Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
8 сентября 2008г.

Топология

Учебно – методический комплекс дисциплины

для специальности 010101 «Математика»

Составитель: С.А.Подопригора

Благовещенск
2008

ББК

К

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Подопригора С.А.

Топология**.** Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2008. − 48с.

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа по дисциплине "Топология" для специальности 010101 «Математика».

Курс 3 Семестр 6 Лекции 18 час., Экзамен (нет), Практические (семинарские) занятия 18 час., Зачет (6 семестр), Курсовая работа (нет), Лабораторные занятия (нет), Самостоятельная работа 18 час., Всего 54 часов.

Составитель: Подопригора С.А., старший преподаватель, факультет математики и информатики, кафедра математического анализа и моделирования.

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Цель курса – изложение основных разделов общей и алгебраической топологии.

1.2 Перечень основных навыков и умений, приобретаемых при изучении дисциплины

Основная задача курса – ознакомить студентов с основными понятиями гладких многообразий и их отображений, основными понятиями и теоремами гомотопической топологи, а также с теорией тензоров и тензорным анализом на многообразиях. По завершению студент должен:

овладеть основными понятиями, знать их свойства и уметь решать типовые задачи.

1.3 Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины

Для изучения данной дисциплины необходимы предварительные знания теории множеств, общей алгебры, линейной алгебры и геометрии, а также некоторых основ общей топологии, изучаемых в курсе «Функциональный анализ и интегральные уравнения».

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Федеральный компонент

ОПД.Ф.09 **Топология** Гладкие многообразия. Общие сведения из общей топологии: топологическое пространство, метрическое пространство, непрерывное отображение, гомеоморфизмы, компактность, связность; определение гладкого многообразия, отображение многообразий, примеры многообразий: гладкие поверхности, матричные группы, проективное пространство; многообразие с краем; риманова метрика; касательный вектор, касательное пространство к многообразию, векторные поля на многообразии. Тензорный анализ на многообразиях. Тензоры на римановом многообразии: общее определение тензора, алгебраические операции над тензорами, поднятие и опускание индексов, оператор Ходиса; кососимметрические тензоры, дифференциальные формы, внешнее произведение дифференциальных форм, внешняя алгебра; поведение тензоров при отображениях, дифференциал отображения, отображение касательных пространств. Связность и ковариантное дифференцирование: ковариантная производная тензоров, параллельный перенос векторных полей, геодезические; связности, согласованные с метрикой; тензор кривизны, симметрии тензора кривизны; тензор кривизны, порожденный метрикой; тензоры кривизны двух- и трехмерных многообразий. Дифференциальные формы и теория интегрирования: разбиение единицы на многообразии, интеграл дифференциальной формы, примеры: криволинейные и поверхностные интегралы второго рода; общая формула Стокса; примеры: формулы Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса. Элементы топологии многообразий. Гомотопия: определение гомотопии, аппроксимация отображений и гомотопий гладкими, относительная гомотопия; степень отображения: определение степени, гомотопическая классификация отображений многообразия в сферу; степень и интеграл; степень векторного поля на поверхности; теорема Гаусса-Бонне; индекс особой точки векторного поля; теорема Пуанкаре-Бендиксона.

2.2 *Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий* – 18 часов

1. Сведения из общей топологии.-2 часа.

Топологическое пространство. Метрическое пространство. Непрерывное отображение, гомеоморфизмы. Компактность. Связность.

2. Гладкие многообразия.-4 часа.

Определение гладкого многообразия. Отображение многообразий. Примеры многообразий: гладкие поверхности, матричные группы, проективное пространство. Многообразие с краем. Риманова метрика. Касательный вектор, касательное пространство к многообразию. Векторные поля на многообразии.

2. Тензорный анализ на многообразиях.- 4 часа.

Тензоры на римановом многообразии: общее определение тензора, алгебраические операции над тензорами, поднятие и опускание индексов, оператор Ходиса. Кососимметрические тензоры. Дифференциальные формы, внешнее произведение дифференциальных форм, внешняя алгебра. Поведение тензоров при отображениях, дифференциал отображения, отображение касательных пространств. Связность и ковариантное дифференцирование: ковариантная производная тензоров, параллельный перенос векторных полей, геодезические; связности, согласованные с метрикой; тензор кривизны, симметрии тензора кривизны; тензор кривизны, порожденный метрикой; тензоры кривизны двух- и трехмерных многообразий.

4. Дифференциальные формы и теория интегрирования.- 4 часа.

Разбиение единицы на многообразии. Интеграл дифференциальной формы, примеры: криволинейные и поверхностные интегралы второго рода; Общая формула Стокса. Примеры: формулы Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса.

5. Элементы топологии многообразий.- 4 часа.

Гомотопия: определение гомотопии, аппроксимация отображений и гомотопий гладкими, относительная гомотопия. Степень отображения: определение степени, гомотопическая классификация отображений многообразия в сферу; степень и интеграл; степень векторного поля на поверхности. Теорема Гаусса-Бонне. Индекс особой точки векторного поля. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.

2.3 Практические занятия, их содержание и объем в часах – 18 часов

1.	Обзорное занятие по общей топологии	2
2.	Гладкие многообразия, их отображения	2
3.	Векторные поля на многообразии	2
4.	Тензоры на многообразии, операции над тензорами	2
5.	Связность и ковариантное дифференцирование	2
6.	Дифференциальные формы, внешнее произведение	2
7.	Интегралы дифференциальных форм	2
8.	Гомотопия	2
9.	Степень отображения	2

2.4 Самостоятельная работа студентов – 18 часов

1. Домашнее задание по каждой из тем практических занятий.
2. Самостоятельное изучение литературы по следующим темам: «Категория, функтор и алгебраизация топологических задач», «Функторы гомотопических групп», «Теория гомологий», «Клеточные комплексы», «Гомологии клеточного комплекса».

2.5 Вопросы к зачету

1. Определение и примеры многообразий.
2. Произведение многообразий.
3. Многообразие матриц.
4. Группы Ли.
5. Многообразие с краем.
6. Риманова метрика.
7. Касательный вектор, касательное пространство.
8. Векторные поля на многообразиях.
9. Определение тензора, операции над тензорами.
10. Симметрические и кососимметрические тензоры.
11. Дифференциальные формы. Внешнее произведение.
12. Отображение тензоров, дифференциал.
13. Ковариантная производная тензоров.
14. Тензор кривизны.
15. Интеграл дифференциальной формы.
16. Криволинейный интеграл второго рода.
17. Поверхностный интеграл второго рода.
18. Общая формула Стокса и её следствия.
19. Гомотопия.
20. Степень отображения.

21. Теорема Гауса-Бонне.
22. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.

3 ТРЕБОВАНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ ЗНАНИЙ НА ЗАЧЕТЕ

Студент получает зачет по изучаемой дисциплине в случае, если он свободно владеет основными теоретическими понятиями и определениями, а также умеет правильно решать предложенные задачи.

4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

4.1 Основная литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М: Эдиториал УРСС (2001 г.) - 296 с.
2. А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - М: Факториал Пресс, 2000. - 448 с.
3. Мищенко А.С., Соловьёв Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. Учебное пособие для вузов (2-е изд., перераб. и доп.). **Издательство:** Физико-математической литературы, 2004, – 412с.

4.2 Дополнительная литература

1. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович и др. – М.: Наука, Физмат лит., 1995. – 416с.
2. Хирш М. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 280с.
3. Фоменко А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 216с.

4. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1978. – 432с.
5. Новиков С.П., Мищенко А.С., Соловьёв Ю.П., Фоменко А.Т. Задачи по геометрии. Дифференциальная геометрия и топология. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 164с.

II. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ НА КАЖДЫЙ СЕМЕСТР С УКАЗАНИЕМ ЕЕ СОДЕРЖАНИЯ, ОБЪЕМА В ЧАСАХ, СРОКОВ И ФОРМ КОНТРОЛЯ

График самостоятельной работы определен пунктом 2.4 рабочей программы данной дисциплины.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ (РЕКОМЕНДУЕМАЯ ТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ, ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ), САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов состоит в подготовке к лабораторным работам, практическим занятиям, контрольным работам. Вся рекомендуемая для этих целей литература указана в п. 4 Рабочей программы данной дисциплины. Также самостоятельная работа включает изучение тем «Категория, функтор и алгебраизация топологических задач», «Функторы гомотопических групп», «Теория гомологий», «Клеточные комплексы», «Гомологии клеточного комплекса»; в рабочей программе указана литература, в которой представлено изложение данных тем. Возможно использование другой литературы. В случае возникновения вопросов проводятся консультации по обозначенному преподавателем графику.

IV. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (ПО КАЖДОЙ ТЕМЕ) ИЛИ ПЛАН-КОНСПЕКТ

Лекция 1. Метрические пространства

1.1. Метрические пространства.

Топология - это раздел высшей геометрии. Она изучает свойства геометрических объектов, которые не меняются при непрерывных деформациях без разрывов и склеиваний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M - произвольное множество. Отображение ρ : $M \times M \longrightarrow R$ называется метрикой (или расстоянием) на M, если выполнены следующие аксиомы:

$\rho(a, b) = \rho(b, a)$; (симметричность)

$\rho(a, b) \geq 0$ и $\rho(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$; (положительность)

$\rho(a,b) + \rho(b, c) \geq \rho(a,c)$ (неравенство треугольника).

Множество с заданной на нем метрикой называется метрическим пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть a - точка метрического пространства M и $r > 0$. Тогда подмножество $V_r(a) = \{x \in M : \rho(x,a) < r\}$ называется открытым шаром радиуса r с центром в точке a.

Пример трех метрик на плоскости.

Пусть точка a имеет координаты (a_1, a_2), точка b - координаты (b_1, b_2).

$\rho_1(a,b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$;

$\rho_2(a,b) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$;

$\rho_3(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$.

Единичные шары в этих метриках изображены на рис. 1.

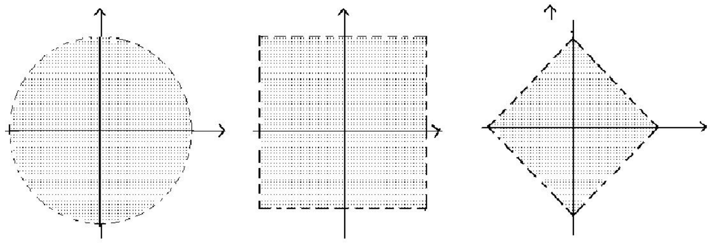

Рисунок 1.

Пример двух метрик на пространстве непрерывных функций на отрезке [0,1].

$$\rho_1(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,dx}\,; \qquad \rho_2(f,g) = \max_{x\in[0,1]}|f(x) - g(x)|.$$

Упражнение. Докажите, что приведенные 5 метрик действительно являются метриками.

1.1. Открытые множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество метрического пространства называется открытым, если каждая точка входит в него вместе с шаром положительного радиуса с центром в ней.

Упражнение. Докажите, что открытый шар является открытым множеством.

Свойства открытых множеств.

1. Объединение любого числа открытых множеств открыто;
2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто;
3. Пустое множество и все пространство являются открытыми.

Упражнение. Докажите эти свойства.

1.2. Непрерывные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Отображение $f : M \longrightarrow N$ называется непрерывным в точке $x_0 \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in V_\delta(x_0)$ точка $f(x_0)$ лежит в шаре $V_\varepsilon(f(x_0))$. Отображение $f : M \longrightarrow N$ называется непрерывным, если оно непрерывно во всех точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 2. Отображение $f : M \longrightarrow N$ называется непрерывным, если прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества U в N открыт в M.

Упражнение. Докажите эквивалентность этих определений.

Таким образом, для того, чтобы говорить о непрерывности отображения, нет нужды знать метрику, достаточно знать систему открытых множеств. Поэтому понятие открытого множества является более фундаментальным, чем понятие метрики.

Упражнение. Докажите, что три определенные выше метрики на плоскости задают одно и то же семейство открытых множеств. (Указание: см. рис. 2).

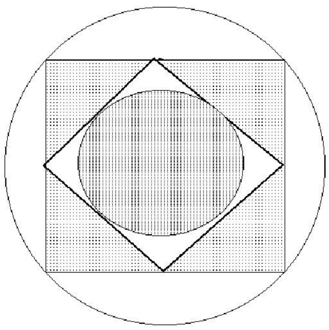

Рисунок 2.

Лекция 2. Топологические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологией на множестве X называется такое семейство его подмножеств, что выполнены следующие аксиомы:

1. Объединение любого числа подмножеств семейства лежит в семействе;

2. Пересечение конечного числа подмножеств семейства лежит в семействе;

3. Пустое множество и все пространство лежат в семействе.

Множества, лежащие в семействе, называется открытыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество с заданной на нем топологией называется топологическим пространством.

Упражнение. Приведите примеры различных топологий на множестве из двух точек.

2.1. Способы задания топологии.

1. На любом метрическом пространстве можно ввести топологию так, как это описано в лекции 1. В этом случае говорят, что топология индуцирована метрикой.

2. Иногда открытые множества можно просто перечислить. Наиболее удобно это делать в случае, когда данное множество конечно или счетно.

3. Чаще всего топология задается с помощью указания базы топологии, т. е. такого семейства открытых множеств, что все другие открытые множества получаются из них операциями взятия объединения и конечного пересечения.

Упражнение. Пусть X - произвольное множество, и пусть *F*-произвольное семейство его подмножеств. Назовем подмножество множества X открытым, если его можно представить в виде объединения конечных пересечений подмножеств из семейства *F*. Объявим также открытыми пустое множество и все множество X. Докажите, что получится топология, для которой семейство *F* служит базой.

4. Индуцированная топология. Пусть X - топологическое пространство и A - его произвольное подмножество. Назовем подмножество U множества A открытым, если оно имеет вид $U = A \cap V$, где V - некоторое открытое подмножество пространства X. Полученная топология на множестве A называется индуцированной.

Упражнение. Докажите, что индуцированная топология действительно является топологией.

5. Фактортопология. Пусть X - топологическое пространство, M -произвольное множество и $f : X \longrightarrow M$ - произвольное отображение. Назовем подмножество $U \subset M$ открытым, если и только если его прообраз $f^{-1}(U)$

является открытым подмножеством пространства X. Полученная топология на множестве M называется фактортопологией. Иногда говорят, что она индуцирована отображением f.

Упражнение. Докажите, что фактортопология действительно является топологией, и что отображение f после введения топологии на M становится непрерывным.

Выделим частный случай фактортопологии.

Пусть ~ - отношение эквивалентности на топологическом пространстве X. Тогда естественная проекция $p : X \longrightarrow X/\sim$ пространства X на множество классов эквивалентности $X/\sim$ индуцирует на нем фактортопологию.

2.3. Непрерывные отображения и гомеомофизмы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение одного топологического пространства в другое называется непрерывным, если прообраз каждого открытого множества открыт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гомеоморфизм - это биекция одного топологического пространства на другое, непрерывная в обе стороны.

Упражнение. Докажите, что суперпозиция двух непрерывных отображений непрерывна.

Упражнение. Докажите, что отношение гомеоморфности топологических пространств является отношением эквивалентности.

Лекция 3. Замкнутые множества.

3.1. Свойства замкнутых множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество топологического пространства называется замкнутым, если его дополнение открыто.

1. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;
3. Пустое множество и все пространство замкнуты.

Упражнение. Приведите пример множества на плоскости, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

Упражнение. Докажите свойства замкнутых множеств.

3.2. Замыкание, внутренность и граница.

Пусть X - топологическое пространство и $A \subset X$ - его подмножество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество Cl(A) называется замыканием множества A, если:

1. Cl(A) замкнуто;
2. $Cl(A) \supset A$;
3. Любое другое замкнутое множество, которое содержит A, содержит C1(A).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $Int(A) \subset A$ называется внутренностью множества A, если:

1. Оно открыто;
2. Оно содержится в A;
3. Любое другое открытое множество, которое лежит в A, лежит в Int(A).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Граница Fr(A) множества $A \subset X$ есть объединение таких точек $x \in X$, что каждая окрестность U Э x имеет непустое пересечение как с множеством A, так и с его дополнением.

Замечание. Слова "окрестность точки" равносильны словам "открытое множество, содержащее данную точку".

Упражнение. Найдите внутренность, замыкание и границу полуинтервала на плоскости и полуинтервала на прямой.

Упражнение. Найдите внутренность, замыкание и границу множества всех точек плоскости, обе координаты которых рациональны.

ТЕОРЕМА. Замыкание множества есть пересечение всех содержащих его замкнутых множеств.

Доказательство. Так как пересечение замкнутых многообразий замкнуто, то оно содержит замыкание.

Замыкание тоже замкнуто, поэтому оно содержит пересечение.

ТЕОРЕМА. Для любого множества А выполняется равенство $A \cup Fr(A) = C1(A)$.

Доказательство. Если точка x не лежит в $A \cup Fr(A)$, то ее некоторая окрестность не пересекает множества А. Поэтому множество $X — A \cup Fr(A)$ открыто и множество $A \cup Fr(A)$ замкнуто. Отсюда следует, что $Cl(A) \subset A \cup Fr(A)$.

Если точка x не лежит в замыкании, то ее окрестность $X — C1(A)$ не содержит точек множества А. Поэтому она не содержится ни в множестве А, ни в его границе.

Упражнение. Верно ли, что $Cl(Int(A)) = Cl(A)$ и $Int(Cl(A)) = Int(A)$? Если нет, приведите контрпримеры.

3.3. Связность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.

Упражнение. Дайте классификацию букв русского алфавита с точностью до гомеоморфизма.

Указание: В качестве различающих инвариантов используйте число компонент связности буквы, число компонент связности проколотой буквы, т.е. буквы с удаленной точкой, число компонент связности проколотой окрестности точки в букве.

Лекция 4. Аксиомы отделимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_0, если для любых двух его точек найдется окрестность одной из них, не содержащая вторую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1, если для любых двух его точек найдется окрестность каждой из них, не содержащая вторую точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_2, если любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_3, если для любой точки и не содержащего ее замкнутого множества найдутся непересекающиеся окрестности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_4, если любые два непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности.

См. рисунок 3.

Комментарии.

1. Аксиома T_0 называется аксиомой Колмогорова. Она обеспечивает различимость точек, если система открытых множеств известна.

2. Аксиома T_1 выполнена тогда и только тогда, когда каждая точка является замкнутым множеством. (Приведите строгое доказательство.)

3. Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2, называется хаусдорфовыми.

4. Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются регулярными.

5. Пространства, удовлетворяющие аксиома T_1 и T_4, называется нормальными.

ТЕОРЕМА. Нормальность => регулярность => T_2 => T_1 => T_0. (Приведите строгое доказательство.)

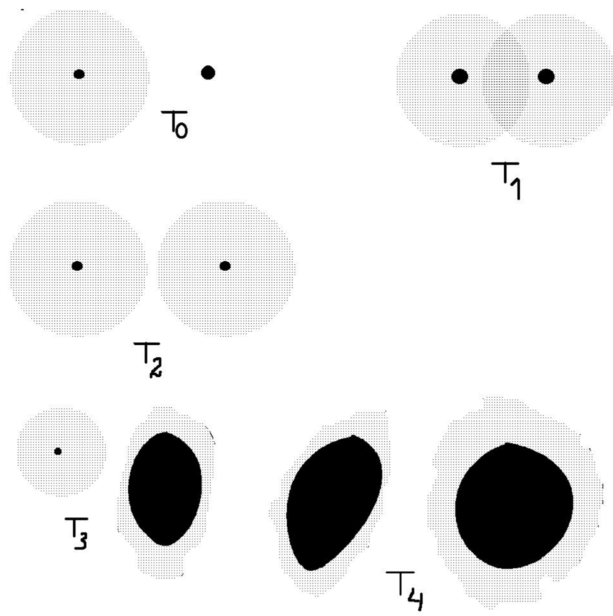

Рисунок 3.

ТЕОРЕМА. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Для того, чтобы доказать аксиому T_1, достаточно взять шаровые окрестности данных точек, радиусы которых равны расстоянию между точками. Для проверки нормальности нам понадобится лемма.

ЛЕММА. Функция расстояния

$$\rho(x,A) = \inf_{y\in A} \rho(x,y)$$

от точки x до данного множества A непрерывна.

Доказательство. Заметим, что неравенство треугольника

$$\rho(x,x_0) + \rho(x_0,y) \geq \rho(x,y)$$

после взятия инфимумов по $y \in A$ от обеих частей превращается в неравенство

$$\rho(x,x_0) + \rho(x_0,A) \geq \rho(x,A),$$

которое эквивалентно неравенству

$$\rho(x_0, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, x_0).$$

Аналогично,

$$\rho(x, A) - \rho(x_0, A) \le \rho(x, x_0).$$

Поэтому

$$|\rho(x, A) - \rho(x_0, A)| \le \rho(x, x_0).$$

Теперь для любого данного $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$, и тогда из неравенства $\rho(x_0, x) < \delta$ будет следовать неравенство $|\rho(x_0, A) - \rho(x, A)| < \varepsilon$.

Лемма доказана.

Пусть теперь F_1, F_2 - непересекающиеся замкнутые множества. Тогда по лемме функции $\rho(x, F_1)$ и $\rho(x, F_2)$, а вместе с ними и функция $\varphi(x) = \rho(x, F_1) - \rho(x, F_2)$, непрерывны. Поэтому открытые множества $U_1 = \varphi^{-1}(0, \infty)$ и $U_2 = \varphi^{-1}(-\infty, 0)$ являются искомыми непересекающимися открытыми подмножествами. Теорема доказана.

Обратная теорема также справедлива, но при выполнении некоторого дополнительного условия.

ТЕОРЕМА. (Без доказательства). Любое нормальное топологическое пространство со счетной базой открытых множеств метризуемо.

Упражнение. Приведите пример двух замкнутых непересекающихся множеств на плоскости, расстояние между которыми равно 0.

Упражнение. Для каждого i, $0 < i < 3$, приведите пример пространства, которое удовлетворяет аксиоме T_i, но не удовлетворяет аксиоме T_{i+1}.

Лекция 5. Компакты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство открытых подмножеств топологического пространства X называется открытым покрытием, если их объединение совпадает со всем X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство называется компактом, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

ТЕОРЕМА. Подмножество пространства R^N является компактом (в индуцированной топологии) <=> оно замкнуто и ограничено.

Доказательство. (=>). Пусть подмножество A является компактом. Рассмотрим его покрытие открытыми множествами $U_n = V_n(0) \cap A$. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, а это означает, что A лежит в шаре с максимальным номером. Поэтому A ограничено.

Пусть теперь x - произвольная точка из R^N — A. Рассмотрим покрытие множества A открытыми множествами $U_n = (R^N — Cl(V_{1/n}(x))) \cap A$. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, а это означает, что шар $V_{max(n)}(x)$ не пересекается с множеством A. Отсюда следует, что множество R^N — A открыто, т. е. A замкнуто.

(<=). Пусть A замкнуто и ограничено. Тогда оно содержится в некотором N-мерном кубе со стороной C. Допустим, что найдется покрытие $\{U_\alpha\}$ множества A, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Разобьем куб на 2^N равных кубов. Пересечение хотя бы одного из них с множеством A не покрывается конечным числом элементов покрытия. Разобьем его еще на 2^N равных кубов, опять выберем тот, пересечение которого с A не покрывается конечным числом элементов покрытия, и т. д., см. рис. 4. В результате мы получим последовательность вложенных кубов со стороной, стремящейся к 0. Их пересечение состоит из ровно одной точки (Почему?. Обозначим эту точку через P. Так как A замкнуто, то эта точка лежит в нем (Объясните, почему?. Тогда она содержится в одном из множеств покрытия, и это множество содержит все достаточно малые кубы, содержащие точку P. Получили противоречие.

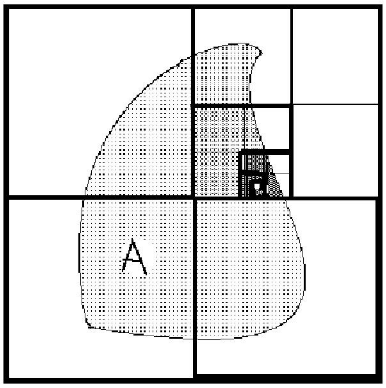

Рисунок 4.

Лекция 6. Свойства компактов.

ТЕОРЕМА. Функция, непрерывная на компакте, ограничена.

Доказательство.

Пусть функция f : К —> R непрерывна. Рассмотрим покрытие компакта множествами $U_n = f^{-1}(-n,n)$. Из этого покрытия можно выбрать конечное, а это означает, что $|f(x)| < n_{max}$.

ТЕОРЕМА. Функция, непрерывная на компакте, достигает наибольшего значения.

Доказательство. Пусть $y_0 = \sup f(x)$ не достигается. Рассмотрим покрытие компакта открытыми множествами $U_n = f^{-1}(-\infty, y_0 - 1/n)$.Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, но тогда y_0 -не супремум, поскольку число $y_0 - 1/n_{max}$ заведомо больше всех значений функции.

ТЕОРЕМА. Образ компакта при произвольном непрерывном отображении является компактом.

Упражнение. Докажите эту теорему.

т Подмножество хаусдорфова компакта является компактом •<=>• оно замкнуто.

Доказательство. *(<=)* Пусть A - замкнутое подмножество компакта K, и пусть $\{U_a\}$ - его открытое покрытие. Каждое множество U_a имеет вид $U_a = A \cap V_a$, где V_a -открытые множества в K. Множества V_a вместе с множеством $K - A$ покрывают K. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, но тогда конечное число соответствующих множеств U_a уже достаточно для покрытия множества A.

(=>) Пусть подмножество A хаусдорфова компакта K является компактом. Пусть точка x не лежит в A. Из хаусдорфовости следует, что для любой точки $y \in A$ найдутся непересекающиеся окрестности $U_y(y)$ и $V_y(x)$. При этом открытые множества $U_y(y) \cap A$ покрывают A. Так как A -компакт, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. В этом случае пересечение соответствующих окрестностей $V_y(x)$ является окрестностью точки у, лежащей вне A. Это означает, что множество A замкнуто.

Упражнение. Приведите пример незамкнутого компакта, лежащего в компакте. (Указание: рассмотрите пространство их двух точек).

ТЕОРЕМА. Уплотнение (т. е. непрерывная биекция) хаусдорфова компакта является гомеоморфизмом.

Упражнение. Докажите эту теорему. (Указание: используйте предыдущую теорему и теорему о том, что образ компакта - компакт).

Лекция 7. Поверхности.

7.1 Многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство называется n-мерным *многообразием,* если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную пространству R^n или полупространству R^n_+.

Чтобы избежать патологических примеров, обычно требуют, чтобы многообразие было хаусдорфовым и имело счетную базу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объединение точек многообразия, имеющих окрестность второго типа, но не имеющих окрестность первого типа, называется *краем* многообразия и обозначается через ∂M.

Заметим, что сходство обозначений края и частной производной далеко не случайно.

ТЕОРЕМА. Край n-мерного многообразия является многообразием размерности $n — 1$.

Мы оставляем эту теорему без доказательства, поскольку, несмотря на ее интуитивную очевидность, строгое доказательство довольно трудно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компактное многообразие с пустым краем называется *замкнутым.*

Нужно понимать, что слова "замкнутое множество" и "замкнутое многообразие" имеют совсем разный смысл.

7.2. Примеры поверхностей.

Поверхность - это двухмерное многообразие.

Примером некомпактной поверхности может служить дополнение к любому замкнутому множеству на плоскости (например, к канторовому континууму).

Упражнение. Объясните, почему открытое множество на плоскости является многообразием.

Примерами компактных поверхностей с краем служат диск D^2 *(* мы не называем его кругом, поскольку он может быть и не круглым, см. рис.5) и лист Мебиуса, см. рис.6.

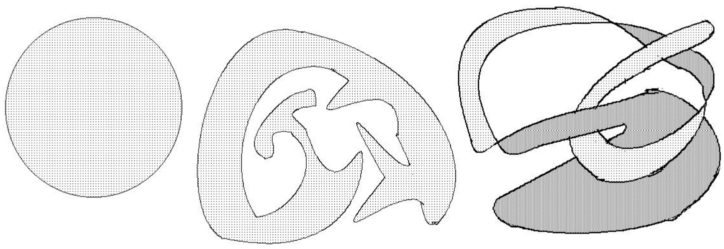

Рисунок 5.

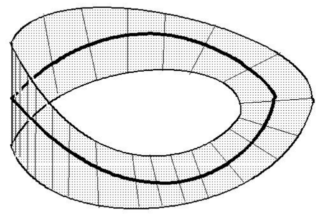

Рисунок 6.

Примерами замкнутых поверхностей служат сфера S^2 и проективная плоскость RP^2, которая получается из сферы удалением диска (после чего остается диск) и заклеиванием получившейся дырки листом Мебиуса, см. рис. 7.

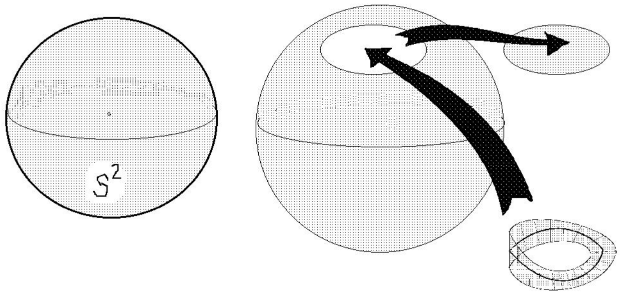

Рисунок 7.

Две бесконечные серии компактных поверхностей изображены на рис.8.

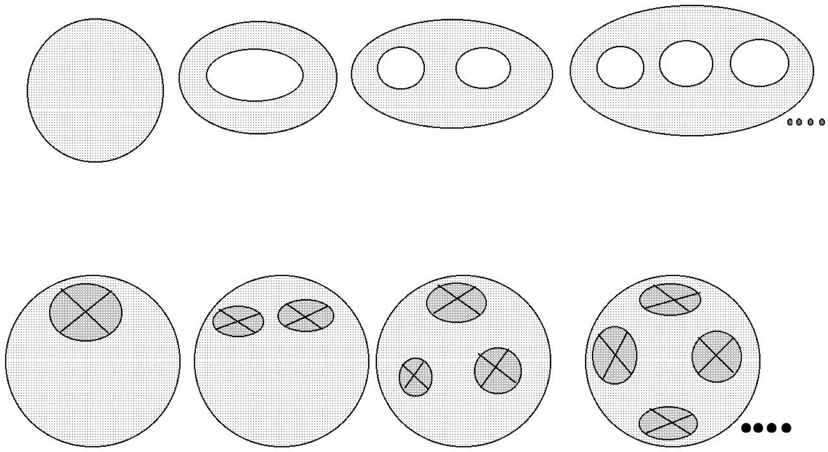

Рисунок 8.

ТЕОРЕМА. Любая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из модельных.

Доказательство.

1.По определению поверхности, любая поверхность локально устроена как плоскость (или как круг). Круг можно разбить на треугольники (триангулировать). Отсюда можно вывести (правда, не очень просто), что любая поверхность триангулируема.

2.Круговые окрестности вершин назовем *дисками,* окрестности ребер -

лентами, оставшиеся части треугольников - *заплатами.* Таким образом, поверхность можно разбить на диски, ленты и заплаты.

3. Число дисков и лент можно уменьшить, объявляя два диска и соединяющую их ленту новым диском. Поэтому в связную поверхность можно получить из *одного* диска приклеиванием лент и заплат.

4.Число заплат можно свести к 1 с помощью двойственного рассуждения - путем объявления новой заплатой ленты и двух примыкающих к ней заплат.

5.Если лент нет, то поверхность есть сфера, если лента одна, то она должна быть перекручена, и мы имеем дело с проективной плоскостью, если лент две и они не перекручены, то так как край объединения диска с лентами должен состоять из одной окружности, то ленты должны быть *скрещены,* а тогда получается тор, см. рисунок 9.

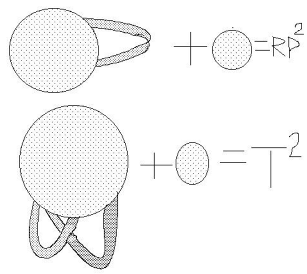

Рисунок 9.

6.В общем случае будем рассуждать так: допустим, что все ленты не перекручены. Тогда для каждой ленты L_1 найдется хотя бы одна лента L_2, которая с ней скрещивается. Заметим, что при *изотопии* (движении) основания следующей ленты по краю, поверхность не меняется, см. рис. 10.

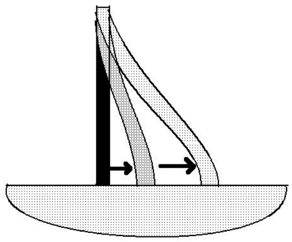

Рисунок 10.

За счет таких движений можно основания всех других лент вынести за пределы пары скрещенных лент L_1, L_2, т. е. *очистить* эту пару. Повторяя эту операцию несколько раз, мы придем к диску с несколькими чистыми парами скрещенных лент. Соответствующая поверхность гомеоморфна кренделю, род (число дырок) которого совпадает с числом пар скрещенных лент.

7. Допустим, что найдется хотя бы одна перекрученная лента. С помощью аналогичной операции очищения можно добиться, чтобы все ленты разбились на отдельные перекрученные ленты и на отдельные пары скрещенных лент. На рис. 11 хорошо видно, что если хотя бы одна перекрученная лента есть, то пару неперекрученных скрещенных лент

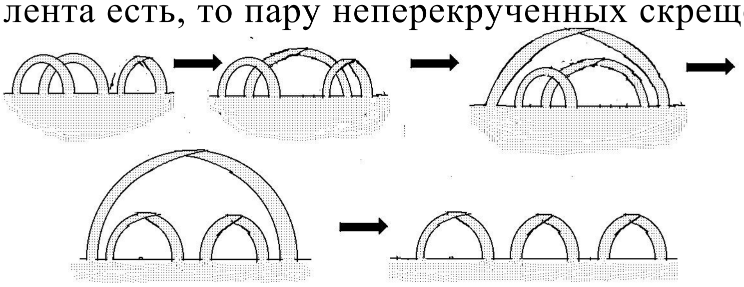

Рисунок 11.

можно заменить на пару отдельных перекрученных лент. В результате мы получим диск с несколькими отдельными перекрученными лентами. Ему соответствует сфера с листами Мебиуса, число которых совпадает с числом лент.

Теорема доказана.

Приведем пример применения теоремы классификации. Пусть R -*риманова поверхность* (т. е. график) многозначной комплексной функции $w = \sqrt{z(z-1)(z-2)}$, рассматриваемой как отображение пополненной бесконечностью комплексной плоскости (т. е. комплексной сферы) на себя. Тогда R ориентируема (как всякая риманова поверхность). При переходе от сферы к поверхности R все точки удваиваются, кроме точек $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $z = \infty$. Поэтому $\chi(R) = 2\chi(S^2) - 4 = 0$. Из теоремы классификации тогда следует, что поверхность R является тором.

Лекция 8. Различность модельных поверхностей.

ТЕОРЕМА. Все поверхности, изображенные на рис. 8, различны.

Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что поверхности первой серии отличаются от поверхностей второй серии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность называется *ориентируемой,* если она содержит лист Мебиуса. В противном случае поверхность называется *неориентируемой.*

Все поверхности второй серии неориентируемы, так как они по определению содержат по крайней мере один лист Мебиуса. Все поверхности первой серии ориентируемы. Действительно, каждая из них разбивает пространство R^3 на две части - внешнюю и внутреннюю. Поэтому они имеют по две стороны. Лист Мебиуса является односторонней поверхностью, поэтому он не может содержаться ни в одной из них. Этим первый этап закончен.

Перейдем ко второму этапу - доказательству того, что поверхности внутри каждой серии различны. Для этого нам понадобится понятие *эйлеровой характеристики.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть поверхность F разбита на треугольники так, что каждые два треугольника либо не пересекаются, либо пересекаются ровно по одной вершине, либо пересекаются по одному ребру. Такое разбиение называется *триангуляцией.* Тогда эйлеровой характеристикой поверхности F называется число

$$\chi(\mathrm{F}) = в - р + г,$$

где $в$, $р$ и $г$ - числа вершин, ребер и граней триангуляции, соответственно.

Замечательное свойство эйлеровой характеристики: она является инвариантом гомеоморфизма. Это означает, что она не зависит от триангуляции и что характеристики гомеоморфных поверхностей равны.

Полезно отметить также, что эйлерову характеристику можно вычислять по разбиению на многоугольники, и что ее можно определить и для многомерных триангулированных пространств как альтернированную сумму чисел симплексов соответствующих размерностей. Все эти утверждения будут доказаны позднее.

Теорема. $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

Доказательство. Подсчитывая вершины, ребра и грани пространств A и B, мы считаем те из них, которые находятся в пересечении, дважды. Если их считать по одному разу, то получим числа вершин, ребер и граней объединения.

СЛЕДСТВИЕ. Внутри каждой серии поверхности различны.

Доказательство. Применяя предыдущую теорему, легко вычислить эйлеровы характеристики всех модельных поверхностей. Ответ таков: характеристика поверхности кренделя рода n равна $2 - 2n$, характеристика сферы с га листами Мебиуса равна 2 — n. Из различности характеристик следует различность поверхностей.

Задание поверхностей многоугольниками с попарно склеенными сторонами.

Рассмотрим многоугольник с четным числом сторон. Стороны разобьем на пары и пометим стороны каждой пары одинаковыми буквами. Произвольно ориентируем их, а затем склеим согласно выбранным ориентациям. В результате получим некоторое топологическое пространство X.

ТЕОРЕМА. Пространство X является замкнутой поверхностью.

Упражнение. Докажите эту теорему.

Чтобы определить тип поверхности, нужно вычислить ее эйлерову характеристику и узнать, ориентируема ли она. Число ребер всегда равно n, грань одна, а чтобы найти число вершин, нужно внимательно посмотреть, какие вершины склеиваются между собой.

ЛЕММА. Поверхность X неориентируема тогда и только тогда, когда найдутся две сонаправленные стороны одной пары.

Доказательство. Если сонаправленная пара сторон найдется, то окрестность дуги в многоугольнике, соединяющей их середины, после склеивания дает лист Мебиуса.

Допустим, что сонаправленных пар склеиваемых сторон нет. Отрежем от многоугольника уголки, что эквивалентно удалению из поверхности нескольких дисков. После этого склеивания противонаправленных сторон можно реализовать в плоскости приклеиванием неперекрученных лент, см. рис. 12. Поэтому поверхность ориентируема.

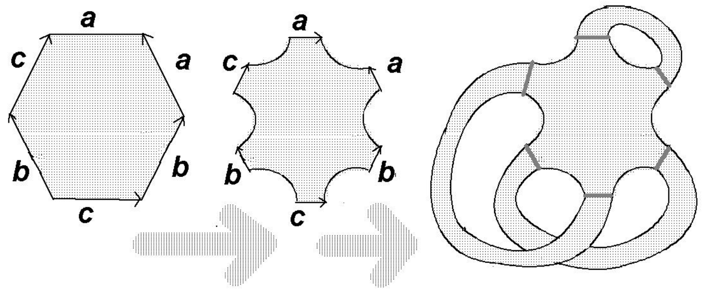

Рисунок 12.

V. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ (РАБОТ)

Курсовой проект (работа) не предусмотрен.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ (ПРАКТИКУМОВ)

Лабораторные работы не предусмотрены.

VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ) ЗАНЯТИЯМ

Необходимым условием присутствия студента на практическом занятии является выполнение домашнего задания по тематике предыдущего практического занятия. Для выполнения практических заданий студенту необходимо иметь конспект лекций. Студенты знакомятся с заданием и выполняют его, опираясь на конспект лекций. Задание выдается одно на всю группу. Приветствуется самостоятельное выполнение заданий.

VIII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении домашних работ необходимо использовать конспекты лекций, любую дополнительную литературу.

Перед контрольной работой студентам необходимо повторить теоретические основы методов, указанных преподавателем. При выполнении контрольной работы конспект лекций и другую дополнительную литературу не использовать.

IX. ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ, РЕАЛЬНО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРАКТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВЫПУСКНИКОВ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ, РАСКРЫВАЮЩЕЕ ОСОБЕННОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫХ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ

Выпускники могут выполнять расчеты в Microsoft Excel, используя любую литературу, посвященную данному программному продукту.

X. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (В Т. Ч. РАЗРАБОТАННЫЕ ВЕДУЩИМИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ ФИЛИАЛА)

Данные методические указания отсутствуют.

XI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО И ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ (МАТЕРИАЛЫ ПО КОНТРОЛЮ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ)

Преподаватель готовит контролирующие материалы в виде тестов, задач и в другой форме. Тематика контролирующих материалов должна соответствовать тематике материалов, прочитанных студентам на лекционных занятиях к моменту контроля знаний, и тематике задач, разобранных на практических занятиях к моменту контроля знаний. Преподаватель самостоятельно выбирает форму теста, правила работы с контролирующими материалами, время на его выполнение. Во время проведения контроля знаний студентов преподаватель объясняет студентам правила работы с контролирующими материалами и выдаёт эти материалы студентам. После истечения установленного времени контролирующие материалы собираются и обрабатываются. Критерии оценки знаний преподаватель устанавливает самостоятельно. Студентам, не сдавшим тест или не присутствующим на нем по каким-либо причинам, предоставляется дополнительная возможность пройти тест.

XII. КОМПЛЕКТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Задания для контрольных работ и домашних заданий берутся из книг, указанных в рабочей программе.

XIII. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Фонд тестовых и контрольных заданий для оценки качества знаний по дисциплине приведен в приложении А.

XIV. КОМПЛЕКТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ДЛЯ КАЖДОГО ИЗ ПРЕДУСМОТРЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

Контрольные вопросы к зачету представлены в п. 2.6 рабочей программы данной дисциплины.

XV. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Дисциплину в полном объёме ведёт: Подопригора Сергей Алексеевич, старший преподаватель кафедры математического анализа и моделирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ФОНД КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Определяют ли приведенные ниже описания топологию на множестве X? Если да, то каким аксиомам отделимости она удовлетворяет?

а) $X = \mathbf{N}$. Открытыми объявляются $\varnothing, X$ и все множества в X, содержащие в себе множество $I_n = \{k \in X;\ k \geq n\}$ для некоторого n.

б) $X=\mathbf{R}$. Для $x \in \mathbf{R}$. ф.с.о. : $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon) \cup (0,\ \varepsilon), \forall\varepsilon > 0$.

в) $X= \mathbf{R}$. Для $x \in \mathbf{R}$ ф.с.о. : $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.

г) $X= \mathbf{R}$. Для $x \in \mathbf{R}$. ф.с.о. : $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon) \cup (1/\varepsilon, \infty)$, $\forall\varepsilon > 0$.

д) $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0\}$. Для $(x_0,y_0) \in X$ ф.с.о. состоит из множества $\{(x_0,y_0)\}$, если $y_0 > 0$, и оно состоит из множеств

$\{(x, y) \in X; (x - x_0)^2 + (y - \varepsilon)^2 \leq \varepsilon^2\}$, если $y_0 = 0$, где $\varepsilon > 0$.

2. Для точки $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$ положим $U_\varepsilon(x_0,y_0) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0 - \varepsilon)^2 \leq \varepsilon^2\} \cup \{(x_0,y_0)\}$. Если $y_0 \neq 0$, то ф.с.о. точки (x_0,y_0) составляют множества $V_\varepsilon(x_0,y_0)$ $\forall\varepsilon > 0$, и множества $V_\varepsilon(x_0,0) =\{ U_\varepsilon(x_0,0) \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y < - \Delta\}$, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\Delta > 0$ - в оставшихся случаях.

Найти замыкание, внутренность и границу следующих множеств:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;-1 < x < 1,-1 < y < 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;-|y|<x<|y|\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;x< 0,y < 0\}\cup\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;x> 0,y < 1\}.$$

3. Пусть $\tau_б$ и $\tau_г$ - топологии на $\mathbf{R}$ из пунктов *б и г* задачи 1 соответственно. На каждом из следующих множеств

$A = \mathbf{N}$, $\quad B = \{-1, -2, -3, \ldots\}$, $\quad C = \mathbf{N} \cup \{1/2,1/3,1/4, \ldots\}$

рассмотреть индуцированные топологии и сравнить их между собой.

4. Доказать, что для любого множества A в топологическом пространстве выполнено равенство $\mathrm{Int}A = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)$.

СОДЕРЖАНИЕ