Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АМГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
_______ Т.В. Труфанова
«___»__________ 2008г.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

для специальности 010101 – Математика

Составители: Н.В.Ермак

Благовещенск
2008

ББК *Печатается по решению*
Т 80 *редакционно-издательского совета*
факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

Ермак Н.В.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Геометрические преобразования» для студентов очной формы обучения специальности 010101 – «Математика». – Благовещенск. Изд-во Амурский гос. ун-та, 2007. – 33 с.

1. <u>Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе</u>

Дисциплина «Геометрические преобразования» ставит своей целью знакомство студентов с основными видами геометрических преобразований развитие наглядно-геометрических представлений.

В процессе обучения студенты должны овладеть умениями и навыками свободной и уверенной работы с геометрическими преобразованиями в различных системах координат.

Студенты должны приобрести навыки исследования и решения задач по аналитической геометрии, проективной геометрии с применением преобразований на вычисления и на построения.

Студенты должны уметь объединить разрозненные известные им факты, привести их в систему на базе общих и логических идей, которые лежат в основе курса аналитической геометрии.

2. <u>Тематическое содержание дисциплины</u>

Ортогональные преобразования - 8 часов.

Ортогональные преобразования и их свойства. Основные виды ортогональных преобразований плоскости. Перенос. Симметрия относительно прямой. Симметрия относительно точки. Поворот. Представление преобразований в координатах. Композиция преобразований. Теорема Шаля. Группа преобразований плоскости, ее подгруппы. Основные виды ортогональных преобразований пространства.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Понятие о преобразовании в геометрии возникло прежде всего из рассмотрения движений. Особенностью же движений, наиболее важной с точки зрения геометрии, является сохранение величины и формы фигуры. Движущаяся фигура во все время движения сохраняет свою форму и размеры, она такова же в конце движения, как и в начале. Таким образом, если брать только начальный и конечный моменты движения, то мы можем установить соответствие между точками фигуры в начальном и конечном ее положении, при котором каждой точке M фигуры F в начальном ее положении ставится в соответствие точка M', в которую переходит точка M, когда фигура F переместится из начального положения в конечное. При этом если точки M и N фигуры F перейдут в точки M' и N' то отрезки MN и $M'N'$ равны между собой. В г е о м е т р и и под д в и ж е н и е м понимают не п р о ц е с с перемещения фигуры, а указанное только что с о о т в е т с т в и е между точками фигуры в начальном и конечном ее положении; такой подход к делу позволяет рассматривать движения в геометрии как отображения, переводящие каждый отрезок в равный ему отрезок. Такое отображение является простейшим с геометрической точки зрения, поскольку оно сохраняет как форму, так и размеры фигуры, меняя лишь ее расположение. Изучение геометрических преобразований плоскости и пространства мы начнем с изучения такого вида простейших преобразований. Мы не будем называть их движениями, а применим термин «ортогональные отображения» (и преобразования), потому что, кроме движений, существуют и другие преобразования, при которых каждый отрезок переходит в отрезок, ему равный (например, симметрия). При этом и ортогональные отображения, и все последующие геометрические отображения и преобразования мы будем изучать, рассматривая отображения и преобразования всей плоскости или всего пространства. Преобразования и отображения фигур мы будем рассматривать как вызываемые такими преобразованиями и отображениями.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение. *Ортогональным отображением плоскости π на плоскость* π' называется такое отображение, при котором каждый отрезок плоскости π переходит в равный ему отрезок плоскости π'.

Ортогональное отображение плоскости π на плоскость π' взаимнооднозначно. В самом деле: 1) двум различным точкам M_1 и M_2 плоскости π всегда соответствуют две различные же точки M_1 и M_2 плоскости π'; это следует из того, что отрезок $M_1 M_2$ равен отрезку $M_1' M_2'$; 2) каждая точка M' плоскости π' имеет прообраз M в плоскости π. В самом деле: возьмем произвольный треугольник ABC в плоскости π. Пусть A', B' и C' — образы точек A, B и C при рассматриваемом отображении. Так как $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$, то точки A', B' и C' служат вершинами треугольника $A'B'C'$, равного треугольнику ABC. Точка M' не лежит по крайней мере на одной из прямых $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$. Пусть точка M' не лежит на прямой $A'B'$. Рассмотрим треугольник $A'B'M'$ и треугольник $A'B'M''$, где M'' точка, симметричная точке M' относительно $A'B'$. Построим в плоскости π два треугольника ABM_1 и ABM_2, равных *треугольникам* $A'B'M'$ *и* $A'B'M''$. Точка M_1 отстоит от точек A и B на расстояниях $M_1 A$ и $M_1 B$; значит образ точки M_1 будет отстоять от точек A' и B' на тех расстояниях, т. е. он будет совпадать либо с точкой M', либо с точкой M''. Точно так же и образ точки M_2 будет совпадать либо с точкой M', либо с точкой M''. Пусть образ точки M' совпадает с точкой M''. Тогда образ точки M_2 должен совпасть с точкой M', ибо точки M_1 и M_2 имеют разные образы. Итак, точка M' имеет прообраз. Из доказанного следует, что каждая точка M' плоскости π' имеет, и при том только один, прообраз, а значит, отображение, обратное ортогональному, также ортогональное.

Определение. *Ортогональное отображение плоскости на* СЕБЯ *называется ортогональным преобразованием плоскости.*

Произведение двух любых ортогональных преобразований есть ортогональное преобразование; преобразование, обратное к ортогональному, есть снова ортогональное; единичное преобразование плоскости — также ортогональное. Отсюда следует, что *множество всех, ортогональных преобразований плоскости образует группу.*

Аналогично определяются ортогональные преобразования пространства.

Множество всех ортогональных преобразований пространства образует группу.

СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 1. *При ортогональном отображении всякие три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также не лежащие на одной прямой.*

Теорема 2. *При ортогональном отображении плоскости □ на плоскость □' образом прямой l является прямая l' плоскости □'.*

Теорема 3, *При ортогональном преобразовании пространства всякая плоскость □ ортогонально отображается на некоторую плоскость □'.*

Теорема 4. *При ортогональном отображении плоскости □ на плоскость □' две параллельные прямые плоскости □ переходят в две параллельные прямые плоскости □'.*

Теорема 5. *При ортогональном преобразовании пространства:*

1) *две параллельные прямые переходят в две параллельные прямые;*

2) *две параллельные плоскости переходят в две параллельные плоскости;*

3) *параллельные плоскость и прямая переходят соответственно в параллельные плоскость и прямую.*

Теорема 6. *При ортогональном отображении порядок точек на прямой сохраняется, т. е. внутренние точки отрезка PR переходят во внутренние точки отрезка P'R', являющегося* образом данного отрезка *PR, а точки прямой PR, внешние по отношению к отрезку PR, переходят в точки прямой P'R', внешние по отношению к отрезку P'R'.*

Следствие. *Если точки P и Q лежат по разные стороны от прямой l, то их образы P' и Q' лежат также по разные стороны от прямой /', являющейся образом прямой l.*

Теорема 7. *При ортогональных отображениях углы сохраняются.*

Теорема 8. *Пусть A, B, C — три произвольные точки плоскости □, не лежащие на одной прямой, а A', B', C'— три точки плоскости □' такие, что A'B'=AB, B'C'=BC, C'A'=CA, тогда существует и притом только одно ортогональное отображение плоскости □ на плоскость□', которое переводит точки A, B, и C соответственно в точки A', B' и C'*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Теорема 1. *Если какой-нибудь треугольник ABC и его образ A' B' C' при ортогональном преобразовании плоскости имеют одинаковую ориентацию, то одинаковую ориентацию имеют любой треугольник PQR и его образ P'Q'R' при этом ортогональном преобразовании. Если же треугольни-*

ки ABC и $A'B'C'$ имеют противоположную ориентацию, то и треугольники PQR и $P'Q'R'$ имеют противоположную ориентацию.

Определение. Ортогональное преобразование называется ортогональным преобразованием *первого рода,* если это преобразование сохраняет ориентацию любого треугольника. Если же ориентация меняется на противоположную, то ортогональное преобразование называется ортогональным преобразованием *второго рода*..

Определение. Ортогональное преобразование первого рода называется *движением.*

Обычно движение в механике и физике рассматривается, как процесс, в результате которого тело переходит из одного положения в другое. В процессе движения все время сохраняются длины отрезков и величины углов, а также ориентация. В ряде вопросов геометрии нас интересуют лишь начальное и конечное положения тела. Поэтому движение в геометрии чаще всего определяется как такое преобразование, которое сохраняет длины отрезков и ориентацию, т. е. как ортогональное преобразование первого рода. Совокупность всех движений есть подгруппа группы всех ортогональных преобразований.

Таким образом, произведение двух ортогональных преобразований первого рода есть ортогональное преобразование первого рода.

Заметим, что произведение ортогонального преобразования первого рода на ортогональное преобразование вторoю рода есть ортогональное преобразование, второго рода; произведение же двух ортогональных преобразований второго рода оказывается преобразованием первого рода. Отсюда, между прочим, следует, что множество ортогональных преобразований второго рода не является группой.

Теорема 2. *Существует и притом только одно ортогональное преобразование первого рода, которое две точки A и B переводит соответственно в точки A', B' такие, что $AB = A'B'$. Существует и притом только одно ортогональное преобразование второго рода, которое две точки A и B переводит соответственно в точки A' и B' такие, что $AB = A'B'$*

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ПЕРЕНОС, СИММЕТРИЯ, ПОВОРОТ)

Рассмотрим основные виды ортогональных преобразований, к которым сводится всякое ортогональное преобразование.

п. 1. Перенос

Пусть дан вектор *a,* лежащий в плоскости π . Поставим в соответствие каждой точке M плоскости π точку M' той же плоскости, такую, что $MM' = a$. Это соответствие есть преобразование плоскости, называемое *переносом.* Таким образом, при переносе каждая точка плоскости перемещается в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Перенос есть ортогональное преобразование. В самом деле: пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки плоскости, а M_1' и M_2' — их образы при указанном переносе. По определению переноса $M_1M_1' = M_2M_2' = a$. Прибавляя к обеим частям вектор $M_1'M_2$, получим $M_1M_1' + M_1'M_2 = M_1'M_2 + M_2M_2'$, или $M_1M_2 = M_1'M_2'$, значит отрезки M_1M_2 и $M_1'M_2'$ равны.

Перенос есть ортогональное преобразование первого рода.

Докажем теперь, что множество всех переносов плоскости вместе с тождественным преобразованием является группой.

п. 2. Симметрия относительно прямой

Пусть на плоскости дана прямая l. Поставим в соответствие каждой точке M плоскости точку- M', симметричную точке M_относительно прямой l . Каждой точке прямой l ставим в соответствие ее самое.Такое соответствие называется симметрией относительно прямой l.

Симметрия есть ортогональное преобразование второго рода.

Действительно, при симметрии длины отрезков не изменяются, а потому симметрия есть ортогональное преобразование. Это преобразование второго рода. В самом деле: пусть A и B —две точки прямой l, С— произвольная точка, не лежащая на прямой l , а C' — точка, симметричная точке C относительно прямой l.

Симметрию можно определить как такое ортогональное преобразование, отличное от тождественного, при котором по крайней мере две точки остаются неподвижными.

п. 3. Симметрия относительно точки

Пусть на плоскости задана точка О. Поставим в соответствие каждой точке M, отличной от точки O, точку M', симметричную точке M относительно точки O. Точке O поставим в соответствие самое эту точку. Такое преобразование называется *симметрией* плоскости относительно точки O.

Симметрия плоскости относительно точки есть ортогональное преобразование первого рода.

п. 4. Поворот

Пусть на плоскости фиксирована произвольная точка O и ориентированный угол, т. е. упорядоченная пара лучей OA, OA'. Поставим в соответствие каждой точке M точку M' такую, что:

1)отрезок OM' равен отрезку OM;

2)угол между лучами OM и OM' равен углу между луча ми OA и OA';

3)упорядоченные пары лучей (OA, OA') и (OM, OM') — одинаково ориентированы, т. е. треугольник MOM' одинаково ориентирован с треугольником AOA'.

Точке O ставится в соответствие она сама. Такое преобразование называется поворотом вокруг точки O на ориентированный угол (OA, OA').

Таким образом, при повороте каждый отрезок OM «поворачивается» вокруг точки O на один и тот же угол в одном и том же направлении.

Из определения поворота следует, что поворот вокруг точки O будет полностью определен, если для какой-нибудь точки A, отличной от точки

O, задан ее образ A', так как этим заданием определяются как угол поворота (OA, OA'), так и «направление» поворота, задаваемое ориентацией треугольника AOA'.

Поворот есть ортогональное преобразование первого рода.

Поворот можно определить как ортогональное преобразование, имеющее единственную неподвижную точку.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОСНОВНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: ПЕРЕНОСА, СИММЕТРИИ И ПОВОРОТА

Изучили различные виды ортогональных преобразований: перенос, симметрию, поворот, покажем, что всякое ортогональное преобразование плоскости сводится к последовательному выполнению этих преобразований.

Теорема 1 (Шаля). *Всякое ортогональное преобразование первого рода есть либо перенос, либо поворот, либо симметрия относительно точки.*

Теорема 2. *Всякое ортогональное преобразование второго рода может быть представлено и притом единственным образом в виде произведения симметрии относительно некоторой прямой на параллельный перенос в направлении этой прямой.*

Теорема 3. *Каждое ортогональное преобразование первого рода можно представить как произведение двух симметрии относительно прямых; каждое же преобразование второго рода либо само является симметрией относительно прямой, либо может быть представлено в виде произведения трех симметрии относительно прямых.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy с началом в точке O и единичными точками. Пусть $M(x, y)$—произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — ее образ при ортогональном преобразовании а. В настоящем параграфе мы выведем формулы, выражающие координаты x' и y' точки M' в выбранной системе xOy через координаты - x и y точки M в той же системе.

п. 1. Перенос

Пусть Т— перенос, определяемый вектором t. Предположим, что вектор t в системе xOy имеет координаты a и $в$. Пусть x и y — координаты произвольной точки M, а x' и y' — координаты образа M' точки M при рассматриваемом переносе т. Тогда по определению переноса $\overrightarrow{MM'} = t$. Но два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты. Следовательно, вектор MM' так же, как и равный ему вектор t, имеет координаты a и $в$, Но если начало вектора M имеет координаты x и y, а его конец M' имеет координаты x' и y', то координаты вектора MM' будут равны разностям соответствующих координат конца и начала вектора MM', т. е. $x'—x$ и $y'—y$. Таким образом, $x'—x = a$,

$y'—y — в$; отсюда $x' = x + a$, $y' = y + в$. Так выражается преобразование параллельного переноса в координатах.

п. 2. Симметрия относительно прямой

Пусть а — симметрия плоскости относительно оси *Ох*. Пусть *М(х, у)* — произвольная точка плоскости. Тогда точка *M'(x', у'),* симметричная точке *М* относительно оси *Ох,* имеет координаты *х* и —*у*; поэтому формулы преобразования симметрии относительно оси *Ох* имеют вид $x' = x$, $y' = -y$.

п. 3. Симметрия относительно точки

Пусть *М(х, у)* — произвольная точка плоскости, а *M'(x', у')* — точка, симметричная точке *М* относительно начала координат О.

Тогда: $x' = — x$, $y' = —y$.

п. 4. Поворот

Пусть р — поворот вокруг начала координат на ориентированный угол ф. Пусть *М(х, у)* — произвольная точка плоскости, а *M'(x', у')* — ее образ при повороте р. Обозначим через а ориентированный угол *(Ох, ОМ).* Тогда

$$(Ox, OM') = (Ox, OM) + (OM, OM'), \text{ или } a' = a + ф.$$

Обозначим длину отрезка *ОМ* (и равного ему отрезка *ОМ')* через *г*. Тогда:

$$x = г \cos a, \quad y = г \sin a,$$

$$x' = г \cos a' = г \cos (a + ф) = г \cos a \cos ф — г \sin a \sin ф = x \cos ф — y \sin ф,$$

$$y' == г \sin a' = г \sin (a + ф) = г \sin a \cos ф + г \cos a \sin ф = x \sin ф + y \cos ф$$

Итак, формулы поворота вокруг начала координат на ориентированный угол ф имеют вид:

$$x' = x \cos ф — y \sin ф,$$

$$y' — x \sin ф + y \cos ф.$$

п. 5. Общий случай

I. Пусть а — произвольное ортогональное преобразование первого рода Преобразование **а** можно представить в виде произведения— поворота вокруг точки *О* и параллельного переноса, при котором точка *О* переходит в точку *О'.*

$$x' = x \cos ф — y \sin ф + a,$$

$$y' = x \sin ф + y \cos ф + в.$$

II. Пусть **а** — произвольное ортогональное преобразование второго рода. Преобразование **а** можно представить в виде произведения симметрии относительно оси Ox, и поворота вокруг точки O на ориентированный угол ф:

$$x' = x \cos ф + y \sin ф + a,$$

$$y' = x \sin ф - y \cos ф + в.$$

Подобные преобразования – 4 часа.

Отображение подобия. Гомотетия. Представление подобного преобразования в виде произведения гомотетии на ортогональное преобразование. Подобные преобразования в координатах. Группа преобразований подобия. Подобные преобразования пространства.

ПОДОБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ортогональные преобразования оставляют неизменными как форму фигуры, так и ее размеры. Если отказаться от требования сохранения размеров фигуры и рассматривать лишь такие преобразования, при которых остается неизменной ее форма, то мы получим группу подобных преобразований. Эти преобразования, не изменяя формы фигуры, увеличивают или уменьшают все ее размеры в одно и то же число раз.

Элементарная геометрия изучает те свойства фигур, которые сохраняются при ортогональных преобразованиях, а также и те свойства, которые сохраняются при преобразованиях подобия.

ОТОБРАЖЕНИЕ ПОДОБИЯ

Отображение *а* плоскости π на плоскость π' называется *отображением подобия* с **коэффициентом** $k > 0$ (или подобием), если оно обладает следующим свойством: если A и B — две любые точки плоскости π, а A' и B' — их образы при отображении а, то $A'B' = k \cdot AB$. Если $k = 1$, то отображение подобия является ортогональным отображением. Так же, как и для ортогональных отображений, доказывается, что отображение подобия взаимнооднозначно.

Отображение а" плоскости π' на плоскость π, обратное отображению *а* подобия с коэффициентом k плоскости π на плоскость π', есть отображение подобия плоскости π' на плоскость π с коэффициентом $\frac{1}{к}$

Отображение подобия плоскости π *на* себя называется *преобразованием подобия,* или *подобным преобразованием.* Произведение двух любых подобных преобразований (с коэффициентами k_1 и k_2) есть подобное преобразование (с коэффициентом k_1k_2); единичное преобразование плоскости, можно рассматривать как подобное преобразование (с коэффициентом 1). Отсюда следует, что множество всех подобных преобразований образует группу; группа ортогональных преобразований есть подгруппа этой группы.

СВОЙСТВА ПОДОБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

При отображении подобия три точки A, B и C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A', B', C', также лежащие на одной прямой с сохранением порядка. В самом деле: пусть точки *A, B* и *C* лежат на одной прямой и, например, точка *B* лежит между точками *A и C;* тогда $AB + BC = AC$, но по определению подобия

$$A'C' = kAC = k(AB + BC) = kAB + kBC = A'B' + B'C.$$

При подобном отображении окружность переходит в окружность. Подобное преобразование называется подобным преобразованием первого рода, если оно сохраняет ориентацию любого треугольника. Если же ориентация любого треугольника меняется на противоположную, то подобное преобразование называется подобным преобразованием второго рода.

Существует и притом только одно подобное преобразование первого рода, которое две точки A и B переводит соответственно в две произвольные точки A' и B'.

Существует и притом только одно подобное преобразование второго рода, которое две точки A и B переводит соответственно в две произвольные точки A' и B'.

Эти предложения доказываются так же, как и соответствующие утверждения для ортогональных преобразований.

ГОМОТЕТИЯ

Гомотетией с центром *O* и коэффициентом *k,* где *k* — положительное число, не равное 1, называется такое преобразование плоскости, при котором каждой точке *M,* отличной от *O,* ставится в соответствие точка *M',* лежащая на луче *OM* и такая, что $\frac{OM'}{OM} = к$. Точке *O* ставится в соответствие сама эта точка.

Теорема. *Гомотетия у с центром O и коэффициентом* ***k*** *есть преобразование подобия первого рода с коэффициентом* ***k.***

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОДОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГОМОТЕТИИ НА ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Теорема 1. *Всякое подобное преобразование а с коэффициентом* $k \neq 1$ *или является гомотетией, или может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования* ϖ *на гомотетию* γ *с коэффициентом k и с центром в произвольной точке O плоскости.*

Теорема 2. *Всякое подобное преобразование а плоскости есть либо ортогональное преобразование, либо гомотетия, либо представляется в виде произведения гомотетии* γ *с центром в точке O на поворот* р *вокруг этой точки (включая сюда и симметрию относительно точки O — «поворот на 180°»), если преобразование а первого рода, либо в виде произведения гомотетии* γ *с центром O на симметрию а относительно прямой, проходящей через точку O, если преобразование а второго рода. Представление а в виде произведений указанных преобразований не зависит от их порядка и может быть осуществлено единственным образом.*

ПОДОБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ

п. 1. Гомотетия

Пусть γ — гомотетия с центром в точке *O* и коэффициентом *к.* Введем прямоугольную систему координат с .началом координат в точке О.

Пусть *x* и *y* — координаты произвольной точки *M,* а *x'* и *y'* — координаты ее образа *M'*. Опустим из точки *M* перпендикуляры *MP* и *MQ* на оси *Ox* и *Oy, а* из точки *M'* — перпендикуляры *M'P'* и *M'Q'* на те же оси. Тогда $\frac{OM'}{OM} = \frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \kappa$, следовательно, $OP' = \kappa OP$, $OQ' = \kappa OQ$

Так как, кроме того, точки *P* и *P'* лежат на одном луче оси *Ox,* а точки Q и *Q'* лежат на одном луче оси *Oy,* то из этих равенств следует, что $x' = kx$, $y' = \kappa y$.

п. 2. Подобное преобразование (общий случай)

Пусть а — подобное преобразование с коэффициентом *k.* Введем на плоскости прямоугольную систему координат *xOy.* Пусть *M(x, y)* — произвольная точка плоскости, а *M'(x', y')* — ее образ в подобном преобразовании а.

На основании теоремы преобразование а с коэффициентом *k* может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования (того же рода, что и данное преобразование а) на гомотетию γ с центром в точке *O* и коэффициентом *k* имеющее представление в координатах:

$$\begin{cases} x' = \kappa\left(x\cos\varphi + y\sin\varphi\right) + a, \\ y' = \kappa\left(-x\sin\varphi + y\cos\varphi\right) + b. \end{cases}$$

Аффинные преобразования - 6 часов.

Определение аффинных отображений и преобразований плоскости. Примеры аффинных преобразований. Косая симметрия. Сжатие. Косое сжатие. Гиперболический поворот. Эллиптический поворот. Сдвиг. Параллельное проектирование. Простое отношение при аффинном отображении. Измерение отрезков площадей при аффинных преобразованиях. Аффинные преобразования в координатах.

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ранее рассмотрели простейшие геометрические преобразования, которые сохраняют форму любой геометрической фигуры. Совокупность подобных преобразований составляет подгруппу группы более общих преобразований, которые, сохраняя прямые линии и параллельность, меняют, вообще говоря, длины отрезков, величины углов и площадей фигур. Это — аффинные преобразования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ

Определение. *Взаимнооднозначное отображение плоскости на плоскость называется аффинным, если при этом отображении всякие три точки, расположенные на одной прямой, переходят в три точки, также расположенные на одной прямой.*

Теорема. *При аффинном отображении всякие три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также не лежащие на одной прямой.*

Следствие. *Отображение, обратное к аффинному, является аффинным.*

Аффинное отображение плоскости на ту же плоскость называется *аффинным преобразованием* этой плоскости. Рассмотренные ранее ортогональные и подобные преобразования могут служить простейшими примерами аффинных преобразований. Из определения аффинного преобразования следует, что произведение двух аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование, а кроме того (см. следствие), преобразование, обратное к аффинному, является также аффинным. Таким образом, *совокупность всех аффинных преобразований плоскости образует группу.* Единичным преобразованием этой группы является тождественное преобразование.

Группа подобных преобразований плоскости составляет подгруппу группы ее аффинных преобразований.

Группа ортогональных преобразований плоскости также является подгруппой группы аффинных преобразований.

Параллельное проектирование. Родство

Очень важным видом аффинных отображений является параллельное проектирование, частным случаем которого является ортогональное проектирование, составляющее основу метода изображений пространственных фигур на плоскости. Метод ортогонального проектирования является основным в начертательной геометрии (метод Монжа).

Теорема 1 *Всякое аффинное преобразование* а *плоскости, в котором все точки некоторой прямой остаются неподвижными (т. е. каждая точка прямой I совпадает со своим образом), есть родство.*

Таким образом, родство можно определить как такое аффинное преобразование плоскости, которое оставляет на месте все точки некоторой прямой.

Теорема 2. *Всякое родство* р *есть либо косое сжатие, либо косая симметрия, либо сдвиг, либо произведение косого сжатия относительно оси родства на косую симметрию относительно оси родства, причем косое сжатие и косая симметрия производятся в одном и том же направлении.*

СВОЙСТВА АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 1. *При аффинном отображении а плоскости* π *на плоскость* π' *образом всякой прямой плоскости* π *служит прямая плоскости* π'.

Теорема 2. *При аффинном отображении а плоскости* π *на плоскость* π' *параллельные прямые плоскости* π *переходят в параллельные прямые плоскости* π'. *Пересекающиеся прямые плоскости* π *переходят в пересекающиеся прямые плоскости* π'. *При этом точка пересечения прямых плоскости* π *переходит в точку пересечения образов этих прямых.*

В теории ортогональных отображений после аналогичных теорем следовали теоремы, утверждающие, что отрезок переходит в отрезок и что отношение, в котором точка делит отрезок, не меняется.

Хотя и при аффинном отображении, это, отрезок переходит в отрезок (правда, уже, быть может, другой длины), а отношение, в котором точка делит отрезок, остается неизменным, однако тут доказательство этих двух утверждений вовсе не просто. Долгое время даже считалось, что указанные свойства вовсе не следуют из данного в начале определения аффинного отображения и что обеспечить выполнение этих свойств можно лишь внеся в определение аффинного отображения дополнительные требования, например, требование непрерывности отображения либо требование сохранения порядка троек точек на прямой (т. е. что если *B* лежит на прямой между *A и C,* то *B'* лежит между *A'* и *C'*). Так думали создатели теории проективных и аффинных отображений Понселе, Мебиус, Шаль и другие; лишь в 1880 г. французский геометр Дарбу обнаружил, что указанные дополнительные требования, а вместе с ними и леммы о переходе отрезка а отрезок и о сохранении отношения, в котором точка делит отрезок, на самом деле являются уже следствиями требований, включенных в данное выше определение аффинного отображения.

В статье «Основная теорема проективной геометрии» (Mathema-в tische Annalen, т. XVII, 1880, стр. 55—61) Дарбу доказывает сохранение двойного отношения при проективном отображении, фактически сводя дело к доказательству сохранения простого отношения при аффинном отображении.

Теорема 3. *При аффинном отображении середина отрезка, соединяющего точки A и B, переходит в середину отрезка, соединяющего их образы A' и B'.*

ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРОСТОГО ОТНОШЕНИЯ ПРИ АФФИННОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Теорема. *При аффинном отображении а точка C, делящая отрезок AB (внутренним или внешним образом) в отношении X, переходит в точку C, делящую отрезок A'B', соединяющий образы A' и B' точек A и B, в том же отношении X.*

. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО АФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Лемма 1. *Всякое аффинное преобразование плоскости может быть представлено в виде произведения подобного преобразования на родство* *(напомним, что родство есть такое аффинное преобразование плоскости, при котором каждая точка некоторой прямой совпадает со своим образом).*

Лемма *2. Для всякого родства* р *плоскости* я *можно найти две такие взаимно-перпендикулярные прямые, образами которых являются также взаимно-перпендикулярные прямые*

Теорема. *Всякое аффинное преобразование плоскости есть произведение двух сжатий к двум взаимно-перпендикулярным прямым на некоторое ортогональное преобразование.*

Следствие 1. *Всякое аффинное отображение а плоскости* π *на плоскость* π' *сводится к последовательному выполнению ортогонального отображения плоскости* π *на плоскость* π' *и двум сжатиям к двум взаимно- перпендикулярным прямым в плоскости* π'.

Проективные преобразования - 6 часов.

Проективная плоскость, проективное пространство. Проективные координаты. Проективные отображения. Двойное отношение точек и прямых и его инвариантность при проективном отображении. Примеры проективных преобразований. Гомологии. Проективные преобразования в координатах. Проективные преобразования пространства.

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ПОНЯТИЕ О ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Мы определили аффинное отображение плоскости на плоскость как взаимнооднозначное отображение, сохраняющее прямолинейное расположение точек. Возникает вопрос: возможно ли установить такое соответствие между плоскостями, которое не было бы аффинным, но которое сохраняло бы прямолинейное расположение точек? Ясно, что если такое соответствие между множествами точек двух плоскостей установить возможно, то оно не должно быть взаимнооднозначным.

Весьма важным примером такого соответствия является перспектива.

Рассмотрим две различные плоскости π и π' и точку *S,* не лежащую ни на одной из них. Будем проектировать из точки S точки плоскости π в плоскость π', т. е. поставим в соответствие точке *М* плоскости я в точку *М',* в которой прямая *SM* пересекает плоскость π'. Такое соответствие будем называть *перспективным соответствием* плоскостей π и π', а точку S — *центром перспективы.*

Пусть *А, В, С* — три точки в плоскости я, лежащие на одной прямой. Если при рассматриваемом соответствии у точек *А, В* и *С* есть образы *А', В', С',* т. е. ни одна из прямых *SA, SB* и *SC* не параллельна плоскости π', то точки *А', В'* и *С'* так же, как и точки *А, В* и *С,* лежат на одной прямой. Таким образом, при перспективном соответствии двух плоскостей сохраняется прямолинейное расположение точек. Однако рассматриваемое перспективное соответствие между плоскостями π и π' не является взаимнооднозначным: не каждая точка плоскости π имеет образ на плоскости π' и не каждая точка плоскости π' имеет прообраз в плоскости π.

Таким образом, если взять фигуру F в плоскости π, в состав которой входят точки прямой k, то ее изображение — проекция из точки S на плоскость π' — не будет полным, так как у точек фигуры F, лежащих на прямой k, не будет образов. С другой стороны, на изображении могут быть такие точки, которых нет у самого предмета: это точки прямой k.

Перспективное изображение равнины, по которой проходит железная дорога показывает, что рельсы пересекаются в точке, которая не является изображением какой-либо точки местности.

Изучение перспективного соответствия естественным образом приводит к .пополнению плоскостей π и π' новыми элементами, благодаря чему перспективное соответствие становится взаимнооднозначным. Такое пополнение плоскостей новыми элементами приводит к образованию нового геометрического объекта, называемого проективной плоскостью, и к созданию новой математической дисциплины — проективной геометрии. Пополняя плоскость новыми элементами, мы должны заботиться о том, чтобы в «расширенной» плоскости по-прежнему выполнялась основная аксиома элементарной геометрии: через две различные точки можно провести прямую и притом только одну. Целью же нашего расширения плоскости является выполнение того условия, чтобы каждые две различные прямые плоскости имели общую точку и притом только одну. Эти соображения и являются основанием к приводимому ниже построению проективной плоскости.

Первая модель проективной плоскости

Присоединим к множеству точек прямой линии новый элемент, природа которого для нас совершенно безразлична. Мы получим новое множество, состоящее из точек рассматриваемой прямой и вновь присоединенного элемента. Это новое множество называется *проективной прямой,* соответствующей взятой обыкновенной прямой. Элемент, вновь присоединенный к множеству точек обыкновенной прямой, называется «несобственной», или «бесконечноудаленной», или «идеальной», точкой проективной прямой. Условимся в следующем: если на плоскости взять две пересекающиеся прямые, то соответствующие им проективные прямые имеют различные несобственные точки, т. е. эти проективные прямые образуются присоединением двух различных элементов к множествам точек обыкновенных прямых. Если же прямые параллельны, то условимся в том, что соответствующие им проективные прямые имеют одну и ту же несобственную точку, т. е. в этом случае мы получаем эти проективные прямые присоединением одного и того же элемента к каждому из множеств точек взятых прямых.

Совокупность всех несобственных точек, т. е. совокупность всех вновь присоединенных элементов, назовем *несобственной,* или *бесконечноудаленной,* проективной прямой.

Множество, состоящее из всех точек рассматриваемой эвклидовой плоскости π и всех несобственных точек, называется проективной плоскостью.

Условимся в следующей терминологии: точки и прямые эвклидовой плоскости и самою эвклидову плоскость будем называть обыкновенными точками, обыкновенными прямыми и обыкновенной плоскостью. Обыкновенные точки, рассматриваемые как элементы множества, являющегося проективной прямой или проективной плоскостью, будем называть собственными точками. Все прямые проективной плоскости, кроме несобственной, будем называть собственными прямыми проективной плоскости. Далее: будем говорить, что точка (как собственная, так и несобственная), которая принадлежит множеству, составляющему проективную прямую, *лежит* на этой прямой или что проективная прямая *проходит* через эту точку.

Покажем, что построенная только что проективная плоскость удовлетворяет том требованиям, о которых мы говорили выше:

1) *Через любые две различные точки проективной плоскости проходит и притом только одна прямая.*

В самом деле: если эти две точки обыкновенные, то существует и притом только одна обыкновенная прямая, проходящая через эти точки, которой соответствует вполне определенная проективная прямая, проходящая (по принятой нами терминологии) через две эти точки.

Если одна из точек собственная, а другая несобственная, то из пучка параллельных прямых, к каждой из которых присоединен этот несобственный элемент, нужно выбрать ту обыкновенную прямую, которая проходит через данную собственную точку. Проективная прямая, которую мы получим, присоединив к этой обыкновенной прямой данную несобственную точку, и будет той единственной прямой, которая проходит через две данные точки.

Если, наконец, обе данные точки несобственные, то они по определению лежат на единственной несобственной прямой.

2) *Любые две различные прямые проективной плоскости имеют и притом только одну общую точку.*

В самом деле: если обе прямые собственные, то они соответствуют двум различным обыкновенным прямым; если эти прямые пересекаются, то данные проективные прямые имеют различные несобственные точки и значит указанная выше обыкновенная точка пересечения является единственной точкой, общей для двух данных проективных прямых. Если же обыкновенные прямые, которым соответствуют данные проективные, параллельны, то данные проективные прямые по определению имеют общую им обеим несобственную точку, и эта точка является единственной точкой, общей для данных прямых. Наконец, если одна из данных проективных прямых несобственная, а другая собственная, то единственной их общей точкой является несобственная точка данной собственной прямой.

Мы видим, что на проективной плоскости нет параллельных прямых: *всякие две проективные прямые проективной плоскости — пересекаются.*

Однородные координаты

Метод координат на обыкновенной плоскости с успехом применяется при решении целого ряда вопросов эвклидовой геометрии. Координатный метод может быть применен и на проективной плоскости. Однако введение на проективной плоскости координат осложняется наличием на ней несобственных элементов.

Если точка M — собственная точка плоскости π, то в выбранной системе координат на плоскости π она имеет координаты x, y.

Рассмотрим три числа $x, y,$ 1 и возьмем класс $x_1 : x_2 : x_3$ всех троек чисел, пропорциональных тройке $x, y,$ 1:

$x_1 = \lambda x$, $x_2 = \lambda y$, $x_3 = \lambda$, где λ принимает все действительные значения, кроме нуля

Любая тройка чисел построенного класса $x_1 : x_2 : x_3$ называется однородными координатами точки M.

Если M — несобственная точка плоскости π, то через нее проходит пучок прямых, которые соответствуют параллельным между собой прямым плоскости π. Возьмем какой-нибудь вектор, коллинеарный этим прямым; пусть X, Y — координаты этого вектора. Рассмотрим тройку чисел X, Y, O и возьмем класс $x_1 : x_2 : x_3$ всех троек чисел, пропорциональных тройке X, Y, 0:

$$x_1 : x_2 : x_3 == X : Y : 0,$$

Любая тройка чисел построенного класса $x_1 : x_2 : x_3$ называется *однородными* координатами несобственной точки *M*.

Заметим, что если выбрать другой вектор, коллинеарный указанному пучку параллельных прямых, то он будет коллинеарен первому вектору, следовательно, его координаты будут пропорциональны координатам первого вектора, а потому класс $X : Y : 0$ совпадает с классом $X' : Y' : 0$.

Таким образом, мы ввели понятие координат как для собственных точек, так и для несобственных точек плоскости π; при этом если на обыкновенной плоскости каждой точке соответствует определенная упорядоченная пара чисел (ее координаты), то на проективной плоскости каждой точке ставится в соответствие даже не тройка чисел, а целый класс пропорциональных упорядоченных троек чисел.

Одним из основных положений аналитической геометрии на плоскости является утверждение: любая прямая на плоскости выражается уравнением первой степени и обратно. На проективной плоскости имеет место аналогичная теорема.

Теорема. *Любая проективная прямая на проективной плоскости выражается линейным однородным уравнением между однородными координатами точек этой прямой и обратно: всякое линейное однородное уравнение первой степени с тремя неизвестными определяет на проективной плоскости проективную прямую.*

Вторая модель проективной плоскости

Возьмем в пространстве точку *S,* не лежащую в обыкновенной плоскости π , которой соответствует проективная плоскость П. Поставим в соответствие каждой собственной точке *M* проективной плоскости П прямую *SM,* соединяющую точку S с этой точкой *M,* а каждой несобственной точке проективной плоскости П прямую связки, параллельную тем прямым плоскости π , которым соответствуют проективные прямые, проходящие через рассматриваемую несобственную точку.

Построенное соответствие между множеством всех точек проективной плоскости и множеством всех прямых связки обыкновенного трехмерного эвклидова пространства является взаимнооднозначным. Это соответствие обладает следующим свойством: если на проективной плоскости взять любую проективную прямую, то множеству всех точек этой прямой в связке S соответствует множество всех прямых некоторого пучка, т. е. множество всех прямых, проходящих через точку S и лежащих в некоторой плоскости.

В самом деле: если прямая собственная, то она соответствует некоторой обыкновенной, а множеству всех точек этой последней соответствует множество всех прямых, проходящих через точку S и пересекающих эту прямую. Все эти прямые лежат в плоскости, проходящей через точку S и обыкновенную прямую. Несобственной точке проективной прямой соответствует прямая связки S, также лежащая в этой плоскости,— это будет прямая, проходящая через точку S параллельно указанной выше обыкновенной прямой. Если данная проективная прямая несобственная, то множеству ее точек соответствует множество всех прямых пучка с центром в точке S, каждая из которых параллельна обыкновенной плоскости, которой соответствует данная проективная.

Итак: *мы установили взаимнооднозначное соответствие между множеством всех точек проективной плоскости и множеством всех прямых связки обыкновенного трехмерного эвклидова пространства такое, что каждой точке A (собственной или несобственной) проективной плоскости соответствует прямая связки с центром в точке S, а каждой проективной прямой a (собственной или несобственной) соответствует пучок прямых с центром в точке S или плоскость этого пучка.*

При этом если точка *A* лежит на прямой *a,* то плоскость а, соответствующая прямой *a,* проходит через прямую l связки, соответствующую точке *A*.

Указанные свойства дают повод также назвать проективной плоскостью саму связку прямых и плоскостей обыкновенного трехмерного эвклидова пространства. «Точками» этой проективной плоскости будут прямые связки, а «прямыми» — плоскости связки (или пучки прямых с центром в центре связки).

Отношения принадлежности «точек» и «прямых» означают теперь следующее: *«точка» A лежит на «прямой» a (или «прямая» a проходит через «точку» A), если прямая A связки лежит в плоскости a связки.*

Для определенной таким образом проективной плоскости имеют место сформулированные выше свойства точек и прямых:

1) *через любые две различные «точки» проективной плоскости проходит и притом только одна проективная «прямая».*

Это теперь означает, что через любые две различные прямые связки всегда проходит и притом только одна плоскость связки.

2) *Любые две различные проективные «прямые» имеют общую «точку» и притом только одну.*

Это означает, что любые две различные плоскости связки имеют общую прямую связки и притом только одну.

Проективные координаты

Покажем теперь, как можно ввести координаты «точек» для второй модели проективной плоскости.

Введем в пространстве систему координат $S\,x_1x_2x_3,$ принимая за начало координат центр S связки, а за оси координат три прямые $Sx_1,\ Sx_2,\ Sx_3$ связки, не лежащие в одной плоскости. Возьмем произвольную «точку», т. е. произвольную прямую l связки; выберем на этой прямой l произвольную точку $M,$ не совпадающую с центром S связки. Пусть $x_1,\ x_2,\ x3$ — координаты точки M в системе $S\,x_1x_2x_3.$ Тогда тройка чисел x_1,x_2,x_3 называется проективными координатами точки.

Замечания

Мы построили две модели проективной плоскости. Изучение проективной геометрии можно производить на любой из них. Первая модель имеет то преимущество, что она связывает понятие проективной плоскости с представлением об обыкновенной эвклидовой плоскости и даже более того: построения, относящиеся к проективной плоскости, могут быть выполняемы на обыкновенной плоскости (которой соответствует данная проективная). Достоинством второй модели проективной плоскости является возможность сведения изучения свойств проективной плоскости к изучению соответствующих свойств обыкновенного трехмерного эвклидова пространства.

Можно было бы построить и другие модели проективной плоскости. В частности, мы получим такую модель, если назовем проективной плоскостью совокупность классов пропорциональных троек чисел.

Каждый класс $\{x_1 : x_2 : x_3)$ упорядоченных пропорциональных троек чисел называется точкой проективной плоскости, а любая из троек чисел этого класса — проективными координатами точки. Прямою в этом случае называется совокупность точек, координаты которых удовлетворяют линейному однородному уравнению относительно трех переменных.

Такая модель проективной плоскости дает возможность при решении вопросов проективной геометрии широко использовать алгебраические методы исследования, допускает непосредственное обобщение на проективные пространства любого-числа измерений и позволяет ввести понятие проективных пространств исходя из произвольных полей, в частности что, особенно важно, построить проективную геометрию над полем комплексных чисел.

Естественно возникает вопрос: что же такое проективная плоскость, если для этого понятия мы дали уже три совершенно различных реализации? Исчерпывающий ответ на этот вопрос можно дать, рассматривая аксиомы проективной геометрии.

Сейчас отметим лишь, что построенные объекты мы потому называем проективной плоскостью, что, несмотря на различие вещей, являющихся точками и прямыми, эти вещи связаны одинаковыми отношениями друг к другу; так, в обоих случаях через любые две различные точки проходит и притом только одна прямая и любые две различные прямые имеют и притом только одну общую точку. Это лишь одно из свойств, общих рассмотренным объектам, названным проективной плоскостью.

Чтобы определить проективную плоскость, надо задать ее аксиоматически, т. е.

1) указать, каковы те основные отношения, которыми связаны элементы множества, называемого проективной плоскостью, и
2) перечислить те свойства (аксиомы), которым подчинены эти отношения.

При этом, следуя аксиоматическому построению проективной плоскости, мы еще требуем, чтобы система аксиом была полной, т. е. чтобы два множества, которые мы называем проективными плоскостями, были изоморфны. Это означает, что между этими множествами существует такое взаимнооднозначное соответствие, что если элементы одного множества связаны любым отношением, описываемым при помощи основных отношений, вытекающих из аксиом, то соответствующие им элементы второго множества связаны теми же отношениями, и наоборот.

Построенные выше разные модели мы потому назвали проективными плоскостями, что между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее одно из основных понятий — отношение принадлежности и две основные аксиомы, описывающие отношение принадлежности. Конечно, этими отношениями и аксиомами далеко еще не исчерпывается полный перечень всех отношений и аксиом, при выполнении которых оба множества будут изоморфны. В действительности построенные модели изоморфны и с точки зрения всей системы отношений и аксиом проективной геометрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕКТИВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение. *Проективным отображением проективной плоскости* П *на проективную плоскость* П$'$ *называется такое взаимнооднозначное отображение плоскости* П *на плоскость* П$'$, *при котором трем любым различным* *точкам плоскости* П, *лежащим на одной прямой, соответствуют три точки плоскости* П', *также лежащие на одной прямой.*

Проективное отображение проективной плоскости П на самое себя называется *проективным преобразованием* плоскости П.

Так же, как и в случае аффинных отображений, доказывается, что отображение, обратное проективному, есть проективное и что *множество всех проективных преобразований плоскости образует группу.*

Данное определение проективного отображения плоскости в точности такое же, как и определение аффинного отображения. Однако эти определения относятся к разным объектам: определение аффинного отображения дается для эвклидовой плоскости, определение проективного отображения дано для проективной плоскости. Это обстоятельство делает эти определения одинаковыми лишь по форме; по существу же и понятия и свойства проективных отображений отличны, конечно, от аффинных отображений.

Простейшим примером проективного отображения одной проективной плоскости на другую является перспективное отображение.

Возьмем в пространстве две различные плоскости и дополним каждую из них до проективных П и П', присоединяя несобственные элементы. Возьмем в пространстве точку S, не лежащую ни на одной из выбранных. Тогда, между множеством всех точек плоскости П и множеством всех прямых связки S можно установить взаимнооднозначное соответствие.

То же самое можно сделать по отношению к множеству всех точек плоскости П' и всех прямых связки S. Таким образом, множества всех точек плоскостей П и П' можно привести во взаимнооднозначное соответствие, поставив в соответствие точке M плоскости П ту точку M' плоскости П', которая соответствует той же прямой связки S, что и точка M.

Это взаимнооднозначное соответствие плоскостей П и П' мы будем называть *перспективным соответствием.*

Установленное перспективное соответствие двух проективных плоскостей П и П', соответствующих двум эвклидовым плоскостям, мы распространим и на тот случай, когда плоскости параллельны. В этом случае всякой собственной точке плоскости П будет соответствовать собственная же точка плоскости П' и наоборот, а всякой несобственной точке плоскости П, присоединенной к обыкновенной прямой a плоскости, будет соответствовать несобственная же точка плоскости П', присоединенная к обыкновенным прямым плоскости , параллельным прямой a, и обратно.

ДВЕ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Основные теоремы

Докажем теорему, которая имеет важное значение не только для проективной геометрии, но и практическое, например, для аэрофотосъемки.

1)Теорема I. *Каковы бы ни были четыре точки A, B, C, D проективной плоскости* П, *из которых никакие три не лежат на одной прямой, и четыре точки A', B', C, D' проективной плоскости* П', *из которых никакие три не лежат на одной прямой, существует и притом только одно проективное отображение плоскости* П *на плоскость* П', *при котором точки A, B, C, D переходят соответственно в точки A',B', C, D'.*

Теперь мы покажем, что изучение проективного отображения может быть сведено к изучению этого отображения в собственных точках проективной плоскости, а именно мы покажем, что всякое проективное отображение либо сводится к аффинному отображению, либо к последовательному применению движения и перспективного отображения.

Теорема П. *Пусть* П *и* П' — *проективные плоскости, полученные пополнением обыкновенных плоскостей п и п ' эвклидова пространства несобственными элементами. Тогда всякое проективное отображение* S *плоскости* П *на плоскость* П' *либо сводится к аффинному отображению плоскости п на плоскость п '*, *либо может быть осуществлено путем надлежащего перемещения плоскости п в пространстве и последующего перспективного отображения (из надлежащим образом выбранного центра перспективы S), перемещенной и пополненной несобственными элементами плоскости п на плоскость* П'.

Полный четырехсторонник и полный четырехвершинник

Полным четырехсторонником, называется совокупность четырех прямых проективной плоскости, из которых никакие три не проходят через одну точку. Эти прямые называются *сторонами* полного четырехсторонника, а шесть точек пересечения этих сторон, взятых попарно, называются *вершинами* этого четырехсторонника. Две вершины, не лежащие на одной стороне, называются *противоположными.* В полном четырехстороннике имеются три пары противоположных вершин.

Теорема. *Две противоположные стороны и две диагонали полного четырехвершинника, проходящие через одну его диагональную точку, образуют гармоническую четверку.*

ПРИМЕРЫ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

Гиперболическая гомология

Определение. Проективное преобразование, при котором имеется прямая *p,* состоящая из неподвижных точек, и неподвижная точка *P,* не лежащая на прямой *p,* называется *гиперболической гомологией.*

Прямая *p* называется *осью гомологии;* точка *P* — *центром гомологии.*

Из определения гиперболической гомологии непосредственно следует, что образ *A'* всякой точки *A* лежит на прямой *PA*. В самом деле: пусть *K* — точка пересечения прямой *AP с* осью гомологии *p.* Так как точки *P* и *K* остаются в преобразовании гиперболической гомологии неподвижными, то три точки *P, K* и *A,* лежащие на одной прямой, переходят в три точки *P, K* и *A',* также лежащие на одной прямой.

Теорема. *Существует и притом только одна гиперболическая гомология с данным центром P, с данной осью p и парой соответственных точек A и A' (таких, что прямая AA' проходит через точку P).*

Гиперболическую гомологию можно осуществить при помощи перспективы и поворота плоскости около прямой.

Всякая гиперболическая гомология плоскости П *с осью p и центром P может быть рассматриваема как результат перспективного отображения плоскости* П *на плоскость* П*, *проходящую через прямую p, и последующего отображения плоскости* П* *на плоскость* П, *осуществляемого поворотом плоскости* П* *вокруг прямой p, совмещающим плоскость* П* *с плоскостью* **П.**

Параболическая гомология

Рассмотрим два перспективных отображения: плоскости П на плоскость П* с центром S_1 и плоскости П* на плоскость П с центром S_2. Предположим, что прямая S_1S_2 пересекает прямую *p,* по которой пересекаются плоскости П и П*, в точке *P*. В результате этих двух перспективных отображений мы получим проективное преобразование плоскости П. В этом преобразовании неподвижными будут точки прямой *p* и только эти точки. При этом, однако, точка *P,* в которой прямая S_1S_2 пересекает прямую *p,* играет особую роль: через нее проходят все прямые *MM',* соединяющие соответствующие друг другу точки в преобразовании плоскости П.

Определение. *Проективное преобразование, при котором имеется прямая p, состоящая из неподвижных точек, и никаких других неподвижных точек нет, называется параболической гомологией, а прямая p — осью гомологии.*

Теорема 1. *Все прямые, соединяющие соответственные точки в параболической гомологии, проходят через одну и ту же точку, лежащую на оси гомологии.*

Точка *P,* лежащая на оси гомологии, через которую проходят все прямые, соединяющие соответственные точки в параболической гомологии, называется *центром параболической гомологии.*

Теорема 2. *Существует и притом только одна параболическая гомология с данной осью p, с данным центром P (лежащим на оси p) и данной парой соответственных точек A и A' (таких, что прямая A A' проходит через точку P).*

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Проективное пространство

Подобно тому как множество точек обыкновенной плоскости присоединением несобственных элементов превращается в проективную плоскость, точнее в ее модель, точно так же, исходя из трехмерного обыкновенного (эвклидова) пространства, можно построить модель трехмерного проективного пространства.

Проективная прямая проективного пространства получается, как и в случае плоскости, из обыкновенной прямой присоединением к множеству ее точек нового элемента, который мы по-прежнему будем называть несобственной, или бесконечноудаленной, или идеальной точкой проективной прямой.,

Условимся в следующем: если две прямые параллельны, то соответствующие им проективные прямые имеют одну и ту же несобственную точку. Если же две различные прямые не параллельны, то соответствующие им проективные прямые имеют различные несобственные точки.

Проективной плоскостью проективного пространства, соответствующей данной обыкновенной плоскости эвклидова пространства, назовем множество точек, получаемое присоединением к множеству точек обыкновенной плоскости всех тех несобственных точек, которые присоединяются к прямым, лежащим на этой плоскости. Несобственной или бесконечно-удаленной прямой проективной плоскости называется множество всех несобственных точек, присоединенных к множеству точек той обыкновенной плоскости, которой соответствует рассматриваемая проективная плоскость.

Наконец, множество всех несобственных точек назовем несобственной или бесконечноудаленной плоскостью.

Точки, проективные прямые и проективные плоскости, которые не являются несобственными, будем называть, соответственно, собственными проективными точками, собственными проективными прямыми и собственными проективными плоскостями.

Множество, состоящее из всех обыкновенных и несобственных точек, называется проективным пространством.

Условимся в следующей терминологии:

1)будем говорить, что точка (собственная или несобственная) лежит на проективной прямой или что проективная прямая проходит через рассматриваемую точку, если эта точка принадлежит множеству точек, составляющему эту проективную прямую;

2)будем говорить, что проективная прямая (собственная или несобственная) лежит на проективной плоскости (собственной или несобственной) или что проективная плоскость проходит через проективную прямую, если множество точек проективной прямой входит в множество точек рассматриваемой проективной плоскости;

3)будем говорить, что точка (собственная или несобственная) лежит на проективной плоскости (собственной или несобственной), если эта точка является элементом того множества, которое составляет рассматриваемую проективную плоскость;

4)вместо того чтобы говорить, что точка лежит на прямой (или прямая проходит через точку), точка лежит на плоскости (или плоскость проходит через точку), прямая лежитна плоскости (или плоскость проходит через прямую), Говорят: точка и прямая инцидентны, точка и плоскость инцидентны, прямая и Плоскость инцидентны.

Мы построили модель проективного пространства. Отметим некоторые свойства проективного пространства, исходя из этой модели *.

I. *Всяким двум различным точкам инцидентна прямая и притом только одна.*

II. *Всякие две различные плоскости инцидентны прямой и притом только одной.*

III. *Если точки A и B инцидентны плоскости* П, *то прямая AB ** инцидентна этой плоскости.*

IV. *Если плоскости инцидентны точке М, то прямая инцидентна этой точке.*

V. *Три точки, не инцидентные одной прямой, инцидентныи притом только одной плоскости.*

VI. Три плоскости, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной точке.

VII. *Всякие две различные прямые, инцидентные одной плоскости, инцидентны и притом только одной точке.*

VIII. *Всякие две различные прямые, инцидентные одной точке, инцидентны и притом только одной плоскости.*

IX. *Точка и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной плоскости.*

X. *Плоскость и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной точке.*

Мы видим, что в проективном пространстве, как и на проективной плоскости, нет параллельных прямых: две любые прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются . В проективном пространстве нет и параллельных плоскостей: всякие две плоскости проективного пространства пересекаются по прямой линии . Наконец, любая прямая, не лежащая в проективной плоскости, всегда пересекает последнюю Всем этим проективное пространство существенно отличается от эвклидова .

Принцип двойственности

Сопоставляя предложения: I—**II, III**—IV, V—**VI, VII—VIII,** IX—X, видим, что каждое из них получается из другого заменой в нем слова т о ч к а словом п л о с к о с т ь и наоборот: слово п р я м а я остается без изменения.

Два положения о точках, прямых и плоскостях, сформулированные только в терминах инцидентности, называются двойственными, если одно из них получается из другого заменой слова т о ч к а «а п л о с к о с т ь, слова п л о с к о с т ь на слово т о ч к а и с сохранением слова п р я м а я .

Таким образом, предложения I, **III,** V, **VII,** IX соответственно двойственны предложениям **II, IV, VI, VIII,** X.

Оказывается, что если верна некоторая теорема *A* о точках, прямых и плоскостях проективного пространства, сформулированная только в терминах инцидентностей между ними, то будет верна и двойственная теорема *B*.

Это предложение составляет содержание так называемого *принципа двойственности.* Более полно этот принцип может быть сформулирован и доказан лишь при аксиоматическом построении проективного пространства. Он вытекает из двойственности аксиом соединения, составляющих первую группу аксиом' проективной геометрии, а именно предложение, двойственное каждой аксиоме этой группы, есть либо аксиома той же группы, либо теорема, которая доказывается на основании аксиом этой группы. Поэтому вместе со всеми аксиомами первой группы верны и все двойственные этим аксиомам предложения. При этом если предложение *A* двойственно предложению *B,* то и доказательство предложения *A* двойственно доказательству предложения *B*.

Построенная нами модель проективного пространства подчиняется всем аксиомам проективной геометрии, а потому принцип двойственности верен и в построенной модели.

Мы можем пользоваться сейчас этим принципом как эвристическим методом при формулировке предложений, двойственных уже доказанным.

Для проективной плоскости имеет место так называемый *малый принцип двойственности:* если верна некоторая теорема *A* о точках и прямых проективной плоскости, сформулированная только в терминах инцидентностей между ними, то будет верна и теорема *B,* двойственная теореме *A,* т. е. теорема, которая получается из *A* заменой слова т о ч к а на слово прямая, а слова п р я м а я на слово т о ч к а. Например, утверждению: двум любым различным точкам инцидентна прямая и притом только одна, двойственно утверждение: двум любым различным прямым инцидентна точка и притом только одна.

Доказательство малого принципа двойственности так же, как и сформулированного выше большого принципа двойственности, получается лишь при а к с и о м а т и ч е с к о м построении проективного пространства.

Можно говорить не только о двойственных предложениях, но и о двойственных фигурах. Если какая-нибудь фигура *F* образована точками, прямыми и плоскостями, связанными определенными отношениями инцидентностей, то двойственная фигура *G* получится, если, сохраняя отношения инцидентностей, заменить точки плоскостями, плоскости точками, а прямые—прямыми.

Проективные преобразования пространства

Проективным преобразованием пространства называется такое преобразование проективного пространства, при котором трем любым различным точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три точки, также лежащие на одной прямой.

При проективном преобразовании пространства всякая плоскость отображается на плоскость, и это отображение является проективным.

Множество всех проективных преобразований пространства образует группу.

Каковы бы ни были 5 точек A, B, C, D, E проективного пространства, из которых никакие 4 не лежат в одной плоскости, и 5 точек A', B', C', D', E', из которых никакие 4 не лежат в одной плоскости, существует и притом только одно проективное преобразование, при котором точки A, B, C, D, E переходят соответственно в точки A', B', C, D', E' .

Инверсия – 6 часов

Степень точки относительно окружности. Определение инверсии. Круговые преобразования их свойства. Инверсия плоскости в координатах. Основная теорема о композиции круговых преобразований и подобия.

СТЕПЕНЬ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ

Степенью точки O относительно окружности С называется число

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB},$$

где *A и B* — точки пересечения окружности С с любой прямой, проходящей через точку *O* (и пересекающей окружность С).

Из этого определения следует, что степень точки *O* относительно окружности *C* положительная, если точка *O* лежит вне окружности С (так как тогда векторы *OA* и *OB* имеют одинаковое направление); степень точки *O* относительно окружности *C* отрицательна, если точка *O* лежит внутри окружности С (так как в этом случае векторы *OA* и *OB* имеют противоположное направление). Наконец, степень точки *O* относительно окружности *C* равна нулю, если точка *O* лежит на окружности *C*.

Заметим, что степень точки *O* относительно окружности *C* в том случае, когда точка О лежит вне окружности С, равна квадрату длины отрезка касательной, проведенной из точки О к окружности С (произведение секущей на внешнюю ее часть равно квадрату касательной).

Степень точки *O* относительно окружности *C* может быть определена и соотношением $\boldsymbol{a}=d^2 - R^2$, где *d* — расстояние от точки О до центра окружности С, а *R* — радиус этой окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕРСИИ

Фиксируем на плоскости точку *O* и фиксируем число *к* не равное 0). Поставим в соответствие каждой точке *M* плоскости (отличной от О) точку *M',* лежащую на прямой *OM* и такую, что $\overrightarrow{OM}\overrightarrow{OM'} = k$.

Такое преобразование называется *инверсией.* Точка *O* называется *полюсом,* или *центром,* инверсии, число *k* — *степенью* инверсии. Если *k* >0, инверсия называется положительной, если *k<0,* — отрицательной. Инверсию с полюсом *O* и степенью *k* будем обозначать так: *(O, к).*

Свойства инверсии

Теорема 1. *При инверсии всякие четыре точки, лежащие на окружности, не проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, также лежащие на окружности, не проходящей через полюс инверсии.*

Следствие . *При инверсии всякая окружность S, не проходящая через центр инверсии, отображается взаимнооднозначно на некоторую окружность S', также не проходящую через центр инверсии.*

Теорема 2. *При инверсии всякие четыре точки, лежащие на окружности, проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, лежащие на одной прямой, не проходящей через полюс инверсии.*

Следствие 1. *Всякая окружность S, проходящая через полюс инверсии, отображается взаимнооднозначно на прямую, не проходящую через полюс инверсии.*

Следствие 2. *При инверсии любая прямая, не проходящая через полюс инверсии, отображается взаимнооднозначно на некоторую окружность, проходящую через полюс инверсии.*

Теорема 3. *При инверсии любые четыре точки, лежащие на одной прямой, проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, лежащие на той же прямой.*

Теорема 4. *Угол между двумя пересекающимися окружностями, угол между окружностью и пересекающей ее прямой и угол между двумя пересекающимися прямыми сохраняется при преобразовании инверсии.*

Замечание. Можно показать, что при инверсии сохраняются углы между всякими двумя пересекающимися кривыми, имеющими касательные в каждой своей точке. Преобразования, при которых сохраняются углы между кривыми, называются *конформными.* Таким образом, *инверсия является конформным преобразованием.*

КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Рассмотренное выше преобразование инверсии не является взаимнооднозначным, так как полюсу *O* инверсии не соответствует при инверсии (O, *k)* ни одна точка плоскости.

Чтобы сделать это преобразование взаимнооднозначным, добавим к эвклидовои плоскости одну бесконечноудаленнуюточку.

Эвклидову плоскость, пополненную одной бесконечно-удаленной точкой, будем называть конформной плоскостью. Любую точку этой плоскости, отличную от бесконечноудаленной, будем называть *собственной.*

Условимся, что эта бесконечноудаленная точка лежит на любой прямой эвклидовой плоскости и не лежит ни на одной из окружностей эвклидовой плоскости. Две параллельные прямые имеют одну общую точку — бесконечноудаленную.

Две пересекающиеся прямые на конформной плоскости (как и две пересекающиеся окружности) имеют две общие точки — одну «на конечном расстоянии», другую — «бесконечноудаленную».

Две параллельные прямые имеют на конформной плоскости общую (бесконечноудаленную) точку; мы будем говорить тогда, что они касаются друг друга в этой точке.

Условимся при инверсии *(О, k)* точке *О* ставить в соот-ветствие бесконечноудаленную точку, а бесконечноудаленной точке — точку *О.* Теперь можно высказать следующие два положения:

1)*инверсия конформной плоскости есть взаимнооднозначное преобразование;*

2)*при инверсии сохраняется касание окружностей и прямых.*

Условимся прямую конформной плоскости называть окружностью «бесконечно большого радиуса».

Будем называть круговым преобразованием конформной плоскости всякое взаимнооднозначное преобразование этой плоскости, при котором любые четыре точки, лежащие на одной окружности, переходят в четыре точки, также лежащие на одной окружности (понимая под окружностью, в частности, и прямую — окружность бесконечно большого радиуса).

Теорема 1. (Основная теорема). *Всякое круговое преобразование К есть или подобие, или инверсия, или может быть представлено в виде произведения подобия на инверсию.*

Теорема 2. *Если круговое преобразование К не является подобием, то его можно представить в виде произведения ортогонального преобразования , имеющего неподвижную точку О, на положительную инверсию с центром в этой точке О. Это представление К единственно*

Следствие 1. *Всякое круговое преобразование К отображает любую окружность взаимнооднозначно также на окружность.*

Следствие 2. *Множество всех круговых преобразований плоскости образует группу*

Теорема 3. *Если при круговом преобразовании К три точки А, В, С остаются неподвижными, то К есть или тождественное преобразование, или инверсия относительно окружности, проходящей через эти три точки, (в частности, если точки А, В, С лежат на одной прямой, инверсия вырождается в симметрию относительно этой прямой).*

Теорема 4. *Существует и притом только два круговых преобразования, которые переводят три любые точки А, В, С конформной плоскости соответственно в три любые точки А', В', С той же конформной плоскости.*

2.2 Практические (семинарские) занятия, их содержание и объем в часах.

Практические занятия проводятся по темам лекционного курса.

№	Тема занятия	Часы
1.	Ортогональные преобразования и их свойства.	1
2.	Движения.	1
3.	Приложение движений к решению задач на вычисление.	2

4.	Задачи на построения.	2
5.	Композиция преобразований.	2
6.	Подобие.	2
7.	Приложение подобий к решению задач на вычисление.	2
8.	Задачи на построения.	2
9.	Аффинные преобразования.	2
10.	Параллельное проектирование.	2
11.	Приложение параллельного проектирования в задачах.	2
12.	Измерение отрезков при аффинных преобразованиях.	2
13.	Проективные отображения.	2
14.	Двойное отношение точек и прямых.	2
15.	Гомологии.	1
16.	Измерение отрезков при аффинных преобразованиях.	2
17.	Инверсия. Задача Апполония	1
		30

2.3 Самостоятельная работа студентов

№	Тема	Содержание самостоятельной работы	Часы
1.	Движения на плоскости	Расчетная работа	5
2.	Параллельное проектирование	Индивидуальная домашняя контрольная работа	8
3.	Гиперболический поворот. Эллиптический поворот.	Работа с литературой (конспект) Домашняя работа	5
4.	Инверсия в задачах на построение.	Индивидуальная домашняя контрольная работа	8
5.	Подготовка к зачету		22

2.4.Формы текущего контроля

2.4.1. Домашнее задание по каждой из тем практических занятий
2.4.2. Проверка выполнения домашних занятий.
2.4.3. Контрольные работы по пройденным темам.

2.5 Вопросы к зачету

1. Ортогональные преобразования и их свойства. Основные виды ортогональных преобразований плоскости.
2. Перенос. Симметрия относительно прямой. Симметрия относительно точки. Поворот.
3. Представление преобразований в координатах.

4. Композиция преобразований. Теорема Шаля
5. Группа преобразований плоскости, ее подгруппы.
6. Отображение подобия. Гомотетия. Представление подобного преобразования в виде произведения гомотетии на ортогональное преобразование.
7. Подобные преобразования в координатах.
8. Группа преобразований подобия. Подобные преобразования пространства.
9. Определение аффинных отображений и преобразований плоскости. Примеры аффинных преобразований. Косая симметрия. Сжатие. Косое сжатие. Гиперболический поворот. Эллиптический поворот. Сдвиг.
10. Параллельное проектирование.
11. Простое отношение при аффинном отображении. Аффинные преобразования в координатах.
12. Проективная плоскость, проективное пространство. Проективные координаты. Проективные отображения.
13. Двойное отношение точек и прямых и его инвариантность при проективном отображении. Примеры проективных преобразований.
14. Гомологии. Проективные преобразования в координатах. Проективные преобразования пространства.
15. Степень точки относительно окружности. Определение инверсии.
16. Круговые преобразования их свойства.
17. Инверсия плоскости в координатах.
18. Основная теорема о композиции круговых преобразований и подобия.

2.6 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на зачете

К зачету допускаются студенты, сдавшие индивидуальные задания. Зачет состоит из 2-х частей – письменной и устной. Письменная часть включает 2 задачи для решения. Выполнившие письменную часть зачета, допускаются к устной части зачета; после устного ответа на основные вопросы теории ставится "зачтено".

К зачету допускаются студенты, сдавшие расчетные работы. Зачет проводится в устной форме по вопросам программы. "Зачтено" ставится при знании основных вопросов.

3.Учебно-методические материалы по дисциплине.

3.1 Основная и дополнительная литература.

Основная:

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. Учеб.пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ.2002.-160с.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитичекая геометрия: Учеб.: Для вузов.- 5-е изд.-М.: Наука. Физматлит,1999.-224с.
3. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Учеб. пособие. – М.: ГУ ВШЭ, 1998.-184 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- М.: Физмат-лит, 2004.-304с.
5. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач/ А.А. Гусак.-Изд-е 2-е, стереотип.-Мн.: «ТетраСистемс», 2001.-288 с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие – 13-е изд., стереот.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.-240с.
7. Саранцев Г.И. Решаем задачи на геометрические преобразования. М.: АО «Столетие» 1997.- 192с., илл.
8. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.1. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 352 с.
9. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.2. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 320 с.
10. В.В. Просолов, В.М. Тихомиров Геометрия. М.: МЦНМО, 1997.-352 с.
11. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 32-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2005.- 336с.:ил.-(Учебники для вузов. Специальная литература).
12. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. Пособие / А.А.Бурдун, Е.А.Мурашко, М.М.Токачев, А.С.Феденко; Под ред. А.С.Феденко.-2-е изд.-Мн.:Універсітэцкае, 1999.-302 с.
13. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев. Геометрия: Учеб. Пособие.-М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.- 672 с.: ил.

<u>Дополнительная</u>

1. Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн Линейная алгебра и многомерная геометрия.3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.-464с.
2. П.С. Моденов, А.С. Пархоменко Геометрические преобразования Из-во Московского Университета, 1961.- 232с.
3. Сборник задач по геометрии./ Под редакцией В.Т. Базылева. М., Просвещение, 1980

3.2 Перечень наглядных и других пособий, методических указаний по проведению конкретных видов учебных занятий, а также методических материалов к используемым в учебном процессе техническим средствам.

1. Раздаточный материал по расчетно- графическим работам.
2. Материалы контрольных работ.