Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
8 сентября 2008г.

Топологические векторные пространства

Учебно – методический

комплекс дисциплины

для специальности 010101 «Математика»

Составитель: С.А.Подопригора

Благовещенск
2008

ББК

К

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Подопригора С.А.

Топологические векторные пространства**.** Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2008. − 33с.

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа по дисциплине " Топологические векторные пространства " для специальности 010101 «Математика».

Курс 4, 5 Семестр 8,9 Лекции 92 час., Экзамен 8 семестр, Практические (семинарские) занятия 64 час., Зачет (9 семестр), Курсовая работа (нет), Лабораторные занятия (нет), Самостоятельная работа 121 час., Всего 277 часов.

Составитель: Подопригора С.А., старший преподаватель, факультет математики и информатики, кафедра математического анализа и моделирования.

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Цель курса – изложение основных разделов теории линейных топологических пространств.

1.2 Перечень основных навыков и умений, приобретаемых при изучении дисциплины

Основная задача курса – дать студентам разумный язык и действенные методы в тех задачах анализа, для которых рамки классического гильбертова или банахова функционального анализа оказываются слишком узкими.

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Федеральный компонент

Программа курса «Топологические векторные пространства» составлена на основе авторских разработок.

2.2 *Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий* – 92 часов

1. Топологические векторные пространства (31 ч.)

Топологии векторного пространства. Произведения пространств, подпространства, прямые суммы, фактор пространства. Топологические векторные пространства конечной размерности. Линейные отображения и гиперплоскости. Ограниченные множества. Метризуемость. Комплексификация.

2. Локально выпуклые топологические векторные пространства (31 ч.)

Выпуклые множества и преднормы. Нормированные и нормируемые пространства. Теорема Хана - Банаха. Локально выпуклые пространства. Проективные топологии. Индуктивные топологии. Бочечные пространства. Борнологические пространства. Отделение выпуклых множеств. Компактные выпуклые множества.

3. Линейные отображения (30 ч.)

Непрерывные линейные отображения и топологические гомоморфизмы. Теорема Банаха о гомоморфизме. Пространства линейных отображений. Равностепенная непрерывность. Принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха - Штейнгауза. Билинейные отображения. Топологические тензорные произведения. Ядерные отображения и пространства. Примеры ядерных пространств. Проблема аппроксимации. Компактные отображения.

2.3 Практические занятия, их содержание и объем в часах – 64 часов

1. Предварительные сведения из линейной алгебры и топологии. (5 ч.)
2. Общие свойства топологических векторных пространств.(5 ч.)
3. Линейные формы и сопряжённые пространства. (5 ч.)
4. Метризуемые топологические векторные пространства. (5 ч.)
5. Выпуклость (5 ч.)
6. Нормируемость (5 ч.)
7. Локально выпуклые пространства и теорема Хана - Банаха (5 ч.)
8. Способы построения локально выпуклых пространств (5 ч.)
9. Пространства линейных отображений и операторные топологии (4 ч.)
10. Принцип равномерной ограниченности (4 ч.)
11. Билинейные формы (4 ч.)
12. Топологические тензорные пространства (4 ч.)
13. Ядерные отображения и пространства (4 ч.)
14. Компактные отображения (4 ч.)

2.4 Самостоятельная работа студентов – 56 часов

1. Чтение основной литературы по предмету.
2. Решение практических задач.
3. Подготовка к практическим занятиям.
4. Подготовка к контрольным работам.

2.5 Вопросы к экзамену

1. Определение топологического векторного пространства. ТВП и основные свойства, следующие из аксиом $(ЛТ)_1$ и $(ЛТ)_2$.
2. Свойства базиса окрестностей нуля в ТВП.
3. Равнометризуемость ТВП.

4. Пополнение хаусфордова ТВП.
5. Топологическая прямая сумма.
6. Факторпространство и фактортопология.
7. Теоремы об изоморфизме конечномерных пространств.
8. Гиперплоскости в ТВП.
9. Ограниченные и вполне ограниченные подмножества ТВП, их свойства.
10. Компактность в хаусдорфовых ТВП.
11. Критерий метризуемости хаусдорфова ТВП.
12. Метризуемость факторпространства и произведения.
13. Непрерывное продолжение умножения в ТВП на комплексное расширение числового поля.
14. Комплексификация.
15. Свойства выпуклых подмножеств.
16. Преднорма и её свойства.
17. Нормируемость хаусдорфова ТВП.
18. Нормируемость факторпространства и произведения.
19. Теорема Мазура.
20. Теорема Хана - Банаха.
21. Локально выпуклые пространства (ЛВП). Порождающее семейство преднорм. Пополнение.
22. Теорема о существовании непрерывного линейного продолжения непрерывной линейной формы, определённой на ТВП с локально выпуклой топологией и её следствия.
23. Свойства предкомпактных подмножеств в ЛВП и в квазиполном ЛВП.

3 ТРЕБОВАНИЯ К ЗНАНИЯМ СТУДЕНТОВ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ НА ЭКЗАМЕНЕ

Оценка «отлично» ставится при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом, по крайней мере, одно из практических заданий должно быть выполнено верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, либо если не решена ни одна задача из предлагаемых в билете.

4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

4.1 Основная литература

1. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359 с.
2. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.
3. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., 1959.
4. Kelley J.Z., Namioka I/ Linear topological spaces. New York: D/ Van Nostrand Company, Inc., 1963. 256 c.

II. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ НА КАЖДЫЙ СЕМЕСТР С УКАЗАНИЕМ ЕЕ СОДЕРЖАНИЯ, ОБЪЕМА В ЧАСАХ, СРОКОВ И ФОРМ КОНТРОЛЯ

График самостоятельной работы определен пунктом 2.4 рабочей программы данной дисциплины.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ (РЕКОМЕНДУЕМАЯ ТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ, ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ), САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов состоит в подготовке к практическим занятиям, контрольным работам. Вся рекомендуемая для этих целей литература указана в п. 4 Рабочей программы данной дисциплины. Возможно использование другой литературы. В случае возникновения вопросов проводятся консультации по обозначенному преподавателем графику.

IV. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (ПО КАЖДОЙ ТЕМЕ) ИЛИ ПЛАН-КОНСПЕКТ

1.1. Многие из задач, которыми занимаются аналитики, касаются не отдельных объектов типа функций, мер или операторов, а скорее обширных классов таких объектов. Большинство интересных классов, возникающих таким образом, оказываются векторными пространствами над полем комплексных или вещественных чисел. Поскольку во всякой аналитической задаче некоторую роль (явно или неявно) играет предельный переход, неудивительно, что эти векторные пространства можно наделить метрикой или по крайней мере топологией, естественно связанной с объектами, составляющими пространство. Простейший и наиболее важный способ сделать это состоит во введении некоторой нормы. Получающаяся при этом структура (точное определение дано ниже) называется нормированным векторным пространством, или нормированным линейным пространством, или просто нормированным пространством. На протяжении всего этого курса термин векторное пространство означает векторное пространство над полем C комплексных чисел или над полем R вещественных чисел. Ради полноты в п. 1.4 приводится подробное определение.

1.2. Нормированные пространства. Векторное пространство X называется нормированным пространством, если каждому $x \in X$ сопоставлено неотрицательное вещественное число $||x||$, называемое нормой x, так что выполнены следующие условия:

(a) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ для всех x и y из X;

(Ь) $||ax||= |a|\cdot||x||$ для любого $x\in X$ и любого скаляра a;

(c) $||x|| > 0$, если $x \neq 0$.

Нормой называют также функцию, сопоставляющую вектору x число $||x||$. Каждое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое пространство, в котором расстояние d(x, y) между x и y равно $||x —y||$. Расстояние d обладает следующими свойствами:

(i) $0 \leq d (x, y) < \infty$ для всех x и y;

(ii) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$

(iii) $d(x, y)=d(y, x)$ для всех x и y

(iv) $d(x, z)\leq.d(x, y)+d(y, z)$ для всех x, y и z. В любом метрическом пространстве открытым шаром радиуса r с центром в точке x называется множество $B_r(x) = \{y: d(x,y)<r\}$. В частности, если X—нормированное пространство, множества $B_1(0) = \{x: ||x|| < 1\}$ и $\overline{B}_1(0) = \{x: ||x|| \leq 1\}$ являются соответственно открытым единичным шаром и замкнутым единичным шаром пространства X.

Объявляя подмножество метрического пространства открытым в том и только в том случае, если оно является объединением, (быть может, пустым) открытых шаров, получаем топологию (см. п. 1.5). Совсем легко проверить, что операции векторного пространства (сложение векторов и умножение их на скаляры) непрерывны в этой топологии, если метрика построена по норме указанным выше способом. Банахово пространство — это нормированное пространство, полное относительно метрики, определяемой его нормой; полнота означает, что всякая последовательность Коши должна быть сходящейся.

1.3. Многие из наиболее известных функциональных пространств являются банаховыми пространствами. Упомянем лишь некоторые типы таких пространств: пространства непрерывных функций на компактных пространствах; хорошо известные L^p-пространства, встречающиеся в теории интегрирования; гильбертовы пространства— ближайшие родственники евклидовых пространств; некоторые пространства дифференцируемых функций; пространства непрерывных линейных отображений одного банахова пространства в другое; банаховы алгебры. Все они еще встретятся нам в дальнейшем.

Однако имеется также много пространств, которые не укладываются в эти рамки. Вот некоторые примеры:

(a) $C(\Omega)$— пространство всех непрерывных комплексных функций на некотором открытом подмножестве Q евклидова пространства R^n;

(b) $H(\Omega)$ — пространство всех функций, голоморфных в некотором открытом подмножестве Q комплексной плоскости;

(c) C^∞ — пространство всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на R^n, равных 0 вне некоторого фиксированного компактного множества K с непустой внутренностью; Эти пространства обладают естественными топологиями, которые, как мы увидим в дальнейшем, не могут быть индуцированы .нормами. Как и нормированные пространства, они служат примерами топологических векторных пространств — понятие, пропитывающее весь функциональный анализ.

После этой попытки краткого изложения мотивов мы приведем здесь подробные определения, сопровождаемые предварительным «рекламным просмотром» (в п. 1.9) некоторых результатов этой главы.

1.4. Векторные пространства. Буквами R и C мы всегда будем •обозначать соответственно поле вещественных и поле комплексных чисел. Пусть Ф обозначает либо **R**, либо **C**. Скаляр — это .элемент поля скаляров Ф. Векторное пространство над полем Ф представляет собой множество X (его элементы называются векторами), в котором определены две операции — умножение на скаляры и сложение, — обладающие следующими общеизвестными алгебраическими свойствами:

(а) каждой паре векторов x и y сопоставлен вектор x+y, причем

$$x + y = y + x \qquad \text{и} \qquad x + (y + z) = (x + y) + z;$$

X содержит единственный вектор 0 (нулевой вектор), такой, что $x + 0 = x$ для всех $x \in X$; для каждого $x \in X$ существует единственный вектор $-x$, такой, что $x + (-x) = 0$;

(Ь) каждой паре (a, x), где $a \in Ф$ и $x \in X$, сопоставлен вектор ax, причем lx=x, a(вx) = (aв)x и выполняются два дистрибутивных закона

a(x + y) = ax + ay. (a + в)x = ax + вx.

Символ 0 будет, конечно, употребляться и для обозначения нулевого элемента поля скаляров. Если Ф = **R**, то X называется вещественным векторным пространством, а если Ф = **C**, — комплексным. Если в некотором утверждении о векторных пространствах поле скаляров явно не указано, то подразумевается, что это утверждение относится .к обоим случаям. Если X — векторное пространство, $A \subset X$, $B \subset X$, $x \in X$ и $\lambda \in Ф$, то будут употребляться следующие обозначения:

$x + A = \{x + a: a \in A\}$,

$x - A = \{x - a: a \in A\}$,

$A + B = \{a + b: a \in A, b \in B\}$,

$$\lambda A = \{\lambda a: a \in A\}.$$

В частности, через — A обозначается множество всех векторов, противоположных к векторам из A. Предостережение: может случиться, что $2A \neq A + A$. Множество $Y \subset X$ называется подпространством пространства X, если Y само является векторным пространством (разумеется, относительно тех же самых операций). Легко проверить, что это происходит тогда и только тогда, когда $0 \in Y$ и $\alpha Y + \beta Y \subset Y$ для всех скаляров α и β.

Множество $C \subset X$ называется выпуклым, если $tC + (1 - t)C \subset C$. Иными словами, требуется, чтобы C содержало $tx + (1 - t)y$ если $x \in C$, $y \in C$ и $0 \leq t \leq 1$.

Множество $B \subset X$ называется уравновешенным, если $\alpha B \subset B$ для любого $\alpha \in \Phi$, удовлетворяющего условию $|\alpha| \leq 1$.

Векторное пространство X имеет размерность n ($\dim X = n$), если оно обладает базисом $\{u_1, ..., u_1\}$. Последнее означает, что каждый вектор $x \in X$ допускает единственное представление в виде

$$x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \qquad (\alpha_i \in \Phi).$$

Если $\dim X = n$ для некоторого n, то пространство X называется конечномерным. Если $X = \{0\}$, то (по определению) $\dim X = 0$. Пример. Если $X = C$ (одномерное векторное пространство над полем C), то уравновешенными являются лишь следующие множества: C, пустое множество $\varnothing$, одноточечное множество $\{0\}$ и любой круг (открытый или замкнутый) с центром в точке 0. Если же $X = R^2$ (двумерное векторное пространство над полем R), то уравновешенных множеств значительно больше; например, таковым является всякий прямолинейный отрезок, середина которого находится в точке (0, 0). Дело в том, что, несмотря на общеизвестную и очевидную возможность отождествления C и R^2, они представляют собой совершенно различные векторные пространства.

1.5. Топологические пространства. Топологическим пространством называется множество S, в котором выделено некоторое семейство τ подмножеств (именуемых открытыми множествами), обладающее следующими свойствами: S открыто, $\varnothing$ открыто, пересечение любых двух открытых множеств открыто и объединение любой совокупности открытых множеств открыто. Такое семейство т называется топологией в S. Если требуется явно указать, что S рассматривается как топологическое пространство с топологией т, то вместо S будем писать (S, т).

Приведем список некоторых стандартных терминов, употребляемых в описанной выше ситуации.

Множество $E \subset S$ называется замкнутым, если его дополнение открыто. Замыкание $\overline{E}$ множества E—это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E. Внутренностью E° множества E называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в E. Окрестность точки $p \in S$—это любое открытое множество, содержащее эту точку. Пространство (S, τ) называется хаусдорфовым пространством, а τ—хаусдорфовой топологией, если для каждой пары различных точек в S существуют непересекающиеся окрестности. Множество $K \subset S$ компактно, если каждое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. Семейство $\tau' \subset \tau$ называется базой топологии τ, если каждый элемент из τ (т. е. каждое открытое множество) является объединением некоторых элементов из τ'. Совокупность γ окрестностей точки $p \in S$ называется локальной базой в точке p, если любая окрестность этой точки содержит некоторую окрестность, принадлежащую γ.

Если $E \subset S$ и σ—совокупность всех пересечений $E \cap V$, где $V \in \tau$, то, как легко проверить, σ является топологией в E; мы называем ее топологией, наследуемой E из S (или индуцированной топологией).

Если топология т порождается метрикой d, то мы говорим, что d и τ совместимы.

Последовательность (x_n) в хаусдорфовом пространстве X сходится к точке $x \in X$ (или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$), если любая окрестность точки x содержит все точки x_n, за исключением, быть может, конечного их числа.

1.6. Топологические векторные пространства. Предположим, что τ— такая топология в векторном пространстве X, что

(a) каждая точка в X является замкнутым множеством;

(b) операции векторного пространства непрерывны, относительно τ.

При этих условиях τ называется векторной топологией в X, а X называется топологическим векторным пространством.

Вот более аккуратная формулировка условия (a): для любого $x \in X$ множество $\{x\}$, состоящее из единственного элемента x, является замкнутым.

Во многих руководствах условие (a) не включается в определение топологического векторного пространства. Но так как оно выполняется почти во всех приложениях и так как большинство интересных теорем содержат это условие в качестве одного из предположений, то представляется целесообразным включить его в число аксиом. [Теорема 1.12 показывает, что если выполняются (a) и (Ь), то топология τ хаусдорфова.]

Непрерывность сложения по определению означает, что отображение,

$$(x, y) \to x + y$$

декартова произведения $X \times X$ в X непрерывно: если $x_i \in X$ для $i = 1, 2$ и V — окрестность точки $x_1 + x_2$, то должны существовать такие окрестности V_i- точек x_i, что

$$V_1 + V_2 \subset V.$$

Аналогично условие непрерывности умножения па скаляры означает, что отображение

$$(\alpha, x) \to \alpha x$$

произведения $\Phi \times X$ в X непрерывно: если $x \in X$, α — скаляр и V — окрестность вектора αx:, то для некоторого $r > 0$ и некоторой окрестности W точки x выполняется включение $\beta W \subset V$ всякий раз, когда $|\beta - \alpha| < r$.

Подмножество E топологического векторного пространства называется ограниченным, если для каждой окрестности нуля V в X найдется такое число $s > 0$, что $E \subset tV$ при всех $t > s$.

1.7. Инвариантность. Пусть X — топологическое векторное пространство. Сопоставим каждому вектору $a \in X$ оператор сдвига T_a, а каждому скаляру $\lambda \neq 0$ — оператор умножения M_λ определив их формулами

$$T_a(x) = a + x, \qquad M_\lambda(x) = \lambda x \qquad (x \in X)$$

Следующее простое предложение весьма важно:

Предложение. Отображения T_a и M_λ являются гомеоморфизмами X на X.

Доказательство. Из аксиом векторного пространства следует, что T_a и M_λ — взаимно однозначные отображения X на X и что обратными к ним служат соответственно отображения T_{-a} и $M_{1/\lambda}$. Из условий непрерывности операций векторного пространства вытекает, что эти четыре отображения непрерывны. Следовательно, каждое из них является гомеоморфизмом (т. е. непрерывным отображением, обратное к которому тоже непрерывно).

Одно из следствий этого предложения состоит в том, что всякая векторная топология τ инвариантна относительно сдвигов (или, для краткости, просто инвариантна): множество $E \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда все его сдвиги $a+E$ являются открытыми множествами. Таким образом, τ полностью определяется любой локальной базой. Если речь идет о векторном пространстве, то термин локальная база всегда будет означать локальную базу в точке 0. Таким образом, локальная база топологического векторного пространства X — это такое семейство B окрестностей нуля, что любая окрестность нуля содержит некоторую окрестность, принадлежащую B. Открытыми множествами в X являются те и только те множества, которые представляются в виде объединений сдвигов окрестностей из B.

Метрику d на векторном пространстве X будем называть инвариантной, если

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

для всех x, y, z из X.

1.8. Типы топологических векторных пространств. В следующих определениях X всегда обозначает топологическое векторное пространство с топологией τ:

(a) X локально выпукло, если существует локальная база *B* состоящая из выпуклых окрестностей.

(b) X локально ограничено, если существует ограниченная окрестность нуля.

(c) X локально компактно, если существует окрестность нуля, замыкание которой компактно.

(d) X метризуемо, если топология τ совместима с некоторой метрикой.

(e) X является F -пространством, если его топология τ порождается некоторой полной инвариантной метрикой d.

(f) X называется пространством Фреше, если оно является локально выпуклым F -пространством.

(g). X называется нормируемым, если в нем существует такая норма, что индуцированная ею метрика совместима с топологией τ.

(h) Нормированные пространства и банаховы пространства уже были определены (п. 1.2).

(i) X обладает свойством Гейне — Бореля, если каждое замкнутое ограниченное подмножество в X компактно.

Терминология, которой мы придерживаемся в определениях (e) и (f), не является общепринятой: в некоторых руководствах требование локальной выпуклости не включается в определение пространства Фреше, тогда как в других термин «F-пространство» употребляется для обозначения пространств, которые мы назвали пространствами Фреше.

V. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ (РАБОТ)

Курсовой проект (работа) не предусмотрен.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ (ПРАКТИКУМОВ)

Лабораторные работы не предусмотрены.

VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ) ЗАНЯТИЯМ

Необходимым условием присутствия студента на практическом занятии является выполнение домашнего задания по тематике предыдущего практического занятия. Для выполнения практических заданий студенту необходимо иметь конспект лекций. Студенты знакомятся с заданием и выполняют его, опираясь на конспект лекций. Задание выдается одно на всю группу. Приветствуется самостоятельное выполнение заданий. В связи с большим объемом вычислений обязательно наличие электронного вычислительного средства (калькулятора).

VIII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении домашних работ необходимо использовать конспекты лекций, любую дополнительную литературу.

Перед контрольной работой студентам необходимо повторить теоретические основы методов, указанных преподавателем. При выполнении контрольной работы конспект лекций и другую дополнительную литературу не использовать.

IX. ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ, РЕАЛЬНО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРАКТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВЫПУСКНИКОВ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ, РАСКРЫВАЮЩЕЕ ОСОБЕННОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫХ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ

Выпускники могут выполнять расчеты в Microsoft Excel, используя любую литературу, посвященную данному программному продукту.

X. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (В Т. Ч. РАЗРАБОТАННЫЕ ВЕДУЩИМИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ ФИЛИАЛА)

Данные методические указания отсутствуют.

XI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО И ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ (МАТЕРИАЛЫ ПО КОНТРОЛЮ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ)

Преподаватель готовит контролирующие материалы в виде тестов, задач и в другой форме. Тематика контролирующих материалов должна соответствовать тематике материалов, прочитанных студентам на лекционных занятиях к моменту контроля знаний, и тематике задач, разобранных на практических занятиях к моменту контроля знаний. Преподаватель самостоятельно выбирает форму теста, правила работы с контролирующими материалами, время на его выполнение. Во время проведения контроля знаний студентов преподаватель объясняет студентам правила работы с контролирующими материалами и выдаёт эти материалы студентам. После истечения установленного времени контролирующие материалы собираются и обрабатываются. Критерии оценки знаний преподаватель устанавливает самостоятельно. Студентам, не сдавшим тест или не присутствующим на нем по каким-либо причинам, предоставляется дополнительная возможность пройти тест.

XII. КОМПЛЕКТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Задания для контрольных работ и домашних заданий берутся из книг, указанных в рабочей программе.

XIII. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Фонд тестовых и контрольных заданий для оценки качества знаний по дисциплине приведен в приложении А.

XIV. КОМПЛЕКТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ДЛЯ КАЖДОГО ИЗ ПРЕДУСМОТРЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

Комплекты экзаменационных билетов составляются на основе экзаменационных вопросов, представленных в п. 2.6 рабочей программы данной дисциплины, по следующей форме:

ГОУВПО «Амурский государственный университет»

Утверждено на заседании Кафедра *математического анализа и* кафедры моделирования

«___» ______________ 200 г. Факультет *математики и информатики*

Заведующий кафедрой – Курс 4

Труфанова Т.В. Дисциплина "*Топологические векторные пространства*"

Утверждаю: ______________

Экзаменационный билет 1

1. Определение топологического векторного пространства. ТВП и основные свойства, следующие из аксиом $(ЛТ)_1$ и $(ЛТ)_2$.

2. Метризуемость факторпространства и произведения.

3. Пусть $\{L_\alpha: \alpha\in A\}$ – семейство хаусдорфовых ТВП над K. Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство всех подмножеств векторного пространства $L = \prod_\alpha L_\alpha$, состоящее из всех произведений $V = \prod_\alpha V_\alpha$, где V_α $(\alpha\in A)$ – некоторые элементы из базы окрестностей нуля в L_α. Пусть τ обозначает единственную инвариантную относительно сдвигов топологию на L, для которой $\mathcal{B}$ – базис окрестностей нуля.

Доказать, что если число L_α, отличных от $\{0\}$, бесконечно, то (L, τ) не есть ТВП.

XV. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Дисциплину в полном объёме ведёт: Подопригора Сергей Алексеевич, старший преподаватель кафедры математического анализа и моделирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ФОНД КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Задание №1. Можно ли в пространстве дважды непрерывно-дифференцируемых функций $C^2[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.1. $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.2. $\|x''\|_{c[a,b]} + \|x\|_{CL_2[a,b]}$;

1.3. $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.4. $|x(a)| + \|x'\|_{c[a,b]} + \|x''\|_{CL[a,b]}$;

Можно ли в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций $C^1[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.5. $\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

1.6. $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

1.7. $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

1.8. $\int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

Найти условия, при которых функция $\varphi(x)$ в пространстве l_2 определяет норму

1.9. $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_i \geq 0$;

1.10 $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_i \geq 0, \quad m$ – фиксировано;

Определить, задает ли пара $(X, \|x\|)$ нормированное векторное пространство:

1.11. $X = \left\{x(t) \in C[a,b] \middle| x(a) = 0\right\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt$;

1.12. $X = \left\{x(t) \in C^1[a,b] \middle| x(a) = x(b)\right\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^{(a+b)/2} |x(t)|dt + \int\limits_{(a+b)/2}^b |x'(t)|dt$;

1.13. $X = \left\{x(t) \in C^1[a,b] \middle| x'(a) = 0\right\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x'(t)|dt + |x(a)|$;

1.14. $X = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| x'(t) \le 0 \right\}, \quad \|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2};$

1.15. $X = \left\{ x(t) \in C^2[a,b] \right\}, \quad \|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$

Задание №2. Найти предел последовательности x_n в нормированном векторном пространстве $C[a,b]$, если он существует.

2.1. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = t^n - t^{n-1};$

2.2. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2};$

2.3. $a = 0, \quad b = 2, \quad x_n(t) = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}};$

2.4. $a = 1, \quad b = 2, \quad x_n(t) = n\left(\sqrt{t + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{t} \right);$

2.5. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n + t};$

2.6. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{2nt}{1 + n^2 t^2};$

2.7. $a = 0, \quad b = 2, \quad x_n(t) = \sqrt[n]{1 + t^n};$

2.8. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2 t};$

2.9. $a = 0, \quad b = \dfrac{1}{2}, \quad x_n(t) = 2^n t^n (1 - 2t);$

2.10. $a = 1/2, \quad b = 3/2, \quad x_n(t) = \dfrac{t^n}{1 + t^n};$

2.11. $a = -5\pi, \quad b = -4\pi, \quad x_n(t) = \dfrac{4\cos^{n/3} t}{5 + \cos^n t};$

2.12. $a = 0, \quad b = 3, \quad x_n(t) = \dfrac{3^n t^n - t^{2n}}{3^{2n}};$

2.13. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{\sqrt{n^2 + 1}};$

2.14. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \sin\dfrac{t}{n};$

2.15. $a = 0, \; b = 1, \quad x_n(t) = \sin t - \sin\dfrac{t}{n}.$

Задание №3. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве l_p, если он существует.

3.1. $x_n = \left(\underbrace{\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n, \ldots, \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n}_{n}, 0, \ldots \right), \quad p = \frac{5}{2};$

3.2. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}}_{n}, 0, \ldots \right), \quad p = \frac{3}{2};$

3.3. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, \ldots \right), \quad p = 1;$

3.4. $x_n = \left(\underbrace{\frac{\sin(n)}{n}, \ldots, \frac{\sin(n)}{n}}_{n}, 0, \ldots \right), \quad p = 1;$

3.5. $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\, 0, \ldots \right), \quad p = 4;$

3.6. $x_n = \left(\underbrace{\sin\frac{\pi n}{12}, \ldots, \sin\frac{\pi n}{12}}_{n}, 0, \ldots \right), \quad p = \frac{5}{4};$

3.7. $x_n = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[n]{n}\, 0, \ldots \right), \quad p = \frac{14}{5};$

3.8. $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots \right), \quad p = \frac{6}{5};$

3.9. $x_n = \left(\frac{n}{1+n}, \frac{n}{1+2n}, \ldots, \frac{n}{1+kn}, \ldots\ldots \right), \quad p = 3;$

3.10. $x_n = \left(\frac{n^2}{1+n^2}, \frac{n^2}{1+2n^2}, \ldots, \frac{n^2}{1+kn^2}, \ldots\ldots \right), \quad p = \frac{3}{2};$

3.11. $x_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n^{\sigma}}, \frac{1}{(n+1)^{\sigma}}, \ldots \right), \delta > 1, \ p = 1;$

3.12. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, \ldots \right), \ p = 2;$

3.13. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}}_{n^2}, 0, \ldots \right), \ p = 4;$

3.14. $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots \right), \quad p = 5;$

3.15. $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots\right), \quad p = l_2.$

Задание №4. Определите, является ли данное множество замкнутым, открытым в пространстве $C[a,b], CL[a,b]$. Найдите его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом указанном пространстве.

4.1. $M = \{x(t) |\ x(a)x(b) = 0\};$

4.2. $M = \{x(t) |\ x(a) = x(b)\};$

4.3. $M = \left\{ x(t) \middle| |x(t)| < 1, \forall\ t \in [a,b] \right\};$

4.4. $M = \{x(t) |\ x(a) > 0\};$

4.5. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] |\ x(a) = 0\};$

4.6. $M = \left\{ x(t) \middle| \int_a^b |x(t)|\,dt < 1 \right\};$

4.7. $M = \left\{ x(t) \middle| \int_a^b x(t)\,dt = 0 \right\};$

4.8. $M = \left\{ x(t) \middle| \max_{a \le t \le b} |x(t)| < 1 \right\};$

4.9. $M = \{x(t) |\ x(a) < 0\};$

4.10. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] |\ x'(t) < 0\};$

4.11. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] |\ x'(a) = 0\};$

4.12. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] |\ x'(a) > 0\};$

4.13. $M = \{x(t) |\ x(t) = const\}.$

Задание 5. Для данного множества М выяснить,является ли множество $B = M \cap l_p$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p.

5.1. $M = \left\{ x: x_k \le \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 1;$

5.2. $M = \{x: 0 < x_k < 1, k = 1,2...\}, \quad p = \infty;$

5.3. $M = \{x: x_k > 0, k = 1,2...\}, \quad p = 2;$

5.4. $M = \left\{ x: \sum_{k=1}^{\infty} x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.5. $M = \{x: x_1 = ... = x_n = 0, k = 1,2...\}, \quad p = 2;$

5.6. $M = \left\{ x : x_k \le \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.7. $M = \left\{ x : \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k \right|^2 < 1, k = 1,2\ldots \right\}, \quad p = 1;$

5.8. $M = \left\{ x : 0 < x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.9. $M = \left\{ x : \left| x_k \right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.10. $M = \left\{ x : x_k > 0, k = 1,2... \right\}, \quad p = 4;$

5.11. $M = \left\{ x : \left| x_k \right| < \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.12. $M = \left\{ x : \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k \right| < 1, k = 1,2\ldots \right\}, \quad p = 2;$

5.13. $M = \left\{ x : 0 \le x_k \le \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$

5.14. $M = \left\{ x : 0 \le x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = \infty$.

Задание №6. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве $C^2[a,b]$ два раза непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.

6.1. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.2. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.3. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.4. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$\|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.5. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

6.6. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

Определите, являются ли две нормы эквивалентными в нормированном пространстве $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [a,b] функций.

6.7. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$;

6.8. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt + \|x'\|_{C[a,b]}$;

6.9. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$ и $\|x\|_2 = \int\limits_a^b |x(t)|dt + \|x'\|_{C[a,b]}$.

6.10. Доказать, что в $C[a,b]$ $\|x\|_{L[a,b]}$ эквивалентна норме $\|x\| = \left(\int\limits_a^b v(t)\, x^2(t)\, dt \right)^{1/2}$, где $v(t) \geq \alpha > 0$ и $v(t) \in C[a,b]$.

Доказать по определению эквивалентность норм в пространстве R^n

6.11. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left(\alpha_k |x_k| \right)$;

6.12. . $\|x\|_C$ и $\sum$ $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{i} |x_k|^2 \right)^{1/2}$;

6.13. $\|x\|_D$ и $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|$;

6.14. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right|$;

Задание №7. Является ли последовательность x_n последовательностью Коши в пространстве E. Найти ее предел, если он существует.

7.1. $x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t \in Q, \\ 0, & t \notin Q. \end{cases}$, $E = L_2[0,1]$;

7.2. $x_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & t \in Q \cap [-1,2], \\ \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^3}}, & t \in [-1,2] \setminus Q. \end{cases}$, $E = L_1[-1,2]$;

7.3. $x_n(t) = \begin{cases} ne^{nt}, & t \in K, \\ \dfrac{t^3}{n}, & t \in [0,1] \setminus K. \end{cases}$, $E = L_{3/2}[0,1]$;

7.4. $x_n(t) = \begin{cases} nt, & t \in [-2,0] \cap Q, \\ ne^{nt}, & t \in [-2,0] \setminus Q. \end{cases}$, $E = L_4[-2,0]$;

7.5. $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^4}}, & t \in [-1,1] \setminus K, \\ \cos(n+t), & t \in [-1,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_2[-1,1]$;

7.6. $x_n(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{3}\right)^n, & t \in [0,3] \setminus Q, \\ \sin \pi nt, & t \in [0,3] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_5[0,3]$;

7.7. $x_n(t) = \begin{cases} (n+t)^{-1}, & t \in [0,1] \setminus K, \\ \exp(n^2 t), & t \in [0,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_{9/5}[0,1]$;

7.8. $x_n(t) = \begin{cases} \sin\dfrac{t}{n}, & t \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \setminus Q, \\ \cos\dfrac{t}{n}, & t \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_2\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

7.9. $x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos nt}{n}, & t \in [0,1] \setminus K, \\ \exp(-t^n), & t \in [0,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_{5/3}[0,1]$;

7.10. $x_n(t) = \begin{cases} (0.5t)^n, & t \in [0,2] \setminus K, \\ ne^{nt}, & t \in [0,2] \cap K. \end{cases}$, $E = L_{4/3}[0,2]$;

7.11. $x_n(t) = \begin{cases} (\sin t)^n, & t \in [0,1] \setminus Q, \\ (n+t)^{-1}, & t \in [0,1] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_{9/2}[0,1]$;

7.12. $x_n(t) = \begin{cases} ne^{nt}, & t \in K, \\ \dfrac{t^2}{n}, & t \in [0,1] \setminus K. \end{cases}$, $E = L_2[0,1]$;

7.13. $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + 1/n}, & t \in [-1,1] \setminus K, \\ \sin(n+t), & t \in K. \end{cases}$, $E = L_2[-1,1]$;

7.14. $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + 1/n}, & t \in [-1,2] \setminus Q, \\ \sin n^2 t, & t \in [-1,2] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_1[-1,2]$.

Задание №8. Выяснить, является ли заданное пространство полным по указанной норме.

8.1. Пространство $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [*a*, *b*] функций с нормой $\|x\| = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|$;

8.2. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \int_a^b |x(t)| + \max_t |x'(t)|$;

8.3. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\| = \max_{0 \le t \le 1/2} |x(t)| + \max_t |x'(t)|$;

8.4. Пространство l_2 числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \qquad \text{с нормой} \qquad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2};$$

8.5. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \max_t |x'(t)| + |x(a)|$;

8.6. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \int_a^b |x'(t)| dt + |x(a)|$;

8.7. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \le k \le n} (\alpha_k |x_k|), \alpha_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n;$$

8.8. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x|_k^2 \right)^{1/2}, \alpha_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n;$$

8.9. Пространство $C[0,1]$ непрерывных функций с нормой

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le 3/4} |x(t)| + \int_{1/2}^{1} |x(t)| dt;$$

8.10. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| + \max_{0 \le t \le 1/2} |x'(t)|$;

8.11. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} |x_k|^2 \right)^{1/2};$$

8.12. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=1}^{k} x_i \right|;$$

8.13. Пространство k непрерывных на R конечных функций (равных нулю за пределами некоторого промежутка, своего для каждой функции) с нормой

$$\|x\| = \max_t |x(t)|;$$

8.14. Пространство $m_\alpha = \{x(x_1, \ldots, x_n, \ldots\}, \sup \alpha_i |x_i| < +\infty, \alpha_i > 0$ с нормой

$$\|x\| = \sup_i \alpha_i |x_i|.$$

Задание №9. Проверить, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в нормированном пространстве E.

9.1. $x_k(t) = \dfrac{4^k t^k - t^{2k}}{4^{2k}}, \qquad E = C[0,1];$

9.2. $x_k(t) = \dfrac{t^k}{k} - \dfrac{t^{k+1}}{k+1}, \qquad E = C[0,1];$

9.3. $x_k(t) = \dfrac{1}{t^2 + n^2}, \qquad E = C[0,1];$

9.4. $x_k(t) = t^2 e^{-kt}, \qquad E = C[0,1];$

9.5. $x_k(t) = \dfrac{t}{1 + n^4 t^2}, \qquad E = C[0,1];$

9.6. $x_k(t) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(k^2 + e^t\right)^{-1/3}, \qquad E = C[-10,10];$

9.7. $x_k(t) = \dfrac{1}{k+t}, \qquad E = L_{4/3}[1,2];$

9.8. $x_k(t) = \dfrac{\cos kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

9.9. $x_k(t) = \dfrac{\sin kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

9.10. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{(-1)^k}{k}, \ldots, \dfrac{(-1)^k}{k}}_{k}, 0, \ldots\right), \qquad E = l_1;$

9.11. $x_k(t) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \ldots, \dfrac{1}{3^k}\right), \qquad E = l_{3/2};$

9.12. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{k}{2^k}, \ldots, \dfrac{k}{2^k}}_{k}, 0, \ldots\right), \qquad E = m;$

9.13. $x_k(t) = \left(\underbrace{\frac{\sin k}{k},\dots,\frac{\sin k}{k}}_{k},0,\dots\right), \qquad E = l_{5/3};$

9.14. $x_k(t) = \left(\underbrace{\frac{k^2}{3^k},\dots,\frac{k^2}{3^k}}_{k},0,\dots\right), \qquad E = m.$

СОДЕРЖАНИЕ