времени, т.е. должна быть задана векторным полем. Силу  $F^e$  следует рассматривать как результат усреднения правой части закона изменения количества движения всех молекул, из которых состоит данная частица среды. Сила  $F^e$  обусловлена, во-первых, силами взаимодействия молекул среды друг с другом и, во-вторых, включает в себя внешние по отношению ко всей среде силовые поля. Будем рассматривать среду с весьма малым радиусом действия межмолекулярных сил. Тогда сила, с которой физически бесконечно малые частицы среды действуют на данную частицу, проявляется только в тонком поверхностном слое этой частицы. Толщиной такого слоя в механике сплошных сред заведомо пренебрегают, а силы, с которыми соседние частицы среды действуют друг на друга, считают поверхностными силами. Что касается внешних силовых полей, то они практически одинаково действуют на все молекулы, находящиеся в объеме  $\Delta V$ . Поэтому эти силы называются объемными силами (если эти силы пропорциональны массе частицы, то их называют массовыми силами). Такими силами являются гравитационные и электромагнитные силы, а также силы инерции, которые появляются при излучении движения среды относительно неинерциальных систем отсчета.

Итак, в механике сплошных сред предполагается, что сумма всех сил, приложенных к данной частице массы  $\Delta m$ , может быть представлена в виде

$$F^e = \oint dF^\sigma + f\Delta m,$$

где  $dF^\sigma$  – поверхностная сила, приложенная к элементарной площадке  $d\sigma$  поверхности частицы,  $\Delta \sigma$  – поверхность частицы, а  $f$  – объемная сила, приходящаяся на единицу массы. Относительно поверхностной силы  $dF^\sigma$  предполагается, что она зависит от ориентации площадки, т.е. от направления вектора  $d\sigma = nd\sigma$ , а также пропорциональна величине  $d\sigma$  этой площадки (рис. 10).

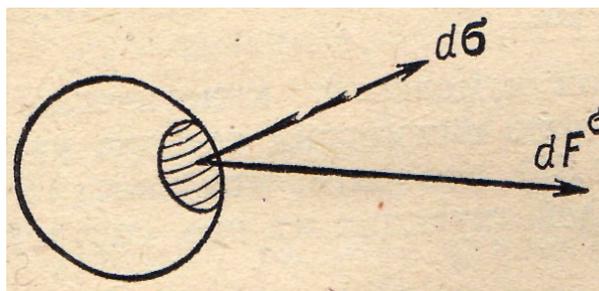


Рисунок 10

Иначе говоря, предполагается, что поверхностная сила имеет вид

$$dF_i^\sigma = P_{ik} d\sigma_k,$$

т.е. определяется совокупностью величин  $P_{ik}$  и зависит от компонент вектора  $d\sigma$ , а именно от  $d\sigma_k = \cos(n, n_k) d\sigma$  (здесь  $\cos(n, n_k)$  – косинус угла между ортом  $n$  и координатной осью с ортом  $n_k$ ).

Совокупность величин  $P_{ik}$  является тензором напряжений. Компоненты этого тензора являются функциями  $r, t$  и определяют поле напряжений в среде. Компонента  $P_{ik}$  тензора напряжений представляет собой  $i$ -тую компоненту силы, действующую на единицу поверхности, перпендикулярной оси  $x_k$ . Например, на площадку, перпендикулярную к оси  $x$  (вектор  $d\sigma$  такой площадки направлен вдоль  $x$ ), действует сила  $dF_i^\sigma P_{ix} d\sigma_x$  (рис. 11). Проекции этой силы соответственно равны:

$$dF_x^\sigma = P_{xx} d\sigma_x, \quad dF_y^\sigma = P_{yx} d\sigma_x, \quad dF_z^\sigma = P_{zx} d\sigma_x.$$

Отсюда видно, что  $P_{xx}$  – нормальная по отношению к рассматриваемой площадке компонента плотности силы, а  $P_{yx}$  и  $P_{zx}$  – касательные компоненты плотности силы.

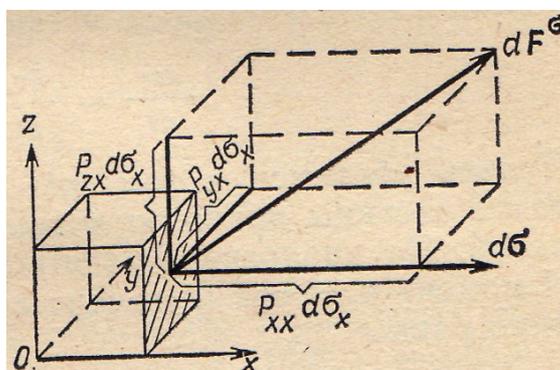


Рисунок 11

Теперь преобразуем суммарную поверхностную силу, действующую на данную частицу, используя формулу, теорему Остроградского и учитывая малость частицы:

$$\oint_{\Delta \sigma} dF_i^\sigma = \oint_{\Delta \sigma} P_{ik} d\sigma_k = \int_{\Delta V} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} dV = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \Delta V.$$

Наконец, используя формулы и сокращая все члены полученного уравнения на  $\Delta V$ , придем к уравнениям движения сплошной среды

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где полная производная по времени

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k.$$

Теперь убедимся в том, что закон изменения кинетического момента частицы приводит к требованию симметрии тензора напряжений. Положим, что кинетический момент частицы и момент сил, действующих на нее, соответственно равны

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \Delta m \cdot [\underline{r}\underline{v}] + M', \\ L^e &= \oint_{\Delta \sigma} [\underline{r} dF^\sigma] + \Delta m \cdot [\underline{r}\underline{f}] + (L^e)'. \end{aligned}$$

При этом момент импульса центра масс частицы пропорционален  $\Delta m$  и, следовательно, является малой величиной порядка  $\ell^3$  ( $\ell$  – характерный размер частицы). В то же время момент  $M'$  относительно поступательно движущейся системы центра масс частицы пропорционален  $\Delta m \cdot \ell^2$ , т.е. является величиной порядка  $\ell^5$ . Момент сил  $(L^e)'$  относительно центра масс частицы также является величиной более высокого порядка малости по сравнению с другими моментами сил. Следовательно, слагаемыми  $M'$  и  $(L^e)'$  можно пренебречь. Тогда, учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \Delta m = 0, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

получим закон изменения кинетического момента частицы в виде

$$\Delta m \cdot [\underline{r}\dot{\underline{v}}] = \oint_{\Delta \sigma} [\underline{r} dF^\sigma] + \Delta m \cdot [\underline{r}\underline{f}].$$

Далее спроектируем обе части данного равенства на координатные оси, для чего выразим компоненты векторных произведений через компоненты векторов-сомножителей, т.е. запишем момент ускорения и момент сил в виде антисимметричного тензора второго ранга. Тогда получим

$$\Delta m \cdot (x_i \dot{v}_j - x_j \dot{v}_i) = \oint_{\Delta \sigma} (x_i dF_j^\sigma - x_j dF_i^\sigma) + \Delta m \cdot (x_i f_j - x_j f_i).$$

Затем преобразуем первый поверхностный интеграл из данного выражения, используя формулу Остроградского. В результате найдем, что

$$\oint_{\Delta \sigma} x_i P_{jk} d\sigma_k = \frac{\partial (x_i P_{jk})}{\partial x_k} \Delta V.$$

Но

$$\frac{\partial (x_i P_{jk})}{\partial x_k} = \delta_{ik} P_{jk} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k},$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера. Поэтому

$$\oint_{\Delta \sigma} x_i dF_j^\sigma = (P_{ji} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k}) \Delta V.$$

Наконец, получая аналогичное выражение для второго поверхностного интеграла, найдем

$$x_i (\rho \dot{v}_j - \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} - \rho f_j) - x_j (\rho \dot{v}_i - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} - \rho f_i) = P_{ji} - P_{ij}.$$

Отсюда, ввиду уравнений движения, получим, что

$$P_{ji} = P_{ij}.$$

Таким образом, *тензор напряжений является симметричным тензором*, т.е. представляет собой совокупность шести независимых компонент.

**Уравнение изменения кинетической энергии. Законы термодинамики.**

Кинетическая энергия частицы массы  $\Delta m$  и полная производная по времени от кинетической энергии соответственно равны:

$$\frac{\Delta m}{2} v^2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta m}{2} v^2 \right) = \Delta m \cdot v_i \dot{v}_i.$$

Имея в виду эти выражения, умножим правую и левую части уравнений движения с индексом  $i$  на проекцию  $v_i$  скорости, а затем сложим результаты

умножения для  $i=1, 2, 3$ . Тогда получим уравнение изменения кинетической энергии

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho v_i f_i,$$

соответствующее уравнению для системы точек.

Левая часть данного равенства равна *полной производной кинетической энергии по времени, отнесенной к единице объема*, а последняя сумма справа является *мощностью объемных сил, затрачиваемой при перемещении частицы* (эта величина также отнесена к единице объема). Что касается двойной суммы по  $i$  и  $k$ , то она содержит члены двух различных типов. Чтобы выяснить их смысл представим эту сумму в виде

$$v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial (v_i P_{ik})}{\partial x_k} - P_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Затем воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial (v_i P_{ik})}{\partial x_k} \Delta V = \oint_{\Delta \sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k.$$

Следовательно,

$$v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta \sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k - P_{ik} v_{ki},$$

поскольку

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = w_{ki} + v_{ki},$$

причем  $P_{ik} w_{ki} = 0$ , так как тензор  $P_{ik}$  – симметричен, а  $w_{ki}$  – антисимметричен.

Из вышеуказанных формул ясно, что выражение  $v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}$  равно разности, отнесенной к единице объема *мощности*

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta \sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k$$

*поверхностных сил на перемещениях частицы и отнесенной к единице объема мощности*

$$P_{ik} v_{ki}$$

*напряжений, связанной с деформацией частицы.*

Получим другую форму уравнения, справедливую для случая потенциальных объемных сил, когда

$$f_i = - \frac{\partial u^e}{\partial x_i}$$

(здесь  $u^e(r, t)$  – потенциальная энергия во внешнем поле, приходящаяся на единицу массы). Для этого используем очевидные выражения

$$\frac{du^e}{dt} = \frac{\partial u^e}{\partial t} + \frac{\partial u^e}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial u^e}{\partial t} - f_i v_i$$

и найдем

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u^e \right) = v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u^e}{\partial t}.$$

Первое и второе начала термодинамики. Из уравнений видно, что часть мощности объемных сил затрачивается на изменение скорости центра масс частицы, т.е. на изменение кинетической энергии частицы как целого. Теперь рассмотрим внутреннюю энергию частицы, т.е. усредненную по интервалу времени  $\Delta t$  сумму кинетической энергии молекул частицы относительно ее центра масс и энергией взаимодействия между молекулами частицы. Изменение внутренней энергии, как показывает опыт, происходит за счет работы напряжений на деформации частицы, а также за счет теплообмена между частицами. Наличие тепловых явлений приводит к необходимости использовать в механике сплошных сред законы термодинамики.

Напомним, что в термодинамике изучаются равновесные состояния макроскопических систем, т. е. состояния, когда все параметры, описывающие систему, не зависят от времени, а любые стационарные потоки, обусловленные каким-либо внешним по отношению к системе источником, отсутствуют.

Важнейшей величиной, характеризующей состояние термодинамического равновесия системы и имеющей одно и то же значение у любой макроскопической части всей системы, является температура  $T$  (в частности, для одноатомного газа, атомы которого движутся по законам классической механики, температура пропорциональна средней кинетической энергии газа).

Равновесные состояния сред, называемых простыми, определяются двумя независимыми параметрами, например плотностью и температурой; при этом внутренняя энергия и другие величины являются функциями этих параметров, т. е. являются, как говорят, функциями состояния. Однако в механике сплошных сред наряду с равновесными состояниями изучаются и неравновесные состояния, для которых, вообще говоря, нельзя ввести понятия температуры в указанном выше смысле. Тем не менее применение законов термодинамики в механике сплошных сред будет оправдано, если ограничиться сравнительно медленными процессами, для которых в каждый момент времени любую частицу среды, являющуюся достаточно малой, но макроскопической системой, можно считать находящейся в «своем» равновесном состоянии, а состояния соседних частиц можно считать достаточно близкими друг к другу. Такие состояния называются локально равновесными.

Для среды, находящейся в локально равновесном состоянии, функции состояния частицы являются теми же самыми, что и функции состояния рассматриваемой среды в термодинамическом равновесии с той разницей, что независимые параметры, т.е. аргументы этих функций, в случае термодинамического равновесия неизменны, а в случае локального равновесия зависят от положения частицы и времени. Например, приходящаяся на единицу массы внутренняя энергия  $e$  для простой среды, находящейся в равновесном состоянии, определяется из опыта, как функция  $e(\rho, T)$ , где  $\rho$  и  $T$  – постоянны (при наличии внешнего поля  $e = e(\rho(\mathbf{r}), T)$ ). Для той же среды, находящейся в локально равновесном состоянии, внутренняя энергия будет иметь вид

$$e = e(\rho(r, t), T(r, t)).$$

Итак, применим к данной частице массы  $\Delta m$  и объема  $\Delta V$  первое начало термодинамики, т.е. закон изменения энергии с учетом тепловых явлений. Согласно этому закону *изменение  $d(e\Delta m)$  внутренней энергии частицы складывается из работы напряжений  $P_{ik}\varepsilon_{ik}\Delta V$ , связанной с деформацией частицы, и количества теплоты  $dQ$ , получаемой при этом частицей от соседних частиц*, т.е.

$$d(e\Delta m) = P_{ik}\varepsilon_{ik}\Delta V + dQ$$

(работа напряжений и количество теплоты не являются полными дифференциалами, поэтому для количества теплоты введено обозначение  $dQ$ ).

Теплообмен между частицами определяется плотностью потока тепла  $q$ , т.е. плотностью среднего потока кинетической энергии молекул относительно системы центра масс частицы (положительным направлением этого потока считается направление внешней нормали  $n$ ). Согласно определению вектора  $q$  количество теплоты, получаемое частицей от соседних частиц за единицу времени, равно

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\Delta\sigma} q_k d\sigma_k.$$

Теперь преобразуем предыдущее выражение, относя все члены этого уравнения к элементу времени  $dt$  и используя то, что  $\frac{d}{dt} \Delta m = 0$ ,  $\varepsilon_{ki} = v_{ki} dt$ , а также используя следующее выражение для потока тепла через поверхность частицы:

$$\oint_{\Delta\sigma} q_k d\sigma_k = \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \Delta V.$$

Тогда получим уравнение изменения внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} = P_{ik} v_{ik} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k},$$

где  $P_{ik} v_{ik}$  – мощность напряжений, связанная с деформацией частицы,  $-\frac{\partial q_k}{\partial x_k}$  – количество теплоты, получаемое частицей за единицу времени на единицу объема.

Основываясь на уравнениях изменения кинетической и внутренней энергий, нетрудно получить уравнение изменения полной энергии частицы, равной

$$\Delta m \cdot \left( \frac{v^2}{2} + e \right).$$

Действительно, складывая почленно и используя указанные выражения, найдем, что

$$\frac{d}{dt} \left[ \Delta m \cdot \left( \frac{v^2}{2} + e \right) \right] = \Delta m \cdot v_i f_i + \oint_{\Delta\sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k - \oint_{\Delta\sigma} q_k d\sigma_k,$$

т.е. полная производная по времени от полной энергии частицы равна сумме мощностей объемных и поверхностных сил, действующих на частицу, а также потока тепла через поверхность частицы.

Напомним, далее, содержание второго начала термодинамики. Согласно этому закону любая макроскопическая система в равновесном состоянии характеризуется функцией состояния – энтропией  $S$ ; при этом изменение энтропии в результате передачи системе тепла  $dQ$  при температуре  $T$  равно

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

а процесс передачи тепла должен происходить весьма медленно по сравнению с процессом установления равновесия в системе. Такие достаточно медленные процессы, называемые квазистатическими, обладают свойством обратимости. Действительно, в этом случае любое промежуточное состояние между начальным и конечным состояниями системы является равновесным, поэтому система в обратном процессе проходит те же состояния, что и в прямом процессе, и возвращается в начальное состояние без каких-либо изменений в окружающих систему телах.

Второе начало термодинамики содержит еще одно утверждение: если в результате передачи тепла  $dQ$  с конечной скоростью при температуре  $T$  система перешла из одного равновесного состояния в другое близкое к нему равновесное состояние, то

$$dS > \frac{dQ}{T},$$

где  $dS$  – разность значений энтропии в конечном и начальном состояниях. Процессы, происходящие с конечной скоростью, называются *неравновесными* (или *нестатическими*). Из опыта известно, что практически все неравновесные процессы необратимы. Напомним, что необратимыми называются такие процессы, при которых невозможен возврат системы в первоначальное состояние без какого-либо изменения в окружающих телах.

Из неравенства следует, что в результате неравновесного процесса энтропия изолированной системы ( $dQ=0$ ) возрастает. Следовательно, изменение эн-

тропии является мерой необратимости процесса в изолированных системах. Такое истолкование физического смысла энтропии подтверждается в статистической физике, где показывается, что энтропия связана с вероятностью состояния системы, а возрастание энтропии для изолированной системы соответственно связано с переходом системы из менее вероятного в более вероятное состояние.

Очевидно, что два последних соотношения можно объединить в одну формулу, вводя обозначение  $dQ_D$  для разности  $TdS-dQ$ ;  $dQ_D$  является частью механической энергии, необратимо превращающейся в тепло. Тогда второй закон термодинамики можно записать в виде

$$TdS = dQ + dQ_D, \quad dQ_D > 0;$$

здесь  $dQ_D=0$  для обратимых процессов и  $dQ_D>0$  – для необратимых.

Теперь применим второй закон термодинамики к частице сплошной среды. Относя все члены в последнем равенстве к элементу времени  $dt$ , вводя энтропию  $s$ , приходящуюся на единицу массы, и учитывая сохранение массы, найдем

$$\Delta m \cdot T \frac{dS}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dQ_D}{dt}.$$

Отсюда получим *уравнение изменения энтропия*:

$$\rho T \frac{dS}{dt} = - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + D,$$

где  $D = \frac{1}{\Delta V} \frac{dQ_D}{dt}$  – диссипативная функция, равная отнесенной к единице объема и единице времени части механической работы, которая необратимо переходит в тепло.

В заключение приведем все основные уравнения механики сплошных сред, а именно: *уравнение непрерывности, уравнения изменения импульса, внутренней энергии и энтропии*:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \rho \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \quad (i = 1,2,3), \\ \rho \frac{de}{dt} &= P_{ik} v_{ik} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}, \\ \rho T \frac{dS}{dt} &= - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + D, \quad D \geq 0. \end{aligned}$$

Это – система шести дифференциальных уравнений в частных производных с семнадцатью неизвестными функциями, зависящими от координат и времени: пятью скалярными величинами  $\rho$ ,  $e$ ,  $T$ ,  $s$ ,  $D$ , шестью компонентами векторов  $v_i$ ,  $q_i$  и шестью компонентами тензора  $P_{ik}$ . Таким образом, становится очевидным, что для использования системы основных уравнений необходимы также допущения о характере среды или движений среды, при которых система уравнений стала бы замкнутой.

### **Основные уравнения и задачи движения идеальной жидкости.**

Гидродинамика – это раздел, изучающий движения существующих в природе жидкостей и газов, совокупность которых принято именовать общим термином жидкость.

Первоначально ограничим исследование изучением движения жидкостей, которые не оказывают сопротивления при скольжении одного слоя по другому. Такие жидкости называются идеальными. Идеальная жидкость представляет собой понятие абстрактное, так же как, например понятие абсолютно твердого тела. Значительный интерес раздела механики, изучающего движение идеальной жидкости, определяется главным образом тем, что вода и воздух в ряде задач могут быть приняты за идеальную жидкость.

Так как идеальная жидкость не оказывает сопротивления при скольжении одного слоя по другому, то взаимодействие отдельных частей жидкости будет осуществляться только в виде силы нормального давления. Следовательно, сдвигающие напряжения будут равны нулю:

$$p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0$$

или

$$p_n = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}.$$

Из последнего соотношения следует, что *давление в идеальной жидкости не зависит от ориентации площадки, к которой оно приложено.*

Нормальное давление направлено внутрь объема или в сторону, противоположную внешней нормали. Следовательно, векторы  $p_x, p_y, p_z$  для идеальной жидкости будут иметь вид

$$p_x = -pi, p_y = -pj, p_z = -pk,$$

где  $i, j, k$  – единичные векторы прямоугольной системы координат, определяющей пространство, в котором движется жидкость. Аналогично давление на произвольно выбранную площадку с внешней нормалью  $n$  запишем в виде

$$p_n = -pn_0,$$

где  $n_0$  – вектор внешней нормали;  $pn_0$  носит название *вектора гидродинамического давления.*

Обращаясь к уравнениям движения в напряжениях, уравнение движения идеальной жидкости получаем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Это уравнение Эйлера.

Вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0$$

в случае сжимаемой жидкости при заданных  $F$ , уравнение Эйлера содержит пять неизвестных: плотность, давление и три компоненты скорости, которые являются функциями координат и времени.

Полученные выражения составляют систему четырех скалярных уравнений относительно пяти неизвестных:  $v_x, v_y, v_z, p, \rho$ . Следовательно, для их разрешения необходимо дополнительное уравнение. Простейшим из них является условие несжимаемости жидкости:

$$\rho = \text{const.}$$

Жидкость, подчиняющаяся этому условию, называется *несжимаемой*. При условии  $\rho = const$  уравнение Эйлера запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} = \vec{F} - \text{grad} \frac{p}{\rho}$$

и уравнение неразрывности – в виде

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Последние три выражения составляют систему уравнений, описывающих движение идеальной несжимаемой жидкости.

### **Уравнения состояния.**

Основными параметрами, определяющими физическое состояние жидкости, является плотность  $\rho$ , давление  $p$  и абсолютная температура  $T$ . Эти параметры состояния не являются независимыми. Жидкости, плотность которых есть функции только давления:

$$\rho = f(p),$$

называются *баротропными*.

Проекции уравнения Эйлера и уравнение неразрывности представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Их решение будет содержать произвольные функции и постоянные, которые определяются из граничных и начальных условий.

Начальные условия имеют вид при  $t=0$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z); p = p(x, y, z); \rho = \rho(x, y, z).$$

Если жидкость ограничена неподвижной твердой поверхностью, нормаль к которой  $\mathbf{n}$ , то граничное условие вдоль нее будет

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

или

$$\text{grad } F - \mathbf{v} = 0,$$

где  $F(x, y, z)$  – уравнение поверхности. Это условие является примером кинематического граничного условия, так как оно накладывает ограничение на скорость жидкости.

Если жидкость соприкасается с другой неподвижной средой (например, вода с воздухом), то вдоль границ этих сред давление будет постоянным:

$$p=p_0.$$

Так как последнее условие накладывает ограничение на поверхностные силы, то это равенство является примером динамического граничного условия.

### **Интегралы уравнений движения.**

Уравнения движения идеальной жидкости не интегрируются в общем виде. Однако в некоторых частных предположениях о массовых силах и характере движения удастся проинтегрировать уравнения движения жидкости в инерциальной системе координат или получить их первые интегралы. Эти интегралы аналогичны теореме о кинетической энергии ньютоновской механики. В гидродинамике они играют столь же существенную роль, как и в механике твердого тела, так как позволяют значительно упростить математическую сторону поставленных задач.

#### Интеграл Бернулли

Сделаем следующие предположения относительно движущейся жидкости:

1) жидкость идеальна. Следовательно, ее движение можно описать уравнением Ламба–Громеки;

2) движение жидкости установившееся. Это значит, что все переменные, входящие в уравнения движения, не зависят от времени  $t$ ;

3) массовые силы, действующие в жидкости, принадлежат к потенциальному силовому полю, т.е.  $F = \text{grad } U$ ;

4) жидкость баротропна, т.е.  $\rho = f(p)$ .

Тогда

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U\right) = 0.$$

Дифференциал взят при перемещении вдоль линии тока, следовательно,

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = C_x,$$

где  $C_x$  – постоянная для данной линии тока; она вообще меняется при переходе от одной линии к другой.

Полученное соотношение носит название *интеграла Бернулли*.

Если плотность постоянна и массовые силы есть силы тяжести, то, направив ось  $z$  вертикально вверх, найдем

$$U = -gz.$$

Тогда интеграл Бернулли приобретает вид

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_x,$$

или

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = C_x.$$

### **Интеграл Коши**

Перейдем к рассмотрению второго интеграла уравнений движения. Он справедлив при следующих предположениях относительно движущейся жидкости:

- 1) жидкость идеальна;
- 2) движение потенциально, т.е. вектор завихренности равен нулю:

$$\Omega = 0, \text{ откуда } v = \text{grad } \varphi,$$

- 3) жидкость баротропна. Следовательно,  $\rho = f(p)$ ;

- 4)  $F = \text{grad } U$ .

Тогда получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = f(t),$$

где  $f(t)$  – произвольная функция времени.

Полученное соотношение носит название *интеграла Коши*. Присоединив к данному уравнению уравнение неразрывности, которое при сделанных предположениях будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \text{ grad } \varphi = 0$$

и уравнение состояния

$$\rho = f(p),$$

получим систему трех уравнений для трех неизвестных  $\varphi$ ,  $\rho$  и  $p$ . Таким образом, уравнения задачи о движении жидкости значительно упрощаются по сравнению с их общим видом.

Предположим, что одновременно выполняются условия интегралов Бернулли и Коши, а именно, пусть: 1) жидкость идеальна; 2) движение установившееся; 3) движение потенциально; 4) жидкость баротропна; 5) внешние силы принадлежат потенциальному силовому полю. Тогда получим интеграл уравнения движения вида

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = C,$$

где

$$v^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Данное равенство называется *интегралом Бернулли-Эйлера*. Постоянная  $C$  в этом интеграле сохраняет одно и тоже значение для всех частиц движущейся жидкости.

Присоединив к интегралу Бернулли-Эйлера уравнение состояния  $\rho = f(p)$  и уравнение неразрывности, которое в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\operatorname{div} \rho \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

получим систему уравнений для определения  $\varphi$ ,  $\rho$  и  $p$ .

Особенно простой вид приобретают уравнения, описывающие движение жидкости, если к условиям существования интеграла Бернулли-Эйлера добавить еще условие несжимаемости жидкости. Действительно, в этом случае интеграл Бернулли-Эйлера будет иметь вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = C.$$

## ТЕМА 6. ТЕЧЕНИЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ.

Движение идеальной жидкости называется *плоскопараллельным*, или просто *плоским*, если все частицы, лежащие на одном и том же перпендикуляре к некоторой неподвижной плоскости, имеют одинаковые давление, плотность и движутся параллельно этой плоскости. Выберем в качестве основной неподвижной плоскости координатную плоскость  $xu$  и воспользуемся уравнениями движения жидкости в декартовой системе координат. Тогда, согласно определению плоскопараллельного движения, все искомые величины  $v$ ,  $\rho$ ,  $p$  и заданный вектор массовых сил  $F$  будут функциями  $x, y, t$ , и проекция  $v$  на ось  $z$  будет равна нулю ( $v_z=0$ ). Уравнения Эйлера в данном случае в проекциях на  $x$  и  $y$  будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},\end{aligned}$$

а в проекции на ось  $z$  приводит к  $F_z=0$ , т.е. массовые силы при плоскопараллельном движении располагаются в плоскости движения жидкости.

Уравнение неразрывности при плоскопараллельном движении в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (pv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (pv_y)}{\partial y} = 0,$$

а уравнение состояния сохраняет свой общий вид.

### Функция тока

В частных случаях плоского движения жидкости уравнение неразрывности тесно связано с уравнением линий тока, имеющим в данном случае следующий вид:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \quad \text{или} \quad v_x dy - v_y dx = 0,$$

где  $v_x$  и  $v_y$  будут функциями координат  $x, y$  и времени  $t$ , которое рассматривается как параметр.

Предположим, что можно подобрать такой интегрирующий множитель  $\rho$ , что последнее уравнение обращается в полный дифференциал некоторой функции  $\psi$ , зависящий от переменных  $x, y$  и параметра  $t$ , т.е.

$$d\psi = \rho v_x dy - \rho v_y dx = 0$$

и

$$\psi(x, y, t) = \text{const}.$$

Это уравнение определяет семейство линий тока, в силу чего  $\psi$  называется *функцией тока*.

Из соотношения следуют равенства:

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

откуда имеем

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0.$$

Данное соотношение является условием существования функции тока. Оно представляет собой частный случай уравнения неразрывности плоских течений, когда  $d\rho/dt=0$ . Последнее имеет место в трех случаях:

1) жидкость несжимаема. Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

При этом интегрирующий множитель можно принять равным единице и проекции скорости  $v_x$  и  $v_y$  через функцию тока будут выражаться в виде

$$v_x(x, y, t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y},$$

$$v_y(x, y, t) = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x},$$

2) движение установившееся т.е.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ . В этом случае уравнение неразрывности будет

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0.$$

Интегрирующий множитель представляет собой плотность  $\rho$ . Проекции скорости через функцию тока для баротропной жидкости записываются в виде

$$v_x(x, y) = \frac{1}{\rho(\rho)} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y},$$

$$v_y(x, y) = \frac{1}{\rho(\rho)} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x};$$

3) жидкость несжимаема и движение установившееся. В этом случае проекции скорости запишутся в виде

$$v_x(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y},$$

$$v_y(x, y) = - \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$$

Итак, функция тока существует, если имеет место один из трех указанных случаев. Функция тока  $\psi$  удовлетворяет тождественно уравнению неразрывности. Введя эту функцию в уравнения получим систему двух уравнений относительно  $\psi$ ,  $\rho$  или  $\psi$ ,  $\rho$ ,  $p$ . Присоединив в последнем случае уравнение состояния, получим замкнутую систему для определения искомых функций.

### **Уравнения плоских потенциальных установившихся движений несжимаемой жидкости.**

Пусть жидкость идеальна и несжимаема, внешние силы принадлежат к потенциальному силовому полю и движение жидкости установившееся, потенциальное и плоское.

При сформулированных условиях уравнение Эйлера приводится к интегралу Эйлера-Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} - U = const.$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Условие отсутствия завихренности будет

$$\Omega = \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Последние два уравнения служат для определения  $v_x, v_y$  при заданных граничных условиях. Эти уравнения можно записать еще в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Из уравнения неразрывности и условия отсутствия завихренности следует существование функции тока  $\Psi$  и потенциала скорости  $\Phi$ , через которые  $v_x$  и  $v_y$  определяются в виде

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Из последних соотношений, исключая  $\Phi$  и  $\Psi$  перекрестным дифференцированием, находим, что эти функции должны удовлетворять уравнениям Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \Delta \Psi = 0.$$

Таким образом, задачи о плоских потенциальных установившихся движениях идеальной несжимаемой жидкости, на которую действуют силы потенциального поля, сводятся к интегрированию уравнений Лапласа относительно  $\Phi$  и  $\Psi$  при заданных граничных условиях, к определению  $v_x, v_y$  и давления.

### **Уравнения плоских потенциальных неустановившихся движений несжимаемой жидкости.**

Пусть жидкость идеальна, несжимаема, внешние силы принадлежат к потенциальному силовому полю и движение жидкости потенциальное, плоское и неустановившееся. При сформулированных условиях уравнение Эйлера приводится к интегралу Коши:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} - U = F(t).$$

Уравнение неразрывности и условие отсутствия завихренности также, как и в случае стационарных движения, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial v_x(x, y, t)}{\partial x} = -\frac{\partial v_y(x, y, t)}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v_x(x, y, t)}{\partial y} = -\frac{\partial v_y(x, y, t)}{\partial x}.$$

Из этих соотношений следует, что существуют потенциал скорости  $\varphi$  и функция тока  $\psi$ , удовлетворяющие соотношениям, определяющий  $v_x$  и  $v_y$ :

$$v_x = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y};$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}.$$

Отметим, что кинематические уравнения, описывающие рассматриваемое нестационарное движение, отличаются от уравнений соответствующего установившегося движения только параметром  $t$ .

Из полученных соотношений следует, что  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\Delta \varphi(x, y, t) = 0; \Delta \psi(x, y, t) = 0,$$

где  $t$  по-прежнему – параметр.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к интегрированию одного из уравнений при заданных граничных условиях и определению  $p$  при заданных начальных условиях.

### **Уравнения плоских установившихся движений сжимаемой жидкости.**

Пусть жидкость идеальна и баротропна, внешние силы принадлежат к потенциальному силовому полю и движение жидкости потенциальное, плоское установившееся. При сформулированных условиях уравнение Эйлера приводится к интегралу Бернулли-Эйлера вида:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} - U = const.$$

Уравнение неразрывности и условие отсутствия завихренности будут вида

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} = -\frac{\partial \rho v_y}{\partial y}; \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Тогда существуют потенциал скорости  $\Phi$  и функция тока  $\Psi$ , удовлетворяющие соотношениям, определяющим  $v_x$  и  $v_y$ :

$$v_x(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\rho(x, y)} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y};$$

$$v_y(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho(x, y)} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}.$$

Из последних соотношений следует, что  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0.$$

Присоединив к указанным соотношениям уравнение состояния  $\rho = f(p)$ , получим систему уравнений относительно  $v_x, v_y, p, \rho$  либо  $\Phi$  (или  $\Psi$ ),  $p$  и  $\rho$ .

Изучение завихренных движений жидкости представляет значительные затруднения, ибо при этом в общем случае не имеют места интегралы уравнений движения. Простейший случай таких движений, допускающий интеграл уравнений движения, – это плоское течение несжимаемой жидкости, обладающее постоянной величиной завихренности, которое имеет место при относительном движении во вращающихся объемах.

Итак, пусть движение несжимаемой жидкости плоское неустановившееся. Тогда проекции вектора скорости  $v_x, v_y$  ( $v_z = 0$ ) будут функциями координат  $x, y$  и времени  $t$ . Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

следует существование функции тока  $\Psi$ , которая будет зависеть от  $x, y, t$ :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

### Примеры течений с постоянной величиной завихренности.

1. Пусть скорость плоскопараллельного установившегося течения в инерциальной системе координат имеет только одну составляющую вдоль оси  $x$  ( $v_y = 0$ ) и эта составляющая  $v_x$  будет функцией только  $y$ . Тогда имеем

$$-\frac{dv_x}{dy} = -\frac{d^2 \Psi}{dy^2} = \Omega \quad (\Omega = \text{const}).$$

$$v_x = -\Omega y + v_0.$$

где  $v_0$  – скорость на оси  $x$ .

Следовательно, рассматриваемое течение обладает скоростью  $v_x \{v_y=0\}$ , которая по линейному закону меняется вдоль, оси  $y$ . Это течение при  $\Omega > 0$  изображено на рис. 12.

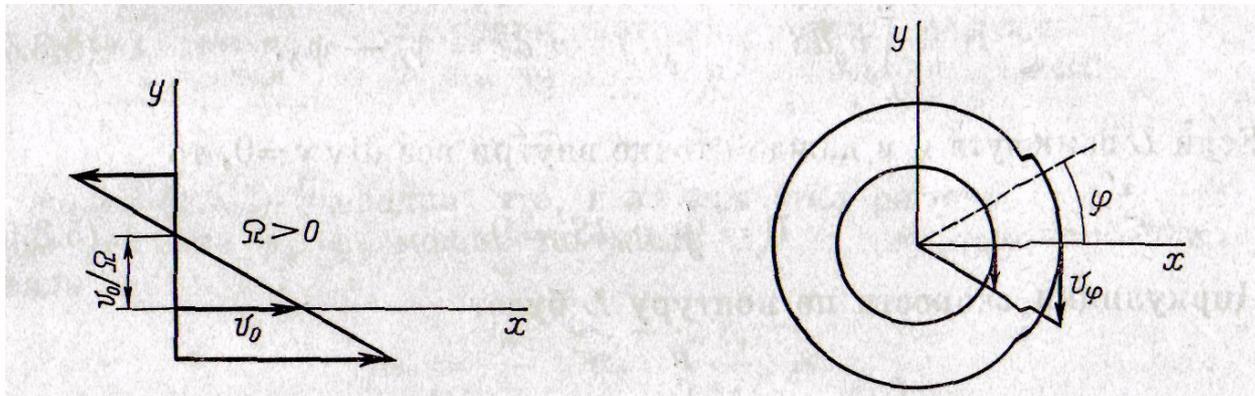


Рисунок 12.

Рисунок 13.

Функция тока этого течения определяется в виде

$$\psi = -\frac{\Omega}{2}y^2 + v_0y + \psi_0.$$

II. Пусть имеется установившееся течение с постоянной величиной завихренности, линиями тока которого являются концентрические окружности. Тогда имеем

$$\frac{d}{dr}r \frac{d\psi}{dr} = -\Omega r, \text{ или } \frac{d}{dr}rv_\varphi = -\Omega r.$$

Из последнего равенства запишем

$$rv_\varphi = -\frac{\Omega}{2}r^2 + C; \psi = -\frac{\Omega r^2}{4} + C \ln r + \psi_0.$$

При  $r=0$  составляющая скорости, перпендикулярная  $r$ , должна обращаться в нуль, следовательно,  $C=0$ . Линия тока при  $r=0$  вырождается в точку, поэтому резонно положить  $\psi = 0$  при  $r=0$ , значит и  $\psi_0=0$ , и окончательно формулы приобретают вид

$$v_\varphi = -\frac{\Omega}{2}r; \psi = -\frac{\Omega r^2}{4}.$$

Таким образом, рассматриваемое течение обладает скоростью  $v_\varphi$ , меняющейся по линейному закону вдоль радиуса (рис. 13).

Запишем уравнения, определяющие плоскопараллельные течения идеальной сжимаемой жидкости:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U = \text{const};$$

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Из уравнений можно определить  $\varphi$  через  $\psi$  или  $\psi$  через  $\varphi$  в виде:

$$\varphi = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} dy,$$

$$\varphi = \int \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dr - r \frac{\partial \psi}{\partial r} d\theta,$$

$$\varphi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx,$$

$$\varphi = r \int \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dr.$$

Семейства кривых  $\varphi = \text{const}$ , называемых *эквипотенциалами*, и кривых  $\psi = \text{const}$ , называемых *линиями тока*, будут взаимно ортогональны, так как выполняется условие их ортогональности:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Эти два семейства равноправны, ибо, если заданы  $\varphi_1, \psi_1$ , то

$$\varphi_2 = -\psi_1, \psi_2 = \varphi_1.$$

Последние равенства будут отвечать течениям со скоростями:

$$v_{2x} = v_{1y}; v_{2y} = -v_{1x}.$$

Следовательно, линии тока и эквипотенциалы взаимозаменяемы.

### **Построение новых течений по заданным.**

Из уравнений следует принцип наложения потоков: сумма решений  $\varphi_1, \psi_1$  и  $\varphi_2, \psi_2$  будет их новым решением:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \psi = \psi_1 + \psi_2.$$

Очевидно, что, если известно решение  $\varphi_1, \psi_1$ , то новое решение  $\varphi_2, \psi_2$  можно получить путем дифференцирования в виде

$$\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \psi_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x},$$

или

$$\varphi_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}; \psi_2 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}.$$

Если заданы  $\varphi_2, \psi_2$ , то, используя ряд уравнений, можно получить новое решение  $\varphi_1, \psi_1$  путем интегрирования в виде

$$\varphi_1 = \int \varphi_2 dx - \psi_2 dy;$$

$$\psi_1 = \int \varphi_2 dy + \psi_2 dx.$$

Следует отметить, что различные решения настоящего параграфа всегда можно интерпретировать как решение некоторой краевой задачи.

## **ТЕМА 7. ВЯЗКОСТЬ, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ЗАКОН ПОДОБИЯ.**

### **Уравнения движения вязкой изотропной жидкости.**

В реальных жидкостях при относительном движении ее отдельных слоев возникают силы, препятствующие этому движению. Такие силы называются *силами трения* или *сдвигающими напряжениями*.

Если эти силы незначительны и ими можно пренебречь, то движение среды описывается уравнениями идеальной жидкости. Однако в ряде случаев силами трения пренебрегать нельзя.

Жидкости, при движении которых учитываются силы трения, называются *вязкими*.

Чтобы получить уравнения, описывающие движение вязких жидкостей, необходимо к уравнениям движения в напряжениях присоединить дополнительные выражения, связывающие напряжения с кинематическими характеристиками движения.

Экспериментальный закон Ньютона устанавливает следующую зависимость: при движении жидкости вдоль оси  $x$  касательное напряжение  $p_{yx}$ , приложенное к площадке, перпендикулярной  $x$ , определяется формулой

$$p_{yx} = \mu \frac{\partial v_{xy}}{\partial y},$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкости (первый коэффициент вязкости), имеющий постоянное значение для определенной жидкости и при определенной температуре.

Предположим, что жидкость изотропна и в предельном случае отсутствия вязкости выполняется условие идеальности жидкости:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= p_{yy} = p_{zz} = -p; \\ p_{xy} &= p_{yz} = p_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Тогда имеет место обобщенный закон Ньютона, связывающий тензор напряжения  $P$ , тензор скоростей деформации  $\Phi$  и единичный тензор  $I$ :

$$P = \left[ -p + \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] I + 2\mu \Phi,$$

где  $\lambda$  называется *вторым коэффициентом вязкости*.

Если сжимаемость среды несущественна, то  $\lambda = 0$ .

Обобщенный закон Ньютона в развернутом виде:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ p_{yy} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ p_{zz} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{xy} &= p_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ p_{yz} &= p_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \\ p_{zx} &= p_{xz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

В ряде случаев удобнее вводить вместо коэффициента  $\mu$  величину  $\mu / \rho$  (где  $\rho$  – плотность жидкости). Эта величина обозначается

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

и называется кинематическим коэффициентом вязкости.

При температуре  $t=0^\circ \text{C}$  для воды имеем  $\nu = 0,018 \text{ см}^2/\text{сек}$ ; для воздуха  $\nu = 0,133 \text{ см}^2/\text{сек}$ .

Учитывая уравнения движения сплошных сред в напряжениях

$$\vec{a} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right),$$

запишем уравнение движения вязкой изотропной жидкости в векторной форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\nu}{3} \text{grad } \text{div } \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}.$$

Это соотношение называется *уравнением Навье-Стокса*.

Уравнение неразрывности для вязкой жидкости сохраняет свой прежний вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0.$$

Полученные уравнения, к которым добавляется уравнение физического состояния жидкости, связывающее давление и плотность, в качестве неизвестных содержит вектор  $\vec{v}$  и скаляры  $p$  и  $\rho$ .

Подобно тому как это было выполнено для идеальной жидкости, можно преобразовать уравнение Навье-Стокса так, чтобы в левую часть его в явном виде входил вектор завихренности  $\vec{\Omega}$ . Тогда уравнение движения вязкой жидкости будет иметь вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\vec{\Omega} \vec{v}] + \text{grad } \frac{v^2}{2} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\nu}{3} \text{grad } \text{div } \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}.$$

Если жидкость несжимаема, то уравнение движения вязкой жидкости будет вида

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v},$$

или

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\vec{\Omega} \vec{v}] + \text{grad } \frac{v^2}{2} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}.$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости приобретает вид

$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

Неизвестными в уравнениях будут  $\vec{v}$  и  $p$ , которые из них определяются при заданных начальных и граничных условиях.

### **Начальные и граничные условия.**

Начальные условия при движении вязкой жидкости будут такими же, как и для идеальной жидкости. Например, при движении вязкой несжимаемой жидкости в начальный момент ( $t=0$ ) следует задать поле скоростей и поле давлений как известные функции координат  $f_1$  и  $f_2$ , т.е.

$$\begin{aligned}v(x, y, z, 0) &= f_1(x, y, z); \\p(x, y, z, 0) &= f_2(x, y, z).\end{aligned}$$

Граничные условия вязкой жидкости в ряде случаев будут отличаться от соответствующих граничных условий идеальной жидкости. Например, на твердой неподвижной стенке частицы жидкости будут прилипать. Это значит, что равняться нулю должна не только нормальная к стенке составляющая вектора скорости частиц жидкости, соприкасающаяся со стенкой (как это было в случае идеальной жидкости), но и касательная к стенке, составляющая вектора скорости.

На свободной поверхности вязкой жидкости принимается, что касательное напряжение равно нулю, а нормальное напряжение равно постоянному давлению среды, с которой граничит жидкость.

Следует заметить, что изучение движения вязкой жидкости является задачей более сложной, чем изучение движения идеальной жидкости, не только потому, что уравнение Навье-Стокса сложнее уравнений Эйлера, но и потому, что в ряде случаев имеют место более сложные граничные условия. Сказанное иллюстрируется далее.

### **О невозможности потенциальных движений вязкой жидкости.**

Из предыдущих глав можно убедиться, какое огромное значение в изучении движения идеальной жидкости имеет предположение о потенциальности движения. Поэтому кажется естественным сделать такое же предположение и в случае движения вязкой жидкости. Итак, положим, что

$$\Omega = 0,$$

или

$$v = grad \varphi,$$

тогда уравнение неразрывности приводится к уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0,$$

в силу которого член, характеризующий вязкость в уравнении движения, обращается в нуль, т.е.

$$v \Delta v = v \operatorname{grad} \Delta \varphi = 0.$$

Уравнение движения вязкой жидкости обращается в уравнение движения идеальной жидкости вида

$$\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{F},$$

из которого следует, что такое движение возможно только в случае сил, принадлежащих потенциальному силовому полю, т.е.

$$F = \operatorname{grad} U.$$

Следовательно, уравнение движения жидкости приводится к интегралу Коши:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = f(t),$$

и задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа и определению давления из интеграла Коши.

Отличие движения вязкой жидкости от идеальной в рассматриваемом случае будет заключаться только в разной формулировке граничных условий. Действительно, на неподвижной твердой стенке в случае течения идеальной жидкости ставится только условие равенства нулю нормальной к стенке составляющей скорости, т.е.

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Для вязкой же жидкости на твердой стенке ставится условие равенства нулю как нормальной, так и касательной составляющих вектора скорости, т.е.

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0.$$

Этим условиям не могут удовлетворить решения уравнения Лапласа в чем можно убедиться на примере обтекания тел идеальным потоком жидкости, рассмотренном ранее. Таким образом, сделанное предположение о потенциальности движения вязкой жидкости противоречит граничным условиям и, следо-

вательно, не существует потенциальных движений вязкой жидкости, особенно в непосредственной близости к твердым стенкам.

Таким образом, изучение движения вязкой жидкости сложнее изучения движения идеальной жидкости и вследствие более сложных уравнений, и вследствие усложнения граничных условий.

### **Основные направления изучения движения вязкой жидкости.**

Сложность изучения различных задач о движении вязкой жидкости столь велика, что только в случае сравнительно небольшого числа частных задач удается проинтегрировать уравнения движения при заданных граничных и начальных условиях. Вследствие этого при решении ряда задач, выдвигаемых практикой, приходится обращаться к эксперименту и ставить вопрос о критерии моделирования течения. Последний решается теоретическим путем.

Кроме того, изучение движения вязкой жидкости можно успешно осуществить, если воспользоваться приближенными уравнениями движения вязкой жидкости. При использовании тех или иных приближенных уравнений движения вязкой жидкости важно указать область их применимости.

Уравнение Навье-Стокса описывает так называемые *ламинарные течения жидкости*, которые характерны тем, что отдельные слои течения не смешиваются. Однако в природе существуют течения, характерные резким перемешиванием отдельных частиц различных слоев. Такие течения описываются средними значениями скоростей, давлений, плотности и называются *турбулентными*. Уравнение Навье-Стокса служит базой для получения уравнений турбулентных течений.

### **Течение Пуазейля**

В качестве примера точного интегрирования уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости рассмотрим течение в трубах. Предположим, что течение стационарно и внешние силы отсутствуют, т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \vec{F} = 0.$$

Предположим далее, что течение направлено вдоль оси трубы, т.е., используя цилиндрическую систему координат, имеем

$$v_z = v_\varphi = 0; \quad v_z = v(r, \varphi, z).$$

Тогда с помощью уравнения неразрывности приходим к формуле Гагена-Пуазейля:

$$p_1 - p_2 = \frac{2\mu l Q}{\pi a^4} = \frac{8\mu l v_{cp}}{a^2},$$

которую полностью подтвердили экспериментально независимо друг от друга ученые Гаген и Пуазейль. Формула составляет содержание закона Гагена-Пуазейля, который гласит: *при ламинарном течении жидкости в трубе падение давления вдоль оси трубы прямо пропорционально секунднему объему протекающей жидкости и длине отрезка трубы и обратно пропорционально четвертой степени радиуса трубы.*

### **Критерии подобия**

Остановимся на уравнении движения вязкой несжимаемой жидкости и преобразуем его так, чтобы в него входили только безразмерные величины. Для этого введем характерные для каждого течения длину  $L_0$ , скорость  $v_0$ , давление  $p_0$ , время  $T_0$  и силу  $g_0$ , приходящуюся на единицу массы. Примером этих величин могут служить в случае обтекания цилиндра: диаметр цилиндра  $L_0$ , скорость невозмущенного потока  $v_0$  (или скорость в бесконечности), давление невозмущенного потока  $p_0$  (или давление в бесконечности), период срыва вихрей с поверхности цилиндра  $T_0$  и сила тяжести  $g_0$ , действующая в потоке жидкости на единицу массы.

Введенные характерные величины можно рассматривать как масштабы длины, скорости, давления, времени и силы. Все переменные размерные величины, входящие в уравнение движения, при этом можно представить как произведение характерных масштабов на безразмерные величины. Обозначив

безразмерные величины соответствующих размерных величин буквами с индексом «1», имеем

$$r = L_0 r_1; v = v_0 v_1; p = p_0 p_1; t = T_0 t_1, F = g_0 F_1,$$

Отсюда

$$\text{grad } p = \frac{p_0}{L_0} \text{grad } p_1; (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = \frac{v_0^2}{L_0} (v_1 \text{ grad}) v_1.$$

Обозначив постоянное значение плотности через  $\rho_0$ , уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерных величинах запишем в виде

$$\frac{v_0}{T_0} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_0^2}{L_0} (\vec{v} \text{ grad}) v_1 = F_1 g_0 - \frac{p_0}{\rho_0 L_0} \text{grad } p_1 + \frac{v_0}{L_0^2} \Delta v_1.$$

Уравнение неразрывности в безразмерных величинах для несжимаемой жидкости будет вида

$$\text{div } v_1 = 0.$$

### Числа подобия течений.

Разделим уравнение на  $\frac{v_0^2}{L_0}$ , тогда оно приобретает вид

$$\frac{L_0}{T_0 v_0} \frac{\partial v_1}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) v_1 = \frac{g_0 L_0}{v_0^2} F_1 - \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \text{grad } p_1 + \frac{v_0}{L_0} \Delta v_1.$$

Так же, как и в уравнении, все члены уравнения будут безразмерными величинами. Множители этого уравнения составленные из характерных для данного течения величин, также будут безразмерными. Эти множители носят общее название *чисел подобия*.

Как следует из уравнения, чисел подобия будет четыре, и каждое из них носит имя автора, который впервые ввел его в рассмотрение течения:

число, содержащее давление, называется *числом Эйлера* и обозначается  $E$ :

$$E = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2};$$

число, в которое входит сила тяжести, называется *числом Фруда* и обозначается  $F$ :

$$F = \frac{v_0^2}{gL_0};$$

число, содержащее характерное время, носит название *числа Струхаля* и обозначается  $S$ :

$$S = \frac{L_0}{T_0 v_0};$$

число, содержащее кинематический коэффициент вязкости, носит название *числа Рейнольдса* и обозначается  $R$ :

$$R = \frac{L_0 v_0}{\nu}.$$

Вводя числа Эйлера, Фруда, Струхаля и Рейнольдса в уравнение движения, перепишем последнее в виде

$$S \frac{\partial v_1}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v}_1 = \frac{F_1}{F} - E \text{grad } p_1 + \frac{1}{R} \Delta \vec{v}_1.$$

Если движение установившееся ( $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ ) и если в качестве характерного давления выбрать величину  $\rho v_0^2$ , которая носит название *скоростного напора*, то в уравнении выпадут числа Струхаля  $S$  и Эйлера  $E$ . Тогда уравнение движения для установившихся течений будет иметь вид

$$(\vec{v} \text{grad}) \vec{v}_1 = \frac{1}{F} F_1 + \text{grad } p_1 + \frac{1}{R} \Delta \vec{v}_1.$$

Как указывалось ранее, вследствие сложности уравнений движения ряд задач приходится решать экспериментальным путем, причем при обтекании тел модели, с которыми приходится иметь дело в гидродинамике, как правило, меньше тел натуральных. При этом, естественно, возникает вопрос, как следует поставить эксперимент, чтобы его данные отвечали действительности, т.е. как следует выбрать критерии подобия течений.

Две задачи будут идентичны, если они описываются одними и теми же уравнениями и в случае установившихся движения имеют одинаковые граничные условия. Чтобы осуществить совпадение граничных условий в натуральных условиях и в эксперименте, необходимо потребовать геометрического подобия тел и их расположения в пространстве относительно потока. При ис-

пользовании безразмерных уравнений стационарных течений вязкой жидкости совпадение уравнений движения в натуральных условиях и в эксперименте будет осуществлено, если при этом совпадают числа Фруда и Рейнольдса. Совпадение этих чисел является критерием подобия установившихся течений.

Если обозначить характерные величины натурального течения через  $L_H$ ,  $v_H$  и характерные величины геометрически подобного эксперимента через  $L_{\text{э}}$ ,  $v_{\text{э}}$ , то, следовательно, при постановке эксперимента необходимо соблюдение следующих равенств:

$$\frac{v_H^2}{gL_H} = \frac{v_{\text{э}}^2}{gL_{\text{э}}}, \text{ или } \frac{v_H}{L_H} = \frac{v_{\text{э}}}{L_{\text{э}}},$$

$$\frac{L_H v_H}{\nu_H} = \frac{L_{\text{э}} v_{\text{э}}}{\nu_{\text{э}}}.$$

Если кинематические коэффициенты вязкости в натуре и в эксперименте одинаковы ( $\nu_H = \nu_{\text{э}}$ ), то точное выполнение этих двух условий невозможно. Действительно, если модель меньше натуре, т.е.  $L_H / L_{\text{э}} > 1$ , то из равенства чисел Фруда следует, что  $v_H^2 / v_{\text{э}}^2 > 1$  и характерная скорость течения жидкости в эксперименте должна быть уменьшена по сравнению с соответствующей скоростью в натуре. Из равенства же чисел Рейнольдса следует, что если  $L_H / L_{\text{э}} > 1$ , то при этом  $v_{\text{э}}^2 / v_H^2 > 1$ , т. е. характерная скорость течения жидкости в эксперименте должна быть увеличена по сравнению с соответствующей скоростью в натуре. Чтобы одновременно выполнить условия равенства чисел Фруда и Рейнольдса, необходимо в эксперименте изменить кинематический коэффициент вязкости, однако практическое осуществление этого весьма трудно. Поэтому на практике, сохраняя неизменным  $\nu$ , осуществляют выполнение одного из чисел подобия, который наиболее существен в рассматриваемой задаче. Другим числом подобия при этом пренебрегают, т.е. осуществляется только приближенное моделирование явления. В тех задачах, где очень существенную роль играют силы тяжести, например, в задачах гравитационных волн, при моделировании явления пользуются числом подобия Фруда. В задачах о движении без свободной поверхности основным числом подобия принимается число Рейнольдса, которое в

этих вопросах играет существенную роль, характеризуя качественные особенности течений вязкой несжимаемой жидкости, как будет показано далее.

Число Рейнольдса в уравнении было получено путем деления множителя при квадратичных инерционных членах вида  $v_0^2 / L_0$  на множитель при члене, характеризующем вязкость жидкости вида  $\nu v_0 / L_0$ . Поэтому число Рейнольдса определяет порядок величины отношения сил инерции к силам вязкости. Отсюда следует, например, что большим числам Рейнольдса будут соответствовать большая величина инерционных членов уравнений движения по сравнению с членами уравнения, характеризующими вязкость. Подобно тому, как введены числа подобия установившихся движений, можно ввести числа подобия неустановившихся течений. В частности, неустановившиеся периодические течения в качестве основного критерия подобия имеют число Струхала, которое согласовано с граничными условиями.

## **ТЕМА 8. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ.**

### **Звуковые волны.**

Рассмотрим упругие, или звуковые волны, которые представляют собой малые колебательные движения, происходящие во всей толще жидкости, вызванные попеременно малыми сжатиями и растяжениями.

Предположим, что указанное движение происходит при отсутствии массовых сил ( $F = 0$ ) и будет потенциальным ( $v = grad \varphi$ ). Далее, в силу малости колебаний в звуковой волне скорость движения жидкости будет мала. Также следует положить, что будут малы изменения скорости при переходе от одной точки пространства к другой, т.е. будут малы члены типа  $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v_y}{\partial y}$  и т.д. Отсюда следует, что в уравнениях движения можно пренебречь членом

$(v \text{ grad})v$ . В звуковой волне плотность  $\rho$  и давление  $p$  изменяются (так же, как и скорость) в малых пределах. Благодаря этому их можно представить в виде

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho'; \\ p &= p_0 + p',\end{aligned}$$

где  $\rho_0$  и  $p_0$  – постоянные значения плотности и давления в невозмущенной жидкости, а  $\rho'$  и  $p'$  – малые по сравнению с  $\rho_0$  и  $p_0$  добавки, зависящие от времени  $t$  и координат точек пространства  $x, y, z$ . При сделанных предположениях уравнение движения идеальной жидкости Эйлера запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi + \frac{1}{\rho_0 + \rho'} (p_0 + p') = 0.$$

Преобразуем это уравнение, изменяя порядок дифференцирования в первом члене, пренебрегая во втором члене  $\rho'$  по сравнению с  $\rho_0$  и учитывая, что  $\text{grad} p_0 = 0$ , к виду

$$\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p' = 0,$$

или, так как  $\rho_0$  постоянно, то

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} = f(t),$$

где  $f(t)$  – произвольная функция от времени. Но так как  $\varphi$  определяется с точностью до произвольной функции времени, то окончательно уравнение движения звуковой волны можно записать так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} = 0.$$

К данному уравнению движения следует присоединить уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости, которое для рассматриваемого случая с учетом равенств будет

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \text{div}[(\rho_0 + \rho')\vec{v}] = 0.$$

Так как  $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$  и произведение  $\rho' v$  есть величина второго порядка малости и ею можно пренебречь, то последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{divgrad} \varphi = 0,$$

или окончательно уравнение неразрывности будет

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Уравнение движения и уравнение неразрывности содержат три неизвестных  $\varphi$ ,  $p'$ ,  $\rho'$ . К этим уравнениям следует присоединить уравнение состояния.

Так как движение идеальной жидкости представляет собой адиабатический процесс, то имеет место уравнение Пуассона:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const},$$

где  $\gamma$  есть отношение удельной теплоемкости жидкости при постоянном давлении к ее удельной теплоемкости при постоянном объеме. Последнее равенство для рассматриваемой задачи можно записать в виде

$$(p_0 + p') \frac{1}{(\rho_0 + \rho')^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma},$$

или

$$1 + \frac{p'}{p_0} = \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^\gamma.$$

Разлагая последнее выражение по биному Ньютона

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^\gamma = 1 + \frac{\gamma \rho'}{\rho_0} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \dots$$

и отбрасывая малые члены  $\rho' / \rho_0$  выше первого порядка, находим

$$p' = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho'.$$

Обозначив постоянный коэффициент

$$\frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c^2,$$

окончательно уравнение состояния запишем в виде

$$p' = c^2 \rho'.$$

Вышеуказанные уравнения полностью описывают движение звуковых волн.

Пользуясь этой системой уравнений, найдем уравнение, которому удовлетворяют потенциал скорости  $\varphi$ . Для этого подставим значение  $p'$  в уравнение, откуда

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Подставив последнее соотношение в уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных относительно потенциала скорости. Оно носит название *волнового уравнения*.

Волновому уравнению удовлетворяют также и две другие неизвестные  $p'$  и  $\rho'$ . Действительно, умножим уравнение на  $-\rho_0/c^2$  и продифференцируем его по времени, тогда следует, что  $\rho'$  удовлетворяет волновому уравнению. Так как  $p'$  связано с  $\rho'$ , то оно также удовлетворяет тому же уравнению. Ему также будут удовлетворять и компоненты скорости  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$ . Итак, вопрос о распространении звуковых волн сводится к интегрированию волнового уравнения.

### **Решение волнового уравнения со сферическими волнами.**

Если возмущенное движение газа обладает сферической симметрией относительно начала координат, то потенциал возмущенного движения  $\varphi$  зависит только от  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и от времени  $t$ . Волновое уравнение в случае возмущенного движения со сферическими волнами имеет вид

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2},$$

так как  $\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}$ , если  $\varphi = \varphi(r)$ . Общее решение волнового уравнения со сферическими волнами

$$\varphi = \frac{f_1(r - a_0 t)}{r} + \frac{f_2(r + a_0 t)}{r},$$

где  $f_1, f_2$  – произвольные дважды дифференцируемые функции своего аргумента  $r \mp a_0 t$ . Для исследования решения возьмем функцию

$$\varphi = - \frac{Q(a_0 t - r)}{4\pi r}.$$

Причем вначале, для простоты, что  $Q$  – аналитическая функция своего аргумента. Нетрудно усмотреть, что потенциал скоростей, удовлетворяющий волновому уравнению, можно рассматривать как обобщение соответствующего потенциала от источника в несжимаемой жидкости  $\varphi = - Q(t)/4\pi r$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа. Действительно, при малых  $r$ , разложив  $Q$  в ряд Тейлора, получим выражение

$$\varphi = - \frac{Q(a_0 t)}{4\pi r} + \frac{Q'(a_0 t)}{4\pi} + O(r),$$

главный член которого совпадает с выражением для потенциала скоростей течения от источника, расположенного в точке  $r=0$  в несжимаемой жидкости. Переменный объемный расход этого источника определяется функцией  $Q(a_0 t)$ .

Для характеристики основных особенностей соответствующего сферически симметричного движения среды предположим теперь, что в точке  $r=0$  безграничной массы жидкости имеется источник, который действует некоторый малый промежуток времени  $\tau$ . Зависимость расхода этого источника  $Q(a_0 t)$  от времени  $t$  имеет вид, изображенный на рис. 14,а, расход отличен от нуля только при  $0 \leq t \leq \tau$ .

Посмотрим, как со временем будут распространяться по объему жидкости возмущения, посланные этим источником. Из вида решения ясно, что при  $t > 0$  и  $r > 0$  потенциал возмущенного течения будет отличен от нуля только тогда, когда  $a_0 t - r$  будет лежать в пределах  $0 \leq a_0 t - r \leq a_0 \tau$ . В каждый фиксированный

момент времени  $t > 0$  потенциал  $\varphi$  будет отличен от нуля только для тех  $r$ , которые удовлетворяют неравенству

$$a_0 t \geq r \geq a_0(t - \tau).$$

Таким образом, область возмущенного ( $\varphi \neq 0$ ) течения будет расположена между двумя сферами  $S_1$  и  $S_2$  радиусов  $r_1 = a_0(t - \tau)$  и  $r_2 = a_0 t = r_1 + a_0 \tau$  с центрами в точке  $r=0$  (рис. 14, б).

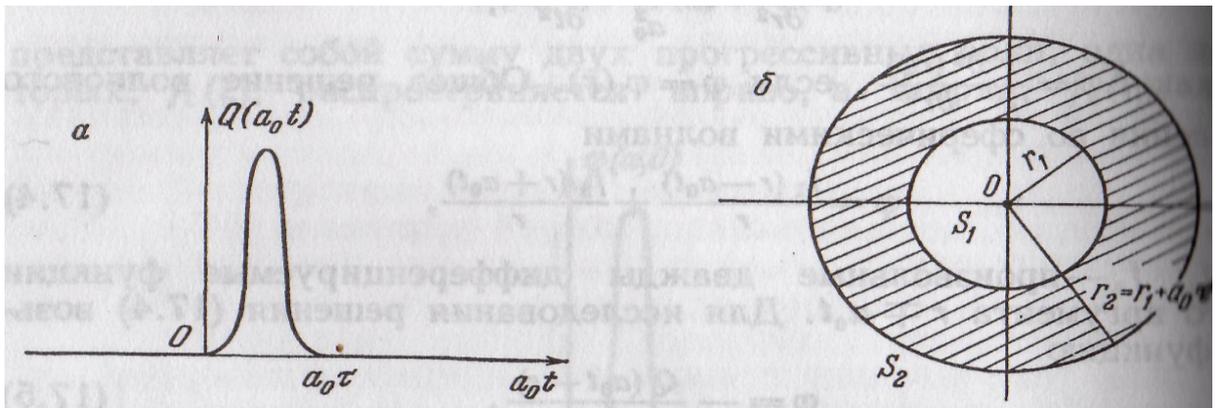


Рис. 14 а) Пример зависимости расхода источника, действующего в начале координат, от времени; б) заштрихована область возмущенного в момент времени  $t > \tau$  движения жидкости от источника с расходом, отличным от нуля только в конечный промежуток времени  $\tau$ .

Указанная область возмущений подвижна, передний  $S_2$  и задний  $S_1$  фронты возмущения распространяются по жидкости со скоростью  $a_0$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt} = a_0.$$

В противоположность плоским волнам, форма которых при их распространении сохраняется, интенсивность сферических волн при их распространении со временем падает благодаря наличию множителя  $1/r$ . Это связано с тем, что, распространяясь, возмущения захватывают область пространства между двумя сферами  $S_2$  и  $S_1$ , объем которой возрастает пропорционально  $r^2$ .

Решение волнового уравнения представляет собой движение с расходящимися от точки  $r=0$  сферическими волнами. Аналогичным путем можно рассмотреть решение волнового уравнения вида

$$\varphi = \frac{Q(r + a_0 t)}{r},$$

которое представляет собой сходящиеся из бесконечности к точке  $r=0$  сферические волны (источник в бесконечности). Для сходящейся волны интенсивность возмущений нарастает при подходе к центру симметрии. Для многих приложений особенно важен случай расходящихся сферических волн. Однако эффект усиления возмущений в сходящихся волнах во многих вопросах также интересен и используется на практике.

Возмущения, посланные источником, в несжимаемой жидкости мгновенно распространяются на всю массу жидкости. В сжимаемых средах возмущения распространяются с конечной скоростью, причем малые возмущения распространяются со «скоростью звука»  $a_0 = \sqrt{(dp/d\rho)_{\rho=\rho_0}}$ . в сжимаемых средах скорость распространения скачков (конечных возмущений) больше соответствующей скорости звука  $a_0 = \sqrt{(dp/d\rho)_s}$ , но тоже конечна.

### **Плоская звуковая волна.**

Остановимся на рассмотрении звуковой волны, в которой все величины зависят только от координаты  $x$  и времени  $t$ . Такая волна носит название *плоской*. Волновое уравнение в этом случае будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Применим для его интегрирования метод характеристик. Введем вместо переменных  $x$  и  $t$  новые переменные  $\xi$  и  $\eta$  при помощи соотношений:

$$\xi = x - ct; \eta = x + ct.$$

В новых переменных последнее уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $\xi$ , находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = f(\eta).$$

Интегрируя полученное уравнение еще раз по  $\eta$ , получим

$$\varphi = F_1(\xi) + F_2(\eta),$$

где  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\eta)$  – произвольные функции соответственно  $\xi$  и  $\eta$ . Возвращаясь к переменным  $x$  и  $t$ , решение уравнения для плоской звуковой волны запишем в виде

$$\varphi = F_1(x - ct) + F_2(x + ct).$$

Изменения давления, плотности и скорости в плоской звуковой волне будут описываться такими же функциями, как потенциал скорости  $\varphi$ . Например, изменение плотности жидкости будет описываться соотношением

$$\rho' = F_1(x - ct) + F_2(x + ct).$$

Чтобы выяснить смысл полученного решения, положим  $F_2=0$ , тогда

$$\rho' = F_1(x - ct).$$

При значениях  $x = \text{const} + ct$  плотность жидкости (а также  $p'$ ,  $v$  и  $\varphi$ ) будет оставаться неизменной. Это значит, что если в начальный момент плотность жидкости (а также  $p'$ ,  $v$  и  $\varphi$ ) в некоторой точке имела определенное значение, то такое же значение через время  $t$  будет иметь плотность  $\rho$  (и  $p'$ ,  $v$ ,  $\varphi$ ) в точке, находящейся на расстоянии  $ct$  вдоль оси  $x$ , т.е. картина движения распространяется в жидкости вдоль оси  $x$  со скоростью  $c$ , которая носит название *скорости звука*.

Говорят, что функция  $F_1(x-ct)$  представляет собой бегущую плоскую волну, которая распространяется в положительном направлении оси  $x$ . Аналогично функция  $F_2(x+ct)$  представляет собой плоскую звуковую волну, которая распространяется в отрицательном направлении оси  $x$ . Скорость движения жидкости направлена в рассматриваемом случае вдоль оси  $x$ , т.е. вдоль распространения звуковой волны. Такие волны называются *продольными*.

Пусть значение потенциала скорости  $\varphi$  определяется выражением

$$\varphi = F_2(x - ct).$$

Тогда скорость движения жидкости будет

$$v = v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_2'(x - ct).$$

Пользуясь равенствами, находим

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 c F_2'(x - ct),$$

откуда

$$F_1'(x - ct) = \frac{p'}{\rho_0 c} = c \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

Следовательно, скорость движения жидкости можно записать теперь в виде

$$v = c \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

Отсюда заключаем, что скорость передвижения частиц жидкости будет величиной весьма малой, ибо мало отношение  $\frac{\rho'}{\rho_0}$ .

Подсчитаем скорость распространения звуковой волны, т.е. скорость звука. Из формулы запишем

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}};$$

для воздуха имеем  $\gamma = 1,41$ ; при  $t = 0$  плотность равна  $\rho_0 = 1,293 \cdot 10^3 \text{ г/см}^3$ ; давление  $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$ , тогда  $c = 332 \text{ м/сек}$ . Полученный результат хорошо согласуется с известной скоростью распространения звука в воздухе. Это указывает на то, что упрощающие предположения, которые были сделаны в настоящем параграфе, имеют место в действительности.

Формула, служащая для вычисления скорости звука, впервые была получена Лапласом.

Если возмущения, характеризующие звуковую волну, являются *гармоническими* функциями времени, то волна называется *монохроматической*. Важным частным случаем таких волн являются бегущие плоские монохроматические волны. Значение этого класса волн весьма велико, поскольку любую волну можно представить в виде совокупности различных монохроматических плоских волн, т.е. в виде разложения в ряд или интеграл Фурье. Решение волнового уравнения для случая бегущих плоских монохроматических волн должно иметь вид

$$\varphi = a \cos(kr - wt + \alpha),$$

где постоянные  $a, k, w, \alpha$  называются соответственно *амплитудой, волновым вектором, частотой и начальной фазой волны*, а скалярная функция  $kr - wt + \alpha$

– *фазой волны*. Приведем также более удобную для вычислений форму вещественной функции, записанной в виде действительной части от комплексной функции

$$\varphi = \operatorname{Re}\{Ae^{i(k\vec{r}-\omega t)}\},$$

где  $A = ae^{i\alpha}$  – комплексная «амплитуда».

Убедимся в том, что  $\omega^2 = c_0^2 k^2$ . Следовательно,  $\omega$  и  $k$  должны быть связаны между собой соотношением

$$\omega = c_0 k;$$

при этом волновой вектор полагается равным

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c_0} \vec{n},$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении распространения волны.

Таким образом, волновое уравнение имеет решение

$$\varphi = \operatorname{Re}\{Ae^{i(k\vec{r}-\omega t)}\},$$

где  $A$  – произвольная постоянная.

Данное решение описывает плоскую монохроматическую волну, фронт которой распространяется со скоростью  $c_0$  в направлении волнового вектора. Действительно, продифференцировав по времени соотношение  $k\vec{r} - \omega t = \text{const}$ , определяющее данное значение фазы, найдем для скорости  $c$  распространения фронта вдоль  $\vec{k}$ , значение  $c = c_0$ . Скорость  $c$  называется *фазовой скоростью*. Ее можно представить в виде

$$c = \frac{\omega}{k}.$$

Отметим также, что соотношение, характеризующее монохроматическую волну, справедливо в системе отсчета, связанной со средой, в которой распространяется волна (конечно, система связывается со средой в ее невозмущенном состоянии).

Итак, постоянная  $c_0$  в полученных выше волновых уравнениях равна фазовой скорости распространения плоской монохроматической звуковой волны или, кратко говоря, скорости звука. Что касается скорости  $v$  движения частиц

жидкости, то она по направлению коллинеарна волновому вектору (в этом случае волна называется *продольной*), а по величине много меньше скорости звука. Действительно, рассматривая волну с потенциалом

$$\varphi = a \cos(kr - kc_0 t),$$

найдем, что

$$v = \nabla \varphi = \varphi' k,$$

а

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -kc_0 \varphi'.$$

С помощью этих выражений получим, что  $\rho_0 v = c_0 \rho'$ . Отсюда ввиду малости  $\rho'$  по сравнению с  $\rho_0$  следует

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1.$$

Таковы основные свойства плоской монохроматической звуковой волны.

В общем случае может иметь место *дисперсия* скорости звука, т.е. зависимость фазовой скорости от частоты волны,

$$\frac{\omega}{k} = c = c(\omega).$$

Дисперсия звука определяется законом дисперсии, т.е. функцией вида

$$\omega = \omega(k).$$

Этот закон определяет *групповую скорость*

$$\vec{U} = \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

т.е. скорость переноса энергии групповой монохроматических волн («волновым пакетом»). Фазовая и групповая скорости монохроматической волны ввиду отсутствия дисперсии совпадают.

## ТЕМА 9. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ. РЕШЕНИЕ РИМАНА. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОН. РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИСПЕРСИЯ.

В случае плоских волн мы рассмотрели решения волнового уравнения, зависящие только от  $x \pm a_0 t$ , что соответствовало прогрессивным волнам, которые без изменения своей формы распространяются вдоль оси  $x$  с постоянной и одинаковой для всех возмущений скоростью  $a_0$ . Скорость, плотность, давление (а также и другие характеристики движения) в такой волне являются функциями только  $x \pm a_0 t$  и, следовательно, могут быть выражены как функции друг друга в виде соотношений, не содержащих явно ни координат, ни времени  $t$  (например,  $u = u(\rho)$ ,  $p = p(\rho)$  и т.д.).

Выпишем *нелинейную* систему уравнений одномерных движений идеальной сжимаемой жидкости в случае баротропных процессов. Она состоит из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

и условия баротропности

$$p = f(\rho),$$

которое в случае адиабатических процессов в совершенном газе имеет вид

$$p = A\rho^\gamma$$

где  $A$  – постоянная, одинаковая для всех частиц газа.

Система уравнений с учетом условия баротропности течения представляет собой систему двух уравнений для определения плотности  $\rho$  и скорости  $u$  в зависимости от координаты  $x$  и времени  $t$ . Проводимые ниже рассуждения справедливы, вообще говоря, при любой зависимости  $p$  от  $\rho$ . Случай адиабатических движений совершенного газа мы будем рассматривать далее для иллюстрации полученных выводов только в качестве частного примера.

Выписанная система уравнений движения газа *не имеет* решений, зависящих только от  $x \pm a_0 t$ , но оказывается возможным найти решение этой системы, представляющее собой плоскую волну и являющееся обобщением решений вида  $f(x \pm a_0 t)$ , которые имеют место для приближенных линейных уравнений.

Будем искать такие частные решения системы уравнений, для которых скорость  $u$  является функцией только плотности  $\rho$ , т.е.

$$u = u(\rho),$$

где  $\rho = \rho(x, t)$ . Такие частные решения системы уравнений носят название **решений Римана**; соответствующие этим решениям движения называются **волнами Римана**.

В результате сделанного предположения систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( u \frac{du}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( u \frac{du}{d\rho} + \rho \frac{du}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что эти два уравнения будут согласовываться между собой, если будет выполнено равенство

$$\rho \frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{du}.$$

Это равенство обязательно должно выполняться для того, чтобы сделанное выше предположение о существовании решений вида  $u = u(\rho)$  выполнялось.

Таким образом, согласно последнему равенству имеем

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\rho}},$$

и, следовательно, скорость  $u$  как функция  $\rho$  в случае волн Римана может быть найдена независимо от интегрирования уравнений движения. Для скорости  $u(\rho)$  будем иметь

$$u = \pm \int \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho}}.$$

Для определения плотности  $\rho(x, t)$  можно использовать уравнения, которые сводятся к одному нелинейному уравнению. Это уравнение после обозначения

$$\frac{d\rho}{d\rho} = a^2(\rho)$$

и использования пока только одного из решений может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Введем в рассмотрение величину

$$c = u + a,$$

которая имеет, очевидно, размерность скорости и на основании уравнения может быть истолкована как *скорость распространения постоянных значений плотности  $\rho$* .

В самом деле, уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{dx}{dt} \frac{d\rho}{dx} = 0,$$

где

$$\frac{dx}{dt} = c.$$

Аналогично можно рассмотреть и скорость  $c$ , равную  $u + a$ . Величина  $c$  для баротропных процессов является функцией плотности  $\rho$ .

Для определения плотности  $\rho(x, t)$  имеем нелинейное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Подсчитаем величину  $c = u + a$  для случая адиабатических движений совершенного газа. Получим

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1},$$

$$u(\rho) = \pm \int \sqrt{A\gamma\rho^{\frac{(\gamma-1)}{2}-1}} d\rho = \pm \sqrt{A\gamma} \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{(\gamma-1)}{2}} + const,$$

$$c(\rho) = u + a = \sqrt{A\gamma} \left[ 1 + \frac{2}{\gamma-1} \right] \rho^{(\gamma-1)/2} + const.$$

Отсюда видно, что скорости  $a$  и  $c$  являются монотонно возрастающими функциями плотности  $\rho$ . Аналогичное исследование характера зависимости  $a$  и  $c$  от плотности  $\rho$  можно провести для произвольной зависимости  $p$  от  $\rho$ .

Так как постоянные значения плотности  $\rho$  и скорости  $u = u(\rho)$  перемещаются в пространстве со скоростью  $c$ , можно написать, что

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{\rho, u} = c(\rho) = u + a.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$x = tc(\rho) + F(\rho),$$

где  $F(\rho)$  – произвольная функция плотности, а функция

$$c(\rho) = u + a$$

определяется, например, ранее указанным равенством.

Последние формулы дают решение Римана. В этом решении функция  $F(\rho)$  произвольна, этой функцией можно распорядиться и удовлетворить некоторым добавочным частным условиям.

В полученном решении Римана плотность, а следовательно, и другие параметры течения найдены как неявные функции от  $x$  и  $t$ . Для каждого определенного значения  $\rho$  имеем  $x = c_1 t + c_2$  где  $c_1$  и  $c_2$  – постоянные, т.е. точка, в которой скорость и плотность имеют фиксированные значения (фазовая характеристика состояния), передвигается в пространстве с постоянной скоростью. В этом смысле построенное решение представляет собой волну. Скорость перемещения возмущений в пространстве равна  $c = u + a$  или  $c = u - a$ ; скорость распространения возмущений по частицам равна  $+a$  или  $-a$ . Два знака соответствуют двум разным решениям для волн, распространяющихся относительно частиц газа либо в положительном, либо в отрицательном направлениях оси  $x$ . Найденные частные движения получены как точные решения нелинейных уравнений движения; соответствующие движения часто называют *простыми волнами*.

### **Опрокидывание римановской волны сжатия.**

Пусть в некоторый фиксированный момент времени  $t$  профиль распределения плотности  $\rho$  от  $x$  в распространяющейся вправо ( $c = u + a$ ) волне Римана имеет вид, изображенный на рисунке 15, а.

Слева от точки  $M$  плотность  $\rho$  растет с ростом  $x$  и мы имеем волну разрежения, а справа от точки  $M$  плотность  $\rho$  убывает с ростом  $x$  и мы имеем волну сжатия. Скорость  $c$  распространения определенных значений плотности  $\rho$  зависит от величины плотности  $\rho$ , поэтому профиль распределения плотности  $\rho$  будет *меняться* с течением времени. Рассмотрим случай, подобный адиабатическому движению совершенного газа (для упрощения рассуждений примем,

что постоянная положительна или равна нулю. Прибавление любой постоянной к  $c(\rho)$  не может изменить всех последующих выводов), когда скорость  $c$  растет с ростом  $\rho$  и убывает с уменьшением  $\rho$ . Волна сжатия, т.е. та часть волны Римана, в которой плотность  $\rho$  при распространении волны возрастает, так как точки  $N_1$  и  $N_2$  будут сближаться, становится все короче, а профиль волны сжатия становится все круче, в то время как волна разрежения, т.е. те части волны Римана, в которых плотность при распространении волны убывает, так как точки  $N'_1$  и  $N'_2$  раздвигаются, удлиняется, а профиль волны разрежения становится все положе (рис. 15, б). С математической точки зрения возможно наступление такого момента времени  $t_2$ , когда в некотором месте  $x$  будет наблюдаться несколько значений плотности  $\rho$  (рис. 15, в), что физически недопустимо.

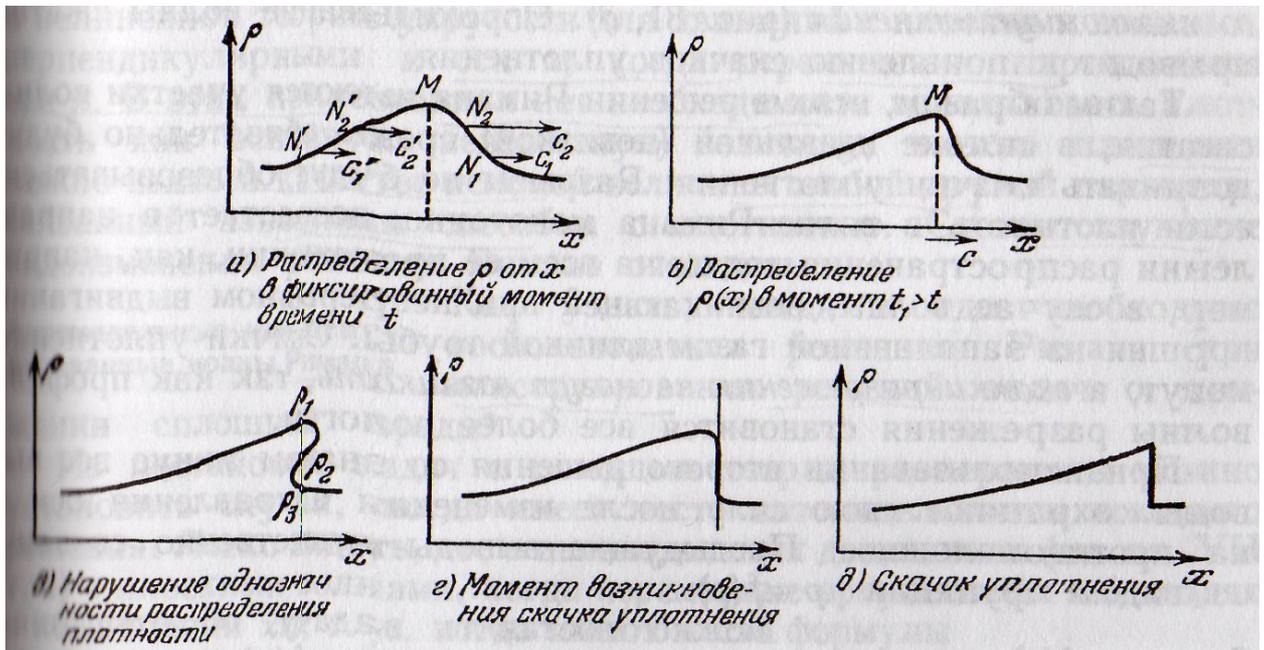


Рисунок 15

Ясно, что однозначное непрерывное решение, соответствующее волне Римана, может существовать только до момента времени  $t$ , когда профиль распределения плотности  $\rho$  от  $x$  приобретает вертикальную касательную (рис. 15, г). Начиная с этого момента времени, непрерывное решение Римана теряет силу. Как показывают опыт и теория, в этом случае непрерывное решение Римана должно быть заменено более общим разрывным решением со скачком уплотне-

ния (рис. 15, д). Опрокидывание волны сжатия приводит к появлению скачков уплотнения.

Таким образом, если в решении Римана имеются участки сжатия, в потоке идеальной (невязкой) среды обязательно будут возникать скачки уплотнения. Разрывы не будут образовываться, если плотность в волне Римана монотонно возрастает в направлении распространения волны на всем ее протяжении, как, например, в случае волны, возникающей при непрерывном выдвигании поршня из заполненной газом длинной трубы. Скачки уплотнения могут, а скачки разрежения не могут возникать, так как профиль волны разрежения становится все более пологим.

При использовании второго решения со знаком минус все выводы сохраняют свою силу после изменения направления оси  $x$  на противоположное. Предыдущие выводы существенно связаны с видом функции  $p=f(\rho)$ .

Можно поставить задачу об отыскании такой зависимости  $p=f(\rho)$ , при которой не будет иметь место эффект опрокидывания волны сжатия Римана. Так будет, например, если скорость  $c$  получается постоянной, т.е.  $dc/d\rho=0$ . В этом случае на основании формул для определения вида зависимости  $p$  от  $\rho$  будем иметь следующее простое дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{f'(\rho)} + \frac{d}{d\rho} \sqrt{f'(\rho)} = 0,$$

после интегрирования которого, найдем

$$p = f(\rho) = A - \frac{B}{\rho},$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные. Это уравнение можно рассматривать как уравнение процесса с некоторым подходящим притоком тепла для совершенного газа или вообще другой среды. Последнее уравнение можно рассматривать также как уравнение прямой, касательной к адиабате. Таким путем можно задавать адиабату приближенно, но при таком приближении теряется важная тенденция к опрокидыванию волн.

**О волнах Римана в других моделях сплошной среды.**

Теорию простых волн Римана можно применять непосредственно в некоторых других сложных моделях сплошной среды для движений с плоскими волнами, когда деформированное состояние определено одним переменным параметром, связанным однозначно с плотностью, и когда напряжение на плоскости фазы волны перпендикулярно к этой плоскости и определено деформированным состоянием, т.е. плотностью.

В частности, теория волн Римана непосредственно применима в нелинейной теории упругости для движений с плоскими волнами, перпендикулярными к оси  $x$ , когда перемещения параллельны оси  $x$ . в этих приложениях нет необходимости использовать плотность как основную неизвестную величину, вместо плотности можно взять в качестве искомой величины любой другой параметр, связанный известным способом с плотностью. соответствующие видоизменения решения Римана очевидны.

### **Автомодельные или центрированные волны Римана.**

Как узнать, когда и где необходимо воспользоваться решением Римана при конструировании решений задач о движении сплошной среды?

Из постановки задач с помощью теории размерности можно установить случаи, когда имеет место автомодельность искомого решения. Легко видеть, что в автомодельных движениях с плоскими волнами, когда переменные аргументы  $x$  и  $t$  входят в комбинации  $x/t$ , т. е. когда имеют место формулы

$$u = u_0 f\left(\frac{x}{t}\right) \text{ и } \rho = \rho_0 \varphi\left(\frac{x}{t}\right),$$

будет

$$u = u(\rho).$$

Следовательно, такие автомодельные движения являются волнами Римана или кусочно-гладкими комбинациями решений Римана, но автомодельные волны соответствуют случаю, когда функция  $F(\rho)$  равна нулю. Соответствующие решения называются центрированными волнами, так как в плоскости  $xt$  на каждой прямой, проходящей через начало координат,

$$\frac{x}{t} = \text{const},$$

величины  $u$  и  $\rho$  постоянны.

В общем случае при  $u$  и  $\rho$  постоянных соотношение также определяет прямую, однако если  $F(\rho) \neq 0$ , то при различных  $u$  и  $\rho$  прямые этого семейства не проходят через начало координат. Очевидно, что вдоль каждой такой прямой решение Римана можно склеивать непрерывно с покоем или с поступательным движением среды. (Поступательные движения также являются простейшими примерами решения Римана.) Таким образом, эти прямые являются характеристиками, и решения Римана можно определить как такие решения, для которых имеется семейство прямолинейных характеристик.

Указанные выше особенности решений Римана служат главной основой для конструирования решения ряда задач с использованием решений Римана. В частности, с помощью решений Римана легко построить решение автотельной задачи о движении газа за поршнем, выдвигаемым при  $t > 0$  с постоянной скоростью из цилиндрической трубы, заполненной совершенным газом, в предположении, что при  $t \leq 0$  поршень и газ покоились, а при  $t > 0$  движение газа адиабатично или вообще баротропно.

В различных приложениях существует очень много задач, при точном или приближенном решении которых необходимо опираться на рассмотренную выше теорию волн Римана.

### **Ударные волны.**

Рассмотрим стационарный однородный поток газа, движущийся со скоростью  $V$  относительно неподвижной системы отсчета  $S$ . Если скорость  $V$  потока превышает скорость  $c$  звука в газе (относительно самого газа), то поток называется *сверхзвуковым*; если же  $V$  меньше  $c$ , то поток называется *дозвуковым*. Свойства сверхзвукового потока существенно отличаются от свойств дозвукового течения. В связи с этим важной характеристикой потока является отношение  $M$  скорости потока к скорости звука в нем:

$$M = \frac{V}{c}.$$

Это число называется *числом Маха*.

Одна из особенностей сверхзвукового потока заключается в том, что малые возмущения плотности газа (и других величин) не могут в таком потоке распространяться по любому направлению. Действительно, скорость распространения возмущений относительно  $S$  равна сумме  $V + cn$ , где  $n$  – направление распространения возмущений относительно газа. Поэтому все возможные скорости распространения возмущений относительно  $S$  могут быть получены, если из неподвижной точки  $O$  (в которой возникают возмущения) отложить вектор  $V + cn$  и при фиксированном  $V$  придавать вектору  $n$  все возможные направления. В результате такого изменения вектора  $n$  конец вектора  $V + cn$  будет скользить по сфере радиуса  $c$  с центром в конце вектора  $V$ .

Из сказанного ясно, что в дозвуковом потоке ( $V < c$ ) вектор  $V + cn$  может иметь любое направление, в то время как в сверхзвуковом потоке ( $V > c$ ) вектор  $V + cn$  (при любом направлении  $n$ ) будет лежать внутри конуса (или на его поверхности) с вершиной в источнике возмущений  $O$  и с образующей, касающейся сферы радиуса  $c$  с центром в конце вектора  $V$ . Угол  $\alpha$  полураствора этого конуса определяется равенством

$$\sin \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}.$$

Итак, малые возмущения в сверхзвуковом потоке могут распространяться лишь в указанном конусе.

Другой особенностью сверхзвукового потока является, как известно из опыта, возможность возникновения *ударной волны*. Так называется волна значительного уплотнения среды, связанного с резким повышением давления и температуры; при этом практически скачкообразное изменение параметров происходит в очень тонком слое среды и сопровождается потоком вещества через этот слой. Ударные волны возникают при обтекании тел сверхзвуковым потоком газа, при взрывах и других сильных возмущениях среды.

Рассмотрим теорию ударной волны, отвлекаясь от процессов, происходящих в весьма тонком слое среды, где ее параметры сильно изменяются. Это

позволяет заменить такой слой *поверхностью разрыва*, т. е. поверхностью, на которой параметры среды терпят разрыв непрерывности.

Ограничимся случаем стационарного течения газа, когда поверхность разрыва будет неподвижной относительно системы отсчета, в которой рассматривается движение газа. Величины, характеризующие состояние газа до прохождения поверхности разрыва и после него, связаны между собой законами сохранения массы, импульса и энергии. Следовательно, на поверхности разрыва должны быть непрерывными потоки вещества, импульса и энергии.

Чтобы сформулировать эти условия, возьмем некоторый элемент  $nd\sigma$  поверхности разрыва и свяжем с ним систему координат, направляя ось  $x$  вдоль нормали  $n$  к элементу. Затем построим цилиндр с осью, направленной по  $x$ , поперечным сечением, равным  $d\sigma$ , и с основаниями, лежащими по разные стороны от рассматриваемого элемента поверхности разрыва бесконечно близко к этому элементу. Тогда, применяя к среде, находящейся в указанном цилиндре, законы сохранения массы, импульса и энергии в интегральной форме и учитывая стационарность потока, получим условия:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_{x1} &= \rho_2 v_{x2}, \\ p_1 + \rho_1 v_{x1}^2 &= p_2 + \rho_2 v_{x2}^2, \\ \rho_1 v_{x1} v_{y1} &= \rho_2 v_{x2} v_{y2}, \\ \rho_1 v_{x1} \left( \frac{v_1^2}{2} + h_1 \right) &= \rho_2 v_{x2} \left( \frac{v_2^2}{2} + h_2 \right). \end{aligned}$$

где индекс 1 относится к газу до прохождения поверхности разрыва, а индекс 2 – к газу после такого прохождения.

Из этих условий видно, что может существовать *тангенциальный разрыв*, т.е. такой разрыв, при котором отсутствует поток вещества через поверхность разрыва, тогда  $v_{x1} = v_{x2} = 0$ . В этом случае  $p_1 = p_2$ , а скачки плотности и тангенциальных составляющих скорости  $v_y$  и  $v_x$  произвольны. Если же поток вещества через поверхность разрыва отличен от нуля (т.е.  $v_{x1} \neq 0, v_{x2} \neq 0$ ), то имеет место ударная волна. В этом случае тангенциальные составляющие скорости непрерывны

$$v_{y1} = v_{y2}, \quad v_{z1} = v_{z2},$$

а плотность, давление и нормальная составляющая скорости изменяются скачком. Эти изменения подчинены условию

$$\frac{v_{x1}^2}{2} + h_1 = \frac{v_{x2}^2}{2} + h_2.$$

Теперь рассмотрим неподвижную ударную волну, перпендикулярную к направлению потока, т. е. рассмотрим *прямой скачок уплотнения*. В этом случае тангенциальные составляющие скорости равны нулю и, следовательно,  $v_x = v$ . Поэтому условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2, \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2, \\ \frac{v_1^2}{2} + h_1 &= \frac{v_2^2}{2} + h_2. \end{aligned}$$

Полученные условия определяют конечные изменения всех термодинамических величин при прохождении среды через ударную волну, в том числе и изменение энтропии. Это связано с диссипативными процессами, обусловленными вязкостью и теплопроводностью газа и происходящими в тех весьма тонких слоях газа, толщиной которых в этой теории пренебрегают. Итак, движение идеальной жидкости через ударную волну является необратимым течением, т.е. течением, для которого согласно второму закону термодинамики

$$s_2 > s_1.$$

Из формул следует ряд соотношений. Например, обозначая плотность потока среды через  $j = \rho v$  и учитывая его непрерывность на поверхности разрыва, получим

$$v_1 = \frac{j}{\rho_1}, \quad v_2 = \frac{j}{\rho_2},$$

а исключая скорости  $v_1$  и  $v_2$  с помощью последних равенств, найдем

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}.$$

Отсюда следует, что либо  $p_2 > p_1$  и  $\rho_2 > \rho_1$ , либо  $p_2 < p_1$  и  $\rho_2 < \rho_1$ . Однако в действительности реализуется скачок уплотнения, так как только условия  $\rho_2 > \rho_1$  и  $p_2 > p_1$  соответствуют требованию. Заметим также, что скачок уплот-

нения ввиду непрерывности потока вещества сопровождается падением скорости газа после означает также, что скорость  $u$  стационарной ударной волны по отношению к газу впереди нее ( $u_1 = -v_1$ ) и позади ( $u_2 = -v_2$ ) различна ( $u_2 > u_1$ ).

Наконец, исключая скорости  $v_1$  и  $v_2$  с помощью ряда выше указанных формул, найдем скачок энтальпии:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Это соотношение, называемое адиабатой Гюгонио (или *ударной адиабатой*), определяет зависимость между  $\rho_2$  и  $p_2$  при заданных  $\rho_1$  и  $p_1$ .

Солитон – это структурно устойчивая уединенная волна, движущаяся в нелинейной среде.

## ТЕМА 10. СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ.

Изучим картину распространения возмущений от источника, движущегося вдоль прямой со сверхзвуковой скоростью  $U_0 > a_0$  (рис. 16). Пусть, как и в первом случае, источник в момент времени  $t_{01}$  находится в точке  $M_1$  с координатой  $x_{01}$ . В момент времени  $t = t_{02} > t_{01}$  источник будет находиться в точке  $M_2$  с координатой  $x_{02} = x_{01} + U_0(t_{02} - t_{01})$ . Возмущения от источника, расположенного в момент  $t_{01}$  в точке  $M_1$ , в момент времени  $t_{02}$  достигнут поверхности сферы радиуса  $r_1 = a_0(t_{02} - t_{01})$  с центром в точке  $M_1$ . В силу того, что  $U_0 > a_0$ , путь, пройденный источником за время  $t_{02} - t_{01}$ , будет больше  $r_1$ .

Возмущения, посланные источником в моменты времени  $t_0$ , большие  $t_{01}$  и меньшие  $t_{02}$ , в момент  $t_{02}$  достигнут, очевидно, поверхностей соответствующих сфер радиусов  $r = (t_{02} - t_0)a_0$ ,  $t_{01} < t_0 < t_{02}$ , с центрами в точках  $M(x_0)$  ( $x_{01} < x_0 < x_{02}$ ) (рис. 16), и все эти возмущения будут оставаться позади источника.

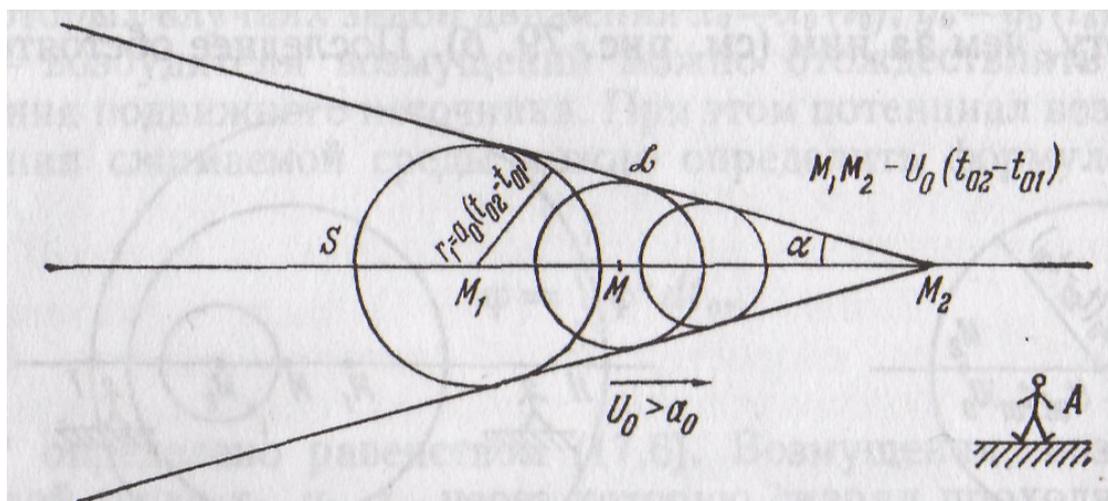


Рисунок 16. Распространение возмущений от источника, движущегося с постоянной сверхзвуковой скоростью

Таким образом, среда впереди источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью, остается невозмущенной; наблюдатель А, стоящий впереди движущегося со сверхзвуковой скоростью источника, «не знает», что к нему приближается источник возмущений; он не может слышать звуковых сигналов, посылаемых движущимся со сверхзвуковой скоростью источником. Таким образом, имеется фундаментальное различие между распространением возмущений от источников, движущихся со сверхзвуковой и дозвуковой скоростями.

### Конус и угол Маха.

Очевидно, что все возмущения от источника, начавшего двигаться с постоянной сверхзвуковой скоростью бесконечно давно, в произвольный момент времени  $t_{02}$  будут заключены внутри кругового конуса, вершина которого находится в точке  $M_2$ , а боковая поверхность является огибающей сфер радиусов  $r = (t_{02} - t_{01})a_0$ , где  $t_0 \leq t_{02}$ . Этот конус, отделяющий возмущенную область от невозмущенной, называется *конусом Маха*. Синус  $\alpha$  – половины угла раствора конуса Маха – равен обратной величине числа Маха  $M = U_0 / a_0$ . Действительно,

$$\sin \alpha = \frac{r_1}{M_1 M_2} = \frac{a_0}{U_0} = \frac{1}{M}.$$

Этот угол  $\alpha$  называется углом Маха. Заметим, что если сверхзвуковое движение источника началось, например, в момент  $t_{01}$ , то в момент  $t_{02}$  все воз-

мушения от источника будут расположены внутри области, ограниченной частью поверхности конуса Маха  $\mathfrak{S}$  и частью сферы  $S$  радиуса  $r_1 = a_0(t_{02} - t_{01})$  с центром в точке  $M_1$ .

На поверхности  $\mathfrak{S}$  конуса Маха сопрягаются два решения волнового уравнения, соответствующие состоянию покоя,  $\varphi = 0$ , и состоянию возмущенного движения,  $\varphi = \varphi(x, t, z, t)$ . Подобные поверхности сопряжения решений с различными аналитическими свойствами называются *характеристическими* поверхностями уравнений с частными производными. Характеристическая поверхность является в общем случае поверхностью разрыва возмущений; в рамках рассматриваемой теории эта поверхность будет поверхностью, на которой разрывы скорости, давления и других аналогичных параметров потока невелики. В пределе такие поверхности соответствуют *слабым* разрывам, на которых искомые функции непрерывны, но их *производные* по координатам, вообще, терпят разрыв. Очевидно, что скорость распространения характеристической поверхности (конуса Маха) по неподвижной среде, нормальная к ее поверхности, точно равна скорости звука.

### **Распространение сигналов в сверхзвуковых потоках.**

Если на течение, изображенное на рис. 16, наложить постоянное поле скоростей  $-U_0$ , то среда заполняющая все пространство, будет двигаться с постоянной сверхзвуковой скоростью  $U_0$  вдоль отрицательной оси  $x$ , а источник возмущений будет покоиться. Возмущения от источника, расположенного в точке  $M_2$ , в сверхзвуковом потоке будут сказываться только внутри поверхности конуса Маха с вершиной в точке  $M_2$ , расширяющегося вниз по потоку, а перед этим конусом Маха будет иметь место поступательное невозмущенное движение среды с постоянной скоростью  $U_0$ . Параметры движения среды в произвольной точке сверхзвукового потока могут изменяться только от возмущений, возникающих в точках, лежащих внутри поверхности конуса Маха с вершиной в рассматриваемой точке и расширяющегося вверх по потоку.

## 4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 4.1. Самостоятельная работа. Примерный вариант типового расчета

Основными задачами самостоятельной работы студентов являются:

- формирование интереса к познавательной деятельности и навыков самостоятельной работы в профессиональной сфере;
- развитие творческого мышления, способности принимать самостоятельное решение, находить выход из кризисной ситуации;
- применение теории к практике.

Самостоятельная работа студента состоит в подготовке к лекциям, практическим занятиям, коллоквиумам, академическим контрольным работам, типовых расчетов и экзаменам.

Согласно учебному плану предлагаются для самостоятельной работы некоторые, не рассматриваемые на занятиях частные вопросы, задачи, примеры, индивидуальные задания.

Далее приведен примерный вариант задач для самостоятельного решения (типового расчета):

1. В некоторой точке задан тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в этой точке на площадке с нормалью

$$\vec{n} = \frac{2e_1}{3} - \frac{2e_2}{3} + \frac{e_3}{3}.$$

2. Напряженное состояние упругого тела задано тензором:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что если объемные силы равны нулю, то условия равновесия выполняются. Вычислить вектор напряжения в точке  $P(4; -4; 7)$  на плоскости

$2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7t$  и на сфере  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81t$ . Определить главные напряжения.

3. Напряженное состояние среды задано тензором:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжений в точке  $x = 2e_1 + e_2 + \sqrt{3}e_3$  на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности  $x_2^2 + x_3^2 = 4$ .

4. Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Доказать, что любой симметричный тензор, например, тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , при переходе к другой системе координат преобразуется в тензор  $\sigma'_{ij}$ , также симметричный.

6. Доказать, что для поля скоростей  $v_1 = x_1^2x_2 + x_2^3$ ,  $v_2 = -x_1^3 - x_1x_2^2$ ,  $v_3 = 0$  линии тока будут окружностями.

7. Показать, что поле скоростей  $v_i = \frac{Ax_i}{(x_ix_j)^{\frac{3}{2}}}$  удовлетворяет уравнению не-

прерывности несжимаемой жидкости  $v_{i,i} = 0$ .

8. Дано поле скоростей несжимаемой жидкости:

$$v_1 = \frac{A(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}, \quad v_2 = \frac{A(2x_1x_2)}{r^4}, \quad v_3 = 0, \quad \text{где } r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Доказать, что оно удовлетворяет уравнению неразрывности.

9. Доказать, что поле скоростей

$$v_1 = \frac{A(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}, \quad v_2 = \frac{A(2x_1x_2)}{r^4}, \quad v_3 = 0, \quad \text{где } r^2 = x_1^2 + x_2^2 \text{ является безвихревым.}$$

10. Дано поле скоростей  $v_1 = 4x_3 - 3x_2$ ,  $v_2 = 3x_1$ ,  $v_3 = -4x_1$ . Доказать, что оно соответствует вращению абсолютно твердого тела. Найти вектор угловой скорости.

11. Доказать, что лагранжева форма  $\frac{d(\rho J)}{dt} = 0$  уравнения непрерывности и эйлера его форма  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$  эквивалентны.

12. Доказать, что в стационарном режиме  $\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0\right)$  линии тока и траектории движения частиц совпадают.

13. Течение задано полем скоростей  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = A(x_1 x_2 - x_3^2)$ ,  $v_3 = A(x_2^2 - x_1 x_3)$ . Найти тензор завихренности в точке  $P(1, 0, 3)$ .

14. Показать, что в поле скоростей

$$\begin{aligned} v_1 &= A \left[ -\sin\left(\frac{x_1}{a}\right) + \cos\left(\frac{x_1}{a}\right) \right], \\ v_2 &= A \left[ \frac{x_2}{a} + \frac{x_3}{a} \right] \sin\left(\frac{x_1}{a}\right), \\ v_3 &= A \left[ \frac{x_2}{a} + \frac{x_3}{a} \right] \cos\left(\frac{x_1}{a}\right) \end{aligned}$$

вихревые линии совпадают с линиями тока.

15. Показать, что функция  $u(\xi) = A c h^{-2} \left( \sqrt{\frac{A}{3\beta}} \frac{\xi}{2} \right)$ ,  $A = 3c$ , описывающая солитон, является решением уравнения Кортевега – де Фриза  $\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$ , где  $v(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x - ct$ .

16. Проанализировать стационарное течение вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Найти профиль скоростей и расход жидкости.

17. Вязкая жидкость стационарно вращается вокруг оси  $z$  так, что  $v_r = v_z = 0$ ,  $v_\phi = v(r)$ . Записать уравнение Навье-Стокса в цилиндрических координатах.

18. Показать, что стационарное уравнение Навье-Стокса допускает решения диффузионного типа. Получить это решение.

19. В вязкой среде вихри испытывают диффузию. Найти закон расплывания  $Z$ -проекции вектора  $\mathcal{A}$  вихря, первоначально находящегося на оси  $OZ$ .

20. Вязкая жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми  $h$ . Верхняя плоскость движется относительно нижней со скоростью  $u$  вдоль оси  $x$ , давление в жидкости постоянно. Найти профиль скорости, среднюю скорость и силу  $\tau_{||}$ , действующую на каждую из плоскостей.

#### 4.2. Перечень обязательной (основной) литературы

1. Горшкова А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Р.Л., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах., М.: Физматлит, 2004 г.
2. Горшкова А.Г., Рабинский Р.Л., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды.– М.: Наука, 2000 г.– 214с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. Т.1.– Москва-Ижевск: РХД, 2003 г.– 452с.
4. Ламб Г. Гидродинамика. Т.2.– Москва-Ижевск: РХД, 2003 г.– 482с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.– М.: Физматлит, 2003.– 736с.
6. Механика сплошных сред в задачах, под ред. М.Э. Эглит, Том 1: Теория и задачи.– М.: Московский Лицей, 1996.– 396с.
7. Механика сплошных сред в задачах, под ред. М.Э. Эглит, Том 2: Ответы и решения.– М.: Московский Лицей, 1996.– 394с.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1.– СПб.: Лань, 2004.–492с.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2.– СПб.: Лань, 2004.–568с.
10. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошных сред.– М: Физматлит, 2006 г.– 272с.
11. Циглер Ф. Механика твердых тел и жидкостей.– Москва-Ижевск: РХД, 2002 г.– 912с.
12. Черняк В.Г., Суетин П.Е. Механика сплошной среды.– М: Физматлит, 2006 г.– 352с.

#### 4.3. Перечень дополнительной литературы

1. Алешкович В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика сплошных сред. – М.: МГУ, 1998. – 92 с.

2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред.– М., Наука, 1982.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.– М.: МГУ, 1971.– 248с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкостей и газа.– М., Наука, 1987.– 840с.
5. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975.– 593с.

#### **4.4. Перечень методических пособий**

1. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Ч 1. Общее введение.– Новосибирск, 1976. – 76с.
2. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Ч 2. Классические модели механики сплошных сред.– Новосибирск, 1977. – 70с.
3. Учайкин В.В. Механика. Основы механики сплошных сред. Задачи и упражнения.– Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002 г.– 196 с.

## 5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Усвоению теории способствуют решение предлагаемых задач в рамках практических занятий, домашней работы и т.п. Ниже приводятся возможные способы их решения или указания.

### *Тема 1. Лагранжево и эйлерово описание движения сплошной среды*

**1.1** Ввести пространственную систему координат и лагранжевы координаты частиц и найти закон движения в следующих случаях:

- а) твердое тело движется поступательно со скоростью, постоянной по направлению и имеющей постоянную величину  $v$ ;
- б) твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью  $w$ .

**1.2** Для поступательных движений твердого тела указать общий вид поля скорости в лагранжевом описании и общий вид закона движения.

**1.3** Движение среды происходит по закону

$$x_1 = \xi_1 + at\xi_2, \quad x_2 = \xi_2 + bt\xi_1, \quad x_3 = \xi_3, \quad a, b = \text{const}.$$

Проверить, что числа  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  для индивидуальной частицы имеют смысл координат  $x_1, x_2, x_3$  точки пространства, в которой она находилась в момент  $t=0$ . Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом описании. Какая частица в момент  $t_0$  находится в точке пространства с координатами  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  ?

**1.4** Движение среды происходит по закону

$$x_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \quad x_2 = \xi_2 + \left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right)\xi_1, \quad x_3 = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right) \quad \tau = \text{const}.$$

а) Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом описании.

б) Где находится в момент  $t = 3\tau$  частица, которая в момент  $t = \tau$  находилась в точке пространства с координатами  $(a, b, c)$  ?

**1.5** В момент  $t$  рассматриваются функции

$$\xi_\alpha = g_\alpha(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha = 1, 2, 3$$

обратные закону движения

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Каков смысл их значений? Чему равны индивидуальные производные  $\frac{d\xi_a}{dt}$ ?

**1.6** Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом и эйлеровом описании, если движение среды происходит по закону:

а) трехосное растяжение тела  $x_1 = a(t)\xi_1, x_2 = b(t)\xi_2, x_3 = c(t)\xi_3$ ;

б) простой сдвиг  $x_1 = \xi_1 + b(t)\xi_2, x_2 = \xi_2, x_3 = \xi_3$ ;

в) однородная деформация при одновременном вращении тела с закрепленной точкой  $x_i = A_{i1}(t)\xi_1 + A_{i2}(t)\xi_2 + A_{i3}(t)\xi_3, \quad \det\|A_{ij}\| \neq 0$ .

**1.7** Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения среды, если оно происходит с полем скорости

$$v_1 = \frac{x_1}{t + \tau}, \quad v_2 = \frac{2tx_2}{t^2 + \tau^2}, \quad v_3 = \frac{3t^2x_3}{t^3 + \tau^3} \quad \tau = \text{const} > 0.$$

**1.8** Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения сплошной среды, линии тока и траектории, если поле скорости имеет вид

а)  $v_1 = \frac{Q(t)x_1}{2\pi r^2}, \quad v_2 = \frac{Q(t)x_2}{2\pi r^2}, \quad v_3 = 0, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad Q(t) > 0$ ;

б)  $v_i = \frac{Q(t)x_i}{2\pi R^3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad Q(t) > 0$ ;

в)  $v_1 = -Ax_1, \quad v_2 = Bx_2, \quad v_3 = 0, \quad A = \text{const} > 0, B = \text{const} > 0$ .

**1.9** Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения сплошной среды, если оно происходит с полем скорости

$$v_1 = -A(t)x_1, \quad v_2 = B(t)x_2, \quad v_3 = 0, \quad A(t) > 0, B(t) > 0.$$

Найти линии тока и сравнить их с линиями тока для частного случая из задачи 1.8.в). Привести пример функций  $A(t), B(t)$ , при которых линии тока и траектории частиц не совпадают.

**1.10** а) Можно ли по известным траекториям частиц среды найти закон ее движения?

б) Можно ли по известным в данный момент линиям тока найти мгновенное поле скорости?

**1.11** Найти линии тока и траектории, если движение среды происходит с полем скорости

а)  $v_1 = -\omega x_2, v_2 = \omega x_1, v_3 = u, \quad \omega, u = const;$

б)  $v_1 = -Ax_2, v_2 = Bx_1, v_3 = 0, A = const > 0, B = const > 0;$

в)  $v_1 = -V \sin \omega t, v_2 = V \cos \omega t, v_3 = 0, V, \omega = const.$

**Тема 2. Тензоры. Тензорные поверхности второго порядка и вычисление главных компонент и главных осей тензора**

**2.1** Найти поверхности напряжения в точке Р для следующих состояний напряжения:

а) всестороннее равномерное растяжение (сжатие)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

б) одноосное растяжение (сжатие)

$$\sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

в) простой сдвиг

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau, \quad \sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

г) плоское напряженное состояние

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = \tau, \quad \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0.$$

Решение. Уравнение поверхности напряжений в символической записи таково:  $\zeta \cdot \Sigma \cdot \zeta = \pm k^2$ . Используя матричную форму, получаем следующие результаты:

а) 
$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \sigma \zeta_1^2 + \sigma \zeta_2^2 + \sigma \zeta_3^2 = \pm k^2.$$

Отсюда видно, что поверхность напряжений для всестороннего равномерного растяжения является сферой  $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = \frac{\pm k^2}{\sigma}$ .

б) 
$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \sigma \zeta_1^2 = \pm k^2.$$

Поверхность напряжений для одноосного растяжения представляет собой две плоскости, перпендикулярные линии действия напряжения.

$$в) [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = 2\tau \zeta_1^2 \zeta_2^2 = \pm k^2.$$

Поверхность напряжений для плоского сдвига есть гиперболический цилиндр с образующей, параллельной оси  $\zeta_3$ .

$$г) [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \sigma \zeta_1^2 + 2\tau \zeta_1 \zeta_2 + \sigma \zeta_2^2 = \pm k^2.$$

Для плоского напряженного состояния поверхность напряжения есть цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси нулевого напряжения, и направляющей в виде кривой второго порядка.

**2.2** Показать, что для напряженного состояния, заданного тензором

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Решение. Поверхность напряжения будет эллипсоидом (эллипсоидом напряжения), если  $a, b, c$  имеют одинаковые знаки. Уравнение поверхности

напряжений имеет вид  $[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = a\zeta_1^2 + b\zeta_2^2 + c\zeta_3^2 = \pm k^2.$

Это эллипсоид  $\frac{\zeta_1^2}{bc} + \frac{\zeta_2^2}{ac} + \frac{\zeta_3^2}{ab} = \frac{\pm k^2}{abc}.$

**2.3** Тензор напряжений в точке Р в декартовых осях  $Ox_1x_2x_3$  имеет компоненты

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений, с которым будет связана система осей координат  $Ox_1^*x_2^*x_3^*.$

Решение. Главные напряжения определяются из уравнений

$$\begin{vmatrix} 3 - \sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$(\sigma + 2)(\sigma - 4)(\sigma - 1) = 0.$$

Главные напряжения являются корнями этого уравнения  $\sigma_{(1)} = -2$ ,  $\sigma_{(2)} = 1$ ,  $\sigma_{(3)} = 4$ .

Пусть ось  $x_1^*$  совпадает с осью главного напряжения  $\sigma_{(1)}$ , и пусть  $n_i^{(1)}$  — направляющие косинусы этой оси. Тогда

$$\begin{aligned} (3 + 2)n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} &= 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} &= 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} &= 0 \end{aligned}.$$

Отсюда  $n_1^{(1)} = 0$ ,  $n_2^{(1)} = -n_3^{(1)}$ , а так как  $n_i n_i = 1$ , то  $(n_2^{(1)})^2 = \frac{1}{2}$ . Поэтому

$$n_1^{(1)} = 0, \quad n_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пусть точно также ось  $x_2^*$  соответствует главному напряжению  $\sigma_{(2)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2n_1^{(2)} + n_2^{(2)} + n_3^{(2)} &= 0 \\ n_1^{(2)} - n_2^{(2)} + 2n_3^{(2)} &= 0, \\ n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - n_3^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

так что  $n_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $n_2^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $n_3^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Пусть ось  $x_3^*$  соответствует главному напряжению  $\sigma_{(3)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} -n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + n_3^{(3)} &= 0 \\ n_1^{(3)} - 4n_2^{(3)} + 2n_3^{(3)} &= 0, \\ n_1^{(3)} + 2n_2^{(3)} - 4n_3^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

так что

$$n_1^{(3)} = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad n_2^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad n_3^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

## 2.4 Разложить тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

на шаровую часть и девиатор и показать, что первый инвариант девиатора равен нулю.

Решение. Мы имеем  $\sigma_M = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{(12+9+3)}{3} = 8$ , тогда

$$\sigma_{ij} = \sigma_M \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Причем  $s_{ii} = 4 + 1 - 5 = 0$ .

**2.5** Определить главные значения девиатора напряжений для

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Девиатор напряжений имеет вид  $s_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ . Его главные

значения можно найти, приняв равным нулю определитель

$$\begin{vmatrix} 3-s & -6 & 0 \\ -6 & 3-s & 0 \\ 0 & 0 & -6-s \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом,  $s_I = 9$ ,  $s_{II} = -3$ ,  $s_{III} = -6$ . Тот же результат получится, если сначала вычислить главные значения для тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . Для него главные значения равны  $\sigma_I = 16$ ,  $\sigma_{II} = 4$ ,  $\sigma_{III} = 1$ , откуда

$$s_I = 16 - 7 = 9, s_{II} = 4 - 7 = -3, s_{III} = 1 - 7 = -6.$$

**2.6** Доказать, что любой симметричный тензор, например, тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , при переходе к любой другой системе преобразуется также в симметричный тензор  $\sigma'_{ij}$ .

Действительно, очевидно, что  $\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} = a_{jq} a_{ip} \sigma_{qp} = \sigma'_{ji}$ .

**2.7** Показать, что тензор напряжений можно разложить на шаровую часть и девиатор только единственным образом.

Решение. Предположим, что существуют два разложения

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda + s_{ij} = \delta_{ij} \lambda^* + s^*_{ij} \text{ для которых } s_{ii} = 0 \text{ и } s^*_{ii} = 0.$$

Тогда  $\sigma_{ii} = 3\lambda = 3\lambda^*$ , и, следовательно,  $\lambda = \lambda^*$ . Отсюда из  $\lambda \delta_{ij} + s_{ij} = \lambda \delta_{ij} + s^*_{ij}$  следует, что  $s_{ij} = s^*_{ij}$ .

### Тема 3. Течения идеальной жидкости

**3.1** Пусть при  $t \geq 0, x_3 \geq 0$  задано поле скоростей жидкости в описании Эйлера  $v_1 = v_2 = 0, v_3(x_3, t) = f(x_3)$ . Найти лагранжево описание этого движения, рассмотреть частный случай  $f(x_3) = \sqrt{2gx_3}$ .

Решение. Поскольку  $v_1 = v_2 = 0$ , то в координатах Лагранжа имеем зависимость только от  $\xi_3$ :  $x_3 = x_3(\xi_3, t), x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$ . Но тогда

$$v_3(\xi_3, t) = \frac{dx_3(\xi_3, t)}{dt} = f[x_3(\xi_3, t)], \text{ что дает после интегрирования (учитывая, что}$$

$$\text{при } t = 0, x_3 = \xi_3) \quad t = \int_{\xi_3}^{x_3} \frac{dx_3}{f(x_3)}. \text{ В частности, для } f(x_3) = \sqrt{2gx_3} \text{ имеем}$$

$$\sqrt{2gt} = 2(\sqrt{x_3} - \sqrt{\xi_3}). \quad \text{Отсюда находим, что}$$

$$x_3 = \xi_3 + \sqrt{2g\xi_3}t + \frac{gt^2}{2}, \quad v_3(\xi_3, t) = \sqrt{2g\xi_3} + gt, \quad a_3(\xi_3, t) = g, \text{ то есть получилось движе-}$$

ние частиц жидкости с постоянным ускорением  $g$  (движение в водопаде).

**3.2** Написать дифференциальное уравнение для определения линий тока в жидкости, скорость частиц которой в каждой точке пространства известна:  $v_i(x_k, t)$ .

Решение. Пусть линия тока задана параметрическим уравнением  $x_i = x_i(s)$ , или в векторной форме  $r = r(s)$ , где  $S$  – длина дуги вдоль линии тока. По-

скольку вектор касательной линии тока  $\frac{dr}{ds}$  параллелен вектору скорости, то

$$\frac{dr}{ds} = Cv, \quad C = const. \text{ Искомым уравнением будет: } \frac{1}{v_1} \frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{v_2} \frac{dx_2}{ds} = \frac{1}{v_3} \frac{dx_3}{ds} = C.$$

**3.3** Показать, что при стационарном течении жидкости ( $\frac{dv_i}{dt} = 0$ ), а также для течения, в котором  $v_i(x_k, t) = \alpha_i(x_k)f(t)$ , линии тока и траектории совпадают.

В общем случае траектории частиц жидкости находятся из уравнения

$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_k, t)$ , которые можно записать в виде

$$v_1^{-1}(x_k, t) \frac{dx_1}{dt} = v_2^{-1}(x_k, t) \frac{dx_2}{dt} = v_3^{-1}(x_k, t) \frac{dx_3}{dt}.$$

Линии тока находятся из уравнений

$$\boxed{v_1^{-1}(x_k, t) \frac{dx_1}{dt} = v_2^{-1}(x_k, t) \frac{dx_2}{dt} = v_3^{-1}(x_k, t) \frac{dx_3}{dt}},$$

в которых время является параметром. В стационарном случае  $v_i = v_i(x_k)$ , в результате чего обе системы становятся эквивалентными. Аналогично и во вто-

ром случае: уравнение для линий тока  $\alpha_1^{-1} \frac{dx_1}{ds} = \alpha_2^{-1} \frac{dx_2}{ds} = \alpha_3^{-1} \frac{dx_3}{ds}$  и уравнения для

траектории  $\alpha_1^{-1}(x_k) \frac{dx_1}{dt} = \alpha_2^{-1}(x_k) \frac{dx_2}{dt} = \alpha_3^{-1}(x_k) \frac{dx_3}{dt}$  совпадают.

**3.4** Сопло фонтана имеет форму усеченного конуса, сужающегося вверх. Диаметры сечений конуса: нижнего  $D=50$  мм, верхнего  $d=10$  мм, высота  $h=0,5$  м.

Определить расход воды, подаваемой фонтаном, и давление в нижнем сечении конуса, если вода бьет из фонтана на высоту  $H=8$  м, сопротивлением воздуха в струе и сопротивлением в сопле пренебречь.

Решение. Согласно теории  $H = 8 = \frac{v_2^2}{2g}$ , где  $v_2$  – скорость истечения из соп-

ла. Отсюда, зная площадь выходного сечения сопла  $f_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0.00007854 \text{ м}^2$ ,

найдем искомый расход:  $Q = v_2 f_2 = 0.984 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 0.984 \frac{\text{л}}{\text{с}}$ .

Таким образом, скорость в нижнем сечении  $v_1 = \frac{Q}{f_1} = 0.501 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , и, следова-

тельно, удельная кинетическая энергия  $\frac{v_1^2}{2g} = 0.0127 \text{ м}$ .

Запишем уравнение Бернулли:

$$h + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_{амм}}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_x}{\gamma},$$

$$\text{откуда } p_x - p_{амм} = (0.5 + 8 - 0.127)\gamma = 8.373 \cdot 10^3 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^2}.$$

Избыточное давление у корня сопла будет  $p_{изб} = 0,8373 \text{ атм.}$

**3.5** Показать, что если при вращении жидкости вокруг вертикальной оси окружная скорость частиц меняется обратно пропорционально расстоянию от оси вращения, то существует потенциал скорости; найти выражение потенциала.

Решение. Совмещаем ось вращения жидкости с осью  $Oz$ . В рассматриваемом плоском движении  $v = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где  $a$  – константа; угловая скорость при этом будет обратно пропорциональна квадрату расстояния:  $\omega = \frac{v}{r} = \frac{a}{r^2}$ .

Компонентами скорости по осям координат являются

$$v_x = v \cos(v, x) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ay}{x^2 + y^2},$$

$$v_y = v \cos(v, y) = -\frac{ax}{x^2 + y^2}$$

В данном случае соблюдаются условия

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

отвечающие потенциальному течению. Действительно,

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{a(x^2 + y^2) - 2ay^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{a(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{-a(x^2 + y^2) + 2ax^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{a(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Для потенциала скорости имеем выражение

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = v_x dx + v_y dy.$$

Отсюда с учетом полученных выше выражений имеем

$$\varphi = \int \frac{a(y dx - x dy)}{x^2 + y^2} + C.$$

И после интегрирования получим  $\varphi = -2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$ .

**3.6** Скорости частиц потока жидкости в трубе кругового сечения параллельны между собой, и их значения меняются в зависимости от расстояния по закону  $v = v_0(1 - \frac{r^2}{a^2})$ , где  $a$  – радиус трубы, а  $v_0$  – скорость осевой струйки (при  $r = 0$ ). Определить компоненты вихря.

Решение. Проекции скорости на оси координат, одну из которых (ось  $z$ ) примем совпадающей с осью потока, представляют собой

$$v_x = 0, v_y = 0, v_z = v_0 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right).$$

$$\text{Далее имеем } \Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{2v_0 y}{a^2}, \Omega_y = -\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{2v_0 x}{a^2}, \Omega_z = 0.$$

Угловая скорость будет  $\omega = \frac{1}{2}\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = \frac{v_0}{a^2}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{v_0 r}{a^2}$ ; таким образом, угловая скорость равна нулю на оси потока и возрастает пропорционально расстоянию от последней.

#### **Тема 4. Течения вязкой жидкости**

**4.1** Использовать формулу Стокса  $F_{сопр} = 3\pi\mu vd$  для определения вязкости жидкости, если шарик диаметра  $d$  падает из состояния покоя в вязкой жидкости.

Решение. Шарик сначала движется ускоренно, но после того, как его вес уравновесится силой Архимеда и силой сопротивления, движение станет равномерным, т.к. будет

$$\vec{F}_{сопр} + \vec{F}_{арх} + m\vec{g} = 0$$

$$3\pi\mu vd + \frac{1}{6}\pi d^3 \gamma_{жс} = \frac{1}{6}\pi d^3 \gamma_{ш}$$

Тогда  $\mu = \frac{\frac{1}{6}\pi d^3 (\gamma_{ш} - \gamma_{жс})}{3\pi vd}$ , или  $\mu = \frac{1}{18} d^2 (\gamma_{ш} - \gamma_{жс}) \frac{\Delta t}{\Delta s}$ , то есть вязкость  $\mu$  про-

порциональна интервалу времени  $\Delta t$ , за которое шарик опустится на расстояние  $\Delta s$ .

**4.2** Определить зависимость между весом малого шара и скоростью в восходящем потоке вязкой жидкости, если шар поддерживается потоком во взвешенном состоянии.

Решение. Из условия равновесия имеем  $3\pi\mu vd + \frac{1}{6}\pi d^3\gamma_{жс} = \frac{1}{6}\pi d^3\gamma_{ш}$ .

Следовательно,  $d^2 = 18 \frac{\mu v}{\gamma_{ш} - \gamma_{жс}}$ .

И окончательно, вес  $G = \frac{\pi d^3}{6}\gamma_{ш} = \frac{\pi}{6}\gamma_{ш} \left( 18 \frac{\mu v}{\gamma_{ш} - \gamma_{жс}} \right)^{\frac{3}{2}}$ , то есть вес шара пропорционален корню из куба скорости восходящего потока, где  $\gamma_{ш}, \gamma_{жс}$  – удельный вес материала шарика и жидкости.

### ***Тема 5. Гидродинамическое подобие при турбулентности***

**5.1** В трубопроводе происходит плавное изменение площади поперечного сечения от  $\sigma_1$  к  $\sigma_2$ . Определить, в каком из этих сечений число Рейнольдса будет большим.

Решение. Как известно, в трубах с различными диаметрами для числа Рейнольдса имеем  $R = \frac{V\rho d}{\mu}$ .

Но учтём  $\sigma = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $V = \frac{Q}{\sigma}$ ,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

Тогда для числа Рейнольдса получим формулу  $R = \frac{4Q}{\pi d\nu}$ , то есть  $R_1 = \frac{4Q}{\pi d_1\nu}$ ,  $R_2 = \frac{4Q}{\pi d_2\nu}$ . Следовательно, число Рейнольдса будет большим при меньшем диаметре, то есть при меньшем сечении трубы.

**5.2** В каком соотношении должны находиться вязкости двух потоков различных жидкостей, чтобы числа Рейнольдса и Фруда были одинаковы?

Решение. По определению число Рейнольдса  $R = \frac{V\rho d}{\mu} = \frac{Vd}{\nu}$ , число Фруда

$F = \frac{V^2}{Lg}$ . Если  $L_1, L_2$  – характерные линейные размеры потоков, то в поле тяже-

сти  $F = \frac{V_1^2}{L_1g} = \frac{V_2^2}{L_2g}$ , то есть  $V_1 = V_2 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$ .

Аналогично для числа Рейнольдса имеем:  $\frac{V_1 d_1}{\nu_1} = \frac{V_2 d_2}{\nu_2} = R$ , или  $\frac{V_1 L_1}{\nu_1} = \frac{V_2 L_2}{\nu_2} = R$ .

Тогда подставляя верхнее соотношение между скоростями, получим:

$$v_1 = v_2 \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Итак, если  $L_2 < L_1$ , то необходимо, чтобы было  $\nu_2 < \nu_1$ .

Так, например, если надо моделировать движение корабля в воде, и модель взята в масштабе  $L_2 = 0,01L_1$ , то вместо воды надо взять жидкость вязкостью в тысячу раз меньше, чем вязкость воды, так как  $\nu_2 = (0,01)^{\frac{3}{2}}\nu_1 = 0,001\nu_1$ . Но таких жидкостей пока нет, значит, выполнение этого условия возможно только при ограниченных различиях в линейных размерах модели и натуре.

## **Тема 6. Распространение звука**

**6.1** Пусть на плоскости  $z = 0$  задано распределение нормальных скоростей  $V_z|_{z=0} = V_0 \exp[i(k_x x - \omega t)]$ . Найти излучаемую при этом звуковую волну.

Решение. След на плоскости  $z = 0$  излучаемой звуковой волны должен совпадать с заданным распределением нормальной скорости, а именно

$$p = A \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)], \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2}.$$

Нормальная скорость на плоскости  $z = 0$  при этом равна

$$V_z|_{z=0} = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} = A \frac{k_z}{\omega\rho_0} \exp[i(k_x x - \omega t)].$$

Отсюда для амплитуды звуковой волны  $A$  получаем

$$A = \frac{\rho_0 \omega V_0}{k_z} = \frac{\rho_0 \omega V_0}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2}} = \frac{\rho_0 c V_0}{\cos \theta},$$

где  $\theta$  – угол, составляемый волновым вектором  $k = \{k_x, k_z\}$  с осью  $z$ .

**6.2** Плоская гармоническая волна  $p_+ = A \exp[i(kx - \omega t)]$ , распространяясь в трубе, отражается от ее конца, закрытого подвижным поршнем массой  $m$  на единицу площади. Рассчитать импеданс препятствия и коэффициент отражения.

Решение. Отраженную от поршня волну запишем в виде  $p_- = AV \exp[-i(kx + \omega t)]$ . Под действием суммарного движения поршень придет в движение со скоростью, определяемой вторым законом Ньютона,  $m \frac{dv}{dt} = p$  или для гармонических процессов  $v = \frac{p}{-i\omega m}$ . Таким образом, для импеданса поршня получаем  $Z = \frac{p}{v} = -i\omega m$ . Теперь находим коэффициент отражения

$$V = \frac{i\omega m + \rho_0 c}{i\omega m - \rho_0 c}.$$

**6.3** Найти условия, при которых две поверхностные волны при нелинейном взаимодействии друг с другом могут излучать внутреннюю или звуковую волну. Определить направление излучаемых волн.

Пусть  $k_1, k_2$  – волновые векторы поверхностных волн, а  $\omega_1, \omega_2$  – их частоты. При их взаимодействии возникнут волны комбинационных частот и волновых векторов:  $\omega = \omega_1 \pm \omega_2$  и  $k = k_1 \pm k_2$ . Частота внутренней волны должна быть существенно меньше частот поверхностных волн. Это возможно только для разностной комбинационной волны  $\omega_s = \omega_1 - \omega_2$ , при условии, что  $\omega_1 \approx \omega_2$  (также и  $k_1 \approx k_2$ ). При этом внутренняя волна будет распространяться под таким углом  $\theta_s$  с вертикалью, что  $\sin \theta_s = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{N}$ , где  $N$  – частота Вайсяля, предполагаемая постоянной.

Длина звуковой волны существенно превышает длину поверхностной волны той же частоты. Следовательно, горизонтальная проекция волнового век-

тора звуковой волны  $k_3$  должна быть малой по сравнению с  $k_1$  ( $k_3 \ll k_1$ ). Это возможно только для комбинационной волны в виде суммы  $k_3 = k_1 + k_2$  при  $k_2 \approx -k_1$  ( $\omega_2 \approx \omega_1$ ), следовательно, частота звука  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1$  равна (приближенно) удвоенной частоте поверхностных волн. Для вертикальной проекции волнового вектора звуковой волны имеем  $k_z = \sqrt{\frac{\omega_3^2}{c^2} - k_3^2}$ , где  $c$  - скорость звука.

Направление распространения звуковой волны  $\theta_3$  определяется соотношением

$$\sin \theta_3 = \frac{ck_3}{2\omega_1}.$$

### **Тема 7. Ударные волны.**

**7.1** Получить решение Римана для одномерных нелинейных акустических уравнений.

Решение. Предположим, что равновесная плотность и энтропия постоянны во всей жидкости. Тогда уравнение состояния имеет вид  $p = p(\rho)$  и

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = c^2(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

С учетом этого соотношения уравнения неразрывности и Эйлера для одномерного случая примут вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Вместо  $\rho$  введем функцию Римана

$$R(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} c(\rho) \frac{\partial \rho}{\rho}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

а также две новые функции  $f = \frac{1}{2}(R + u)$  и  $g = \frac{1}{2}(R - u)$ , для которых будем иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial g}{\partial x} = 0.$$

Эти уравнения соответствуют распространению фиксированного возмущения  $f_0$  со скоростью  $c + u$ , а  $g_0$  с другой скоростью,  $u - c$ . Но  $u = f - g$ , и, следовательно, скорость распространения возмущений  $f_0$  и  $g_0$  будет изме-

няться, так как, например,  $f_0$  при своем движении проходит через точки с разными  $g$ . Если при  $t = 0$  возмущение  $g = 0$ , то оно будет равным нулю всегда. Тогда  $R \equiv u, f \equiv u, \rho = \rho(u)$  и  $\frac{\partial u}{\partial t} + (c + u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, u = F[x - (c + u)t]$  – волна Римана, распространяющаяся в сторону положительных  $x$ . Аналогично при  $f = 0$  получаем волну Римана  $u = G[x + (c - u)t]$ , распространяющуюся в обратном направлении (если  $u < c$ ). Если возмущения  $F$  и  $G$  не перекрываются, то они распространяются независимо. Однако в общем случае они могут накладываться и взаимодействовать. После того, как возмущения разойдутся, они снова будут распространяться независимо.

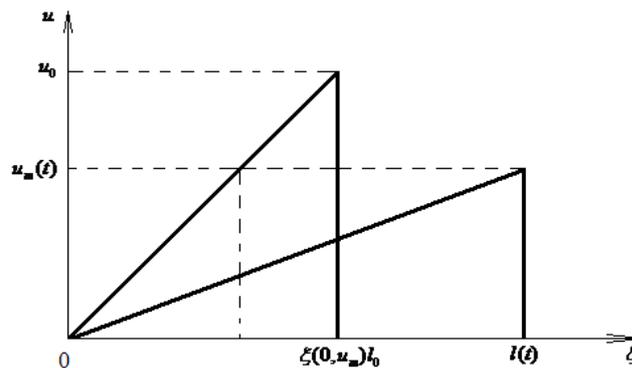
**7.2** На основе закона сохранения импульса найти изменение во времени пространственной протяженности  $l(t)$  треугольной ударной волны и ее максимальной амплитуды  $u_m(t)$ .

Решение. Предполагая, что форма возмущения остается треугольной всегда, запишем  $u(\xi, t)$  в движущейся системе координат  $\xi = x - c_0 t$ :

$$u(\xi, t) = 0, \quad \text{если } \xi < 0, \xi > l(t),$$

$$u(\xi, t) = \frac{u_m(t)\xi}{l(t)}, \quad \text{если } 0 < \xi < l(t).$$

Это возмущение при  $t = 0$  и в момент времени  $t$  изображено на рисунке.



Полный импульс волны равен

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) d\xi = \frac{l(t)}{2} u_m(t) = \frac{l_0 u_0}{2}, \quad \text{где } l_0 = l(0), u_0 = u_m(0).$$

Смещение фронта  $l(t)$ , как видно из рисунка, равно

$$l(t) = \xi(0, u_m) + u_m t = \frac{u_m}{u_0} l_0 + u_m t = \frac{l_0}{u_0} \left( 1 + \frac{u_0 t}{l_0} \right) u_m.$$

В результате получаем:

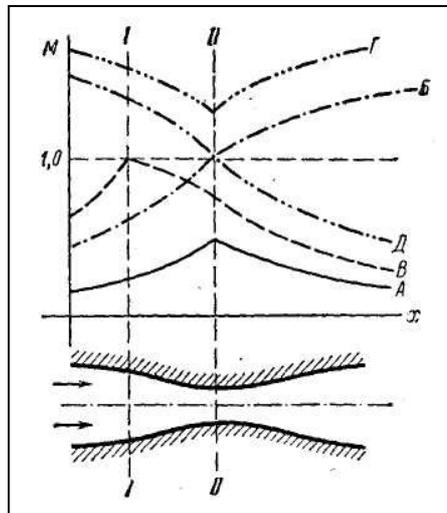
$$u_m(t) = u_0 \left( 1 + \frac{u_0 t}{l_0} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$l(t) = l_0 \left( 1 + \frac{u_0 t}{l_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Тема 8. Сверхзвуковые течения.

#### 8.1 Проанализировать течение газа в сопле Лавала.

Исключительно большой теоретический и практический интерес имеет адиабатическое установившееся течение газа в плавно сужающихся и плавно расширяющихся трубах и в так называемом сопле Лавала (рисунок). Последнее представляет собой патрубок, в котором вслед за плавным сужением (конфузор) имеет место плавное расширение поперечного сечения (диффузор). Рассмотрим изменение осредненных по поперечному сечению характеристик адиабатического установившегося потока газа в таких трубах.



Логарифмируем уравнение весового расхода  $G = W \omega \rho \leq const$ :

$$\lg G = \lg W + \lg \omega + \lg \rho \leq const$$

И дифференцируем его. Тогда

$$\frac{dW}{W} + \frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Имея ввиду, что

$$d\rho = \frac{\rho dp}{c^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{g dp}{c^2 \gamma}$$

и принимая во внимание уравнение баланса удельной энергии, можно получить

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dW}{W} + \frac{WdW}{c^2}$$

И далее, с учетом критерия Маха  $M = \frac{W}{c}$  получим:

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dW}{W} (M^2 - 1)$$

Из этого уравнения, полученного – отметим – для упрощенного случая течения газа в отсутствие трения и теплообмена, следует, что в сверхзвуковой области (при  $M > 1$ ) знаки производных  $\frac{dW}{W}, \frac{d\omega}{\omega}$  совпадают, и, следовательно, при увеличении поперечного сечения газового потока скорость газа увеличивается, а при уменьшении – снижается.

Напротив, в дозвуковой области при увеличении поперечного сечения трубы или сопла по длине скорость газа уменьшается и возрастает с уменьшением сечения.

Пусть в сужающейся части сопла Лавалья имеет место дозвуковой режим. Из сказанного выше следует, что в этой части сопла скорость газа будет возрастать, и течение газа приближаться к критическому.

Рассмотрим три возможных при этом случая:

а) Скорость потока, увеличиваясь, не достигает в наиболее узкой части сопла (сечение II) критического значения, тогда течение газа будет дозвуковым также после сужения (поскольку скорость уменьшается и соответственно уменьшается число Маха). Кривые изменения числа Маха для этого случая обозначены буквой А на рисунке.

б) Скорость газа, увеличиваясь, достигает в наиболее узкой части сопла критической величины. В этом случае дозвуковое течение газа в конфузоре перейдет в сверхзвуковое течение в диффузоре. Кривая изменения числа Маха для этого случая обозначена буквой Б на рисунке.

в) Скорость газа в конфузоре достигает критического значения ( $M=1$ ) в сечении I до подхода к наиболее узкой части сопла (сечению II). В этом случае на участке I-II конфузора дальнейшее развитие сверхзвукового течения газа не может иметь места. Действительно, если допустить переход газа через критическое состояние в сверхзвуковую область, то в этой области уменьшение сечения соответствует также уменьшению скорости, то есть течение газа из критического снова должно превратиться в дозвуковое (кривая В на рисунке).

Таким образом, переход от одного режима течения к другому может произойти только при условии наступления критического состояния в наиболее узкой части сопла.

Путем аналогичных рассуждений можно прийти к заключению, что в случае, если в конфузоре имеет место сверхзвуковое течение и в наиболее узкой части сопла будет  $M>1$ , поток будет сверхзвуковым также и в расширяющейся части сопла (кривая Г на рисунке).

И наконец, если при сверхзвуковом режиме в конфузоре сопла Лаваля скорость уменьшается до критического значения в сечении II, то в диффузоре будет иметь место дозвуковое течение; кривая изменения числа Маха для этого случая обозначена на рисунке буквой Д.

**8.2** При адиабатическом истечении воздуха из сопла Лаваля, в наиболее узкой его части давление  $p = 100 \text{ атм}$  и температура  $300^\circ \text{ К}$ , площадь поперечного сечения  $\omega = 4 \text{ см}^2$ . Определить расход при истечении, при котором дозвуковой режим в этом сечении будет переходить в сверхзвуковой.

Так как в сечении перехода к сверхзвуковому течению  $M=1$ , а  $k = 1,403$ ,  $R = 29,27 \text{ м}^2/\text{с}^2 \text{ К}$  (по справочным данным для воздуха), то согласно формуле  $c = \sqrt{k g R T}$  получим критическое значение:

$$W_* = \sqrt{1,403 \cdot 9,81 \cdot 29,27 \cdot 300} = 348 \text{ м / сек .}$$

При этом удельный вес

$$\gamma = \rho g = \frac{p}{RT},$$

то есть  $\gamma = \frac{100000}{29,27 \cdot 300} = 11,4 \text{ кГ / м}^3$ .

Отсюда весовой расход воздуха

$$G = \omega W_* \gamma = 0,0004 \cdot 348 \cdot 11,4 = 1,58 \text{ кг} / \text{сек} .$$

## 6. ВАРИАНТ ИЗ ФОНДА ТЕСТОВЫХ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Тестовые задания по проверке остаточных знаний по дисциплине  
«ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД»  
для специальностей 010501  
20 заданий

ВАРИАНТ 1

время тестирования – 80 минут

1. Механика сплошных сред изучает	1) равновесие сплошной среды 2) движение сплошной среды	3) взаимодействия сплошной среды 4) движение и равновесие сплошных сред
2. Математической базой механики сплошных сред является	1) математический анализ 2) дискретная математика	3) теория групп 4) топология
3. Гипотеза сплошной среды означает	1) дискретность среды 2) твердость среды	3) материальный континуум 4) газообразность среды
4. В методе Лагранжа используются переменные, которые обычно означают	1) декартовы координаты в начальный момент 2) любые параметры	3) координаты точек пространства 4) нумерацию частиц
5. Переменные Эйлера - это	1) любые параметры 2) координаты точек пространства	3) координаты частиц 4) нумерация частиц
6. Переход от описания Лагранжа к описанию Эйлера осуществляется	1) переобозначением переменных 2) решением дифференциальных уравнений	3) дифференцированием 4) решением уравнений относительно лагранжевых координат
7. Метод описания Эйлера называют	1) материальным 2) пространственным	3) поверхностным 4) объемным
8. Дифференциальные уравнения линий тока имеют вид	1) $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$ 2) $v_x dy = v_z dz$	3) $\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz}$ 4) $v_x dx = v_y dy = v_z dz$
9. Уравнения частиц по Эйлеру имеют вид	1) $\frac{\partial v}{\partial t}$ 2) $\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla v)$	3) $\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v$ 4) $\frac{\partial v}{\partial t} + (v \Delta) v$
10. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера имеет вид	1) $\rho_0 - \rho_1 D = 0$ 2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v = 0$	3) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ 4) $\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho v) = 0$
11. Вектор завихренности – это вектор	1) $\Omega = \operatorname{rot} v$ 2) $\Omega = \operatorname{grad} v$	3) $\Omega = \operatorname{div} v$ 4) $\Omega = 2v$
12. Дифференциальные уравнения вихревых линий имеют вид	1) $\frac{\Omega_x}{dx} = \frac{\Omega_y}{dy} = \frac{\Omega_z}{dz}$ 2) $\Omega_x dx = \Omega_y dy = \Omega_z dz$	3) $\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$ 4) $\Omega_x dz = \Omega_z dy$
13. Условие безвихревых движений - это	1) $\operatorname{div} \Omega = 0$ 2) $v = \operatorname{grad} \varphi$	3) $\operatorname{div} v = 0$ 4) $\operatorname{grad} v = 0$
14. Закон Пуазейля ламинарного течения в круглых трубах	1) $Q = 8\mu l a^4$ 2) $Q = 8\mu l v P$	3) $\Delta P = 8\mu l Q$ 4) $P_1 - P_2 = \frac{8\mu l Q}{\pi a^4}$
15. Условие несжимаемости жидкости	1) $\operatorname{div} v = \infty$ 2) $\rho = \operatorname{const}$	3) $\operatorname{grad} v = 0$ 4) $\rho = \infty$
16. Условие баротропности жидкости	1) $\operatorname{grad} P = 0$ 2) $\rho = \operatorname{const}$	3) $P = \operatorname{const}$ 4) $\rho = \rho(P)$

17. Уравнение Навье – Стокса имеет вид	1) $\nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{div} \vec{v} = 0$ 2) $\vec{F} = \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \vec{v}$	3) $\vec{a} = \vec{F} \nu - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \nu$ $\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \nu \Delta \vec{v} +$ 4) $+\frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$
18. Число Рейнольдса - это	1) $\frac{\rho d}{\nu}$ 2) $\frac{\nu P}{d}$	3) $\frac{\nu d}{\nu}$ 4) $\frac{\nu R}{\nu}$
19. Условие идеальности жидкости имеет вид	1) $\nu = 0$ 2) $\nu = \text{const}$	3) $\mu = \text{const}$ 4) $\rho = \text{const}$
20. Коэффициент Пуассона - это	1) $\frac{\Delta l}{l}$ 2) $\frac{\Delta a}{a}$	3) $\frac{\Delta \nu}{\nu} : \frac{\Delta l}{l}$ 4) $\left( -\frac{\Delta a}{a} \right) : \frac{\Delta l}{l}$

## 8. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

### АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.  
Заведующий кафедрой  
Утверждаю: \_\_\_\_\_

Кафедра: МАиМ  
Факультет: МиИ  
Курс: III  
Дисциплина: ОМСС

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 15

1. Тензор напряжений в идеальной жидкости
2. Метод Лагранжа описания движения в МСС. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера
3. Задача:  
Дано поле скоростей жидкости в виде:  $v_1 = 4x_3 - 3x_2$ ,  $v_2 = 3x_1$ ,  $v_3 = -4x_1$ .  
Определить вектор завихренности.

### АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.  
Заведующий кафедрой  
Утверждаю: \_\_\_\_\_

Кафедра: МАиМ  
Факультет: МиИ  
Курс: III  
Дисциплина: ОМСС

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Тензор деформаций
2. Течения Пуазейля в круглых трубах. Закон Пуазейля.
3. Задача:  
Поле скоростей несжимаемой жидкости имеет вид:  
$$v_1 = \frac{A(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}, v_2 = \frac{A(2x_1 x_2)}{r^4}, v_3 = 0, \text{ где } r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$
 Доказать, что оно удовлетворяет уравнению неразрывности.

## АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.  
Заведующий кафедрой  
Утверждаю: \_\_\_\_\_

Кафедра: МАиМ  
Факультет: МиИ  
Курс: III  
Дисциплина: ОмСС

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 21

1. Тензор упругих напряжений.
2. Уравнение Навье-Стокса.
3. Задача:

Течение задано полем скоростей:

$v_1 = \frac{A(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}$ ,  $v_2 = \frac{A(2x_1 x_2)}{r^4}$ ,  $v_3 = 0$ , где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Доказать, что оно безвихревое.

## АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.  
Заведующий кафедрой  
Утверждаю: \_\_\_\_\_

Кафедра: МАиМ  
Факультет: МиИ  
Курс: III  
Дисциплина: ОмСС

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 13

1. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера
2. Теоретический подход к моделированию течения вязкой жидкости. Критерий подобия.
3. Задача:

Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## **8. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ**

Лекционные и практические занятия по дисциплине «Основы механики сплошных сред» для студентов специальности 010501 «Прикладная математика и информатика» проводит доцент кафедры МАиМ Рыженко А.В.