Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. каф. МАиМ
_______Т.В. Труфанова
«__»_________2008г.

Учебно-методический комплекс дисциплины

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

для специальности
010501 – «Прикладная математика и информатика»

Составитель: Масловская А.Г.

2008

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Масловская А.Г.

Компьютерное моделирование систем. Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика» – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2008 – 103.

Учебно-методический комплекс по дисциплине содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, варианты индивидуальных заданий к практическим (лабораторным) занятиям, а также контролирующие материалы для осуществления контроля усвоения знаний учащимися.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цели и задачи курса

Дисциплина «Компьютерное моделирование систем» занимает важное место в системе прикладного математического образования. Целью преподавания дисциплины является изучение: фундаментальных основ теории моделирования, основных понятий компьютерной имитации, подходов к моделированию процессов и явлений в природе и обществе, а также освоение методов построения, классификации и анализа математических моделей проектируемых с помощью вычислительной техники систем.

По завершению курса обучаемые должны приобрести устойчивые навыки и умения, позволяющие выполнять формализацию описания исследуемой системы, необходимые математические преобразования ее модели, а также эффективно решать практические задачи моделирования процессов и явлений, анализировать характеристики проектируемых систем.

1.2 Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины студенты должны иметь четкое представление об основных классификациях математических моделей, о принципах моделирования, об основных этапах, технологиях построения модели, о возможностях программных реализаций с помощью инструментальных средств, об особенностях проведения вычислительных экспериментов. В процессе обучения студенты должны приобрести навыки решения прикладных задач с помощью сред визуального моделирования, самостоятельно осуществлять выбор методики решения и построения алгоритма той или иной задачи, давать полный анализ результатов решения и оценивать границы применимости выбранной модели.

1.3 Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины

Данный курс базируется на ранее изученных дисциплинах: «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Численные методы», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Программирование», связан с дисциплинами: «Математическое моделирование», «Математическое моделирование сплошных сред» и дает основу для реализации изученных методов в виде программных алгоритмов в ходе курсового и дипломного проектирования.

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Федеральный компонент

Дисциплина «Компьютерное моделирование систем» является дисциплиной, входящей в блок дисциплин федерального компонента для специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика» по циклу: «Факультативные дисциплины». Тематическое содержание курса государственным стандартом не ограничено.

2.2 Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
Введение. Современное состояние проблемы моделирования систем	2
Часть I. Построение моделей. Основные вопросы методологии моделирования	
1. Свойства моделей и цели моделирования. Классификация математических моделей	4
2. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Принципы, этапы и методы построения моделей	4
3. Методология моделирования и системный анализ	2
4. Математические схемы моделирования систем	3
5. Выбор структуры и параметров модели системы	3
6. Инструментальные средства моделирования систем	4
7. Планирование машинных экспериментов	4
8. Обработка и анализ результатов моделирования систем	2
9. Простейшие математические модели и основные принципы моделирования	4
Итого I семестр	**32**
Часть II. Реализация алгоритмов и анализ моделей систем	
10. Детерминированные модели	8
11. Стохастические модели. Моделирование случайных величин и случайных событий	4
12. Моделирование в условиях неопределенности. Марковские случайные процессы. Моделирование систем массового обслуживания	12

13. Моделирование с использованием имитационного подхода. Введение в теорию фракталов.	4
14. Введение в теорию перколяции	2
15.Клеточные автоматы	2
16.Вейвлеты	2
Итого II семестр	**34**

Введение. Современное состояние проблемы моделирования систем

Предмет теории моделирования. Моделирование как метод научного познания. Состояние и перспективы развития математического моделирования. Перспективы развития методов и средств моделирования систем в свете новых информационных технологий.

Тема 1. Свойства моделей и цели моделирования. Классификация математических моделей

Свойства моделей и цели моделирования. Классификация моделей систем. Материальное, идеальное, когнитивное, концептуальное и формальное моделирование. Классификационные признаки: сложность объектов моделирования, оператор модели, параметры модели, цели моделирования, методы реализации.

Тема 2. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Принципы, этапы и методы построения моделей

Этапы вычислительного эксперимента. Принципы построения математических моделей. Концептуальная и математическая постановка задачи моделирования. Методы построения вычислительного алгоритма. Реализация моделей в виде программы для ЭВМ. Проверка адекватности модели. Практическое использование построенной модели и анализ результатов моделирования.

Тема 3. Методология математического моделирования и системный анализ

Понятие системы. Примеры систем. Этапы системного анализа. Сложные системы и декомпозиция. Экспертные оценки.

Тема 4. Выбор структуры и параметров модели

Статические и динамические модели. Примеры. Дискретные и непрерывные модели. Примеры. Модели состояния динамических систем. Стохастические модели. Нечеткие модели.

Тема 5. Математические схемы моделирования систем

Математические схемы моделирования систем: основные подходы к построению моделей; непрерывно-де терминированные модели; дискретно детерминированные модели; дискретно-стохастические модели; непрерывно-стохастические модели; сетевые модели; комбинированные модели.

Тема 6. Инструментальные средства моделирования систем

Основы систематизации языков имитационного моделирования, сравнительный анализ языков имитационного моделирования; ППП моделирования систем; базы данных моделирования систем; гибридные моделирующие комплексы

Тема 7. Планирование машинных экспериментов

Методы теории планирования экспериментов; стратегическое и тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем

Тема 8. Обработка и анализ результатов моделирования

Особенности фиксации и статистической обработки результатов моделирования систем на ЭВМ; анализ и интерпретация результатов машинного моделирования; обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем.

Тема 9. Простейшие математические модели и основные принципы математического моделирования

Фундаментальные законы природы. Законы сохранения энергии, материи, импульса. Вариационные принципы. Принцип Ферми. Применение аналогий при построении моделей. Модель Мальтуса. Иерархический подход к получению моделей. Модель многоступенчатой ракеты. Нелинейность математических моделей. Модель Ферхюльста.

Тема 10. Детерминированные модели.

Примеры статических и динамических моделей, реализуемых: уравнениями линейных и нелинейных уравнений и их систем, решение задач обработки экспериментальных данных, реализация моделей, описываемых ОДУ (задачами Коши и краевыми задачами), а также уравнениями в частных производных. Примеры физических, экономических, социальных систем.

Тема 11. Стохастические модели. Моделирование случайных величин и случайных событий

Генераторы псевдослучайных чисел. Машинная генерация псевдослучайных последовательностей; проверка и улучшение качества последовательностей; моделирование случайных воздействий. Организация случайных блужданий. Методы Монте-Карло для решения различных задач. Модель броуновского движения.

Тема 12. Моделирование в условиях неопределенности. Марковские случайные процессы. Моделирование систем массового обслуживания

Марковские случайные процессы. Понятие о марковском процессе. Потоки событий. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний. Моделирование систем массового обслуживания. Задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания. Схема гибели и размножения. Формула Литтла. Моделирование систем массового обслуживания. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. n-Канальная СМО с отказами (задача Эрланга). Одноканальная СМО с неограниченной очередью. n-Канальная СМО с неограниченной очередью. Одноканальная СМО с ограниченной очередью.

Тема 13. Моделирование с использованием имитационного подхода. Введение в теорию фракталов.

Фракталы. Фракталы в математике. Размерности. Фракталы в природе.

Тема 14. Введение в теорию перколяции

Основы теории перколяции. Терминология, примеры. Модель диэлектрического пробоя.

Тема 15. Клеточные автоматы

Автомат. Клеточный автомат. Клеточное пространство. Игра-клеточный автомат «жизнь». Простейшие активные элементы. КА «нейронная сеть». КА для биологических ситем.

Тема 16. Вейвлеты

Вейвлеты. Вейвлет-анализ временных колебаний.

2.3 Лабораторные занятия, их содержание и объем в часах.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Основные приемы работы с пакетом Matlab. Графика в Matlab. Конструирование графического интерфейса пользователя.	2
2. Статические модели. Обработка экспериментальных данных	2
3. Динамические модели, описываемые ОДУ (задачами Коши и краевыми задачами)	2
4. Динамические модели, описываемые уравнениями в частных производных. Моделирование в PDE tool Matlab	2
5. Оптимизационные модели. Решение прикладных задач с помощью Optimization toolbox Matlab.	2
6. Моделирование в системе SIMULINK	6
Итого I семестр	16
7. Моделирование физических процессов в Matlab	4
8. Случайные процессы	2
9. Модели простейших фракталов	4
10. Марковские процессы и системы массового обслуживания	4
11. Представление индивидуальных зачетных работ	3
Итого II семестр	17

При выполнении лабораторных работ по данному курсу студенты должны продемонстрировать умение решать прикладные задачи, как с использованием возможностей математических прикладных программ, так и создавая собственные алгоритмы разработанных математических моделей. При прохождении практикума на ЭВМ рекомендован ППП Matlab 8.0.

Лабораторная работа выполняется строго в соответствии с выданным преподавателем заданием и вариантом. Завершающим этапом выполнения лабораторной работы является оформление отчета. Отчет содержит: титульный лист, лист задания, раздел, содержащий теоретические основы соответствующего раздела курса, включая расчетные формулы основного метода и расчет погрешности метода, раздел, содержащий описание программной реализации: листинг программного блока (описание интерфейса программы можно вынести в приложение), раздел, содержащий описание результатов, полученных с использованием возможностей ППП, список использованной литературы.

2.4Самостоятельная работа студентов (69 часов).

В качестве самостоятельной работы по дисциплине «Компьютерное моделирование систем» студентам предлагается выполнить индивидуальную зачетную работу. Индивидуальной зачетной работой является расширенный вариант лабораторной работы по индивидуальной теме, предложенной преподавателем. Данная работа должная содержать математическую модель, ее теоретическое обоснование, алгоритм решения и программную реализацию в ППП Matlab (собственный программный блок и/или использование встроенных функций пакета), обязательным элементом является графический интерфейс пользователя. Работа должна отвечать требованиям, предъявляемым к оформлению курсовых работ, и содержать разделы 1-4, описанные ниже. Предложенная тематика может быть заменена на другую или модифицирована по согласованию с преподавателем.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЗАЧЕТНЫХ РАБОТ

Оформлять работу следует четко и аккуратно, придерживаясь основных правил оформления отчетных работ:

1. Титульный лист (содержит: наименование вуза, кафедра, ФИО исполнителя, №группы, курс, дисциплина, тема лаб. работы, вариант, выполнил, проверил и т. д.), содержание, введение.

Основная часть.

2. Лист задания (содержит предложенное задание). Раздел, содержащий теоретические основы соответствующего раздела курса (включая подробный алгоритм основного метода).

3. Раздел, содержащий описание программной реализации. Листинг программного блока и описание интерфейса программы (если таковой имеется) можно вынести в приложение. Предлагаемый ППП – Matlab.

4. Заключение, список использованной литературы.

2.5Вопросы к зачету

ЧАСТЬ 1 ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Введение. Предмет теории моделирования. Состояние и перспективы развития математического моделирования.
2. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Этапы вычислительного эксперимента. Пример.
3. Выбор модели. Классификация математических моделей. Примеры.
4. Принципы построения математических моделей. Методы построения вычислительного алгоритма
5. Методология математического моделирования и системный анализ. Понятие системы. Примеры систем.
6. Методология математического моделирования и системный анализ. Этапы системного анализа. Сложные системы и декомпозиция. Пример.
7. Методология математического моделирования и системный анализ. Экспертные оценки. Пример.
8. Выбор структуры математической модели. Классификация моделей систем.

9. Статические и динамические модели. Примеры.
10. Дискретные и непрерывные модели. Примеры.
11. Модели состояния динамических систем. Стохастические модели
12. Простейшие математические модели и основные понятия математического моделирования. Модели, основанные на фундаментальных законах природы. Закон сохранения энергии. Закон сохранения импульса. Примеры.
13. Простейшие математические модели и основные понятия математического моделирования. Модели, основанные на фундаментальных законах природы. Закон сохранения материи. Пример. (Модель радиоактивного распада)
14. Простейшие математические модели и основные понятия математического моделирования. Модели, основанные на вариационных принципах. Пример. (Модели, демонстрирующие законы геометрической оптики)
15. Простейшие математические модели и основные понятия математического моделирования. Применение аналогий при построении моделей. Пример. (Модель Мальтуса)
16. Простейшие математические модели и основные понятия математического моделирования. Иерархический подход к получению моделей. Пример. (Модель многоступенчатой ракеты)
17. Простейшие математические модели и основные понятия математического моделирования. Принцип нелинейности при построении математических моделей. Пример. (Логистическая кривая)
18. Математические схемы моделирования систем
19. Инструментальные средства моделирования систем
20. Планирование машинных экспериментов
21. Обработка и анализ результатов моделирования

ЧАСТЬ 2 РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1. Статические модели. Примеры моделей, описываемых алгебраическими уравнениями и системами уравнений. Методы реализации моделей (численные и аналитические). Решение уравнений и систем в Matlab. Примеры.
2. Статические модели. Примеры моделей, требующих решение задач аппроксимации. Интерполяция и экстраполяция. Обработка экспериментальных данных. Методы реализации моделей (Интерполяционные формулы и метод наименьших квадратов). Решение задач аппроксимации в пакете Matlab.
3. Динамические модели. Примеры моделей, реализуемые задачами Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (пример 1 –ОДУ (уравнения колебаний, радиоактивный распад, остывание нагретых тел, равновесная цена и др.), пример 2 – система ОДУ(модель развития эпидемии, модель Лотки-Вольтерра, модель Дуффинга и др.)). Численные схемы реализации начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Реализация в ППП Matlab.
4. Примеры моделей, описываемых краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Возможности решения задач в Matlab.
5. Примеры математических моделей, реализуемых уравнениями в частных производных эллиптического типа. Классификация задач. Начальные и граничные условия. Методы решения. Реализация в ППП Matlab.
6. Примеры математических моделей, реализуемых уравнениями в частных производных параболического типа. Классификация задач. Начальные и граничные условия. Методы решения. Реализация в ППП Matlab.
7. Примеры математических моделей, реализуемых уравнениями в частных производных гиперболического типа. Классификация задач. Начальные и граничные условия. Методы решения. Реализация в ППП Matlab.

8. Моделирование случайных величин и случайных событий. Метод Монте-Карло. Пример приложения метода Монте-Карло. Пример реализации модели броуновского движения в Matlab.
9. Марковские случайные процессы. Понятие о марковском процессе. Потоки событий. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний.
10. Моделирование систем массового обслуживания. Задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания. Схема гибели и размножения. Формула Литтла.
11. Моделирование систем массового обслуживания. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. n-Канальная СМО с отказами (задача Эрланга). Одноканальная СМО с неограниченной очередью. n-Канальная СМО с неограниченной очередью. Одноканальная СМО с ограниченной очередью.
12. Фракталы. Фракталы в математике. Размерности. Фракталы в природе.
13. Введение в теорию перколяции. Терминология, примеры.
14. Модели и алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях и графах. Модели маршрутизации.
15. Оптимизационные модели. Примеры задач линейного программирования. Реализация в ППП Matlab.
16. Вейвлеты
17. Клеточные автоматы.

2.6Виды контроля

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения лабораторных занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки отчетов по лабораторным работам и индивидуальным заданиям. Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде анализа итоговых отчетов на аттестационные вопросы. Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде зачета.

2.7Требования к знаниям студентов, предъявляемые на зачете

Зачет сдается в конце семестра. Форма сдачи зачета – устная. Необходимым условием допуска на зачет является сдача всех лабораторных работ и индивидуальной зачетной работы. В предлагаемый билет входят два вопроса: основной и дополнительный. Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос, и краткий – на дополнительный. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале, краткий ответ – основных теоретических моментов: понятий и терминологии. При выполнении указанных требований ставится отметка «зачтено».

3 КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

ВВЕДЕНИЕ. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

Предмет моделирования систем. Основные понятия моделирования

Развитие научного познания в современном обществе сопряжено с использованием средств и методик математического моделирования. ***Сущность*** ММ состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютере вычислительно-логических алгоритмов. Такой метод познания, конструирования и проектирования сочетает в себе многие ***достоинства*** как ***теории***, так и ***эксперимента***. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в воображаемых ситуациях. Современные программные средства позволяют достаточно полно изучать объекты, что недоступно чисто теоретическим подходам. Поэтому методология ММ бурно развивается, охватывая все новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Моделирование является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемым для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности. Существующие и проектируемые системы можно эффективно исследовать с помощью математических моделей, реализуемых на современных ЭВМ, которые в этом случае выступают в качестве инструмента экспериментатора с моделью системы.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам; такие логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами, модель – это заместитель реального объекта, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием. Теория замещения оригиналов моделями и исследования их свойств называется теорией моделирования.

Обобщенно моделирование можно определить как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект-оригинал находится в некотором соответствии с другим объектом-моделью, причем модель способна в том или ином отношении замещать оригинал на определенных стадиях познавательного процесса. Стадии познания, на которых происходит такая замена, а также формы соответствия модели и оригинала могут быть различными:

1. моделирование как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешней среды, о происходящих в ней явлениях, в результате чего в сознании появляются образы, соответствующие изучаемым объектам;
2. моделирование, заключающееся в построении некоторой системы-модели (второй системы), связанной определенными соотношениями подобия с системой-оригиналом (первой системы), причем в этом случае отображение одной системы в другую является средством выявления зависимостей между двумя системами, отраженными в соотношениях подобия, а не результатом непосредственного изучения поступающей информации.

ТЕМА 1. СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ И ЦЕЛИ МОДЕЛИРОВАНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Место моделирования среди методов познания

Безусловно, моделирование является далеко не единственным методом изучения окружающего мира. Существует целая область знания, которая специально занимается изучением методов познания и которую принято именовать *методологией.* Методология дословно означает «учение о методах» (ибо происходит этот термин от двух греческих слов: metodos - метод, путь к чему-либо и logos - учение). Изучая закономерности человеческой познавательной деятельности, методология вырабатывает на этой основе методы ее осуществления. Важнейшей задачей методологии является изучение происхождения, сущности, эффективности и других характеристик методов познания.

Методы научного познания принято подразделять по степени их общности, т.е. по широте применимости в процессе научного исследования на всеобщие, общенаучные и частнонаучные.

1.2 Определение модели

Научное познание сосредоточено на изучении предметов, явлений и процессов, существующих вне нашего сознания и называемых *объектами исследования* (от лат. objectum - предмет).

Под ***моделью*** (от лат. modulus - мера, образец, норма) понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.

1.3 Свойства моделей

При построении модели исследователь всегда исходит из поставленных *целей,* учитывает только наиболее существенные для их достижения факторы. Поэтому любая модель нетождественна объекту-оригиналу и, следовательно, *неполна,* поскольку при ее построении исследователь учитывал лишь важнейшие с его точки зрения факторы. Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель *адекватна* (от лат. adaequatus - приравненный) объекту. При этом адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Учитывая заложенную при создании неполноту модели, можно утверждать, что идеально адекватная модель принципиально невозможна.

В качестве одной из характеристик модели может выступать *простота* (или *сложность) модели.* В качестве еще одного свойства модели можно рассматривать *потенциальность модели* (от лат. potentia - мощь, сила), или предсказательность с позиций возможности получения новых знаний об исследуемом объекте.

1.4 Цели моделирования

Итак, модель нужна для того, чтобы:

1)понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;

2)научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях

3) прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

1.5. Классификация моделей

Как было отмечено ранее, моделирование относится к общенаучным методам познания. Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования приводит к делению (условному) моделей на материальные и идеальные.

Материальное моделирование

Основными разновидностями материального моделирования являются натурное и аналоговое. При этом оба вида моделирования основаны на свойствах геометрического или физического подобия.

Идеальное моделирование

Идеальное моделирование разделяют на два основных типа: интуитивное и научное.

Когнитивные, концептуальные и формальные модели

1.6. Классификационные признаки

Бурное развитие методов математического моделирования и многообразие областей их использования привело к появлению огромного количества моделей самого разного типа. В связи с этим возникает необходимость в определенном упорядочивании, классификации существующих и появляющихся математических моделей. Учитывая большое число возможных классификационных признаков и субъективность их выбора, появление все новых классов моделей, следует отметить условность и незавершенность рассматриваемой ниже классификации. Представляется возможным подразделить математические модели на различные классы в зависимости от:

- сложности объекта моделирования;
- оператора модели (подмодели);
- входных и выходных параметров;
- способа исследования модели;
- цели моделирования.
- по факту неопределенности.
- по степени абстрагирования от оригинала.

ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ. ПРИНЦИПЫ, ЭТАПЫ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

2.1 Этапы вычислительного эксперимента

Процесс создания математических моделей трудоемок, длителен и связан с использованием труда различных специалистов достаточно высокого уровня, обладающих хорошей подготовкой как в предметной области, связанной с объектом моделирования, так и в области прикладной математики, современных численных методов, программирования, знающих возможности и особенности современной вычислительной техники. Отличительной особенностью математических моделей, создаваемых в настоящее время, является их комплексность, связанная со сложностью моделируемых объектов. Например, при моделировании процессов деформирования различных конструкций под действием приложенной нагрузки приходится учитывать не только происходящие при деформировании процессы массопереноса, но и теплоперенос, а также связанные с этими процессами изменения структуры и свойств материала.

Необходимость массового построения моделей требует разработки некоторой совокупности правил и подходов, которые позволили бы снизить затраты на разработку моделей и уменьшить вероятность появления трудно устранимых впоследствии ошибок. Подобную совокупность правил можно было бы назвать *технологией создания математических моделей.*

Постановка задачи о ММ какого-либо объекта порождает реализацию следующих этапов.

На этапе 1 выбирается объект исследования, формулируются предмет и цели исследования. Изучаемые объекты могут быть совершенно различными по своей природе.

Для изучения различных явлений необходимо провести их формальное описание, т.е. создать соответствующую физическую модель. На этапе 2 создается и описывается «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме его важнейшие свойства – законы, которым он подчиняется; связи, присущие составляющим его частям и т.д. Построение физической модели начинается с выявления существенных факторов и опускания второстепенных

На этапе 3 физическая модель исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важнейшие предварительные знания об объекте. Информация о свойствах структурных и функциональных элементов исследуемого объекта может носить как теоретический, так и эмпирический характер. Т.о. этап 3 является этапом определения и формирования реальных свойств изучаемой среды.

Этап 4. На этапе проектирования математической модели выражают в математической форме основные закономерности, которым подчинятся данный объект.

5 этап – выбор (разработка) алгоритма реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно провести чтобы удовлетворить заданной точности.

На 6 этапе создаются программы, переводящие модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К программам также предъявляются требования экономичности и адаптивности.

7 этап. ММ представляет собой циклический процесс и носит итерационный характер. На каждой итерации завершающего этапа проводится анализ результатов, сопоставление их с теоретическими прогнозами и данными практики. Становится ясно, насколько удачно выбраны физическая, математическая модели и вычислительный алгоритм.

2.2. Обследование объекта моделирования

Этап обследования проводится членами рабочей группы под руководством постановщиков задач и включает следующие работы:

❖ тщательное обследование собственно объекта моделирования с целью выявления основных факторов, механизмов, влияющих на его поведение, определения соответствующих параметров, позволяющих описывать моделируемый объект;

- сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах-аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов;
- аналитический обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту);
- анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

2.3. Концептуальная постановка задачи моделирования

Концептуальная постановка задачи моделирования *– это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии, экономики и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.*

2.5. Математическая постановка задачи моделирования

Математическая постановка задачи моделирования — это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Совокупность математических соотношений указанных двух классов определяет оператор модели.

Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач для систем ОДУ или ДУЧП:

- *задача Коши, или задача с начальными условиями,*
- *начально-граничная, или краевая, задача*
- *задачи на собственные значения,*

Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок:

- *Контроль размерностей,*
- *Контроль порядков,*
- *Контроль характера зависимостей*
- *Контроль экстремальных ситуаций*
- *Контроль граничных условий*
- *Контроль физического смысла*
- *Контроль математической замкнутости*

2.6 Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

Для решения математических задач используются следующие основные ***группы методов***: аналитические, графические и численные.

2.7 Принципы построения математических моделей

Степень детализации ММ и форма ее представления зависят от цели исследования. Изучение и формализация экспериментального материала – это не единственный способ создания ММ. ММ, описывающие частные процессы могут быть получены из общей ММ, которая разработана на общих подходах построения. Говорят, что выделяют реальное движение из множества допустимых. При этом под движением понимается всякое изменение системы, либо всякое взаимодействие математических объектов. В разных областях знаний принципы отбора реальных движений тоже разные и зависят от принципов организации материи.

2.8 Реализация ММ в виде программы для ЭВМ

Процесс создания программного обеспечения можно разбить на ряд этапов:

- составление технического задания на разработку пакета программ программного обеспечения;
- проектирование структуры программного комплекса;
- кодирование алгоритма;
- тестирование и отладка;
- сопровождение и эксплуатация.

Техническое задание на разработку программного обеспечения оформляют в виде *спецификации.* Примерная форма спецификации включает следующие семь разделов.

2.9. Адекватность математической модели

Под *адекватностью* математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи.

2.10. Практическое использование и анализ результатов моделирования

Дескриптивные модели, рассмотренные выше, предназначены для описания исследуемых параметров некоторого явления или процесса, а также для изучения закономерностей изменения этих параметров. Эти модели могут использоваться:

- для изучения свойств и особенностей поведения исследуемого объекта при различных сочетаниях исходных данных и разных режимах;
- как моделирующие блоки в различных САПР и автоматизированных системах управления (АСУ);
- при построении оптимизационных моделей и моделей-имитаторов сложных систем и комплексов.

Работая с моделью, разработчики становятся специалистами в области, связанной с объектом моделирования. Они достаточно хорошо представляют свойства объекта, могут предсказать и объяснить его поведение. Поэтому всесторонний анализ результатов моделирования позволяет:

- выполнить модификацию рассматриваемого объекта, найти его оптимальные характеристики или, по крайней мере, лучшим образом учесть его поведение и свойства;
- обозначить область применения модели, что особенно важно в случае использования моделей для систем автоматического управления;
- проверить обоснованность гипотез, принятых на этапе

математической постановки, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сохранении требуемой точности;

- показать, в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.

ТЕМА 3. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

3.1 Понятие системы. Примеры систем

Базовым понятием математического моделирования является понятие *системы*. Система в широком смысле — эквивалент понятия математической модели и задается парой множеств U, Y (U — множество входов, Y — множество выходов) и отношением * на $U \times Y$**,** формализующим связь (зависимость) между входами и выходами.

Атрибуты (свойства), присущие нашему интуитивному представлению о системе: целостность и структурированность.

Система – совокупность взаимосвязанных элементов (объектов, отношений), представляющих единое целое. Свойства системы могут отсутствовать у составляющих ее элементов.

Система называется *функциональной* (определенной), если каждой входной функции $u(t)$ соответствует единственная выходная функция $y(t)$. Важным свойством, присущим реальным системам, является *причинность*. Числовые величины, связанные с системой, делятся на *переменные* и *параметры*.

3.2 Этапы системного анализа

Системный анализ в широком смысле – это методология (совокупность методических приемов) постановки и решения задач построения и исследования систем, тесно связанная с математическим моделированием. В более узком смысле системный анализ — методология формализации сложных (трудно формализуемых, плохо структурированных) задач.

В системном анализе выработана определенная последовательность действий (этапов) при постановке и решении задач, которую будем называть алгоритмом (методикой) системного анализа (рис.). Эта методика помогает более осмысленно и грамотно ставить и решать прикладные задачи.

3.3. Сложные системы и декомпозиция

Основные особенности:

1) наличие большого числа разнородных элементов (подсистем);

2) сложный характер, неоднородность связей между подсистемами;

3) сложность функций, выполняемых системой;

4) наличие неопределенности в описании системы;

5) сложность определения (организации) требуемого управляющего воздействия на систему и т. д.

Введение этого термина оправдано, если решить задачу в исходном виде не удается. В этом случае она разбивается на несколько вспомогательных подзадач, решаемых по отдельности. Такой прием называется *декомпозицией* и является основным методом исследования сложных систем.

При декомпозиции исходная система делится на подсистемы, а цель — на подцели. Далее для решения каждой подзадачи пользуются той же методикой, что и для всей системы. Если в ходе решения (а возможно, и до того) какие-то из подзадач окажутся слишком сложными, то снова проводится декомпозиция: возникают подзадачи следующего уровня и т. д

3.4. Экспертные оценки

На начальных этапах, связанных с формализацией и предварительной алгоритмизацией решаемой задачи, исследователю, как правило, приходится иметь дело с неточной, неполной и субъективной информацией. Поэтому важно уметь пользоваться существующими методами ее сбора, согласования и обработки. Наиболее развитыми из подобных методов на сегодня оказались методы экспертных оценок.

Технико-экономические задачи, в которых использование экспертных оценок дает определенную практическую пользу:

- ✓ Выбор целей исследования.
- ✓ Выбор и построение критериев в задачах векторной оптимизации.
- ✓ Принятие решений при управлении производством и выбор наилучшего варианта решения любой достаточно сложной проблемы в условиях неопределенности.

- ✓ Задачи идентификации, начиная от выбора структуры модели и определяющих факторов и кончая приближенным построением зависимостей и их интерпретацией.
- ✓ Построение эвристических алгоритмов управления.
- ✓ Эргонометрические исследования.
- ✓ Оценка качества продукции.
- ✓ Системы обучения, основанные на построении различного вида сценариев и целенаправленном использовании результатов опроса.
- ✓ Планирование производства, НИР и ОКР.
- ✓ Классификация однотипных объектов по степени выраженности тех или иных характерных свойств.
- ✓ Прогнозирование научно-технического прогресса.

Существует большое количество методов сбора и последующей обработки субъективной информации, которой располагают опытные специалисты, выбранные в качестве экспертов. Классификация методов получения экспертных оценок показана на рис.

4 ВЫБОР СТРУКТУРЫ И ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

4.1 Классификация ММ систем

Этап построения ММ системы разбивается на две части: выбор структуры и выбор параметров. Структура сложной системы определяется типами моделей каждой ее подсистемы и характером связей (отношений) между ними. Все многообразие имеющихся типов ММ можно классифицировать по нескольким основным признакам: статические – динамические; дискретные – непрерывные; детерминированные – стохастические – нечеткие; сосредоточенные – распределенные; стационарные – нестационарные; линейные – нелинейные и т. д.

4.1.1 Статические и динамические модели

Математическая модель системы называется *статической*, если значение выхода $y(t)$ зависит от значения входа $u(t)$ только в тот же момент времени t.

В *динамических* моделях значение $y(t)$ может зависеть от всего прошлого (предыстории) входного процесса.

Динамические модели позволяют учесть наличие «памяти», инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы.

4.1.2 Дискретные и непрерывные модели

Система может быть дискретной или непрерывной по входам, по выходам и по времени в зависимости от того, дискретными или непрерывными являются множества V, Y, T соответственно.

Как правило, дискретность множества U влечет за собой дискретность Y. Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временем. Поэтому классификация детерминированных систем по признакам «статические — динамические», «дискретные — непрерывные» включает шесть основных групп, представленных в табл. 1, где для каждой группы указан математический аппарат описания систем, методы численного анализа и оценки их параметров, методы синтеза (оптимизации), а также типичные области применения.

Пример 1. Рассмотрим работу турникета на входе в метро (Пример статической модели, дискретной по входу и выходу).

Пример 2. Детальное устройство самого турникета. Пример динамической модели, с дискретными входами, выходами и временем.

Пример 3. Рассмотрим экологическую систему, состоящую из двух взаимодействующих популяций, существующих на некоторой территории. Модель Лотки — Вольтера. Пример динамической модели с непрерывными входами, выходами и временем.

4.2 Модели состояния динамических систем

Важнейшую роль при описании динамических систем играет понятие состояния. Состояние – это совокупность величин (вектор) $x = (x_1, x_2 ... x_n)$, которые определяют (вместе с входным воздействием) будущее поведение системы. В общем случае уравнения состояния – это системы дифференциальных или разностных уравнений первого порядка вместе с уравнениями для выходных величин. Начальное состояние представляет «память» системы о прошлом.

4.3 Стохастические модели

Модели систем, о которых мы говорили до сих пор, были детерминированными (определенными), т. е. задание входного воздействия определяло выход системы однозначно. Однако на практике так бывает редко: описанию реальных систем обычно присуща неопределенность.

Среди различных способов уточнения и формализации неопределенности наибольшее распространение получил стохастический (вероятностный) подход, при котором неопределенные величины считаются случайными. Развитый понятийный и вычислительный аппарат теории вероятностей и математической статистики позволяет дать конкретные рекомендации по выбору структуры системы и оценке ее параметров.

Классификация стохастических моделей систем и методов их исследования представлена в табл. 2. Выводы и рекомендации основаны на эффекте усреднения: случайные отклонения результатов измерений некоторой величины от ее ожидаемого значения при суммировании взаимно уничтожаются, и среднее арифметическое большого числа измерений оказывается близким к ожидаемому значению. Математические формулировки этого эффекта даются законом больших чисел и центральной предельной теоремой.

4.4. Нечеткие модели

4.4.1 Нечеткие множества и лингвистические переменные

Определение. *Нечетким подмножеством A* множества *X* назовем пару (X,μ_A), где $\mu_A : X \to [0,1]$ функция, каждое значение которой $\mu_A \in [0,1]$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ множеству *A*. Функция μ_A называется *функцией принадлежности* множества *A*.

Пример 1.

Пример 2.

Пример 3.

4.4.2. Нечеткие системы

Определение. *Нечеткое отношение R* на множествах *X, Y* задается функцией $\mu_R : X \times Y \to [0,1]$, каждое значение которой $\mu_R(x,y)$ интерпретируется как степень нахождения (совместимости, принадлежности) пары (*x, y*) в данном отношении.

В полной аналогии с обычными системами *нечеткая система* – это нечеткое отношение между множествами *U*, *Y*, где *U* – множество входных функций времени: $U(t) : T \to U$, а *Y* – множество выходных функций времени $y(\bullet) : T \to Y$. Операция композиции отношений соответствует последовательному соединению систем. Подчеркнем, что для нечетких систем понятие однозначности, детерминированности теряет смысл: нечеткое отображение и нечеткое отношение неразличимы.

Пример 4.

4.5. Принципы выбора модели

4.6. Выбор параметров ММ системы. Предварительные преобразования

Итак, мы выбрали структуру ММ системы, т. е. выбрали ММ с точностью до конечного набора числовых параметров. Как говорят, «модель параметризована». Что же дальше? Значения параметров лишь в редких случаях удается подобрать исходя только из теории или из априорных соображений. Как правило, оценка параметров ММ проводится по результатам наблюдений за реальным процессом или явлением в ходе нормального функционирования либо во время специальных экспериментов, Более того, без сопоставления результатов наблюдений за реальной системой и за ее ММ нет гарантий правильного выбора структуры ММ. Поэтому на этапе выбора параметров происходит уточнение и окончательный выбор структуры ММ, желательно из нескольких конкурирующих вариантов.

Задачи выбора параметров ММ (называемые также задачами идентификации) приходится решать для различных типов ММ: статических и динамических, дискретных и непрерывных, линейных и нелинейных и т. д. Однако во многих случаях имеющиеся результаты наблюдений и структуру ММ удается преобразовать к стандартной форме, позволяющей применять унифицированные методы идентификации. Такой формой является линейная по параметрам модель.

4.6.1 Преобразование статических моделей.

Рекомендуется перед оцениванием параметров ММ проводить преобразование нормировки (масштабирование и центрирование) переменных, приводящее диапазоны изменения переменных к стандартному значению. Обычно выбирают параметры так, чтобы нормированные переменные лежали в диапазоне [–1, 1].

Для преобразования статических ММ чаще всего используют один из следующих видов: линейная ММ, Полиноминальная ММ, Квадратичная многофакторная ММ, Мультипликативная (степенная) ММ, Неявная ММ.

Пример 1.

Пример 2.

ТЕМА 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

5.1 Основные подходы к построению ММ систем

Исходной информацией при построении ММ процессов функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы исследуемой (проектируемой) системы *S*. Эта информация определяет основную цель моделирования, требования к ММ, уровень абстрагирования, выбор математической схемы моделирования.

Понятие ***математическая схема*** позволяет рассматривать математику не как метод расчёта, а как метод мышления, средства формулирования понятий, что является наиболее важным при переходе от словесного описания к формализованному представлению процесса её функционирования в виде некоторой ММ.

ММ объекта моделирования, т.е. системы *S* можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

- совокупность входных воздействий на систему *S*: $x_i \in X$, $i=1 \ldots n_X$;
- совокупность воздействий внешней среды $v_l \in V$, $l=1 \ldots n_V$;
- совокупность внутренних (собственных) параметров системы $h_k \in H$, $k=1 \ldots n_H$;
- совокупность выходных характеристик системы $y_j \in Y$, $j=1 \ldots n_Y$.

В перечисленных множествах можно выделить управляемые и неуправляемые величины. В общем случае *X*, *V*, *H*, *Y* – не пересекаемые множества, содержат как детерминированные так и стохастические составляющие. Входные воздействия *E* и внутренние параметры *S* являются независимыми (экзогенными) переменными $X(t), V(t), H(t)$, а выходные характеристики – зависимые переменные (эндогенные) $Y(t)$. Процесс функционирования *S* описывается оператором $\boldsymbol{F_S}$:

$$Y(t) = F_S\left(X, V, H, t\right) \tag{1}$$

– выходная траектория.

$\boldsymbol{F_S}$ – закон функционирования S. $\boldsymbol{F_S}$ может быть функция, функционал, логические условия, алгоритм, таблица или словесное описание правил.

Весьма важным для описания и исследования системы является понятие алгоритма функционирования $\boldsymbol{A_S}$, под которым понимают метод получения выходных характеристик с учётом входных воздействий $X(t)$, воздействий внешней среды $V(t)$ и собственных параметров системы $H(t)$.

Очевидно один и тот же $\boldsymbol{F_S}$ может быть реализован различными способами, т.е. с помощью множества различных $\boldsymbol{A_S}$.

Соотношение (1) является математическим описанием поведения объекта S моделирования во времени t, т.е. отражает его динамические свойства. (1) – это динамическая модель системы S. Для статических условий ММ есть отображения

$$Y = F_S\left(X,V,H\right) \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) могут быть заданы формулами, таблицами и т.д.

Также соотношения в ряде случаев могут быть получены через свойства системы в конкретные моменты времени, называемые *состояниями*.

Состояния системы S характеризуются векторами:

$$Z' = \left(z'_1, z'_2, ..., z'_k\right), Z'' = \left(z''_1, z''_2, ..., z''_k\right).$$

$z_1(t)$, $z_2(t)$… $z_k(t)$ могут быть интерпретированы как координаты точки в k-мерном фазовом пространстве. Каждой реализации процесса будет соответствовать некоторая фазовая траектория.

Совокупность всех возможных значений состояний $\{Z\}$ называется *пространством состояний* объекта моделирования Z, причём $z_k \in Z$.

Состояние системы S в интервале времени $t_0 < t^* \leq T$ полностью определяется начальными условиями $Z^0 = \left(z^0{}_1, z^0{}_2, ..., z^0{}_k\right)$, входными, внутренними параметрами и воздействиями внешней среды, которые имели место за промежуток времени $t^*–t_0$ с помощью 2-х векторных уравнений:

$$Z(t) = \Phi\left(Z^0, X, V, H, t\right) \tag{3}$$

$$Y(t) = F\left(Z, t\right) \tag{4}$$

иначе:

$$Y(t) = F\left(\Phi\left(Z^0, X, V, H, t\right)\right). \qquad (5)$$

Время в модели системы S может рассматриваться на интервале моделирования (0, T) как непрерывное, так и дискретное, т.е. квантованное на отрезке длиной Δt.

Таким образом под ММ объекта понимаем конечное множество переменных $\{X(t), V(t), H(t)\}$ вместе с математическими связями между ними и характеристиками. Детерминированная модель:

$$Y(t) = f\left(X, t\right) \qquad (6)$$

Моделирование называется детерминированным, если операторы ***F***, **Φ** детерминированные, т.е. для конкретного входа выход детерминированный. Детерминированное моделирование – частный случай стохастического моделирования. В практике моделирование объектов в области системного анализа на первичных этапах исследования рациональнее использовать типовые математические схемы: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, СМО и т.д.

Не обладая такой степенью общности, как модели (3), (4), типовые математические схемы имеют преимущество простоты и наглядности, но при существенном сужении возможностей применения.

В качестве детерминированных моделей, когда при исследовании случайный факт не учитывается, для представления систем, функционирующих в непрерывном времени, используются дифференциальные, интегральные и др. уравнения, а для представления систем, функционирующих в дискретном времени – конечные автоматы и конечно разностные схемы.

В начале стохастических моделей (при учёте случайного фактора) для представления систем с дискретным временем используются вероятностные автоматы, а для представления систем с непрерывным временем – системы массового обслуживания (СМО). Большое практическое значение при исследовании сложных индивидуальных управленческих систем, к которым относятся АСУ, имеют так называемые агрегативные модели.

Агрегативные модели (системы) позволяют описать широкий круг объектов исследования с отображением системного характера этих объектов. Именно при агрегативном описании сложный объект расчленяется на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивая взаимодействие частей.

5.2 Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)

Рассмотрим особенности непрерывно детерминированного подхода на примере, используя в качестве ММ дифференциальные уравнения.

Математическое соотношение для детерминированных систем в общем виде:

$$Y' = f(Y,t); Y(t_0) = Y_0. \qquad (7)$$

Так как математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы , т.е. ее поведение во времени , то они называются D-схемами (dynamic).

D-схемы являются математическим аппаратом теории систем автоматического регулирования, управления.

5.3. Дискретно-детерминированные модели (F-схемы)

Особенности дискретно-детерминированного подхода на этапе формализации процесса функционирования систем рассмотрим на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов. Теория автоматов – это раздел теоретической кибернетики, в котором изучаются математические модели – автоматы. На основе этой теории система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени. Автомат можно представить как некоторое устройство (черный ящик), на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные и которое может иметь некоторые внутренние состояния. *Конечным автоматом* называется автомат, у которого множество внутренних состояний а, следовательно, и множество выходных сигналов являются конечными множествами. Абстрактно конечный автомат (от англ. finite automata) можно представить как математическую схему, характеризующуюся шестью элементами: конечным множеством X входных сигналов (входным алфавитом); конечным множеством Y выходных сигналов (выходным алфавитом); конечным множеством Z внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний); начальным состоянием $z_0 \in Z$; функцией переходов $\varphi(z, x)$; функцией выходов $\psi(z, x)$.

Существуют **F**- автомат 1-ого рода (*автомат Мили*), функционирующий по схеме:

$$z(t+1)=\varphi[z(t), x(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (8)$$

$$y(t)=\psi[z(t), x(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (9)$$

автомат 2-ого рода:

$$z(t+1)=\varphi[z(t), x(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (10)$$

$$y(t)=\psi[z(t), x(t-1)],\ t=1,2,3\ldots \quad (11)$$

Автомат 2-ого рода, для которого

$$y(t)=\psi[z(t)],\ t=0,1,2,\ldots \quad (12)$$

т.е. функция выходов не зависит от входной переменной $x(t)$, называется автоматом *Мура*.

Т.о. уравнения 8-12 полностью задающие F-автомат, являются частным случаем уравнения, когда система S - детерминированная и на её вход поступает дискретный сигнал x.

По числу состояний различают конечные автоматы с памятью и без памяти. Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием.

5.4 Дискретно-стохастические модели (P-схемы)

Фактор стохастичности отражается на функционировании разновидности таких автоматов, как вероятностные (стохастические) автоматы.

В общем виде вероятностный автомат (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически. Применение схем вероятностных автоматов имеет важное значение для разработки методов проектирования дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение, для выяснения алгоритмических возможностей таких систем и обоснования границ целесообразности их использования, а также для решения задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.

5.5 Непрерывно-стохастические модели (Q - схемы).

Особенности непрерывно-стохастического подхода рассмотрим на примере использования в качестве типовых математических схем систем массового обслуживания (англ. queueing system), которые будем называть *Q*-схемами. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания.

5.6 Сетевые модели (N-схемы)

В практике моделирования объектов часто приходится решать задачи, связанные с формализованным описанием и анализом причинно-следственных связей в сложных системах, где одновременно параллельно протекает несколько процессов. Самым распространенным в настоящее время формализмом, описывающим структуру и взаимодействие параллельных систем и процессов, являются *сети Петри* (от англ. Petri Nets).

Графически *N-схема* изображается в виде двудольного ориентированного мультиграфа, представляющего собой совокупность позиций и переходов. Граф *N-схемы* имеет два типа узлов: позиции и переходы, изображаемые 0 и 1 соответственно. Ориентировочные дуги соединяют позиции и переходы, причем каждая дуга направлена от элемента одного множества (позиции или перехода) к элементу другого множества (переходу или позиции). Граф *N-схемы* является мультиграфом, так как он допускает существование кратных дуг от одной вершины к другой.

Пример 3.

6 ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

Успех или неудача проведения имитационных экспериментов с моделями сложных систем существенным образом зависит от инструментальных средств, используемых для моделирования, т. е. набора аппаратно-программных средств, представляемых пользователю-разработчику или пользователю-исследователю машинной модели. В настоящее время существует большое количество языков имитационного моделирования – специальных языков программирования имитационных моделей на ЭВМ – и перед разработчиком машинной модели возникает проблема выбора языка, наиболее эффективного для целей моделирования конкретной системы. Языки моделирования заслуживают пристального внимания, так как, во-первых, число существующих языков и систем моделирования превышает несколько сотен и необходимо научиться ориентироваться в них, а во-вторых, почти каждый новый язык моделирования не только является средством, облегчающим доведение концептуальной модели до готовой машинной моделирующей программы, но и представляет собой новый способ «видения мира», т. е. построения моделей реальных систем. Необходимость эффективной реализации имитационных моделей предъявляет все более высокие требования как к инструментальным ЭВМ, так и к средствам организации информации в ЭВМ при моделировании. Поэтому с учетом использования новой информационной технологии в процессе моделирования следует учитывать особенности построения баз знаний и банков данных и систем управления ими.

6.1. ОСНОВЫ СИСТЕМАТИЗАЦИИ ЯЗЫКОВ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Использование современных ЭВМ и вычислительных комплексов и сетей является мощным средством реализации имитационных моделей и исследования с их помощью характеристик процесса функционирования систем *S*. В ряде случаев в зависимости от сложности объекта моделирования, т. е. системы *S*, рационально использование персональных ЭВМ (ПЭВМ) или локальных вычислительных сетей (ЛВС). В любом случае эффективность исследования системы *S* на программно-реализуемой модели $M_м$ прежде всего зависит от правильности схемы моделирующего алгоритма, совершенства программы и только косвенным образом зависит от технических характеристик ЭВМ, применяемой для моделирования. Большое значение при реализации модели на ЭВМ имеет вопрос правильного выбора языка моделирования.

6.1.1 Моделирование систем и языки программирования.

6.1.2 Особенности использования алгоритмических языков.

6.1.3 Подходы к разработке языков моделирования.

6.1.4 Архитектура языков моделирования.

6.1.5 Задание времени в машинной модели.

6.1.6 Требования к языкам имитационного моделирования.

Совмещение.

Размер.

Изменения.

Взаимосвязанность.

Стохастичность.

Анализ.

6.2 ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

Метод машинного моделирования все глубже входит в практику решения конкретных задач исследования и проектирования систем, находит свое применение для широкого круга проблем в различных сферах (автоматизированные системы управления, системы автоматизации научных исследований и экспериментов, информационно-вычислительные системы и сети коллективного пользования, системы автоматизированного проектирования и т. д.). В решение этих задач вовлекается все большее количество специалистов разных квалификаций, часто далеких от использования средств вычислительной техники. Поэтому для таких пользователей должны быть разработаны специальные средства подготовки и общения с ЭВМ, позволяющие автоматизировать этот трудоемкий процесс.

Таким образом, возникает вопрос о создании *автоматизированной системы моделирования* (АСМ), которая должна повысить эффективность выполнения пользователем следующей совокупности процедур: преобразование к типовым математическим схемам элементов моделируемой системы S и построение схем сопряжения; обработка и анализ результатов моделирования системы S; реализация интерактивного режима с пользователем в процессе моделирования системы $\boldsymbol{S}$.

6.2.1 Понятие пакета прикладных программ.

6.2.2. Функциональное наполнение пакета.

6.2.3. Язык заданий пакета.

6.2.4 Системное наполнение пакета.

6.2.5 Программные средства АСМ.

6.3 БАЗЫ ДАННЫХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Расширение возможностей моделирования различных классов систем S неразрывно связано с совершенствованием средств вычислительной техники и техники связи. Перспективным направлением является использование для целей моделирования иерархических многомашинных информационно-вычислительных систем и связанных с ними телекоммуникационными сетями удаленных персональных ЭВМ, работающих в режиме телеобработки.

При создании больших систем S их компоненты разрабатываются различными коллективами, которые используют средства моделирования при анализе и синтезе отдельных подсистем. При этом разработчикам необходим доступ как к коллективным, так и индивидуальным средствам моделирования, а также оперативный обмен результатами моделирования отдельных взаимодействующих подсистем. Таким образом, появляется необходимость в создании диалоговых систем моделирования коллективного пользования, для которых характерны следующие особенности: возможность одновременной работы многих пользователей, занятых разработкой одной системы *S*; доступ пользователей к программно-техническим ресурсам системы моделирования, включая распределенные банки данных и пакеты прикладных программ моделирования; обеспечение диалогового режима работы с различными вычислительными машинами и устройствами, включая цифровые и аналоговые вычислительные машины, установки физического моделирования, элементы реальных систем и т. п.; диспетчирование работ в автоматизированных системах моделирования (АСМ) и оказание различных услуг пользователям, включая обучение работе с диалоговой системой моделирования; использование сетевых технологий.

Рассмотрим основные моменты связанные с разработкой распределенной базы данных моделирования (РБДМ).

6.3.1 Ключевые аспекты разработки баз данных.

6.3.2 База данных.

6.3.3 Методы и средства определения и **манипулирования БД.**

6.3.5 Предметная область.

6.3.6 Концептуальный анализ и проектирование баз данных.

6.3.9 Администрирование БДМ.

6.3.10 Использование БДМ при моделировании систем.

6.3.11 Реляционная модель данных.

6.3.12 Объектно-ориентированный подход и БДМ.

6.3.13 Методология классифицирования предметной области.

6.3.14 Основные свойства объектной модели.

ТЕМА 7. ПЛАНИРОВАНИЕ МАШИННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
ТЕМА 8. ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Имитационное моделирование является по своей сути машинным экспериментом с моделью исследуемой или проектируемой системы. План имитационного эксперимента на ЭВМ представляет собой метод получения с помощью эксперимента необходимой пользователю информации. Эффективность использования экспериментальных ресурсов существенным образом зависит от выбора плана эксперимента. Основная цель экспериментальных исследований с помощью имитационных моделей состоит в наиболее глубоком изучении поведения моделируемой системы. Для этого необходимо планировать и проектировать не только саму модель, но и процесс ее использования, т.е. проведение с ней экспериментов на ЭВМ. Весь комплекс вопросов планирования экспериментов с имитационными моделями для их успешного решения рационально разбить на стратегическое и тактическое планирование.

Основы планирования экспериментов с моделями систем

К настоящему времени в различных областях знаний сложилась теория планирования экспериментов, в которой разработаны достаточно мощные математические методы, позволяющие повысить эффективность таких экспериментов. Однако перенос этих результатов на область машинных экспериментов с моделями может иметь место только с учетом специфики моделирования систем на ЭВМ. Несмотря на то, что цели экспериментального моделирования на ЭВМ и проведения натурных экспериментов совпадают, между ними существуют различия, поэтому при их планировании наиболее значение имеет следующее: 1) простота повторения условий эксперимента на ЭВМ с моделью системы; 2) возможность управления экспериментом с моделью, включая его прерывание и возобновление; 3) легкость варьирования условий проведения эксперимента (воздействий внешней среды); 4) наличие корреляции между последовательностями точек в процессе моделирования; 5) трудности, связанные с определением времени моделирования.

В связи с тем, что математические методы планирования экспериментов основаны на кибернетическом представлении процесса проведения эксперимента, наиболее подходящей моделью последнего является абстрактная схема, называемая «черным ящиком». При таком кибернетическом подходе различают входные и выходные переменные x_k и y_i. В зависимости от того, какую роль играет каждая переменная в проводимом эксперименте, она может являться либо фактором, либо реакцией. Пусть, например, имеют место только две переменные x и y. Тогда если цель эксперимента – изучение влияния переменной x на переменную y, то x – фактор, а y – реакция. В экспериментах с машинными моделями фактор является экзогенной или управляемой (входной) переменной, а реакция – эндогенной (выходной) переменной.

При планировании экспериментов необходимо определить основные свойства факторов, которые могут быть управляемыми и неуправляемыми, наблюдаемыми и ненаблюдаемыми, количественными и качественными, фиксированными и случайными. Фактор называется управляемым, если его значения целенаправленно выбираются исследователем в процессе эксперимента. Фактор называется наблюдаемым, если его значения наблюдаются и регистрируются. Наблюдаемые неуправляемые факторы получили название сопутствующих. Фактор относится к изучаемым, если он включен в модель для изучения свойств системы, а не для вспомогательных целей, например для увеличения точности эксперимента. Фактор буде количественным, если его значения - числовые величины, влияющие на реакцию, в противном случае фактор называется качественным. Фактор называется фиксированным, если в эксперименте исследуются все интересующие экспериментатора значения фактора, если экспериментатор исследует только некоторую случайную выборку из совокупности интересующих его значений факторов, то фактор называется случайным.

Стратегическое планирование машинных экспериментов

Стратегическое планирование машинных экспериментов с моделями систем ставит своей целью решение задачи получения необходимой информации о системе с помощью модели, реализованной на ЭВМ, с учетом ограничений на ресурсы, имеющиеся в распоряжении экспериментатора. По своей сути стратегическое планирование аналогично внешнему проектированию при создании системы, только здесь в качестве объекта выступает процесс моделирования системы.

При стратегическом планировании машинных экспериментов с моделями систем возникает целый ряд проблем, взаимно связанных как с особенностями функционирования моделируемого объекта (системы), так и с особенностями машинной реализации модели и обработки результатов эксперимента. В первую очередь к ним относятся проблемы: построения плана машинного эксперимента; наличия большого количества факторов; многокомпонентной функции реакции; стохастической сходимости результатов машинного эксперимента; ограниченности машинных ресурсов на проведение эксперимента.

Применяя системный подход к проблеме стратегического планирования машинных экспериментов, можно выделить следующие его этапы: 1) построение структурной модели; 2) построение функциональной модели. При этом структурная модель выбирается исходя из того, что должно быть сделано, а функциональная – из того, что может быть сделано.

Таким образом, использование при стратегическом планировании структурных и функциональных моделей плана машинных экспериментов позволяет решить вопрос о практической реализации модели на ЭВМ, учитывая допустимые затраты ресурсов на моделирование системы.

Тактическое планирование машинных экспериментов

Тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем представляет собой определение способа проведения каждой серии испытаний машинной модели, предусмотренных планом эксперимента. Для тактического планирования также имеется аналогия с внутренним проектированием системы, но опять в качестве объекта рассматривается процесс работы с моделью системы.

Тактическое планирование эксперимента с машинной моделью системы связано с вопросами эффективного использования выделенных для эксперимента машинных ресурсов и определение конкретных способов проведения испытаний модели, намеченных планом эксперимента, построенным при стратегическом планировании. Тактическое планирование, прежде всего, связано с решением следующих проблем: определения начальных условий и их влияния на достижение установившегося результата при моделировании; обеспечения точности и достоверности результатов моделирования; уменьшения дисперсии оценок характеристик процесса функционирования моделируемых систем; выбора правил автоматической остановки имитационного эксперимента.

Чем сложнее машинная модель, тем важнее этап тактического планирования, выполняемый непосредственно перед моделированием системы на ЭВМ. Процесс планирования машинных экспериментов с моделью системы итерационен, т.е. при уточнении некоторых свойств моделируемой системы этапы стратегического и тактического планирования могут чередоваться.

Особенности фиксации и статистической обработки результатов моделирования систем на ЭВМ; анализ и интерпретация результатов машинного моделирования; обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем.

9 ПРОСТЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

9.1. Фундаментальные законы природы. Наиболее распространенный метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. Поэтому их обоснованность не вызывает сомнений, что, помимо всего прочего, обеспечивает исследователю мощную психологическую поддержку. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон (законы) следует применять в данном случае и как это делать.

а) *Сохранение энергии.*

Пример. Экспертиза по баллистике.

б) *Сохранение материи.*

Пример. Закон сохранения материи в задаче о радиоактивном распаде.

в) *Сохранение импульса.*

Пример. Формула Циолковского.

9.2. Вариационные принципы. Еще один подход к построению моделей, по своей широте и универсальности сопоставимый с возможностями, даваемыми фундаментальными законами, состоит в применении так называемых *вариационных принципов.* Они представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте (системе, явлении) и гласят, что из всех возможных вариантов его поведения (движения, эволюции) выбираются лишь те, которые удовлетворяют определенному условию. Обычно согласно этому условию некоторая связанная с объектом величина достигает экстремального значения при его переходе из одного состояния в другое.

Пример Допустим, автомобиль, движущийся с постоянной скоростью v , должен попасть из точки A в точку B и при этом коснуться прямой линии C, при этом водитель очень торопится и выбирает из множества траекторий путь, требующий минимальных затрат времени.

Условие минимальных затрат времени привело к выбору соответствующей траектории по правилу: «угол падения равен углу отражения». Такому же правилу подчиняется ход светового луча, попадающего на отражающую поверхность. В общем случае и лучи света движутся по траектория, обеспечивающим быстрейшее попадания сигнала из одной точки в другую. Этот принцип выражается в вариационном принципе Ферма, опираясь на который получают основные законы геометрической оптики.

9.3. Применение аналогий при построении моделей. В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Что, казалось бы, общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты? Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций.

Пример. Математическая постановка задачи для модели Мальтуса

(Равновесие между рождаемостью и смертностью неустойчиво, что даже небольшое нарушение равенства $\alpha=\beta$ приводит с течением времени ко все большему отклонению функции $N(t)$ от равновесного значения $N(0)$).

Сделанное замечание тем не менее нисколько не умаляет роли аналогий в построении математических моделей очень сложных явлений.

Применение аналогий основано на одном из важнейших свойств моделей – их универсальности, т. е. их приложимости к объектам принципиально различной природы. Так, предположения типа «скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или некоторой функции от нее)» широко используются в далеких друг от друга областях знаний.

9.4. Иерархический подход к получению моделей. Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу во всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естествен подход, реализующий принцип «от простого — к сложному», когда следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая.

Построим такую иерархическую цепочку **на примере** модели многоступенчатой ракеты.

Построение иерархической цепочки позволило относительно просто прийти к этим важным выводам. Иерархия математических моделей часто строится и по противоположному принципу «от сложного к простому». В этом случае реализуется путь «сверху вниз» — из достаточно общей и сложной модели при соответствующих упрощающих предположениях получается последовательность все более простых (но имеющих уменьшающуюся область применимости) моделей.

9.5. Линейность и нелинейность математических моделей. Простота рассмотренных выше моделей во многом связана с их линейностью. В математическом плане это важное понятие означает, что справедлив принцип суперпозиции, т. е. любая линейная комбинация решений (например, их сумма) также является решением задачи. Пользуясь принципом суперпозиции, нетрудно, найдя решение в каком-либо частном случае, построить решение в более общей ситуации. Поэтому о качественных свойствах общего случая можно судить по свойствам частного — различие между двумя решениями носит лишь количественный характер. Например, увеличение в два раза скорости истечения ракетного топлива ведет также к двукратному увеличению скорости ракеты, уменьшение угла падения светового луча на отражающую поверхность означает такое же изменение угла отражения и т. д. Другими словами, в случае линейных моделей отклик объекта на изменение каких-то условий пропорционален величине этого изменения.

Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности. Например, популяционные модели сразу становятся нелинейными, если принять во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов.

Пример. Модель Ферхюльста об изменении численности популяции.

Поведение функции $N(t)$ описывается так называемой *логистической кривой*. Логистическая модель более реалистично отражает динамику популяции в сравнении с моделью Мальтуса, но сама она с необходимостью становится нелинейной и поэтому более сложной. Заметим, что предположения о механизмах насыщения используются при построении многих моделей в различных областях знаний.

9.6. Выводы.

ЧАСТЬ 2 РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Современные методы решения инженерных задач предполагают проведение численных экспериментов с ММ исследуемого процесса. Задача ММ – установление связи между входными и выходными переменными в виде математических соотношений и реализация этих моделей на ЭВМ.

10. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Статические модели могут быть заданы математической функцией в явном или неявном виде. Такие модели осуществляют преобразование чисел – значений входных переменных x в числа – значения выходной переменной y. Для реализации таких моделей на ЭВМ требуются ЧМ решения АУ и их систем, методы аппроксимации.

Классификация погрешностей

а) ***Погрешность задачи.***

б) ***Погрешность метода.***

в) ***Погрешность округлений***

Все три описанных типа погрешностей в сумме дают ***полную погрешность*** результата решения задачи.

При моделировании можно выделить три источника ошибок: 1) погрешность , связанная с неточностью самой ММ, 2) погрешность, связанная с использованием численных методов, 3) погрешность, связанная с реализацией ММ на ЭВМ.

Пусть точное значение выходной переменной y^*, предсказанной по модели $y = f(x)$, равно y. Ошибка моделирования определяется нормой $\|y^* - y\|$, в качестве которой для вектора $a = (a_1, a_2, ...a_n)$ наиболее часто используют следующие величины:

$$\|a\|_1 = \max_{1 \le i \le n} |a_i|, \ \|a\|_2 = \sqrt{\sum a_i^2}.$$

Примеры ММ, требующие решения задачи аппроксимации

Пример 1. Применяя интерполяцию (полиномиальную или сплайн), можно решить, например, следующую прикладную задачу. Найти непрерывный график зависимости изменения температуры в г. Благовещенске по заданным табличным данным и вычислить примерное значение температуры в 15час.:

t	9-00	12-00	14-00	16-00	17-00	20-00
T	-19	-15	-13	-15	-16	-20

Пример 2. Пример задачи экстраполяции: Даны объемы потребления электроэнергии жителями некоторого района за отчетный период. Предсказать объем потребления на следующий квартал.

Пример 3. Нелинейная модель Кобба-Дугласа, описывающая производственную функцию:

$$Y(K,L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2},$$

где Y – объем производственной продукции, K – капитальные затраты на производство, L – затраты на труд, a_0, a_1, a_2 – параметры функции, подлежащие определению по данным функционирования производства.

Параметры нелинейной функции можно подобрать, реализуя МНК, выполнив предварительную линеаризацию функции.

Адекватность статических моделей

Рассмотрим вопрос о соответствии ММ объективной реальности. Несоответствие может быть вызвано: или сама функция не соответствует реальной функциональной зависимости, либо случайные факторы исказили результаты экспериментов. Пусть по данным N экспериментов определяется модель с m параметрами. Если N=m, то имеем задачу интерполяции (однако в этом случае мы не располагаем ни одним дополнительным измерением для оценок). Если N>m, то данные N-m экспериментов (число степеней свободы) можно использовать для оценки адекватности модели при помощи остаточной дисперсии:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y^i - f(x^i)\right)^2}{N - m}$$

Эта величина может быть призвана неудовлетворительной, что приводит к необходимости либо увеличить число экспериментов (увеличив тем самым величину знаменателя), либо уменьшить числитель, выбрав другую функцию $f(x)$,введя, например, поправочный член. Рассмотрим случай, когда с ошибками измеряется выходная величина y. Пусть ошибки измерений e подчиняются нормальному закону с нулевым матожиданием Me =0 (систематической ошибки нет) и дисперсией σ_y^2. В этом случае необходимо проверить гипотезу о том, что ошибки моделирования с дисперсией S и ошибки измерений с дисперсией σ_y^2 имеют несущественные различия. Для этого можно воспользоваться критерием Фишера: $F = S/\sigma_y^2$. Если $F > F_T(p,n,m)$, где p – уровень доверительной вероятности, n – число степеней свободы для большей дисперсии S, m – число степеней свободы для σ_y^2, то данная гипотеза должна быть отвергнута, и ошибку моделирования можно уменьшить за счет изменения функции модели. В противном случае ошибка моделирования может быть обусловлена ошибками измерений. Тогда никакого улучшения за счет изменения функции не будет достигнуто.Табличное значение критерия Фишера можно найти в литературе по статистике, либо, используя встроенные функции пакета, либо, используя встроенные функции пакета.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Математические модели, реализуемые задачами Коши для ОДУ

1) В качестве примера модели, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, рассмотрим уравнение упругих колебаний без сопротивления при наличии периодической внешней силы:

$$y'' + qy = a\sin\omega t,$$

где ω – частота вынуждающей силы; a – амплитуда внешнего периодического воздействия; q – собственная частота колебаний.

2) Дифференциальным уравнением первого порядка описывается, простейшая модель остывания нагретых тел.

Природа переноса тепла от нагретого тела в окружающий воздух весьма сложна и включает в себя механизмы конвекции, излучения, испарения и теплопроводности. Однако при небольшой разности температур между нагретым телом и окружающей средой для описания процесса остывания можно использовать простую модель, впервые предложенную Ньютоном. В данной модели температура холодильника (окружающей среды) принимается постоянной, а скорость передачи тепла от нагретого тела к холодильнику пропорциональна разности температур между ними.

Теплоотдача в окружающую среду определяется соотношением:

$$dQ = -\alpha S(T - T_c)dt$$

где dQ – количество теплоты, отданное телом за время dt; $T(t)$ – текущая температура охлаждающегося предмета; T_C – температура окружающей среды;S – площадь поверхности тела; α – коэффициент теплоотдачи.

Изменение внутренней энергии тела на величину dU, в свою очередь, приводит к изменению температуры тела на величину dT:

$$dT = \frac{1}{C_T} dU\ ,$$

где C_T – теплоемкость тела.

При установлении взаимосвязи между dU и dQ следует учесть, что в теле могут находиться и др. источники тепла.

В данной модели подразумевается, что все тело имеет одинаковую температуру (для вязких сред такая модель окажется несправедливой, например остывание киселя), что реализуется при достаточно большой теплопроводности, небольших размерах и не слишком большой теплоотдаче.

Будем считать, изменение внутренней энергии полностью происходит за счет отдаваемого тепла:

$$dQ = -\alpha S(T - T_c)dt \Leftrightarrow dU = C_T dT = cmdT = c\rho VdT$$
$$-\alpha S(T - T_c)dt = c\rho VdT\ ,$$

где c – удельная теплоемкость; V – объем; S – площадь поверхности; ρ – плотность остывающего тела.

Тогда скорость изменения температуры прямо пропорциональна разности температуры тела и окружающей среды:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha S}{c\rho V}(T - T_C), \qquad T(0) = T_0, \tag{1}$$

Задача (1) имеет аналитическое решение, которое легко получить, разделяя переменные в уравнении:

$$T = T_C + (T_0 - T_C) \cdot e^{-r \cdot t},$$

где r – коэффициент остывания, который зависит от механизма передачи тепла, площади нагретого тела и тепловых свойств самого тела.

5) Функции решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно также использовать для решения систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. В качестве примера рассмотрим простейшую модель развития эпидемии, которая описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} = \alpha N_i N_s - \beta N_i, \\ \dfrac{\partial N_s}{\partial t} = \gamma \left(N_0 - N_s \right) - \alpha N_s N_i \end{cases}$$

где N_i – число инфицированных членов популяции, в которой распространяется эпидемия; N_s – число восприимчивых членов популяции, которые в данный момент не болеют, но, не обладая иммунитетом, могут заразиться; α – коэффициент, характеризующий вероятность заражения; β – коэффициент выздоровления (величина, обратная средней продолжительности заболевания τ); γ – коэффициент убывания членов популяции (величина, обратная средней продолжительности жизни T)

6) Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений покажем также на примере уравнения Дуффинга, которое демонстрирует возникновение стохастических колебаний для ряда нелинейных задач,

например, в цепях с нелинейной индуктивностью или при продольном изгибе упругой балки. Уравнение Дуффинга можно записать в виде:

$$\ddot{x} + kx + x^3 = B\cos t.$$

7) Рассмотрим задачу моделирования ценового равновесия. Согласно экономическим законам, существует определенная зависимость между ценой товара и количеством товара, купленного (проданного) по этой цене. Эту зависимость можно изобразить графически в виде кривой спроса (соответственно, кривой предложения).

Рассмотрим модель, в которой учитывается зависимость функций спроса и предложения не только от цены товара, но и от изменения цены (т. е. ее производной по времени). Для определения равновесной цены получаем дифференциальное уравнение. В качестве примера покажем зависимость равновесной цены от времени для следующей задачи:

$$\begin{cases} Qd = 19 + p + 4\dfrac{dp}{dt}, \\ Qs = 28 - 2p + 3\dfrac{dp}{dt}, \\ p(0) = 20 \end{cases}$$

Примеры ММ, описываемых краевыми задачами для ОДУ

1. Распределение изгибающего момента M в балке под действием распределенной поперечной нагрузки $\omega(x)$ на единицу длины удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^2M}{dx^2} = \omega(x)$. Балка единичной длины свободно оперта (M=0) на обоих концах и несет нагрузку $\omega(x) = \sin(\pi x)$ на единицу длины. Вычислить распределение изгибающего момента.
2. Уравнение, описывающее изменение температуры T в вязкой жидкости, текущей между двумя параллельными пластинами ($y = 0, y = 2H$) имеет вид:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4U^2\mu}{H^4 k}(H - y)^2,$$

где μ, k, U – коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности и максимальная скорость жидкости соответственно. Пусть

$$\mu = 0{,}1, k = 0{,}08, U = 3, H = 3.$$

Вычислить распределение температуры, если на одной пластине поддерживается температура $T = 0$, а на другой $T = 5$.

ТЕМА 11. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Важным классом реализуемых на ЭВМ моделей являются стохастические (или недетерминированные) модели, в которых реализация рассматриваемого процесса зависит от случайных параметров. Выходные значения для таких моделей при заданном наборе входных данных можно предсказать только в вероятностном смысле.

Основу моделирования в этом случае составляет использование равномерно распределенных случайных чисел. Равномерно распределенные случайные числа заключены в интервале от 0 до 1 и выбираются случайным образом в соответствии с функцией распределения

$F(x) = \Pr\{X < x\} = x,\ 0 < x < 1.$

Здесь $\Pr\{X < x\}$ — вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x.

При равномерном распределении одинаково правдоподобно появление любых значений случайной величины в интервале (0, 1). Основным методом получения случайных чисел является их генерация по модулю.

Термином «метод Монте-Карло» обозначается большая группа методов, в которых используются генераторы случайных чисел. Метод Монте-Карло используется для решения различных математических задач: интерполяции, вычисления интегралов, решения дифференциальных и интегральных уравнений, поиска экстремума.

Программные оболочки, как правило, содержат генератор случайных чисел. Однако большинство статистических тестов показывает коррелированность между получаемыми случайными числами.

В Matlab для генерации псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале от 2^{-53} до $1\text{-}2^{-53}$ (примерно (0,1)), используют функцию rand. Функция randn позволяет сгенерировать случайные числа, распределенные по нормальному закону со следующими параметрами:

1) среднее значение случайной величины равно 0; $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

2) дисперсия $\sigma^2 = 1$; $\sigma^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2\right)$.

3) средняя квадратичная ошибка $\sigma = 1$.

Существует быстрый тест, с помощью которого необходимо проверять каждый генератор. Качество генератора случайных чисел можно продемонстрировать, заполняя полностью *d*-мерную решетку (например, двух- и трехмерную, т. е. квадрат или куб).

Пример 1.

В качестве примера применения метода Монте-Карло рассмотрим вычисление интегралов (наиболее эффективно применение данного метода для вычисления многомерных интегралов, когда прямое интегрирование обычными численными методами невозможно).

Интересным случайным процессом является броуновское движение. В 1827 г. английский ботаник Броун наблюдал под микроскопом хаотическое движение мелких частиц в капле жидкости. Математическая теория этого процесса была построена гораздо позже А. Эйнштейном, а затем Н. Винером. Если броуновская частица является достаточно мелкой, то количество столкновений молекул воды с данной частицей не будет одним и тем же по всей площади поверхности частицы, что и приводит к ее хаотичному движению.

Рассмотрим двумерное броуновское движение. Реализация той же задачи в Matlab.

Пример 3. Рассмотрим применение метода Монте-Карло для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Недостатком рассмотренного метода Монте-Карло является его слабая сходимость. Чтобы снизить влияние этого негативного фактора используют различные типы случайных блужданий.

ТЕМА 12. МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Понятие о марковском процессе

До сих пор мы рассматривали главным образом детерминированные задачи. Рассмотрим несколько моделей, существующих в условиях неопределенности. В этой главе мы рассмотрим сравнительно благоприятный случай «доброкачественной» или «стохастической» неопределенности, когда неопределенные факторы, входящие в задачу, представляют собой случайные величины (или случайные функции), вероятностные характеристики которых либо известны, либо могут быть получены из опыта. В большинстве случаев не удается построить простую математическую модель, позволяющую в явном (аналитическом) виде найти интересующие нас величины (показатели эффективности) в зависимости от условий операции а и элементов решения *x.* Однако в некоторых особых случаях такую математическую модель удается построить. Это – когда исследуемая операция представляет собой (точно или приближенно) так называемый марковский случайный процесс.

Пусть имеется некоторая физическая система *S,* которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое), причем заранее неизвестным, случайным образом. Тогда мы будем говорить, что в системе *S* протекает случайный процесс.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется марковским, если *для любого момента времени* t_0 *вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент* t_0 *и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.* В марковском процессе «будущее зависит от прошлого только через настоящее».

На практике часто встречаются процессы, которые если не в точности марковские, то могут быть в каком-то приближении рассмотрены как марковские. На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются, но нередко приходится иметь дело с процессами, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь. В исследовании операций большое значение имеют так называемые марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – так называемым графом состояний. Состояния системы изображаются прямоугольниками (или кругами, или даже точками), а возможные переходы из состояния в состояние – стрелками, соединяющими состояния.

2. Потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Например: поток вызовов на телефонной станции; поток отказов (сбоев) ЭВМ; поток железнодорожных составов, поступающих на сортировочную станцию; поток частиц, попадающих на счетчик Гейгера, и т. д.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени $0t$(рис. 3); не надо только забывать, что положение каждой из них случайно, и на рис. 3 изображена только какая-то одна реализация потока.

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные, равные промежутки времени. На практике чаще встречаются потоки не регулярные, со случайными интервалами.

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1, и τ_2 (рис.) число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой.

Поток событий называется ординарным, если события в нем появляются поодиночке, а не группами по нескольку сразу.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он обладает сразу тремя свойствами: стационарен, ординарен и не имеет последействия.

В расчетах, связанных с потоками событий, очень удобно пользоваться понятием «элемент вероятности». Элементом вероятности называется вероятность попадания на этот участок хотя бы одного события потока.

Поток событий называется рекуррентным (иначе – «потоком Пальма»), если он стационарен, ординарен, а интервалы времени между событиями $T_1, T_2, T_3, \ldots$

3.Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний

Если система *S* находится в каком-то состоянии S_i, из которого есть непосредственный переход в другое состояние S_j (стрелка, ведущая из S_i в S_j на графе состояний), то мы себе это будем представлять так, как будто на систему, пока она находится в состоянии S_i действует простейший поток событий, переводящий ее по стрелке $S_i \to S_j$. Как только появится первое событие этого потока, происходит «перескок» системы из $S_i в S_j$.

Для наглядности очень удобно на графе состояний у каждой стрелки проставлять интенсивность того потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Обозначим λ_{ij} интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния S_i в S_j.

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний, можно найти все вероятности состояний $p_i(t)$ как функции времени. Для этого составляются и решаются так называемые у р а в н е н и я К о л м о г о р о в а – особого вида дифференциальные уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний

Чтобы решить уравнения Колмогорова и найти вероятности состояний, прежде всего надо задать начальные условия. Если мы точно знаем начальное состояние системы S_i, то в начальный момент (при $t = 0$) $p_i(0)$, а все остальные начальные вероятности равны нулю. Как решать подобные уравнения? Вообще говоря, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами можно решать аналитически, но это удобно только когда число уравнений не превосходит двух (иногда – трех). Если уравнений больше, обычно их решают численно – вручную или на ЭВМ.

Таким образом, уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени.

2 СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с работой своеобразных систем, называемых СМО. Примерами таких систем могут быть: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, магазины и т.п. Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, называемых каналами обслуживания. Каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, кассиры, автомашины и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными. Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок, поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, вообще говоря, случайное время $T_{об}$, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (либо стоят в очереди, либо покидают СМО необслуженные), в другие периоды СМО будет работать с недогрузкой, либо вообще простаивать. Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-либо событий.

Предмет Теории МО – построение ММ, связывающих данные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими характеристиками – показателями эффективности СМО, описывающими способность справляться с потоком заявок.

СМО делятся на типы или классы по ряду признаков.

I деление

1) ***СМО с отказами***

2) ***СМО с очередью***

2. Схема гибели и размножения. Формула Литтла

2.1. Схема гибели и размножения. Мы знаем, что имея в распоряжении размеченный граф состояний, можно легко написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, а также написать и решить алгебраические уравнения для финальных вероятностей.

2.2. Формула Литтла.

3. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики

Рассмотрим некоторые простейшие СМО и выведем выражения для их характеристик (показателей эффективности). При этом мы продемонстрируем основные методические приемы, характерные для элементарной, «марковской» теории массового обслуживания. Мы не будем гнаться за количеством образцов СМО, для которых будут выведены конечные выражения характеристик.

Все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, в данном параграфе мы будем считать простейшими (не оговаривая это каждый раз специально). В их числе будет и так называемый «поток обслуживании». Под ним разумеется п о т о к з а я в о к, обслуживаемых одним непрерывно з а н я т ы м каналом. В этом потоке интервал между событиями, как и всегда в простейшем потоке, имеет показательное распределение (во многих руководствах вместо этого говорят: «время обслуживания – показательное», мы и сами в дальнейшем будем пользоваться таким термином). В данном параграфе показательное распределение времени обслуживания будет само собой разуметься, как всегда для «простейшей» системы.

Характеристики эффективности рассматриваемых СМО мы будем вводить по ходу изложения.

3.1. *n*-Канальная СМО с отказами (задача Эрланга).

3.2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью.

3.3. *n*-Канальная СМО с неограниченной очередью.

3.4. Одноканальная СМО с ограниченной очередью.

3.5. Замкнутая СМО с одним каналом и *m* источниками заявок.

ТЕМА 13. МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИМИТАЦИОННОГО ПОДХОДА. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФРАКТАЛОВ.

Многие авторы изначально понятие фрактала не относили к строго математическому понятию. Основателем теории фракталов считают Бенуа Мандельброта. После введения понятия фрактала стало ясно, что огромное количество странных объектов, давно известных людям, представляют собой различные проявления фракталов.

1. Фракталы в математике

Мандельброт назвал фракталами структуры, состоящие из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Странные математические объекты – «математические монстры» привлекли внимание ученых еще в XIXвеке. В 1883г. Георг Кантор описал множество, которое теперь называют множеством Кантора или пылью Кантора.

В 1904г. Хельге фон Кох рассмотрел необычную кривую. Часто ее приводят в курсе матанализа как пример непрерывной, но недифференцируемой кривой.

В 1915г. Вацлав Серпинский придумал несколько интересных конструкций, названных впоследствии его именем. Салфетка Серпинского получается из равностороннего треугольника. Подобным образом можно получить ковер Серпинского, используя в качестве исходного объекта квадрат. Можно построить и трехмерные аналоги этих объектов, их называют губками.

В начале XX века Пьер Фату и Гастон Жюлиа исследовали свойства отображения $z_{n+1} = z_n^2 + c$ на комплексной плоскости. При фиксированном c в зависимости от выбора начального приближения пределом последовательности может быть либо ноль, либо бесконечность. Можно сказать, что ноль и бесконечность являются аттракторами. Граница, разделяющая области притяжения этих двух аттракторов, называется *множеством Жюлиа.* Эта граница бесконечно изрезана и представляет собой фрактал (рис.).

1. Используя то же самое отображение, Бенуа Мандельброт выбирал фиксированную точку на комплексной плоскости и прослеживал ее судьбу при различных значениях параметра *c*.

Данная граница имеет фрактальную структуру и является так называемым *странным аттрактором* для процесса. Если взглянуть на любой из ее поворотов или заливов, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет различные размеры. Фигура, находящаяся внутри этой границы, получила название *множество Мандельброта* (рис.)

2. Размерности

2.1. Размерность самоподобия

Все рассмотренные выше самоподобные объекты имели дробную размерность. Является ли это общим свойством всех самоподобных объектов? Нет! В 1890 г. Джузеппе Пеано построил непрерывную функцию, отображающую отрезок на квадрат. График этой функции — линия, целиком заполняющая квадрат, — называется кривой Пеано. Ее размерность — 2.

2.2. Размерность по Хаусдорфу—Безиковичу

Когда речь идет о фракталах, то часто используют размерность по Хаусдорфу—Безиковичу.

3. Фракталы в природе

Множество физических объектов, как выяснилось в недавнем прошлом, имеют фракталоподобную структуру. Однако, в отличие от математических фракталов, большинство физических — так называемые нерегулярные фракталы. Принято различать регулярные и нерегулярные фракталы. Первые — плод воображения — на каждом этапе масштабирования в точности повторяют объект в целом. Нерегулярные фракталы — продукт природы или деятельности человека — на каждом уровне масштаба структура фрактала подобна, но не идентична объекту в целом. Понятно, что в отличие от математических, у естественных фракталов подобие сохраняется в широком, но конечном диапазоне масштабов.

Типичные природные фракталы — деревья, реки, облака, береговая линия.

Фракталами являются дендриты (от греч. дендрон — дерево).

ТЕМА 14. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПЕРКОЛЯЦИИ

1. Введение

Исторически теория перколяции восходит к работам Флори (1941) и Стокмайера (1943), которые рассматривали процесс образования гелей при полимеризации. Однако, обычно начало теории перколяции связывают с публикацией в 1957 г. работы Броадбента и Хаммерсли. Авторы ввели в обиход название «теория перколяции» и рассмотрели процесс с математической точки зрения.

В настоящее время перколяционные процессы рассматриваются математиками, физиками, химиками, программистами, инженерами. Оказалось, что перколяция является удобной моделью для описания широкого класса явлений, которые принято называть критическими. С другой стороны, задача оказалась весьма интересной и с точки зрения чистой математики.

Большинство результатов теории перколяции получено в результате компьютерного моделирования. При этом приходится проводить многие тысячи компьютерных испытаний на больших объектах, что потребовало разработки эффективных алгоритмов.

Что же такое перколяция? Поскольку перколяцией занимаются специалисты из разных областей знаний, то для описания перколяции используются два подхода. С одной стороны, математики применяют формальный подход, основанный на представлениях теории вероятностей и теории графов, строгих доказательствах и формальных обозначениях. С другой стороны, естественники предпочитают более простой и наглядный подход, часто заменяя строгие доказательства ссылками на аналогию, интуицию и здравый смысл. Кажется разумным использовать для начального знакомства с теорией именно второй подход.

Рассмотрим квадратную сетку 3×3 (рис.). Закрасим часть квадратов черным цветом. В нашем случае их 3.

Доля закрашенных квадратов составляет

$$p = \frac{N_{черн}}{N} = \frac{1}{3}$$

Каким образом мы выбираем квадратики для закрашивания? Во-первых, можно выбирать квадратики случайно и независимо; во-вторых, можно ввести какие-либо правила. В первом случае говорят о случайной перколяции (математики называют ее еще перколяцией Бернулли), во втором — о коррелированной.

Один из основных вопросов, на которые пытается ответить теория перколяции, — при какой доле p_c закрашенных квадратов возникает цепочка черных квадратов, соединяющая верхнюю и нижнюю стороны нашей сетки? Легко сообразить, что для сетки конечного размера такие цепочки могут возникать при разных концентрациях (рис. 2). Однако, если размер сетки устремить к бесконечности, то критическая концентрация станет вполне определенной. Это строго доказано. Такую критическую концентрацию называют *порог перколяции.*

Может возникнугь резонный вопрос: а какой, собственно, смысл в этих задачах? Давайте представим, что черные квадраты – это проводник, а белые – изолятор. До тех пор, пока не возникнет цепочка проводящих участков, связывающая верх и низ образца, образец будет изолятором. При возникновении цепочки его свойства изменятся скачком, произойдет фазовый переход, образец станет проводником.

Теория перколяции привлекает к себе внимание специалистов по ряду причин:

•легкие и элегантные формулировки задач теории протекания сочетаются с трудностью их решения;

•их решение требует объединения новых идей из геометрии, анализа и дискретной математики;

•физическая интуиция бывает весьма плодотворной при решении этих задач;

•техника, развитая для теории перколяции, имеет многочисленные приложения в других задачах о случайных процессах;

•теория перколяции дает ключ к пониманию иных физических процессов.

2. Терминология

Слово «перколяция» (percolation — англ.) означает протекание. В русской литературе можно встретить и теорию перколяции, и теорию протекания, и даже теорию просачивания. Название возникло в связи с тем, что ряд первых работ в этом направлении был посвящен процессам просачивания (протекания) жидкостей или газов через пористую среду. До сих пор это направление занимает существенную часть в работах по теории перколяции.

3. Критические показатели и масштабная инвариантность

В отличие от теории температурных фазовых переходов, где переход между двумя фазами происходит при критической температуре, перколяционный переход является геометрическим фазовым переходом. Порог перколяции или критическая концентрация разделяет две фазы: в одной фазе существуют конечные кластеры, в другой существует один бесконечный кластер. Рассмотрим, например, магнитный фазовый переход. При низких температурах некоторые материалы имеют ненулевую спонтанную намагниченность. При увеличении температуры спонтанная намагниченность непрерывно уменьшается и при критической температуре исчезает. В перколяции концентрация занятых узлов играет ту же роль, что и температура в температурных фазовых переходах. Вероятность, что узел принадлежит бесконечному кластеру, аналогична параметру порядка в теории температурных фазовых переходов. Многие важные характеристики кластера (длина корреляции, среднее число узлов) вблизи перехода описываются показательной функцией с различными критическими показателями:

$P_\infty(p) \propto |p - p_c|^\beta$,

$\xi(p) \propto (p_c - p)^\upsilon$,

$S(p) \propto |p - p_c|^{-\gamma}$.

Эти показатели являются универсальными, не зависящими от вида решетки, типа перколяции, а только от размерности пространства задачи. Критические показатели связаны между собой соотношением

$2\beta + \gamma = \upsilon d$

где d – размерность пространства.

Это соотношение следует из *масштабной инвариантности* или *скейлинга* – неизменности уравнений при изменении всех расстояний в одинаковое число раз.

4. Алгоритм Хошена—Копельмана

Хотя в теории перколяции получен ряд строгих математических результатов, основной прогресс достигнут на пути использования компьютерных методов (изучение процессов путем моделирования методом Монте-Карло). Разработан ряд высокоэффективных алгоритмов, которые, в частности, позволили определить порог перколяции для множества решеток с высокой точностью.

Одним из основных алгоритмов является алгоритм многократной маркировки кластеров Хошена-Копельмана, предложенный в 1976 г. Этот алгоритм особенно полезен, когда исследуется распределение кластеров по размерам. Работа по разработке новых эффективных алгоритмов интенсивно продолжается. Особый интерес представляют алгоритмы для обработки подструктур перколяционного кластера и алгоритмы, основанные на параллельных вычислениях.

ТЕМА 15. КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ

В этой главе мы познакомимся еще с одним классом моделей – клеточными автоматами. Впервые клеточные автоматы были предложены в 1948 году Нейманом и Уламом в качестве модели биологического воспроизводства. Особенностью клеточных автоматов является то, что в этих моделях пространство и время дискретны. Пространство представляет из себя регулярную решетку, клетки которой могут находится в конечном числе состояний. Состояние клетки определяется её окружением. Состояние всех клеток меняется одновременно.

16.1 Игра «Жизнь»

В 1970 году Джон Х. Конвей предложил клеточный автомат, который, на сегодняшний день стал, вероятно, самым известным. Клеточный автомат получил название игра «Жизнь», так как возникающие процессы очень похожи на реальные, происходящие при зарождении, развитие и гибели колонии живых организмов.

Клеточный автомат задается следующими параметрами. Клетки на квадратной доске могут находится в двух состояниях. «Живая клетка» (значение 1) выживает на следующем временном шаге, если имеет только два или три живых соседа. Если соседей меньше двух, то клетка умирает из-за обособленности, а если больше трех, то из-за скученности (перенаселения). «Мертвая клетка» (значение 0) оживает на следующем временном шаге только в том случае, если имеет три соседа. Каждая клетка имеет восемь соседей: клетки, которые имеют с ней общие стороны или вершины. Изменение состояния всех клеток происходит одновременно, т.е данная система, система с дискретным временем.

В игре «жизнь» встречаются самые разнообразные конфигурации «живых клеток»:

- Конфигурации, которые вымирают за конечное число шагов;
- Устойчивые или стационарные конфигурации, которые с точностью воспроизводятся на каждом временном шаге;

- Периодически меняющиеся конфигурации, т.е конфигурации которые претерпев ряд изменений, через несколько шагов возвращаются в конечное состояние, после чего процесс повторяется вновь;
- Движущиеся конфигурации, например, «глайдер»;
- «Генераторы»- конфигурации, которые порождают новые конфигурации;

16.2 Модель Винера- Роземблюта

В 1946 году Винер и Роземблют предложили простую модель, которая позволяет анализировать разработанные режимы распространения возбуждения в однородной нейронной сети или сердечной мышце. В соответствие с этой моделью, возбудимая среда состоит из элементов, которые имеют три возможные состояния: состояние покоя, состояние возбуждения, рефрактерное состояние. Первоначально элементы находятся в состояние покоя. Под действием внешнего возбуждении, интенсивности не ниже пороговой, элемент переходит в состояние возбуждения и остается в нем в течение определенного времени τ_{ε}. Состояние возбуждения сменяется рефрактерным состоянием. Никакое внешнее воздействие не может перевести элемент из рефрактерного состояния в возбужденное состояние. По прошествии определенного времени элемент возвращается из рефрактерного состояния в состояние покоя и вновь может быть возбужден. В рамках такой модели удалось описать возникновение в активной среде спиральных волн и ряд других интересных эффектов.

16.3 Модель Ва- Тор

Одним из недостатков модели Вольтера-Лотки является то, что численность популяции задаётся действительным, а не целым числом. Понятно, что не может быть 13,45 зайцев или волков – популяция может насчитывать только целое число животных. Второй недостаток связан с тем, что мы используем дифференциальные уравнения: изменение численности популяций на одну особь следует рассматривать как бесконечно целое. Это предположение справедливо только в том случае, когда популяции насчитывают большое число особей, что далеко не всегда справедливо, особенно говоря о хищниках. Кроме того, модель не учитывает распределение особей в пространстве.

Одной из основных моделей, позволяющей избавиться от этих недостатков, является модель Ва-Тор, предложенная Дьюдни в 1984 году. В этой модели жизненное пространство представляет собой клетчатую доску с тороидальными граничными условиями, т.е соседом слева у крайней левой клетки является клетка, из последнего столбца, а соседом сверху у клеток из первой строки – клетки из последней строки.

Динамика популяций в рамках этой модели схожа с динамикой модифицированной модели Вольтера- Лотки. Численность каждой из популяций испытывает затухающие периодические колебания, смещенные по фазе. Поскольку в данном случае численности популяций испытывают случайные колебания, то кривые не являются гладкими (рис.).

ТЕМА 16. ВЕЙВЛЕТЫ

В самых разных областях науки возникают задачи, связанные с анализом пространственных полей со сложной, многомасштабной структурой либо временных сигналов с меняющимся со временем спектральным составом. Эти задачи заставляли исследователей пытаться построить специальные функциональные разложения, близкие по своей идеологии описанному выше иерархическому базису. Центральной идеей всех этих подходов было использование базиса, каждая функция которого характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и место ее локализации в физическом пространстве (во времени).

Слово «вейвлет» (от англ. wavelet – маленькая волна или рябь) было введено А. Гроссманном и Ж. Морле в 1984 г. в работе, посвященной проблеме анализа сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время (положение) всплеска в сигнале, и его спектральный состав (масштаб). Статья, где были сформулированы основные определения и доказаны основополагающие теоремы, вызвала огромный интерес, и уже к началу 90-х годов вейвлет-анализ превратился в развитую область математической физики, нашедшую широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других.

Как уже отмечалось, вейвлеты используются как при анализе временных сигналов, так и при исследовании структуры пространственных полей. Временные ряды представляют собой одномерный сигнал, и все основные идеи проще продемонстрировать на задачах анализа временных последовательностей. По этой причине забудем на некоторое время о пространственных полях и переключимся на сигналы вида $f(t)$.

Первая попытка построить функциональный базис, состоящий из функций, каждая из которых характеризует пульсации определенной продолжительности в конкретный момент времени, принадлежит А.Хаару (1909). Первые семь функций Хаара, построенные на единичном отрезке, показаны на рис. Каждая функция представляет собой пару следующих друг за другом прямоугольных импульсов с разными знаками и одинаковой длительностью. Среднее значение любой функции равно нулю, а совокупность функций образует полный ортонормированный базис. Каждая функция строго локализована в физическом пространстве (во времени), но характеризуется медленно спадающим спектром частот (как $1/v$).

Следующим шагом стали функции Литлвуда-Пелли (1937). Именно это семейство функций получается при построении одномерного иерархического базиса. Функции строятся путем вырезания полосы частот в пространстве Фурье. Это дает строгую локализацию в пространстве частот, но медленное затухание функции в физическом пространстве (во времени): функции описывают осцилляции, амплитуда которых падает как $1/t$.

Важным этапом в развитии идеи локального анализа спектральных (частотных) свойств стало преобразование Габора (1946), называемое также фурье-преобразованием в окнах. Функции Габора представляют собой гармонический сигнал, модулированный функцией Гаусса.

Вейвлеты объединили в себе два важных свойства: подобие и выраженную локализованность в физическом и фурье-пространствах. Сформулируем требования, которым должно удовлетворять семейство функций, чтобы быть вейвлетами.

1. *Допустимость.*
2. *Подобие.*
3. *Обратимость.*
4. *Регулярность.*

Согласно последнему требованию, и функции Хаара, и функции Литлвуда -Пелли не попадают под определение вейвлетов.

В отличие от преобразования Фурье, вейвлет-преобразование допускает широкий выбор анализирующей функции. Согласно первому требованию, вейвлет всегда является знакопеременной функцией, включающей обычно небольшое количество осцилляции. Выбор конкретного вида вейвлета зависит от целей проводимого анализа.

Приведем несколько примеров широко используемых вейвлетов.

Непрерывное вейвлет-преобразование

Вейвлет-преобразование отображает пространство функций одной переменной (время) в пространство функций двух переменных (время и частота, или втемя и масштаб) и является избыточным. Избыточность непрерывного вейвлет-преобразования выражается в коррелированности вейвлет-коэффициентов, которая тем больше, чем больше рассматриваемый масштаб. Иначе говоря, чем больше масштаб, тем меньше независимых точек в вейвлет-разложении. Этот недостаток устраняется в дискретном вейвлет-представлении (пример тому – рассмотренный выше иерархический базис, в котором число функций геометрически уменьшается с ростом пространственного масштаба).

Преимущество вейвлет-преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем и указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале в каждый конкретный момент времени.

В заключение отметим важное свойство вейвлет-представления функций – на этапе разложения сигнала по вейвлетам (анализа) и этапе восстановления исходного сигнала по его вейвлет-образу (синтеза) можно использовать различные семейства вейвлетов.

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Спектры периодических (пусть даже достаточно сложных) колебаний имеют линейчатую структуру, описывая конечный набор частот, присутствующих в сигнале. При переходе к стохастическим колебаниям спектры становятся сплошными, а признаком развитой турбулентности служит, как известно, развитый инерционный интервал. Однако это не означает, что в развитых турбулентных течениях отсутствуют выделенные крупномасштабные пульсации. Экспериментальные исследования турбулентной конвекции в замкнутых объемах показывают, что течения на масштабах, сравнимых с размерами самой полости, характеризуются целыми сериями выделенных частот, причем периоды колебаний могут в тысячи раз превышать время оборота жидкости в полости. Эти результаты подкрепляются и наблюдениями за природными системами. Так, Солнце, являющее собой крупнейшую из доступных прямому наблюдению конвективных ячеек (именно конвекция — основной источник движения на Солнце, характеризуется гигантским значением числа Релея), демонстрирует целый набор циклов с периодами от нескольких дней до тысяч лет.

Вейвлет-представление проектирует одномерный сигнал (который был функцией только времени) на плоскость «время-частота» и позволяет увидеть изменение во времени спектральных свойств сигнала.

4 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1. Перечень обязательной (основной) литературы

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: идеи, методы, примеры. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 320 с.
2. Семененко М.Г. Математическое моделирование в Mathcad. – М.: Альтекс-А, 2003. – 208 с.
3. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 2007. – 343 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Практикум. – М.: Высш. шк., 2005. – 295 с.
5. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Практикум по компьютерному моделированию. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 352с.
6. Охорзин В.А. Компьютерное моделирование в системе MathCad. – М.: «Финансы и статистика», 2006. – 144с.
7. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете Matlab. – М.: Телеком, 2003 – 592с.
8. Трусов П.В. Введение в математическое моделирование. – М.: Университетская книга, Логос, 2007. – 440 с.
9. Плохотников К.Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 280 с.
10. Тарсевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. вводный курс. М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.
11. Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудери А.Д.Р. Физические основы математического моделирования. –М.: «Академия», 2005. – 320 с.
12. Мажукин В.И., Королева О.Н. Математическое моделирвоание в экономике. – М.: Флинта, 2005. – 232 с.
13. Кетков Ю., Кетков А., Шульц М. Matlab 6.x: программирование численных методов – СПб: БХВ – Петербург, 2004. – 660 с.

14. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. Matlab 7. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 1104 с.

4.2. Перечень дополнительной литературы

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. (Линейная алгебра и нелинейные уравнения) – М.: Высшая школа, 2001. – 266 с.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы. (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) – М.: Высшая школа, 2001. – 266 с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1992. – 402 с.
4. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1992.– 363 с.
5. Мэтьюз Д.Г., Куртис Ф.Д. Численные методы. Использование Matlab. Пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
6. Иглин С.П. Математические расчеты на базе Matlab. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.– 640 с.
7. Ращиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач: Учеб пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005.– 208 с.
8. Таранцев А.А. Инженерные методы теории массового обслуживания. – СПб.: Наука, 2007. – 175 с.
9. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Дрофа, 2006. – 206с.
10. Емельянов А.А. Имитационное моделирование экономических процессов. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 368 с.

4.3. Перечень методических пособий

1. Масловская А.Г., Чепак Л.В. Численные методы. Моделирование на базе Matlab. Уч.-мет. пособие. Благовещенск, 2007. – 106с.

2. Масловская А.Г., Рыженко А.В. Основные приемы работы и создание графического интерфейса пользователя в Matlab. Уч.-мет. пособие. Благовещенск, 2008. – 102с.

4.4 Практикум

Каждая практическая (лабораторная) работа включает освоение основных теоретических минимумов по каждой теме, а также выполнение индивидуальных заданий. Примеры заданий по каждой из лабораторных работ представлены ниже.

Практическая работа №1. Основные приемы работы с пакетом Matlab. Графика в Matlab. Конструирование графического интерфейса пользователя.

Требуемые к выполнению задания содержатся в методическом пособии: Масловская А.Г., Рыженко А.В. Основные приемы работы и создание графического интерфейса пользователя в Matlab.

Практическая работа №2. Статические модели. Обработка экспериментальных данных

Вариант 1

С помощью кубической сплайн-интерполяции построить график зависимости значений коэффициентов внутреннего трения (вязкости) для водного раствора сахара (концентрация сахара 20%) при различных значениях температуры, найти значение коэффициента вязкости при значении температуры 32°С:

T, °С	0	10	20	30	40	50	60	80
$\eta \cdot 100, г/(см \cdot с$	3,804	2,652	1,96	1,504	1,193	0,97	0,808	0,59

Привести графики исходных данных, результатов сплайн-интерполяции и погрешности аппроксимации.

Практическая работа №3. Динамические модели, описываемые ОДУ (задачами Коши и краевыми задачами)

Задание 1

варианты 1

Скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству остающегося радиоактивного вещества. (Соответствующее дифференциальное уравнение распада записывается в виде: $y' = -ky$.) Приняв коэффициент пропорциональности указанной зависимости $k = 0.01 + 0{,}00125 \cdot i$ 1/*сек*, начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная масса распадающегося вещества 90+2·*i г*, определить, сколько вещества останется в момент $t = 100$ *с*. Провести сравнение результатов для некоторого выбранного шага *h*, *h*/2 и со значением точного решения. Сделать вывод о сходимости.

Задание 2

вариант 1

Решите уравнение, описывающее модель Лотки-Вольтерры борьбы за существование:

$$\begin{cases} y_1' = Py_1 - py_1y_2 \\ y_2' = -Ry_2 + ry_1y_2 \end{cases},$$

где P – увеличение числа жертв в отсутствие хищников, R – уменьшение числа хищников в отсутствие жертв. Вероятность поедания хищником жертвы пропорциональна их числу y_1y_2, при этом слагаемое $-py_1y_2$ соответствует вымиранию жертв, а ry_1y_2 – появлению хищников. Пусть $P = 0.8 + 0.01 \cdot i, R = 1 + 0.1 \cdot i, p = r = 0.001 + 0.00125 \cdot i$, где i – номер варианта. В начальный момент времени было 1000 жертв, 1100 хищников. При помощи выбранного солвера решите систему ОДУ для $t \le 100$ и постройте график зависимости изменения хищников при изменении жертв.

Задание 3

Вариант 1

Уравнение, описывающее изменение температуры T в вязкой жидкости, текущей между двумя параллельными пластинами ($y = 0, y = 2H$) имеет вид:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4U^2\mu}{H^4k}(H - y)^2,$$

где μ, k, U – коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности и максимальная скорость жидкости соответственно. Пусть

$\mu = 0{,}1, k = 0{,}08, U = 3, H = 3$. Вычислить распределение температуры, если на одной пластине поддерживается температура $T = 0$, а на другой $T = 5$.

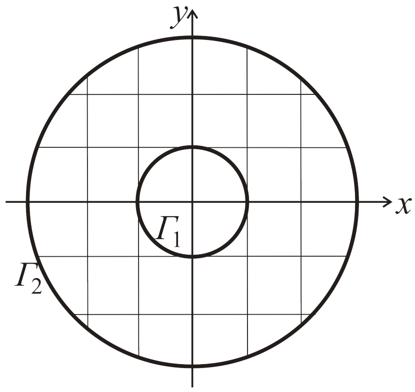
Практическая работа №4. Динамические модели, описываемые уравнениями в частных производных. Моделирование в PDE tool Matlab

Задание к работе:

Определить значение искомой функции внутри двумерной области с указанными краевыми условиями. Решение уравнения Лапласа $\Delta U = 0$ найти, используя, встроенный инструментарий ППП Matlab PDE tool. Выполнить графическое представление (2-х и 3-х мерное) и анализ с полученных результатов.

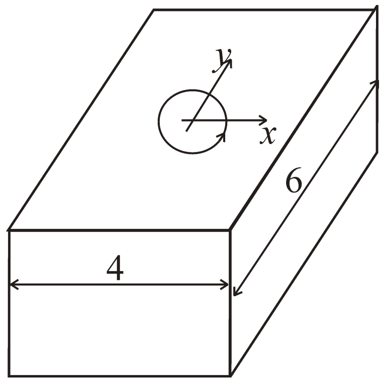
Вариант 1

1. Найти стационарное распределение температуры, описываемое приближенным решением уравнения $\frac{\partial^2U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2U}{\partial y^2} = 0$, в области $4 \le x^2 + y^2 \le 36$, удовлетворяющее краевым условиям $U|_{\Gamma_2} = x^2 + 2y^2, U|_{\Gamma_1} = 3$



2. В задаче упругого кручения призматических стержней уравнение $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-2G\theta$ связывает U – функцию напряжений, G – модуль упругого сдвига и θ – угол скручивания для каждого сечения. Найти решение данного уравнения в стержне заданной геометрии, зная, что $U=0{,}001$ на границах.

(В решении рассмотреть плоскость сечения *oxy* и используя линейность задачи нормировать переменные, положив *G*θ=1)



Практическая работа №5. Оптимизационные модели. Решение прикладных задач с помощью Optimization toolbox Matlab.

1. Найти локальные минимумы функции $f(x)=e^{x^2}+\sin(3\pi x)$ на отрезке $[-1.5;1.5]$.
2. Минимизируйте функцию двух переменных

✓ $f(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$, выбрав отрезки изменения аргументов $x\in[1,2], y\in[0,1]$.

✓ $f(x,y)=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2$, выбрав отрезки изменения аргументов $x\in[-1.5,2.5], y\in[-1.5,2.5]$ (Декартов лист)

3. Решите классическую задачу линейного программирования о составлении рациона питания. Имеются три типа продукта П1, П2, П3 разной цены, каждый из которых содержит определенное количество питательных ингредиентов И1, И2, И3, И4 (табл.1). Известно, что в день требуется: И1 – не менее 250ед., И2 – не менее 60 ед., И3 – не менее 100 ед., И4 – не менее 220ед. Требуется минимизировать затраты на приобретение продуктов. (Очевидно, что количество приобретаем продуктов не может быть отрицательным).

	П1	**П2**	**П3**
И1	4	6	15
2	2	2	0
3	5	3	4
И4	7	3	12
Цена	44	35	100

4. Решить задачу Марковица об определение состава инвестиционного портфеля рискованных ценных бумаг.

Пусть заданы следующие значения для матрицы V, вектора y и желаемой доходности портфеля a:

$$V = \begin{bmatrix} 102 & 27.1 & -52.3 & 66.5 \\ 27.1 & 148.8 & 52.1 & -66.4 \\ -52.3 & 42.1 & 246.5 & 56.9 \\ 66.5 & -66.4 & 56.9 & 272.3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 11.3 \\ 13.2 \\ 16.1 \\ 17.4 \end{bmatrix}, \quad a = 15$$ или в обозначениях,

принятых для описания функции quadprog :

$$Aeq = \begin{bmatrix} 11.3 & 13.2 & 16.1 & 17.4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad beq = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad lb = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T .$$

Практическая работа №6. Моделирование в системе SIMULINK

Моделирование временных характеристик динамической системы с прямыми связями

Исходные данные

Замкнутая линейная динамическая система, состоящая из двух параллельных колебательных звеньев, описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 2b_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + \omega_{01}^2 y_1(t) = k_1 v(t);$$
$$\frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + 2b_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + \omega_{02}^2 y_2(t) = k_2 v(t);$$
$$y(t) = K\sum_{i=1}^{2} y_i(t),$$

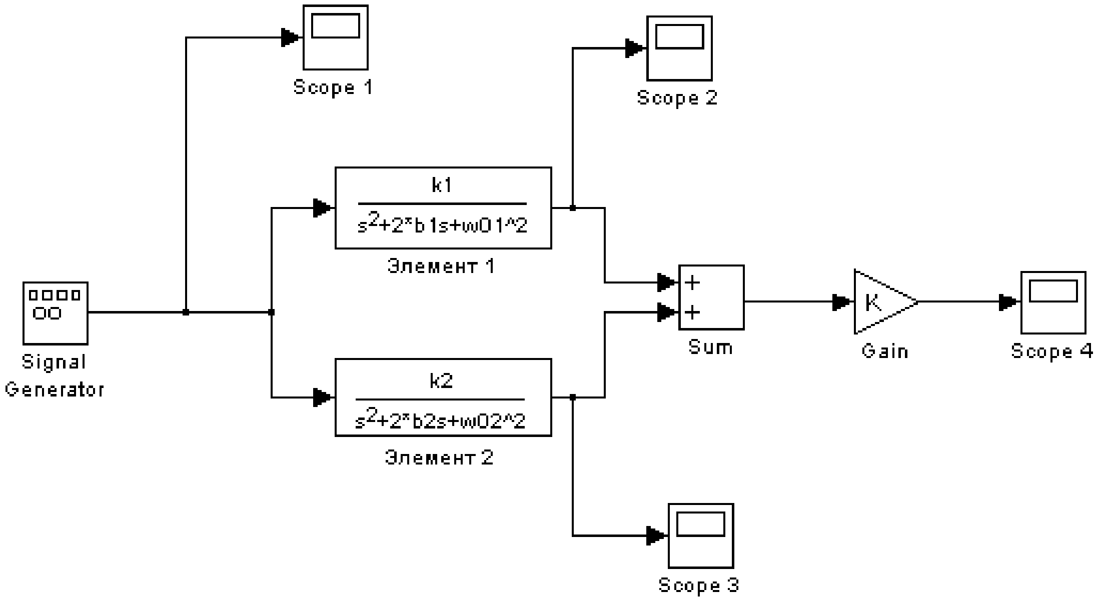
где $y_i(t)$ – выходные временные характеристики звеньев системы; b_i и ω_{0i} – соответственно, коэффициенты затухания и частоты их собственных колебаний; k_i – некоторые параметры соответствующих звеньев; $v(t)$ – функция внешнего воздействия; $y(t)$ – результирующая выходная характеристика системы; K – коэффициент связи.

Математическая модель рассматриваемой системы, представленная в типовой форме записи через передаточные функции, имеет вид:

$$y_1(s) = W_1(s)v(s),\ W_1(s) = \frac{k_1}{s^2 + 2b_1 s + \omega_{01}^2};$$
$$y_2(s) = W_2(s)v(s),\ W_2(s) = \frac{k_2}{s^2 + 2b_2 s + \omega_{02}^2};$$
$$y(s) = v(s)K\sum_{i=1}^{2} W_i(s),$$

где $W_i(s)$ – передаточные функции соответствующих процессов.

Для моделирования временных характеристик рассматриваемой системы можно использовать *simulink*-схему, представленную ниже.



№ п/п	k1	b1	ω01	k2	b2	ω02	K
1	100	1	10	150	2	5	0,4

Задание 1

Используя демонстрационные возможности *MatLAB*, просмотрите примеры построения и применения *simulink*-схем.

Задание 2

Создайте *simulink*-схему, согласно индивидуальным вариантам заданий, и получите временные характеристики: $v(t)$ – входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 20 рад/с; $y_i(t)$ – выходов элементов системы; $y(t)$ – результирующего выхода системы.

Практическая работа №7. Моделирование физических процессов.

Тема 1. «Динамика материальной точки»

ЗАДАНИЕ №1 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Провести численное моделирование движение тела в гравитационном поле Земли согласно описанной программной реализации. Сравнить результаты с аналитическим решением.

2. Вывести координаты от времени, скорости от времени, скорости от координаты. Построить зависимость скорости от координаты.

3. Построить зависимость кинетической и потенциальной энергий от времени.

ЗАДАНИЕ №2 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Для конкретных параметров и начальных условий провести моделирование траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту, используя пошаговое вычисление аналитических зависимостей (10-12). Построить графики зависимостей $x(t), y(t), y(x), v_x(t), v_y(t)$.
2. Провести моделирование, используя для решения системы ОДУ (9) встроенные функции ППП Matlab. Построить графики зависимостей $x(t), y(t), y(x), v_x(t), v_y(t)$. Провести численное сравнение с результатами, полученными в п.1.
3. Построить зависимость перемещения материальной точки и угла между вектором скорости и осью OX от времени.
4. Сравните реализацию той же модели, но без учета сил трения. Можно ли считать реалистичной модель движения тела в гравитационном поле Земли, не учитывающей наличие силы трения?
5. Оформить отчет по лабораторной работе.

Пример набора параметров:

$x0 = 0, y0 = 10м, \alpha = 45°, k_1 = 0.16, v_0 = 30м/с, m = 50кг, t \in [0,10]с, \Delta t = 0.001с$.

Тема 2. «Задача Кеплера»

ЗАДАНИЕ №1 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Для системы (1) организовать пошаговый метод Эйлера для решения системы ОДУ, используя достаточно малое значение шага по времени Δt. Построить зависимости координат от времени, скорости от времени и траекторию движения.

ЗАДАНИЕ №2 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Для системы (2) организовать пошаговый метод Эйлера для решения дифференциального уравнения, используя достаточно малое значение шага по времени Δt. Графическое представление получить в полярных координатах.
2. Сравнить результаты моделирования с результатами, полученными в задании №1.

Тема 3. «Моделирование колебательных процессов»

ЗАДАНИЕ № 1 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Построить зависимость координаты, скорости линейного гармонического осциллятора от времени, а также фазовую траекторию осциллятора, используя численное решение задачи (4). Начальные условия и параметры модели выбрать самостоятельно.
2. Построить график зависимости отклонения между численными значениями координаты и скорости и аналитическими.
3. Вычислите полную энергию гармонического осциллятора для тех моментов времени, в которые известны значения координаты и скорости.

ЗАДАНИЕ № 2 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. При воздействии на линейный гармонический осциллятор внешней переменной силы система будет совершать вынужденные колебания по закону:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma\frac{dx}{dt} + \frac{F(t)}{m} \qquad (6)$$

Найдите численное решение для периодически действующей силы $\boxed{\frac{F(t)}{m} = A_0\cos(\omega t)}$. Проведите расчеты и постройте зависимости координаты и скорости от времени для колебательной системы с параметрами $\omega_0 = 3$, $x(0)=1$, $v(0)=0$, $\gamma=0.5$, $A_0=1$, $\omega=2$.

2. Сравните результаты с результатами, полученными для предыдущего случая. В чем состоит существенное отличие поведения функции $x(t)$ от случая невозмущенного движения?

3. Чему равны период и частота после нескольких колебаний?

4. Исследуйте и опишите особенности движения линейного гармонического осциллятора под влиянием силы $F(t)$:

1) $F(t) = const = F_0$;

2) $F(t) = A\sin(\beta t)$;

3) $F(t) = F0\exp(-\alpha t)$,

считая, что система в начальный момент времени находилась в положении равновесия. Рассмотрите случаи: $\alpha, \beta << \omega, \alpha, \beta \cong \omega, \alpha, \beta >> \omega$.

ЗАДАНИЕ № 3 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Реализовать модель, соответствующую учету сил трения при совершении колебаний, решая ОДУ (7) численными методами и с помощью встроенных функций ППП Matlab, предварительно самостоятельно выбрав константы и параметры моделирования. Оценить $\boxed{x_{крит}}$. Сравнить результаты моделирования с результатами, полученными в задании №1.

Тема 4. «Моделирование статических электрических и магнитных полей»

ЗАДАНИЕ №1 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Создайте программу, позволяющую строить потенциал и напряженность электрического поля протяженного диполя, т.е. диполя, состоящего из N (>10) зарядов, знаки которых последовательно чередуются.
2. Сравнить электрическое поле при четном и нечетном числе зарядов, составляющих диполь, в ближней и дальней зонах.

3. Сравнить электрическое поле с электрическим полем точечного заряда.
4. Исследуйте зависимость электрического поля протяженного диполя в ближней и дальней зонах от расстояния между зарядами.

ЗАДАНИЕ №2 К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Провести вычисления магнитного поля витка с постоянным током, имеющего форму эллипса с полуосями $a = 10см, b = 12см$, по которому проходит ток $I = 10^{-5} A$. Контур располагается в плоскости $x = 0$ – YOZ. Плоскость для вычисления компонент вектора магнитной индукции выбрать самостоятельно. Моделирование провести в размерных физических единицах. Оформить отчет по лабораторной работе.

Практическая работа №8. Случайные процессы

Использовав генератор псевдослучайных чисел Matlab, провести моделирование броуновского движения с применением возможностей анимации для трехмерного случая.

Практическая работа №9. Моделирование простейших фракталов

Задание 1

Вариант 1.

Постройте стохастический фрактал типа дендрит, используя следующие преобразования:

$$T_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$T_2 : \begin{cases} x' : \dfrac{3x \cdot y + 2}{5}, \\ x' : \dfrac{\cdot x \cdot 3y + 1}{5} \end{cases}.$$

Задание 2

Вариант 1.

Построить фрактал Жюлиа при $a = -0.75, b = 0$. Показать фрагмент границы фрактала, установить ее самоподобность. Пояснить основные шаги алгоритма. Чем отличается программная реализация построения фрактала Жюлиа от программной реализации фрактала Мандельброта?

Практическая работа №10. Модели СМО

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Рассмотреть поведение системы, описанной в примере 1, за 50 интервалов времени, воспользовавшись соотношением (3). Через сколько шагов состояние процесса стабилизируется? Что означает полученное распределение вероятностей?
2. Провести имитационное моделирование отдельного прибора в *n* состояниях.
3. Провести моделирование работы одноканальной СМО с отказами (найти зависимости вероятностей простоя и отказа), используя выражение для вероятности свободного канала (7). Принять $\lambda = 5, \mu = 7, P_0 = 1, t = \overline{0,1}$. К какому значению будет стремиться вероятность отказа при $\lambda >> \mu$?
4. Провести моделирование СМО (найти зависимости вероятностей простоя и отказа): Автомобили подходят к автозаправочной станции, средняя интенсивность заявок 10 (у.е.), интенсивность обслуживания – 3 (у.е.). Число колонок на АЗС – 4. Рассмотреть процесс в течение времени $t \in [0, T]$,

T=4 (у.е. времени). Считать, что при всех занятых колонках автомобиль покинет заправку. Найти характеристики многоканальной СМО с отказами в установившемся режиме.

5. Решить задачу 4, считая, что на заправке работают две колонки и в очереди автомобилей есть только три места. Рассчитайте основные характеристики многоканальной СМО с очередью в установившемся режиме.

4.5. Тематика индивидуальных зачетных работ

Перечень тематик, предлагаемых студентам в рамках выполнения индивидуальных зачетных работ:

«Оптимизационные графовые модели»

1. Реализация алгоритма решения задачи китайского почтальона.
2. Реализация алгоритма Прима для нахождения кратчайшего остова графа.
3. Реализация алгоритма Флойда поиска матрицы кратчайших расстояний.

«Экономические модели»

4. Нелинейные модели. Оценка доходности облигации при погашении в конце срока.
5. Модель ресурсного планирования объема выпускаемых изделий на промышленном предприятии.
6. Нелинейные модели. Моделирование доходности банковских операций.
7. Модель взаимозачета долгов предприятий.
8. Макромодель равновесия рыночной экономики.
9. Макромодель экономического роста.
10. Расчеты по обслуживанию кредитов и долговым ценным бумагам в ППП Matlab.
11. Математическое моделирование рекламной кампании.
12. Линейные балансовые модели. Определение объема выпуска продукции при изменении спроса.
13. Моделирование и анализ взаиморасчетов предприятий.

«Модели физических процессов»

14. Модель движения тел в гравитационном поле Земли.
15. Моделирование задачи Кеплера.
16. Модели статический электрических и магнитных полей.
17. Моделирование движения электрических зарядов в электрических и магнитных полях.

18. Моделирование случайных блужданий.
19. Моделирование случайных процессов методом Монте-Карло. Имитация броуновского движения частицы.
20. Моделирование случайных блужданий.
21. Модели физических процессов, использующих дифференциальные уравнения I-го порядка.
22. Моделирование колебательных процессов.
23. Моделирование процесса рассеивания α-частиц.

Модели в др. областях

24. Модели типа «хищник-жертва».
25. Математическая модель гонки вооружений.
26. Математическая модель боевых действий двух армий.
27. Моделирование задач теории игр.
28. Моделирования эколого-биологический задач. Задача экологического прогнозирования.
29. Динамика биологических популяций.
30. Математическая модель колебательных процессов в химии
31. Решение задач линейного программирования в ППП Matlab.
32. Решение задач нелинейного программирования в ППП Matlab.
33. Решение задач оптимизации в MathCad.
34. Финансовые функции в MathCad. Прогнозирование и построение линий тренда.
35. Статистический анализ в MathCad.

Дополнительные темы:

1. Модели, реализуемые клеточными автоматами.
2. Модель Изинга.
3. Алгоритм Метрополиса.
4. Фрактальные модели.
5. Модели сетевого планирования.
6. Модели систем массового обслуживания.
7. Клеточные автоматы.
8. Модели, описываемые сетями Петри.
9. Вейвлет-анализ.

5. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин, включая мультимедиа проектор.

Для проведения лабораторных работ необходим компьютерный класс на 10-13 посадочных рабочих мест пользователей (лабораторные занятия проводятся в подгруппах). В классе должны быть установлены пакеты прикладных программ Matlab 8.0, Mathcad 13.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

I семестр

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		метод пособияагляд. иИспользуемые	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			(семин.)Практич.	Лабораторные		Содержание	часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1-4			лекция, доп. литература			
2	1	1-5		1	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №1
3	2	1-4			лекция			
4	2	4-6		2	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №2
5	2	7-8			лекция			отчет по индивид. заданию №2
6	3	1-3		3	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №3
7	4	1-3			лекция			
8	4	4-6		4	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №4
9	5	1-3			лекция			
10	6	1-3		5	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №5
11	6	4-6			лекция			
12	7	1-3		6	лекция	подготовка к защите лаб. работы	2	
13	7	4-6			лекция			
14	8	1-2		6	лекция	подготовка к защите лаб. работы	2	
15	9	1-3			лекция		2	
16	9	4-6		6	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №6
17	9	7-10			лекция	подготовка к зачету		

II семестр

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые нагляд. и метод пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Практич. (семин.)	Лабораторные		Содержание	часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	1-3			лекция, доп. литература			
2	10	4-6		7	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №7
3	10	7-8			лекция			
4	10	9-10		8	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №8
5	11	1-3			лекция			отчет по индивид. заданию №2
6	11	4-6		9	лекция	подготовка к защите лаб. работы		
7	12	1-3			лекция			
8	12	4-6		9	лекция	подготовка к защите лаб. работы		отчет по лабораторной работе №9
9	12	7-8			лекция			
10	12	9-10		10	лекция	подготовка к защите лаб. работы		
11	12	11-12			лекция			
12	12	13-15		10	лекция	подготовка к защите лаб. работы	2	отчет по лабораторной работе №10
13	13	1-3			лекция			
14	14	1-2		11	лекция		2	
15	15	1-3			лекция		2	
16	16	1-2		11	лекция	подготовка к защите индив. зачетн. работы		отчет по индивид. зачет. работе

7. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор и руководитель практических (лабораторных) занятий – доцент, к.ф.-м.н. Масловская А.Г.